2016-2017学年秋学期
《复变函数与积分变换》

林 智

浙江大学数学科学学院

基本信息

061B0020 常微分方程 2-2
预修课程： 微积分 (I， II)

教师： 林 智 (linzhi80@zju.edu.cn)
课时： 周一6∼7节/ 周四1∼2节， 西一-406
收发作业： 周四1∼2节，其余时间不收作业。
答疑： 第二、五∼八周周六 8:30-12:00, 西一-212
评分标准(暂定): 作业(50%) + 期中随堂测验(20%) + 考试(30%)

教材： **《复变函数与拉普拉斯变换》(第三版)，金忆丹, 浙大出版社**
主要参考书： **《复变函数》，钟玉泉, 高等教育出版社**

课程内容

复变函数是高等院校理工科学生必须具备的数学知识，它是高等微积分的重要后继课程之一，它的理论与方法广泛应用于自然科学与工程科学的许多领域，如信电工程、信息工程、控制工程、理论物理与流体力学、热力学等各领域，是专业理论研究和实际应用方面不可缺少的数学工具。

教学目标和课程要求

本课程是按全国大学工科的上程数学教学大纲要求而开设的。要求学生掌握基本的复变函数理论、概念与方法。课程内容力求精炼、清晰、明了：例题与习题的配备及每—部分的思考题力求使学生加深理解概念与方法，得到一定的抽象思维、逻辑思维及运算上的训练。

教学安排（暂定）

序号	内　　容	作业收发
1	预备知识：	发：作业一
2	解析函数	发：作业二 收：作业一
3	复变函数的积分	发：作业三 收：作业二
4	级数	发：作业四 收：作业三
5	留数	发：作业五 收：作业四
6	保角映射	发：作业六 收：作业五
7	拉普拉斯变换	发：作业七 收：作业六
8	习题课	收：作业七

第一章 预备知识

引言

- 十六世纪中叶，意大利人Cardano(1501-1576)在研究一元三次方程时首先产生了负数开平方的思想:

$$40 = (5+\sqrt{-15}) \times (5-\sqrt{-15})$$

- 当时不受理解和重视——“虚数”；
- 直到十七与十八世纪，随着微积分的产生与发展，情况才有好转;
- 欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

§1.1 复数及其表示法

一对有序实数(x, y)构成一个复数

记为: $z = x + \mathrm{i}\, y.$

其中x和y分别称作z的实部和虚部,

记为: $x = \mathrm{Re}(z)$ 和 $y = \mathrm{Im}(z)$

复数 $\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y$ 称为z的共轭

两个复数相等 $\Longleftrightarrow$ 他们的实部和虚部都相等

特别地: $z = x + i\, y = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$

§1.1 复数及其表示法（续）

复数的表示法：有两种

一、代数形式: $z = x + \mathrm{i}y$

1. 点表示： $z = x + \mathrm{i}y \Longleftrightarrow$ 平面XOY上的点$z(x, y)$
2. 向量表示: $z = x + \mathrm{i}y \Longleftrightarrow$ 平面XOY上的矢量$\vec{z}$

这里，平面XOY被称为复平面，水平的x轴称为实轴，垂直的y轴称为虚轴。

§1.1 复数及其表示法（续）

二、指数形式（三角形式）:从直角坐标到极坐标

由坐标变换：　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$z = x + \mathrm{i}y \Longrightarrow z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$ （三角表示式）

又根据欧拉公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

$$z = x + \mathrm{i}y \Longrightarrow z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$ （指数表示式）

其中：

复数z的模: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{z}\,|$;

复数z的幅角: $\theta = \mathrm{Arg}\, z$

关于幅角函数Arg(z) ★★★★★

由复数的指数表示式可发现：

一个不为0的复数有无穷多个幅角？！这是一个集合！

其中落在区间$(-\pi,\pi]$的角θ_0称为Arg z的主值

记为：$\theta_0 = \arg z$

从而：$\mathrm{Arg}\, z = \theta_0 + 2k\pi = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \cdots$

arg z $(|z| \neq 0)$的计算方法

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & , \ z\text{在第一、四象限} \\ \pi + \arctan(y/x) & , \ z\text{在第二象限} \\ -\pi + \arctan(y/x) & , \ z\text{在第三象限} \end{cases}$$

复数两种表示形式之间的互相转换

例1：将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

$$1)\ z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}; \quad 2)\ z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}.$$

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1,\quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

- $$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= [\mathrm{Re}(z_1) \pm \mathrm{Re}(z_2)] + \mathrm{i}[\mathrm{Im}(z_1) \pm \mathrm{Im}(z_2)] \\ &= x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2); \end{aligned}$$
- $z_1\ z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$——??
- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

§1.2 复数的运算

复数的四则运算也满足：

- 交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1z_2=z_2z_1$;
- 结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$;
  $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;
- 分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

复数加减法的几何意义：

向量加减法平行四边形法则

复数乘法的几何意义：从指数表示说起

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1. 乘积的模等于模的乘积：$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$;
2. 乘积的幅角等于幅角之和：

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

——定理1

等式$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$的含义:

等式的两边都是无限集合，两边的集合相等，即每给定等式左边的一个数，就有等式右边的一个数与之对应，反之亦然.

复数乘法的几何意义

z_1z_2相当于将z_2的模扩大$|z_1|$倍，并旋转一个角度$\operatorname{Arg} z_1$。

例2：设$z_1=-1$, $z_2=\mathrm{i}$. 求：z_1z_2, $\operatorname{Arg} z_1z_2$以及$\arg z_1z_2$。

复数除法的几何意义: 与乘法对偶

按照乘积的定义, 当$z_1 \neq 0$时, 有

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| |z_1| \\ \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} + \operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} \\ \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

定理2: 两个复数的商的模等于它们的模的商, 两个复数的商的辐角等于被除数与除数的幅角之差。

2. 乘方与开方运算

1) 乘方

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

De Moivre 公式: $r = 1$时的乘方

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

2) 开方

若复数w满足 $w^n = z$:

则称w为z的n次方根，记为$w = \sqrt[n]{z}$。

De Moivre 公式: $r = 1$时的乘方

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

写成指数形式，两边同时取n次方

$$|w|^n e^{\mathrm{i}n\operatorname{Arg} w} = |z| e^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |w| & = & \sqrt[n]{|z|} \\ \operatorname{Arg} w & = & \dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

2) 开方（续）

从而

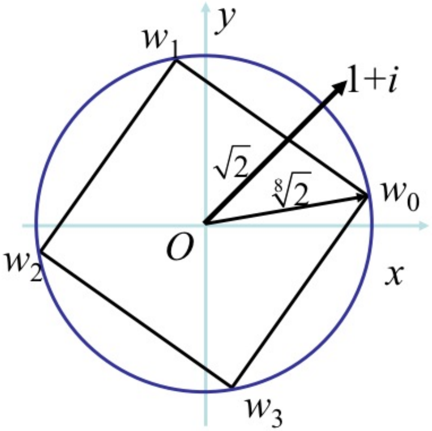
$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\arg z+2k\pi}{n}} \\
&= r^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right), \\
& \quad k=0,1,\cdots,n-1.
\end{aligned}
$$

几何解释

$z^{1/n}$的n个值就是以原点为中心，$r^{1/n}$为半径的圆 的内接正n边形的n个顶点。

2) 开方（续）

例3：求$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$。



思考

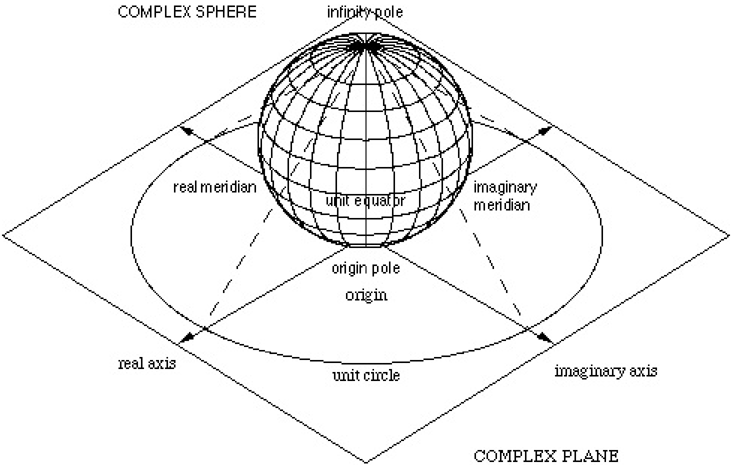
pp. 17 思考题一

1.(4), 2, 4最后一项

作业一-A （09/29 收）

pp. 18习题一： 1.(3); 2.(2); 4; 5.(1)(2); 7; 8.

