

2D дрейф космических лучей в градиенте магнитного поля

1 Модель системы

Рассматривается двумерная область, моделирующая тонкий срез межпланетной плазмы в плоскости (x, y) . В этой области движутся заряженные частицы космических лучей, которые трактуются как примесь к фоновому плазменному газу: адроны (протоны и ядра), электроны, мюоны и нейтроны. Поскольку концентрация примеси мала, обратным влиянием космических лучей на плазму и магнитное поле пренебрегают.

Координата x интерпретируется как направление градиента модуля магнитного поля, а координата y — как направление вдоль силовых линий. Фоновое магнитное поле принято крупномасштабным и медленно меняющимся по x :

$$\mathbf{B}(x) = B(x) \mathbf{e}_y, \quad (1)$$

где $B(x)$ возрастает или убывает слева направо. В такой конфигурации существует градиент ∇B , вызывающий дрейф частиц, и одновременно изменяется эффективность их рассеяния на нерегулярностях поля.

Частицы между актами рассеяния движутся вдоль локального направления магнитного поля почти с постоянной по модулю скоростью $v \approx \text{const}$ (для релятивистских частиц $v \approx c$). Случайные магнитные неоднородности заставляют частицы много раз рассеиваться, изменяя шаг за шагом их направление и приводя к эффективной диффузии.

Границные условия в модели берутся периодическими по обеим координатам: частица, покинувшая область справа, появляется слева с теми же скоростями, и наоборот; аналогично по оси y . Это соответствует *торoidalной* геометрии и позволяет изучать перенос при заданных профилях $B(x)$ и коэффициентах диффузии, не вводя искусственных твёрдых стенок.

Во всех дальнейших рассуждениях под плотностью $n(x, y, t)$ понимается локальная плотность примеси космических лучей (число частиц

в единице объёма плазмы), усреднённая по статистическому ансамблю большого числа реализаций стохастических траекторий.

2 Длина пробегов частиц

Космические лучи многократно рассеиваются на нерегулярностях магнитного поля. Эти столкновения можно характеризовать *средней длиной свободного пробега* λ , то есть средним расстоянием, которое частица проходит до существенного изменения направления движения. Для регулярного магнитного поля с наложенной волновой турбулентностью длина пробега зависит от параметров спектра волн и магнитной индукции.

В кинетической теории переноса космических лучей вводят связь между длиной пробега и коэффициентом диффузии. В простейшем изотропном приближении коэффициент диффузии вдоль некоторого направления можно записать как

$$D = \frac{1}{3} \lambda v, \quad (2)$$

где v — характерная скорость частицы. Аналогично задают диффузию вдоль и поперёк магнитного поля:

$$D_{\parallel} = \frac{1}{3} \lambda_{\parallel} v, \quad D_{\perp} = \frac{1}{3} \lambda_{\perp} v, \quad (3)$$

где λ_{\parallel} и λ_{\perp} — продольная и поперечная длины свободного пробега относительно \mathbf{B} .

В нашей двумерной постановке считаем, что основная неоднородность связана с изменением модуля $B(x)$, и потому средняя длина пробега зависит от x :

$$\lambda_{\perp} = \lambda_{\perp}(x), \quad D_{\perp}(x) = \frac{1}{3} \lambda_{\perp}(x) v. \quad (4)$$

Физически это означает, что в области более сильного поля (больший B) рассеяние интенсивнее, длина пробега меньше и диффузия медленнее; в области более слабого поля λ_{\perp} и D_{\perp} возрастают, позволяя частицам проходить большие расстояния между актами рассеяния.

На рисунке 1 схематически показаны типичные траектории частиц: слева область с более слабым полем и удлинёнными пробегами, справа — область с более сильным полем и короткими, более «ломанными» траекториями.

Рис. 1: Иллюстрация различий в пробегах частиц в неоднородном магнитном поле: длинные траектории в области слабого поля слева и более короткие траектории в области сильного поля справа.

3 Перенос космических лучей

На макроскопическом уровне перенос плотности примеси $n(x, y, t)$ описывается уравнением сохранения (неразрывности):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{J}(x, y, t)$ — вектор потока космических лучей.

