Vorwort

Fehler und Anmerkungen bitte an CHRISTOPH *punkt* SENJAK *at* IFI *punkt* LMU *punkt* DE.

Vorkenntnisse: Logik, Modelle der Mengenlehre (Konstruktibles Universum, Innere Modelle, kein Forcing)

Inhalt: Ursprungliche Motivation für große Kardinalzahl-Axiome war, dass ω ein Sprung in den Kardinalzahlen ist. Man überlegte ob so ein Sprungverhalten öfter vorkommen könnte. Die erste Vorgehensweise war, bestimmte Eigenschaften von ω zu isolieren, und dann eine Zahl mit den gleichen Eigenschaften ungleich ω zu fordern. Dies ist allerdings inzwischen weitgehend obsolet.

Die Theorien die man durch große Kardinalzahlen bekommt ist eine Verstärkung der ursprünglichen Theorie. Man kann mit immer neuen großen Kardinalzahlen immer neue Aussagen über natürliche Zahlen beweisen.

Das hier Behandelte ist im Wesentlichen die Einführung immer größerer Kardinalzahlen, relevant wird immer sein, ob man noch die natürlichen inneren Modelle für große Kardinalzahlen hat.

Literatur:

- Drake, Set Theory - An Introduction To Large Cardinals
- Jech, Set Theory
- Kanamori, The Higher Infinite

Notation und Notizen:

- $[X]^n$ = Menge aller n-Elementigen Teilmengen von X
- $[X]^{<\omega} = \bigcup_n [X]^n$ = Menge aller endlichen Teilmengen von X
- gdw: genau dann wenn
- abg. unb.: abgeschlossen unbeschränkt
- otp: Ordnungstyp
- $\bar{\cdot}$ ist **kein** operator, sondern wird benutzt um zusätzliche Variablennamen zu generieren, $\overline{\kappa}$ hängt nicht mit κ zusammen.
- $j : M \to_{\Sigma_\omega} N$: j ist elementare Einbettung von M in N

Wir betrachten oft Strukturen der Form $\langle M, \in, A_1, \ldots, A_n \rangle$ mit $A_i \subseteq M$.

Konvention: Lasse das $\in$ weg, identifiziere $\langle M, A_1, \ldots, A_n \rangle$ mit $\langle M, \in, A_1, \ldots, A_n \rangle$.

Elementare Substruktur: Sei $\mathfrak{M} = \langle M, A_1, \ldots, A_n \rangle$, $N \subseteq M$ und $\mathfrak{N} = \langle N, A_1 \cap N, \ldots, A_n \cap N \rangle$ die zugehörige Substruktur von $\mathfrak{M}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ elementare Substruktur von $\mathfrak{M}$ (Bez. $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ genau dann wenn für alle φ und $a_1, \ldots, a_k \in N$

$$\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k]$$

Konvention: Schreibe $N \prec \langle M, A_1, \ldots, A_n\rangle$ statt
$\langle N, A_1 \cap N, \ldots, A_n \cap N\rangle \prec \langle M, A_1, \ldots, A_n\rangle$.

Skolemfunktionen: Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \in, A_1, \ldots, A_n\rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Für eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(\vec{x}, y)$ definiere f_φ so, dass gilt

$$\mathfrak{M} \models \exists_y \varphi[\vec{a}, y] \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}, f_\varphi(\vec{a})]$$

Setze $\mathcal{F} = \{f_\varphi \mid \varphi \ \ \mathcal{L} - \text{Formel}\}$. Dann gilt:

Sei $N \subseteq M$, $N \neq \emptyset$, unter allen $f \in \mathcal{F}$ abgeschlossen (d.h. $\vec{a} \in N, f \in \mathcal{F} \Rightarrow f(\vec{a}) \in N$). Dann ist $N \prec \mathfrak{M}$.

Wir sagen: $\mathcal{F}$ ist Menge von Skolemfunktionen für $\mathfrak{M}$. Beachte, dass $\mathcal{F}$ abzählbar ist.

1 “Kleine” große Kardinalzahlen

Arbeite in ZFC. Wir nehmen an, dass ZFC widerspruchsfrei ist.

Definition: κ ist (stark) unerreichbar $\Leftrightarrow \kappa > \omega$, κ regulär und für alle $\lambda < \kappa$ gilt $2^\lambda < \kappa$.

Bemerkung: ω ist regulär und für alle $n < \omega$ ist $2^n < \omega$.

Lemma 1: Sei κ unerreichbar. Dann gilt für alle $\alpha < \kappa$ dass $|V_\alpha| < \kappa$ (also $|V_\kappa| = \kappa$).

Beweis: Durch Induktion über $\alpha < \kappa$:

- $\alpha = 0$: $V_0 = \emptyset$. Also $|V_0| = 0 < \kappa$.
- $\alpha = \beta + 1$: $V_{\beta+1} = \mathfrak{P}(V_\beta)$. Also $|V_{\beta+1}| = 2^{|V_\beta|}$. Nach Induktion ist $|V_\beta| < \kappa$. Also nach Definition $2^{|V_\beta|} < \kappa$.
- $\lim(\lambda)$: Es ist $V_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} V_\alpha$. Also $|V_\lambda| \leq |\lambda| \cdot \sup\{|V_\alpha| \mid \alpha < \lambda\}$. Wegen $\lambda < \kappa$ genügt es also zu zeigen, dass $\sup\{|V_\alpha| \mid \alpha < \lambda\} < \kappa$. Also für $\alpha < \lambda$ ist $|V_\alpha| < \kappa$ nach Induktionsvoraussetzung und $\lambda < \kappa$. Wegen κ regulär ist also $\sup\{|V_\alpha| \mid \alpha < \lambda\} < \kappa$.

$\square$

Lemma 2: Sei κ unerreichbar und $u \subseteq V_\kappa$. Dann gilt $u \in V_\kappa \Leftrightarrow |u| < \kappa$.

Beweis:

$\rightarrow$: Sei $u \in V_\kappa$. Dann existiert $\alpha < \kappa$ mit $u \in V_\alpha$. Wegen V_α transitiv also $u \subseteq V_\alpha$. Somit $|u| \leq |V_\alpha| \overset{\text{L1}}{<} \kappa$.

$\leftarrow$: Sei $|u| < \kappa$. Definiere $g : u \to \text{On}$ durch $g(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_\alpha\}$. Wegen $u \subseteq V_k$ ist $\text{rng}(g) \subseteq \kappa$. Aber $|\text{rng}(g)| \leq |u| < \kappa$. Wegen κ regulär ist also $\text{rng}(g)$ beschränkt in κ. Sei $\gamma = \sup \text{rng}(g)$. Dann ist $u \subseteq V_\gamma$, denn für $x \in u$ ist $x \in V_{g(x)} \subseteq V_\gamma$. Also $u \in V_{\gamma+1} \subseteq V_\kappa$.

□

Satz 3: Sei κ unerreichbar. Dann $V_\kappa \models ZFC$.

Beweis:

- (Ext) und (Fund) sind Π_1. Sie gelten also in V_κ, da V_κ transitiv.
- (Null) da $\emptyset \in V_\kappa$.
- (Un) da $\omega = \mathrm{On} \cap V_\omega \in V_{\omega+1} \subseteq V_\kappa$ (da $\kappa > \omega$).
- (Paar) Seien $x, y \in V_\kappa$. Dann existieren $\alpha, \beta < \kappa$ mit $x \in V_\alpha$ und $y \in V_\beta$. Setze $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. Also $\{x, y\} \subseteq V_\gamma$ und somit $\{x, y\} \in V_{\gamma+1} \subseteq V_\kappa$.
- (Ver) Sei $x \in V_\kappa$. Dann existiert $\alpha < \kappa$ mit $x \in V_\alpha$. Also wegen V_α transitiv $\bigcup x \subseteq V_\alpha$. Somit $\bigcup x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$.
- (Pot) Sei $x \in V_\kappa$. Dann existiert $\alpha < \kappa$ mit $x \in V_\alpha$. Also $x \subseteq V_\alpha$ und daher $\mathfrak{P}(x) \subseteq \mathfrak{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. Somit $\mathfrak{P}(X) \in V_{\alpha+2} \subseteq V_\kappa$.
- (Ers) Es genügt folgendes zu zeigen: Sei $F : A \to V_\kappa$ Funktion mit $A \subseteq V_\kappa$ und sei $u \in V_\kappa$. Dann ist $F''u \in V_\kappa$. Sei also $F : A \to V_\kappa$ gegeben und $u \in V_\kappa$. Dann ist auch $u \subseteq V_\kappa$ und nach Lemma 2 $|u| < \kappa$. Setze $v = F''u$. Also $v \subseteq V_\kappa$ und $|v| \leq |u| < \kappa$. Somit nach Lemma 2 $v \in V_\kappa$.
- (AC) Sei $u \in V_\kappa$ mit $\emptyset \notin u$. Sei f eine Auswahlfunktion für u. Also ist $f \subseteq u \times \bigcup u$. Sei $\alpha < \kappa$ mit $u \in V_\alpha$. Dann ist aber $u \times \bigcup u \subseteq V_\alpha \times V_\alpha \subseteq V_{\alpha+2}$. Also $f \in V_{\alpha+3} \subseteq V_\kappa$.

□

Folgerung: ZFC $+\exists_\kappa \kappa$ unerreichbar $\vdash$ Con(ZFC). Also nach Gödel ZFC $\nvdash \exists_\kappa \kappa$ unerreichbar. Sogar ohne Gödel, denn:

Annahme: ZFC $\vdash \exists_\kappa \kappa$ unerreichbar. Sei κ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl. Dann $V_\kappa \models$ ZFC +existiert keine unerreichbare Kardinalzahl. Widerspruch.

Satz 4: Es sind äquivalent

(1) κ ist unerreichbar

(2) Für alle $A \subseteq V_\kappa$ ist $\{\alpha < \kappa \mid V_\alpha \prec \langle V_\kappa, A\rangle\}$ abgeschlossen und unbeschränkt in κ

(3) Für alle $A \subseteq V_\kappa$ und (erststufigen) φ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \models \varphi$ existiert $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$

Beweis:

- (1)$\Rightarrow$(2): Sei $A \subseteq V_\kappa$. Setze $C = \{\alpha < \kappa \mid V_\alpha \prec \langle V_\kappa, A\rangle\}$.
  (a) C ist abgeschlossen in κ: Sei $\alpha < \kappa$ ein Limespunkt von C. Dann ist $V_\alpha = \bigcup_{\gamma \in C \cap \alpha} V_\gamma$. Also $V_\alpha \prec \langle V_\kappa, A\rangle$ nach dem Lemma von Tarski über elementare Ketten.
  (b) C ist unbeschränkt in κ: Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Skolemfunktionen für $\langle V_\kappa, A\rangle$. Für $f \in \mathcal{F}$ sei $C_f = \{\alpha < \kappa \mid f''V_\alpha^{\kappa_f} \subseteq V_\alpha\}$.

(c) C_f ist abeschlossen und unbeschränkt in κ: Abgeschlossenheit ist klar. Zur Unbeschränktheit: Sei $\alpha < \kappa$. Definiere rekursiv die monotone Folge $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \kappa$ wie folgt: Setze $\alpha_0 = \alpha$. Im n-ten Schritt $v_n = f''V_{\alpha_n}^{\kappa_f}$. Dann wegen κ unerreichbar $|v_n| < \kappa$. Also ist $v_n \in V_\kappa$ nach Lemma 2. Also existiert $\beta > \alpha_n$ mit $\beta < \kappa$ und $v_n \subseteq V_\beta$. Setze $\alpha_{n+1} = \beta$. Dann gilt also $f''V_{\alpha_n}^{n_f} \subseteq V_{\alpha_{n+1}}$. Sei dann $\gamma = \sup_n \alpha_n$. Dann $\gamma < \kappa$, da $\mathrm{cf}(\kappa) > \kappa$ und natürlich $\gamma > \alpha$. Aber $\gamma \in C_f$, da $f''V_\gamma^{n_f} = \bigcup_{n\in\omega} f''V_\alpha^{n_f} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} V_{\alpha_{n+1}} = V_\gamma$.

Setze nun $D = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} C_f$. Wegen $\mathcal{F}$ abzählbar ist D nach (c) abg. unb. in κ. Aber $D \subseteq C$, dann ist $\alpha \in D$, so für alle $f \in \mathcal{F}$: $f''V_\alpha^{\kappa_f} \subseteq V_\alpha$, also $V_\alpha \prec \langle V_\kappa, A\rangle$.

- (2)⇒(3): Trivial.
- (3)⇒(1): Sei (3) erfüllt.

(i) κ ist Limesordinalzahl: Offenbar $\kappa \neq 0$. $\lightning$-Annahme: $\kappa = \gamma + 1$. Setze $A = \{\gamma\}$. Dann $\langle V_\kappa, A\rangle \models A \neq \emptyset$ (genau: $\langle V_\kappa, A\rangle \models \exists x\ A(x)$). Wähle nach (3) ein $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models A \neq \emptyset$. Dann aber $\gamma \in A \cap V_\alpha$, d.h. $\gamma \in V_\alpha$, also $\gamma < \alpha$. $\lightning$ zu $\alpha < \kappa = \gamma + 1$.

(ii) $\kappa > \omega$: $\lightning$-Ann.: $\kappa < \omega$. Dann nach (i) $\kappa = \omega$. Aber $(V_\omega \models \forall\gamma \in \mathrm{On}\ \exists\delta \in \mathrm{On}\ \gamma < \delta) \wedge \exists x\ x = x$ alle $n < \omega$: $V_n \models \neg\varphi$. $\lightning$ zu (3).