§1.3 复球面与无穷远点

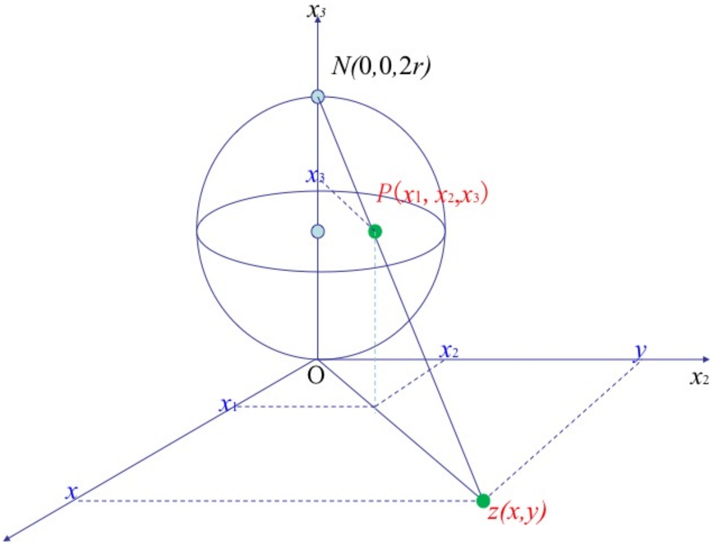

COMPLEX SPHERE
infinity pole
real meridian
unit equator
imaginary
meridian
origin pole
origin
real axis
unit circle
imaginary axis
COMPLEX PLANE

球极平面投影 (Stereographic Projection)

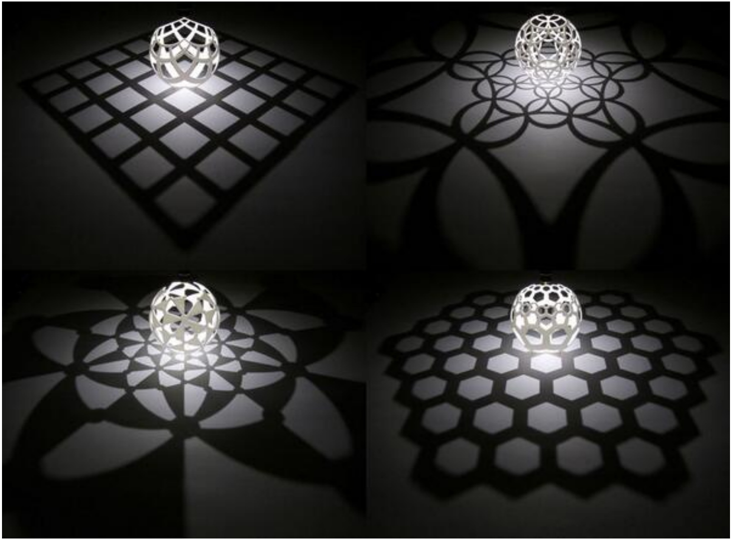
除了平面坐标表示外，复数还可以用球面上的点来表示

作一球与复平面切于原点。则对复平面内任一点Z，用直线将Z与球北极N相连，与球面相交于P点，则球面上除N点外所有点和复平面上的所有点一一对应。

球极平面投影 (Stereographic Projection)



球极平面投影 (Stereographic Projection)



球极平面投影 (Stereographic Projection)

思考

设球直径为$2r = 1$,

1. 复平面上的单位圆在球面上的投影曲线是？？
2. 复平面上单位圆以外的点球面投影区域为？？
3. 能将球北极也和复平面上的点对应起来吗?
   可以，将无穷远点加入复平面：$\mathbb{C} \Longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$。从而得到复球面。
4. 如果要求复球面为单位球, 能把复平面上的单位圆映为复球面的赤道吗?

扩充复数域和扩充复平面

引入一个“新”的数：∞

$\Longleftrightarrow$ 引进一个“理想点”：无穷远点∞

约定：

$$\frac{a}{0} = \infty \, (a \neq 0), \quad \frac{a}{\infty} = 0 \, (a \neq \infty), \quad \frac{\infty}{a} = \infty \, (a \neq \infty)$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \, (a \neq 0),$$

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty \, (a \neq \infty)$$

§1.4 复平面上的点集

1. 平面点集的几个概念

(1) 邻域

平面上以z_0为中心, δ(任意的正数)为半径的圆: $|z-z_0|<\delta$内部的点的集合称为z_0的邻域,而称由不等式$0<|z-z_0|<\delta$所确定的点集为z_0的去心邻域。

无穷远点的邻域

包括无穷远点自身在内且满足$|z|>M>0$ 的点的集合——即圆 $|z|=M$ 的外部且包含无穷远点本身。

不包括无穷远点本身、仅满足 $|z|>M$ 的所有点称为无穷远点的去心邻域, 也记作$M<|z|<\infty$。

1. 平面点集的几个概念（续）

(2) 内点和开集

设G为一平面点集，z_0为G中任意一点。如果存在z_0的一个邻域，该邻域内所有点都属于G，则称z_0为G的内点

如果G内的每个点都是它的内点，则称G为开集。

(3) 边界点、边界

设G为复平面内的一个点集，如果点z_0的任意小的邻域内既包含有G中的点又包含不属于G中的点，这样的点z_0称为G的边界点。

G的所有边界点组成G的边界，通常记做∂G。

1. 平面点集的几个概念（续）

(4) 区域

平面点集G称为一个区域，如果它满足下列两个条件:

1. G是一个开集；
2. G是连通的——即G中任何两点都可以用完全属于G的一条折线连接起来。

区域G与它的边界一起构成闭区域或闭域，记为$\overline{G}$。

(5) 有界区域

如果存在正数M，使对于一切$z \in G$，有$|z| \leq M$，则称G为有界区域。否则，称G为无界区域。

1. 平面点集的几个概念（续）

(6) 简单曲线与光滑曲线

设$C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\ (a \le t \le b)$为一条连续曲线，$z(a)$与$z(b)$分别为$C$的起点与终点。

对于满足$a < t_1 < b$,$a \le t_2 \le b$的t_1与t_2，若存在$t_1 \ne t_2$而有$z(t_1) = z(t_2)$时，点$z(t_1)$称为曲线C的重点。

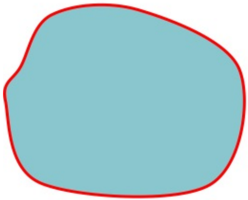
没有重点的连续曲线C，称为简单曲线或若尔当(Jordan)曲线。如果简单曲线C的起点与终点闭合，即$z(a) = z(b)$，则曲线C称为简单闭曲线。

几个例子

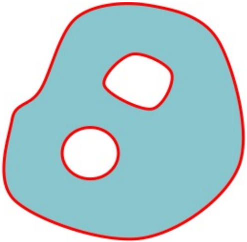
1. 平面点集的几个概念（续）

(7) 单/多连通区域

复平面上的一个区域G，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于G，就称为单连通域；一个区域如果不是单连通域，就称为多连通域。



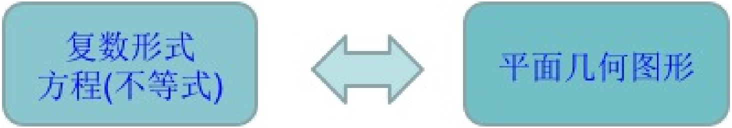
单连通域



多连通域

2. 平面图形的复数表示

由于平面图形上的点可以用复数表示，因而很多平面图形能用复数形式(模或辐角)的方程(或不等式)来表示；反之，也可以通过某些给定的复数形方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形。



一些例子

例1：将通过两点$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$与$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$的直线用复数方程来表示

例2：求下列方程所表示的曲线:

1. $|z+\mathrm{i}|=2$;
2. $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$;
3. $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$。

例3：求下列不等式所表示的几何图形::

1. $|z-a|=R$;
2. $\alpha<\arg z<\beta,\ -\pi<\alpha<\beta\leq\pi$;
3. $0<\mathrm{Im}(z)<2\pi$。

作业一-B（09/29 收）

pp. 18习题一：10.(2); 11; 13; 14.(2)(4)(6)(8)

第二章 解析函数

§2.1 复变函数

1. 复变函数的定义

定义：设D是复平面中的一个点集,对于D中的每一个z，按照一定的规律，有一个或多个w的值与之对应，则称w为定义在D上的复变函数，记做：

$$w = f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

若采用指数表示$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则$w = f(z)$可以写为

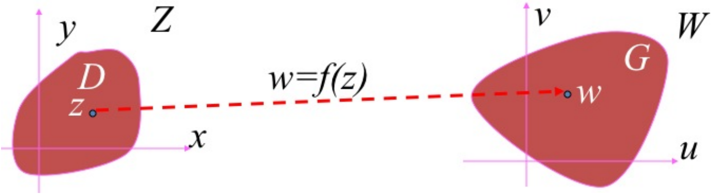
$$w = u(r\cos\theta, r\sin\theta) + \mathrm{i}v(r\cos\theta, r\sin\theta) = P(r, \theta) + \mathrm{i}Q(r, \theta)$$

单值函数；多值函数

映射的概念

函数 $w = f(z)$ 在几何上可以看做是把z平面上的一个点集D(定义集合)变到w平面上的一个点集G（函数值集合）的映射（或变换）。

如果D中的点z被映射$w = f(z)$映射成G中的点w，则w称为z的象(映象)，而z称为w的原象。



几种特殊的映射

1. 单射：$z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$;
2. 满射：对$\forall w \in G$, $\exists z \in D$, 使得$f(z) = w$；
3. 双射：既单又满。

双射的特殊性质

如果f是双射，则f存在反函数（或称逆函数）

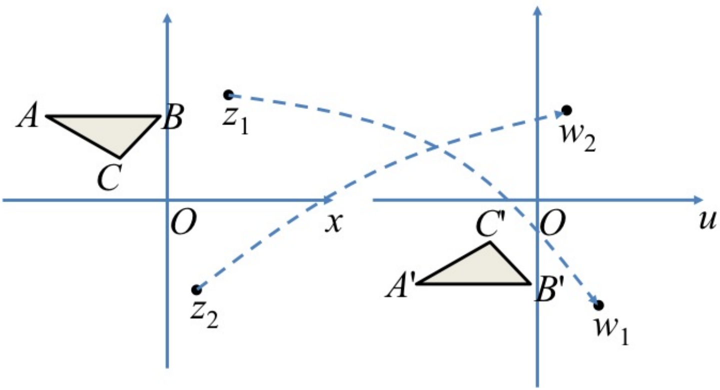
如果函数(映射) $w=f(z)$ 与它的反函数(逆映射) $z=\phi(w)$都是单值的，则称函数(映射) $w=f(z)$是一一的。此时，我们也称集合D与集合G是一一对应的。

