Deldi Darcius Vlad
grupa 142

Spații Vectoriale

Def: Fie K un corp comutativ, o mulțime nevidă V se numește K-spațiu vectorial dacă e înzestrată cu două operații:

$+ : V \times V \to V$ („adunarea") $\to$ legea internă

$\cdot : K \times V \to V$ („înmulțirea") $\to$ legea de compunere externă

astfel încât $(V, +)$ grup abelian și:

- $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2 \quad \forall a \in K, \forall v_1, v_2 \in V$
- $(a+b)v = av + bv \quad \forall a, b \in K, \forall v \in V$
- $(ab)v = a(bv) \quad \forall a, b \in K, \forall v \in V$
- $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

exemple:

1) mulțimea vectorilor din plan
2) $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ – K-spațiu vectorial cu operațiile uzuale
3) $K[X]$ – polinoamele în nedeterminata X cu coeficienți în K
4) $\mathcal{C}((a,b)) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$, $a < b \in \mathbb{R}$
5) K corp comutativ, $K^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K, \forall i \in \overline{1,n}\}$
   K-spațiu vectorial cu operațiile uzuale pe componente
6) $K = \mathbb{C} \Rightarrow$ spațiu vectorial complex

Baze

Fie K corp, V K-spațiu vectorial

$$S \subset V \; ; \; \langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, v_i \in S, a_i \in K, i = \overline{1,n} \right\}$$

↳ subspațiul generat de S

Def • S este un sistem de generatori (SG) pentru V dacă $\langle S \rangle = V$

• $v_1, v_2 \dots v_n \in V$ sunt un sistem liniar independent (SLi)

dacă $\forall\, a_1, \dots a_n \in K$ cu $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

• S nu este SLi $\Rightarrow$ vectorii din S sunt liniar dependenți

obs: $S \subset V$ SLi $\Leftrightarrow$ niciun vector din S nu este combinație liniară a celorlalți vectori din S

def
$$\left.\begin{array}{l} S \subset V \\ S \text{ este } SG \\ S \text{ este } SLi \end{array}\right| \Rightarrow S \text{ bază}$$

obs: dimensiune lui V = nr de elemente dintr-o bază a lui $V \overset{not}{=}$
$\overset{not}{=} \dim_K V$

obs: orice spațiu vectorial are cel puțin o bază, dar poate avea mai multe

Obs: spațiul vectorial $\{0_V\}$ are ca bază $\emptyset \Rightarrow$ dimensiunea $= 0$

CamScanner

Obs în K^n, $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ este mereu o bază, aceasta având denumirea de bază canonică.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n, \text{ unde } „1" \text{ se află pe linia } i$$

Subspații vectoriale

Def Fie V un K-spațiu vectorial; o submulțime nevidă $W \subseteq V$ se numește subspațiu vectorial în V dacă W cu restricțiile operațiilor pe V este un K-spațiu vectorial

exemple:

- $\{0_V\}$, V sunt subspații vectoriale în V
- $K[x]_{\leq n} = \{P(x) \in K[x] \mid \text{grad } P \leq n\} \cup \{0\}$ este un subspațiu vectorial în $K[x]$
- $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ subspațiu vectorial

definiție echivalentă

Fie V un K-spațiu vectorial

$W \subseteq V$ subspațiu vectorial $\Leftrightarrow ax + by \in W \quad \forall a, b \in K, \ \forall x, y \in W$

CamScanner

Subspații afine

Def Un spațiu afin peste corpul comutativ K este un triplet $\mathcal{A} = (X, \vec{X}, \phi)$ format dintr-o mulțime nevidă X, un spațiu vectorial $\vec{X}$ peste K, și o funcție $\phi : X \times X \to \vec{X}$ cu proprietățile:

i) $\exists\, O \in X$ a.î. funcția $\phi_O : X \to \vec{X}$, $\phi_O(A) = \phi(O, A)$, $\forall A \in X$

ii) $\phi(A,B) + \phi(B,C) = \phi(A,C)$, $\forall A,B,C \in X$

elementele lui $X \to$ puncte
elementele lui $\vec{X} \to$ vectori
funcția $\phi \to$ structura afină
$\dim \mathcal{A} = \dim \vec{X}$

exemple:

