2.13 (a, d, g, h)

a) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n=0 \\ T(n-1) + O(1), & n \geq 1 \end{cases}$

$T(n) \leq = T(n-1) + C \leq T(n-2) + 2C \leq T(n-n) + nC = O(n)$

d) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n \leq a,\ a>1 \\ aT(n-a) + O(1), & n>a \end{cases}$

$T(n) \leq aT(n-a) + C \leq a(aT(n-2a) + C) + C = a^2T(n-2a) + Ca + C$

$\cancel{\leq a(a^2T(n-3a) + C) + Ca + C = a^3T(n-3a) + C(2a+1)}$

$\leq a^2(aT(n-3a) + C) + Ca + C = a^3T(n-3a) + a^2C + aC + C \leq$

$\leq a^{\frac{n}{a}} T\left(n - \frac{n\cancel{a}}{\cancel{a}}\right) + C\sum_{i=0}^{\frac{n}{a}-1} a^i \leq a^{\frac{n}{a}}C + \frac{a^{\frac{n}{a}} - 1}{a-1}C$

Оскільки рахуємо оцінку, основу степеня можна замінити на 2

$T(n) = O(2^{\frac{n}{a}})$

g) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1 \\ \cancel{T(n-a)} + aT([n/a]) + O(1), & n \geq 2,\ a \geq 2 \end{cases}$

$n = a^m \Rightarrow m = \log_a n$

$T(n) \leq aT([\frac{n}{a}]) + C = aT(a^{m-1}) + C \leq a(aT(a^{m-2}) + C) + C =$

$= a^2T(a^{m-2}) + aC + C \leq a^2(aT(a^{m-3}) + C) + aC + C =$

$= a^3T(a^{m-3}) + a^2C + aC + C \leq a^mT(a^{m-m}) + C\sum_{i=0}^{m-1} a^i =$

$= a^m C + C \frac{a^m - 1}{a-1} = nC + \frac{n-1}{a-1} \cdot C = O(n)$

h) $T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 1 \\ aT([\frac{n}{a}]) + O(n), & n \geq 2,\ a \geq 2 \end{cases}$

$n = a^m \Rightarrow m = \log_a n$

$T(n) \leq aT(a^{m-1}) + a^m \cdot C \leq a(aT(a^{m-2}) + a^{m-1}C) + a^m \cdot C =$

$= a^2T(a^{m-2}) + a^mC + a^mC \leq a^mT(a^{m-m}) + ma^m \cdot C =$

$= n \cdot C + n\log_a n \cdot C \leq O(n \log n)$