例如

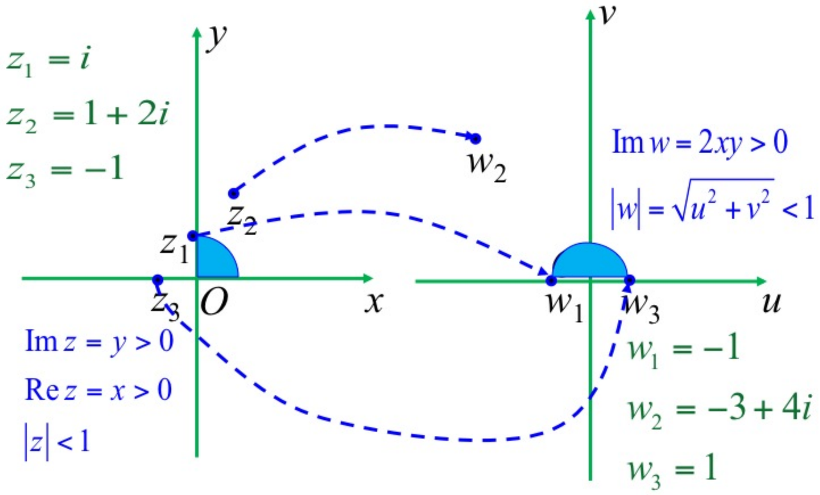
$$w=f(z)=\bar{z}$$

$$w=f(z)=z^2?\ !$$

设函数$w=\bar{z}=x-\mathrm{i}y;u(x,y)=x,v(x,y)=-y$

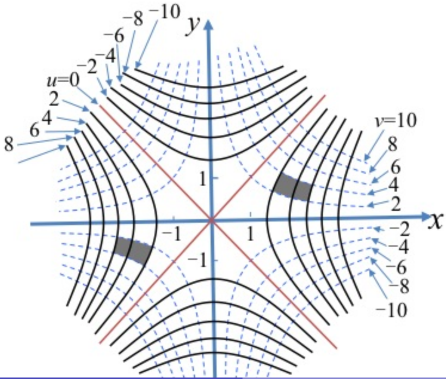


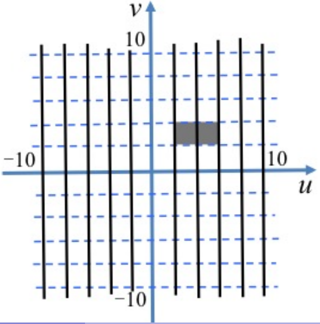
设函数$w = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2; u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$



平方函数下曲线的象

函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数: $u=x^2-y^2$, $v=2xy$ 把z平面上的两族双曲线 $x^2-y^2=c_1$, $2xy=c_2$分别映 射成w平面上的两族平行直线$u=c_1$, $v=c_2$.





曲线在映射下的象

例1：$C: x^2+y^2=8 \xrightarrow{w=1/z} \Gamma?$

例2：$C: |z|=R \xrightarrow{w=2z+b} \Gamma?$

例3：$C: y=x \xrightarrow{w=\mathrm{i}z} \Gamma?$

2. 极限与连续

定义: 设函数$w=f(z)$定义在z_0的去心邻域$0<|z-z_0|<\rho$内。如存在一确定的数A，对于任意给定的$\varepsilon>0$，相应地必有一正数$\delta(\varepsilon)\in(0,\rho]$, 使得当$0<|z-z_0|<\delta$时有$|f(z)-A|<\varepsilon$，则称$A$为$f(z)$当$z$趋向于$z_0$时的极限，记作

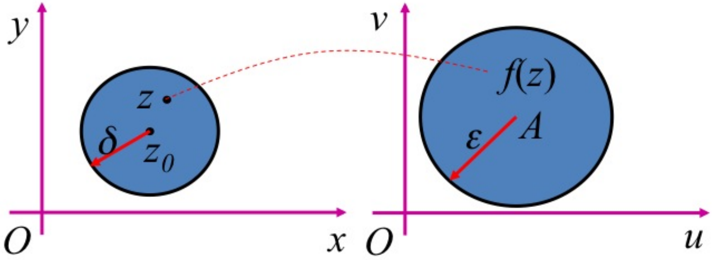
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A$$

或记作当$z\to z_0$时，$f(z)\to A$。

直观意义

当z充分接近z_0时，则象w也充分接近A。

复变函数极限的几何意义



$\lim_{z\to z_0} f(z) = A$意味着

当z从平面上任一方向、沿任何路径、以任意方式趋近于z_0时，$f(z)$均以A为极限

几个定理

定理2.1.1：如果极限存在，则必唯一。

定理2.1.2：极限$\lim_{z\to z_0} f(z) = A$存在的充要条件是$f(z) - A = a(z)$，其中$\lim_{z\to z_0} a(z) = 0$。

定理2.1.3：极限$\lim_{z\to z_0} f(z) = A$存在的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$$

其中$A = u_0 + \mathrm{i}v_0$，$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$。与定理2.1.2等价。

定理2.1.4：极限的运算

复变函数的极限

例1. 证明函数$f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$当$z \to 0$时极限不存在。

2. 函数的连续性

定义: 若$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则 $f(z)$在z_0处连续。
若$f(z)$在区域D内处处连续, 则$f(z)$在D内连续。

函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$在$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$处连续的充要条件是$u(x,y)$和$v(x,y)$在$(x_0,y_0)$处连续。

连续复变函数的性质

1. 连续函数的四则运算仍然连续；
2. 连续函数的复合函数仍然连续；
3. 连续函数的模也连续；
4. 有界闭区域D上的连续函数必有界，且其模在D上取到最大值与最小值;
5. 有界闭区域D上的连续函数必一致连续.

两个例子

例1：讨论幅角主值函数$\arg(z)$的连续性。

例2：讨论函数$f(z)=\dfrac{z\,\mathrm{Im}(z^2)}{|z|^2}$的连续性。

§2.2 解析函数 (Analytic Functions)

1. 复变函数的导数

定义: 设函数$w=f(z), z\in D; z_0, z_0+\Delta z\in D$。若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，则称$f(z)$在点z_0可导（或可微)。此极限称为$f(z)$在z_0的导数，记作

$$f'(z_0) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}$$

注意：上述定义中$\Delta z\to 0$的方式是任意的。

1. 复变函数的导数（续）

容易证明：可导 $\Longrightarrow$ 连续。反之不然。

如果$f(z)$在区域D内处处可导，则称$f(z)$在D内可导。

例1. 求$f(z) = z^2$的导数。

复变函数的导数具有与实函数同样的求导法则

更多的例子

例2. 讨论$f(z)=x+2\mathrm{i}y$的可导性。

例3. 讨论$w=f(z)=|z|^2$的可导性。

2. 解析函数的概念

定义： $f(z)$在z_0解析 $\iff$ $f(z)$在z_0的某邻域内可导

z_0称为解析点；不解析的点称为奇点

$f(z)$在区域D内解析 $\iff$ $f(z)$在D内处处解析

如果D是整个复平面，则称$f(z)$为整函数

类似可导和连续的关系。。。

函数在一点解析$\Longrightarrow$在该点可导；反之不一定成立。

但在区域内：解析 $\iff$ 可导

刚才几个例子。以及例4：讨论函数$f(z)=\dfrac{1}{z}$的解析性

解析函数的性质

1) 两个解析函数的和、差、积、商仍为解析函数

$$[a\,f(z)+b\,g(z)]'=a\,f'(z)+b\,g'(z)$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

例如：

多项式函数在整个复平面上解析; 有理分式函数在除使分母为0的各点外都解析, 使得分母为0的那些点就是此有理分式函数的奇点。

解析函数的性质（续）

2)两个解析函数的复合函数仍为解析函数

设$\zeta = g(z)$在区域D内解析，$w = f(\zeta)$在区域G内解析，并且$g(D)$包含在G中，则$w = f(g(z))$确定了一个D上的解析函数，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z) \quad \text{——链式法则}$$

3)一个解析函数不可能仅在一个点或一条曲线上解析；所有解析点的集合必为开集。

思考

pp. 46 思考题二

1, 2

一个重要的问题：

对一个一般的函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$
如何判别其解析（可导）性?

作业二-A（10/08 收）

pp. 47习题二：2， 4， 5.(2), 6.(2)(3), 8.(3)(4)

§2.3 解析函数的充分必要条件

问题

$f(z)$解析(可导)与否与u,v的偏导数之间有什么关系?

定理1： 函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在其定义域$D$内解析的充要条件是: $u(x,y)$与$v(x,y)$在D内可微，并且满足Cauchy-Riemann方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

此时$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$

定理1的证明

必要性（$\Longrightarrow$）

设函数$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$在区域$D$内解析。则存在复数$f'(z) = a + \mathrm{i}b$和$\varepsilon = \varepsilon_x + \mathrm{i}\varepsilon_y$，使得：

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(z+\Delta z) - f(z) = [f'(z) + \varepsilon]\Delta z \,(\lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon = 0) \\ &= [(a + \mathrm{i}b) + (\varepsilon_x + \mathrm{i}\varepsilon_y)](\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) \\ &= \Delta u + \mathrm{i}\Delta v \end{aligned}$$

其中

$$\Delta u = (a\Delta x - b\Delta y) + (\varepsilon_x\Delta x - \varepsilon_y\Delta y) = u_x\Delta x + u_y\Delta y + o(\rho)$$

$$\Delta v = (b\Delta x + a\Delta y) + (\varepsilon_y\Delta x + \varepsilon_x\Delta y) = v_x\Delta x + v_y\Delta y + o(\rho)$$

从而

$$\begin{cases} a &= u_x = & v_y \\ b &= v_x = & -u_y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_x$$

这对约束关系 $u_x = v_y; u_y = -v_x$

称为柯西-黎曼方程。

这样，我们就严格证明了：

$w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$在$D$内一点$(x,y)$解析

$\Longrightarrow$ $u(x,y)$与$v(x,y)$均在该点可微且它们满足CR方程

定理1的充分性证明（$\Longleftarrow$）

设实函数$u(x,y)$与$v(x,y)$在点(x,y)可微且满足Cauchy-Riemann方程，则有：

$$\begin{cases} \Delta u = (u_x+\varepsilon_1)\Delta x + (u_y+\varepsilon_2)\Delta y \\ \Delta v = (v_x+\varepsilon_3)\Delta x + (v_y+\varepsilon_4)\Delta y \\ \text{其中} \ \lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_k = 0, \ k=1,2,3,4 \end{cases}$$

从而

$$f(z+\Delta z)-f(z) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v = (u_x+\mathrm{i}v_x)\Delta x + (u_y+\mathrm{i}v_y)\Delta y + (\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y$$

$$\overset{CR}{=} (u_x+\mathrm{i}v_x)\Delta x + (\mathrm{i}^2 v_x + \mathrm{i}u_x)\Delta y + (\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y$$

$$= (u_x+\mathrm{i}v_x)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y) + (\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y$$

从而

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=u_x+\mathrm{i}v_x+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$$\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|,\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\leq 1\right)\to\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \Delta z\to 0$$

