Д/З на 14 октября   Черных Дарья

№35

$L(y', y) = (y' - y)^2$

$f^*(x) = \arg\min_{e} E((Y-e)^2 | X=x) \xrightarrow{\text{д-ть}}$

$\Rightarrow f^*(x) = E(Y | X=x)$

Решение.

$E((Y-e)^2 | X=x) = E((Y - E(Y|x) + E(Y|x) - e)^2 | x) =$

$= E[(Y - E(Y|x))^2 | x] + E[(E(Y|x) - e)^2 | x] +$
$+ 2E[(Y - E(Y|x)) \cdot (E(Y|x) - e) | x]$

$2E[(Y - E(Y|x))(\underbrace{E(Y|x)}_{= const} - \underbrace{e}_{= const}) | x] =$

$= 2E[Y - E(Y|x) | x](E(Y|x) - e) =$

$= 2(E(Y|x) - E(E(Y|x)))(E(Y|x) - e) =$

$= 2(E(Y|x) - E(Y|x))(E(Y|x) - e) =$

$= 0$

И осталось только

$E[(Y - E(Y|x))^2 | x] + E[(E(Y|x) - e)^2 | x] \to \min_{e}$

т.к. $\min$ по c $\Rightarrow$ возьмём производную

$$\frac{\partial}{\partial c} E\left[(E(Y|x)-c)^2 | x\right] =$$

$$= -2E\left[E(Y|x)-c \,|x\right] =$$

$$= -2E\left[E(Y|x)|x\right] + 2c =$$

$$= -2E(Y|x) + 2c = 0$$

$$\Downarrow \quad c = E(Y|x)$$

чтд

№36

$L(y', y) = |y' - y|$, д-ть что

$f^*(x) = \text{median}(Y|x)$

Решение.

$$f^*(x) = \arg\min_c E(|Y-c| \,|\, X = x)$$

*Медиана = квантиль уровня $\frac{1}{2}$.

Возьмём производную по c.

$$\frac{\partial}{\partial c} E(|Y-c| \,|\, X=x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial c} \int_y |y-c|\, p(y|x)\, dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial c}\left(\int_{y_1}^{c} |y-c|\, p(y|x)\,dy + \int_{c}^{y_n} |y-c|\, p(y|x)\,dy \right)$$

$$= \int_{y} \frac{\partial}{\partial c} |y-c|\, p(y|x)\,dy + \int_{y} \frac{\partial}{\partial c} |y-c|\, p(y|x)\,dy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{c} p(y|x)\,dy + \int_{c}^{\infty} p(y|x)\,dy = 0$$

$$\int_{-\infty}^{c} p(y|x)\,dy = \int_{c}^{\infty} p(y|x)\,dy$$

$$F_{y|x}(c) = 1 - F_{y|x}(c)$$

функ
распред

$\Downarrow$ $F_{y|x}(c) = \frac{1}{2}$ => квантиль уровня $\frac{1}{2}$ медиана

$\Downarrow$ $c = F^{-1}_{y|x}\left(\frac{1}{2}\right) = median(Y|x)$

ч.т.д.

№3 7.

$L(y', y)$ – ?

$f^*(x) = mod(Y|x)$

Решение.

Мода - точка макс. плотности

$$f^*(x) = \arg\max_{y \in Y} p(y|x)$$

$$R(f) = E\,L(y, f(x)) = \int_Y \int_X L(y, f(x))\, p(x,y)\, dx\, dy$$

Подберем L; т.к. для регрессии уже известные смотрели, то для классификации.

$\exists\ L(y, f(x)) = [y \neq f(x)]$

$\Downarrow$

$$R(f) = \sum_{y=1}^{N} \int_X [y \neq f(x)]\, p(x,y)\, dx =$$

$$\int_X \sum_{y \neq f(x)} p(x,y)\, dx + \int_X p(x, f(x))\, dx = 1$$

$$= 1 - \int_X p(x, f(x))\, dx \to \min$$

$\Downarrow$

$$\int_X p(x, f(x))\, dx \to \max$$

$$f^*(x) = \arg\max_{c \in F} p(x, c) \Rightarrow L = [y \neq f(x)]$$

№17.

x_1	4	0	-1	3	4
x_2	2	-3	-2	1	2
x_3	3	2	2	1	-3

Найти главн. направления и дисперсии по глав. компонентам.

Решение.

1) Составим м. X

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Найдем центр $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{5}\cdot 10;\ \frac{1}{5}\cdot 0;\ \frac{1}{5}\cdot 5\right) = (2; 0; 1)$$

Центрируем данные

$$X - \bar{X} = X_c = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2) Найдем $C = X_c^T X_c$

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

где $\frac{1}{N-1} C = \frac{1}{4} C = \underbrace{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}}_{\text{выбороч. мат. коварияции}}$

3) Найдем соб число и соб векторы м. C:

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} 22-\lambda & 21 & -9 \\ 21 & 22-\lambda & -9 \\ -9 & -9 & 22-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 16$, $\lambda_3 = 49$

Соб. вектор

$C v_1 = \lambda_1 v_1$

$\Downarrow$

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Нормируем векторы:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{11}}{11}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{\sqrt{22}}{22}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$$

v_1, v_2, v_3 – главные компоненты

$$\frac{1}{N-1}\lambda_1 = \frac{1}{N-1}\sigma_1^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{N-1}\lambda_2 = \frac{1}{N-1}\sigma_2^2 = 4$$

$$\frac{1}{N-1}\lambda_3 = \frac{1}{N-1}\sigma_3^2 = \frac{49}{4}$$

– дисперсии по главным компонентам

№4.1.

$$\sum_{i=1}^{n} \| x^{(i)} - v_0 - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \langle x^{(i)} - x_0, v_j \rangle v_j}_{\text{проекция на } L_k} \|^2 \to \min$$

$$\Big(x_1^{(i)} - v_{01} - \sum_{j=1}^{k} \overbrace{|x^{(i)} - v_0|}^{=\text{const}} \overbrace{\cos\alpha_j}^{\text{-огран.}} v_{j1} \Big)^2 + \Big(x_2^{(i)} - v_{02} - \sum_{j=1}^{k} |x^{(i)} - v_0| \cos\alpha_j v_{j2} \Big)^2 + \ldots \to \min_{v_0}$$

$\Rightarrow$ чем ближе v_{0j} к $x_j^{(i)}$, тем меньше знач. суммы, а пк $j = \overline{1,k}$ $\Rightarrow$ $v_0 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i = \overline{x}$