

Aufgabenblatt 2

Einführung in die Bildverarbeitung

Christian Wilms und Simone Frintrop
SoSe 2020

Ausgabe: 8. Mai 2020 - **Abgabe bis:** 15. Mai 2020, 10:00

abgegeben am 18. Mai 2020 von:

Abdulssatar Khateb (6976879), Merle Hoffmann (7031673), Felix Swimmer (7162123)

Aufgabe 3 — Abtasttheorem

1. Ist das Abtasttheorem im Sinne der zeitlichen Abtastung der Propellerdrehung durch die Kamera erfüllt? Rechnet es nach!

Für die Anwendung des Abtasttheorems werden Frequenzen des Signals f_{max} , hier als Anzahl der Drehungen des Propellers je Zeiteinheit, benötigt sowie die Frequenz der Abtastung f_{abtast} , hier die Anzahl der aufgenommenen Bilder pro Zeiteinheit. Nun können wir das Abtasttheorem anwenden, das besagt, dass ein bandbegrenzttes Signal vollständig rekonstruiert werden kann, wenn es mit der Frequenz abgetastet wird, die mehr als doppelt so hoch ist, wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz. Da es in unserem Signal nur eine Frequenz gibt, ist das Signal bandbegrenzt und die höchste und einzige Frequenz ist

$$f_{max} = 10000 \frac{1}{\text{min}} = \frac{50}{3} \frac{1}{\text{s}} = 16.\bar{6} \frac{1}{\text{s}} = 16.\bar{6}\text{Hz}. \quad (1)$$

Die Aufnahme rate der Kamera und somit die Frequenz für das Abtasten beträgt

$$f_{abtast} = 30 \frac{1}{\text{s}} = 30\text{Hz}. \quad (2)$$

Somit lässt sich das Abtasttheorem anwenden:

$$f_{abtast} \stackrel{?}{>} 2f_{max} \quad (3)$$

$$30\text{Hz} \stackrel{?}{>} 2 * \frac{50}{3}\text{Hz} \quad (4)$$

$$30\text{Hz} \stackrel{?}{>} \frac{100}{3}\text{Hz} \quad (5)$$

$$30\text{Hz} \stackrel{?}{>} 33.\bar{3}\text{Hz} \quad (6)$$

Da die Aussage in Ungleichung (6) nicht stimmt, ist das Abtasttheorem nicht erfüllt. Der Propeller dreht sich zu schnell, bzw. die Bildaufnahme der Kamera ist zu langsam.

2. Was wird schätzungsweise auf dem Video erkennbar sein und was nicht?

Es wird auf der Aufnahme zu Aliasing-Effekten kommen. Dies kann sich in etwa so äußern, dass sich der Propeller scheinbar nur sehr langsam oder unregelmäßig dreht bzw. sogar in die falsche Richtung (wagon-wheel effect), da nun Scheinfrequenzen rekonstruiert werden.

3. Ändert sich etwas, wenn eure Kamera statt 30 Bilder nun 60 Bilder pro Sekunde aufnehmen kann?

Durch die Änderung der Aufnahmrates der Kamera auf 60 Bilder pro Sekunde ändert sich die Abtastfrequenz zu

$$f_{abtast} = 30 \frac{1}{s}. \quad (7)$$

Wird nun das Abtasttheorem angewendet ergibt sich:

$$f_{abtast} \stackrel{?}{>} 2f_{max} \quad (8)$$

$$60\text{Hz} \stackrel{?}{>} 2 * \frac{50}{3}\text{Hz} \quad (9)$$

$$60\text{Hz} \stackrel{?}{>} \frac{100}{3}\text{Hz} \quad (10)$$

$$60\text{Hz} \stackrel{?}{>} 33.\bar{3}\text{Hz} \quad (11)$$

Da die Ungleichung (11) erfüllt ist, ist das Abtasttheorem erfüllt und die Propellerdrehung kann wieder korrekt rekonstruiert werden. Im Video ist nun also die korrekte Propellerdrehung zu sehen, wie der Mensch sie auch im Flugzeug wahrnimmt.

Aufgabe 4 — Gaußsches Rauschen

Beweist nun, dass der Erwartungswert E des Ergebnisses $\bar{g}(x, y)$ wiederum dem Bild $f(x, y)$ entspricht:

$$E(\bar{g}(x, y)) = f(x, y)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E(\bar{g}(x, y)) &= E\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g_m(x, y)\right) = E\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(x, y) + \eta_m(x, y)\right) \\ &= E\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(x, y)\right) + E\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \eta_m(x, y)\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E(f(x, y)) + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \underbrace{E(\eta_m(x, y))}_{0, \text{ da } \mu \text{ von } \eta_m = 0} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$