该极限即为$f'(z)$

由此证明函数$f(z)$在点$z=x+\mathrm{i}y$处可导；而由z的任意性，可知$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$D$内解析。

定理2：函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$D$内一点可导的充要条件是：

1. 偏导数u_x,u_y,v_x,v_y在点(x,y)处存在；
2. $u(x,y),v(x,y)$在点(x,y)处满足C-R条件。

几个例子

例1：已知$f(z)=z^2$，求$f'(z)$。$u=?$, $v=?$

例2：判断下列函数在何处可导，在何处解析：

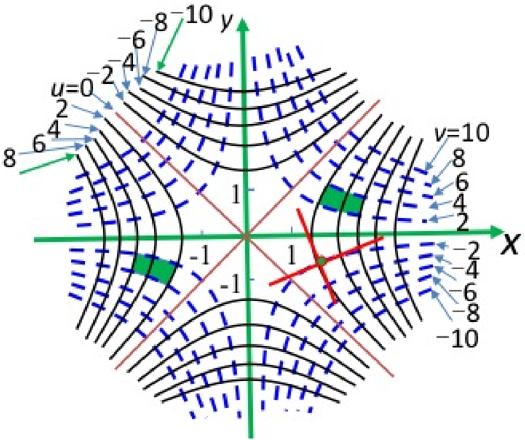
$$1)\ w=\bar{z};\qquad 2)\ w=z\mathrm{Re}(z)$$

例3：$f(z)=u+\mathrm{i}v$是区域D内的解析函数且$f'(z)\neq 0$，证明：

$u(x,y)=C_1$, $v(x,y)=C_2$ (C_1, C_2为任意常数) 是区域内的正交曲线族(即两曲线在交点处切线垂直)。

例如$f(z)=z^2, f'(z)\neq 0(z\neq 0)$

两族分别以直线$y=\pm x$和坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $u=x^2-y^2=C_1, v=2xy=C_2$互相正交。



解析函数退化为常数的几个充分条件

1. 函数在区域内解析且导数恒为零
2. 解析函数的实部、虚部、模或辐角中有一恒为常数
3. 解析函数的共轭在区域内解析

§2.4 解析函数和调和函数的关系

定义1：实函数$u(x,y)$为区域D内的调和函数$\Longleftrightarrow$
$u(x,y)$在D内有二阶连续偏导数且满足方程

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$$

该方程称为调和 (harmonic) 方程或Laplace方程。

定理1：$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$是区域$D$内的解析函数
$\Longrightarrow u$和v是区域D内的调和函数。

证明：C-R条件

反过来成立吗?

任意两个调和函数一定能组成一个解析函数吗?

§2.4 解析函数和调和函数的关系 (续)

我们知道, $f(z)=z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$是解析函数;
但是, $\bar{f}(z)=2xy+\mathrm{i}(x^2-y^2)$并不解析。问题在哪儿?

定义2: 若u与v是区域D内的调和函数且满足C-R方程, 则称v为u的**共轭调和函数**。

定理2: $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是区域$D$内解析
$\Longleftrightarrow$ v为u的共轭调和函数。

注意顺序, 注意顺序, 注意顺序

解析函数的虚部为实部的共轭调和函数

利用这个性质

如果已知共轭调和函数中的一个，可利用C-R方程求得另一个，从而构成一个解析函数。

例1：已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+xy$，求一解析函数$f(z)=u+iv$使得$f(0)=0$。
解：三种方法。

初等函数

1. 指数函数

定义： $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$y = 0$: $e^z = e^x$, $e^0 = 1$;

$x = 0$: $e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y$

性质

1. e^z定义在全平面上，且$e^z \neq 0$
2. e^z在全平面解析，且$(e^z)' = e^z$
3. 加法定理：$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
4. e^z是以$2\pi i$为基本周期的周期函数（$e^{2\pi i} = 1$）
   注意：罗尔(Rolle)中值定理在此不适用。
5. $\lim_{z\to\infty} e^z$不存在。

例：求$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$的实部和虚部

解：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z} &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x \cos y} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x \cos y}\Big[\cos(\mathrm{e}^x \sin y) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{e}^x \sin y)\Big]
\end{aligned}$$

2. 三角函数

定义(正/余弦): $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

性质

1. 欧拉公式对复数仍然成立，即$e^{iz} = \cos z + i \sin z$
2. 全平面解析，且$(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$
3. 除半角公式外，其余各种三角恒等式仍然成立
4. $\sin z$为奇函数，$\cos z$为偶函数
5. 以2π为基本周期的周期函数
6. 模可以大于1以至任意大（例如$\cos i$, $\cos iy$）
7. 其他三角函数的定义与实数情形相同。

3. 双曲函数

定义: $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

性质

1. 全平面解析，且$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$
2. $\operatorname{sh} z$为奇函数，$\operatorname{ch} z$为偶函数
3. 以$2\pi i$为基本周期的周期函数
4. 与三角函数的关系：

   $\operatorname{sh} iz = i \sin z, \quad \operatorname{ch} iz = i \cos z$

   $\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \cos iz = i \operatorname{ch} z$

例1：解方程$\sin z = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,1$

解:
$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x\cos \mathrm{i}y + \cos x \sin \mathrm{i}y \\ &= \sin x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y = \mathrm{i}\mathrm{sh}\,1 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \sin x\,\mathrm{ch}\,y = 0, & (1) \\ \cos x\,\mathrm{sh}\,y = \mathrm{sh}\,1, & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

$(1) \Longrightarrow \sin x = 0\ (\mathrm{ch}\,y \neq 0) \Longrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

代入$(2) \Longrightarrow \mathrm{sh}\,y = (-1)^k\mathrm{sh}\,1 \Longrightarrow y = (-1)^k + 2m\pi\mathrm{i}$

综上所述：

$$z = \begin{cases} 2n\pi + \mathrm{i} \\ (2n+1)\pi - \mathrm{i} \end{cases}$$

4. 对数函数（指数函数的逆函数）

定义: 若w满足：$\mathrm{e}^w = z(z \neq 0)$, 则$w = \mathrm{Ln}\ z(z \neq 0)$

设 $w = u + \mathrm{i}v,\ z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Longrightarrow \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^u = r \Longrightarrow u = \ln r = \ln|z| \\ v = \theta = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$$
$$:= \ln z + 2k\pi\mathrm{i} \quad (\text{多值性})$$

其中$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$称作对数函数的主值支。

例如:

$$\mathrm{Ln}\,(-1) = \ln|-1| + \mathrm{i}\arg(-1) + 2k\pi\mathrm{i} = (2k+1)\pi\mathrm{i}$$

对数函数的性质

1. $\mathrm{Ln}\, z$的定义域为$\{z : 0 < |z| < +\infty\}$;
2. $\mathrm{Ln}\, z$为无穷多值函数，每两个值相差$2\pi\mathrm{i}$的整数倍；
3. $\forall z_1,\ z_2 \neq 0 : \mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$,
$$\mathrm{Ln}\,\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2;$$
4. 除去原点与负实轴(??), $\ln z$在复平面内处处解析:
$(\ln z)' = (\mathrm{Ln}\, z)' = 1/z$
注：今后我们应用对数函数$\mathrm{Ln}\, z$时, 指的都是它在除去原点及负实轴的某一单值分支(固定k)

问题：$\ln z^2 = 2\ln z$??

5. 幂函数

定义: $w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z}$——主值为$\mathrm{e}^{a \ln z}$的多值函数

当$a = n \in \mathbb{Z}$时

$$\begin{aligned} z^n &= \mathrm{e}^{n(\ln|z| + \mathrm{i} \arg z + 2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{n \ln|z|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n \arg z} \\ &= |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n \arg z} \end{aligned}$$

——单值函数

当$a = 1/n,\ n \in \mathbb{Z}$时

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \exp(\mathrm{i} \frac{\arg z + 2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{z}$$

——n值函数

一些例子

例2：求$1^{\sqrt{2}}$和i^{i}的值

解:

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln 1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}[\ln|1|+\mathrm{i}(0+2k\pi)]} = \mathrm{e}^{2\sqrt{2}k\pi\mathrm{i}} \\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]} \\ &= \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

——i^{i}是一个正实数，主值为$\mathrm{e}^{-\pi/2}$

一些例子

例3：求解以下方程：

$$1)\ \ln z = \frac{\pi \mathrm{i}}{2};\quad 2)\ \ln z = 1 + \pi \mathrm{i};\quad 3)\ \ln z = 2 - \frac{\pi \mathrm{i}}{6}$$

解: 1） $z = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2}} = \mathrm{i}$

2) $z = \mathrm{e}^{1+\pi \mathrm{i}} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = -\mathrm{e}$

3) $z = \mathrm{e}^{2-\frac{\pi \mathrm{i}}{6}} = \mathrm{e}^2\left(\cos \frac{\pi \mathrm{i}}{6} + \sin \frac{\pi \mathrm{i}}{6}\right) = \dfrac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})\mathrm{e}^2}{2}$

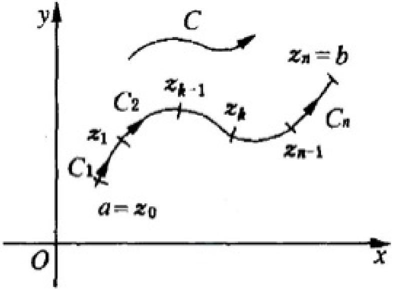
作业二-B （10/08 收）

pp. 47习题二：9, 10.(2), 13, 14.(1)(3), 16.(1), 17.(2)(4), 18.(2), 19.(2), 20.(1)(2)

第三章 复变函数的积分

§3.1 复积分的定义与计算

定义: 设有向曲线$C: z=z(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$以$a=z(\alpha)$为起点, $b=z(\beta)$为终点，$f(z)$在C上有定义。把曲线任意分割成n小段，分点为$a=z_0<z_1<\cdots<z_{k-1}<z_k<\cdots<z_n=b$。



在每一子弧段$C_k=\overline{z_{k-1}z_k}$上任取一点$\zeta_k$, $k=1,2,\cdots,n$并作和式:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$$

其中$\Delta z_k=z_k-z_k-1$, $\zeta_k=z(\tau_k)$, $k=1,\cdots,n$.