- spațiu afin geometric
  Considerăm S mulțimea punctelor spațiului geometric,
  $\vec{V}$ spațiul liniar real al vectorilor liberi și $\phi : S \times S \to \vec{V}$

  $\phi(A,B) = \overrightarrow{AB}$

Exerciții / probleme

I Stabiliți dacă $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3$. În caz afirmativ, determinați un sistem de generatori pentru subspațiu.

$$W_1 \subseteq \mathbb{R}^3$$

subspațiu vectorial $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{matrix} \forall\, u, v \in W \\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W_1$

fie $u = (x_1, y_1, z_1)$, $x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 0$

fie $v = (x_2, y_2, z_2)$, $x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0$

$$\alpha u + \beta v = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) =$$

$$= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta y_2) = (x, y, z)$$

$$x + 2y + 3z = \alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha y + \beta y_2) + 3(\alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$= \alpha \underbrace{(x_1 + 2y_1 + 3z_1)}_{0} + \beta \underbrace{(x_2 + 2y_2 + 3z_2)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow \alpha u + \beta v \in W_1$

$\Rightarrow W_1 \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ subspațiu vectorial

CamScanner

Fie $v = (x, y, z) \in W_1$

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$x = -2y - 3z$$

$$\Rightarrow v = (-2y - 3z, y, z) = (-2y, y, 0) + (-3z, 0, z) =$$
$$= y\underbrace{(-2, 1, 0)}_{v_1} + z\underbrace{(-3, 0, 1)}_{v_2} =$$
$$= y v_1 + z v_2$$

$$\Rightarrow S_1 = \langle \{v_1, v_2\} \rangle \Rightarrow \underbrace{\{v_1, v_2\}}_{\text{sistem de generatori}} \subset W_1$$

II Fie $S = \{\underbrace{(1,2,0,3)}_{v_1}, \underbrace{(2,1,3,0)}_{v_2}, \underbrace{(3,2,1,0)}_{v_3}\} \subset \mathbb{R}^4/\mathbb{R}$

$M = \langle S \rangle$

Verificați dacă $u_1 = (1,-1,1,-1) \in M$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \;\; v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; u_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -9 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -9 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 \in M$$

CS CamScanner

$\overline{\underline{\text{III}}}$ $V = \langle \underbrace{(1,2,-1,0)}_{v_1}, \underbrace{(2,1,0,-3)}_{v_2}, \underbrace{(-4,1,-2,9)}_{v_3} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4/\mathbb{R}$

determinați $B \subset V$ o bază $S = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$ matricea asociată

$\operatorname{rg} A = 2 (\neq 3) \Rightarrow S$ sistem liniar dependent

$(v_3 = 2v_1 - 3v_2)$

$\Rightarrow B = \{v_1, v_2\}$ bază $\rightarrow \dim V = 2 \rightarrow V$ plan vectorial

BIBLIOGRAFIE

CURSURI
- ALGEBRĂ
- MATH.UA.IC.RO
- SEMINAR

CS CamScanner

Beldi Darius Vlad
grupa 142

Aplicații liniare

<u>Def</u> V, W – spații vectoriale

$f: V \to W$ se numește aplicație liniară dacă:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x, y \in V$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & \forall x, y \in V \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) & \forall \alpha \in K, \forall x \in V \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall \alpha_1, \dots \alpha_p \in K \quad \forall x_1, \dots, x_p \in V$

$$f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 \dots \alpha_p x_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i)$$

<u>Obs</u> $V = W \Rightarrow f$ se numește endomorfism

<u>Def</u> Fie K un corp, V/K un K-spațiu vectorial, $p \in \mathbb{N}^*$

$f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{\text{de p ori}} \to K$ se numește formă p-liniară dacă este liniară în raport cu fiecare variabilă

<u>Def</u>: Se numește produs scalar pe un spațiu vectorial real $(V, +, \cdot)$ orice formă biliniară simetrică și pozitiv definită pe acesta:

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

CamScanner

$p=2$

$$f: V\times V \to K$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha x, y) = \alpha f(x,y) = f(x, \alpha y) \\ f(x+x', y) = f(x,y) + f(x',y) \\ f(x, y+y') = f(x,y) + f(x,y') \end{array}\right| \ \forall \alpha\in K, \forall\, x,x',y,y'\in V$$

formă biliniară simetrică = formă biliniară a.î. $f(x,y)=f(y,x)$ $\forall x,y\in V$

$K=\mathbb{R}$

o formă biliniară $f: V\times V\to\mathbb{R}$ s.m. pozitiv definită dacă $f(x,x)>0$ $\forall x\in V\setminus\{0_V\}$

o formă biliniară $f: V\times V\to\mathbb{R}$ s.m. negativ definită dacă $f(x,x)<0$ $\forall x\in V\setminus\{0_V\}$

<u>Obs</u>: $f(0_V, 0_V)=0$ $\forall f$ biliniară

<u>def</u> $f: V\times V\to K$ este o formă biliniară, atunci funcția $\varphi=\varphi_f: V\to K$ definită prin $\varphi(x)=f(x,x)$ $\forall x\in V$ se numește forma pătratică asociată lui f

<u>Obs</u>: $\varphi(\alpha x)=\alpha^2\varphi(x)$ $\forall \alpha\in K, x\in V$

<u>obs</u>: $f(x,y) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-y) - \varphi(x) - \varphi(y)\right]$

K corp

$(K^n, +, \cdot)/_K$ structura canonică

$(x^1, \dots x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1+y^1, \dots x^n+y^n)$

$\alpha(x^1, \dots, x^n) = (\alpha x^1, \dots \alpha x^n) \quad \forall\ \alpha, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n \in K$

definim $\langle , \rangle = \langle , \rangle_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\langle (x^1, x^2, \dots x^n), (y^1, y^2, \dots y^n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i = x^1y^1 + \dots + x^ny^n$

$n=2$

$\langle , \rangle = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\langle (x^1, x^2), (y^1, y^2) \rangle = x^1y^1 + x^2y^2 \quad \forall\ x = (x^1, x^2), y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$

forma pătratică $\varphi((x^1, x^2)) = (x^1)^2 + (x^2)^2$

fie $f: V \to W$ o aplicație liniară

Def nucleul lui f este $Ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\} \subseteq V$

imaginea lui f este $Im(f) = \{f(x) \mid x \in V\} \subseteq W$

Proprietăți

- $Ker\, f$ subspațiu vectorial în V
- f injectivă $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim Ker(f) = 0$
- $Im(f)$ subspațiu vectorial în W
- f surjectivă $\Leftrightarrow Im(f) = W$

CamScanner

Teorema rang-defect

$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$$

Obs: $f: V \to V$ endomorfism, atunci

f inj $\Leftrightarrow f$ surj $\Leftrightarrow f$ bijectivă

Matricea unei aplicații liniare într-o pereche de baze

Fie $f: V \to W$ aplicație liniară $\dim V = n < \infty$, $\dim W = m < \infty$

$B_V = \{v_1, \dots v_n\}$ bază în V

$B_W = \{w_1, \dots w_m\}$ bază în W

$\forall v_j$ calculăm coordonatele lui $f(v_j)$ în B_W și le punem pe coloane în matrice $\forall j = \overline{1,n}$ $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$ $a_{ij} \in K$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \stackrel{not}{=} [f]_{B_V, B_W} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$[f(v_1)]_{B_W}$ $\dots$ $[f(v_n)]_{B_W}$

$$[f(v)]_{B_W} = [f]_{B_V, B_W} \cdot [v]_{B_V} \quad \forall v \in V$$

CamScanner

Formule asociate schimbărilor de baze în spații vectoriale

K - corp comutativ

V/K finit dimensional

$V = (K^n, +, \cdot)$

$B_0 = \{e_1, \dots e_n\}$, $e_i = (0, \dots, i)$ $i = \overline{1,n}$

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$I_n = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = (\delta^i_j) = (\delta^{ij})$$

$$V/K \begin{cases} B = \{u_1, u_2 \dots u_n\} \\ \hat{B} = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2 \dots \hat{u}_n\} \end{cases} \subset V$$