(iii) κ ist regulär: Sei $\gamma < \kappa$ und $f\colon \gamma \to \kappa$. Wir müssen zeigen, dass f beschränkt in κ ist. Wir können o.E. annehmen, dass $f(0) = \gamma$. Setze $A = f \subseteq V_\kappa$. Dann

$$\langle V_\kappa, A\rangle \models \text{"}A \text{ ist Funktion, dann } (A) = A(0)\text{"}$$

Gemäß (3) wähle $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha \models \varphi$. Setze $g = A \cap V_\alpha$. Dann $0 \in \mathrm{dom}(g)$. Also $g(0) = f(0) = \gamma \in V_\alpha$. Außerdem $dom(g) = g(0) = \gamma$. Also $g = f$, d.h. $f \subseteq V_\alpha$ und damit $\mathrm{rng}(f) \subseteq On \cap V_\alpha = \alpha$. Also f beschränkt in κ.

(iv) für alle$\lambda < \kappa$ $2^\lambda < \kappa$: Sei $\lambda < \kappa$ und $f\colon \mathfrak{P}(\lambda) \to \kappa$. Wir müssen zeigen, dass f nicht surjektiv ist. Sei o.E. $f(\emptyset) = \lambda$. Setze $A = f \subseteq V_\kappa$. Dann $\langle V_\kappa, A\rangle \models \text{"}A \text{ ist Funktion, dom}(A) = (A(\emptyset))\text{"}$. Gemäß (3) wähle $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$. Setze $g = A \cap V_\alpha$. Dann $\emptyset \in \mathrm{dom}(g)$. Also $g(\emptyset) = f(\emptyset) = \lambda \in V_\alpha$. Außerdem $\mathrm{dom}(g) = \mathfrak{P}(g(\emptyset)) = \mathfrak{P}(\lambda)$. Also $g = f$, d.h. $f \subseteq V_\alpha$ und somit z.B. $\alpha \notin \mathrm{rng}(f)$

□

Lemma 5: Sei W ein inneres Modell. Sei κ unerreichbar. Dann ist κ unerreichbar in W.

Beweis: κ ist regulär in W, denn Regularität ist eine Π_1-Eigenschaft. Sei $\lambda < \kappa$. Dann $(2^\lambda)^W \leq 2^\lambda < \kappa$.

□

Definition: κ ist *schwach unerreichbar* $\iff$ $\kappa > \omega$ und κ ist reguläre Limesordinalzahl.

Anmerkung: Sei W ein inneres Modell. Sei κ schwach unerreichbar. Dann ist κ schwach unerreichbar in W.

Anmerkung: Sei κ schwach unerreichbar. Dann ist κ unerreichbar in L.

Beweis: κ ist schwach unerreichbar in L. Aber $L \models GCH$. Also ist κ unerreichbar in L.

□

Wir können z.B. definieren: κ ist *hyperunerreichbar* $\iff$ κ ist unerreichbar und $\kappa = \sup\{\tau < \kappa \mid \tau \text{ unerreichbar}\}$. Das lässt sich beliebig weitertreiben: hyperhyperunerreichbar, hyperhyperhyperunerreichbar usw...

Definition: κ ist *Mahlo* $\iff$ κ ist unerreichbar und $\{\tau < \kappa \mid \tau \text{ ist regulär}\}$ ist stationär in κ.

Bemerkung: κ Mahlo $\Rightarrow \{\tau < \kappa \mid \tau \text{ unerreichbar}\}$ ist stationär in κ.

Beweis: Sei κ Mahlo. Sei $E = \{\tau < \kappa \mid \tau \text{ regulär}\}$. Setze

$$C = \{\tau < \kappa \mid \tau > \omega \text{ und für alle } \lambda < \tau\ 2^\lambda < \tau\}$$

C ist abg. unb. in κ, denn: Abg. ist klar. Unb.: Sei $\alpha < \kappa$. Setze $\tau_0 = \max\{\alpha, \omega\}$, $\tau_{n+1} = 2^{\tau_n}$. Wegen κ unerreichbar ist $\tau_n < \kappa$. Setze $\tau = \sup_n \tau_n$. Dann auch $\tau < \kappa$ und $\tau \in C$. Wegen κ Mahlo ist E stationär in κ. Also ist $\{\tau < \kappa \mid \tau \text{ unerreichbar }\} = C \cap E$ stationär in κ.

□

Lemma 6: Sei κ Mahlo. Dann gilt:

(a) κ ist hyperunerreichbar

(b) $\{\tau < \kappa \mid \tau \text{ ist hyperunerreichbar}\}$ ist stationär in κ.

Beweis:

(a) Ist klar, da nach Bemerkung $\{\tau < \kappa \mid \tau \text{ unerreichbar}\}$ sogar stationär in κ, also auch unbeschränkt in κ.

(b) Sei $A = \{\tau < \kappa \mid \tau \text{ unerreichbar}\}$. Nach (a) ist A unbeschränkt in κ. Also ist $C = \{\tau < \kappa \mid \tau = \sup(A \cap \tau)\}$ abg. unb. in κ. Da A sogar stationär in κ, ist also $\{\tau < \kappa \mid \kappa \text{ ist hyperunerreichbar}\} = C \cap A$ stationär in κ.

□

1. Übung:

Aufgabe 1: Sei $\kappa \in$ On. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. κ ist unerreichbar
2. für alle $f : V_\kappa \to \kappa$ existiert $0 < \alpha < \kappa$ mit $f''V_\alpha \subseteq \alpha$

Aufgabe 2: Seien $\alpha, \beta \in$ On mit $\alpha < \beta$, und es gelte $V_\alpha \prec V_\beta$. Zeigen Sie, dass $V_\alpha \models$ ZFC.

Satz 7: Es sind äquivalent

(1) κ ist Mahlo

(2) für alle $A \subseteq V_\kappa$ existiert ein reguläres $\alpha < \kappa$ mit $V_\alpha \prec \langle V_\kappa, A\rangle$

(3) für alle $A \subseteq V_\kappa$ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \models \varphi$ (φ erststufig) existiert ein reguläres $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$

Beweis:

- (1)⇒(2): Sei κ Mahlo. Sei $A \subseteq V_\kappa$. Wegen κ unerreichbar ist dann nach Satz 4 $C = \{\alpha < \kappa \mid V_\alpha \prec \langle V_\kappa, A\rangle\}$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Wegen κ Mahlo existiert also $\alpha \in C$ mit α regulär.
- (2)⇒(3): Trivial.
- (3)⇒(1): Sei (3) erfüllt. Dann ist κ unerreichbar nach Satz 4. Sei $E = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ regulär}\}$. Noch zu zeigen, dass E stationär in κ. Sei hierzu $C \subseteq \kappa$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Dann $\langle V_\kappa, C\rangle \models \underbrace{\forall_{\gamma \in \mathrm{On}} \exists_{\delta \in C} \gamma < \delta}_{\varphi}$. Gemäß (3) wähle ein reguläres $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, C \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$. Nun ist $C \cap V_\alpha = C \cap \alpha$ da $C \subseteq \mathrm{On}$ und $V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$. Somit ist $C \cap \alpha$ unbeschränkt in α. Also ist $\alpha \in C$, da C abgeschlossen in κ. Wegen α regulär ist $C \cap E \neq \emptyset$.

□

Lemma 8: Sei W ein inneres Modell von ZFC. Sei κ Mahlo. Dann ist κ Mahlo in W.

Beweis: Nach Lemma 5 ist κ unerreichbar in W. Sei $C \in W$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Dann existiert $\alpha \in C$ mit α regulär. Dann ist aber α auch regulär in W. Somit ist $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ regulär in } W\}$ stationär in κ (in W).

□

Wir können die Definition von Mahlo "iterieren", zum Beispiel

Definition: κ ist 2-Mahlo :⇔ κ ist unerreichbar und $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ Mahlo}\}$ ist stationär in κ.

Bemerkung: κ ist 2-Mahlo ⇒ κ Mahlo.

Satz 9: Es sind äquivalent:

(1) κ ist 2-Mahlo

(2) für alle $A \subseteq V_\kappa$ existiert Mahlo $\alpha < \kappa$ mit $V_\alpha \prec \langle V_\kappa, A\rangle$

(3) für alle $A \subseteq V_\kappa$ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \models \varphi$ (φ erststufig) existiert Mahlo $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$

Beweis: Völlig analog zu Beweis von Satz 7.

□

Noch größere Kardinalzahlen erhalten wir, wenn wir die Eigenschaft (3) aus Satz 4 "für alle $A \subseteq V_\kappa$ und erststufigen φ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \models \varphi$ existiert ein $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$" wesentlich verstärken.

Definition: κ ist schwach kompakt (bzw. Π^1_1-unbeschreibbar wenn folgendes gilt:

Sei $A \subseteq V_\kappa$ und es gelte für alle $B \subseteq V_\kappa$ dass $\langle V_\kappa, A, B\rangle \models \varphi$ (φ erststufig). Dann existiert $\alpha < \kappa$ mit für alle $B \subseteq V_\alpha$ $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi$.

Definition: Sei Q eine Eigenschaft von Ordinalzahlen. Wir sagen Q ist eine Π^1_1-Eigenschaft, wenn existiert erststufiges φ mit $Q(\kappa) \Leftrightarrow$ für alle $B \subseteq V_\kappa$ gilt $\langle V_\kappa, B\rangle \models \varphi$.

Bemerkung: Sei Q eine Π^1_1-Eigenschaft. Sei κ schwach kompakt. Weiterhin gelte $Q(\kappa)$. Dann existiert ein $\tau < \kappa$ mit $Q(\tau)$. "κ ist schwach kompakt" ist also keine Π^1_1-Eigenschaft. Die bisherigen Eigenschaften sind aber Π^1_1-Eigenschaften.

Lemma 10: "κ ist regulär", "κ ist unerreichbar", "κ ist Mahlo", "κ ist 2-Mahlo" sind Π^1_1-Eigenschaften.

Beweis: Nehme einfach die üblichen Definitionen.

$\square$

Satz 11:

(a) κ schwach kompakt $\Rightarrow$ κ ist 2-Mahlo

(b) κ schwach kompakt $\Rightarrow$ existiert $\tau < \kappa$ mit τ ist 2-Mahlo

Beweis:

(a) Sei κ schwach kompakt. Nach Definition ist dann die Bedingung (3) aus Satz 4 erfüllt. Also ist κ unerreichbar. Wir zeigen zuerst, dass κ Mahlo ist. Hierzu zeigen wir die Bedingung (3) aus Satz 7. Sei also $A \subseteq V_\kappa$ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \models \varphi$ (φ erststufig). Zu zeigen ist, es existiert ein reguläres $\alpha < \kappa$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$. Nach Lemma 10 sei ψ erststufig mit:

$$\tau \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \text{für alle } B \subseteq V_\kappa\ \langle V_\kappa, B\rangle \models \psi$$

Da ja κ regulär ist, gilt dann:

$$\text{für alle } B \subseteq V_\kappa \quad \langle V_\kappa, A, B\rangle \models \varphi \wedge \psi$$

Also wegen κ schwach kompakt existiert $\alpha < \kappa$ mit

$$\text{für alle } B \subseteq V_\alpha \quad \langle V_\alpha, A \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi \wedge \psi$$

Also ist α regulär und $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$, was zu zeigen war. Nun wissen wir, dass κ Mahlo ist. Nun ist aber nach Lemma 10 auch die Eigenschaft "τ ist Mahlo" eine Π^1_1-Eigenschaft. Also können wir völlig Analog die Eigenschaft (3) aus Satz 9 zeigen. Somit ist κ 2-Mahlo.

(b) Nach Lemma 10 ist auch die Eigenschaft "τ ist 2-Mahlo" eine Π^1_1-Eigenschaft. Also folgt die Behauptung aus (a) und Bemerkung.

$\square$

Lemma 12: Sei κ schwach kompakt. Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq V_\kappa$, φ erststufig, und es gelte: Für alle $B \subseteq V_\kappa$ haben wir $\langle V_\kappa, A_1, \dots, A_n, B\rangle \models \varphi$. Dann existiert ein $\alpha < \kappa$ mit für alle $B \subseteq V_\alpha$ gilt $\langle V_\alpha, A_1 \cap V_\alpha, \dots, A_n \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi$.

Beweisskizze: Setze $A = \bigcup_{i=1}^n \{i\} \times A_i$. dann ist A_i kanonisch definierbar in $\langle V_\kappa, A\rangle$ durch $A_i = \{x \mid \langle i, x\rangle \in A\}$. Übersetze hiermit φ in φ^x. Wähle $\alpha < \kappa$ mit für alle $B \subseteq V_\alpha$ $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi^x \wedge \forall_{\gamma \in \mathrm{On}} \exists_{\delta \in \mathrm{On}} \gamma \in \delta$. Dann ist α Limesordinalzahl, also $A_i \cap V_\alpha = \{x \mid \langle i, x\rangle \in A \cap V_\alpha\}$. Durch Rückübersetzung also für alle $B \subseteq V_\alpha$ $\langle V_\alpha, A_1 \cap V_\alpha, \dots, A_n \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi$

□

Lemma 13: Sei κ schwach kompakt. Sei $A_1, \dots, A_n \subseteq V_\kappa$, φ erststufig, und es gelte: für alle $B \subseteq V_\kappa$ ist $\langle V_\kappa, A_1, \dots, A_n, B\rangle \models \varphi$. Setze $E = \{\alpha < \kappa \mid \text{für alle } B \subseteq V_\alpha \text{ gilt } \langle V_\alpha, A_1 \cap V_\alpha, \dots, A_n \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi\}$. Dann ist E stationär in κ.

