Khan Academy

Mathématiques • Algèbre III
• Les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes
• Les logarithmes

Les logarithmes

Qu'est-ce qu'un logarithme ?

Google Classroom Facebook Twitter Courriel

Prérequis :

Les puissances et notamment les puissances négatives.

Le sujet traité

Vous apprendrez dans cette leçon ce qu'est un logarithme et comment les calculer.

Qu'est-ce qu'un logarithme ?

Les logarithmes n'existeraient pas si les "puissances " n'existaient pas !

2 puissance 4 est égal à 16. Ce qui **s'écrit** : $2^4 = 16$.

Si on se pose la question : "À quelle puissance faut-il élever 2 pour obtenir 16 ?" la réponse est 4. Si on utilise un **logarithme**, la relation qui lie $2, 4$

et 16 est : $\log_2(16) = 4$ ce qui se lit "Le logarithme en base deux de seize est quatre".

$$2^4 = 16 \iff \log_2(16) = 4$$

Les deux égalités traduisent la même relation entre 2, 4 et 16. 2 s'appelle la **base du logarithme** et 4 est **la puissance** à laquelle est élevé 2.

La différence entre ces deux égalités est que dans la forme exponentielle on isole la puissance, 16, tandis que dans la forme logarithmique, on isole l'exposant, 4.

Voici d'autres exemples :

Logarithmes		Puissances
$\log_2(8) = 3$	$\iff$	$2^3 = 8$
$\log_3(81) = 4$	$\iff$	$3^4 = 81$
$\log_5(25) = 2$	$\iff$	$5^2 = 25$

Définition du logarithme de base b

Par définition, si $a > 0$ et $b > 0$,

$$\log_b(a) = c \iff b^c = a$$

Ces deux égalités sont équivalentes, elles traduisent la même relation entre a, b et c :

- b est la base de la puissance et c'est aussi la base du logarithme,
- c est la puissance,
- a est l'argument.

A ne pas oublier

Quand on passe de la forme exponentielle à la forme logarithmique ou vice-versa, la base du logarithme et la base de l'exponentielle sont les mêmes.

À vous !

Voici des exercices où il s'agit de passer d'une égalité comportant une puissance à l'égalité équivalente comportant un logarithme.

1) Laquelle de ces égalités équivaut à $2^5 = 32$?

Réponse :

RÉPONSE EXACTE

- $\log_2(32) = 5$
- $\log_5(2) = 32$
- $\log_{32}(5) = 2$

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

Mathématiques › Algèbre III › Les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes › Les logarithmes
Les logarithmes

2) $5^3 = 125$ **équivaut à :**

Réponse :

- $\log_3(125) = 5$
- RÉPONSE EXACTE
  $\log_5(125) = 3$
- $\log_{125}(5) = 3$

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

3) $\log_2(64) = 6$ **équivaut à :**

$2^6 = 64$

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

4) $\log_4(16) = 2$ **équivaut à :**

$4^2 = 16$

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

Calculer un logarithme

Et maintenant, comment calculer un logarithme ?

On veut, par exemple, calculer $\log_4(64)$.

Si x désigne la valeur de ce logarithme, on cherche x tel que

$$\log_4(64) = x$$

Ce qui, par définition, est équivalent à :

$$4^x = 64$$

Quelle est la puissance de 4 égale à 64 ? C'est 3 car $4^3 = 64$ et donc $\log_4(64) = 3$.

Avec un peu d'entraînement, vous réduirez ces étapes et dès que vous lirez $\log_4(64)$, vous vous demanderez "**Quelle est la puissance de 4 égale à 64** ?

À vous !

N'oubliez pas que pour trouver la valeur de $\log_b(a)$, il suffit de se demander "quelle est la puissance de b égale à a ?"

5) $\log_6(36) = $ 2

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

6) $\log_3(27) = $ 3

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

7) $\log_4(4) = $ 1

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

8) $\log_5(1) = $ 0

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

Un dernier exercice

9*) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = $ -2

Vérifier

[J'ai besoin d'aide.]

Ensemble de définition

$\log_b(a)$ est défini pour toute base $b > 0$ et $b \neq 1$ et tout argument $a > 0$. Ces conditions sont la conséquence directe des propriétés des puissances.

Condition	Justification
$b > 0$	Les fonctions exponentielles de base b ne sont définies que si b est strictement positif.
$a > 0$	$\log_b(a) = c$ équivaut à $b^c = a$. Or toute puissance d'un nombre positif est positive. Donc $b^c > 0$ et par conséquent $a > 0$.
$b \neq 1$	Si b *était* égal à 1 alors, par exemple, il existerait un nombre x tel que $\log_1(3) = x$ qui serait équivalent à $1^x = 3$. Or toute puissance de 1 est égale à 1, donc un tel nombre x n'existe pas, et $b \neq 1$.

Logarithmes particuliers

On utilise le plus fréquemment deux bases.

La plupart des calculatrices disposent de touches spécifiques pour ces deux bases.

Le logarithme décimal

Le **logarithme décimal** est le logarithme de base 10. Il est noté log_{10} ou tout simplement log.

Quand la base n'est pas précisée, c'est qu'il s'agit du logarithme de base 10.

$$\log_{10}(x) = \log(x)$$

Le logarithme népérien

Le **logarithme népérien** est le logarithme de base e. *[Qu'est-ce que le nombre e ?]*

Ce logarithme est noté $\ln$:

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

L'essentiel à retenir à propos de ces deux logarithmes :

Nom	Base	Notation générale	Notation spécifique
Logarithme décimal	10	$\log_{10}(x)$	$\log(x)$
Logarithme népérien	e	$\log_e(x)$	$\ln(x)$

On utilise généralement la notation spécifique.

[Exemples de logarithmes décimaux et de logarithmes népériens.]

Pourquoi étudier les logarithmes ?

Comme on vient de le voir, la fonction logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc très utile pour résoudre les équations comportant des puissances.

Par exemple, la solution de l'équation $2^x = 5$ est $x = \log_2(5)$. On apprendra à calculer une expression comportant un logarithme dans les leçons suivantes.

Les logarithmes s'avèrent très intéressants en eux-mêmes, ils interviennent partout dans le monde qui nous entoure. Beaucoup de phénomènes physiques par exemple sont mesurés à l'aide d'échelles logarithmiques.

Quelles sont les prochaines leçons ?

Il y en a deux. La première porte sur les propriétés des logarithmes. La deuxième porte sur la formule de changement de base qui permet de calculer n'importe quel logarithme à la calculatrice.

Trier par : Le plus voté

Questions Conseils et remerciements

Vous souhaitez rejoindre la discussion ?

Connexion

Marie-Céleste Dube il y a 2 ans more

5431,08 = 400 [1- (1+0,02) ^-n] / 0,02

Réponse • 1 commentaire (1 vote) Intéressant

sanaa il y a 3 ans more

je ne conprend pas

Réponse • Commentaire (0 vote) Intéressant

Comprenez-vous l'anglais ? Cliquez ici pour participer à d'autres discussions sur Khan Academy en Anglais.

‹ Les logarithmes

Calculer un logarithme ›