baze

$$\hat{u}_i = \sum_{j=1}^{n} u^j_i u_j = u^j_i u_i$$

$B \xrightarrow{M} \hat{B}$ $\qquad M = (u^j_i)_{j,i=\overline{1,n}}$

matricea de trecere de la B la $\hat{B}$

CamScanner

$$u_j = \sum_{j=1}^{n} v^{i}_{gn} \hat{u}_i$$

$$N = \left(v^{i}_{gs}\right)_{i,s=\overline{1,n}}$$

$$\hat{B} \xrightarrow{N} B$$

→ matricea de trecere de la $\hat{B}$ la B

! Matricea de trecere de la o bază la alta este o matrice nesingulară și inversa ei reprezintă matricea de trecere de la a doua bază la prima

$f: V \to V$ endomorfism

$B = \{u_1, \dots u_n\}$ $\quad n = \dim_K V \in \mathbb{N}^*$

$f(u_i) = a^i_j u_j, \quad i = \overline{1,n}$

$A = \left(a^j_i\right)_{j,i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$

$x \in V, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x^i u_i$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^i f(u_i) = x^i a^j_i u_j = x^i a^j_i u_j \\ y &= y^j u_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^{n} y^j u_j$$

$$\Rightarrow y^j = \sum_{i=1}^{n} a^j_i x^i \quad j = \overline{1,n}$$

Reprezentarea endomorfismului în coordonate în raport cu B

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,1)}(K)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,1)}(K)$$

$$Y = AX$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n\} \quad f(\tilde{u}_i) = \tilde{a}_i^j \tilde{u}_j$$

$$\tilde{A} = \left(\tilde{a}_i^j\right)_{j,i=\overline{1,n}} = M_{\tilde{B}}(f)$$

$$\left.\begin{aligned} f(\tilde{u}_i) &= \tilde{a}_j^i \mu_j^n u_n \\ f(\tilde{u}_i) &= f(\mu_i^j u_s) = \mu_i^s \cdot a_s^n \cdot u_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{a}_i^j \mu_j^n = \mu_i^s \cdot a_s^n$$

! $M\tilde{A} = AM \Leftarrow \tilde{A} = M^{-1}AM$

$M^{-1} = M^t$ (M ortonormată)

$$\tilde{B} = M^t A M$$

$\varphi : V \times V \to K$ formă biliniară simetrică

$f = f_\varphi : V \to K \quad f(x) = \varphi(x,x)$ formă pătratică

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(x) - f(y)\right)$$

$$\varphi(u_i, u_j) = b_{ij} \in K$$

$$B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$x = x^i u_i \qquad y = y^j u_j$$

$$\varphi(x,y) = x^i y^j \varphi(u_i, u_j) \Rightarrow \varphi(x,y) = b_{ij} x^i y^j$$

$$f(x) = b_{ij} x^i x^j$$

reprezentarea în coordonate în raport cu B

φ simetrică $\Rightarrow \varphi(u_i, u_j) = \varphi(u_j, u_i) \Rightarrow b_{ij} = b_{ji} \Leftrightarrow B = B^t$

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x^i y^i + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x^i y^j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x^i y^i +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} b_{ij} (x^i y^j + x^j y^i)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} (x^i)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} b_{ij} x^i x^j$$

CamScanner

exemple

$n=2$

$$b_{11}(x^1)^2+b_{22}(x^2)^2+2b_{12}x^1x^2$$

$n=3$

$$b_{11}(x^1)^2+b_{22}(x^2)^2+b_{33}(x^3)^2+2b_{12}x^1x^2+2b_{23}x^2x^3+$$
$$+2b_{13}x^1x^3$$

II) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $f(x,y)=(x-y,\ x+2y,\ 3x)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

a) demonstrați că f este aplicație liniară

b) scrieți matricea asociată aplicației liniare f în raport cu bazele $B_1=\{\underbrace{(1,2)}_{v_1},\underbrace{(2,-3)}_{v_2}\}\subset\mathbb{R}^2$ și

