Analyse

LOGARITHME

Sommaire de cette page

LOGARITHMES
Changement de base / Conversion

Comment passer d'une base de logarithme à une autre. Notamment des logarithmes népériens aux logarithmes décimaux.

Réciprocité des fonctions logarithmes et exponetielles:

Numérique		Littéral	
1000	= exp (3)	P	= exp (X)
	= e^3		= e^X
log 1000	= 3	log P	= X

Anglais : The logarithm of **x** to the base **a**
The logarithm of the base itself is **1**

CHANGEMENT DE BASE

Changement de base

Formule base quelconque

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Formule base décimale (a = 10) et népérienne (b = e = 2,718182...)

$$\log_{10} N = \frac{\ln N}{\ln 10} = \frac{\ln N}{2,3026\ldots}$$

Voir Types de logarithmes / Constante e

Explications

	Base a	Base b
*Soit le log en base **a** à exprimer en base **b***	$\log_a N = L$	
Ce qui veut dire que (fonction réciproque)	$N = a^L$	
*Reprenons en base **b***		$\log_b N$
*Remplaçons **N** par sa nouvelle valeur*		$= \log_b a^L$
Propriété des log		$= L \,.\, \log_b a$
*Soit la valeur de **L***		$L = \log_b N / \log_b a$
Et, la passerelle entre les deux bases	$\mathbf{\log_a N}$	$\mathbf{= \log_b N / \log_b a}$

Exemple de calcul

- Ma table (ma calculette) me donne bien les logarithmes népériens (ln base e = 2,718…), mais je cherche un nombre dont je ne connais que le logarithme décimal (log base 10). Comment s'y prendre?

Exemple: calculer 100 x 1000 avec les logarithmes
(Exemple volotairement simpliste pour se concentrer sur la méthode)

A = 100 **B = 1000** **P = A . B**	**log A = 2** **log B = 3** **log P = log A + log B** **log P = 2 + 3 = 5**	
P = ?	⇦	Dans ce cas simple évidemment log 5 donne **100 000.** Mais supposons que ce nombre soit plus compliqué. Que vaut P? Sachant que nous sommes en base 10. Et que nous n'avons que la table de la base "e" disponible.
	log P = ln P / ln 10 **ln P = log P . ln 10**	Changement de base selon la formule ci-dessus. On connaît logP on veut calculer ln10.
	log P = 5 **ln 10 = 2,302585093…**	On connaît la valeur du premier facteur Valeur de ln 10 selon notre table.
P = exp (log P x ln10) **P = exp (5 x 2,30…)** **P = exp (11,51292546…)**	Passage aux exponentielles (fonction réciproque du logarithme). On remplace log P par sa valeur connue.	
P = 99 999, 99… **= 100 000**	Recherche de la valeur de cette exponentielle (table ou calculette).	

TRAVAUX PRATIQUES

Base en racine	Calcul
Comment démontrer cette curiosité? $\log_{5\sqrt{5}}(5) = 2$ Voici les outils en deux formules équivalentes:	

$a^x = N$ $\log_a N = x$	$\log_{5\sqrt{5}} 125 = x$ $(5\sqrt{5})^x = 125$ $\left(5^1 \times 5^{\frac{1}{2}}\right)^x = 5^3$ $\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^x = 5^3$ $5^{\frac{3}{2}x} = 5^3$ $\frac{3x}{2} = 3$ $x = 3 \times \frac{2}{3}$ $x = 2$
Équation Il faut calculer x: $3^{x-1} . 5^{2x-1} = 375$ Voici les outils: $\log a^b = b . \log a$ $\log(a.b) = \log a + \log b$	**Calcul** $\log(3^{x-1} . 5^{2x-1}) = \log 375$ $\log(3^{x-1}) + \log(5^{2x-1}) = \log(3 \times 5^3)$ $(x-1)\log 3 + (2x-1)\log 5 = \log 3 + 3\log 5$ $x . \log 3 + 2x . \log 5 = 2\log 3 + 4\log 5$ $x(\log 3 + 2\log 5) = 2(\log 3 + 2\log 5)$ $x = 2$ La division de chaque côté par (log 3 + 2 log 5) est légitime car cette quatité est strictement positive.