复积分的定义（续）

记$\Delta s_k = |\overline{z_{k-1}z_k}|$为子弧段$C_k$的长度并令$\delta = \max_k \Delta s_k$. 如当分点无限增多 $(n \to \infty)$ 且$\delta \to 0$时，前述和式S_k的极限存在，则称$f(z)$沿曲线 C可积,记作

$$
\begin{aligned}
S = \int_C f(z)\mathrm{d}z &= \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \delta\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \rho\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))\frac{z_k - z_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \\
&= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t???
\end{aligned}
$$

其中$\rho = \max_k |\Delta t_k|$, 因此当$\delta \to 0$时$\rho \to 0$, $\tau_k \to t_k$。

注：

1. 如果C为闭曲线，积分也记作$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$，这样的积分也称为围道积分；

2. 如果C为以1为中心，1为半径的圆周，积分也记作$\oint_{|z-1|=1} f(z)\mathrm{d}z$；

3. 如果C为闭区间，$f(z)=u(x)$，则复积分的定义就是一元实函数的定积分。

复积分的计算

定理3.1.1 假设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在曲线$C$上连续，则函数$f(z)$的复积分一定存在且有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

证明： 设$z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$, $k=1,2,\cdots,n$,
$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=(x_k-x_{k-1})+\mathrm{i}(y_k-y_{k-1})=\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k$,
$\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k$. 则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)+\mathrm{i}v(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta$$

定理3.1.1的证明（续）

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] \\ &\quad + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] \\ &\to \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

当$n\to\infty, \max_k z_k \to 0$。

复积分的计算

定理3.1.2 假设$f(z)$在曲线C上连续，C的参数表示式为$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$。则函数$f(z)$在$C$上可积且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t.$$

证明：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta u(x(t),y(t))x'(t)\mathrm{d}t-v(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

$$+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta v(x(t),y(t))x'(t)\mathrm{d}t+u(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

定理3.1.2的证明（续）

$$
\begin{aligned}
&\int_C f(z)\mathrm{d}z \\
=\ &\int_\alpha^\beta \Big[u(x(t),y(t))+\mathrm{i}v(x(t),y(t))\Big]\Big[x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\Big]\mathrm{d}t \\
=\ &\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

复积分的性质

设$f(z)$、$g(z)$在逐段光滑的有向曲线C上连续

1. 线性性:$\int_C (a\,f + b\,g)\mathrm{d}z = a\int_c f\mathrm{d}z + b\int_c g\mathrm{d}z,\ a,b\in\mathbb{C}$
2. 设C^-为C的逆向曲线，则$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z$
3. $C = C_1 + C_2 \Longrightarrow \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$
4. $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML$
(需假设$f(z)$在C上有界, $|f(z)|\le M$, L为C的长度)

一些例子

例1： 在以下曲线上计算$\int_C |z|\mathrm{d}z$

1) $C: \alpha = \mathrm{i} \to \beta = -\mathrm{i}$的直线段；

2) C:左半平面以原点为中心逆时针方向的单位半圆周

解： 1) 线段$\alpha\beta$的参数方程为$z = \mathrm{i}t\ (t \in [-1, 1])$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{d}t,\ |z| = |\mathrm{i}t| = |t| \Longrightarrow$$

$$\int_C |z|\mathrm{d}z = \int_1^{-1} |t|\mathrm{i}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\left(\int_{-1}^{0} -t\mathrm{d}t + \int_0^1 t\mathrm{d}t\right) = -\mathrm{i}$$

2) C的参数方程为$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\ |z| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_C |z|\mathrm{d}z = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2\mathrm{i}$$

——积分值与路径有关!!

一些例子（续）

例2： 计算$I=\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$, $C:|z-z_0|=r>0$

解： 1) C的参数方程为$z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi \Longrightarrow$
$\mathrm{d}z=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}=\mathrm{i}r^{1-n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{r^{1-n}}{1-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}$$

——除非,$n=1$!!

请牢牢记住这个积分★★★★★★★★★★

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=2\pi\mathrm{i},\ C:|z-z_0|=r>0$$

一些例子（续）

例3: 证明 $\left|\oint_C \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \le 8\pi, C: |z-1| = 2 > 0$

证明:

$$\left|\oint_C \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \le \oint_C \left|\frac{z+1}{z-1}\right||\mathrm{d}z| = \oint_C \frac{|z+1|}{2}|\mathrm{d}z|$$
$$\le \oint_C \frac{|z-1|+2}{2}|\mathrm{d}z| = 2\oint_C |\mathrm{d}z| = 8\pi$$

再例如

$$\oint_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| =? \qquad \oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|} =? \qquad \oint_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z} =?$$

一些例子（续）

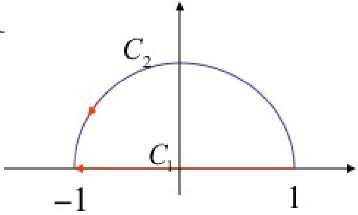
例4：计算 $\displaystyle\int_{C_i} z^2\mathrm{d}z,\ C_i = C_1, C_2$如图所示

解：$C_1:\ z = x, y = 0, x: -1 \to 1$

$$\Longrightarrow \int_{C_1} z^2 dz = \int_1^{-1} x^2\mathrm{d}x = -\frac{2}{3};$$

$$C_2:\ z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta: 0 \to \pi$$

$$\Longrightarrow \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3};$$



——这里,积分与路径无关,仅与起点和终点有关。

另外，显然有 $\displaystyle\oint_{C=\pm(C_1-C_2)} z^2\mathrm{d}z = 0$。

§3.2 柯西积分定理

定理1 (Cauchy, 1825)：如果函数$f(z)$在单连通域D内处处解析，则它在D内任何一条封闭曲线 C 上积分为零。

注1：定理中的曲线C可以不是简单曲线；此定理成立的条件之一是曲线C要属于区域D——完全被包含即可

注2：如果曲线C是D的边界 $(C = \partial D)$，函数 $f(z)$在D内与C上解析，即在闭区域 $D + C$上解析；甚至$f(z)$只需在D内解析，在闭区域$D + C$上连续，则$f(z)$在边界上的积分仍然有$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$

黎曼的证明 (1851)

假设$f'(z)$连续,令$z = x + \mathrm{i}y$, $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$,则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\oint_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

由于$f'(z)$连续, $f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$。因此由之前定理, u_x, u_y, v_x, v_y都是连续的, 且满足CR方程。由格林公式可以得到:

$$\oint_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = \iint_D [-v_x - u_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\oint_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \iint_D [u_x - v_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

□

1900年古莎（Goursat）证明

不需假设$f'(z)$的连续性

推论

如果函数$f(z)$在单连通域D内处处解析，C属于D， $\Longrightarrow$

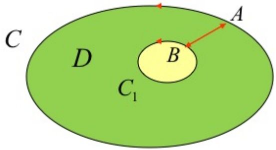
则$\displaystyle\int_C f(z)\mathrm{d}z$与路径无关，仅与起点和终点有关

曲线的方向: 逆时针方向

边界曲线的正向: 当点沿着曲线前进时，区域D始终在曲线的左边

定理2 假设C及C_1为任意两条简单闭曲线, C_1在C内部。设函数$f(z)$在C及C_1所围的二连域D内解析, 在边界上连续，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$$



证明： 在C上任取一点A，在C_1上任取一点B, 则由简单闭曲线 $\Gamma = C^+ + \vec{AB} + C_1^- + \vec{BA}$ 围成了一个单连通域$\Longrightarrow \oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$

这说明。。。。。。

解析函数沿简单闭曲线积分不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值——闭路变形原理

推论（复合闭路定理）：

设$C_1, C_2, \cdots, C_n$为互不包含且互不相交的简单闭曲线，它们都被包含在简单闭曲线C中。D为由边界曲线$\Gamma = C \cup C_1^- \cup C_2^- \cup \cdots \cup C_n^-$所围成的多连通区域，$f(z)$在$D$内解析，在$\overline{D} = D \cup \Gamma$上连续，则

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0 \quad 或 \quad \oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z$$

例1: 求 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - z}$, C为包含0与1的任何正向简单闭曲线

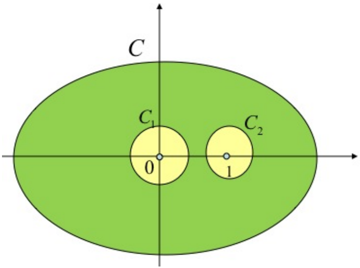
解：方法一：闭路变形原理

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - z} = \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$= \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i}$$

$$= 0$$



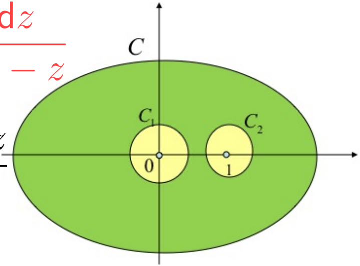
例1: 求$\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z}$, C为包含0与1的任何正向简单闭曲线

解：方法二：复合闭路原理

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z} = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z} + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$= 0 - 2\pi\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i} - 0 = 0$$



原函数定理（不定积分）

由柯西积分定理推论得，解析函数的积分与路径无关

因此，固定起点z_0时，可以在D上定义一个变上限的单值函数，记为

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

定理：（原函数定理）

设函数$f(z)$在单连通区域D内解析，则$F(z)$在D内也解析，且$F'(z)=f(z)$.

原函数定理的证明

只要对D内的任意一点z证明 $F'(z)=f(z)$即可

即要证明：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$|\Delta z|<\delta$时，有

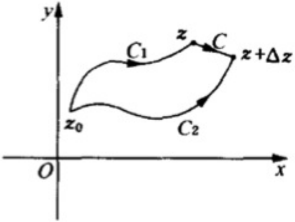
$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon.$$

证明：$f(z)$解析 $\Longrightarrow f(z)$ 连续，即：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$|\zeta-z|<\delta$ 时，有$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$

以及：$f(z)=\dfrac{f(z)}{\Delta z}\displaystyle\int_z^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}f(z)\mathrm{d}\zeta$

原函数定理的证明（续）



$$
\begin{aligned}
&\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\\
=\ &\frac{1}{\Delta z}\int_{C_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{\Delta z}\int_{C_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\\
=\ &\frac{1}{\Delta z}\int_{C} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \frac{1}{\Delta z}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|\\
&\le \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left|f(\zeta)-f(z)\right|\mathrm{d}\zeta\\
&\le \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\varepsilon\mathrm{d}\zeta=\varepsilon, \qquad \square
\end{aligned}
$$

原函数定理相关

注： 条件“$f(z)$是解析函数”可以替换为：

1. $f(z)$在单连通区域D上连续；
2. $\int f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$沿区域$D$内任一围道积分值为0.

