Упражнение 1. Известно, что $f(n), g(n) > 0$, используя определение, докажите следующее свойство $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

Решение. Разобьем доказательство на две части.

1. Заметим, что $\max(f(n), g(n))$ можно оценить сферху, как $f(n) + g(n)$, т.к. $f(n), g(n) > 0$, следовательно $\max(f(n), g(n)) = O(f(n) + g(n))$.

2. В свою очередь $f(n)+g(n)$ можно оценить сферху, как $2\cdot\max(f(n), g(n))$, т.к. $f(n), g(n) > 0$, следовательно $f(n) + g(n) = O(f(n) + g(n))$.

Из этого по определению вытекает то, что и нужно доказать.

Упражнение 2. Покажите, что $\ln n! = \Theta(n \ln n)$.

Решение. Наиболее популярный вид записи формулы Стирлинга выглядит следующим образом

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n),$$

из чего вытекает уже нужная оценка $\ln n! = \Theta(n \ln n)$. Упражнение расчитано на то, чтобы вы покапались в теории и узнали про этот факт, если вам еще не прочитали его в курсе математического анализа.

Упражнение 3. Пусть $f(n) = [\ln n]!$. Существует ли полином $p(n)$, что $f(n) = O(p(n))$?

Решение. Исходя из формулы стирлинга справедлива следующая оценка $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$. В свою очередь $[\ln n] > \ln \frac{n}{e}$. Тогда

$$[\ln n]! > \left(\frac{\ln \frac{n}{e}}{e}\right)^{\ln \frac{n}{e}}.$$

Рассмотрим следующий предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e} \cdot n^k}{\left(\ln \frac{n}{e}\right)^{\ln \frac{n}{e}}} = \lim_{n\to\infty} e^p, \text{ где } p = (k+1)\cdot n - 1 - \ln\big(\ln(\frac{n}{e})\big)(\ln n - 1)$$

Заметим, что

$$p > (k+1)\cdot \ln n - 1 - \ln\big(\ln(\frac{n}{e})\big)(\ln n - \frac{1}{k+1}) =$$
$$(k+1)\big(\ln n - \frac{1}{k+1}\big)\Big(1 - \ln\big(\ln(\frac{n}{e})\big)\Big).$$

Очевидно, что $p \to -\infty$ при $n \to \infty$. А значит такого многочлена не существует, так как предел стремится к 0 при любом k.

Упражнение 4. Верно ли для всех произвольных $f(n), g(n) > 0$, что, если $f(n) = O(g(n))$, то и $\ln(f(n)) = O(\ln(g(n)))$.

Решение. Утверждение неверно, очевидно, что $e^{-n^2} = O(e^{-n})$, однако, $n^2 \neq O(n)$.

Упражнение 5. Докажите, что $(\ln n)^k = O(n^\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, а $k \in \mathbb{N}^+$.

Решение. Рассмотрим следующий предел $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^\varepsilon}$. Для его вычисление воспользуемя правилом Лопиталя. Применим его один раз

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}(\ln n)^{k-1}}{n^{\varepsilon-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{k-1}}{n^\varepsilon}.$$

Мы уменьшили степень лограрифма, но при это знаменатель не изменился. Таки оразом, применив правило k раз, получим следующий предел $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\varepsilon}$. А из этого уже следует необходимый нам факт.