Part 1 of 3

(A1) Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicație liniară care în baza canonică are matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificați dacă vectorul $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ este în $Ker(f)$ și $Im(f)$

(b) Este w de la punctul (a) un vector propriu pentru f?

(c) Aflați vectorii și valorile proprii ale matricei A.

(d) Diagonalizați matricea A, dacă este posibil

Part 2 of 3

(A2) În $\mathbb{R}^3$ considerăm vectorii

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 29 \\ -13 \end{pmatrix}$$

și subspațiile vectoriale $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ și $V = \langle v_4, v_5 \rangle$

Determinați bazele și dimensiunea pentru subspațiile: $U, V, U+V$ și $U \cap V$

(G1) Fie conica: $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$

Arătați că definește o parabolă și determinați focarul acesteia

Part 3 of 3

I Fie în E^2 triunghiul ΔABC : $A=(2,0)$, $B=(0,2)$ și $C=(2,2)$

Fie $f,g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfisme a.î. $M_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 \end{pmatrix}$

și $M_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & \sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & -\cos \pi/6 \end{pmatrix}$ unde $B_0 = \{ l_2 = (0,1), l_1 = (1,0) \}$

este bază canonică în E^2

Fie $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ și $A'' = g(A)$, $B'' = g(B)$, $C'' = g(C)$

1) Repr. grafic ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$ într-un sist cartezian
2) Arătați că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \equiv \Delta A''B''C''$
3) Det $h = g \circ f$ și repr f, g, h în coordonate și matricial
4) Arătați că $g \circ f \in Aut(E_0^2)$
5) Repr f ca o comp de simetrii față de drepte

II Se consideră în E_0^3 cuadrica algebrică:

$$Q(x^1, x^2, x^3) = \frac{(x^1)^2}{4} + \frac{(x^2)^2}{9} + \frac{(x^3)^2}{25} - 1$$

1) Calculați invarianții relativi ai acestei cuadrice
2) arătați că această cuadrică are centru unic și det acest centru
3) Cum se numește cuadrica? Desen

II' Se consideră în $(E^3, \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ vectorii

$u = (2,5,4)$, $v = (0,2,2)$, $w = (2,0,2)$

Calculați

1) $\langle u, v \rangle$ și $u \times v$
2) $\langle u \times v, w \rangle$
3) $\| u \times v \|$
4) $\cos(\widehat{u, v})$