Beweis: Sei $C \subseteq \kappa$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Zu zeigen $E \cap C \neq \emptyset$. Nun aber: für alle $B \subseteq V_\kappa$ $\langle V_\kappa, A_1, \dots, A_n, C, B\rangle \models \underbrace{\varphi \wedge \forall_{\gamma \in \mathrm{On}} \exists_{\delta \in C} \gamma < \delta}_{\psi}$. Also nach Lemma 12 existiert $\alpha < \kappa$ mit: für alle $B \subseteq V_\alpha$ $\langle V_\alpha, A_1 \cap V_\alpha, \dots, A_n \cap V_\alpha, C \cap V_\alpha, B\rangle \models \psi$. Dann natürlich $\alpha \in E$. Aber auch $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$. Also $\alpha \in C$, da C abgeschlossen in κ.

□

Definition: Sei $f : [z]^n \to \gamma$ eine Partition von $[z]^n$. $x \subseteq z$ heißt *homogen* für f genau dann wenn $\exists_{\beta < \gamma} f''[x]^n \subseteq \{\beta\}$.

$$\kappa \to (\delta)^n_\gamma \Leftrightarrow \text{für alle } f : [\kappa]^n \to \gamma \text{ existiert } X \subseteq \kappa \text{ homogen für } f \text{ mit } \operatorname{otp}(X) = \delta$$

Bemerkung: Falls $\kappa \to (\delta)^n_\gamma$ und $\overline{\kappa} \geq \kappa, \lim(\kappa), \overline{\delta} \leq \delta, \overline{\kappa} \leq \kappa$, so $\overline{\kappa} \to (\overline{\delta})^{\overline{n}}_{\overline{\gamma}}$.

Wiederholung: Folgende Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt:

- Ein *Baum* ist eine partiell geordnete Menge, sodass die Vorgänger jedes Elementes wohlgeordnet sind. Äquivalent dazu, es ist eine global fundierte partielle Ordnung und die Vorgänger jedes Elements sind total geordnet. Für einen Baum T sind T_α die Elemente sodass die Vorgänger den Ordnungstyp α haben. Die Höhe des Baumes ist die kleinste Ordinalzahl α derart dass T_α leer ist.
- Ein *Filter* auf einer Menge X ist eine Menge von Teilmengen von X die die folgenden Eigenschaften hat: X liegt drin, $\emptyset$ liegt nicht drin, mit je zwei Elementen ist der Durchschnitt wieder drin, jede Obermenge einer Menge die drin ist ist wieder drin. Beispiel: Die Menge der Teilmengen von $[0; 1]$ die das Maß 1 haben sind ein Filter.
- Ein *Ultrafilter* ist ein bezüglich Inklusion maximaler Filter. Ein Filter auf einer Menge X ist genau dann ein Ultrafilter wenn für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: entweder A oder $X \backslash A$ ist in dem Filter.

Definition: Ein κ-Baum ist ein Baum der Höhe κ mit $\forall_{\alpha<\kappa}|T_\alpha| < \kappa$.

Definition: Sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X.

(a) $\mathfrak{F}$ ist *κ-vollständig*, wenn gilt: $(\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ und $0 < |\mathfrak{G}| < \kappa) \Rightarrow \bigcap \mathfrak{G} \in \mathfrak{F}$.

(b) $\mathfrak{F}$ ist *nichttrivial*, wenn gilt: $\forall_{a\in X} X\backslash\{a\} \in \mathfrak{F}$.

Beispiel: Ist $\kappa > \omega$ regulär, so ist $\varphi_\kappa = \{A \subseteq \kappa \mid A \supseteq C$ für ein abg. unb. $C \subseteq \kappa\}$ nichttrivialer κ-vollständiger Filter auf κ.

"Wir kommen jetzt zum ersten Hauptsatz, der etwas komplizierter wird, und wo uns der Beweis auch mehrere Sitzungen lang beschäftigen wird"

Satz 14: Sei κ Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:

(1) κ ist schwach kompakt

(2) $\kappa \to (\kappa)^2_2$ und $k > \omega$

(3) κ ist unerreichbar und jeder κ-Baum besitzt einen Zweig der Länge κ

(4) $\kappa > \omega$, und es gilt: falls $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{P}(\kappa)$ mit $|\mathfrak{H}| \leq \kappa$, so existiert nichttrivaler κ-vollständiger Filter $\mathfrak{F}$ auf κ mit $\forall_{A\in\mathfrak{H}}(A \in \mathfrak{F}$ oder $\kappa\backslash A \in \mathfrak{F})$.

(5) κ ist unerreichbar und es gilt: falls M transitiv, $M \models \mathrm{ZFC}^-$, $\kappa \in M$, $|M| = \kappa$, so existiert $j : M \to_{\Sigma_\omega} N$ mit N transitiv, $j \restriction \kappa = \mathrm{id} \restriction \kappa$, $j(\kappa) > \kappa$.

(6) Für alle $A \subseteq V_\kappa$ existiert transitives M und $B \subseteq M$ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \prec \langle M, B\rangle$, $M \neq V_\kappa$.

Beweis:

- (1)$\Rightarrow$(2): Nur zu zeigen $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Sei also $f : [\kappa]^2 \to 2$. Für $\alpha < \kappa$ definiere eine monotone Folge $\left\langle \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha \right\rangle$[siehe 1] rekursiv durch: Sei $\left\langle \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \eta \right\rangle$ schon konstruiert. Setze $B^\alpha_\eta = \{\gamma < \alpha \mid \forall_{\xi<\eta}(\gamma^\alpha_\xi < \gamma$ und $f(\{\gamma^\alpha_\xi, \gamma\}) = 0)\}$. Falls $B^\alpha_\eta \neq \emptyset$, setze $\gamma^\alpha_\eta = \min B^\alpha_\eta$. Andernfalls sei $\delta_\alpha = \eta$. Setze $h(\alpha) = \sup\{\gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha\} \leq \alpha$ und $g(\alpha) = \left\langle \gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha \right\rangle$.
  - 1. Fall: $E = \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) < \alpha\}$ ist stationär. Dann nach Fodor[siehe 2] existiert stationäres $E_0 \subseteq E$ mit $h \restriction E_0$ konstant. Wegen κ unerreichbar existiert dann $E_1 \subseteq E_0$ mit $|E_1| = \kappa$ und $g \restriction E_1$ konstant. Nach Konstruktion aber dann für alle $\{\alpha, \beta\} \in [E_1]^2$ $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$. Also hat f homogene Menge der Mächtigkeit κ.
  - 2. Fall: es existiert abgeschlossen unbeschränktes $C \subseteq \kappa$ mit $\forall_{\alpha\in C} h(\alpha) = \alpha$. Zeige: es existiert unbeschränktes $B \subseteq \kappa$ mit $\forall_{a\in[B]^2} f(a) = 0$. Angenommen nicht. Dann gilt für alle $B \subseteq V_\kappa$ $\langle V_\kappa, f, B\rangle \models$ $\underbrace{(B \subseteq \mathrm{On} \text{ und } \forall_{\gamma\in\mathrm{On}}\exists_{\delta\in B}\gamma < \delta \Rightarrow \exists_{\eta,\rho\in B} f(\{\eta, \rho\}) = 1)}_{\varphi}$. Also existiert nach Lemma 13 wegen κ schwach kompakt ein $\alpha \in C$ mit für alle $B \subseteq V_\alpha$ $\langle V_\alpha, f \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi$. Dies ist ein Widerspruch, da $B = \{\gamma^\alpha_\xi \mid \xi < \delta_\alpha\}$ ein Gegenbeispiel ist.

[siehe 1] δ_α selbst wird erst durch die Rekursion festgelegt.

[siehe 2] Satz aus der Mengenlehre

- (2)⇒(3): Zeige zuerst: κ ist unerreichbar. κ ist regulär, denn angenommen $\kappa = \sup_{i<\tau} \kappa_i$ mit $\langle \kappa_i \mid i < \tau\rangle$ normal[siehe 3], $\kappa_0 = 0$, $\tau < \kappa$. Definiere $f : [k]^2 \to 2$ durch $f(\{\alpha, \beta\}) = 0 \Leftrightarrow \sup\{i \mid \kappa_i \leq \alpha\} = \sup\{i \mid \kappa_i \leq \beta\}$ liefert Widerspruch. Sei $\tau < \kappa$. Zu zeigen $2^\tau \leq \kappa$. Gilt wegen $2^\tau \not\to (\tau^+)^2_2$. Hierzu definiere $F : [{}^\tau 2]^2 \to 2$[siehe 4] wie folgt. Sei $\prec$ eine Wohlordnung auf ${}^\tau 2$ und $<_\ell$ die lexikographische Ordnung auf ${}^\tau 2$. Setze dann $F(\{g, h\}) = 0 \Leftrightarrow (g \prec h$ und $h <_\ell h)$. Dies tut es, da die lexikographische Ordnung die Eigenschaft hat, dass es keine aufsteigende oder absteigende Folge der Länge τ^+ gibt (siehe späteres Argument).
- (2)⇒(3): Sei $\underset{\sim}{T} = \langle T, \leq_T\rangle$ ein κ-Baum. Ohne Einschränkung $T = \kappa$. Für $t \in T_\alpha$ sei $b_t = \langle t_\gamma \mid \gamma \leq \alpha\rangle$ die bezüglich $\leq_T$ aufsteigende fFolge der $\leq_T$-Vorgänger von t. Definiere $f : [\kappa]^2 \to 2$ durch $f(\{\bar{t}, t\}) = 0 \Leftrightarrow (\bar{t} < t$ und $b_{\bar{t}} <_\ell b_t)$. Hierbei: $b <_\ell \bar{b} \Leftrightarrow (b \subsetneq \bar{b}$ oder $b(\gamma) < \bar{b}(gamma)$, wobei $\gamma = \min\{\mu \mid b(\mu) \neq \bar{b}(\mu)\})$. Gemäß (2) existiert $X \subseteq \kappa$ mit $|X| = \kappa$ und $i < 2$ mit $f''[X]^2 = \{i\}$. Setze $R_0 =\leq_\ell$, $R_1 ={}_\ell\geq$, $\overline{R}_0 =\leq$, $\overline{R}_1 =\geq$. Also gilt: $\gamma, \delta \in X, \gamma < \delta \to b_\gamma R_i b_\delta$. Sei nun $\langle t_\delta, \delta < \kappa\rangle$ die monotone Aufzählung von X. Wegen $\forall_{\alpha<\kappa} |T_\alpha| < \kappa$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\forall_{\delta<\kappa} \operatorname{ht}(t_\delta) \geq \delta$. Für $\gamma < \kappa$ setze $a_\gamma = \langle b_{t_\delta}(\gamma) \mid \delta \in \kappa \backslash \gamma\rangle$. Zeige durch Induktion über $\gamma < \kappa$:
  (*) a_γ ist schließlich konstant.
  Für $\beta < \gamma$ wähle hierzu $\beta \leq \mu_\beta < \kappa$ mit $\langle \beta_{t_\delta}(\beta) \mid \delta \in \kappa \backslash \mu_\beta\rangle$ konstant ist. Sei $\mu = \sup_{\beta<\gamma} \mu_\beta$. Dann ist $\langle \beta_{t_\delta} \upharpoonright \gamma \mid \delta \in \kappa \backslash \mu\rangle$ konstant. Nach Definition von $<_\ell$ gilt daher: $\mu \leq \delta < \eta < \kappa \to b_{t_\delta}(\gamma) \overline{R}_i b_{t_\eta}(\gamma)$. Ist aber $i = 0$, so ist also $\langle b_{t_\delta}(\gamma) \mid \delta \in \kappa \backslash \mu\rangle$ schwach monoton steigend, also schließlich konstant, da $|T_\gamma| < \kappa$ und κ regulär. Ist aber $i = 1$, so ist $\langle b_{t_\delta}(\gamma) \mid \delta \in \kappa \backslash \gamma\rangle$ schwach monoton fallend, also schließlich konstant. Für $\gamma < \kappa$ setze nun $r_\gamma =$ "lim"$a_\gamma \in T_\gamma$. Dann ist $\{r_\gamma \mid \gamma < \kappa\}$ Zweig der Länge κ in T.
- (3)⇒(4): Sei $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{P}(\kappa)$ mit $|\mathfrak{H}| \leq \kappa$. Sei $\mathfrak{H} \cup \{\kappa\} = \{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Für $\alpha < \kappa$ setze $B^0_\alpha = A_\alpha$, $B^1_\alpha = \kappa \backslash A_\alpha$. Setze $T = \{p : \gamma \to 2 \mid \gamma < \kappa, |\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} B^{p(\alpha)}_\alpha| = \kappa\}$, $\underset{\sim}{T} = \langle T, \subseteq\rangle$. Beachte, dass $p \in T$ und $\beta < \operatorname{dom}(p) \Rightarrow p \upharpoonright \beta \in T$. $\underset{\sim}{T}$ ist κ-Baum, denn:
  (i) Höhe von $\underset{\sim}{T}$ ist $\leq \kappa$.
  (ii) für $\gamma < kappa$ ist $|T_\gamma| < \kappa$, denn: $T_\gamma = \{p \in T \mid \operatorname{dom}(p) = \gamma\}$, also
  $|T_\gamma| \leq 2^{|\gamma|} < \kappa$ κ unerreichbar.
  (iii) Höhe von $\underset{\sim}{T}$ ist $\geq \kappa$.

