

# ASSERVISSEMENT

## I - SYSTEMES ASSERVIS – NOTIONS

### A. Structure d'un système asservi

Nous allons dans un premier temps lister les éléments nécessaires pour réaliser un système asservi.

#### 1. Présentation

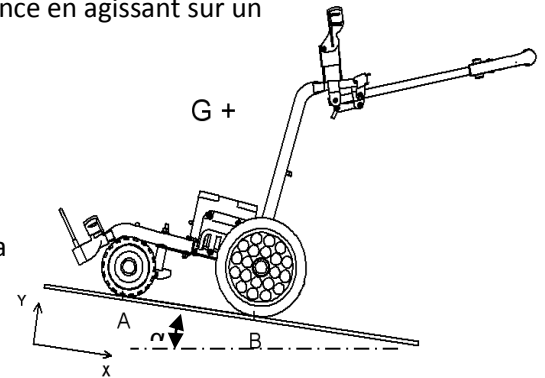
Un des objectifs d'un système asservi est de remplacer l'homme dans une tâche de régulation d'une grandeur, le régulateur ajuste alors automatiquement la commande afin de maintenir la grandeur de sortie à la valeur désirée. Nous allons, pour établir la structure d'un système automatisé commencer par étudier le fonctionnement d'un système dans lequel l'homme est la « partie commande ».

##### a) Exemple : "régulation" de la vitesse du chariot de golf

Le golfeur décide de la vitesse avec laquelle il veut que le chariot avance en agissant sur un potentiomètre, qui va régler la tension moteur.

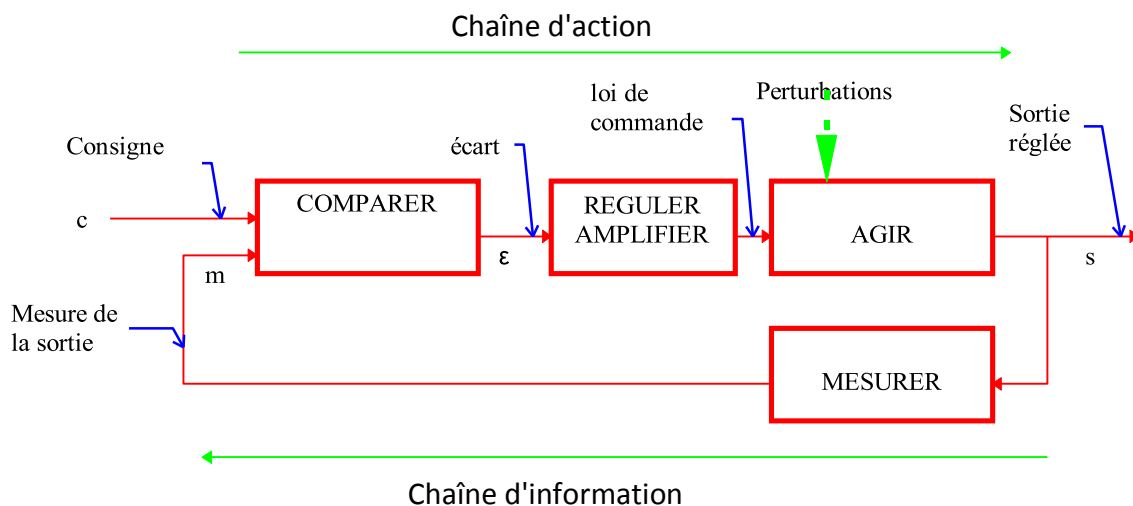
Dans la version industrielle, si le golfeur arrive dans une montée, le chariot va ralentir. L'utilisateur va alors constater cette diminution de vitesse, puis pour maintenir son allure, il va agir sur le potentiomètre afin de demander plus de puissance au moteur et ainsi redonner de la vitesse au chariot.

L'utilisateur devrait faire l'action inverse dans une descente.



##### b) Schéma de structure

On peut donc définir la structure de la "régulation" par le schéma suivant



Ici, les actions 'mesurer', 'comparer' et 'réguler' sont assurées par l'utilisateur. Un asservissement consiste à exécuter la même chose mais de manière automatique avec des composants électronique (le plus souvent). On retrouve alors la même structure dans un système asservi. Cette structure fait intervenir deux chaînes, une chaîne d'action et une chaîne d'information. Ce type de système est appelé aussi système bouclé.

## 2. Constituants

### (a) Partie commande ou régulateur:

Le **régulateur** se compose d'un **comparateur** qui détermine l'écart entre la consigne et la mesure et d'un **correcteur** qui élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande.

Dans exemple ci-dessus, équivalent 'humain' : . . . . . :

### (b) Actionneur:

C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité. Il est en général associé à un pré-actionneur qui permet d'adapter l'ordre (basse puissance) et l'énergie.

(ex: . . . . .)

### (c) Capteur:

Le capteur prélève sur le système la grandeur réglée ( information physique ) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur. (équivalent humain : . . . . . )

## 3. Informations

### (a) Entrée Consigne

La consigne, est la valeur que l'on désire atteindre, c'est la grandeur réglante du système :

. . . . .

### (b) Sortie régulée

La sortie régulée représente le phénomène physique que doit régler le système, c'est la raison d'être du système . . . . .

### (c) Perturbation

On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations. ex : . . . . .

### (d) Écart, Erreur

On appelle écart ou erreur, la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables, on la réalisera donc en général en la consigne et la mesure de la sortie.

## B. Régulation et asservissement

### 1. Régulation:

On appelle régulation un système asservi qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne (constante) indépendamment des perturbations. Ex: Régulation de température

### 2. Asservissement

On appelle asservissement un système asservi dont la sortie doit suivre le plus fidèlement possible la consigne (consigne variable). Ex: suivi de trajectoire par un missile

## C. Concepts importants

## 1. Précision

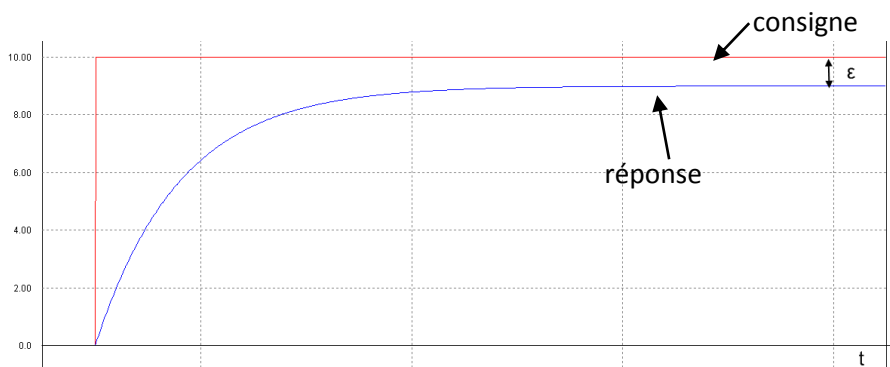
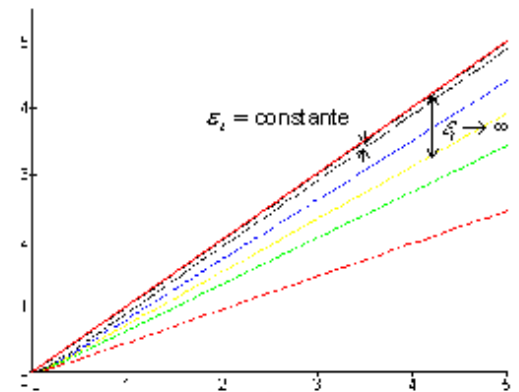
La précision est caractérisée par l'écart entre la consigne et la sortie.

**Précision statique**

On appelle précision statique, l'écart entre la sortie et l'entrée lorsque le système est stabilisé ( $t \rightarrow +\infty$ ).

**Erreur indicielle:**

Dans le cas où la consigne est constante (échelon) on définira l'erreur indicielle comme la différence entre la sortie demandée et la sortie obtenue en régime permanent. L'erreur peut être constante, nulle ou tendre vers l'infini.

**Erreur de traînage**

Si la consigne est une rampe  $e(t)=a.t$ , erreur de traînage l'écart entre la droite de consigne et la sortie, cette erreur peut être nulle, constante ou tendre vers l'infini.

**Précision dynamique** : l'écart entre la sortie et l'entrée pendant l'évolution du signal.

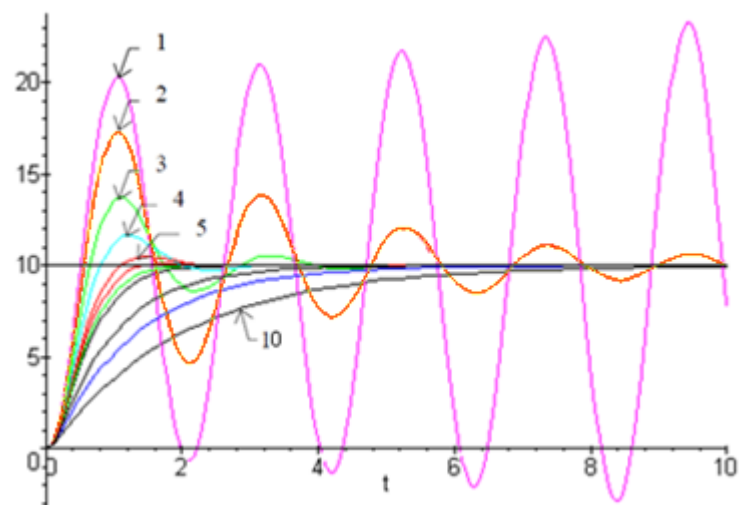
## 2. Stabilité

On dit qu'un système est stable si pour une entrée constante, la sortie reste constante quelles que soient les perturbations.

Les courbes de 2 à 10 sont caractéristiques de la réponse d'un système stable, pour une entrée constante, la sortie évolue vers une sortie constante.

La courbe 1 est caractéristique d'un système instable, la sortie diverge.

On s'aperçoit en comparant les réponses 2 à 10 que le critère strict de stabilité n'est pas un critère judicieux de réglage d'un système asservi. En effet, est-il envisageable qu'un système atteigne sa position définitive après un grand nombre d'oscillations ?



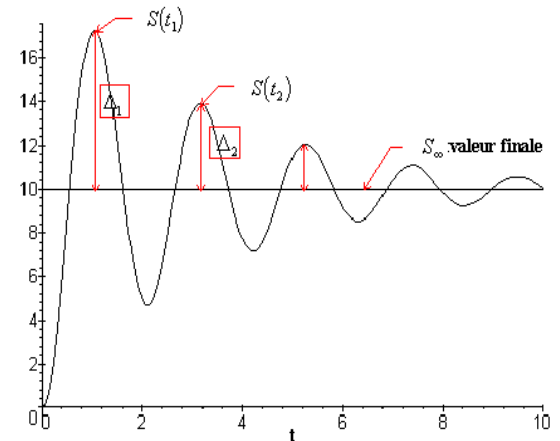
### Dépassement

Un critère efficient de la stabilité est le dépassement. Ce critère permet de définir la notion de stabilité relative.

Le dépassement est mesuré par le taux de dépassement. On définit le premier dépassement par :

$$D_1 \% = \frac{S(t_1) - S_\infty}{S_\infty} = \frac{\Delta_1}{S_\infty}$$

avec  $S_\infty$ , la valeur finale de la sortie et  $S(t_1)$  la valeur de la sortie à l'instant du premier dépassement.

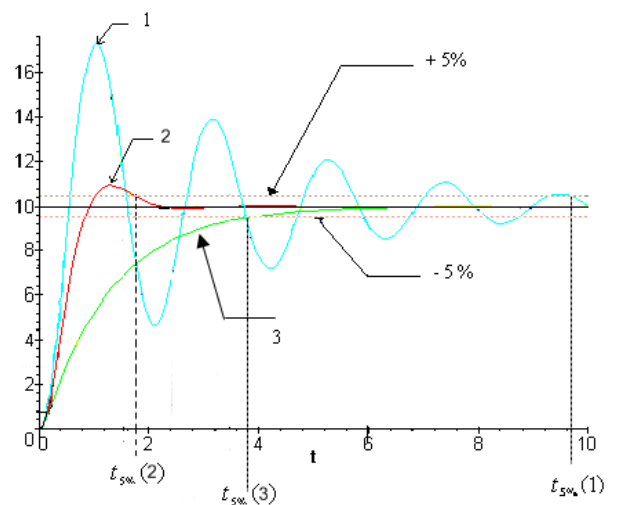


### 3. Rapidité

La rapidité caractérise le temps mis par le système pour que la sortie atteigne sa nouvelle valeur. On définit, pour caractériser la rapidité, le temps de réponse à 5%

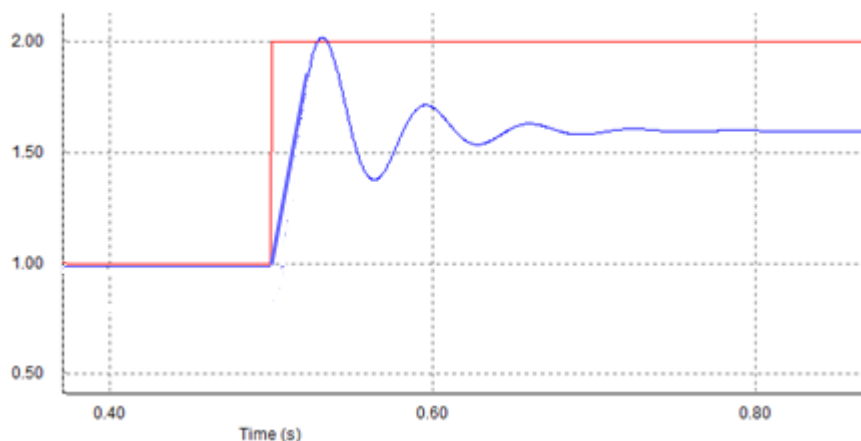
( $t_{5\%}$ ), c'est le temps que met le système pour rester la bande des 5% de sa valeur finale.