定义： 在区域D内，如果$f(z)$连续，则称符合条件

$$\Phi'(z) = f(z),\ \forall z \in D$$

的函数$\Phi(z)$为$f(z)$的一个**不定积分**或**原函数**

两个推论

推论1

$f(z)$的任意原函数$\Phi(z)$在D内都可以写成

$$\Phi(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+C,\ C\in\mathbb{C}$$

推论2 (牛顿-莱布尼茨公式)

若$\Phi(z)$为$f(z)$在单区域D内的任一原函数, 则

$$\int_{z_0}^{z_1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\Phi(z_1)-\Phi(z_0)$$

一些例子

例1：在单连通区域$D: \arg z \in (-\pi, \pi)$内，求$f(z) = \dfrac{1}{z}$的原函数

例2：计算下列积分

1. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$, 其中$C$为右半圆: $|z| = 3, \mathrm{Re}(z) \geq 0$, 起点为$-3\mathrm{i}$，终点为$3\mathrm{i}$
2. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1/2} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z$, 其中$\sqrt{z}$取$\sqrt{1} = -1$那一支

一些例子（续）

例3：计算$\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$, 其中$C$为连接$1+\mathrm{i}$为连接$2\mathrm{i}$的直线

解法1（直接计算）

设曲线的参数方程为

$C: z(t)=z_1+t(z_2-z_1)=(1-t)+\mathrm{i}(1+t), 0\le t\le 1$

$$\text{因此：} \mathrm{d}z=z'(t)\mathrm{d}t=(-1+\mathrm{i})\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int_0^1 \frac{(\mathrm{i}-1)\mathrm{d}t}{(1-t)+(1+t)\mathrm{i}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}[(\mathrm{i}-1)t]}{(\mathrm{i}-1)t+(1+\mathrm{i})} \\ &= \ln\left[1+\mathrm{i}+(\mathrm{i}-1)t\right]\Big|_0^1 = \ln(2\mathrm{i})-\ln(1+\mathrm{i})=\cdots\end{aligned}$$

作业三-A （10/13 收）

pp. 80习题三：1.(2), 2, 4, 5, 6.(2), 7.(2)(4)(6)

§3.3 柯西积分分式

分析: 设$z_0 \in D$, 若$f(z)$在D内解析，则由闭路变形原理

$$\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} = \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} \to f(z_0) \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

当$\delta \to 0$。

定理 (柯西积分公式)

如果 $f(z)$在区域D内处处解析, C完全含于D内的任何一条正向简单闭曲线, z_0为C内的任一点, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

解析函数可用复积分表示

两个推论

推论1：如果C是圆周$z=z_0+Re^{i\theta}$, 则柯西积分公式为

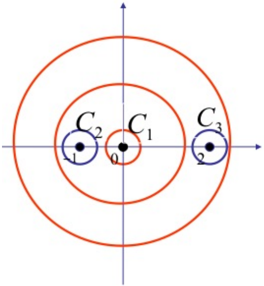
$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta = f(z_0+Re^{i\xi}) \end{aligned}$$

即:一个解析函数在圆心的值,等于它在圆周上的平均值

推论2：设$f(z)$在二连域D内解析，在边界上连续, 则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)dz}{z-z_0},\quad \forall z_0\in D$$

例1：计算$I=\oint_C \frac{e^z dz}{z(z+1)(z-2)}$, $C:|z|=r\ (r\neq 1,2)$



情形1：$0<r<1$

$$I=\oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(z+1)(z-2)}}{z}dz=\frac{2\pi i\, e^z}{(z+1)(z-2)}\Big|_{z=0}$$

$$=-\pi i$$

情形2：$1<r<2$

$$I=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}=-\pi i+\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z(z-2)}}{z+1}dz$$

$$=-\pi i+\frac{2\pi i\, e^z}{z(z-2)}\Big|_{z=-1}=-\pi i+\frac{2\pi i}{3e}$$

情形3/4/...???

§3.4 解析函数的高阶导数

一个解析函数不仅有一阶导数...

而且有各高阶导数(任意阶可导), 它们的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示。

这一点和实变函数完全不同

一个实变函数在某一区间上可导, 它的导数在这区间上是否连续也不一定,更不要说它有高阶导数存在了

§3.4 解析函数的高阶导数

定理:解析函数$f(z)$的n阶导数$(n\in\mathbb{Z}^+)$仍为解析函数且

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

其中C为在函数$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任何一条正向简单曲线，而且它的内部全含于D。

证明：设z_0为D内任意一点。先证$n=1$的情形，即要证

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

证明（续）

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \mathrm{d}z - \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \\
= \ & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^2} - \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}\right] \mathrm{d}z \\
= \ & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\Delta z\, f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)} \mathrm{d}z = I
\end{aligned}
$$

事实

$$\lim_{\Delta z\to 0} I = 0 \qquad \text{——证明略}$$

高阶情形$(n \geq 2)$

数学归纳法！

高阶导数公式的作用

不在于通过积分来求导，而在于通过求导来求积分,即

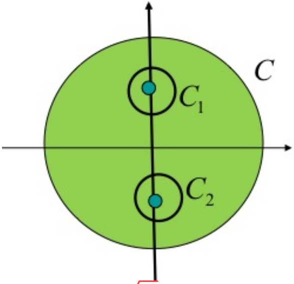
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

例子

求下列积分的值，其中C为正向圆周：$|z| = r > 1$

$$1)\ \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\mathrm{d}z; \quad 2)\ \oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

解：2) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$



$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}}{(z-\mathrm{i})^2}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}}{(z+\mathrm{i})^2}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}\right)'\bigg|_{z=\mathrm{i}} + 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}\right)'\bigg|_{z=-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

柯西不等式

$f(z)$在$C_R: |z-z_0|=R>0$内解析，在C_R上连续，则

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{Mn!}{R^n}, \quad (M=\max_{C^R}|f(z)|)$$

证明:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \\ &\le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|\mathrm{d}z| \\ &\le \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}}\oint_C |\mathrm{d}z| \\ &= \frac{Mn!}{R^n} \end{aligned}$$

Liouville定理：全平面的有界解析函数必为常数

证明：

$n=1$, $R\to\infty$, Cauchy不等式，$\Longrightarrow f'(z)\equiv 0.$

注

"$f(z)$在全平面解析"+"$\mathrm{Re}(f(z))\le M$"同样可推得"$f(z)$是常数"。——只需考虑函数$F(z)=e^{f(z)}$

最大模原理

设D为有界单连通或复闭路多连通区域，$f(z)$在D内解析，在$\bar{D} = D \cup \partial D$上连续，则$|f(z)|$在$\partial D$上取到最大值

证明: $\forall z_0 \in D$, 记$d = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$以及$L = L(\partial D)$, $M = \max_{\partial D} |f(z)|$

$$\begin{aligned}
[f(z_0)]^n &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{[f(z)]^n}{z - z_0} \mathrm{d}z \\
|f(z_0)|^n &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \frac{|f(z)|^n}{|z - z_0|} |\mathrm{d}z| \leq \frac{M^n L}{2\pi d} \\
|f(z_0)| &\leq M \left(\frac{L}{2\pi d} \right)^{1/n} \to M, n \to \infty
\end{aligned}$$

作业三-B （10/13 收）

pp. 80习题三：8.(2)(4), 11, 12.(1)(3)(5)(7), 13, 15

第四章 级 数

§4.1 复数项级数与幂级数

1. 复数列的极限 设$\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$为一复数列，其中$z_n=a_n+ib_n$；又设$z=a+ib$为一确定的复数. 如果任意给定$\varepsilon>0$，相应地能找到一个正数$N(\varepsilon)$，使$|z_n-z|<\varepsilon$在$n>N$时成立，则称z为复数列$\{z_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

如果复数序列$\{z_n\}$不收敛，则称$\{z_n\}$发散，即

$$\forall z\in\mathbb{C}, \exists\varepsilon>0, \forall N, \exists n, s.t. |z_n-z|>\varepsilon_0$$

两个定理

定理一 复数列$\{z_n = a_n + \mathrm{i}b_n, n = 1, 2, \cdots\}$收敛于$z_0 = a + \mathrm{i}b$的**充要条件**是$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$

定理二 (柯西收敛准则) 复数列$\{z_n, \ n = 1, 2\cdots\}$收敛的充分必要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), n > N \Longrightarrow |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon, p \in \mathbb{Z}^+$$

2. 级数

设$\{z_n = a_n + \mathrm{i}b_n, n = 1, 2, \cdots\}$为一复数列，表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为无穷级数。其前n项和$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$称为级数的部分和。

如果部分和数列$\{S_n\}$收敛，则称级数$\sum z_n$收敛；且极限$\lim_{n\to\infty} S_n = S$称为级数的和。

如果部分和数列$\{S_n\}$不收敛，则称级数$\sum z_n$发散。

又一个定理

定理三 级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的充要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛.
因此，复数项级数的收敛问题等价于实数项级数的收敛问题。

推论： 级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

还有一个定理

定理四 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$也收敛，且有不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$$

证明: 因$\sum_n|z_n|=\sum_n\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $|a_n|,|b_n|\leq\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, 所以级数$\sum_n|a_n|$和$\sum_n|b_n|$都收敛，从而$\sum_n a_n$和$\sum_n b_n$也都收敛，即$\sum_n z_n$收敛(定理一)；

又因$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k|\Longleftrightarrow\left|\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$$

类似实变函数

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$绝对收敛；非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数。

容易证明

$\sum_n z_n$绝对收敛的充要条件是$\sum_n a_n$和$\sum_n b_n$绝对收敛

因为$\sum_n |z_n|$的各项都是非负的实数，所以它的收敛也可用正项级数的判定法来判.