  Für $\delta < \kappa$ definiere $p_\delta : \gamma \to 2$ durch die Forderung $\delta \in B^{p_\delta(\alpha)}_\alpha$. Wegen κ unerreichbar existiert p mit $|\{\delta < \kappa \mid p_\delta = p\}| = \kappa$. Dann aber $p \in T_\gamma$. Das beweist (iii). Damit ist $\underset{\sim}{T}$ ein κ-Baum.

[siehe 3] streng monoton und stetig
[siehe 4] ${}^\tau 2$ ist die Menge der Funktionen von τ nach 2

Wegen (3) hat $\underset{\sim}{T}$ einen Zweig b der Länge κ. Setze
$\mathcal{F} = \{D \subseteq \kappa \mid \exists_{p \in b} \exists_{\delta < \kappa} D \supseteq (\bigcap\{B_\alpha^{p(\alpha)} \mid \alpha \in \mathrm{dom}(p)\} \backslash \delta)\}$. $\mathcal{F}$ ist wie gewünscht.

- (4)⇒(5): Zeige zuerst: κ ist unerreichbar.
  (i) κ ist regulär: Sei $\mathcal{F}$ nichttrivialer κ-vollständiger Filter auf κ. Da $\forall_{\delta<\kappa} \kappa \backslash \delta = \bigcap\limits_{\gamma<\delta} \kappa \backslash \{\gamma\} \in \mathcal{F}$. Angenommen κ sei singulär. Wähle also $B \subseteq \kappa$ konfinal mit $|B| < \kappa$. Dann ist $\emptyset = \bigcap\limits_{\delta \in B} \kappa \backslash \delta \in \mathcal{F}$. Widerspruch.
  (ii) Sei $\tau < \kappa$. Angenommen $2^\tau \geq \kappa$. Wähle dann $f_i : \tau \to 2$ für $i < \kappa$ mit $i \neq j \to f_i \neq f_j$. Für $\delta < \tau$ setze $A_\delta = \{i < \kappa \mid f_i(\delta) = 0\}$ und sei $\mathfrak{H} = \{A_\delta \mid \delta < \tau\}$. Sei hierzu $\mathcal{F}$ wie in (4). Definiere $f : \tau \to 2$ so, dass $B_\delta = \{i < \kappa \mid f_i(\delta) = f(\delta)\} \in \mathcal{F}$. Setze $B = \bigcap\limits_{\delta<\tau} B_\delta \in \mathcal{F}$. Sei $i \in B$. Dann ist $f = f_i$. Also hat B höchstens ein Element. Dies ist ein Widerspruch zur Nichttrivialität von $\mathcal{F}$.
- (4)⇒(5): Schon gezeigt, dass κ unerreichbar ist. Sei also M transitiv, $M \models \mathrm{ZFC}^-$, $\kappa \in M$, $|M| = \kappa$. Setze $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}(\kappa) \cap M$, also $|\mathfrak{H}| < \kappa$. Gemäß (4) wähle nichttrivialen κ-vollständigen Filter $\mathcal{F}$ auf κ mit
  (*) $\forall_{A \in \mathfrak{H}} (A \in \mathcal{F}$ oder $\kappa \backslash A \in \mathcal{F})$
  [beachte: gilt "entweder oder", da sonst $\emptyset = A \cap (\kappa \backslash A) \in \mathcal{F}$]

  Dann gilt $\forall_{\alpha<\kappa} \kappa \backslash \alpha \in \mathcal{F}$, da $\kappa \backslash \alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \kappa \backslash \{\beta\}$. Wir bilden nun die "interne Ultrapotenz" von M mit $\mathcal{F}$, das heißt setze $B = \{f \in M \mid f : \kappa \to M\}$. Für $f, g \in B$ definiere:
  $$f \sim g \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{F}$$
  $\sim$ ist Äquivalenzrelation. Setze $[f] = \{g \mid f \sim g\}$, $\overline{N} = \{[f] \mid f \in B\}$. Definiere zweistellige Relation E auf $\overline{N}$ durch
  $$[f]E[g] \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in \mathcal{F}$$
  ist wohldefiniert. Es gilt dann (Satz von Łos):
  (+) Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ZF-Formel. Dann für $f_1, \ldots, f_n \in B$
  $$\langle \overline{N}, E \rangle \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid M \models \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\} \in \mathcal{F}$$
  Beweis: Vorbemerkung: $\{\alpha < \kappa \mid M \models \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\} \in M$ wegen Aussonderung in M.
  Induktion über den Formelaufbau: Für φ atomar folgt es aus Definition. Für $\varphi = \neg\psi$ wegen (*) und Vorbemerkung. Für $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ wegen Durchschnittseigenschaft. Für $\varphi = \exists_v \psi(x_1, \ldots, x_n, v)$:
  - "⇒": Sei $\langle \overline{N}, E \rangle \models \exists_v \psi([f_1], \ldots, [f_n], v)$. Also nach Induktionsvoraussetzung $\underbrace{\{\alpha < \kappa \mid \psi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), g(\alpha)\}}_{\subseteq\{\alpha<\kappa \mid M \models \exists_v \psi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), v)\}} \in \mathcal{F}$.

  * "$\Leftarrow$" Sei $A = \{\alpha < \kappa \mid M \models \exists_v \psi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), v)\} \in \mathcal{F}$. Wegen $M \models \mathrm{ZF}^-$ existiert mit Beschränkung ein $w \in M$ mit $\alpha \in A \to \exists_{v \in w} M \models \psi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), v)$. Definiere dann $h : A \to V$ durch $h(\alpha) = \{v \in w \mid M \models \psi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), v)\}$. Dann $h \in M$. Sei $\overline{g} \in M$ eine Auswahlfunktion für h (nach $M \models \mathrm{AC}$). Definiere dann $g : \kappa \to M$ durch $f(\alpha) = \begin{cases} \overline{g}(\alpha) & \text{falls } \alpha \in A \\ \emptyset & \text{falls } \alpha \in A \end{cases}$ Dann gilt: $\{\alpha < \kappa \mid M \models \psi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha), g(\alpha)\} \in \mathcal{F}$, da Obermenge von A. Aber nach Induktionsvoraussetzung $\left\langle \overline{N}, E \right\rangle \models \psi([f_1], \ldots, [f_n], [g])$, das heißt insbesondere $\left\langle \overline{N}, E \right\rangle \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n])$.

(++) E ist fundiert.
Beweis: Angenommen nicht. Dann existiert eine Folge $\langle f_n \mid n \in \omega \rangle$ aus B mit $\forall_n [f_{n+1}] E [f_n]$, d.h. $X_n) = \{\alpha < \kappa \mid f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha)\} \in \mathcal{F}$. Wegen $\mathcal{F}$ κ-vollständig und $\kappa > \omega$ ist also $\bigcap\limits_{n \in \omega} X_n \in \mathcal{F}$, insbesondere also $\bigcap_{n \in \omega} X_n \neq \emptyset$. Sei $\alpha \in \bigcap_{n \in \omega} X_n$. Dann $\forall_n f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha)$ im Widerspruch zum Fundierungsaxiom. Wegen (+) ist E auch extensional. Somit wegen Mostovski existiert transitives N und π mit $\pi : \left\langle \overline{N}, E \right\rangle \xrightarrow{\sim} N$ (einfach $\pi([f]) = \pi''\{[g] \mid [g] \in [f]\}$). Für $x \in M$ definiere $c_x : \kappa \to M$ durch $c_x(\alpha) = x$. Beachte, dass $c_x \in M$. Definiere nun $j : M \to N$ durch $j(x) = \pi([c_x])$. Wegen (+) gilt $j : M \to N$ elementar, denn $(M \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]) \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid M \models \varphi(c_{a_1}(\alpha), \ldots, c_{a_n}(\alpha)\} \in \mathcal{F}) \underset{(+)}{\Leftrightarrow} \left\langle \overline{N}, E \right\rangle \models \varphi([c_{a_1}], \ldots, [c_{a_n}]) \underset{\pi \text{ Iso}}{\Leftrightarrow} N \models \varphi(\underbrace{\pi([c_{a_1}])}_{=j(a_1)}, \ldots, \underbrace{\pi([c_{a_n}])}_{=j(a_n)}))$. Noch zu zeigen $j \restriction \kappa = \mathrm{id} \restriction \kappa$, $j(\kappa) > \kappa$. Zeige hierzu zuerst:

(+++) $\forall_{\tau < \kappa} [g] E [c_\tau] \Leftrightarrow \exists_{\gamma < \tau} [g] = [c_\gamma]$.

Beweis "$\Leftarrow$": Trivial

Beweis "$\Rightarrow$": Indirekt: Sei $\forall_{\gamma < \tau} [g] \neq [c_\gamma]$. Also $B_\gamma = \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \neq \gamma\} \in \mathcal{F}$. Wegen $\mathcal{F}$ κ-vollständig also $B = \bigcap\limits_{\gamma < \tau} B_\gamma \in \mathcal{F}$. Also $\forall_{\alpha \in B} g(\alpha) \notin \tau$. Also nun $[g] E [c_\tau]$.

Aus (+++) folgt rekursiv für $\tau < \kappa$: $\pi([c_\tau]) = \pi''\{[c_\gamma] \mid \gamma < \tau\} = \tau$. Außerdem $[\mathrm{id} \restriction \kappa] E [c_\kappa]$. Aber es gilt $\forall_{\tau < \kappa} [c_\tau] E [\mathrm{id} \restriction \kappa]$, da $\{\alpha < \kappa \mid c_\tau(\alpha) \in \mathrm{id}(\alpha)\} = \kappa \setminus (\tau + 1) \in \mathcal{F}$. Also $\pi([c_\kappa]) > \kappa$, das heißt $j(\kappa) > \kappa$.

- (5)$\Rightarrow$(6): Sei $A \subseteq V_\kappa$. Es existiert ein transizives $M \models \mathrm{ZFC}^-$ mit $A, \kappa, V_\kappa \in M$ und $|M| = \kappa$, denn: Wegen κ unerreichbar ist $|V_\kappa| = \kappa$. Außerdem $H_{\kappa^+} \models \mathrm{ZFC}^-$, wobei $H_{\kappa^+} = \{x \mid |TC(x)| \leq \kappa\}$. Wähle also $\tilde{M} \prec H_{\kappa^+}$ mit $V_\kappa \cup \{V_\kappa, A\} \subseteq \tilde{M}$ und $|\tilde{M}| = \kappa$. Sei $\pi : \tilde{M} \xrightarrow{\sim} M$ mit M transitiv, M ist wie gewünscht (Bemerkung: $\tilde{M}$ ist schon transitiv). Gemäß (5) sei $j : M \to N$ elementar mit N transitiv, $j \restriction \kappa$, $j(\kappa) > \kappa$. Folgt leicht $j \restriction V_\kappa = \mathrm{id} \restriction V_\kappa$. Setze $\left\langle \overline{M}, B \right\rangle = j(\langle V_\kappa, A \rangle)$. Dann $j(\kappa) \subseteq \overline{M}$, also $\overline{M} \neq V_\kappa$. Außerdem $\langle V_\kappa, A \rangle \prec \left\langle \overline{M}, B \right\rangle$, denn: $(\langle V_\kappa, A \rangle \models \varphi[\vec{a}]) \Rightarrow (M \models \text{"} \langle V_\kappa, A \rangle \models \varphi[\vec{a}] \text{"}) \Leftrightarrow (N \models \text{"} \left\langle \overline{M}, B \right\rangle) \models \varphi[j(\vec{a})] \text{"}) \Rightarrow \left\langle \overline{M}, B \right\rangle \models \varphi[j(\vec{a})]$.

- (6)⇒(1): Sei hierzu $A \subseteq V_\kappa$, φ erststufig, und es gelte: für alle $B \subseteq V_\kappa$ $\langle V_\kappa, A, B\rangle \models \varphi$. Gemäß (6) wähle transitives M und $D \subseteq M$ mit $\langle V_\kappa, A\rangle \prec \langle M, D\rangle$, $M \neq V_\kappa$. Dann lässt sich in M die Folge $\langle V_\alpha^M \mid \alpha \in \mathrm{On} \cap M\rangle$ definieren, und es gilt $V_\kappa^M = V_\kappa$ (insbesondere $\kappa \in M$). Dann aber wegen $D \cap V_\kappa = A$:
$$\langle M, D\rangle \models \exists_\alpha \forall_{B \subseteq V_\alpha} \langle V_\alpha, D \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi$$
(nämlich für $\alpha = \kappa$). Also $\langle V_\kappa, A\rangle \models \exists_\alpha \forall_{B \subseteq V_\alpha} \langle V_\alpha, A \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi$. D.h. aber es existiert $\alpha < \kappa$ mit:
$$\text{für alle } B \subseteq V_\alpha \ \langle V_\alpha, A \cap V_\alpha, B\rangle \models \varphi$$

2. Übung:

Aufgabe 1: Sei κ schwach kompakt. Seien $D, E \subseteq \kappa$ stationär in κ. Man zeige: es existiert reguläres $\alpha < \kappa$ mit $D \cap \alpha$,$E \cap \alpha$ stationär in α.