La détermination du temps de réponse à 5% sur les courbes de réponses ci-contre montre que la sortie 2 a le temps de réponse le plus faible, la courbe 1 est la plus lente.



**Exemple :** On donne la réponse ci-dessous.

Calculer le temps de réponse à 5%, le dépassement et l'erreur indicielle.



## II - SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

Cette année, l'étude d'asservissement de systèmes se fera uniquement dans le cadre de systèmes linéaires continus et invariants (ce qui exclue les systèmes numériques). Dans ce chapitre, nous allons définir ce que cela signifie.

### A. Présentation

#### 1. Notions de systèmes dynamiques et perturbations.

On appelle système dynamique un système dont l'étude ne peut être réalisée qu'en prenant en compte les valeurs passées du phénomène. Les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrées. Les phénomènes d'inertie (inertie mécanique, inertie thermique...) influent sur le comportement du système.

Nous limiterons notre étude aux seuls systèmes linéaires continus et invariants.

#### 2. Systèmes linéaires continus et invariants.

##### a) Systèmes linéaires

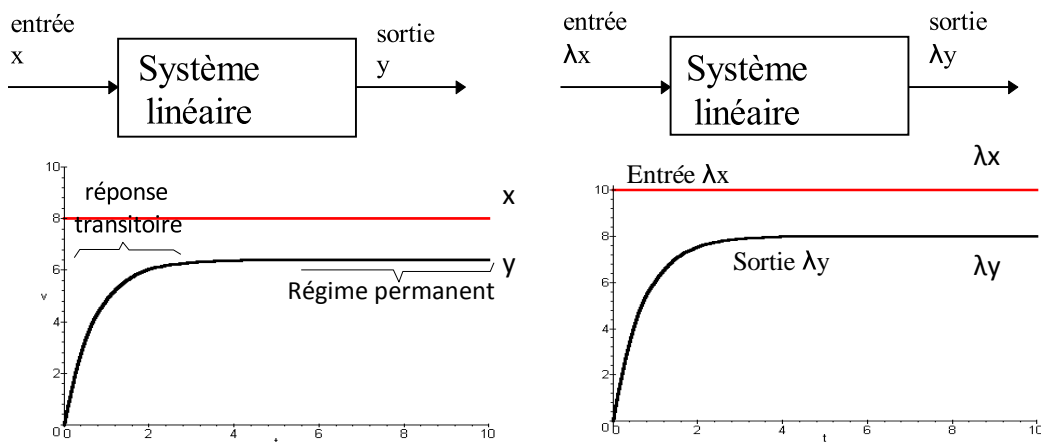
###### (1) Définition

Un système linéaire est un système où les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. Les systèmes linéaires se caractérisent principalement par deux propriétés, la **proportionnalité** et l'**additivité**.

###### (2) Principe de proportionnalité

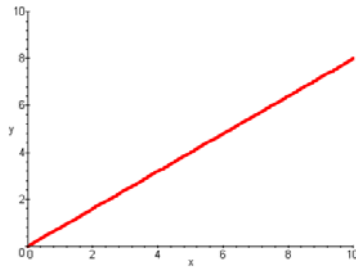
L'effet est proportionnel à la cause :

Si  $y$  est la réponse à l'entrée  $x$ , alors  $\lambda y$  est la réponse à  $\lambda x$ .

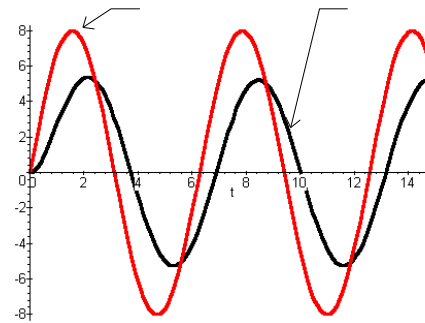


**Remarque:** L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.

La caractéristique Entrée/Sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente  $\frac{Y}{X}$  est appelée gain du système.



La réponse, en régime définitif, d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée



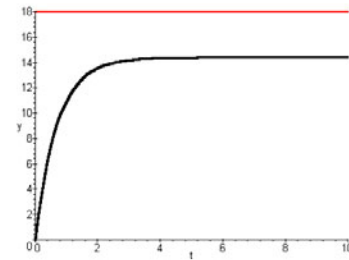
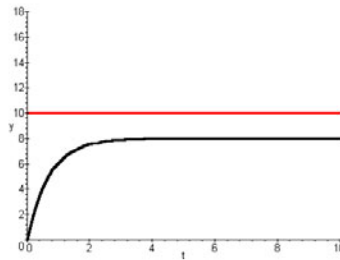
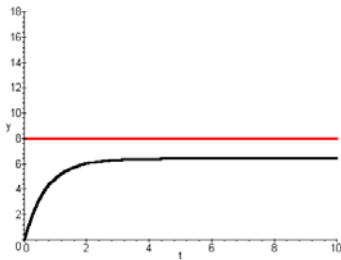
### (3) Principe d'additivité ou de superposition:

Si  $y_1$  est la réponse à  $x_1$ ,

si  $y_2$  est la réponse à  $x_2$ ,

alors la réponse à  $x_1+x_2$  est

$$y=y_1+y_2.$$

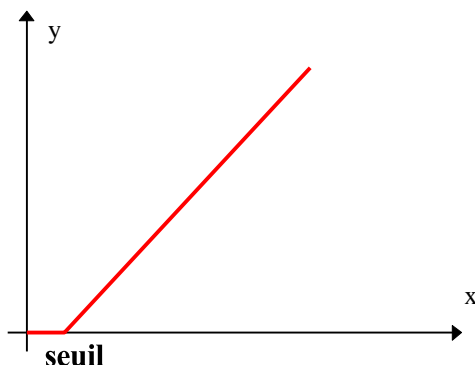


Le principe de superposition est important car il va nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par **additivité** et **proportionnalité** la réponse à des sollicitations plus complexes.

### (4) Principales non - linéarités

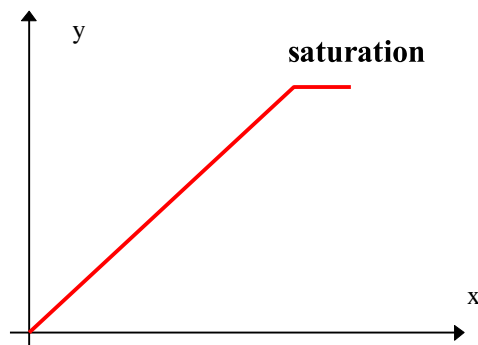
#### Seuil

Un système présente un seuil lorsque la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse un seuil mini. Un grand nombre de système présente un seuil de fonctionnement. Ex, en méca, ces seuils ont souvent pour origine des frottements secs.



#### Saturation

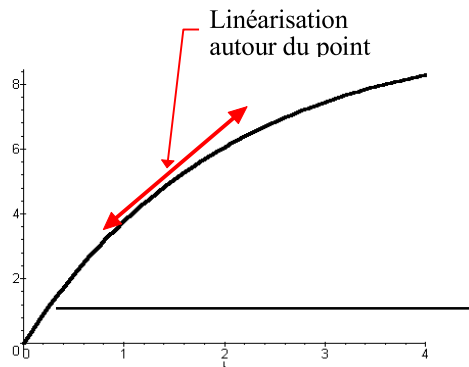
Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite. Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit à des limites des interfaces de puissance (saturation des ampli-Op).



### Courbure

La quasi-totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcé.

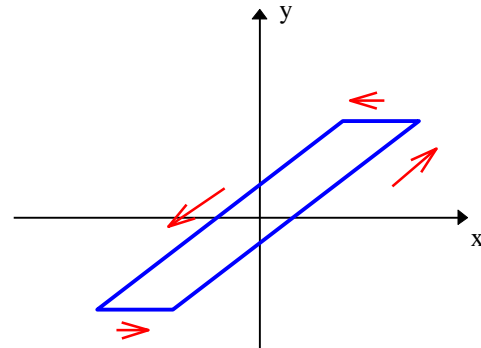
Dans la plupart des cas, le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de **linéariser** autour d'un point de fonctionnement.



### Hystérésis

Un système présente une réponse en hystérésis lorsque le comportement en « montée » est différent de celui en « descente ».

par exemple: cycle de magnétisation.



### b) Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions continues du type  $f(t)$  avec  $t$  une variable continue (en général le temps). On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets, par exemple les systèmes informatiques.

### c) Système invariant

On dit qu'un système est invariant lorsque ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps.

## B. Représentation des systèmes linéaires

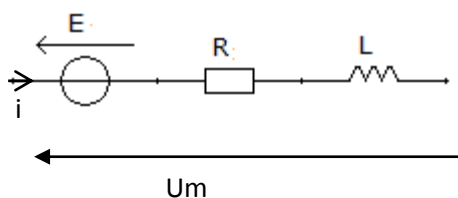
Pour réaliser une commande automatique, il est nécessaire d'établir les relations existant entre les entrées (variables de commande) et les sorties (variables d'observation). L'ensemble de ces relations s'appelle "modèle mathématiques" du système.

### 1. Schéma physique

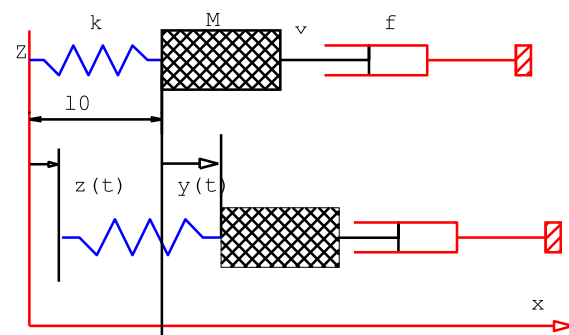
Une des représentations qui va nous permettre d'analyser un système est bien sûr son schéma physique (schéma électrique, mécanique, électronique,...)

Ce type de schéma utilise la normalisation de chaque technologie

#### Schéma électrique - MCC

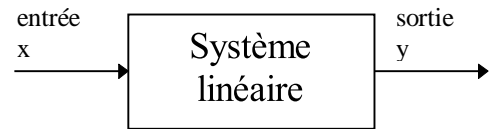


#### Schéma mécanique - Masse Ressort amortisseur



## 2. Représentation par les équations différentielles.

Un système dynamique linéaire peut être représenté par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.



L'équation générale d'un système linéaire est de la forme

$$b_m \frac{dy^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{dy^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_2 \frac{dy^2}{dt^2} + b_1 \frac{dy^1}{dt^1} + b_0 \cdot y = a_n \frac{dx^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{dx^2}{dt^2} + a_1 \frac{dx^1}{dt^1} + a_0 \cdot x$$

Rq: dans le cas des systèmes réels  $m \geq n$ .

Nous ne savons résoudre dans le cas général que les équations différentielles du premier et du second ordre et dans quelques cas particuliers des équations d'ordre supérieur.

Le problème de l'automatisation est plus complexe que la résolution puisqu'il s'agit de déterminer la loi d'entrée  $x$  qui permet d'obtenir la sortie désirée  $y$ . La représentation par l'équation différentielle nécessite, pour connaître la réponse à une entrée, de résoudre l'équation !

## 3. Représentation par la transformée de Laplace

La transformation de Laplace permet de passer du domaine temporelle (variable le temps  $t$ ) au domaine symbolique (variable : opérateur de Laplace  $p$ ) est définie de la manière suivante :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Les principales propriétés de la transformation de Laplace sont résumées dans les lignes page suivante :

opération	Temporelle	Laplace
addition	$f(t)+g(t)$	$F(p)+G(p)$
linéarité	$a.f(t)$	$a.F(p)$
Dérivation	$\frac{d f(t)}{dt}$	$p.F(p)-f(0^+)$  Si $f(0^+) = 0$ (condition de Heaviside) l'opération de dérivation correspond à une multiplication par $p$ : $\mathcal{L}\left(\frac{d f(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p)$
intégration	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$ avec $g$ primitive de $f$  Si $g(0^+) = 0$ , l'intégration (ou primitive) revient à diviser par $p$ : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{F(p)}{p}$
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$	
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$	



L'utilisation de la transformée de Laplace permet de ramener la résolution d'une équation différentielle à une manipulation algébrique.

En annexe 1, on donne les transformés de Laplace des fonctions usuelles.

