Упражнения

26 января 2016 г.

Определение 1. $f(n) = O(g(n))$, если $\exists C > 0$, n_0: $\forall n > n_0$ $|f(n)| \leq C \cdot |g(n)|$.

Определение 2. $f(n) = o(g(n))$, если $\forall C > 0$ $\exists n_0 : \forall n > n_0$ $|f(n)| < C \cdot |g(n)|$.

Упражнение 1. Используя определения, докажите следующие свойства:

1. $O(C \cdot f(n)) = O(f(n))$, $C \in \mathbb{R}^+$
2. $o(f(n)) + o(f(n)) = O(f(n))$
3. $o(f(n)) \cdot O(f(n)) = o(f(n))$

Решение. Для доказательства достаточно раскрыть определение.

Упражнение 2. Покажите, что, если $f(n) = o(g(n))$, то $f(n) = O(g(n))$. Верно ли это в обратную сторону?

Решение. Ответ следует из определений. Очевидно, что если $\forall C > 0$ верно, что $|f(n)| < C \cdot |g(n)|$,то автоматически выполняется условие, что $f(n) = O(g(n))$. В обратную сторону это, конечно, не верно. Заметим, что $f(n) = O(f(n))$, однако $f(n)$ не может быть бесконечна мала относительно себя же, поэтому $f(n) \neq o(f(n))$.

Упражнение 3. Для данных пар функций выясните их связь в терминах O-, o-, ω-, Ω-, Θ-обозначений.

1. $f(n) = n^{\frac{1}{2}}, \quad g(n) = n^{\frac{2}{3}}$
2. $f(n) = 100n + \ln n, \quad g(n) = n + (\ln n)^2$
3. $f(n) = \ln(n)^{\ln n}, \quad g(n) = \frac{n}{\ln(n)}$

Решение.

1. Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{6}} = 0,$$

а это значит, что $f(n) = o(g(n))$.

2. Очевидно, что $f(n)$ и $g(n)$ ограничены снизу $\Omega(n)$. Рассмотрим следующий предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^k}{n}, \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Применив правило Лопиталя k раз, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^k}{n} = \lim_{n\to\infty} k \cdot \frac{(\ln n)^{k-1}}{n} = \dots = \lim_{n\to\infty} \frac{k!}{n} = 0.$$

Из этого следует, что $(\ln n)^k = o(n)$, где $k \in \mathbb{N}^+$, а значит $f(n)$ и $g(n)$ ограничены сверху $O(n)$. Из чего делаем вывод, что обе функции ограничены $\Theta(n)$.

3. Опять же рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\ln n}}{(\ln n)^{\ln n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Сделаем преобразование и получим,

$$\lim_{n\to\infty} \exp\Big(\ln n - \ln\left((\ln n)^{\ln n}\right)\Big) = \lim_{n\to\infty} \exp\Big(\ln n \cdot \left(1 - \ln\ln n\right)\Big) = 0,$$

так как выражение в степени стремится к $-\infty$. А это значит, что $g(n) = o(f(n))$.

Упражнение 4. Приведите примеры функций $f(n)$ и $g(n)$, таких что

1. $f(n) = O(f(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$
2. $f(n) = O(g(n))$, $f(n) \ne \Omega(g(n))$
3. $f(n) = O(g(n))$, $f(n) \ne o(g(n))$

Решение. Это упражнение проверяет ваше понимание определений, возможны следующие ответы:

1. $f(n) = 100n + \ln n$ и $g(n) = n$.
2. $f(n) = n$ и $g(n) = n^2$.
3. $f(n) = 2n$ и $g(n) = n + 3$.

Упражнение 5. Существуют ли такие функции $f(n)$ и $g(n)$, что $f = o(g(n))$ и $f = \omega(g(n))$? Приведите пример или докажите, что таких функций нет.

Решение. Очевидно, что таких функций нет. Иначем можно получить следующее неравество, если посдавить в определения для o и ω $C = 1$ для

$$f(n) < g(n) < f(n).$$

Упражнение 6. Приведите пример функций $f(n)$ и $g(n)$, таких что $f(n) = \Theta(g(n))$ и $2^{f(n)} = o(2^{g(n)})$ или докажите, что таких функций не существует.

Решение. $f(n) = n^2$ и $g(n) = n^2 + n$.