$B_2=\{\underbrace{(-1,1,0)}_{w_1},\underbrace{(1,0,-1)}_{w_2},\underbrace{(0,-1,1)}_{w_3}\}\subset\mathbb{R}^3$

a) $A_f=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\\3&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$; $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$f(X)=AX$

fie $X_1, X_2\in\mathbb{R}^2$

$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$

$f(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2)=A(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2)=\alpha_1(AX_1)+\alpha_2(AX_2)$

$=\alpha_1f(X_1)+\alpha_2f(X_2)\Rightarrow f$ aplicație liniară

b) $A_f = [f]_{B_0, B'_0}$, unde $B_0 = \{\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}\} \subset \mathbb{R}^2$

$B'_0 = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e'_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e'_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e'_3}\} \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow [f]_{B_0 B'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

<u>aplicații / probleme</u>

I Fie B_1, B_2 baze in $\mathbb{R}^3$

$B_1 = \{\underbrace{(0,1,2)}_{f_1}, \underbrace{(1,0,2)}_{f_2}, \underbrace{(2,2,2)}_{f_3}\}$

$B_2 = \{\underbrace{(1,1,-1)}_{g_1}, \underbrace{(1,-1,1)}_{g_2}, \underbrace{(-1,1,1)}_{g_3}\}$

<u>det coordonatele vectorilor f_1, f_2, f_3 în raport cu B_2</u>

$[f_1]_{B_2}, [f_2]_{B_2}, [f_3]_{B_2} = ?$

$[f_1]_{B_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad B_0 \xrightarrow{S_{02}} B_2$

$S_{02} \cdot [f_1]_{B_2} = [f_1]_{B_0}$

$[f_1]_{B_2} = S_{02}^{-1} \cdot [f_1]_{B_0}$

$S_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{02}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

CamScanner

$\Rightarrow [f_1]_{B_2} = S_{02}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$[f_2]_{B_2} = S_{02}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[f_3]_{B_2} = S_{02}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) $B_0 \overset{S}{\rightsquigarrow} B_1$ $\qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$B_0' \overset{T}{\rightsquigarrow} B_2$ $\qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

z) $\underset{\sim}{A_f'} = T^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$

$[f]_{B_1, B_2}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -3 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

11/14

III) Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y, y-x)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

determinați $Ker\, f$ și $Im\, f$, B_1 și B_2 baze în $Ker\, f$ și $Im\, f$, $\dim Ker\, f$ și $\dim Im\, f$

$$Ker\, f = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \} \subset \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y=0 \\ -x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow Ker\, f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow \dim Ker\, f = 0$$

$$Im\, f = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^2 \text{ a.î. } f(v) = w \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y = x' \\ y = y' \\ -x = z' \Rightarrow x = -z' \end{array}\right\} -z'-y' = x' \Leftrightarrow x'+y'+z' = 0$$

$$Im\, f = \{ (x', y', z') \mid x'+y'+z' = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} (x', y', z') \in Im\, f \\ x'+y'+z' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z' = -x'-y' \Leftrightarrow (x', y' - x', -y')$$

$$= (x', 0, -x') + (0, y', -y') = x'\underbrace{(1,0,-1)}_{w_1} + y'\underbrace{(0,1,-1)}_{w_2} =$$

$= x' w_1 + y' w_2 \qquad x', y' \in \mathbb{R} \Rightarrow B_2 = \{w_1, w_2\}$ SG

$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 = |B_2| \to B_2$ SLi

$\Rightarrow B_2$ bază

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$

IV Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3$$
$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) det g cu formula de polarizare

b) scrieți matricea asociată formei biliniare simetrice în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$

a) $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - Q(x_1, x_2, x_3) - Q(y_1, y_2, y_3)\right]$$

$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\Big[(x_1+y_1)^2 - 3(x_2+y_2)^2 - 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 4(x_2+y_2)(x_3+y_3) -$$
$$- 3(x_1+y_1)(x_3+y_3) - x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 +$$
$$+ 3x_1x_3 - y_1^2 - 3y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 4y_2y_3 + 3y_1y_3\Big]$$

$$= x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \tfrac{3}{2}x_1y_3 -$$
$$- \tfrac{3}{2}x_3y_1$$

b) $G_{/B_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

BIBLIOGRAFIE

CURS ALGEBRĂ

CURS GEOMETRIE

SEMINAR

CamScanner