### Exemple d'application de Laplace : MCC

L'équation électrique du moteur est obtenue à partir du schéma électrique vu précédemment :

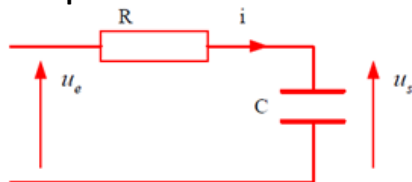
$U_m = \dots\dots\dots$

Passons dans le domaine symbolique :  $U_m(t) \rightarrow U_m(p)$ ,  $E(t) \rightarrow E(p)$ ,  $i(t) \rightarrow I(p)$

Nous supposons les conditions initiales, nulles (conditions de Heaviside). L'équation temporelle devient :

$\dots\dots\dots$

### Exemple 2 : Circuit RC



Équations temporelles :

$$U_e(t) - U_s(t) = R \cdot i(t)$$

$$i = C \times \frac{dU_s}{dt}$$

En Laplace, on obtient :

$\dots\dots\dots$

On prend pour l'entrée  $U_e(t) = U_0$ , donc dans le domaine symbolique  $U_e(p) = \frac{U_0}{p}$ .

$$U_s(p) = \frac{1}{1+RCp} \times \frac{U_0}{p}$$

Rq : A partir de l'expression de Laplace de  $U_s(p)$ , on peut retrouver l'expression de  $U_s(t)$  (cf. annexe 2). On trouve alors :

$U_s(t) = \dots\dots\dots$  (solution que l'on aurait retrouvée en résolvant l'équation différentielle du 1er ordre)

## 4. Représentation par le schéma fonctionnel - Fonction de transfert

Afin de modéliser un système, nous allons utiliser une représentation graphique sous forme de blocs. Chaque bloc du schéma caractérise une des fonctions du système.

Dans chaque bloc, sera inscrite la relation entre entrée et sortie du composant : sa fonction de transfert.

### a) Fonction de transfert

Un système linéaire continu invariant est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$b_m \frac{dy^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{dy^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_2 \frac{dy^2}{dt^2} + b_1 \frac{dy^1}{dt^1} + b_0 \cdot y = a_n \frac{dx^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{dx^2}{dt^2} + a_1 \frac{dx^1}{dt^1} + a_0 \cdot x$$

Si on suppose les conditions initiales nulles (conditions de Heaviside), en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité, on obtient la relation suivante en Laplace :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}$$

Ce rapport entre la sortie et l'entrée est appelé fonction de transfert ou transmittance.

La fonction de transfert d'un composant ou d'un système est le rapport : grandeur de sortie sur grandeur d'entrée.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

### Exemple 1 : Circuit RC.

La fonction de transfert du circuit RC est donnée par la relation :

$$H_{RC}(p) = \frac{U_s(p)}{U_e(p)} \quad \text{En utilisant la relation trouvée précédemment, on a : } H_{RC}(p) = \frac{U_s(p)}{U_e(p)} = \frac{1}{1+RC \cdot p}$$

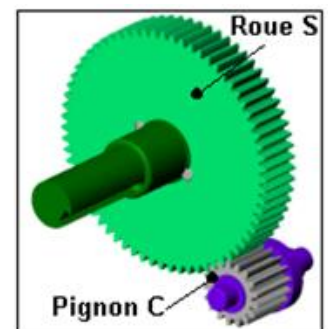
Rq : On retrouve la relation obtenue en complexe pour un filtre RC , en remplaçant le terme  $j\omega$  par  $p$ .

### Exemple 2 : réducteur à engrenages à axes //

Un réducteur basique constitué d'un engrenage à  $Z_1$  dents (pignon C) et un autre à  $Z_2$  dents (roue S) permettant de réduire la vitesse angulaire d'entrée  $w_c$  du pignon. La relation entre la vitesse du pignon est de la roue est :  $\frac{w_s}{w_c} = -\frac{Z_c}{Z_s}$

La fonction de transfert du réducteur est donc :

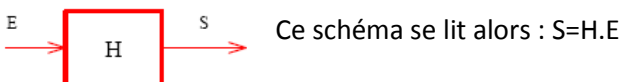
$$H(p) = \frac{w_s(p)}{w_c(p)} = -\frac{Z_c}{Z_s}$$



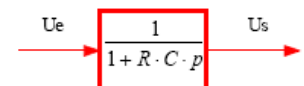
On voit qu'ici, la fonction de transfert est un simple nombre (pas de variable  $p$ ), un simple gain.

### b) Schéma fonctionnel (schéma bloc)

Un schéma bloc peut permettre de représenter un système isolé simple.

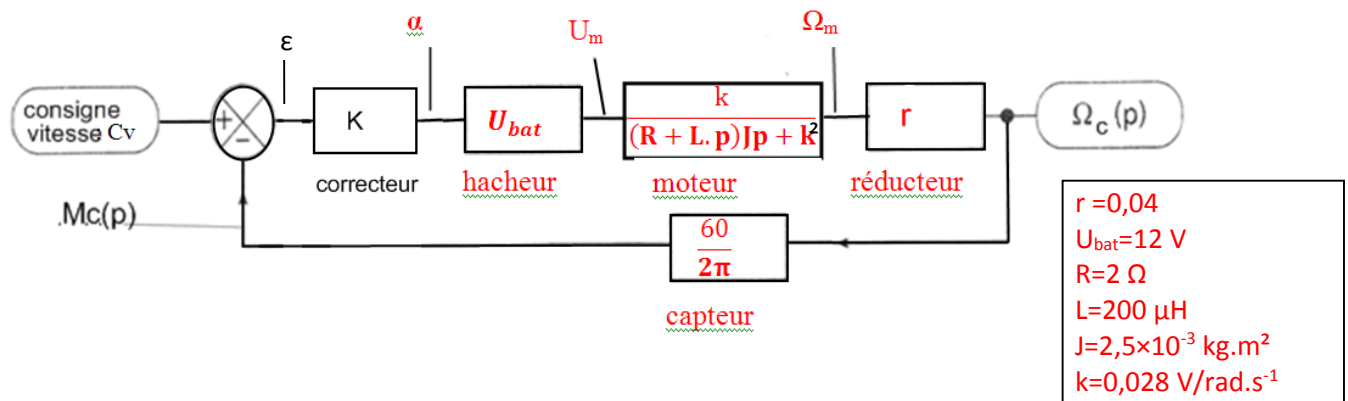


Par exemple, le circuit RC va être schématisé par le bloc suivant.  
L'élément dans le bloc représente la fonction de transfert du composant.



On peut également imbriquer plusieurs blocs afin de représenter un système plus complexe. Chaque composant du système est représenté par un bloc. Les branches entre les blocs portent les variables intermédiaires globales du système.

**Exemple** : schématisation du chariot de golf avec régulation de vitesse est :



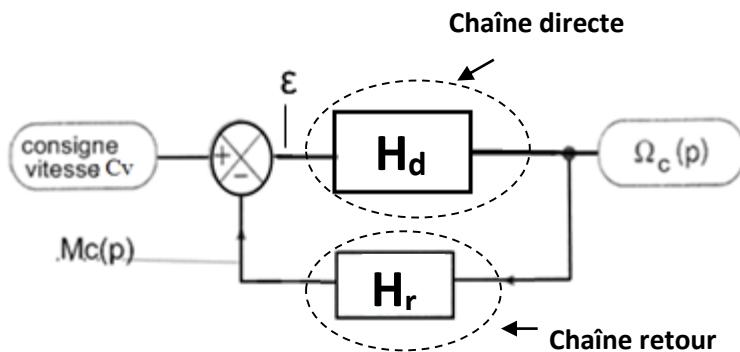
L'allure globale du schéma renseigne aussi sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée). On remarque bien qu'ici, on a un système en boucle fermée, par retour de  $\Omega_c$  sur la consigne par l'intermédiaire du comparateur.

Lorsque plusieurs blocs sont imbriqués en ligne, on peut les remplacer par un seul bloc. Par exemple, ici, on a :  $\Omega_c = r \cdot \Omega_m$  ;  $\Omega_m = H_m(p) \cdot U_m$  ( $H_m(p)$  fonction de transfert du moteur) ;  $U_m = U_{bat} \cdot \alpha$  et  $\alpha = K \cdot \varepsilon$

On en sort :  $\Omega_c = r \cdot H_m(p) \cdot U_{bat} \cdot K \cdot \varepsilon$

On note  $H_d$  la fonction de transfert équivalente aux fonctions des quatre blocs :  $H_d = r \cdot H_m \cdot U_{bat} \cdot K$

On peut donc remplacer les quatre blocs par un seul, dont la fonction de transfert est le produit des quatre. On arrive avec le schéma page suivante :



Avec  $H_d = r \cdot H_m \cdot U_{bat} \cdot K$  : fonction de transfert de la chaîne directe

Et  $H_r = \frac{60}{2\pi}$  : fonction de transfert de la chaîne de retour

A partir d'un tel schéma, on introduit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par la relation :

$$\text{FTBO} = \frac{Mc(p)}{\varepsilon(p)} = H_d(p) \cdot H_r(p) \quad (\text{produit de toutes les fonctions de transfert})$$

On définit également la fonction de transfert en boucle fermée, donnant la relation entre sortie et entrée.

$$\underline{FTBF} = \frac{\Omega c(p)}{C_v(p)} = \frac{H_d(p)}{1 + H_d(p) \cdot H_r(p)}$$

Démonstration: .....

.....

.....

.....

.....

Exemple du chariot :

FTBO = .....

FTBF = .....

.....

.....

.....

.....

.....

### 5. Etude des systèmes dynamiques - Signaux canoniques d'entrées.

Afin d'analyser le comportement d'un système dynamique, on le soumet à des entrées typiques permettant l'analyse de la sortie.

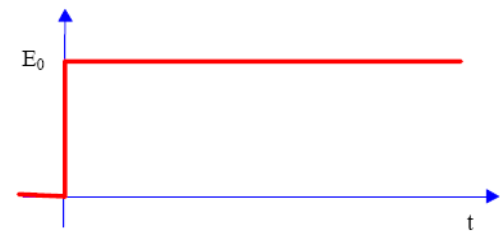
#### a) signal en échelon

La fonction échelon permet de soumettre le système à une entrée constante depuis  $t=0$ . Ce signal est le principal signal d'étude des systèmes linéaires.

La réponse des systèmes linéaires du premier et du deuxième ordre à ce signal est parfaitement connue et caractéristique du système. (Cf. chapitre suivant)

$e(t) = E_0 \cdot u(t)$  avec  $u(t)$  échelon de Heaviside (0 pour  $t < 0$  et 1 sinon)

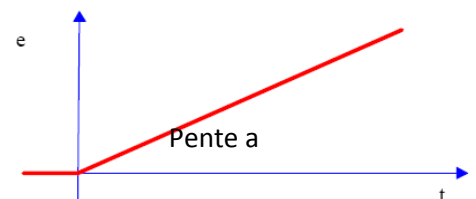
La transformée de Laplace d'un tel signal est :  $\frac{E_0}{p}$ .



#### b) signal rampe

Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite.  $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$

La transformée de Laplace d'une rampe est :  $\frac{a}{p^2}$

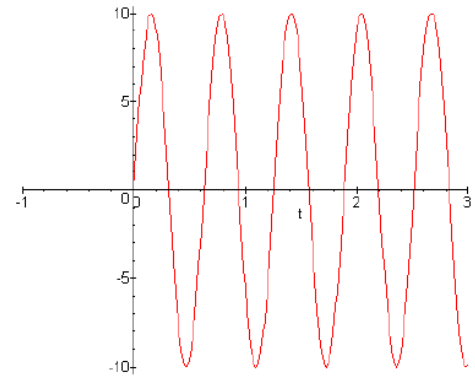


**c) signal sinusoïdal**

Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système. (Très utilisé notamment afin de caractériser les filtres en électronique)

$$e(t) = K \cdot \sin(\omega t) \cdot u(t)$$

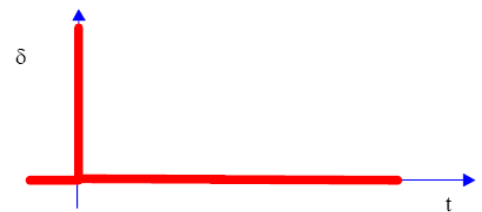
Rq : Pour ce type de signaux, on étudiera la fonction de transfert en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  (utilisation des complexes).

**d) Impulsion de Dirac**

Cette fonction impossible à réaliser matériellement permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (choc; impulsion).

La définition théorique est :  $t \neq 0 : \delta(t) = 0$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$

La transformée de Laplace de ce signal est :  $\delta(p) = 1$

**III - REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES LINEAIRES**

Dans ce chapitre, nous allons étudier la réponse des systèmes linéaires à un échelon.