В приближении диффузионно–конвективной модели поток представляют в виде

$$\mathbf{J} = n \mathbf{u} - \hat{D} \nabla n. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{u}(x, y)$ — детерминированная скорость переноса примеси (сумма скорости солнечного ветра и возможных дрейфов в неоднородном поле), а \hat{D} — тензор диффузии. Для двумерной задачи с выделенным направлением магнитного поля удобно выбирать систему координат так, чтобы ось y была параллельна \mathbf{B} , тогда

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{\perp}(x) & 0 \\ 0 & D_{\parallel}(x) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Подстановка (6) в уравнение (5) даёт

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u_x n) - \frac{\partial}{\partial y}(u_y n) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{\perp}(x)\frac{\partial n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{\parallel}(x)\frac{\partial n}{\partial y}\right). \quad (8)$$

Это уравнение задаёт эволюцию плотности космических лучей как сплошной среды в неоднородном магнитном поле. Первый и второй члены правой части описывают дрейфовую (конвективную) часть переноса, третий и четвёртый — диффузионную.

4 Диффузионно–конвективное уравнение и его выполнение в модели

Часто удобно рассматривать одномерную проекцию вдоль направления градиента $B(x)$, усредняя по y . Тогда из (8) получается одномерное уравнение

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u_x(x)n(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{\perp}(x)\frac{\partial n(x, t)}{\partial x}\right), \quad (9)$$

которое по форме совпадает с уравнением переноса скалярной примеси с коэффициентом диффузии $D_{\perp}(x)$ и дрейфовой скоростью $u_x(x)$.

В численной модели область по x разбивают на тонкие слои шириной Δx . Обозначим через $N(x)$ число частиц в слое и через

$$n(x) = \frac{N(x)}{L_y \Delta x} \quad (10)$$

локальную концентрацию (здесь L_y — высота области по y). Тогда профиль $n(x)$ можно измерить, усредняя по времени после того, как система достигла стационарного режима. Проверка уравнения (9) в модели сводится к тому, что в стационарном состоянии ($\partial n / \partial t = 0$) выполняется

$$\frac{d}{dx} (u_x(x) n(x)) = \frac{d}{dx} \left(D_{\perp}(x) \frac{dn(x)}{dx} \right), \quad (11)$$

то есть конвективный и диффузионный потоки взаимно уравновешиваются друг друга. При заданном профиле $D_{\perp}(x)$ (зависимость от $B(x)$ через (4)) и фиксированном $u_x(x)$ численная визуализация позволяет наблюдать, как устанавливается соответствующий стационарный профиль $n(x)$.

5 Поток частиц

В модели удобно регистрировать поток частиц через выбранную вертикальную границу области, например через прямую $x = x_0$. Пусть частица массой m пересекает эту границу со скоростью v_x , где знак v_x показывает направление движения:

$v_x > 0$ — частица пересекает границу слева направо, $v_x < 0$ — справа налево.

Вклад частицы в поток числа частиц через границу определим как

$$\Delta N = \begin{cases} +1, & v_x > 0, \\ -1, & v_x < 0. \end{cases}$$

Суммарный поток числа частиц за интервал Δt равен

$$J_N = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i \in \Delta t} \Delta N_i. \quad (12)$$

Аналогично можно определять поток энергии, умножив вклад каждой частицы на её кинетическую энергию (или на полную энергию, если учитывать релятивистскую связь).

При отсутствии градиентов и дрейфов среднее значение J_N стремится к нулю (динамическое равновесие), тогда как при наличии неоднородности $D_\perp(x)$ или детерминированного $u_x(x)$ устанавливается стационарный неравновесный поток космических лучей $J_N \neq 0$. В численной модели это проявляется как постоянный по времени средний поток через границу $x = x_0$ после завершения переходного процесса.

6 Диффузия и неоднородная диффузия

Для примесных частиц в одномерном приближении вдоль оси x концентрация удовлетворяет уравнению Фика с переменным коэффициентом диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_\perp(x) \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Как следует из связи (4), коэффициент $D_\perp(x)$ определяется длиной пробега и, следовательно, зависит от модуля магнитного поля $B(x)$. В простейшей модели эту зависимость можно аппроксимировать степенным законом

$$D_\perp(x) \propto B(x)^{-\alpha}, \quad (14)$$

где $\alpha > 0$ — параметр, характеризующий, насколько сильно ослабление поля увеличивает диффузию. Тогда в области меньшего B диффузия идёт быстрее, а в области большего B медленнее.

Если первоначально облако космических лучей локализовано около некоторого $x = x_c$, оно сначала расплывается преимущественно в сторону той области, где $D_\perp(x)$ больше. Однако при попадании в область меньшей диффузии частицы задерживаются там дольше, что приводит к стационарному профилю концентрации, смешённому в сторону области с меньшим коэффициентом диффузии. Это полностью аналогично ситуации с диффузией примеси в градиенте температуры, где $D \propto T(x)$.