一些例子

例1：下列数列是否收敛？如果收敛，求出其极限.

$$1) z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}; \quad 2) z_n = n\cos(in)$$

例1：下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

$$1) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$$

3. 复函数序列与复函数项级数

定义: 设$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$为定义在区域$D$的复变函数序列，$f(z)$是定义在$D$上的一个函数。如$\forall z \in D, \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, z)$, 使得当$n > N$时，有$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, 则称复函数序列$\{f_n(z)\}$的极限为$f(z)$。

定义: 设$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$为定义在区域$D$的复变函数序列.称

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

为**函数项级数**。而它的前n项之和$S_n(z)$为**部分和函数**.

3. 复函数序列与复函数项级数（续）

当 $f_n(z) = c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ 时，就得到函数项级数的特殊情形：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n &= c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 \\ &\quad + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots\end{aligned}$$

这种级数称为幂级数

级数敛散性的阿贝尔(Abel)定理

1. 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在$z = z_0(\neq 0)$收敛，则对满足$|z| < |z_0|$的$z$，级数必绝对收敛；

2. 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在$z = z_0(\neq 0)$发散，则对满足$|z| > |z_0|$的$z$，级数必发散.

证明：(1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$收敛$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$,即存在$M$使得$\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n z_0^n| < M$. 因此，若$|z| < |z_0|$, 则$|z|/|z_0| = q < 1$,从而

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$$

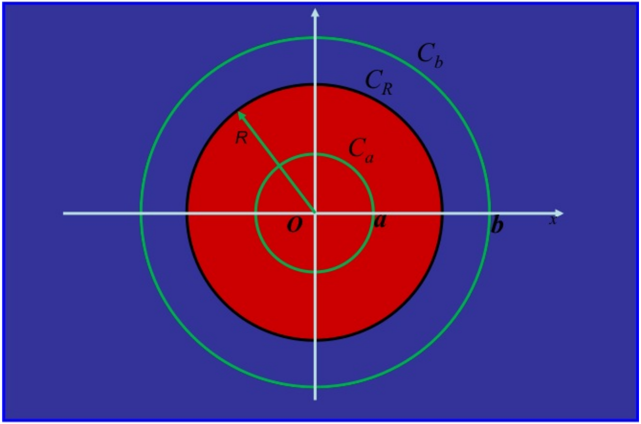
…… （2）的证明，易从反证法推得

收敛圆和收敛半径

利用阿贝尔定理,可以定出幂级数的收敛范围,对一个幂级数来说,它的收敛情况有三种:

1. 对所有的正实数都是收敛的. 这时,根据阿贝尔定理可知级数在复平面内处处绝对收敛;
2. 对所有的正实数除$z=0$外都是发散的。这时,级数在复平面内除原点外处处发散;
3. 既存在使级数收敛的正实数,也存在使级数发散的正实数。假设我们知道当$z=a>0$时,级数收敛;$z=b>a$时, 级数发散.....

收敛圆和收敛半径（续）



收敛域C_a为红色；发散域C_b为蓝色；

收敛圆和收敛半径（续）

当a由小逐渐变大、b从大逐渐变小时，C_a和C_b必定逐渐接近，最终重合为一个以原点为中心、R为半径的圆周C_R. 在C_R的内部都是红色，外部都是蓝色. 这个红蓝两色的分界圆周C_R称为幂级数的收敛圆

在收敛圆的外部，级数发散；收敛圆的内部，级数绝对收敛。收敛圆的半径R称为收敛半径. 所以幂级数$\sum_n c_n z^n$的收敛范围是以原点为中心的圆域. 对幂级数$\sum_n c_n(z-a)^n$来说，收敛范围是以$z=a$为中心的圆域.

在收敛圆周上是否收敛，则不一定.

例子

例1. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$的收敛范围以及和函数

收敛半径的求法

定理：对于幂级数$\sum_n c_n z^n$，如下列极限之一存在

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

则R就是该幂级数的收敛半径。

证明:(1)可用实变级数中正项级数的D'Alembert判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \frac{|z|}{R} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n| 收敛, \ \forall |z| < R$$

所以级数在圆$|z| = R$内绝对收敛；

证明（续）

再证明当$|z| > R$时级数发散。

反证法：假设在圆外有一点z_0使得$\sum_n c_n z_0^n$收敛。则对任意z_1满足$R < |z_1| < |z_0|$，级数$\sum_n c_n z_1^n$收敛。但此时

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z_1^{n+1}}{c_n z_1^n}\right| = \frac{|z_1|}{R} > 1 \text{ 矛盾！}$$

（2）证明略。

例子

例2. 求下列幂级数的收敛半径

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^3}$ (并讨论在收敛圆周上的情形);
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论$z=0,2$的情形);
3. $\sum_{n=(}^{\infty} \cos in) z^n$

幂级数的运算和性质

复变幂级数也能进行有理运算

设$f(z)=\sum_n a_n z^n$, $R_f=r_1$; $g(z)=\sum_n b_n z^n$, $R_g=r_2$. 在以原点为中心, r_1, r_2中较小的一个为半径的圆内,这两个幂级数都绝对收敛，可以象多项式那样进行相加,相减,相乘, 所得到的幂级数的和函数分别就是$f(z)$与$g(z)$的和,差与积.

复合运算

如果当$|z|<r$时$f(z)=\sum_n a_n z^n$收敛；又设当$|z|<R$时$g(z)$解析且满足$|g(z)|<r$. 则当$|z|<R$时，

$$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(z)]^n$$

例子

例3. 把函数$\dfrac{1}{z-b}$表成形如$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的幂级数，其中$a$和$b$是不相等的两个复常数。

定理

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$的收敛半径为$R$,则

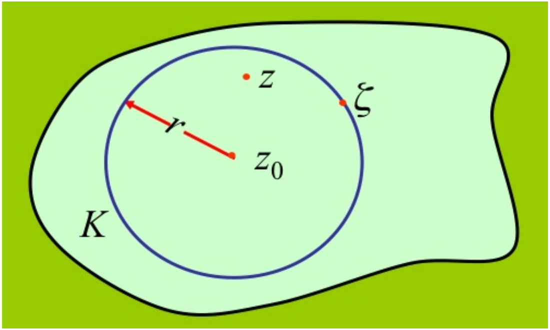
1. 它的和函数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$是收敛圆$|z-a|<R$内的解析函数;
2. $f(z)$在收敛圆内的导数可由对其幂函数逐项求导得到，即$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n\,c_n(z-a)^{n-1}$;
3. $f(z)$在收敛圆内可逐项积分，即

$$\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1},\text{ 或}$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_C(z-a)^n\mathrm{d}z,\quad C\subset|z-a|<R$$

§4.2 泰勒级数

设函数 $f(z)$在区域D内解析，而$|z-z_0|=r$为D内以z_0为中心的任何一个圆周，它与它的内部全含于D，把它记作K，又设z为K内任一点.



由柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta，\text{且}\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

由于积分变量ζ取在圆周K上，而点z在K的内部，有

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1,\Longrightarrow\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=0}^{N-1}\Big[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_K\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\Big](z-z_0)^n\\&+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_K\Big[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\Big]\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

由解析函数高阶导数公式

$$\Longleftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + R_N(z)$$

$$\text{其中 } R_N(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \Big[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\Big] \mathrm{d}\zeta$$

如果能证明$\lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0$在$K$内成立，则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

在K内成立，即$f(z)$在K内用幂级数表达.

令$\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{r}=q$, q与ζ无关且$0\le q<1$.
由K含于D, $f(z)$在D内解析, 在K上连续、有界, 因此在K上存在正实数M使$|f(z)|\le M$. 因此

$$\begin{aligned}
|R_N(z)| &\le \frac{1}{2\pi}\oint_K\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right|\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_K\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n\mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n\cdot 2\pi r=\frac{Mq^N}{1-q}\to 0,\quad N\to\infty
\end{aligned}$$

泰勒展开定理

由前面分析，展开式$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$在$K$内成立。这称为$f(z)$在$z_0$的泰勒展开式，它右端的级数称为$f(z)$在$z_0$处的泰勒级数。

而圆周K的半径可以任意增大，只要K在D内。所以，如果z_0到D的边界上各点的最短距离为d，则$f(z)$在z_0的泰勒展开式在圆域$|z-z_0|<d$内成立.

泰勒展开定理

定理：设 $f(z)$在区域D内解析，z_0为D内的一点，d为z_0到D的边界上各点的最短距离，则当$|z-z0|<d$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

成立，其中

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\in\mathbb{N}$$

注：如果 $f(z)$在z_0解析，则使$f(z)$在z_0的泰勒展开式成立的圆域的半径R等于从z_0到$f(z)$的距z_0最近一个奇点α的距离，即$R=|z_0-\alpha|$.

泰勒展开的唯一性

任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数，因而是唯一的。利用泰勒展开式，可以直接通过计算系数:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \cdots$$

把$f(z)$在z_0展开成幂级数，这被称作直接展开法。

例如: $\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z$在$z = 0$的泰勒展开式。
这些级数的收敛半径分别是多少？？

作业四-A （10/20 收）

pp. 80习题四：1.(2), 3.(2)(4)(6), 4. (1)(2)(3)

间接展开法

除直接法外，也可以借助一些已知函数的展开式，利用幂级数的运算性质和分析性质，以唯一性为依据来得出一个函数的泰勒展开式，此方法称为间接展开法。

例如$\sin z$在$z=0$的泰勒展开式也可用间接展开法得出：

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\Big]$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |z| < +\infty$$

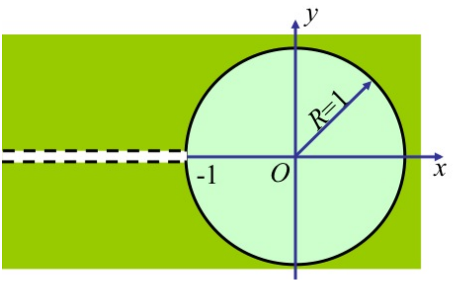
例子

例1：把函数$1/(1+z)^2$展开成z的级数

解：$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots, \ |z| < 1$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = \cdots$$

例2：求对数函数主值$\ln(1+z)$在$z=0$的幂级数展开式



几个推论

推论1

1. 函数$f(z)$在点z_0解析$\Longleftrightarrow f(z)$在z_0的某领域内可展开为$z-z_0$的幂级数;
2. 函数$f(z)$在区域D解析$\Longleftrightarrow f(z)$在D内任一点可展开为$z-z_0$的幂级数

小结：函数$f(z)$在区域D解析的等价条件有：

(i) 函数$f(z)$在区域D内可导；

(ii) $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$在区域D内可微且满足CR条件；

(iii) 函数$f(z)$在区域D内连续且积分与路径无关；

(iv) 函数$f(z)$在区域D内可展开为幂级数。

几个推论 (续)

推论2

设函数$f(z)$在区域D内解析，$z_0 \in D, R = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$;
则$f(z)$在$|z - z_0| < R$内可展开为$z - z_0$的幂级数。

推论3

幂级数的和函数在其收敛圆周上至少有一个奇点.
——即使幂级数在其收敛圆周上处处收敛!!