**A. Système du premier ordre****1. Définition**

On appelle système du premier ordre, tout système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre. Un système du 1<sup>er</sup> ordre a une fonction de transfert avec un polynôme du 1<sup>er</sup> degré au dénominateur.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On peut obtenir l'équation différentielle correspondant à cette fonction de transfert par le calcul suivant :

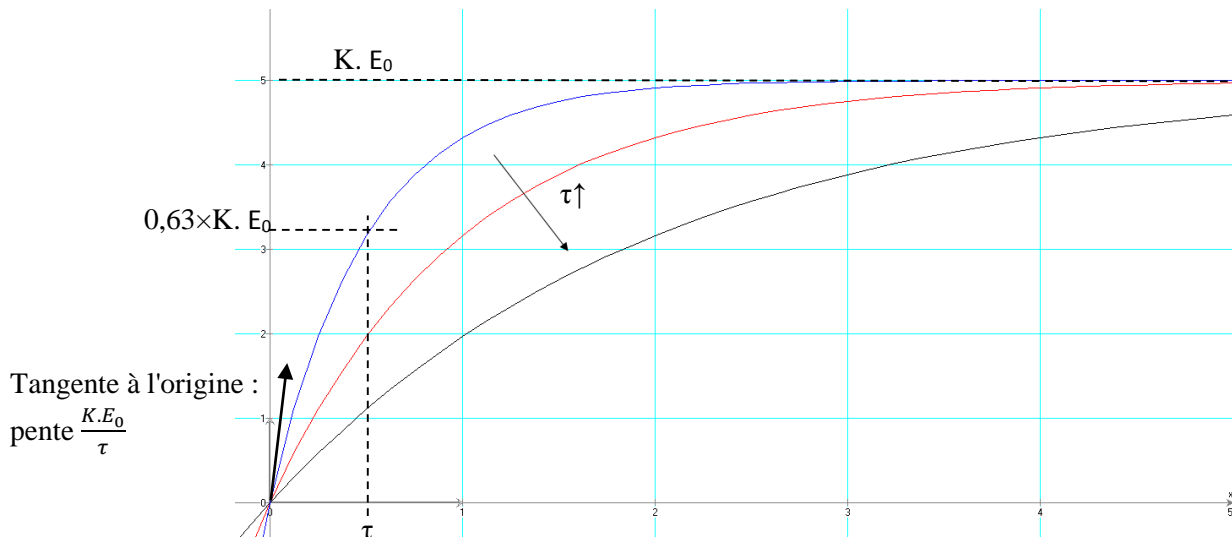
$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \Leftrightarrow S(p) \cdot (1 + \tau \cdot p) = K \cdot E(p)$$

On repasse alors dans le domaine temporel en remplaçant la multiplication par  $p$  par l'opérateur dérivation, on obtient :

$$s(t) + \tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t)$$

## 2. Réponse à un échelon

L'entrée considéré ici est un échelon unité d'expression :  $e(t) = E_0 \cdot u(t)$  (en Laplace :  $\frac{E_0}{p}$ )



La réponse à un tel signal est :  $s(t) = K \cdot E_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

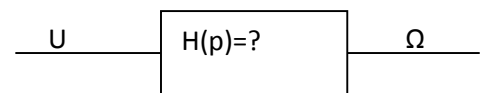
Un autre point important de la réponse exponentielle est le point d'abscisse  $3\tau$ . On alors :  $s(3\tau) = 0,95 \times s_{\text{final}}$ . Le temps de réponse à 5% d'un système du premier ordre est donc  $3\tau$ .

## 3. Identification par essai indiciel

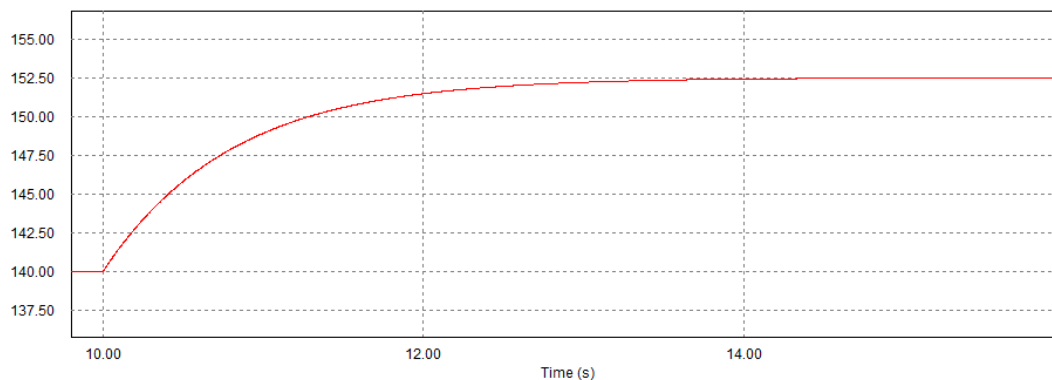
Lorsque l'on veut connaître le modèle d'un système, on peut utiliser les propriétés vues précédemment pour trouver la fonction de transfert du système. Il s'agit d'imposer en entrée un échelon connu et on relève l'évolution de la grandeur de sortie :

Exemple :

Afin d'élaborer le correcteur d'un convoyeur asservi en vitesse, on souhaite connaître la fonction de transfert de l'enrouleuse.



On a donc appliqué un échelon de tension de commande de 0,5 V (de 5,6 à 6,1 V) et on a relevé la vitesse en sortie :



## B. Système du deuxième ordre

### 1. Définition

On appelle système du deuxième ordre, tout système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du deuxième ordre. Un système du 2<sup>ème</sup> ordre a une fonction de transfert avec un polynôme du second degré au dénominateur.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{w_0} \times p + \frac{1}{w_0^2} \times p^2}$$

On peut avoir l'équation différentielle correspondant à cette fonction de transfert par le calcul suivant :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{w_0} \times p + \frac{1}{w_0^2} \times p^2} \Leftrightarrow S(p) \cdot \left(1 + \frac{2m}{w_0} \times p + \frac{1}{w_0^2} \times p^2\right) = K \cdot E(p)$$

On repasse alors dans le domaine temporelle en remplaçant la multiplication par p par l'opérateur dérivation, on obtient :  $s(t) + \frac{2m}{w_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{w_0^2} \times \frac{d^2s(t)}{dt^2} = K \cdot e(t)$

### 2. Réponse à un échelon

On retrouve différent type de réponse suivant la valeur de m (coefficient d'amortissement).

#### a) $m \geq 1$

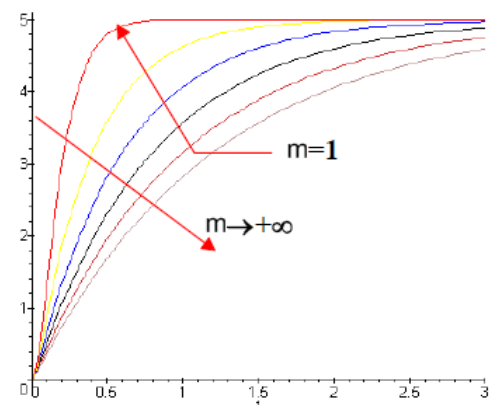
On a alors un régime amorti, régime apériodique. Dans ce cas, la fonction de transfert peut être écrite comme le produit de deux 'premier ordre'.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{w_0} \times p + \frac{1}{w_0^2} \times p^2} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

La réponse est alors :

$$s(t) = \frac{KE_0}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) - \tau_2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) \right)$$

Les courbes de réponse ressemblent à un premier ordre. Une des différences vient de la pente à l'origine est ici nulle.



Rq : lorsque la différence entre les 2 constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  est importante, on peut négliger le terme avec la constante de temps la plus faible. On ne conserve que le pôle dominant. (constante de temps la plus grande)

**b)  $\underline{m \approx 1}$**

On est alors en régime apériodique critique :

$$s(t) = KE_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

La réponse sera également assimilée à un premier ordre.

**c)  $\underline{m \leq 1}$**

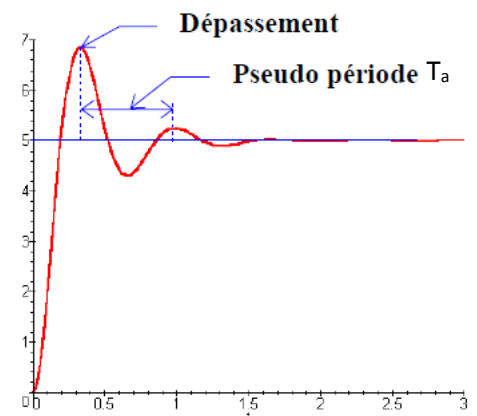
On est ici en régime pseudo périodique. La réponse à un échelon va avoir l'allure suivante :

Son expression est :

$$s(t) = KE_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \cdot \left( \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t - \varphi) \right) \right]$$

Avec  $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-m^2}}{-m}$

- **pseudo-pulsation**



La pseudo-pulsation de la réponse est donnée par la relation suivante :  $\omega_a = \omega_0 \cdot \sqrt{1-m^2} = \frac{2\pi}{T_a}$

- **dépassement**

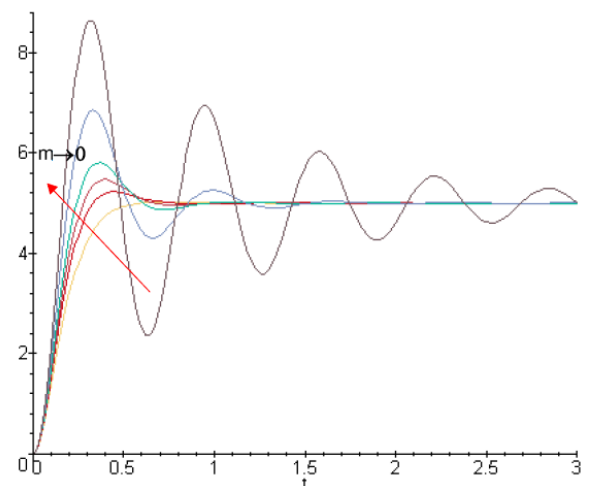
Le premier dépassement est obtenu pour  $t_D = \frac{T_a}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-m^2}}$

On a alors :  $s(t_D) = K \cdot E_0 \cdot \left( 1 + e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}} \right)$ .

Le dépassement est défini par  $d = \frac{s_{max} - s_{final}}{s_{final}} =$

$$\frac{K \cdot E_0 \cdot \left( 1 + e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}} \right) - K \cdot E_0}{K \cdot E_0} = e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}} \quad (\times 100 \text{ si on veut } d \text{ en } \%)$$

Plus  $m$  est faible, plus le dépassement est fort.

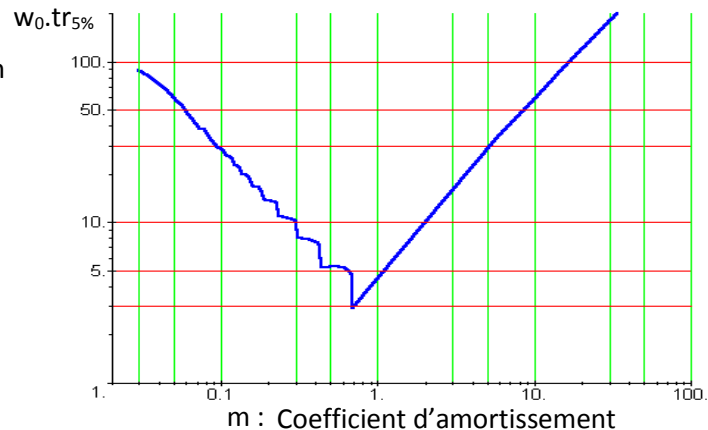




### • Temps de réponse à 5%

L'abaque suivant donne le temps de réponse à 5% pour un système du second ordre. On constate sur cette abaque deux parties :

- pour  $m > 0,7$ , le temps de réponse augmente lorsque  $m$  augmente.
- pour  $m < 0,7$ , le temps de réponse augmente lorsque  $m$  diminue.



Le temps de réponse est minimal pour  $m = 0,7$ . L'abaque donne  $w_0 \cdot t_{5\%}$  en fonction de  $m$ .

Le choix de  $m = 0,7$  correspond généralement à un bon compromis entre dépassement et temps de réponse.

Rq : On peut utiliser ce critère lors de réglage de correcteur proportionnel. On calcule la fonction de transfert en boucle fermée. On exprime le facteur d'amortissement en fonction du gain du correcteur, puis on choisit  $K$  de manière à avoir  $m = 0,7$ .

Ex: Dans le cas du chariot de golf, on cherche à paramétrer le correcteur proportionnel  $K$ . Une manière de déterminer  $K$  est de s'assurer un coefficient d'amortissement de 0,7 en FTBF. La FTBF en fonction de

$K$  est donné ci-contre :  $FTBF : \frac{17,2 \cdot K}{1 + 164 \cdot K} \cdot \frac{6,38}{1 + 164 \cdot K} p + \frac{0,000638}{1 + 164 \cdot K} p^2$ . Déterminer  $K$ .

On identifie la FTBF avec la forme canonique : ..... et ..... Soit .....

Donc .....

### 3. Identification par essai indiciel

Le principe est le même que pour un système du 1<sup>er</sup> ordre. On impose un échelon d'amplitude  $E$  en entrée du système à identifier, on relève la réponse en sortie  $s(t)$ .

Si la réponse est de forme exponentielle, on assimilera le système à un 1<sup>er</sup> ordre. (cf chapitre précédent)

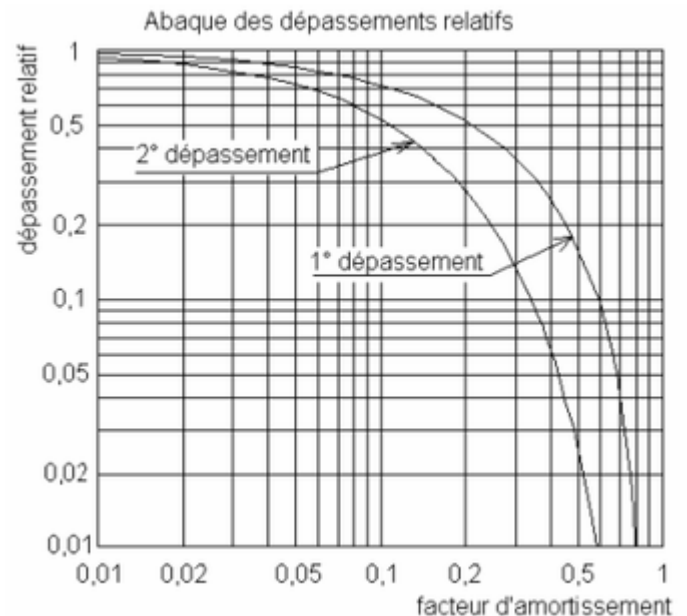
Si on a une réponse pseudo périodique, on cherchera une fonction de transfert sous la forme

$\frac{K}{1 + \frac{2m}{w_0} p + \frac{1}{w_0^2} p^2}$  en utilisant les formules données page suivante :

$$K = \frac{S_{\infty}}{E},$$

$d = e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$  (pour identifier m, on utilisera plus souvent l'abaque ci-contre plutôt que la formule)

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_n \sqrt{1-m^2}}$$



#### IV -ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES LINEAIRES

##### A. Réponse fréquentielle

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement et la réponse d'un système linéaire à une sollicitation sinusoïdale.