Lösung 1: Nach Lemma 10 ist "α ist regulär" ist Π_1^1. Also gilt:
$\exists_\psi \alpha$ ist regulär $\iff$ $(\forall_{B \subseteq V_\alpha} \langle V_\alpha, B\rangle \models \varphi)$ Setze
$\psi' = (B$unbeschränkt und abg. in $\mathrm{On} \to E \cap B \neq \emptyset \wedge D \cap B \neq \emptyset)$

$\forall_{B \subseteq V_\kappa} \langle V_\kappa, D, E, B\rangle \models \psi \wedge \psi'$ Mit κ schwach kompakt folgt:
$\exists_{\alpha<\kappa} \forall_{B \in V_\alpha} \langle V_\alpha, D \cap V_\alpha, E \cap V_\alpha, B\rangle \models \psi \wedge \psi'$. Also α regulär und $D \cap V_\alpha = D \cap \alpha$, $E \cap V_\alpha = E \cap \alpha$, also $D \cap \alpha$, $E \cap \alpha$ stationär.

Aufgabe 2: Sei U ein Ultrafilter auf X. Weiterhin sei κ eine Kardinalzahl. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) U ist κ-vollständig

(2) Falls $\mathfrak{G} \subseteq U$, $|\mathfrak{G}| < \kappa$, so $\bigcap \mathfrak{G} \neq \emptyset$.

(3) Falls $\bigcup \mathfrak{H} \in U$, $|\mathfrak{H}| < \kappa$, so existiert $A \in \mathfrak{H}$ mit $A \in U$.

Satz 15: Sei κ schwach kompakt. Dann gilt $\kappa \to (\kappa)^n_\tau$ für alle $n \in \omega$, $\tau < \kappa$.

Beweis: Zeige durch Induktion über n
$$\kappa \to (\kappa)^n_\tau \text{ für alle } \tau < \kappa$$

- $n = 1$: Sei $f\colon [\kappa]^1 \to \tau$ mit $\tau < \kappa$. Wegen κ regulär existiert dann $X \subseteq \kappa$ mit $|X| = \kappa$ und X homogen für f.
- $n \to n+1$: Sei $f\colon [\kappa]^{n+1} \to \tau$ mi $\tau < \kappa$. Gemäß (6) aus Satz 14 wähle $\langle V_\kappa, f\rangle \prec \langle M, h\rangle$ mit M transitiv, $M \neq V_\kappa$. Dann ist $\kappa \in M$, denn falls $x \in M - V_\kappa$, so $\mathrm{rng}(x) \in M$, $\mathrm{rng}(x) \geq \kappa$ Definiere $g\colon [\kappa]^n \to \tau$ durch $g(a) = h(a \cup \{\kappa\})$. (beachte, dass $h\colon [\lambda]^{n+1} \to \lambda$, wobei $\lambda = \mathrm{On} \cap M$) Wir zeigen zuerst:

  $(*)$ es existiert unbeschränktes $X \subseteq \kappa$ mit
$$a \in [X]^n,\ a < \nu \in X \to f(a \cup \{\nu\}) = g(a)$$

Konstruiere hierzu rekursiv monotone Folge $\langle \nu_\delta \mid \delta < \kappa \rangle$ wie folgt: Sei $\delta < \kappa$. Setze zuerst $\overline{\nu} = \sup\{\nu_\gamma \mid \gamma < \delta\} + 1 < \kappa$. Setze $B = \{\overline{\nu} < \nu < n \mid$ für alle $a \in [\overline{\nu}]^n\ f(a \cup \{\nu\}) = g(a)\}$. $B \neq \emptyset$, denn: $\langle M, h \rangle \models \exists_{\nu < \overline{\nu}} \forall_{a \in [\overline{\nu}]^n} h(a \cup \{\nu\}) = g(a)$ nämlich $\nu = \kappa$. Also $\langle V_\kappa, f \rangle \models \cdots$. Setze $\nu_\delta = \min B$. Nach Konstruktion ist dann $X = \{\nu_\delta \mid \nu < \kappa\}$ wie gewünscht.

Sei nun X wie in $(*)$. Nach Ind.-vor. wähle $\overline{X} \subseteq X$ mit $|\overline{X}| = \kappa$ und $\overline{X}$ homogen für g. Dann ist $\overline{X}$ homogen für f.

Lemma 16: Sei κ schwach kompakt. Dann ist κ schwach kompakt in L.

Beweis: Wir zeigen, dass (6) aus Satz 14 in L gilt. Wegen κ unerreichbar gilt $L_\kappa = (V_\kappa)^L$. Sei also $A \subseteq L_\kappa$ mit $A \in L$. Also $A \in L_{\kappa^+}$. Wähle $\lambda < \kappa^+$ mit $\kappa, A \in L_\lambda$ und $L_\lambda \prec L_{\kappa^+}$ (!), also $L_\lambda \models \mathrm{ZFC}^-$. Gemäß (5) existiert dann elementare Einbettung $j\colon L_\lambda \to N$ mit N transitiv, $j \restriction \kappa = id \restriction \kappa$, $j(\kappa) > \kappa$. Wegen $N \models \mathrm{ZFC}^- + \mathrm{V{=}L}$ existiert δ mit $N = L_\delta$. Setze $\gamma = j(\kappa)$, $B = j(A)$. Dann $j(L_\kappa) = L_\gamma$, also $\langle L_\kappa, A \rangle \prec \langle L_\gamma, B \rangle$. Aber $B \in L_\delta \subseteq L$. Also fertig.

Bemerkung: Es gilt aber nicht für beliebige innere Modelle W, dass: κ schwach kompakt $\to$ κ schwach kompakt in W

Definition: κ is t Π^1_2-unbeschreibbar, wenn folgendes gilt: Sei $A \subseteq V_\kappa$ und es gelte: Für alle $D \subseteq V_\kappa$ existiert $E \subseteq V_\kappa$ mit $\langle V_\kappa, A, D, E \rangle \models \varphi$. Dann existiert $\alpha < \kappa$ mit: Für alle $D \subseteq V_\alpha$ existiert $E \subseteq V_\alpha$ mit $\langle V_\alpha, A \cap V_\alpha, D, E \rangle \models \varphi$.

Bemerkung:

(a) κ ist Π^1_2-unbeschreibbar $\to$ κ ist schwach kompakt

(b) κ ist Π^1_2-unbeschreibbar $\to$ es existiert $\tau < \kappa$ mit τ schwach kompakt.

Beweis: (a) ist trivial. (b): Sei κ Π^1_2-unbeschreibbar. Dann ist nach (a) κ schwach kompakt. Also nach Satz 14 (2) gilt $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Dies ist eine Π^1_2-Eigenschaft. Also existiert $\omega < \tau < \kappa$ mit $\tau \to (\tau)^2_2$. Somit ist τ schwach kompakt.

Die stärkste Eigenschaft dieser Art ist:

Definition: κ ist *total unbeschreibbar*, wenn folgendes gilt: Sei $A \subseteq V_\kappa$ und $\gamma > \kappa$ mit $V_\gamma \models \varphi(A)$ (φ erststufig). Dann existieren $\alpha < \delta < \kappa$ mit $V_\delta \models \varphi(A \cap \alpha)$.

Bemerkung: Mit dem gleichen Trick, wie in Lemma 12 können wir A durch endlich viele $A_1, \ldots, A_n$ ersetzen.

Bemerkung:

(a) κ ist total unbeschreibbar $\to$ κ ist Π^1_2-unbeschreibbar

(a) κ ist total unbeschreibbar $\to$ es existiert $\tau < \kappa$ mit τ ist Π^1_2-unbeschreibbar

(a) κ ist total unbeschreibbar $\to$ κ total unbeschreibbar in L

Beweis: Übung.

Damit ist dieses Verfahren ausgeschöpft. Wie geht es weiter? Einen Weg hierzu weisen (4), (5) aus Satz 14. Ein subtiler ist der folgende:

Definition: Sei $\kappa > \omega$ eine Kardinalzahl. κ ist *subtil* :gdw für abg. unb. $C \subseteq \kappa$ und Folgen $\langle S_\alpha \mid \alpha \in C\}$ mit $S_\alpha \subseteq \alpha$ existieren $\alpha, \beta \in C$ mit $\alpha < \beta$ und $S_\alpha = S_\beta \cup \alpha$.

Lemma 17: Sei κ subtil. Dann ist κ unerreichbar.

Beweis:

(i) κ ist regulär, denn: Annahme: κ ist singulär. Dann existiert abg. unb. $S \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{otp}(C) < \min(C)$. Setze nun für $\alpha \in C$: $S_\alpha = \{\mathrm{otp}(C \cap \alpha)\} \subseteq \alpha$. Dann ist offenbar für $\alpha, \beta, \in C$, $\alpha < \beta$. $S_\beta \cap \alpha = S_\beta \neq S_\alpha$. Widerspruch zu κ subtil.

(ii) Sei $\lambda < \kappa$. z.z. $2^\lambda < \kappa$. Annahme: $2^\lambda \geq \kappa$. Setze dann $C = \kappa - \lambda$ und seien $\langle S_\alpha \mid \alpha \in C\rangle$ so, dass $S_\alpha \subseteq \lambda$ und $\alpha \neq \beta \to S_\alpha \neq S_\beta$. Liefert Widerspruch zu κ subtil.

Lemma 18: Sei κ subtil. Sei $C \subseteq \kappa$ abg. unb. in κ. Sei $\langle S_\alpha \mid \alpha \in C\rangle$ mit $S_\alpha \subseteq V_\alpha$. Dann existieren $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$ mit $S_\alpha = S_\beta \cap V_\alpha$.

Beweis: Nach Lemma 17 ist κ unerreichbar, also $|V_\kappa| = \kappa$. Sei also $f\colon V_\kappa \to \kappa$ bijektiv. Setze $D = \{\alpha < \kappa \mid f''V_\alpha = \alpha\}$. Wegen κ regulär folgt wie üblich, dass D abg. unb. in κ. Also ist $\overline{C} = C \cap D$ abg. unb. in κ. Setze $\overline{S}_\alpha = f''S_\alpha$ für $\alpha \in \overline{C}$ und betrachte $\langle \overline{S}_\alpha \mid \alpha \in \overline{C}\rangle$. Wegen κ subtil existieren $\alpha, \beta \in \overline{C}$,$\alpha < \beta$, mit $\overline{S}_\alpha = \overline{S}_\beta \cap \beta$. Dann ist aber $S_\alpha = S_\beta \cap V_\alpha$.

Satz 19: Sei κ subtil. Dann existiert $\tau < \kappa$ mit $V_\kappa \models \tau$ ist total unbeschreibbar.

Beweis: Annahme: Beh. ist falsch. Dann existiert für alle $\tau < \kappa$ ein $A_\tau \subseteq V_\tau$, $\tau < \gamma_\tau < \kappa$ und erststufiges φ_τ mit

(1) $V_{\gamma_\tau} \models \varphi_\tau(A_\tau)$

(2) für alle $\overline{\tau} < \tau$ und $\overline{\tau} < \delta < \tau$ gilt $V_\delta \models \neg\varphi_\tau(A_\tau \cap V_{\overline{\tau}})$

Sei $C \subseteq \kappa$ abg. unb. in κ mit

(3) $\eta \in C \cap \tau, \tau \in C \to \gamma_\eta < \tau$

O.E. bestehe C nur aus Limeszahlen. Setze nun für $\tau \in C$

$$S_\tau = \langle 0, \varphi_\tau\rangle \cap \{\{1\} \times A_\tau\} \subseteq V_\tau$$

Nach Lemma 18 existieren $\eta < \tau$ mit $\eta, \tau \in C$ und $S_\eta = S_\tau \cap V_\eta$. Wegen (1) also $V_{\gamma_\eta} \models \varphi_\tau(A_\tau \cap V_\eta)$. Wegen (3) ist $\gamma_\eta < \tau$. Dies liefert Wid. zu (2).

Bemerkung: κ subtil $\not\to$ κ schwach kompakt. Denn: "subtil" ist Π^1_1-Eigenschaft. Außerdem natürlich: κ subtil, W inneres Modell $\to$ κ subtil in W.

Bemerkung: Sei κ subtil. Sei $C \subseteq \kappa$ abg. unb. in n, $n \in \omega$. Für $\alpha \in C$ seien $B^1_\alpha, \ldots, B^n_\alpha \subseteq V_\alpha$. Dann existieren $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$ mit

$$\langle V_\alpha, B^1_\alpha, \ldots, B^n_\alpha\rangle \prec \langle V_\beta, B^1_\beta, \ldots, B^n_\beta\rangle$$

Beweis: O.E. $\alpha \in C \to \lim(\alpha)$. Setze für $\alpha \in C$

$$S_\alpha = \big\{\langle \varphi, a_1, \ldots, a_m\rangle \mid \langle V_\alpha, B^1_\alpha, \ldots, B^n_\alpha\rangle \models \varphi[a_1, \ldots, a_m], \varphi\ \mathcal{L}\text{-Formel},\ a_1, \ldots, a_m \in V_\alpha\big\} \in V_\alpha$$

Wähle $\alpha, \beta \in C$ mit $S_\alpha = S_\beta \cap V_\alpha$. Dann sind α, β wie gewünscht.

2 Partitionskardinalzahlen, Indiscernibles, $O\#$

Definition:

(a) Sei $f\colon [S]^{<\omega} \to Z$. $X \subseteq S$ heißt *homogen für* f :gdw $\forall_{n\in\omega} X$ homogen für $f \restriction [S]^n$

(b) $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_{\gamma}$:gdw für alle $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ existiert $X \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{otp}(X) = \alpha$ und X homogen für f.

