Beldi Darius Vlad
grupa 142

Rezumat Cursuri

Curs 1

Spații vectoriale euclidiene reale

Def $(V,+,\cdot)_{\mathbb{R}}$ sp real vectorial și $g: V\times V \to \mathbb{R}$, g s.m. produs scalar $\Leftrightarrow$

1) g formă biliniară simetrică
2) g este poz def (i.e $Q: V \to \mathbb{R}$ f pătratică asociată,

$Q(t) = g(t,t)$, $\forall t \in V$

poz definită $\to$ $Q(x) > 0$, $\forall x \in V \setminus \{0_V\}$
$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Notăm: (V, g), $(E, <,>)$, $(E, (,))$ spațiu vectorial euclidian real

Def: $||a|| = \sqrt{g(x,x)} = \sqrt{Q(x)}$, $\forall x \in V$, norma lui x

Def: $(E,<,>)$ s.v.e.r, $R = \{e_1, \dots e_n\}$ reper în V

a) R s.m. reper ortogonal $\Leftrightarrow$ $<e_i, \dots e_j>$ ~~reper în V = 0 δ_{ij}, $\forall i,j = \overline{1,n}$~~
$\forall$ $i \neq j$ și $\forall i,j = \overline{1,n}$

b) R s.m reper ortonormat $\Leftrightarrow$ $< e_i, \dots e_j> = \delta_{ij}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$
(vectorii sunt mutual $\perp$ și versori)

obs: $R = \{e_1 \dots e_n\} \xrightarrow{A} R' = \{e'_1 \dots e'_n\}$ repere ortonormate

$\Rightarrow A \in O(n)$ i.e. $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$

$$e'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$$

Dacă R și R' sunt la fel orientate ($\det A > 0$) $\Rightarrow \det A = 1$ și $A \in SO(n)$

Curs 2

Teoremă (procedeul Gram – Schmitt)

Fie $(E, <,>)$ o.v.l.r. $R = \{f_1, \dots, f_n\}$ reper în $E \Rightarrow$

$\exists\, R' = \{e_1, \dots e_n\}$ reper ortogonal în E a.î.

$Sp\{e_1, \dots e_i\} = Sp\{f_1, \dots f_i\}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, $n = \dim E$

$<\{e_1, \dots e_i\}>, <\{f_1, \dots f_i\}>$

Dem: Met inductivă

$e_1 = f_1 \neq 0$

$e_2 = f_2 + \alpha f_1 = f_2 + \alpha e_1$

$<e_1, e_2> = 0 \Rightarrow <e_1, e_2> = <f_2 + \alpha e_1, e_1> = <f_2, e_1>$

$+ \alpha <e_1, e_1>$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-<f_2, e_1>}{<e_1, e_1>}, \quad e_2 = f_2 - \frac{<f_2, e_1>}{<e_1, e_1>} \cdot e_1$$

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = \dfrac{<f_2, e_1>}{<e_1, e_1>} e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow Sp\{e_1, e_2\} = Sp\{f_1, f_2\}$$

Obs $R = \{f_1, \ldots, f_n\}$ $\xrightarrow{A}$ $R' = \{e_1, \ldots, e_n\}$ $\xrightarrow{B}$ $R'' =$
reper arbitrar — reper ortogonal

$= \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{\|e_n\|}{\|e_n\|} \right\}$
reper ortonormat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} & \frac{\langle f_n, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \frac{\langle f_n, e_{n-1} \rangle}{\langle e_{n-1}, e_n \rangle} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|e_1\|} & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & \frac{1}{\|e_n\|} \end{pmatrix}$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1, \quad \det B = \frac{1}{\|e_1\|} \cdots \frac{1}{\|e_n\|} > 0$$

R, R', R'' sunt repere la fel orientate

Curs 3

Transformări ortogonale

Def $(E_i, \langle , \rangle)_{i=\overline{1,2}}$ sp vectorial euclidian real. Aplicația liniară $f: E_1 \to E_2$ s.n. aplicație ortogonală $(\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow)$ $\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \forall x, y \in E_1$

Propr Dc $f: E_1 \to E_2$ este ap. ortogonală, atunci

1) $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1, \ \forall x \in E_1$
2) f injectivă

Def: $(E, <,>)$ sp vect euclidian real, $f \in End(E)$ f s.n. transformare ortogonală $\Leftrightarrow$ $<f(x), f(y)> = <x, y>$,

Prop $f \in O(E) = \{ f \in End(E) \mid f$ trans. ortogonală$\}$

$\Leftrightarrow \|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$

Matrice asociată unei transformări ortogonale

$(E, <,>)$ s.v.e.r, $R = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ reper ortonormat

