Beldi Darius Vlad

grupa 142

Probleme

1) Fie $A \in O(2)$

Atunci $\exists\ \theta \in [0, 2\pi]$ a.î. $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

SAU $A = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$A \in O(2) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, iar

$$A \cdot A^t = I_n \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \cos t,\ b = \sin t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c \cdot \cos t + d \cdot \sin t = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -c\,\dfrac{\cos t}{\sin t} \\ c^2\left(1 + \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 = \sin^2 t$$

Caz 1 $\quad c = \sin t$, $d = -\cos t$

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \in O(2)$$

Obs: $A \in SO(2)$

Caz 2: $\quad c = -\sin t$, $d = \cos t$

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2),\ A \in O(2) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in O(2)$$

2) $\begin{cases} R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} \overset{?}{=} R_{\theta_1+\theta_2} \\ R_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1} \overset{?}{=} R_{\theta_2+\theta_1} \end{cases}$

Acest sistem este adevarat, două rotații în plan sunt egale cu o rotație de unghiul sumei celor 2

$$R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_1 \\ \cos\theta_2 \sin\theta_1 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

Analog pentru $R_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1} = R_{\theta_2+\theta_1}$

3) $\begin{cases} R_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1} \end{cases}$

3.1) $R_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 - \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Obs: Matricea rezultată nu este în general o rotație pură sau o simetrie pură

3.2) $S_{\theta_2}\cdot R_{\theta_1} = \begin{pmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1\\ \sin\theta_2\cos\theta_1 - \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_2-\theta_1)\\ \sin(\theta_2-\theta_1) & -\cos(\theta_1-\theta_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_2-\theta_1)\\ \sin(\theta_2-\theta_1) & \cos(\theta_1-\theta_2)\end{pmatrix}$$

Concluzie: compunerea dintre o simetrie și o rotație nu comută

Observația anterioară rămâne valabilă

4) $\begin{cases} S_{\theta_1}\cdot S_{\theta_2}\\ S_{\theta_2}\cdot S_{\theta_1}\end{cases}$

4.1) $S_{\theta_1}\cdot S_{\theta_2} = \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2\\ \sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_2-\theta_1)\\ \sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_1-\theta_2) & -\sin(\theta_1-\theta_2)\\ \sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2)\end{pmatrix}$$

Observăm că pt $O(2)$, compunerea a 2 simetrii rezultă într-o rotație

Analog pentru $S_{\theta_2}\cdot S_{\theta_1}$ obținem $\begin{pmatrix}\cos(\theta_2-\theta_1) & -\sin(\theta_2-\theta_1)\\ \sin(\theta_2-\theta_1) & \cos(\theta_2-\theta_1)\end{pmatrix}$ echivalent

cu $\begin{pmatrix}\cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_1-\theta_2)\\ -\sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2)\end{pmatrix}$ adică rotația în sens invers.