Notes

Logarithmes décimaux
Complément de mathématiques

Accueil du Site

Fonction "Logarithme décimal"

On définit la fonction logarithme décimal comme la fonction réciproque de la fonction :

$$\boxed{y = 10^x}$$

La réciprocité des deux fonctions est mise en lumière par la formule :

$$\boxed{y = 10^x \Leftrightarrow x = \log y}$$

Formule qui se lit :
"y = 10 puissance x" *équivalent à* ***"x = logarithme décimal de y"***

Questions - Réponses

Les réponses apparaîtront dans le coin supérieur gauche de l'écran lorsque vous passerez le pointeur de la souris sur les icônes : R ci-dessous.

Questions 0

En appliquant les définitions ci-dessus :
Quel est le logarithme décimal de 1000 ?
Quel est le logarithme décimal de 0,01 ?
Réponses ici : R

Exemple 1

Voici quelques valeurs :

x =	1/10 000	1/1000	1/100	1/10	1	10	100	1000	10 000
x =	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}
log(x)=	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Constatez que la variation de la fonction logarithme est beaucoup plus faible que celle de sa variable.
Si x passe de 1000 à 10 000, log(x) passe sulement de 3 à 4 !

C'est en particulier la raison pour la quelle on se sert en physique de cette fonction logarithme pour évaluer des grandeurs qui varient peu en fonction de la variable.
C'est le cas des sensations physiologiques en fonction de la puissance stimulante.
Voir la rubrique "déciBels"

Questions 1

Quel est le logarithme décimal de 1 milliard ?
Quel est le logarithme décimal de 0,0001 ?
R

Bases des logarithmes

Ici le nombre **10** joue un rôle particulier dans la définition de ce logarithme.
On l'appelle sa **base**.
Les **logarithmes décimaux** sont , comme leur non l'indique, à **base 10**.
Il existe d'autres fonctions logarithme utilisant d'autres bases.
?

En pratique, **" log y "** ou **" log(y) "** désignent toujours le logarithme décimal (en base 10).

Une autre écriture que vous avez des chances de rencontrer :

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y = \log y$$

La base est mise en indice en bas à droite de "log"...

Graphiques représentant la fonction log(x)

La fonction log(x) n'est pas seulement définie pour des valeurs de x de type 10^n comme dans les exemples précédents.

log(x) est défini pour tout x réel positif.

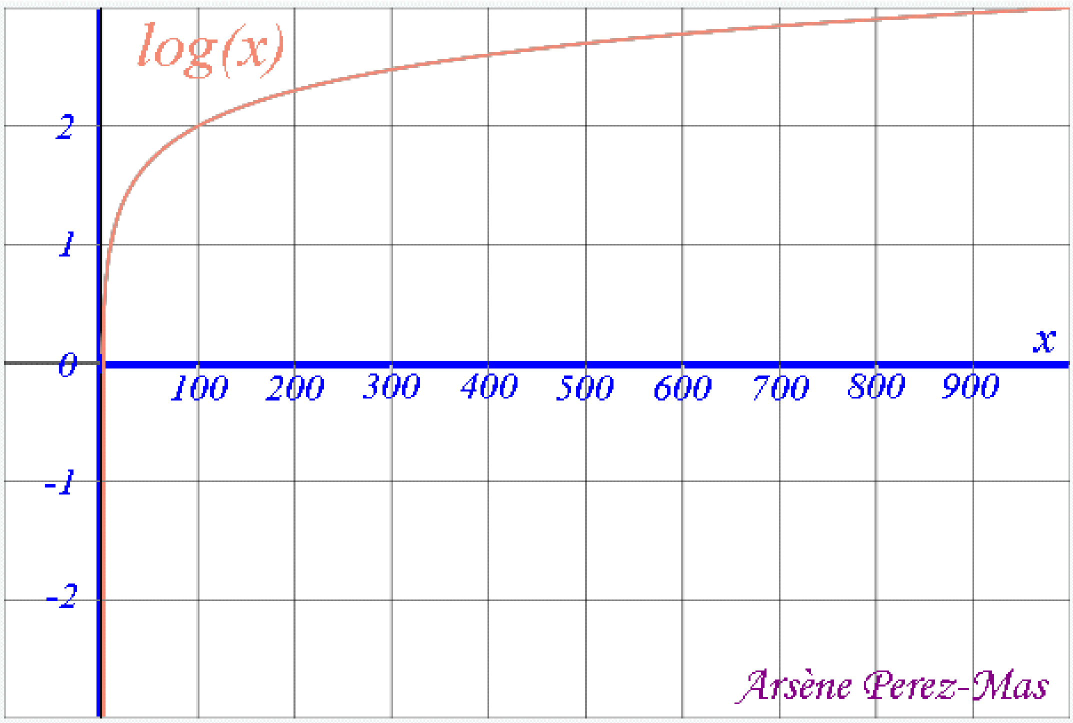
J'ai, tracé la fonction *y= log(x)*
à l'aide du traceur que j'ai programmé en Java sur mon site aux adresses cliquables ci-dessous :