(c) κ ist *Ramsey* :gdw $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$

Bemerkung: κ Ramsey $\to$ κ schwach kompakt. Wir werden später sehen, dass Ramsey sehr viel stärker ist.

Konvention: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{On}$, so bedeutet $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ bedeutet meistens, dass $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

Lemma 1: Sei $\lim(\alpha)$ und $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$. Dann gilt $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_{2^\omega}$.

Beweis: Sei $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to 2^\omega$. Identifiziere 2^ω mit $\{h \mid h\colon \omega \to 2\}$. Für $k \in \omega$ definiere $f_k\colon [\kappa]^{<\omega} \to 2$ durch $f_k(x) = f(x)(k)$. Sei $\pi\colon \omega \to \omega \times \omega$ Bijektion mit $\pi(m) = \langle n, k\rangle \to m \supseteq n$. Definiere $g\colon [\kappa]^{<\omega} \to 2$ durch

$$g(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = f(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \text{ wobei } \pi(m) = \langle n, k\rangle$$

Sei $X \subseteq \kappa$ homogen für g mit $\mathrm{otp}(X) = \alpha$. Dann ist X auch homogen für f, denn: Annahme: $f(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \neq f(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\})$ mit $\alpha_i, \beta_i \in X$. Dann existiert k mit $f_k(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \neq f_k(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\})$. Sei $\pi(m) = \langle n, k\rangle$. Wähle $\alpha_{n+1} < \ldots < \alpha_m$ aus X mit $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ und entsprechend $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_m$ (geht wegen $\lim(\alpha)$). Dann gilt nach Definition $g(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} =\neq g(\{\beta_1, \ldots, \beta_n\})$, im Widerspruch zu X homogen.

Definition: Sei $\mathfrak{M} = \langle M, E, \ldots\rangle$ eine Struktur mit $\langle M, E\rangle \models$ schwache Mengenlehre. Sei $I \subseteq M$ mit $\forall_{i\in I}\ \mathfrak{M} \models i \in On$. Definiere $<$ auf I durch $i < j$:gdw iEj. I heißt *Menge von Indiscernibles* für $\mathfrak{M}$:gdw für alle $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n-1}, j_0 < \ldots < j_{n-1}, i_k, j_k \in I, n \in \omega$ und für alle Formeln $\varphi(\vec{v})$ gilt

$$\mathfrak{M} \models \varphi[i_0, \ldots, i_{n-1}] \text{ gdw } \mathfrak{M} \models \varphi[j_0, \ldots, j_{n-1}]$$

Seien $\mathfrak{M}$ wie oben, $i_0 < \ldots < i_{n-1}$. Setze dann $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(i_0, \ldots, i_{n-1}) := \{\varphi(\vec{v}) \mid \mathfrak{M} \models \varphi[i_0, \ldots, i_{n-1}]$ *Typ von* $(i_0, \ldots, i_{n-1})$. Setze noch $tp^n_{\mathfrak{M}}(I) := \{\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(i_0, \ldots, i_{n-1})\}$ für I unendlich Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{M}$ für $i_0 < \ldots < i_{n-1} \in I$.

Lemma 2: Es gelte $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$ und $\lim(\alpha)$. Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \in, \ldots\rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $|\mathcal{L}| \leq \omega$, mit $\kappa \leq M$, M transitiv. Dann existiert $I \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{otp}(I) = \alpha$, und I ist Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{M}$.

Beweis: Sei F = Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln, Also $|F| = \omega$. Definiere $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \mathbb{P}(F)$. durch $f(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$. Wegen $|\mathbb{P}(F)| = 2^\omega$ existiert nach Lemma 1 ein $X \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{otp}(X) = \alpha$ und X homogen für f. Dann ist X eine Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{M}$.

Definition:

(a) Sei $f : [C]^{<\omega} \to \mathrm{On}, C \subseteq \mathrm{On}$. f ist *regressiv*, wenn für alle $x \in [C]^{<\omega}$ gilt $f(x) < \min(x)$, falls $\min(x) > 0$, $= 0$ sonst.

(b) κ ist α-Erdös $\Leftrightarrow$ für alle regressiven $f : [C]^{<\omega} \to \kappa$, $C \subseteq \kappa$ abgeschlossen unbeschränkt in κ, existiert $X \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{otp}(X) = \alpha$ und X homogen für f.

(c) Sei $\mathfrak{A} = \left\langle L_\kappa[\vec{A}], \in, \vec{A} \right\rangle$. Für $\gamma < \kappa$ setze $\mathfrak{A}_\gamma = \left\langle L_\gamma[\vec{A}], \in, \vec{A} \cap L_\gamma[\vec{A}] \right\rangle$. $I \subseteq \kappa$ ist gute Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{A}$ (gut für $\mathfrak{A}$), wenn gilt:

(G1) $\forall_{\gamma \in I} \mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{A}$

(G2) $\forall_{\gamma \in I}$ ist $I \backslash \gamma$ Menge von Indiscernibles für $\langle \mathfrak{A}, (\zeta)_{\zeta < \gamma} \rangle$.

Bemerkung:

(a) κ ist 1-Erdös $\Leftrightarrow \kappa \geq 1$

(b) κ ist 2-Erdös $\Leftrightarrow \kappa > \omega$ regulär (Übung)

Satz 3: κ ist 3-Erdös $\Leftrightarrow$ κ ist subtil. **Beweis:**

- "$\Rightarrow$": Sei $\langle S_\alpha \mid \alpha \in C \rangle$, $S_\alpha \subseteq \alpha$ abgeschlossen unbeschränkt in κ, gegeben. Ohne Einschränkung $C \subseteq \{\alpha < \kappa \mid \lim(\alpha)\}$. Definiere $f : [C]^2 \to \kappa$ regressiv durch

$$f(\{\alpha, \beta\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } S_\alpha = S_\beta \cap \alpha \\ \min(S_\alpha \Delta S_\beta) + 1^{[\text{siehe 5}]} & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ homogen für f. Dann ist $f(\{\alpha, \beta\}) \neq 0$ nicht möglich. Also ist $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$, das heißt $S_\alpha = S_{\beta \cap \alpha}$.

- "$\Leftarrow$": Sei $f : [C]^{<\omega} \to \kappa$ regressiv. Setze $g_\alpha = f(\{\ldots, \alpha\})$, $f_\alpha = f \upharpoonright [\alpha]^{<\omega}$. Wegen κ subtil existieren $\beta, \gamma \in C, \beta < \gamma$ mit $(*) \langle V_\beta, g_\beta, f_\beta, f(\{\beta\}) \rangle \prec \langle V_\gamma, g_\gamma, f_\gamma, f(\{\gamma\}) \rangle$. Also $f(\{\beta\}) = f(\{\gamma\}) =: \mu$. Sei $\underbrace{f(\{\beta, \gamma\})}_{g_\gamma(\beta)} = \delta < \beta$. Wegen (*) existiert dann $\alpha < \beta$ mit $f(\{\alpha\}) = \mu$ und $f(\{\alpha, \beta\}) = g_\beta(\alpha) = \delta$. Wegen $g_\beta \subseteq g_\gamma$ also auch $f(\{\alpha, \gamma\}) = \delta$. Insgesamt folgt, dass $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ homogen für f.

$\square$

Lemma 4: Sei $\lim(\alpha)$. Dann sind äquivalent

(1) κ ist α-Erdös.

(2) für alle $\mathfrak{A} = \left\langle L_\kappa[\vec{A}], \in, \vec{A} \right\rangle$ existiert $I \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{otp}(I) = \alpha$ und I gut für $\mathfrak{A}$.

Beweis:

- (2)$\Rightarrow$(1): Sei $f : [C]^{<\omega} \to \kappa$ regressiv, $C \subseteq \kappa$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Setze $\mathfrak{A} = \langle L_\kappa[C, f], \in, C, f \rangle$. Sei $I \subseteq \kappa$ gut für $\mathfrak{A}$ mit $\mathrm{otp}(I) = \alpha$. Wir zeigen $I \subseteq C$ ist homogen für f.

[siehe 5] $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, symmetrische Differenz.

(a) $I \subseteq C$:
Sei $\gamma \in I$. Wegen (G1) gilt $\mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{A}$, also insbesondere $\mathfrak{A}_\gamma \models \forall_\delta \exists_{\mu>\delta} \mu \in C$. Also $\gamma = \sup(C \cap \gamma) \in C$, da C abgeschlossen in κ.

(b) I ist homogen für f:
Sei $\gamma_0 < \ldots < \gamma_n$, $\delta_0 < \ldots < \delta_n$ aus I, und ohne Einschränkung $\gamma_0 \leq \delta_0$. Dann ist $\mu = f(\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}) < \gamma_0$, das heißt $\mathfrak{A} \models f(\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}) = \mu$. Somit wegen (G2) $\mathfrak{A} \models f(\{\delta_0, \ldots, \delta_n\}) = \mu$. Das heißt $f(\{\delta_0, \ldots, \delta_n\}) = \mu$.

- (1)$\Rightarrow$(2): Aus (1) folgt, dass κ subtil ist, insbesondere regulär $> \omega$. Sei $\mathfrak{A}$ gegeben, $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Ohne Einschränkung $\mathrm{Fml}_\mathcal{L} \subseteq V_\omega$[siehe 6]. Wegen $\kappa > \omega$ regulär ist $\overline{C} = \{\gamma < \kappa \mid \mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{A}\}$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Sei $g : \mathrm{Fml}_\mathcal{L} \times \kappa^{<\omega} \to \kappa \backslash \{0\}$ Bijektion. Dann ist $D = \{\alpha < \kappa \mid g''(\mathrm{Fml} \times a^{<\omega}) \subseteq \alpha\}$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Setze $C = \overline{C} \cap D$, also C abgeschlossen unbeschränkt in κ. Definiere nun $f : [C]^{<\omega} \to \kappa$ durch:

$$f(\{\underbrace{\vec{\nu}, \vec{\mu}}_{\text{gleiche Länge}}\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \forall_{\vec{\delta} < \nu_0} \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{\delta}, \vec{\nu}) \leftrightarrow \varphi(\vec{\delta}, \vec{\mu}) \\ g(\varphi, \vec{\delta}) & \text{falls } \varphi, \vec{\delta} \text{ das kleinste Gegenbeispiel} \end{cases}$$

für ungerade Länge $= 0$. Sei nun $I \subseteq C$ homogen für f mit $\mathrm{otp}(I) = \alpha$. Wegen $\lim(\alpha)$ folgt leicht, dass $f''[I]^{<\omega} = 0$. Also (!) ist (G2) für I erfüllt. (G1) ist klar, da $I \subseteq C \subseteq \overline{C}$.

$\square$

Zusatz: (2)$\Rightarrow$(1) gilt ohne Voraussetzung $\lim(\alpha)$.

Satz 5: Sei $\lim(\alpha)$. Es gelte $\tau \to (a)_2^{<\omega}$ für ein τ. Sei $\kappa = \min\{\tau \mid \tau \to (\alpha)_2^{<\omega}\}$. Dann ist κ α-Erdös.

Beweis: Sei $f : [C]^{<\omega} \to \kappa$ regressiv, C abgeschlossen unbeschrönkt in κ. Sei $<$ eine Wohlordnung von V_κ. Für $\gamma < \kappa$ sei $g_\gamma : [\gamma]^{<\omega} \to 2$ das $<$-kleinste $g : [\gamma]^{<\omega} \to 2$, welches keine homogene Menge X mit $\mathrm{otp}(X) = \alpha$ besitzt. Setze $\mathfrak{A} = \langle V_\kappa, \in, <, C, f, \alpha \rangle$. Beachte: g_γ ist definierbar in $\mathfrak{A}$ mit Parameter γ. Wähle nun nach Lemma 2 ein $I \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{otp}(I) = \alpha$, I Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{A}$ und $\min(I)$ minimal.

(1) $I \subseteq C$:
Angenommen nicht. Für $\gamma \in I$ setze $h(\gamma) = \sup(C \cap \gamma) < \gamma$ da C abgeschlossen. Wegen I Indiscernibles für $\mathfrak{A}$ gilt:

(a) $\gamma, \delta \in I \Rightarrow h(\gamma) = h(\delta)$

oder (b) $\gamma, \delta \in \Rightarrow h(\gamma) < h(\delta)$

oder (c) $\gamma, \delta \in I \Rightarrow h(\delta) < h(\gamma)$

(c) ist wegen I unendlich nicht möglich. Falls (b), so $\overline{I} = \{h(\gamma) \mid \gamma \in I\}$ Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{A}$ mit $\mathrm{otp}(\overline{I}) = \alpha$, $\min(\overline{I}) < \min(I)$. Widerspruch. Falls (a) setze $\overline{h}\gamma) = \min(C \backslash \gamma)$. Dann $\overline{h}(\gamma) = \delta$ konstant für alle $\gamma \in I$. Folgt sofort, dass I homogen für g_δ ist. Widerspruch.

[siehe 6] $\mathrm{Fml}_\mathcal{L}$ sind die Formeln über $\mathcal{L}$

(2) I ist homogen für f:
Wegen $\lim(\alpha)$ genügt es zu zeigen: Falls $\vec{\nu},\vec{\mu} \in [I]^n$, $\vec{\nu} < \vec{\mu}$, so $f(\vec{\nu}) = f(\vec{\mu})$, $n \geq 1$. Wieder drei fälle:

(a) $\vec{\nu},\vec{\mu} \in [I]^n, \vec{\nu} < \vec{\mu} \Rightarrow f(\vec{\nu}) = f(\vec{\mu})$

(b) $\vec{\nu},\vec{\mu} \in [I]^n, \vec{\nu} < \vec{\mu} \Rightarrow f(\vec{\nu}) < f(\vec{\mu})$

(c) $\vec{\nu},\vec{\mu} \in [I]^n, \vec{\nu} < \vec{\mu} \Rightarrow f(\vec{\mu}) > f(\vec{\nu})$

(c) nicht möglich, (b) nicht möglich wegen Minimalität. Also gilt (a) wie gewünscht.

