

# 2D дрейф космических лучей в градиенте магнитного поля

## 1 Модель системы

Рассматривается двумерная область, моделирующая тонкий срез межпланетной плазмы в плоскости  $(x, y)$ . В этой области движутся заряженные частицы космических лучей, которые трактуются как *примесь* к фоновому плазменному газу: адроны (протоны и ядра), электроны, мюоны и нейтроны. Поскольку концентрация примеси мала, обратным влиянием космических лучей на плазму и магнитное поле пренебрегают.

Координата  $x$  интерпретируется как направление градиента модуля магнитного поля, а координата  $y$  — как направление вдоль силовых линий. Фоновое магнитное поле принято крупномасштабным и медленно меняющимся по  $x$ :

$$\mathbf{B}(x) = B(x) \mathbf{e}_y, \quad (1)$$

где  $B(x)$  возрастает или убывает слева направо. В такой конфигурации существует градиент  $\nabla B$ , вызывающий дрейф частиц, и одновременно изменяется эффективность их рассеяния на нерегулярностях поля.

Частицы между актами рассеяния движутся вдоль локального направления магнитного поля почти с постоянной по модулю скоростью  $v \approx \text{const}$  (для релятивистских частиц  $v \approx c$ ). Случайные магнитные неоднородности заставляют частицы много раз рассеиваться, изменяя шаг за шагом их направление и приводя к эффективной диффузии.

Граничные условия в модели берутся периодическими по обеим координатам: частица, покинувшая область справа, появляется слева с теми же скоростями, и наоборот; аналогично по оси  $y$ . Это соответствует *тороидальной* геометрии и позволяет изучать перенос при заданных профилях  $B(x)$  и коэффициентов диффузии, не вводя искусственных твёрдых стенок.

Во всех дальнейших рассуждениях под плотностью  $n(x, y, t)$  понимается локальная плотность примеси космических лучей (число частиц

в единице объёма плазмы), усреднённая по статистическому ансамблю большого числа реализаций стохастических траекторий.

## 2 Длина пробегов частиц

Космические лучи многократно рассеиваются на нерегулярностях магнитного поля. Эти столкновения можно характеризовать *средней длиной свободного пробега*  $\lambda$ , то есть средним расстоянием, которое частица проходит до существенного изменения направления движения. Для регулярного магнитного поля с наложенной волновой турбулентностью длина пробега зависит от параметров спектра волн и магнитной индукции.

В кинетической теории переноса космических лучей вводят связь между длиной пробега и коэффициентом диффузии. В простейшем изотропном приближении коэффициент диффузии вдоль некоторого направления можно записать как

$$D = \frac{1}{3} \lambda v, \quad (2)$$

где  $v$  — характерная скорость частицы. Аналогично задают диффузию вдоль и поперёк магнитного поля:

$$D_{\parallel} = \frac{1}{3} \lambda_{\parallel} v, \quad D_{\perp} = \frac{1}{3} \lambda_{\perp} v, \quad (3)$$

где  $\lambda_{\parallel}$  и  $\lambda_{\perp}$  — продольная и поперечная длины свободного пробега относительно  $\mathbf{B}$ .

В нашей двумерной постановке считаем, что основная неоднородность связана с изменением модуля  $B(x)$ , и потому средняя длина пробега зависит от  $x$ :

$$\lambda_{\perp} = \lambda_{\perp}(x), \quad D_{\perp}(x) = \frac{1}{3} \lambda_{\perp}(x) v. \quad (4)$$

Физически это означает, что в области более сильного поля (большой  $B$ ) рассеяние интенсивнее, длина пробега меньше и диффузия медленнее; в области более слабого поля  $\lambda_{\perp}$  и  $D_{\perp}$  возрастают, позволяя частицам проходить большие расстояния между актами рассеяния.

На рисунке 1 схематически показаны типичные траектории частиц: слева область с более слабым полем и удлинёнными пробегами, справа — область с более сильным полем и короткими, более «ломаными» траекториями.

*Рис. 1: Иллюстрация различий в пробегах частиц в неоднородном магнитном поле: длинные траектории в области слабого поля слева и более короткие траектории в области сильного поля справа.*

### 3 Перенос космических лучей

На макроскопическом уровне перенос плотности примеси  $n(x, y, t)$  описывается уравнением сохранения (неразрывности):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{J}(x, y, t)$  — вектор потока космических лучей.