Grapheur Cartésien	Grapheur Paramétrique

J'ai choisi deux échelles très différentes.

D'abord avec x variant dans l'intervalle :]0,1000]

(le1° crochet ']' signifie que je ne prends par 0 dans l'intervalle),
alors que 1000 est pris.



Observons

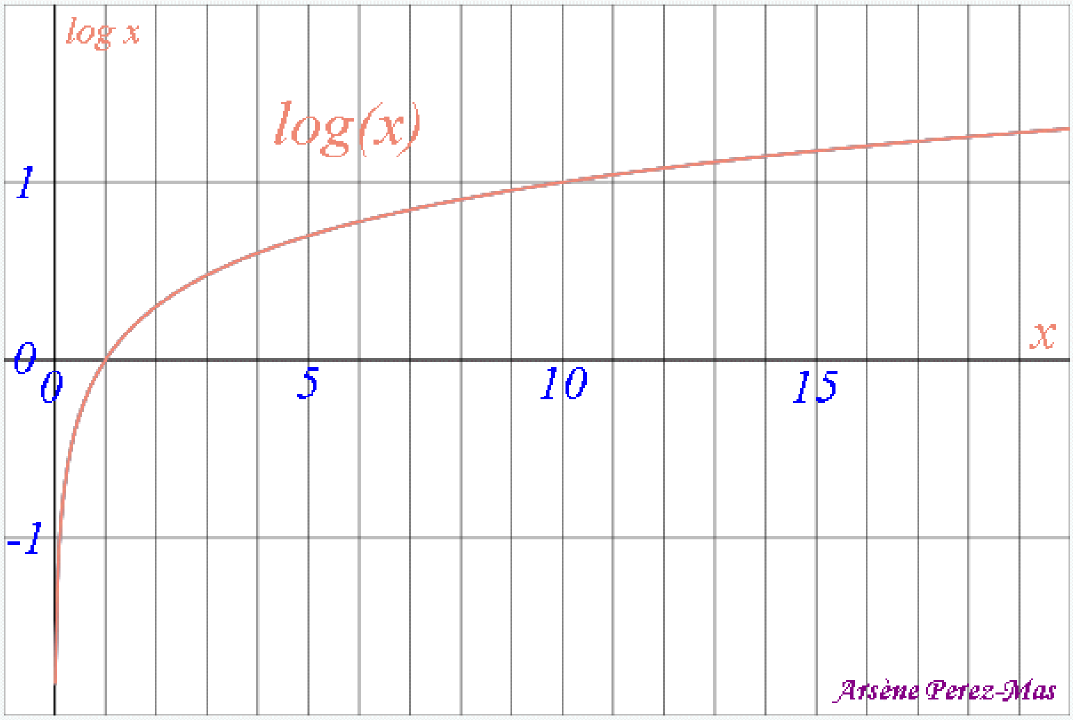
- Il existe une valeur de log(x)
  pour toute valeur de x comprise entre 0 (non compris) et + l'infini.
- En revanche, on ne peut pas calculer le logarithme d'une valeur de x
  nulle ou négative.
- Vérifier sur cette courbe que log(100) =2 et que log(1000) = 3

  Conclusion : la fonction ainsi créée par les mathématiciens,
  englobe les propriétés que nous avions découvertes pour les nombres 10, 100, 100
  etc.
- **Que la fonction log(x) augmente très peu même quand x augmente beaucoup.**
  C'est bien la raison pour laquelle elle est utilisée en physique.

Vue à une autre échelle.

Avec x variant dans l'intervalle :]0,10]

(échelle 100 fois plus petite que la précédente)
pour se focaliser au voisinnage du zéro.