La sortie du système linéaire sera sinusoïdale de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude différente et déphasé par rapport au signal d'entrée.

L'intérêt de l'étude fréquentielle est de pouvoir ensuite connaître le comportement d'un système face à n'importe quel signal en décomposer le signal en série de Fourier.

##### B. Fonction de transfert complexe

Lorsque le signal d'entrée est sinusoïdal, nous n'allons pas utiliser le formalisme de Laplace, nous utiliserons la fonction de transfert complexe où l'opérateur p est remplacé par j.w (w pulsation du signal d'entrée)

$$H(jw) = \frac{S(jw)}{E(jw)}$$

##### C. Outils d'étude

Afin d'étudier un système à partir de sa fonction de transfert complexe, nous disposons de plusieurs outils graphiques. Seul le diagramme de Bode sera étudié en ATS.

#### 1. Diagrammes de BODE

Les diagrammes de BODE se décomposent en deux graphiques l'un représentant l'amplitude et l'autre la phase de  $H(jw)$ .

Dans le premier graphique, on trace la caractéristique  $20 \log |H(j\omega)|$  en fonction de  $\log \omega$ .

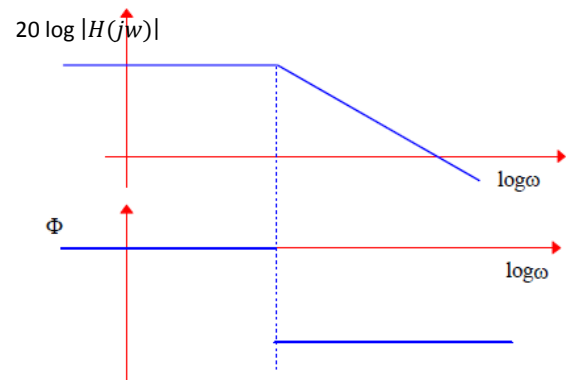
La seconde courbe représente l'argument de  $H(j\omega)$  en fonction de  $\log \omega$ .

Les diagrammes de BODE conviennent particulièrement aux fonctions de Transfert pouvant être décomposé en produits de fonctions de transfert.

Soit  $H(j\omega)=F(j\omega).G(j\omega)$ , alors :

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |F(j\omega)| + 20 \log |G(j\omega)| \quad \text{et}$$

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(F(j\omega)) + \text{Arg}(G(j\omega))$$



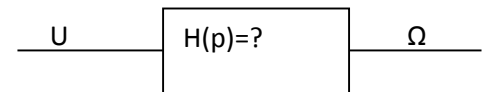
Il suffit donc d'ajouter les diagrammes des fonctions  $F(j\omega)$  et  $G(j\omega)$  aussi bien sur le diagramme d'amplitude que sur le diagramme des phases pour obtenir les diagrammes de  $H(j\omega)$ .

Rq : Le tracé de ces diagrammes fait l'objet d'un cours parallèle afin de pouvoir le consulter plus facilement lors d'une prochaine séance sur le filtrage.

- **Identification fréquentiel**

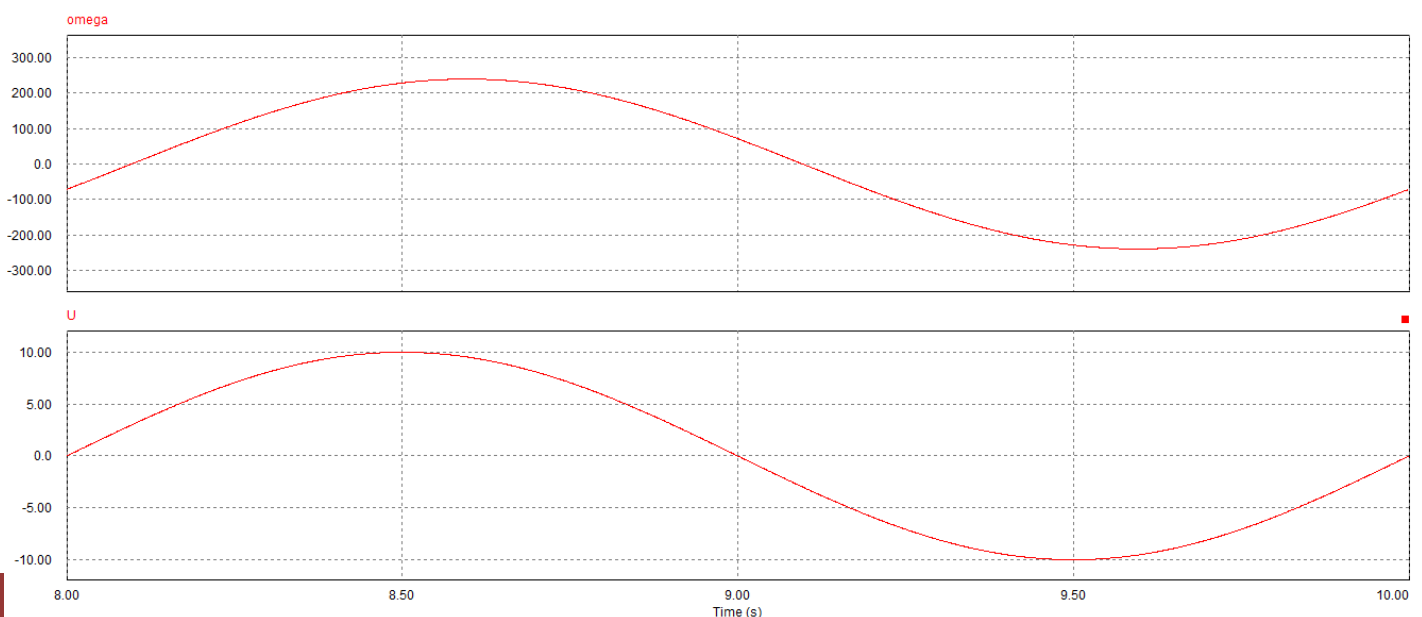
La caractérisation d'un système par son diagramme de Bode peut être utilisée pour trouver un modèle d'un système à partir d'essais fréquentiels.

Ex : on veut connaître la fonction de transfert d'un moteur CC.



La méthode consiste à appliquer en entrée une grandeur sinusoïdale connue (fréquence et amplitude), puis relever l'allure de la grandeur de sortie, ceci pour plusieurs fréquences d'entrée afin de reconstituer avec plusieurs points le diagramme de bode du moteur. Puis, on identifie le diagramme avec une fonction de transfert.

Exemple de calcul d'un point du diagramme de bode : on impose en entrée une tension de fréquence 0,5Hz et d'amplitude 10 V. On obtient les chronogrammes suivants :



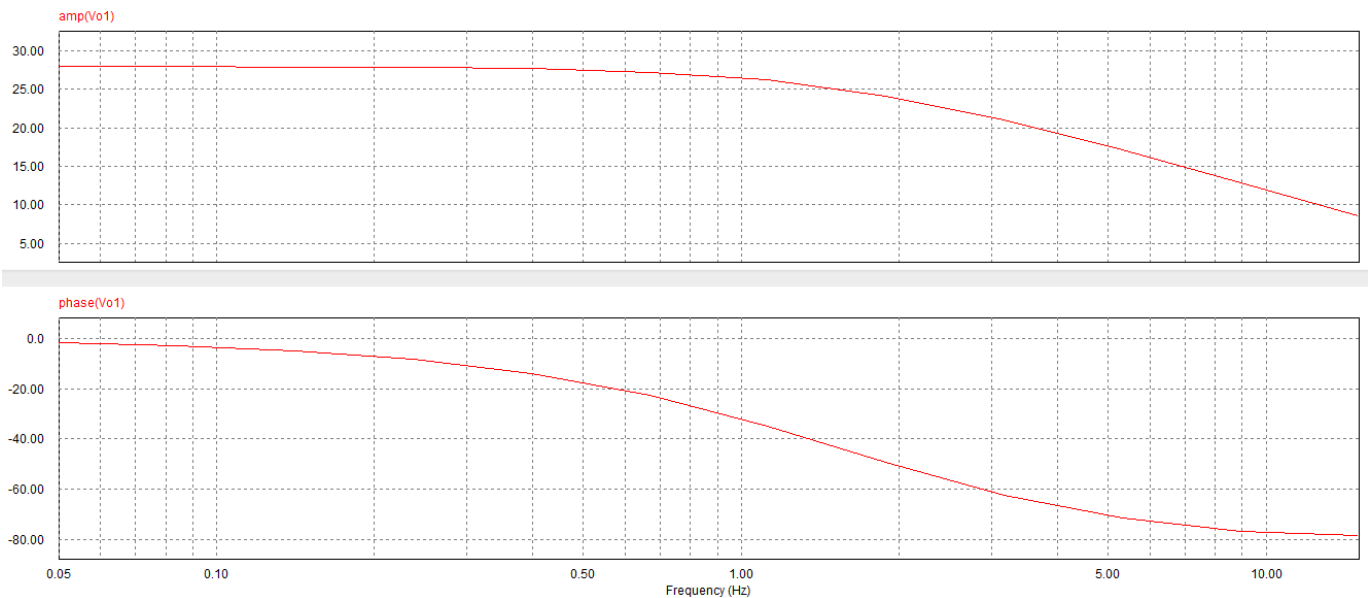
On lit : amplitude de  $\Omega$  : ..... déphasage de  $\Omega$  : .....

On peut donc placer sur le diagramme de Bode les points

En gain (0,5 Hz ; ..... )

En phase (0,5 Hz ; .....)

On a procédé à plusieurs essais similaires en faisant varier la fréquence. Ces différents essais permettent alors de reconstituer un diagramme de Bode suivant.

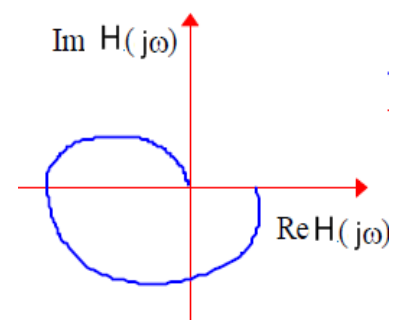


On peut alors en déduire la fonction de transfert du moteur :

## 2. Courbe de Nyquist

La représentation de Nyquist est la représentation dans le plan complexe de la fonction  $H(j\omega) = \text{Re}(H(j\omega)) + j\text{Im}(H(j\omega))$ .

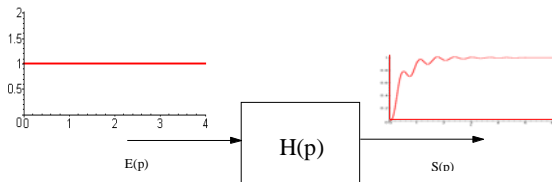
Le graphique représentant la fonction de transfert doit être gradué dans le sens des  $\omega$  croissants.