Korollar: κ Ramsey $\Rightarrow$ κ ist κ-Erdös.

4. Übung:

Aufgabe 1: Sei κ subtil. Man zeige, dass κ 2-Mahlo ist.

Aufgabe 2: Sei $E(\tau)$ die Eigenschaft: für alle $\langle S_\alpha \mid \alpha < \tau\rangle$ mit $S_\alpha \subseteq \alpha$ existieren $\omega \leq \alpha < \beta < \tau$ mit $S_\alpha = S_\beta \cap \alpha$. Sei $A = \{\tau \in \mathrm{Card} \mid E(\tau)\} \neq \emptyset$, und sei $\kappa = \min A$. Man zeige, dass κ subtil ist.

Satz 6: Sei κ β-Erdös, $\alpha < \beta$, $\beta \supseteq 3$. Dann ist $\{\tau < \kappa \mid \tau\ \alpha\text{-Erdös}\ \}$ stationär in κ.

Beweis: Wegen $\beta \supseteq 3$ ist κ unerreichbar. Annahme: Behauptung falsch. Sei also $C \subseteq \kappa$ abg. unb. in κ mit $\forall_{\alpha \in C}$ τ nicht α-Erdös. o.E. sei $\forall \tau \in C$ τ Kardinalzahl, $\tau \neq 0$. Sei also für $\tau \in C$ $f_\tau\colon [C_\tau]^{<\omega} \to \tau$ regressiv mit $C_\tau \subseteq \tau$ abg. unb. in τ und f_τ besitzt keine homogene Menge von Ordnungstyp α. Sei $h\colon \kappa \times \kappa \to \kappa$ bijektiv. o.E. $\forall_{\tau \in C} h''\tau \times \tau \subseteq \tau$. Definiere nun $g_0\colon [C]^{<\omega} \to \tau$ durch

$$g_0(\{\tau,\eta\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } C_\tau = C_\eta \cap \tau \\ \min(C_\tau \triangle C_\eta) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

g_0 beliebig sonst. und $g_1\colon [C]^{<\omega} \to \kappa$ durch

$$g_1(\{\tau_0,\ldots,\tau_n\}) = \begin{cases} f_{\tau_n}(\{\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}\}) & \text{falls } \tau_0,\ldots,\tau_{n-1} \in C_{\tau_n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Setze dann $g(\{\tau_0,\ldots,\tau n-1\}) = h(g_0(\{\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}\}), g_1(\{\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}\}))$ für $\tau_0,\ldots,\tau_{n-1} \in C$. Setze nach Vor. $X \subseteq C$ homogen für g mit $\mathrm{otp}(X) = \beta$. Dann ist X homogen für g_0 und g_1. Weg X homogen für g_0 gilt

(*) $\nu,\tau \in X, \nu \in \tau \to C_\nu = C_\tau \cap \nu \to \nu \in C_\tau$

Sei nun τ das $(\alpha+1)$-te Element von X. Dann $X \cap \tau \subseteq C_\tau$ wegen (*) und $X \cap \tau$ homogen für f_τ, da X homogen für f_τ, da X homogen für g_1. Widerspruch zur Wahl von f_τ da $\mathrm{otp}(X \cap \tau) = \alpha$.

Satz 7: Sei W ein inneres Modell (von ZFC) und $\alpha < \omega_1^W$. Sei κ α-Erdös. Dann ist κ α-Erdös in W.

Beweis: trivial für $\alpha < \omega$. Sei also $\alpha \geq \omega$. Wähle $h \in W$ mit $h\colon \omega \to \alpha$ bijektiv. Definiere $<^*$ auf ω durch $n <^* m$:gdw $h(n) < h(m)$. Also ist $\langle \omega, <^* \rangle \in W$ und

$\text{otp}(\langle\omega, <^*\rangle) = \alpha$. Sei $f\colon [C]^{<\omega} \to \kappa$ regressiv, $C \subseteq \kappa$ abg. unb. in κ mit $f \in W$. Setze $T = \{s\colon \kappa \to C \mid n \in \omega, \text{rng}(s) \text{ homogen für } h, \forall_{i,j<n}(i <^* j \text{ gdw } s(i) < s(j))\}$ Da in V f eine homogene Menge von Ordnungstyp α hat, gilt:

(*) $\exists_{s\colon \omega\to C}\forall_n s \restriction n \in T$

Denn: Sei $I \subseteq C$ homogen für f mit $\text{otp}(I) = \alpha$. Definiere $s\colon \omega \to I$ durch $s(n) =$ das $h(n)$-te Element von I. Wegen (*) ist also $\langle T, \supsetneq\rangle$ nicht fundiert. Also wegen Absolutheit, da $T \in W$, $W \models \langle T, \supsetneq\rangle$ ist nicht fundiert. Also existiert $s \in W$ mit $s\colon \omega \to C$ und $\forall_n s \restriction n \in T$. Setze $\overline{I} = \text{rng}(s)$. Dann $\text{otp}(\overline{I}) = \alpha$, $\overline{I} \in W$, $\overline{I}$ homogen für f.

Satz 8: Sei κ α-Erdös, wobei $\alpha = \omega_1^L$. Dann ist $V \neq L$, sogar $|\mathcal{P} \cap L| = \omega$

Beweis: Es genügt z.z., dass $|\alpha| = \omega$, da $\mathcal{P}(\omega) \cap L \subseteq L_\alpha$ und $|L_\alpha| = |\alpha|$. Betrachte L_κ. L_κ hat definierende Wohlordnung $<_L$. Also hat L_κ definierbare Skolemfunktion, nämlich für L-Formel $\varphi(\vec{x}, y)$:

$$f_\varphi(\vec{a}) = \begin{cases} \text{das } <_L\text{-kleinste } b \in L_\kappa \text{ mit } L_\kappa \models \varphi[\vec{a}, b] & \text{falls solch ein } b \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese sind abgeschlossen unter Komposition. Nach Voraussetzung und Lemma 4 existiert ein $I \subseteq \kappa$ mit I ist gut für L_κ und $\text{otp}(I) = \alpha$. Sei $X = \{f_\varphi(\vec{a}) \mid \vec{a} \in I, \varphi(\vec{x}, y) L - \text{Formel}\}$. Dann $X \prec L_\kappa$. Sei $\gamma = \min I$.

(1) $\alpha < \gamma$

Beweis: Da $L_\alpha \prec L_\kappa$ und α definierbar in L_κ

Sei nach Kondensationslemma $\pi\colon L_\delta \tilde{\to} X$ für ein δ. Dann natürlich $\delta \geq \text{otp}(I) = \alpha$.

(2) $\alpha \subseteq X$

Beweis: Annahme: nicht. Sei also $\eta = \min\{\rho < \alpha \mid \rho \notin X\}$. Dann ist aber η abzählbar in $L_\alpha \subseteq L_\delta$. Also existiert $h \in L_\delta$ mit $h\colon \omega \to \eta$ surjektiv. Dann aber $\pi(h) = h$, da $\pi(\omega) = \omega$ und $\pi \restriction \eta = \text{id} \restriction \eta$, da $\eta \subseteq X$. Somit aber $\eta = \text{rng}(h) = \text{rng}(\pi(h)) \in X$, und daher $\pi(\eta) = \eta$.

Sei nun $\langle \gamma_n \mid n \in \omega\rangle$ das Anfangsstück von I der Länge ω.

(3) $X \cap \gamma \subseteq \{f_\varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) \mid \varphi(\vec{x}, y) L\text{-Formel}\}$

Beweis: Sei $\delta \in X \cap \gamma$. Dann existieren $\nu_0, \ldots, \nu_{n-1} \in I$ mit $\delta = f_\varphi(\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$. Also wegen I gute Indiscernibles $\delta = f_\varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$.

Wegen (3) ist aber $X \cap \gamma$ abzählbar. Aber nach (1), (2) $\alpha \subseteq X \cap \gamma$. Also ist α abzählbar. □ 22.11.2012

Sei $\mathcal{L}_0$ die die Sprache der Mengenlehre. Sei $T_0 = \text{ZF} + V = L$. Erweitere nun rekursiv die Sprache $\mathcal{L}_0$ zu L durch Einführung neuer Funktionszeichen beziehungsweise Konstanten (= nullstellige Funktionen) wie folgt:

Sei $\varphi(\vec{x}, y)$ Formel. Neues Funktionszeichen f_φ und hierfür das Axiom

$$f_\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} \text{das } <_L \text{-kleinste } y \text{ mit } \varphi(\vec{x}, y) & \text{falls existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ergibt abzählbare Sprache $\mathcal{L}$ und Theorie $T_\mathcal{L} \supseteq T_0$. Sei ohne Einschränkung $\mathrm{Fml}_\mathcal{L} \subseteq \omega$, $\langle v_i \mid i \in \omega \rangle$ feste Aufzählung der Variablen.

Bemerkung: Ist $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle \models \mathrm{ZF} + V = L$, so existiert eine eindeutige $\mathcal{L}$-Expression $\mathcal{M}' = \langle M, E, \ldots \rangle$ von $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models T_\mathcal{L}$. Wir identifizieren $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M}'$, das heißt betrachten $\mathcal{M}$ als $\mathcal{L}$-Struktur. Außerdem sei $t^\mathcal{M}$ für Term t die Interpretation von t in $\mathcal{M}$.

Definition: Sei $\Sigma \subseteq \mathrm{Fml}_\mathcal{L}$. Σ ist *E-M-Menge* (Ehrenfeucht-Mostovski-Menge) genau dann wenn

(E1) Σ ist vollständig und widerspruchsfrei [betrachte die freien Variablen als Konstanten]

(E2) $\Sigma \supseteq T_\mathcal{L}$

(E3) $\Sigma \supseteq \{v_i \in \mathrm{On} \mid i \in \omega\} \cup \{v_i \in v_j \mid i < j\}$

(E4) $\Sigma \supseteq \{\varphi(v_{i_0}, \ldots, v_{i_{n-1}}) \leftrightarrow \varphi(v_{j_0}, \ldots, v_{j_{n-1}}) \mid \varphi(x)\ \ \mathcal{L}\text{-Formel}, i_0 < \ldots < i_{n-1}, j_0 < \ldots < j_{n-1}\}$

Bemerkung: Es sind folgende Aussagen äquivalent

(1) Σ ist E-M-Menge

(2) Es existieren $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle \models \mathrm{ZF} + V = L$ und unendliches $I \subseteq M$ mit I Menge von Indiscernibles für M und $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} t^n_{\varphi_\mathcal{M}}(I)$.

Beweis: (2)$\Rightarrow$(1) trivial, (1)$\Rightarrow$(2) nach Gödel'schem Vollständigkeitssatz. $\square$

Sei Σ E-M-Menge. Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. Wir defnieren nun eine Struktur $\mathfrak{H}_\alpha := \mathfrak{H}(\Sigma, \alpha) = \langle H(\Sigma, \alpha), E_\alpha \rangle$ und $I_\alpha \subseteq H(\Sigma, \alpha)$ mit den Eigenschaften

(E5) (a) $\mathfrak{H}_\alpha \models T_\mathcal{L}$

(b) I_α ist Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{H}_\alpha$ mit $\mathrm{otp}(I_\alpha) = \alpha$ [bezüglich der durch $\mathfrak{H}_\alpha$ induzierten Ordnung]

(c) $\forall_n\, \mathrm{tp}_{\mathfrak{H}_\alpha}(I_\alpha) \subseteq \Sigma$

(d) I_α erzeugt $H(\Sigma, \alpha)$, das heißt für alle $a \in H(\Sigma, \alpha)$ existiert $t \in \mathcal{L}$ und $\vec{c} \in I_\alpha$ mit $a = t^{\mathfrak{H}_\alpha}(\vec{c})$.

