



Mathématiques • Algèbre III

- Les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes
- Les propriétés du logarithme

# Les propriétés du logarithme

Les propriétés du logarithme et des exemples d'application.

 Google Classroom

 Facebook



 Twitter

Courriel

**Produit**  $\log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N)$

**Quotient**  $\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b(M) - \log_b(N)$

**Puissance**  $\log_b(M^p) = p \log_b(M)$

Ces égalités sont vraies pour tout  $M$ ,  $N$  et  $b$  pour lesquels le logarithme est défini, c'est-à-dire pour tout  $M$  et  $N > 0$  et tout  $0 < b \neq 1$ . [\[Pourquoi ?\]](#)

## Prérequis :

Vous devez savoir ce qu'est un logarithme. Si ce n'est pas le cas, cliquez [ici](#).

## Le sujet traité

Cette leçon porte sur trois propriétés des logarithmes.

On va examiner chaque propriété l'une après l'autre.

### Le logarithme d'un produit :

$$\log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N)$$

Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes de ses facteurs.

[\[Voir un exemple numérique\]](#)

On utilise cette propriété pour manipuler les expressions logarithmiques.

### Exemple 1 : Développer

*Développer* un logarithme en l'écrivant sous forme de somme.

Développer  $\log_6(5y)$ .

$5y$  est le produit de 5 par  $y$ . D'après la propriété du logarithme d'un produit :

$$\begin{aligned}\log_6(5y) &= \log_6(5 \times y) \\ &= \log_6(5) + \log_6(y)\end{aligned}$$



### Exemple 2 : Réduire

*Réduire* une somme de logarithmes en l'écrivant sous la forme d'un seul logarithme.

Réduire  $\log_3(10) + \log_3(x)$ .

Comme les deux logarithmes ont la même base, 3, on peut utiliser la propriété du logarithme d'un produit, dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}\log_3(10) + \log_3(x) &= \log_3(10 \times x) \\ &= \log_3(10x)\end{aligned}$$



## Remarque

Pour réduire une expression logarithmique en utilisant la propriété du logarithme d'un produit, il est indispensable que TOUS les logarithmes aient la **même base**.

Il est impossible, par exemple, d'utiliser la propriété du logarithme d'un produit pour réduire  $\log_2(8) + \log_3(y)$ .

## À vous !

1) Développer  $\log_2(3a)$ .

Vérifier

[\[J'ai besoin d'aide.\]](#)

2) Réduire  $\log_5(2y) + \log_5(8)$ .

$$\log_5(2) + \log_5(y) + \log_5(8)$$

Vérifier

*[J'ai compris, merci !]*

On peut utiliser la formule du logarithme d'un produit pour écrire  $\log_5(2y) + \log_5(8)$  sous la forme d'un seul logarithme :

$$\begin{aligned}\log_5(2y) + \log_5(8) &= \log_5(2y \times 8) \\ &= \log_5(16y)\end{aligned}$$

**Le logarithme d'un quotient :**

$$\log_b \left( \frac{M}{N} \right) = \log_b(M) - \log_b(N)$$

Le logarithme d'un quotient est la différence des logarithmes de ses deux termes.

*[J'ai compris, merci !]*

Si  $M = 81$ ,  $N = 3$  et  $b = 3$ , alors d'après la propriété du logarithme d'un quotient,

$$\log_3 \left( \frac{81}{3} \right) = \log_3(81) - \log_3(3).$$

Le calcul qui suit permet de vérifier la propriété dans ce cas précis :

Mathématiques > Algèbre  
III > Les fonctions  
exponentielles et les  
fonctions logarithmes > Les  
propriétés du logarithme  
**Les propriétés du logarithme**

▶ Les propriétés du  
logarithme - 1re partie

▶ Les propriétés du  
logarithme - 2e partie

📖 Les propriétés du  
logarithme

▶ Logarithme d'un produit - exemple

▶ Logarithme d'une puissance - exemple

✎ Exercices : Appliquer les propriétés du logarithme

▶ Simplifier un logarithme en plusieurs étapes

▶ Logarithme d'un produit - démonstration

▶ Logarithme d'un quotient et d'une puissance - démonstration

🔖 Démonstration des propriétés du logarithme

Leçon suivante

$$\log_3 \left( \frac{81}{3} \right) = \log_3(81) - \log_3(3)$$

$$\log_3(27) = \log_3(81) - \log_3(3) \quad \text{car } 81 \div$$

$$3 = 4 - 1$$

$$3 = 3$$

Attention, ce n'est qu'une vérification dans un cas particulier et en aucun cas une démonstration de la propriété.