Voir Nombre 2

VARIATIONS sur les LOG

Bases a / a^m	2 / 2^2	e = 2,71...
$\log_a a = 1$	$\log_2 2 = 1$	$\ln(1) = 0$
$\log_a a^2 = 2$	$\log_2 4 = 2$	$\ln(e) = 1$
$\log_a a^3 = 3$	$\log_2 8 = 3$	$\ln(10) = 2{,}302585093...$
$\log_a (a^n) = n$	$\log_2 2^n = n$	$\ln(10^2) = 2\ln(10) = 4{,}605170186...$
$\log_{a^n} (a^n) = 1$	$\log_2 (a^2) = \frac{2\ln(a)}{\ln(2)}$	$\ln(10)^2 = 5{,}301898111...$
$\log_{a^2} (a^3) = \frac{3}{2}$	$\log_{2^2} (a^3) = \frac{3\ln(a)}{2\ln(2)}$	$\ln(a^n) = n \,.\, \ln(a)$
$\log_{a^m} (a^n) = \frac{n}{m}$		

5 / 25 ...	10 / 100 ...	17
$\log_5 5 = 1$	$\log_{10} 10 = 1$	$\log_{17} 17 = 1$
$\log_5 25 = 2$	$\log_{10} 100 = 2$	$\log_{17} 17^2 = 2$
$\log_5 125 = 3$	$\log_{10} 1000 = 3$	$\log_{17} 17^{17} = 17$
$\log_5 5^n = n$	$\log_{10} 10^n = n$	$\log_{17} 17^n = n$
$\log_{5^2} (5^3) = \frac{3}{2}$	$\log_{100} 1000 = 3/2$	
$\log_{5^2} (5^4) = \frac{4}{2} = 2$	$\log_{100} 10000 = 4/2 = 2$	$\log_{17^{17}} (17^{17}) = \frac{17}{17} = 1$
$\log_{5^{1/2}} (5) = \frac{1}{1/2} = 2$	$\log_{\sqrt{10}} 10 = \log_{10^{1/2}} 10 = 1 \times 2/1 = 2$	$\log_{17^{1/2}} (17^{17}) = \frac{17}{1/2} = 34$
$\log_{5^{3/2}} (5^3) = \frac{3}{3/2} = 2$	$\log_{10\sqrt{10}} 1000 = \log_{10^{3/2}} 1000 = 3 \times 2/3 = 2$	

Logarithme et Maple

- Le calcul littéral impliquant des logarithmes sur un logiciel de calcul symbolique comme Maple nécessite de petites précautions. En effet, le logarithme n'est pas défini avec des nombres négatifs (sauf avec des nombres complexes).

```
assume(a > 0);
assume(n > 0);
assume(m > 0);
log[a](a^n);
                n~
A := a^2;
log[A](a^3);
                a~^2
                3/2
```

Ces instructions avec "assume" (supposez en anglais) indique au programme que les nombres a, n et m sont positifs tout au long des calculs.

[a] indique qu'il s'agit d'un logarithme en base a.
La réponse est n avec une tilde (~) qui indique que ce nombre est lié à des hypothèses.

La base doit être un nombre sans puissance (pourquoi?). Pour contourner cette interdiction, on calcule préalablement la base (ici en a²)

La réponse est 3/2 avec le 3 de la puissance du nombre et le 2 de la puissance de la base.

Identités pratiques pour n > 1

$$\log_n(n) = 1 \text{ et } \log_n\left(\frac{1}{n}\right) = -1$$

$$\log_2(2^n) = n \text{ et } \log_2\left(\frac{1}{2^n}\right) = -n$$

$$\log_2\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\log_2\left(\frac{2}{2^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{n-1}{n}$$

Voir Solution universelle au problème des quatre 4

Suite	Logarithmes – Calcul Logarithmes – Historique Balle qui rebondit Logarithmes et tout nombre Changement de base en exponentielle
Voir	Arrondis avec logarithmes Calcul des factorielles avec les logs Croissance Constantes Mathématiques Courbes élémentaires Échelle de Richter Exponentielle Exposants – Index Exposants et puissances Morphisme
DicoNombre	Nombre 1 Ln 2 = 0,693… Ln 10 = 2,302 …
Cette page	http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Analyse/Logabase.htm