В приближении диффузионно–конвективной модели поток представляют в виде

$$\mathbf{J} = n \mathbf{u} - \hat{D} \nabla n. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{u}(x, y)$  — детерминированная скорость переноса примеси (сумма скорости солнечного ветра и возможных дрейфов в неоднородном поле), а  $\hat{D}$  — тензор диффузии. Для двумерной задачи с выделенным направлением магнитного поля удобно выбирать систему координат так, чтобы ось  $y$  была параллельна  $\mathbf{B}$ , тогда

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{\perp}(x) & 0 \\ 0 & D_{\parallel}(x) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Подстановка (6) в уравнение (5) даёт

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u_x n) - \frac{\partial}{\partial y}(u_y n) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{\perp}(x) \frac{\partial n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{\parallel}(x) \frac{\partial n}{\partial y}\right). \quad (8)$$

Это уравнение задаёт эволюцию плотности космических лучей как сплошной среды в неоднородном магнитном поле. Первый и второй члены правой части описывают дрейфовую (конвективную) часть переноса, третий и четвёртый — диффузионную.

### 4 Диффузионно–конвективное уравнение и его выполнение в модели

Часто удобно рассматривать одномерную проекцию вдоль направления градиента  $B(x)$ , усредняя по  $y$ . Тогда из (8) получается одномерное уравнение

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u_x(x) n(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{\perp}(x) \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}\right), \quad (9)$$

которое по форме совпадает с уравнением переноса скалярной примеси с коэффициентом диффузии  $D_{\perp}(x)$  и дрейфовой скоростью  $u_x(x)$ .

В численной модели область по  $x$  разбивают на тонкие слои шириной  $\Delta x$ . Обозначим через  $N(x)$  число частиц в слое и через

$$n(x) = \frac{N(x)}{L_y \Delta x} \quad (10)$$

локальную концентрацию (здесь  $L_y$  — высота области по  $y$ ). Тогда профиль  $n(x)$  можно измерить, усредняя по времени после того, как система достигла стационарного режима. Проверка уравнения (9) в модели сводится к тому, что в стационарном состоянии ( $\partial n / \partial t = 0$ ) выполняется

$$\frac{d}{dx} (u_x(x) n(x)) = \frac{d}{dx} \left( D_{\perp}(x) \frac{dn(x)}{dx} \right), \quad (11)$$

то есть конвективный и диффузионный потоки взаимно уравновешивают друг друга. При заданном профиле  $D_{\perp}(x)$  (зависимость от  $B(x)$  через (4)) и фиксированном  $u_x(x)$  численная визуализация позволяет наблюдать, как устанавливается соответствующий стационарный профиль  $n(x)$ .

## 5 Поток частиц

В модели удобно регистрировать поток частиц через выбранную вертикальную границу области, например через прямую  $x = x_0$ . Пусть частица массой  $m$  пересекает эту границу со скоростью  $v_x$ , где знак  $v_x$  показывает направление движения:

$v_x > 0$  — частица пересекает границу слева направо,  $v_x < 0$  — справа налево.

Вклад частицы в поток числа частиц через границу определим как

$$\Delta N = \begin{cases} +1, & v_x > 0, \\ -1, & v_x < 0. \end{cases}$$

Суммарный поток числа частиц за интервал  $\Delta t$  равен

$$J_N = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i \in \Delta t} \Delta N_i. \quad (12)$$

Аналогично можно определять поток энергии, умножив вклад каждой частицы на её кинетическую энергию (или на полную энергию, если учитывать релятивистскую связь).

При отсутствии градиентов и дрейфов среднее значение  $J_N$  стремится к нулю (динамическое равновесие), тогда как при наличии неоднородности  $D_\perp(x)$  или детерминированного  $u_x(x)$  устанавливается стационарный неравновесный поток космических лучей  $J_N \neq 0$ . В численной модели это проявляется как постоянный по времени средний поток через границу  $x = x_0$  после завершения переходного процесса.

## 6 Диффузия и неоднородная диффузия

Для примесных частиц в одномерном приближении вдоль оси  $x$  концентрация удовлетворяет уравнению Фика с переменным коэффициентом диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_\perp(x) \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Как следует из связи (4), коэффициент  $D_\perp(x)$  определяется длиной пробега и, следовательно, зависит от модуля магнитного поля  $B(x)$ . В простейшей модели эту зависимость можно аппроксимировать степенным законом

$$D_\perp(x) \propto B(x)^{-\alpha}, \quad (14)$$

где  $\alpha > 0$  — параметр, характеризующий, насколько сильно ослабление поля увеличивает диффузию. Тогда в области меньшего  $B$  диффузия идёт быстрее, а в области большего  $B$  медленнее.

Если первоначально облако космических лучей локализовано около некоторого  $x = x_c$ , оно сначала расплывается преимущественно в сторону той области, где  $D_\perp(x)$  больше. Однако при попадании в область меньшей диффузии частицы задерживаются там дольше, что приводит к стационарному профилю концентрации, смещённому в сторону области с меньшим коэффициентом диффузии. Это полностью аналогично ситуации с диффузией примеси в градиенте температуры, где  $D \propto T(x)$ .