7 Стохастическое описание: СДУ, Ито и Стартонович

Микроскопически можно описывать движение отдельной частицы при помощи стохастического дифференциального уравнения. Для одномерного движения вдоль оси x в присутствии дрейфа и неоднородной диффузии запишем

$$dx_t = a(x_t) dt + b(x_t) \circ dW_t, \quad (15)$$

где $a(x)$ — детерминированный дрейф, $b(x)$ — амплитуда шумового воздействия, зависящая от координаты, W_t — винеровский процесс, а знак \circ указывает на стратоновичевскую трактовку стохастического интеграла. Связь с коэффициентом диффузии задают соотношением

$$D_{\perp}(x) = \frac{1}{2} b^2(x). \quad (16)$$

Соответствующее уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности $w(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(K_1(x) w) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_2(x) w), \quad (17)$$

где

$$K_2(x) = b^2(x), \quad K_1(x) = a(x) + \frac{1}{2} b(x) b'(x) \quad (18)$$

в стратоновичевской интерпретации. Здесь штрих означает производную по x . Подстановка (16) приводит к локальному виду

$$K_2(x) = 2D_{\perp}(x), \quad K_1(x) = a(x) + \frac{dD_{\perp}(x)}{dx}. \quad (19)$$

В терминологии переноса космических лучей первый момент $K_1(x)$ соответствует коэффициенту дрейфа, а второй $K_2(x)$ — удвоенному коэффициенту диффузии. Важно, что при пространственно неоднородной диффузии ($D'_{\perp}(x) \neq 0$) возникает *шум-индукционный дрейф* $\propto dD_{\perp}/dx$.

Если же трактовать уравнение (15) в смысле Ито, записывая

$$dx_t = \tilde{a}(x_t) dt + b(x_t) dW_t, \quad (20)$$

то в уравнении Фоккера–Планка для $w(x, t)$ будет

$$K_2(x) = b^2(x), \quad K_1(x) = \tilde{a}(x), \quad (21)$$

то есть дополнительный дрейфовый член $\frac{1}{2}bb'$ отсутствует. Таким образом, одна и та же физическая система при разных интерпретациях стохастического интеграла приводит к *разным дрейфовым членам* в уравнении Фоккера–Планка.

В численной модели это различие можно исследовать непосредственно: интегрируя СДУ (15) по Стратоновичу и эквивалентное (20) по Ито, но с одной и той же амплитудой шума $b(x)$, получают разные стационарные профили $n(x)$ и разные траектории частиц. В случае Стратоновича дополнительный дрейф $\propto dD_{\perp}/dx$ естественным образом учитывается, тогда как в Ито его приходится вводить явно в $\tilde{a}(x)$, если требуется восстановить физически правильный перенос.

8 Энтропия и неравновесные стационарные состояния

Для нормированной по объёму плотности примеси $p(x, t)$, определённой как

$$p(x, t) = \frac{n(x, t)}{\int n(x, t) dx}, \quad (22)$$

энтропия в одномерном приближении определяется выражением

$$S(t) = - \int p(x, t) \ln p(x, t) dx. \quad (23)$$

При однородных коэффициентах диффузии и отсутствии дрейфов система со временем приходит к однородному распределению $p(x) = \text{const}$, при котором энтропия максимальна и

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad J_N(x) = 0. \quad (24)$$

В присутствии градиента магнитного поля, задающего неоднородный коэффициент диффузии $D_\perp(x)$, а также при наличии детерминированного дрейфа $u_x(x)$, система становится *открытой*. В этом случае достигается стационарное неравновесное состояние, характеризующееся

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad J_N(x) \neq 0, \quad (25)$$

то есть профиль $n(x)$ и поток J_N постоянны во времени, но отличны от равновесного однородного состояния. Глобальный максимум энтропии недостижим, поскольку внешние условия (градиент $B(x)$, структура солнечного ветра) поддерживают пространственные неоднородности и направленный поток частиц.

Расширение первоначально локализованного облака примеси сопровождается ростом энтропии $S(t)$ и выравниванием распределения. Однако стационарный распределённый профиль остаётся неравновесным из-за неоднородной диффузии и наличия дрейфов. Сравнение результатов интегрирования по Стратоновичу и по Ито позволяет наглядно продемонстрировать, как выбор стохастической интерпретации влияет на форму стационарного распределения и, соответственно, на величину и распределение энтропии в системе.