Aufgabenblatt 4

Einführung in die Bildverarbeitung

Christian Wilms und Simone Frintrop
SoSe 2020

Ausgabe: 22. Mai 2020 **- Abgabe bis:** 29. Mai 2020, 10:00

abgegeben am 12. Juli 2020 von:

Abdulssatar Khateb (6976879), Merle Hoffmann (7031673), Felix Swimmer (7162123)

Aufgabe 1 — Bildverbesserung

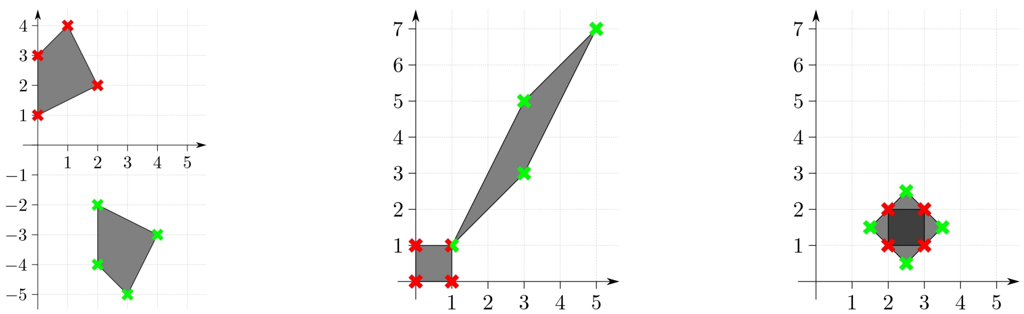
Siehe *blatt04_1.py*

1. Wie viele Poller gibt es am Rande einer kleinen Grüninsel in der unteren linken Bildecke von Abbildung 1a?

   Es gibt 8 Poller.

Aufgabe 2 — Transformationsmatrizen

1. Gebt zu den drei Szenarien die jeweilige Transformationsmatrix an. In den drei Szenarien sollen die Transformationen jeweils auf die Eckpunkte der Vierecke mit den roten Kreuzen angewendet werden, sodass jeweils das veränderte Vierecke (grüne Kreuze) entsteht.
   Waagerecht: x-Achse, Senkrecht: y-Achse



(a) (b) (c)

   (a) Zunächst wurde eine Spiegelung an der x-Achse durchgeführt und dann eine Translation um [2,-1] angewendet:

$$\text{Transformation} = \text{Translation} * \text{Spiegelung}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(x, y)	(x', y')
(1,0)	(-2,2)
(2,2)	(-3,4)
(3,0)	(-4,2)
(4,1)	(-5,3)

(b) Zunächst wurde eine Skalierung um den Faktor 2, danach eine Scherung an der x-Achse mit dem Faktor 1 und danach nochmal eine Scherung entlang der y-Achse durchgeführt. Zuletzt wird eine Translation um $[1, 1]^T$ vorgenommen. :

$$\text{Transformation} = \text{Translation} * \text{Scherung} * \text{Scherung} * \text{Skalierung}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(x, y)	(x', y')
(0,0)	(1,1)
(0,1)	(3,3)
(1,0)	(5,3)
(1,1)	(7,5)

(c) Zunächst wurde eine Translation um $[-2.5, -1.5]^T$ durchgeführt, um das Viereck auf dem Ursprung zu zentrieren. Nun wird das Viereck zunächst uniform um den Faktor $\sqrt{2}$ skaliert und anschließend um 45° gedreht. Abschließend erfolgt eine Translation um $[2.5, 1.5]^T$, um das Viereck wieder in die Ausgangsprosition zu schieben.

$$\text{Transformation} = \text{Translation} * \text{Rotation} * \text{Skalierung} * \text{Translation}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1.5 \\ 1 & 1 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1.5 \\ 1 & 1 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(x, y)	(x', y')
(1,2)	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
(1,3)	$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$
(2,2)	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
(2,3)	$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

2. Interpretiert die drei folgenden Transformationsmatrizen und beschreibt kurz welche einzelnen Transformationen (inklusive Parameter wie Rotation um 45°) in welcher Reihenfolge hier beschrieben werden.
   Tipp: Es gibt tlw. mehrere Lösungen.
   a) Bei der Transformation handelt es sich um eine Rotationsmatrix mit der Rotation um $11,25°$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Transformation} & = & \text{Rotation} \\ \begin{bmatrix} 0,981 & -0,195 & 0 \\ 0,195 & 0,981 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{16}\pi) & -\sin(\frac{1}{16}\pi) & 0 \\ \sin(\frac{1}{16}\pi) & \cos(\frac{1}{16}\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

   b) Die Transformation besteht aus zwei einzelnen Transformationen. Zuerst wird eine Translation um $[3,2]^T$ angewendet, dann folgt eine Rotation um $-45°$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Transformation} & = & \text{Rotation} & * & \text{Translation} \\ \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 & 0,707 \\ -0,707 & 0,707 & 3,536 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

   c) Die Transformation besteht aus drei einzelnen Transformationen. Zuerst wird eine nichtuniforme Skalierung um die Faktoren $s_x = 1$ und $s_y = -4$ durchgeführt. Anschließend folgt eine Scherung entlang der y-Achse um -8, bevor abschließend eine Translation um $[3,-2]^T$ durchgeführt wird.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Transformation} & = & \text{Translation} & * & \text{Scherung} & * & \text{Skalierung} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -8 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & * & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 3 — Inverse Abbildung

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l} & & A & & & E & & \\ \text{(I)} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \text{| (I) - (III)} \\ \text{(II)} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \text{| (II) - (III)} \\ \text{(III)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \text{| (I) - (III)} \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $B = \begin{bmatrix} -2\cos(\pi) & 2\sin(\pi) & 2 \\ \sin(\pi) & -\cos(\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|l}
 & & B & & & E & & \\
\text{(I)} & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \mid \text{(I)/2} \\
\text{(II)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
\text{(III)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \mid \text{(I)-(III)} \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \text{-1} & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|l}
 & & C & & & E & & \\
\text{(I)} & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
\text{(II)} & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & \mid \text{(II) - 2*(I)} \\
\text{(III)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 3 & 0 & \text{-2} & 1 & 0 & \mid \text{(II)/3} \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \mid \text{(I) - 2*(III)} \\
 & 0 & 1 & 0 & \text{-}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{-2} & \\
 & 0 & 1 & 0 & \text{-}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 — Bildskalierung und Interpolation

Siehe *blatt04_4.py*

3. Werden durch das Skalieren von Bildern mit einem Faktor $s > 1$ Informationen gewonnen?

   Nein, durch das Vergrößern werden keine neuen Informationen gewonnen. Es gehen aber auch keine Informationen verloren.

4. Was passiert, wenn ihr das Bild zunächst um die Hälfte verkleinert ($s = 0.5$) und anschließend wieder auf die vorherige Größe vergrößert ($s = 2$)? Ist das Ergebnis identisch zum Ursprungsbild?

   Nein, denn das Verkleinern zieht einen Informationsverlust nach sich und das Vergrößern generiert keine neuen Informationen.

Zusatzaufgabe 5 — Bilineare Interpolation

Siehe *blatt04_5.py*

2. Welche Unterschiede erkennt ihr in den Ergebnissen?

   Durch die bilineare Interpolation entstehen weiche und durch die Nearest Neighbor Interpolation scharfe Kanten.