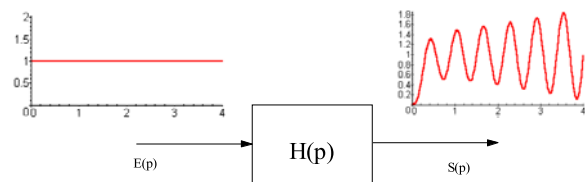
## V - STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

## A. définition

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



Réponse d'un système stable



Réponse d'un système instable

## B. Condition de stabilité

Considérons un système quelconque dont on écrit la FTBF sous la forme :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_n)}$$

avec :  $p_i$  = pôles de  $H(p)$  réels ou complexes et  $n$  = ordre de  $H(p)$

Si on applique à l'entrée une impulsion de Dirac :  $e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1$ , la réponse temporelle  $s(t)$  s'obtient en décomposant  $S(p)$  en éléments simples :

$$S(p) = H_{BF}(p) = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \dots + \frac{N}{p-p_n} \Rightarrow s(t) = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t} + \dots + N e^{p_n t}$$

La sortie  $s(t)$  est **bornée** si toutes les exponentielles sont décroissantes :

➤ Si les pôles sont tous réels :

**$s(t)$  ne tend vers 0 que si les pôles  $p_i$  sont tous négatifs.**

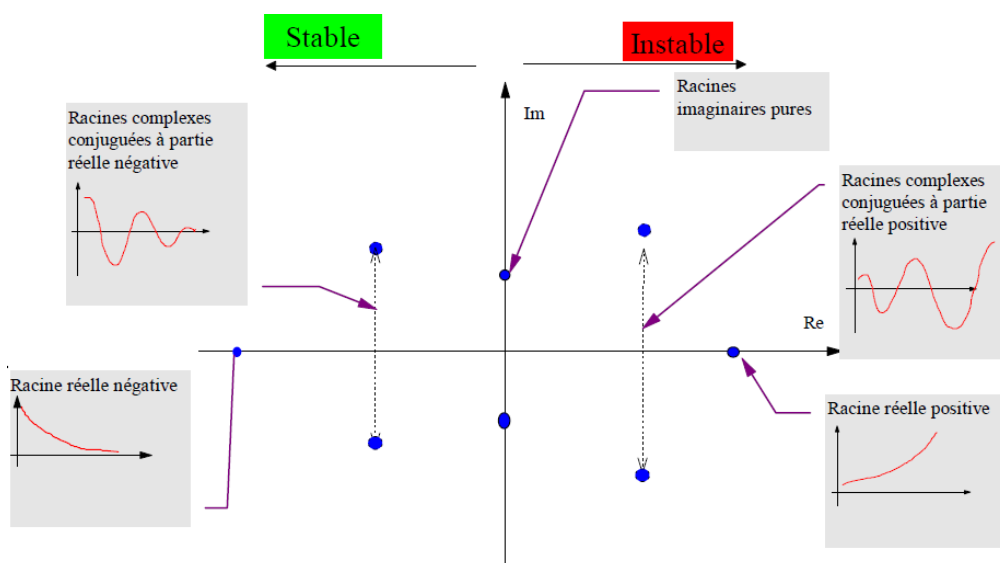
➤ Si il y a des pôles complexes conjugués deux à deux :

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega \Rightarrow s(t) = A e^{(\alpha+j\omega)t} + B e^{(\alpha-j\omega)t} = C e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

**$s(t)$  ne tend vers 0 que si  $\alpha < 0$ .**

**Conclusion :** Un système est stable si, et seulement si, la fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle. (pôle = racine du polynôme au dénominateur)

La position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne donc sur la stabilité de la fonction de transfert.

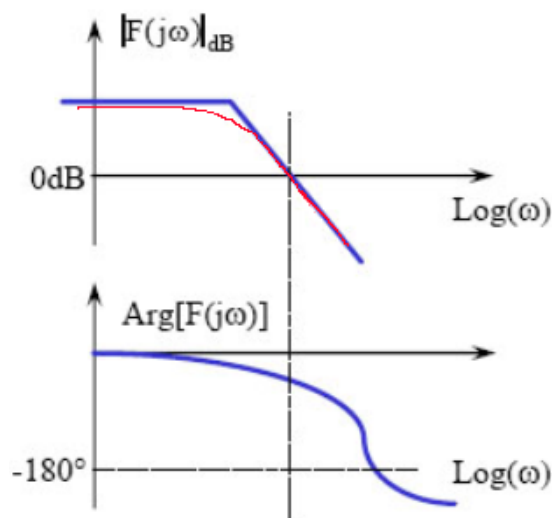
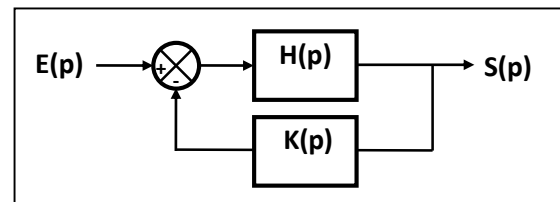


### C. Etude de stabilité à partir de la FTBO

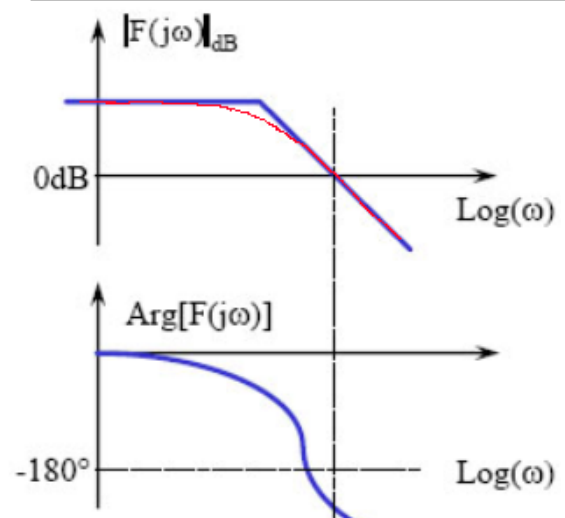
On a montré qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la FTBF ait des pôles à partie réelle négative. Ceci suppose de connaître l'expression du dénominateur de la FTBF et de savoir en calculer les racines. Or, si l'expression de la FTBF n'est pas toujours connue, on connaît généralement la FTBO par sa réponse harmonique (identification). On a donc développé des critères graphiques permettant d'étudier la stabilité de la FTBF à partir des lieux de transfert de la FTBO.

#### 1. Notion de point critique

On pourrait montrer qu'un système est stable si, à la pulsation critique  $\omega_c$  pour laquelle  $|H_{BO}(j\omega_c)| = 1$  (donc  $20 \cdot \log |H_{BO}(j\omega_c)| = 0$ ), le déphasage est supérieur à  $-180^\circ$ .



Stable



Instable

On peut traduire ce critère graphiquement en utilisant les diagrammes de BODE. Les courbes suivantes montrent les digrammes correspondant à chaque cas de stabilité.

**Rq :** D'après ce critère, les systèmes du 1er ordre ou 2ème ordre sont toujours stables (au sens strict).

#### 2. Marges de stabilité

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolue, ces critères ne permettent pas en général de régler un système, il faut pour cela définir des marges de stabilité, c'est à dire une distance à respecter entre le point critique (-1) et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte. On définit la marge de Gain et la marge de Phase.

On peut calculer les marges de phase et de gain à partir des diagrammes de Bode.

### Marge de Phase (MP)

Pour la pulsation critique  $\omega_c$ , pulsation pour laquelle  $|H_{BO}(j\omega_c)| = 1$ , (intersection de la courbe REELLE de gain avec les abscisses), on mesure la distance entre la courbe REELLE de phase et  $-180^\circ$ .

### Marge de Gain (MG)

On détermine la pulsation pour laquelle le déphasage est de  $-180^\circ$  :  $\omega_{-180}$ . La marge de gain est la distance (en dB) entre la courbe et l'axe des abscisses.

Les valeurs usuelles de marges de gain et de marge de phase permettant le réglage sont :

Marge de Gain : 10dB

Marge de Phase :  $45^\circ$

Exemple: à partir du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du chariot de golf, donner la marge de phase du système sans correcteur ( $K=1$ ).

MP= .....

Conclusion : .....

### Remarques :

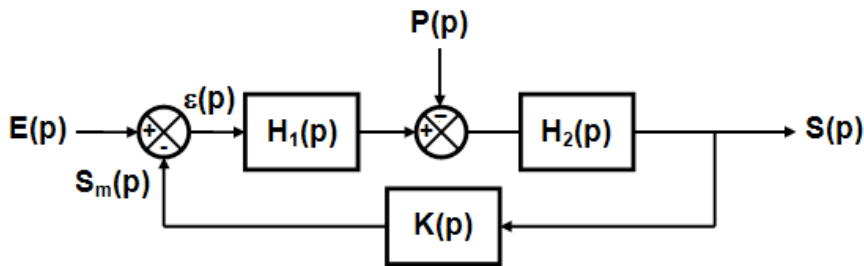
- La présence d'un intégrateur dans une chaîne d'action apporte un déphasage de  $-90^\circ$ , ce qui rapproche le FTBO du point critique, et donc tend à déstabiliser le système.
- Tout retard est facteur d'instabilité. En effet, un retard  $T$  dans une évolution temporelle se traduit par une multiplication de la FTBO par un terme du type  $e^{-T \cdot p}$ . Ce terme a un déphasage  $\varphi = -T \cdot \omega$  décroissant linéairement avec la pulsation  $\omega$ . Son amplitude est constante et égale à 1 (0 dB).

L'incidence d'un traitement numérique sur la stabilité peut être prise en compte en ajoutant un retard pur  $T$  égal à la moitié de la période d'échantillonnage  $T_e$  à la FTBO.

## VI - PRECISION DES SYSTEMES ASSERVIS

## A. Définitions

On considère le système asservi décrit par le schéma bloc suivant. Son rôle est de faire suivre à la sortie  $s(t)$  une loi déterminée en général par la consigne  $e(t)$ . Afin d'évaluer la précision du système, on définit l'erreur  $\varepsilon(t)$  à un instant donné comme la différence entre la consigne  $e(t)$  et la mesure  $s_m(t)$ . La précision sera d'autant meilleure que  $\varepsilon(t)$  tendra vers 0.



Son étude se fait en utilisant les transformées de LAPLACE. L'erreur  $\varepsilon(p)$  résulte de la somme de :  
 $\varepsilon_E(p)$  : erreur due à la consigne  $E(p)$  seule  $\Rightarrow$  problème de **poursuite** (asservissement)

$\varepsilon_P(p)$  : erreur due à la perturbation  $P(p)$  seule  $\Rightarrow$  problème de **régulation**.

On détermine l'expression de  $\varepsilon(p)$  en appliquant le théorème de superposition :  $\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) + \varepsilon_P(p)$ .

## B. Système non perturbé

On considérera ici dans un premier temps que la perturbation est nulle  $P(p)=0$ .

Dans ce cas, on peut exprimer l'erreur en fonction de la consigne :

$\varepsilon(p) = \dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$

$$\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \dots\dots\dots$$

Si l'on écrit la fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme :

$$H_1(p).H_2(p).K(p) = \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p)} \quad \text{avec } N(0)=1 \text{ et } D(0)=1, K : \text{gain statique et } \alpha : \text{classe du système}$$

On obtient l'expression suivante :

$$\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p)}} = \frac{p^\alpha.D(p)}{p^\alpha.D(p) + K.N(p)}$$



### 1. Erreur statique

L'erreur statique ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ ) s'obtient grâce au théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

Nous allons voir quel est l'erreur statique lors de différents signaux d'entrée.

### 2. Erreur indicielle

L'entrée considérée ici est un échelon :  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ . L'erreur statique est donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \times \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \times E_0$$

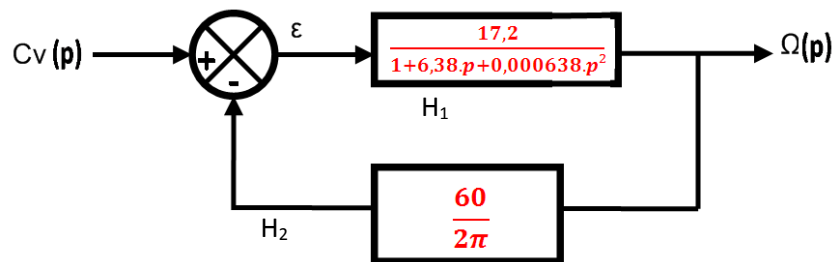
On constate donc que :

- Pour  $\alpha = 0$ , l'erreur vaut :  $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{D(p)}{D(p) + K \cdot N(p)} \times E_0 = \frac{E_0}{1+K}$

Donc, plus le gain statique est important, plus l'erreur sera faible.

- pour  $\alpha \geq 1$ , l'erreur indicielle est nulle. La présence d'un intégrateur dans la fonction de transfert entraîne une erreur indicielle nulle.

Exemple : Calcul de l'erreur indicielle pour le chariot de golf (sans correcteur), lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude 860.



### 3. erreur de traînage

L'entrée considérée ici est une rampe :  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$ . L'erreur statique est donc :

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \times \frac{E_0}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} \times E_0$$

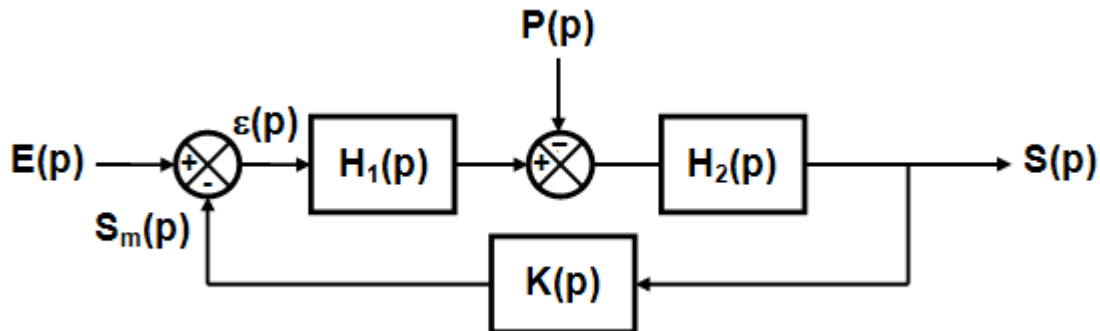
- Pour  $\alpha = 0$ , la limite tend vers l'infini. La sortie n'arrive pas à suivre la consigne.

- Pour  $\alpha = 1$ ,  $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p^{1+K}} \times E_0 = \frac{E_0}{K}$ , l'erreur est donc constante et vaut  $\frac{E_0}{K}$ .

- Pour  $\alpha \geq 2$ ,  $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha+K}} \times E_0 = 0$ , l'erreur est alors nulle.

### C. Effet de la perturbation

On reprend le diagramme de départ, et cette fois, nous allons étudier l'erreur provoquée par la perturbation. Afin de n'étudier que l'effet de la perturbation, on considèrera dans nos calculs  $E(p)=0$ .