On utilise cette propriété pour manipuler les expressions logarithmiques.

## Exemple 1 : Développer

Développer  $\log_7 \left( \frac{a}{2} \right)$  en l'écrivant sous forme de différence de logarithmes.

$$\log_7 \left( \frac{a}{2} \right) = \log_7(a) - \log_7(2)$$

## Exemple 2 : Réduire

Réduire  $\log_4(x^3) - \log_4(y)$ .

Comme les deux logarithmes ont la même base, 4, on peut appliquer la propriété du logarithme d'un quotient, dans l'autre sens :

$$\log_4(x^3) - \log_4(y) = \log_4\left(\frac{x^3}{y}\right)$$



## Remarque

Pour réduire une expression logarithmique en utilisant la propriété du logarithme d'un quotient, il est indispensable que TOUS les logarithmes aient la **même base**.

Il est impossible, par exemple, d'utiliser la propriété du logarithme d'un quotient pour réduire  $\log_2(8) - \log_3(y)$ .

## À vous !

3) Développer  $\log_b\left(\frac{4}{c}\right)$ .

Vérifier

*[J'ai besoin d'aide.]*

4) Réduire  $\log(3z) - \log(8)$ .

Vérifier

[\[J'ai besoin d'aide.\]](#)

## Le logarithme d'une puissance :

$$\log_b(M^p) = p \log_b(M)$$

Le logarithme d'une puissance est le produit de l'exposant par le logarithme de la base.

[\[Voir un exemple numérique.\]](#)

On utilise cette propriété pour manipuler les expressions logarithmiques.

## Exemple 1 : Développer

*Développer* un logarithme en l'écrivant comme multiple d'un autre logarithme.

Développer  $\log_2(x^3)$ .

$$\begin{aligned}\log_2(x^3) &= 3 \times \log_2(x) \\ &= 3 \log_2(x)\end{aligned}$$

## Exemple 2 : Réduire

*Réduire* un multiple d'un logarithme en l'écrivant sous forme d'un logarithme seul .

Réduire  $4 \log_5(2)$ ,

D'après la propriété du logarithme d'une puissance :

$$\begin{aligned} 4 \log_5(2) &= \log_5(2^4) \\ &= \log_5(16) \end{aligned}$$

**À vous !**

**5) Développer  $\log_7(x^5)$ .**

Vérifier

*[J'ai besoin d'aide.]*

**6) Réduire  $6 \ln(y)$ .**

Vérifier

*[J'ai besoin d'aide.]*

## D'autres exercices

Dans ces exercices, il faudra utiliser successivement plusieurs propriétés.

**1)  $\log_b\left(\frac{2x^3}{5}\right)$  est égal à :**

Réponse :

☐  $3 \log_b(2x) - \log_b(5)$



☐  $3 \log_b(2x) + \log_b(5)$

☐  $\log_b(2) + 3 \log_b(x) - \log_b(5)$

☐  $\log_b(2) - 3 \log_b(x) - \log_b(5)$

Vérifier

*[J'ai besoin d'aide.]*

**2)  $3 \log_2(x) - 2 \log_2(5)$  est égal à :**

Réponse :

☐  $\log_2\left(\frac{x^3}{25}\right)$

☐  $\frac{\log_2(x^3)}{\log_2(25)}$

☐  $-6 \log_2\left(\frac{x}{5}\right)$

☐  $-6 \log_2(x - 5)$

Vérifier

*[J'ai besoin d'aide.]*

Trier par :

Le plus voté



[Questions](#)[Conseils et remerciements](#)

**Vous souhaitez rejoindre la discussion ?**

Connexion

Comprenez-vous l'anglais ? Cliquez ici pour participer à d'autres discussions sur Khan Academy en Anglais.

---

◀ Les propriétés du logarithme - 2e partie  
Logarithme d'un produit - exemple ▶