例如：$f(z) = \sum_n \frac{z^n}{n^2}$在$|z| \leq 1$上绝对收敛;

但$f'(z) = \sum_n \frac{z^{n-1}}{n}$显然在$z = 1$发散。因此$z = 1$为奇点

几个推论 (续)

推论4

设函数$f(z)$在点z_0解析，且有泰勒展开式$f(z)=\sum_n c_n(z-z_0)^n$; 而α是$f(z)$距z_0最近的一个奇点，则泰勒级数的收敛半径$R=|z_0-\alpha|$.

例如

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-6}=\sum_n C_n z^n$的收敛半径是$R=2$;

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-6}=\sum_n C_n(z-\mathrm{i})^n$的收敛半径是$R=\sqrt{\mathrm{i}^2+2^2}=\sqrt{5}$;

评论

在实变函数中有些不易理解的问题，一到复变函数中就成为显然的事情。例如在实数范围内，展开式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

的成立必须受$|x| < 1$的限制。这一点往往使人难以理解——因为上式左端的函数对任何实数都是确定的而且是可导的。

评论（续）

而如果把函数中的x换成z, 在复平面内来看函数

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots ,$$

它有两个奇点±i,而这两个奇点都在此函数的展开式的收敛圆周上, 所以这个级数的收敛半径只能等于1. 因此, 即使我们只关心z的实数值, 但复平面上的奇点形成了限制.

§4.3 解析函数零点孤立性（解析函数的性质）

定义： 设函数$f(z)$在解析区域D内一点z_0处的值为零，则称z_0是解析函数$f(z)$的零点。

定义： 设函数$f(z)$在解析区域D内一点z_0处的值为零，而在z_0的某个去心领域$D(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$内处处不为零，则称$z_0$是解析函数$f(z)$的孤立零点。

定义： 设解析函数$f(z)$在解析区域D内一点z_0的某个领域$D(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$内可表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z),\ m\geq 1$$

其中$\psi(z)$在z_0解析且$\psi(z_0)\neq 0$，则称z_0是解析函数$f(z)$的m阶零点；当$m=1$时，称为单零点。

定理和推论

定理：设$f(z)$在区域D内解析，并且存在一列两两不相同的零点$\{z_n\}$收敛于z_0，则$f(z)$在D内恒为0。

推论1：不恒为零的解析函数的零点必定是孤立零点。

推论2：设函数$f(z)$和$g(z)$在D内解析，并且存在一列两两不相同的零点$\{z_n\}$收敛于z_0，有$f(z_n)=g(z_n)$，则在D内恒有$f(z)=g(z)$。

定理证明：先从z_0的一个小领域出发；证明f的幂级数展开系数均为0；反证法。

两点发现

发现1：零点的孤立性是解析函数有别于实可微函数的又一重要性质。例如：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$x=0,\dfrac{1}{n\pi}$均是$f(x)$的零点。其中0是聚点不是孤立点

发现2：一切在实轴上成立的恒等式。例如：

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1,\quad \operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$$

在复平面内都成立。

定理

z_0为不恒为0的解析函数$f(z)$的m阶零点的充要条件是:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

证明：作业！

两个例子

例1：考察函数$f(z) = z - \sin z$在原点的性质

例2：求函数$f(z) = \sin z - 1$的全部零点以及它们各自的阶数

§4.4 洛朗级数

一个以z_0为中心的圆域内解析的函数$f(z)$, 可以在该圆域内展开成$z-z_0$的幂级数. 但如果$f(z)$在z_0处不解析, 则在z_0的邻域内就不能用$z-z_0$的幂级数来表示. 但是这种情况在实际问题中却经常遇到.

因此, 在本节中将讨论在以z_0为中心的圆环域内的非解析函数的级数表示法。即有以下形式的双边级数:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} &= \cdots + c_n(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} \\ &\quad + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \\ &= I_n + I_p\end{aligned}$$

洛朗级数

只有正幂项I_p和负幂项I_n都收敛才认为原级数收敛于它们的和。正幂项是一幂级数，设其收敛半径为R_p; 对负幂项，令$\zeta = (z - z_0)^{-1}$, 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$$

这是z的幂级数, 设收敛半径为$R : |\zeta| < R$
$\Longrightarrow |z - z_0| > 1/R := R_n$

因此, 只有在$R_n < |z - z_0| < R_p$的圆环域原级数才收敛

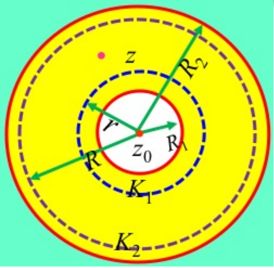
显然，如果$R_n > R_p$, 双边级数处处发散。

推广的幂级数

定理： 设$f(z)$在圆环域$R_1 < |z-z_0| < R_2$内解析，则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

其中$c_n = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\oint_C \dfrac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. C为在圆环域内绕z_0的任何一条正向简单闭曲线.



洛朗级数

这称为$f(z)$在以z_0为中心的圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的洛朗(Laurent)展开式, 它右端的级数称为 $f(z)$在此圆环域内的洛朗级数.

一个在某圆环域内解析的函数展开为含有正,负幂项的级数是唯一的, 这个级数就是$f(z)$的洛朗级数.

根据由正负整次幂项组成的级数的唯一性,一般可以用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开, 以求得洛朗级数的展开式。

例1：把$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在复平面上展开为$z$的幂级数

先把$f(z)$用部分分式表示：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$

i) 在$0<|z|<1$内：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$

注意:展开式中有负幂次项吗?

ii) 在$1<|z|<2$内：$f(z)=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

把$f(z)=z^3\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$展开成洛朗级数

除了在原点$z=0$外，$f(z)$在整个复平面解析。

因为$\mathrm{e}^{\zeta}=1+\zeta+\dfrac{\zeta}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}+\cdots$

$$\begin{aligned} z^3\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} &= z^3\Big(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\Big) \\ &= z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24z}+\cdots, \quad 0<|z|<+\infty \end{aligned}$$

注意：一个函数可以以奇点为中心展开为洛朗级数，也可以以非奇点为中心展开

函数可以在以 z_0 为中心的 (由奇点隔开的) 不同圆环域内解析，因而在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式 (包括泰勒展开式作为它的特例).

我们不要把这种情形与洛朗展开式的唯一性相混淆：所谓洛朗展开式的唯一性，是指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的.

例如：分别在$z=\mathrm{i}$和$z=-\mathrm{i}$展开函数$f(z)=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{z(z+\mathrm{i})}$

以i为中心展开

1. 在$|z-\mathrm{i}|<1$中$\Longrightarrow$泰勒展开式；
2. 在$1<|z-\mathrm{i}|<2$中$\Longrightarrow$洛朗展开式；
3. 在$2<|z-\mathrm{i}|<+\infty$中$\Longrightarrow$洛朗展开式。

以$-\mathrm{i}$为中心展开

1. 在$0<|z+\mathrm{i}|<1$中$\Longrightarrow$洛朗展开式；
2. 在$1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$中$\Longrightarrow$洛朗展开式.

把 $\sin\dfrac{z}{z-1}$ 在$0<|z-1|<+\infty$中展开成洛朗级数

$$
\begin{aligned}
& \sin\frac{z}{z-1} \\
= \ & \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) \\
= \ & \sin 1\times\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\times\sin\frac{1}{z-1} \\
= \ & \sin 1\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-1)^n}+\cdots\right. \\
+ \ & \cos 1\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-\right.
\end{aligned}
$$

洛朗展开定理的一大功能

计算积分，利用

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\mathrm{d}z \Longleftrightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, c_{-1}$$

其中C为圆环域$R_1 < |z - z_0| < R_2$内的任何一条简单闭曲线，$f(z)$在此圆环域内解析

例3：求积分$I = \oint_{|z-z_0|=r} \mathrm{e}^{\frac{1}{z-z_0}}(z - z_0)^{-3}\mathrm{d}z$

解：$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z-z_0}}(z - z_0)^{-3}$在$0 < |z - z_0| < +\infty$内解析

例4：求积分$I = \oint_{|z|=2} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$

解：$\ln(1+\zeta) = \int_C \frac{1}{1+\zeta}\mathrm{d}\zeta = \zeta - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} + \cdots,\ |\zeta| < 1$

$\ln\left(1+\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^{-n}$, $1 < |z| < +\infty$

$\Longrightarrow c_{-1} = 1 \Longleftrightarrow I = 2\pi\mathrm{i}\, c_{-1} = 2\pi\mathrm{i}$

例5：求积分$I=\oint_{|z|=2}\frac{z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}\,\mathrm{d}z$

解：$f(z)$在圆环$1<|z|<+\infty$内解析，而$|z|=2$被包含在此圆环域内，展开得：

$$f(z)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}\Big)$$

$$=-\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right)$$

$c_{-1}=-2,\implies I=-4\pi\mathrm{i}$

作业四-B （10/20 收）

pp. 80习题四：7, 9, 10, 13.(2)(5)(6), 15;
讲义pp.163的定理