Vérifications : log(10)=1 et log(2)=0.3 approx (vérifiez à ma calculatrice).

Observons et retenons ce qui est en rouge !

- `log(1) = 0`
  C'est évident : 10^0 =1 par définition même des puissances (voir plus haut).
  (vous devriez le savoir par coeur...)

- Signe de log(x)
  - Négatif pour x < 1
  - Positif pour x >1
  - log(1) = 0
    C'est évident : 10^0 =1 par définition même des puissances (voir plus haut).
    Donc, en en renversant fonction et variable : log(1)=0.

- **On ne peut pas calculer le logarithme d'une valeur de x nulle ou négative**.

- **Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, log(x) tend vers moins l'infini.**
  (Ses valeurs sont négatives et de valeur absolue très grande).

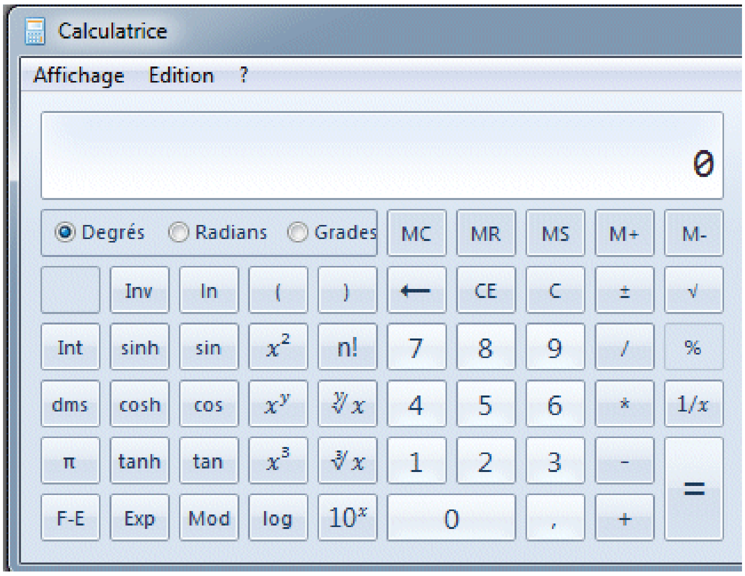
  log(0,000 000 000 1) = - 10
  Car 0, 000 000 000 1) = 1/10 000 000 000 = 10 puissance -10

Questions 2

1. Sans le calculer, quel est le signe de `log(0,125)` ?
2. Sans le calculer, quel est le signe de `log(123,456)` ?
3. `log(-2)` = ?

R

A la calculatrice



D'abord nous allons vérifier, pour nous rassurer, qu'elle sait aussi bien calculer que nous

en lui proposant de nous afficher log(1000) et log(0,001) que vous avez calculés dans l'exercice précédent.
Je tape 1000 puis la touche [log] dans le rang du bas.
Surprise ?

Je tape 0,001 puis la touche [log] dans le rang du bas du clavier à côté du zéro..
Surprise ?

Nous passons ensuite à des valeurs quelconques de x .

Questions 3

1. log(2) = ?
2. log(0,125) = ?
3. log(1 123,456) = ?
4. Quel est le **gain** correspondant à un doublement de la puissance ?

Propriétés de la fonction logarithme

Propriétés de base

$\boxed{log(a \times b) = log(a) + \log(b)}$	(1)
$\boxed{log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$	(2)
$\boxed{log(a^b) = b \times \log(a)}$	(3)

Elles sont indispensables pour pouvoir faire des calculs ou transformer des formules contenant des logarithmes,
Pour les apprendre facilement, il faut faire de nombreux exercices.
On finit par les mémoriser par habitude.

De la propriété (2) on tire : log(1/b) = log(1)-log(b) = 0 - log(b) = - log(b)

$$\log\frac{1}{x} = -\log x$$
$$x > 0$$

Questions 4

Quelques questions seulement pour amorcer.
Un peu plus loin, les exercices porteront sur la pratique même des dB.

1. Calculer log(20) sans calculatrice ni courbe, mais sachant que log(2) = 0.3

2. Sachant que log(2) = 0.3 (approximativement)
   et que log(3) = 0,777 (approximativement)
   Calculer log(1,5) sans calculatrice ni courbe.

3. Sachant que log(2)=0,3 (approximativement)
   calculer log(256) sans calculatrice ni courbe.