$A = [f]_{R,R}$, $f \in O(E)$

$<f(e_i), f(e_j)> = <e_i, e_j> \quad \forall i,j = \overline{1,n}$

$$< \sum_{r=1}^{n} a_{ri} e_r , \sum_{s=1}^{n} a_{sj} e_s > = <e_i, e_j>$$

$$\sum_{s,r=1}^{n} a_{ri} a_{sj} < e_r, e_s > = <e_i, e_j>$$

$\Rightarrow A^t \cdot A = I_n \Rightarrow A \in O(n)$

Curs 4

Spații vectoriale euclidiene. Endomorfisme simetrice

Teorema Cauchy – Buniakowski – Schwarz:

$(E, <,>)$ s.v. e.r. $x, y \in E$

$\Rightarrow |<x,y>| \leq \|x\| \, \|y\|$

Mai mult, "=" $\Leftrightarrow \{x,y\}$ este SLD

Teoremă:

$(E, <,>)$ s.v.e.r., $U \subseteq E$ subsp. vect. $\Rightarrow E = U \oplus U^{\perp}$ (scriere unică), ($U^{\perp}$ = complement ortogonal)

Endomorfisme simetrice:

Def $(E, <,>)$ s.v.e.r. $f \in End(E)$, f s.n. endomorfism simetric $\Leftrightarrow$ $<x, f(y)> = <f(x), y>$ ($f \in Sim(E)$), $\forall x, y \in E$

Prop: $f \in Sim(E) \Leftrightarrow$ matricea asoc. în raport cu $\forall$ reper ortonormat este simetrică

Prop: $f \in Sim(E) \Rightarrow$ vectorii proprii coresp. la valori proprii distincte $\perp$

Teoremă: $f \in Sim(E) \Rightarrow$ toate răd. polinomului caracteristic sunt reale

Prop: $f \in End(E)$, dacă $f \in Sim(E)$ și $U \subseteq E$ subspațiu invariant $\Rightarrow U^{\perp} \subseteq E$ este subspațiu invariant

Curs 5

Spații afine

Def: (sp afine) $(\mathcal{A}, V/_{\mathbb{R}}, \varphi)$

Fie $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (mulț de puncte), $V_{\mathbb{R}}$ sp vectorial

$\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ (structură afină) aplicație care verifică:

1) $\varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$, $\forall A,B,C \in \mathcal{A}$

2) $\exists\ O \in \mathcal{A}$ a.î. $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$ bijecție

$\varphi_O(A) = \varphi(O,A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ (de fapt $\exists \Rightarrow \forall$)

Not $\varphi(A,B) = \vec{AB}$

Caz particular: $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\varphi(u,v) = v - u$ (este afină canonică)

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, \varphi)$ sp afin

Def $M \subset \mathbb{R}^n$, mulț de puncte

$$\mathcal{A}f(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i P_i,\ a_i \in \mathbb{R},\ P_i \in M,\ i = \overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 \right\}$$

combinații afine de puncte din M

Curs 6

Poziția relativă a 2 drepte

$D_1 : x_i - a_i = t v_i , \forall i = \overline{1,n}$

$D_2 : x_i - a'_i = t' v'_i , \forall i = \overline{1,n}$

$D_1 \cap D_2 : t v_i - t' v'_i = a'_i - a_i , i = \overline{1,n}, (t, t'$ necunoscute$)$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} v_1 & -v_1' & a_1' - a_1 \\ v_2 & -v_2' & a_2' - a_2 \\ \vdots & \vdots & \\ v_n & -v_n' & a_n' - a_n \end{array}\right)$$

1. $rg\, C = rg\, \bar{C} = 2 \Rightarrow D_1 \cap D_2$ concurente
2. $rg\, C = 2$, $rg\, \bar{C} = 3$ necoplanare
3. $rg\, C = rg\, \bar{C} = 1 \Rightarrow D_1 = D_2$
4. $rg\, C = 1$, $rg\, \bar{C} = 2$, $D_1 \parallel D_2$

Exemplu: $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3/\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}_0), \mathcal{V})$

$\Delta \ni A(1, 2, -1)$, $V_\Delta = \langle\{v = (2, 3, 1)\}\rangle$

$\Delta' \ni A(0, 1, -1)$, $V_{\Delta'} = \langle\{v' = (1, -2, 3)\}\rangle$

$\overline{AA'} = (-1, -1, 0)$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 3 & +2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 & +1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow D_1, D_2 \text{ necoplanare}$$

Obs: D, D' drepte $\perp$ afine $\Leftrightarrow \langle v, v' \rangle = 0$

Curs 7

Conice ca locuri geometrice

$(\mathbb{R}^2, (\mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}, J_0), J)$

① Cercul $\mathcal{C}(A(a, b), r) =$ LG al punctelor egal depărtate de punctul fix A x z

$\mathcal{C}(A(a, b), r)$: $M = r$

$$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} = r$$

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

② Elipsa este locul geometric al punctelor $P \in \mathcal{E}_2$ care verifică $PF + PF = 2a$, $a > 0$, F, F' = puncte fixe $PF + PF' = 2a$

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 + c) + x_2^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0.$$