L'erreur due à la perturbation est calculée par la formule :

$$\varepsilon(p) = -S_m(p) = -K(p) \cdot H_2(p) \cdot [-P(p) + H_1(p) \cdot \varepsilon(p)]$$

$$\varepsilon(p) \cdot [1 + K(p) \cdot H_2(p) \cdot H_1(p)] = K(p) \cdot H_2(p) \cdot P(p)$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{P(p)} = \frac{K(p) \cdot H_2(p)}{1 + K(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p)}$$

On va alors décomposer  $H_1$  et  $H_2$  de la façon suivante :  $H_1(p) = \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}$  et  $K(p) \cdot H_2(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$

$$\text{On a alors : } \frac{\varepsilon(p)}{P(p)} = \frac{\frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}}{1 + \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)} \times \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}} = \frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)}$$

#### a) Erreur indicielle

Lorsque la perturbation est un échelon  $P(p) = \frac{P_0}{p}$ , l'erreur due à celle-ci est donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \times P_0$$

On constate que quelque soit le nombre d'intégrations dans  $H_2$ ,  $H_2$  ne permettra pas d'annuler l'erreur.

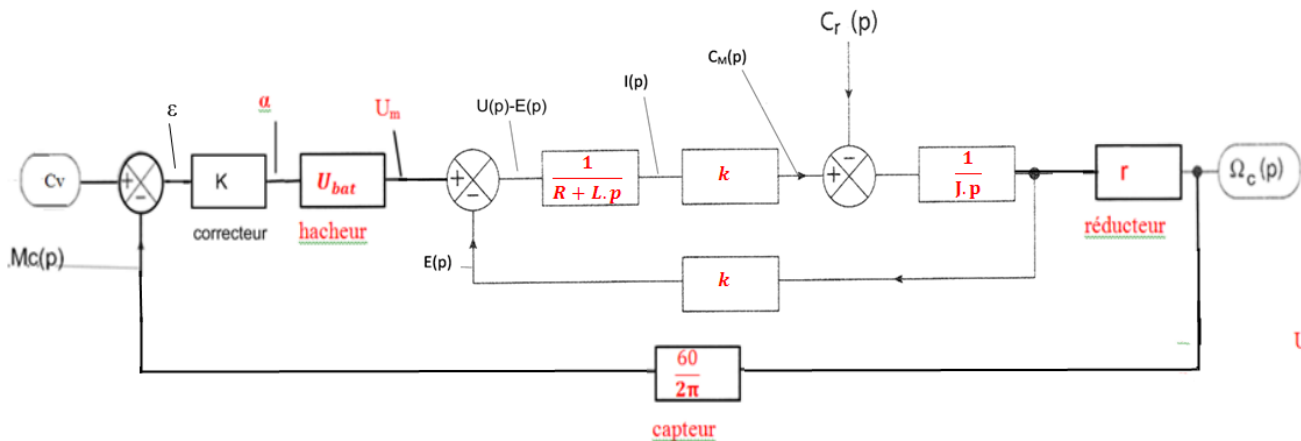
- Par contre, si  $\alpha_1 \geq 1$ ,  $\varepsilon_p = 0$ . La présence d'une intégration avant la perturbation permet d'annuler l'erreur indicielle.

- Si  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 \geq 1$ ,  $\varepsilon_p = \frac{P_0}{K_1}$

- Si  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = 0$ ,  $\varepsilon_p = \frac{P_0 \cdot K_2}{1 + K_2 \cdot K_1}$

### Exemple du chariot de golf :

En fait, en tenant compte du couple de charge, la modélisation du chariot de golf est :



Dans ce cas l'erreur due à la perturbation est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\varepsilon(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{\frac{2\pi \cdot J \cdot p}{60 \cdot r} + \frac{k}{R+L \cdot p} (K \cdot U_{bat} - \frac{k \cdot r \cdot 2\pi}{60})}$$

$$\text{AN: } \frac{\varepsilon(p)}{C_r(p)} = \frac{1}{0,00654p + \frac{0,336}{2+0,0002p}}$$

L'erreur indicielle due à la perturbation (couple résistant constant de 3 N.m) est donc :

### b) Erreur de trainage

L'étude se fait de la même manière que pour l'erreur due à la consigne. On montrerait ainsi que l'erreur est nulle pour  $\alpha_1 \geq 2$ .

Le calcul de la limite suivante  $\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2.N_2(p).p^{\alpha_1-1}.D_1(p)}{p^{\alpha_1.D_1(p)}.p^{\alpha_2.D_2(p)+K_1.N_1(p)}.K_2.N_2(p)} \times P_0$  permet de calculer les valeurs de l'erreur pour les autres cas.

#### D. Conclusion

Dans tous les cas de figure, on voit qu'il faut des intégrateurs dans la boucle pour annuler l'erreur  $\varepsilon(t)$ . Si le système à commander n'en possède pas (ou pas assez), on a dit qu'il fallait les apporter avec un correcteur. Cela semble donc facile d'obtenir un système bouclé précis.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il faut aussi et surtout que le système bouclé soit stable. Or l'effet d'un intégrateur sur la phase de la FTBO sera d'apporter  $-90^\circ$  quelle que soit la valeur de  $\omega$ . On peut se douter que perdre  $90^\circ$  aura forcément un effet négatif sur la marge de phase  $M_\varphi$  (qui pourra même devenir négative) et donc sur la stabilité.

L'autre moyen d'améliorer la précision est d'augmenter le gain de la boucle ouverte. Le dilemme est alors le même, une augmentation de  $K$  diminuant également la marge de stabilité

Il faudra donc faire un compromis entre la stabilité (ou plutôt les marges de stabilité) et la précision.

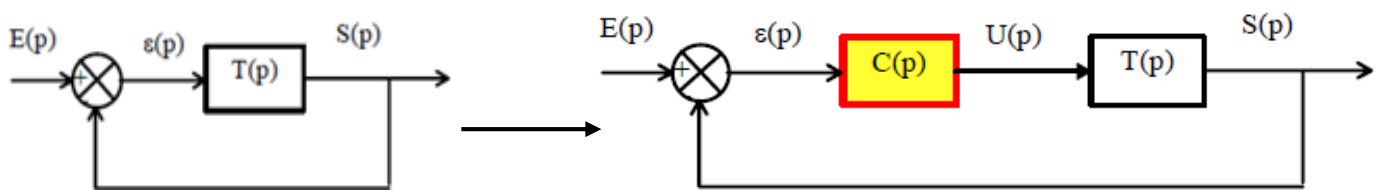
## VII - NOTION DE CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS

### A. Présentation

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les systèmes asservis pouvaient présenter des défauts, une précision insuffisante, une stabilité trop relative (voire une instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important, au regard d'un cahier des charges.

Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservi un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans, dans l'idéal, le faire au détriment des autres.

Si l'on souhaite améliorer les caractéristiques de précision, stabilité, rapidité du système il est nécessaire d'introduire dans la boucle de commande un correcteur.



Les correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié.

### B. Principaux correcteurs

#### 1. Correcteur Proportionnel, P

##### a) Principe

Ce correcteur élémentaire est le correcteur de base, il agit principalement sur le gain du système asservi, il permet donc améliorer notablement la précision.

Dans le cas d'un correcteur proportionnel, la loi de commande corrigée  $u(t)$  est proportionnelle à l'écart

La fonction de transfert du correcteur est donc :  $C(p) = \frac{u(p)}{\varepsilon(p)} = K$

Pour les parties commande électroniques, la réalisation de ce type de correcteur à base d'amplificateurs opérationnels est simple (attention à la saturation des amplis).

##### b) Effet

Nous avons vus que l'effet d'une augmentation du gain entraîne une diminution de l'erreur statique, rend le système plus rapide mais augmente l'instabilité du système.

##### c) Réglage

Une première méthode est de faire, dans un premier temps, une étude théorique afin d'obtenir un ordre de grandeur puis ajuster avec des essais pratiques.

Rq: les valeurs calculées en théorie ne sont pas exactement les meilleures valeurs à implanter dans le système réel. En effet, le calcul ne prend en compte les différentes imperfections du système (saturation, non linéarité...)

L'autre solution est d'utiliser des méthodes empiriques à partir de différents essais.(abordée dans un chapitre ultérieur)

- Pour un système du second ordre, on peut régler K de manière à avoir en boucle fermée un coefficient d'amortissement  $m=0,7$  (on privilégie ainsi la rapidité du système). On calcule donc la FTBF sous forme canonique en fonction de K, on identifie les coefficients afin d'exprimer m en fonction de K. Puis, on en déduit K pour avoir  $m=0,7$ .

- Pour un système d'ordre quelconque, on peut régler K de manière à avoir une marge de phase de  $45^\circ$  (contrôle de la marge de stabilité). Ce paramétrage se fait par utilisation des diagrammes de Bode de la FTBO.

Ex : Donner la valeur de K afin que le chariot de golf ait une marge de stabilité de  $45^\circ$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. Correcteur Proportionnel - Intégrateur, P.I.

### a) Intégrateur pur

Pour un intégrateur pur la loi de commande  $u(t)$  est de la forme :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(x) dx$

La fonction de transfert d'un correcteur pur est  $C(p) = \frac{u(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p}$

Ce type de correcteur n'est pas réalisable avec un réseau passif (circuit RC) mais une bonne approximation peut être réalisée avec un montage intégrateur à base d'amplificateurs opérationnels.

### b) Correcteur PI

L'intérêt principal de ce correcteur est d'ajouter dans la chaîne de commande une intégration qui annule l'erreur statique pour une entrée en échelon.

L'intérêt principal de ce type de correcteur est donc d'améliorer la précision, il introduit malheureusement un déphasage de  $-90^\circ$  et risque de rendre le système instable (diminution de la marge de phase).

Le correcteur Intégrateur est en général associé au correcteur proportionnel et la loi de commande corrigée est de la forme :

$$u(t) = K_p \cdot (\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(x) dx)$$

La fonction de transfert d'un correcteur pur est  $C(p) = \frac{u(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \times \frac{1+T_i p}{T_i p}$

### c) Effet du PI

**Effet statique** (régime permanent): annule l'erreur indicielle (cf. précision des systèmes effet d'une intégration)

**Effet dynamique** (régime transitoire) : augmente le temps de réponse (système moins rapide), et peut augmenter l'instabilité (introduit un déphasage supplémentaire pouvant aller jusqu'à -90°).

### d) Réglage

Deux paramètres sont à régler dans un correcteur PI : la constante de temps  $T_i$  et le gain  $K_p$ . On règle habituellement  $T_i$  de manière à compenser le pôle dominant de la FTBO, c'est-à-dire que l'on prend  $T_i$  égale à la constante de temps la plus élevée.  $K_p$  est ensuite réglé comme pour l'utilisation d'un correcteur proportionnel.

Ex : Pour le chariot de golf, la FTBO, sans correcteur, peut s'écrire :  $\frac{164}{(1+6,38p)(1+0,0001p)}$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

## 3. Correcteur proportionnel Intégrateur Dérivateur PID

### a) Principe

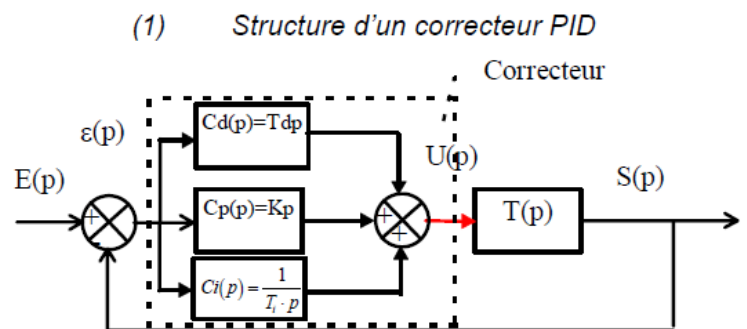
L'intérêt du correcteur PID est d'intégrer les effets positifs des trois correcteurs précédents.

- amélioration de la stabilité par l'effet dérivateur
- amélioration de la précision statique par l'effet intégrateur
- amélioration de la dynamique par l'effet proportionnel

La fonction de transfert d'un correcteur PID est de la forme suivante :

La détermination des coefficients  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  du correcteur PID permet d'améliorer à la fois la précision ( $T_d$  et  $K_p$ ) la stabilité ( $T_d$ ) et la rapidité ( $T_d$ ,  $K_p$ ).

Le réglage d'un PID est en général assez complexe, des méthodes pratiques de réglages permettent d'obtenir des bons résultats.



**b) Effet**

On voit sur les diagrammes de Bode que le correcteur P.I.D se comporte, pour les basses fréquences, comme un intégrateur donc le système sera précis d'un point de vue statique, aux hautes fréquences l'avance de phase est de  $+90^\circ$  donc une amélioration de la stabilité

diagramme d'amplitude

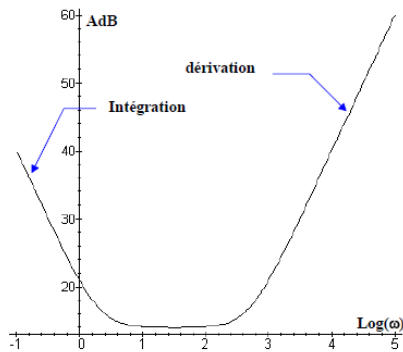
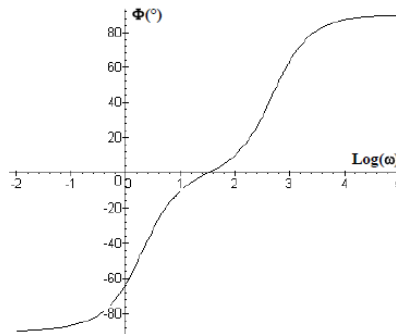


diagramme des phases

**c) Réglage du correcteur P.I.D**

L'objectif du réglage est de placer le correcteur de telle sorte que, autour de la pulsation critique du système non corrigé, l'avance de phase soit positive et suffisante pour ne pas rendre le système instable.

