

In-place merge sort

merge-sort = $O(n \log n)$

merge = $O(n)$

Оценим первую итерацию алгоритма: $\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$

Вторая итерация: $\frac{n}{4} \log \frac{n}{4} + \frac{3}{4}n$

Третья: $\frac{n}{8} \log \frac{n}{8} + \frac{7}{8}n$

Тогда для i -ой итерации формула будет:

$$\frac{n}{2^i} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{(2^i-1)n}{2^i}$$

Максимум погружений: $\log_2 n$

Тогда общая работа за весь алгоритм:

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{n}{2^i}$$

Оценим сверху слагаемые:

$$\begin{aligned} \frac{(2^i-1)n}{2^i} < n &\Rightarrow \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i} < n \log n \\ \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i} \log\left(\frac{n}{2^i}\right) &< \log n \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i} < n \log n \end{aligned}$$

Получаем, что вся сумма меньше чем $2n \log n$, значит сложность такой сортировки $O(n \log n)$.