## 7 Стохастическое описание: СДУ, Ито и Стратонович

Микроскопически можно описывать движение отдельной частицы при помощи стохастического дифференциального уравнения. Для одномерного движения вдоль оси  $x$  в присутствии дрейфа и неоднородной диффузии запишем

$$dx_t = a(x_t) dt + b(x_t) \circ dW_t, \quad (15)$$

где  $a(x)$  — детерминированный дрейф,  $b(x)$  — амплитуда шумового воздействия, зависящая от координаты,  $W_t$  — винеровский процесс, а знак  $\circ$  указывает на стратоновичевскую трактовку стохастического интеграла. Связь с коэффициентом диффузии задают соотношением

$$D_{\perp}(x) = \frac{1}{2} b^2(x). \quad (16)$$

Соответствующее уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности  $w(x, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(K_1(x) w) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_2(x) w), \quad (17)$$

где

$$K_2(x) = b^2(x), \quad K_1(x) = a(x) + \frac{1}{2} b(x) b'(x) \quad (18)$$

в стратоновичевской интерпретации. Здесь штрих означает производную по  $x$ . Подстановка (16) приводит к локальному виду

$$K_2(x) = 2D_{\perp}(x), \quad K_1(x) = a(x) + \frac{dD_{\perp}(x)}{dx}. \quad (19)$$

В терминологии переноса космических лучей первый момент  $K_1(x)$  соответствует коэффициенту дрейфа, а второй  $K_2(x)$  — удвоенному коэффициенту диффузии. Важно, что при пространственно неоднородной диффузии ( $D'_{\perp}(x) \neq 0$ ) возникает *шум-индуцированный дрейф*  $\propto dD_{\perp}/dx$ .

Если же трактовать уравнение (15) в смысле Ито, записывая

$$dx_t = \tilde{a}(x_t) dt + b(x_t) dW_t, \quad (20)$$

то в уравнении Фоккера–Планка для  $w(x, t)$  будет

$$K_2(x) = b^2(x), \quad K_1(x) = \tilde{a}(x), \quad (21)$$

то есть дополнительный дрейфовый член  $\frac{1}{2}bb'$  отсутствует. Таким образом, одна и та же физическая система при разных интерпретациях стохастического интеграла приводит к *разным дрейфовым членам* в уравнении Фоккера–Планка.

В численной модели это различие можно исследовать непосредственно: интегрируя СДУ (15) по Стратоновичу и эквивалентное (20) по Ито, но с одной и той же амплитудой шума  $b(x)$ , получают разные стационарные профили  $n(x)$  и разные траектории частиц. В случае Стратоновича дополнительный дрейф  $\propto dD_{\perp}/dx$  естественным образом учитывается, тогда как в Ито его приходится вводить явно в  $\tilde{a}(x)$ , если требуется восстановить физически правильный перенос.

## 8 Энтропия и неравновесные стационарные состояния

Для нормированной по объёму плотности примеси  $p(x, t)$ , определённой как

$$p(x, t) = \frac{n(x, t)}{\int n(x, t) dx}, \quad (22)$$

энтропия в одномерном приближении определяется выражением

$$S(t) = - \int p(x, t) \ln p(x, t) dx. \quad (23)$$

При однородных коэффициентах диффузии и отсутствии дрейфов система со временем приходит к однородному распределению  $p(x) = \text{const}$ , при котором энтропия максимальна и

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad J_N(x) = 0. \quad (24)$$

В присутствии градиента магнитного поля, задающего неоднородный коэффициент диффузии  $D_{\perp}(x)$ , а также при наличии детерминированного дрейфа  $u_x(x)$ , система становится *открытой*. В этом случае достигается стационарное неравновесное состояние, характеризующееся

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad J_N(x) \neq 0, \quad (25)$$

то есть профиль  $n(x)$  и поток  $J_N$  постоянны во времени, но отличны от равновесного однородного состояния. Глобальный максимум энтропии недостижим, поскольку внешние условия (градиент  $B(x)$ , структура солнечного ветра) поддерживают пространственные неоднородности и направленный поток частиц.

Расширение первоначально локализованного облака примеси сопровождается ростом энтропии  $S(t)$  и выравниванием распределения. Однако стационарный распределённый профиль остаётся неравновесным из-за неоднородной диффузии и наличия дрейфов. Сравнение результатов интегрирования по Стратоновичу и по Ито позволяет наглядно продемонстрировать, как выбор стохастической интерпретации влияет на форму стационарного распределения и, соответственно, на величину и распределение энтропии в системе.