Il n'y a pas de réelle méthode théorique, permettant de calculer les composantes du correcteur, par contre des méthodes pratiques permettent une évaluation correcte des coefficients du correcteur.

La méthode la plus répandue est la méthode de Ziegler – Nichols.

La méthode développée par Ziegler et Nichols n'est utilisable que si le système étudié supporte les dépassements.

La méthode consiste à augmenter progressivement le gain d'un correcteur proportionnel pur jusqu'à la juste oscillation. On relève alors le gain limite ( $K_{lim}$ ) correspondant et la pulsation des oscillations  $\omega_{osc}$ .

À partir de ces valeurs Ziegler et Nichols proposent des valeurs permettant le réglage des correcteurs P, P.I et P.I.D

Correcteur	<b>P</b>	<b>P.I</b>	<b>P.I.D</b>
$K_p$	$0.5 \cdot K_{lim}$	$0.45 \cdot K_{lim}$	$0.6 \cdot K_{lim}$
$T_i$	$\infty$	$0.83 \cdot T_{osc}$	$0.5 \cdot T_{osc}$
$T_d$	0	0	$0.125 \cdot T_{osc}$

avec  $C(p)$  sous la forme  $C(p) = K_p \left( 1 + T_d \cdot p + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$

**Annexe 1****3. Tableau des transformées de Laplace usuelles**

$f(t).u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$	$f(t).u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
$K$	$\frac{K}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$
$K.t$	$\frac{K}{p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2 + p^2}$
$e^{-a.t}$	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a.t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + (p+a)^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-a.t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2 + (p+a)^2}$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1 + \tau.p)}$	$sh \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$e^{-a.t} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$ch \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

**Annexe 2****Transformation de Laplace inverse**

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction  $F(p)$  donnée.

Lorsque la fonction  $F(p)$  est sous la forme de fractions rationnelles en  $p$ , la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples, La fonction temporelle consiste alors en la recherche dans la table précédente de la transformée inverse de chaque fraction élémentaire. La fonction temporelle correspondante est la somme des fonctions temporelles élémentaires.

a) **exemple:**

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2+15p+50} = \frac{p+2}{(p+5)(p+10)}$$

Décomposition en éléments simples

On met  $F(p)$  sous la forme  $\frac{A_1}{(p+5)} + \frac{A_2}{(p+10)}$ .

On résout en identifiant

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+5)(p+10)} = \frac{A_1(p+10) + A_2(p+5)}{(p+5)(p+10)} \quad \text{on a donc}$$

$$F(p) = \frac{A_1 p + 10 A_1 + A_2 p + 5 A_2}{(p+5)(p+10)}$$

$$F(p) = \frac{(A_1 + A_2)p + 10 A_1 + 5 A_2}{(p+5)(p+10)}$$

$$A_1 = -\frac{3}{5}; A_2 = \frac{8}{5}$$

$$F(p) = \frac{-\frac{3}{5}}{(p+5)} + \frac{\frac{8}{5}}{(p+10)}$$

puis en recherchant dans la table:

$$f(t) = -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{8}{5}e^{-10t}$$



Exemple 2 :

Circuit RC (exemple du cours)

$$U_s(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{U_0}{p}$$

Décomposition en éléments simples

$$U_s(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{U_0}{p} = U_0 \left( \frac{A}{1 + \tau \cdot p} + \frac{B}{p} \right) \Rightarrow U_s(p) = U_0 \left( \frac{A \cdot p + B \cdot (1 + \tau \cdot p)}{(1 + \tau \cdot p)p} \right)$$

On déduit donc  $B = 1$   $A = -\tau$ la décomposition s'écrit  $U_s(p) = U_0 \left( \frac{-\tau}{1 + \tau \cdot p} + \frac{1}{p} \right)$ **Transformation inverse**

On reconnaît deux formes particulières dans le tableau des transformées (Cf annexe Transformation de Laplace).

$f(t) \cdot u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
$K$	$\frac{K}{p}$
$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{p + a}$

d'où la solution complète

$$u_s(t) = U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Annexe 3

Diagramme de BODE du chariot de golf :

FTBO :  $\frac{164}{1+6,38.p+0,000638.p^2}$  ce qui donne  $w_0=$  ..... et  $m=$  .....

.....

$\frac{164}{1+6,38.p+0,000638.p^2} =$  .....

On a donc par identification :  $\tau_1 + \tau_2 =$  ..... et  $\tau_1 \times \tau_2 =$  .....

Soit .....

Les solutions de cette équation sont :  $\tau_1 =$  ..... et  $\tau_2 =$  .....

la FTBO peut donc aussi s'écrire : .....

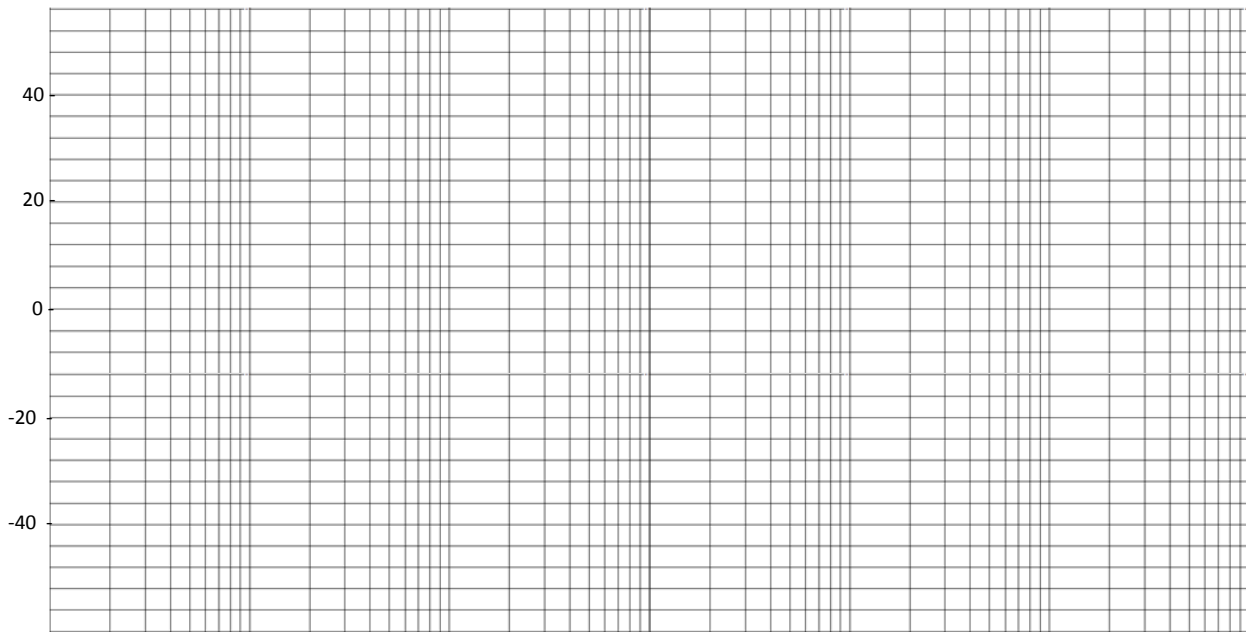
Les deux pulsations caractéristiques sont donc :  $w_1=$  ..... (correspondant à la constante de temps mécanique du moteur) et  $w_2=$  ..... ( $\leftrightarrow$  constante de temps électrique)

Tracé asymptotique :

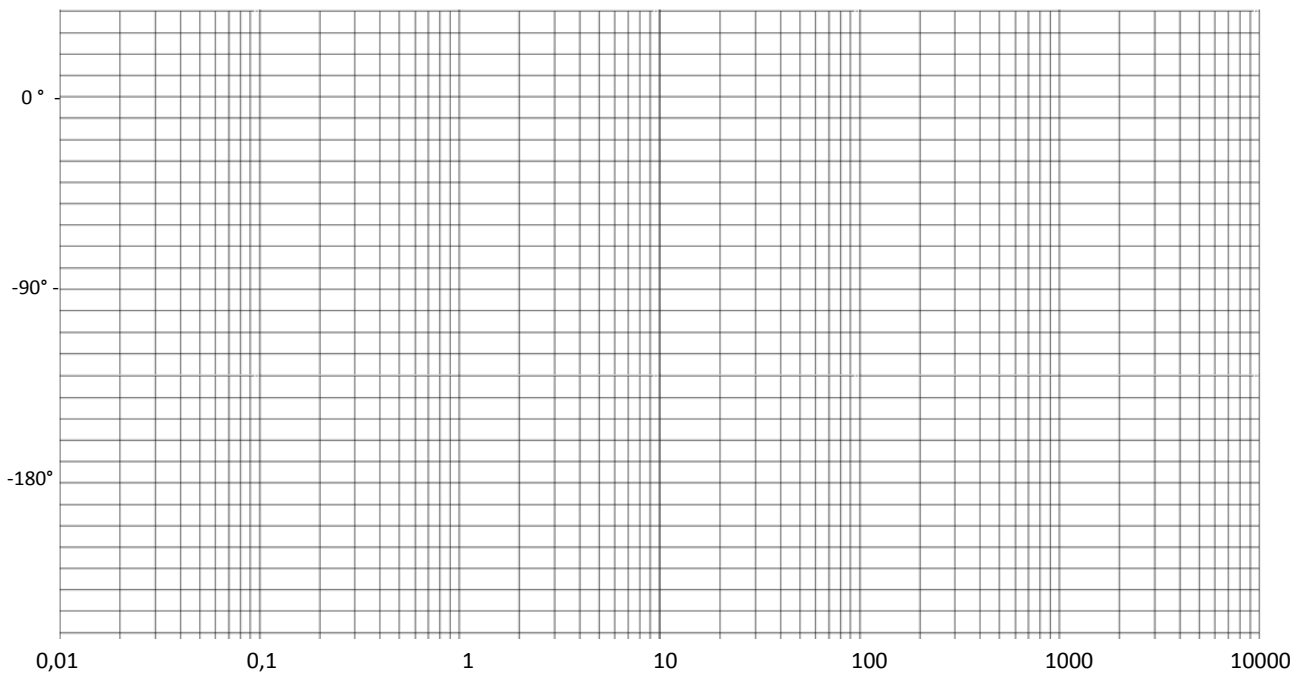
Pour  $w \ll 1$ , asymptote horizontale à  $20 \log 164 = 44,3$  pour le tracé d'amplitude et  $0^\circ$  pour la phase.

A  $w_1$ , le tracé d'amplitude passe d'une pente nulle à une pente de .... dB/décade. La phase passe de 0 à .....

A  $w_2$ , le tracé d'amplitude prend une pente de .... dB/décade. La phase passe à .....



Phase



Marge de phase :

-On trouve par le graphique la pulsation (que l'on notera  $\omega_0$ ) pour laquelle s'annule  $20 \log |H(j\omega)|$ . On trouve  $\omega_c = \dots\dots\dots$

- On calcule alors la phase exacte pour cette pulsation (le diagramme asymptotique n'est pas assez

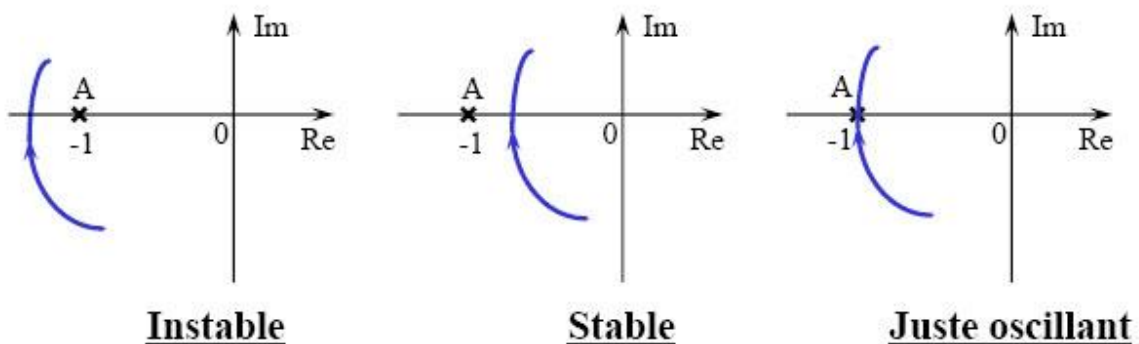
précis).  $\text{Arg } H(j\omega_c) = \text{Arg } \frac{164}{(1+j6,38.\omega_c)(1+j0,0001.\omega_c)} = \dots\dots\dots$

La marge de phase est donc  $\dots\dots\dots$

### Annexe 4

#### **Critère du revers dans le diagramme de Nyquist :**

En parcourant dans le sens des  $\omega$  croissants le lieu de Nyquist en boucle ouverte  $F(j\omega)$  d'un système asservi :



- Si on laisse le point A(-1) à sa gauche, le système est stable.
- Si on laisse le point A à sa droite, le système est instable.
- Si on passe par le point A, le système est juste oscillant.