Bemerkung: $\mathfrak{H}(\Sigma, \alpha)$ ist durch (a)-(d) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir geben eine explizite uniforme Definition von $\mathfrak{H}(\Sigma, \alpha)$ als Termmodell an. Sei hierzu $\langle c_i \mid i \in \mathrm{On} \rangle$ eine Klasse von neuen Konstanten. Setze zuerst $H'(\Sigma, \alpha) = \{t(c_{\xi_0}, \ldots, c_{\xi_{n-1}}) \mid t\ \ \mathcal{L}\text{-Funktionszeichen}, \xi_0 < \ldots < \xi_{n-1} < \alpha\}$. Definiere $\sim = \sim_{\Sigma,\alpha}$ auf $H'(\Sigma, \alpha)$ durch

$$t(c_{\xi_0}, \ldots, c_{\xi_{n-1}}) \sim t'(c_{\eta_0}, \ldots, c_{\eta_{m-1}}) \Leftrightarrow t(v_{g(\xi_0)}, \ldots, v_{g(\xi_{n-1})}) = t'(v_{g(\eta_0)}, \ldots, v_{g(\eta_{m-1})}) \in \Sigma$$

wobei $g : \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\} \cap \{\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}\} \xrightarrow{\sim} k$. Beachte, dass $\sim$ nicht von α abhängt. $\sim$ ist Äquivalenzrelation nach (E4). Setze $[t(\vec{c})]_\alpha = \{t'(\vec{c'}) \in H'(\Sigma, \alpha) \mid t(\vec{c}) \sim_{\Sigma,\alpha} t'(\vec{c'})\}$ und $H(\Sigma, \alpha) = \{[t(\vec{c})]_\alpha \mid t(\vec{c}) \in H'(\Sigma, \alpha)\}$. Definiere E_α auf $H(\Sigma, \alpha)$ durch

$$\begin{aligned}&[t(c_{\xi_0}, \ldots, c_{\xi_{n-1}})]_\alpha E_\alpha [t'(c_{\eta_0}, \ldots, c_{\eta_{m-1}})]_\alpha \Leftrightarrow \\ &\qquad (t(v_{g(\xi_0)}, \ldots, v_{g(\xi_{n-1})}) \in t'(v_{g(\eta_0)}, \ldots, v_{g(\eta_{m-1})}) \in \Sigma)\end{aligned}$$

wobei $g : \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\} \cap \{\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}\} \xrightarrow{\sim} k$. Ist wohldefiniert wegen (E4). Setze schließlich $\mathfrak{H}(\Sigma, \alpha) = \langle H(\Sigma, \alpha), E_\alpha \rangle$. Weiterhin sei $I_\alpha = \{[c_\xi]_\alpha \mid \xi < \alpha\}$. Der Nachweis von (E5) ist leicht (vgl. ML1). Für $\alpha \leq \beta$ definiere $i_{\alpha\beta} : H(\Sigma, \alpha) \to H(\Sigma, \beta)$ durch $i_{\alpha\beta}([t(\vec{c})]_\alpha) = [t(\vec{c})]_\beta$. Ist wohldefiniert. Es folgt unmittelbar:

(E6) (a) $i_{\alpha\beta} : \mathfrak{H}(\Sigma, \alpha) \to \mathfrak{H}(\Sigma, \beta)$ ist elementar

(b) $i''_{\alpha\beta} I_\alpha$ ist Anfangsstück von I_β

(c) $\langle i_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta \in \mathrm{On} \rangle$ ist kommutativ, das heißt $i_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma \Rightarrow i_{\alpha\gamma} = i_{\beta\gamma} \circ i_{\alpha\beta}$

(d) $\langle i_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta \in \mathrm{On} \rangle$ ist stetig, das heißt falls $\lim \lambda$, so $H(\Sigma, \lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \operatorname{rng} i_{\alpha\lambda}$.

Sei weiterhin Σ eine E-M-Menge. Σ ist konfinal $\Leftrightarrow$ für alle $t \in \mathcal{L}$ gilt

$$(t(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{On} \to t(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in v_n) \in \Sigma$$

Bemerkung: Sei Σ konfinal. Dann ist für alle α mit $\lim \alpha$ auch I_α konfinal in $\mathrm{On}^{\mathfrak{H}_\alpha}$. 27.11.2012

Σ ist bemerkenswert $\Leftrightarrow$ Σ ist konfinal und für alle t

$$(t(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+m}) \in v_n \to t(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+m}) = t(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{n+m+1}, \ldots, v_{n+2m+1}))$$

Lemma 9: Sei Σ bemerkenswerte E-M-Menge. Sei $\alpha < \beta$ mit $\lim \alpha$. Dann gilt

$$i''_{\alpha\beta} \mathrm{On}^{\mathfrak{H}_\alpha} = \{b \in H_\beta \mid \mathfrak{H}_\beta \models b < [c_\alpha]_\beta\}$$

Insbesondere ist also $[c_\alpha]_\beta$ in $\mathrm{On}^{\mathfrak{H}_\beta}$ das Supremum von $\{[c_\gamma]_\beta \mid \gamma < \alpha\}$.

Beweis:

- "$\subseteq$": Sei $a \in \mathrm{On}^{\mathfrak{H}_\alpha}$. Wegen Σ konfinal existiert dann ein $\gamma < \alpha$ mit $\mathfrak{H}_\alpha \models a < [c_\gamma]_\alpha$. Also $\mathfrak{H}_\beta \models i_{\alpha\beta}(a) < [c_\gamma]_\beta < [c_\alpha]_\beta$.
- "$\supseteq$": Sei $b \in H_\beta$ mit $\mathfrak{H}_\beta \models b < [c_\alpha]_\beta$. Sei $b = [t(c_{\eta_0}, \ldots, c_{\eta_{n-1}}, c_{\eta_n}, \ldots, c_{\eta_{n+m}})]_\beta$ mit $\eta_{n-1} < \alpha \leq \eta_n$. Also $\mathfrak{H}_\beta \models b < [c_{\eta_n}]_\beta$. Wegen *Sigma* bemerkenswert gilt nach (E5)(c), dass $b = [t(c_{\eta_0}, \ldots, c_{\eta_{n-1}}, c_{\eta_{n-1}+1}, \ldots, c_{\eta_{n-1}+m})]_\beta \in \operatorname{rng}(i_{\alpha\beta})$.
- "Insbesondere": Folgt sofort, da wegen Σ konfinal $\{[c_\gamma]_\beta \mid \gamma < \alpha\}$ konfinal in $i''_{\alpha\beta}\,\mathrm{On}$.

□

Σ ist *fundiert* $\Leftrightarrow \forall_\alpha\ \mathfrak{H}(\Sigma,\alpha)$ fundierte Struktur, das heißt E_α ist fundiert.

Bemerkung: $\alpha \leq \beta$ und $\mathfrak{H}(\Sigma,\beta)$ fundiert $\Rightarrow \mathfrak{H}(\Sigma,\alpha)$ fundiert (wegen $i_{\alpha\beta}$).

Lemma 10: Sei Σ eine E-M-Menge. Dann sind äquivalent

(a) Σ ist fundiert

(b) $\mathfrak{H}(\Sigma,\omega_1)$ ist fundiert

(c) $\forall_{\alpha<\omega_1}\ \mathfrak{H}(\Sigma,\alpha)$ ist fundiert

Beweis:

- (a)$\Rightarrow$(b): trivial
- (b)$\Rightarrow$(c): ist trivial wegen Bemerkung
- (c)$\Rightarrow$(a): indirekt: Sei etwa $\mathfrak{H}(\Sigma,\delta)$ nicht fundiert. Sei $[t_{n+1}(c_{\xi_0^{n+1}},\ldots,c_{\xi_{i_{n+1}}^{n+1}})]_\delta E_\delta [t(c_{\xi_0^n},\ldots,c_{\xi_n^n})]_\delta$. Sei $g : \bigcup_{n=0}^{\infty}\{\xi_0^n,\ldots,\xi_{i_n}^n\} \xrightarrow{\sim} \alpha$. Also $\alpha < \omega_1$. Dann,, da $i_{\alpha\delta}$ elementar:

  $$[t_{n+1}(c_{g(\xi_0^{n+1})},\ldots,c_{g(\xi_{i_{n+1}}^{n+1})})]_\alpha E_\alpha [t_n(c_{g(\xi_0^n)},\ldots,c_{g(\xi_{i_n}^n)})]_\alpha$$

  Also $\mathfrak{H}(\Sigma,\alpha)$ nicht fundiert.

□

Σ ist schön $\Leftrightarrow \Sigma$ ist bemerkenswert und fundiert.

Satz 11: Sei Σ eine schöne E-M-Menge. Dann ist
$\Sigma = \{\varphi(v_0,\ldots,v_{n-1}) \mid L_{\omega_\omega} \models \varphi(\omega_1,\ldots,\omega_n)\}$ [also gibt es höchstens eine schöne E-M-Menge].

Beweis: Wegen Σ fundiert ist jedes $\mathfrak{H}(\Sigma,\alpha) = \mathfrak{H}_\alpha$ kanonisch isomorph zu einer transitiven Menge. Identifiziere $\mathfrak{H}_\alpha$ hiermit. Da $\mathfrak{H}_\alpha \models V = L + \mathrm{ZF}$ existiert δ_α mit $H_\alpha = L_{\delta_\alpha}$. Wegen Σ bemerkenswert ist nach Lemma 9 $i_{\alpha\beta} = \mathrm{id} \restriction L_{\delta_\alpha}$ (!) für $\alpha < \beta$, $\lim \alpha$. Außerdem ist I_α abgeschlossen in δ_α und für $\lim\alpha$ unbeschränkt in δ_α. Außerdem natürlich $|\delta_\alpha| = \max\{|\alpha|,\omega\}$. Betrachten wir nun speziell H_{ω_ω}, so folgt sofort, dass $H_{\omega_\omega} = L_{\omega_\omega}$ und $I = I_{\omega_\omega}$ abgeschlossen in ω_ω und für jedes $n < \omega$ $\sup(I \cap \omega_{n+1}) = \omega_{n+1}$. Also ist $\{\omega_{n+1} \mid n \in \omega\} \subseteq I$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Wir können also setzen:

$$\mathrm{O}^\sharp \simeq \text{die einzige schöne E-M-Menge}$$

Also $\mathrm{O}^\sharp \subseteq \omega$.

Bemerkung: Es existiert Π_1-formel $\varphi(x)$ mit:

$$H_{\omega_1} \models \varphi(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{O}^\sharp$$

[hierbei: $H_{\omega_1} = \{x \mid \mathrm{TC}(x) \text{ ist abzählbar}\}$.]

Beweis:

$$\varphi(x) = \underbrace{\text{“x ist bemerkenswerte E-M-Menge”}}_{\Delta_1} \text{ und } \underbrace{\forall_{\alpha<\omega_1}\mathfrak{H}(x,\alpha) \text{ ist fundiert}}_{\Pi_1}$$

Satz 12: Sei κ ω_1-Erdös. Dann existiert $O^\sharp$.

Beweis: Sei $I \subseteq \kappa$ gut für L_κ mit $\mathrm{otp}(I) = \omega_1$. Sei $\langle \gamma_i \mid i < \omega_1 \rangle$ die monotone Aufzählung von I. Setze $\Sigma = \bigcup_n \mathrm{tp}^n_{L_\kappa}(I)$. Also ist Σ E-M-Menge, da $L_\kappa \models \mathrm{ZF}$. Σ ist konfinal, denn:

$$L_\kappa \models (t(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \in \mathrm{On} \to t(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) < \gamma_n)$$

da nach (G1) $L_{\gamma_n} \prec L_\kappa$. Σ ist bemerkenswert, denn: Sei $L_\kappa \models \underbrace{t(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n, \dots, \gamma_{n+m})}_{=:\delta} \in \gamma_n$. Da wegen (G2) auch $L_\kappa \models t(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n+m+1}, \dots, \gamma_{n+2m+1}) = \delta$.

Σ ist fundiert, denn wegen Lemma 10 genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{H}(\Sigma, \omega_1)$ fundiert ist. Defniere hierzu $\pi : H(\Sigma, \omega_1) \to L_\kappa$ durch $\pi([t(c_{i_0}, \dots, c_{i_{n+1}})]_{\omega_1}) = t^{L_\kappa}(\gamma_{i_0}, \dots, \gamma_{i_{n-1}})$. Dann ist π elementar nach Definition, also fertig. □

Satz 13 (Silver): Es existiere $O^\sharp$. Dann existiert eine Klasse $I \subseteq \mathrm{On}$ mit

(a) I ist abgeschlossen unbeschränkt in On

(b) I ist gute Klasse von Indiscernibles für L

(c) I erzeugt L, das heißt für alle $a \in L$ existiert ein $\vec{\gamma} \in I$ mit $a = t^L(\vec{\gamma})$. 29.11.2012

Beweis: Es gilt einfach “$L = \mathfrak{H}(O^\sharp, \mathrm{On})$”, “$I = I_{\mathrm{On}}$” oder formal etwas genauer: Sei $\mathfrak{H}_\alpha)\mathfrak{H}(O^\sharp, \alpha)$. $\mathfrak{H}_\alpha$ ist fundiert. Also ist $\mathfrak{H}_\alpha$ kanonisch isomorph zu einer transitiven Menge. Identifiziere wieder $\mathfrak{H}_\alpha$ hiermit. $\mathfrak{H}_\alpha \models V = L + \mathrm{ZF}$. Also ist $\mathfrak{H}_\alpha = L_{\delta_\alpha}$ für ein δ_α.

(1) Sei $\lim \alpha$, $\alpha < \beta$

 (a) $i_{\alpha\beta} = \mathrm{id} \upharpoonright L_{\delta_\alpha}$ (also $L_{\delta_\alpha} \prec L_\beta$).

 (b) $\delta_\alpha =$ das α-te Element von I_β.

Beweis: Sei γ das α-te Element von I_β. Da $O^\sharp$ bemerkenswert gilt nach Lemma 9 $\gamma = i''_{\alpha\beta}\delta_\alpha$. Also ist $i_{\alpha\beta} \upharpoonright \delta_\alpha = \mathrm{id} \upharpoonright \delta_\alpha$ und $\gamma = \delta_\alpha$, also (b). Außerdem folgt auch (a), da das bezüglich $\leq_L$ μ-te Element von L_{δ_α} auf $\underbrace{i_{\alpha\beta}(\mu)}_{=\mu}$-te Element von L_{δ_α} abgebildet wird.

□

Setze nun $I = \cup\{I_\alpha \mid \lim \alpha\}$. Sei $\langle \gamma_i \mid i \in \mathrm{On} \rangle$ die monotone Aufzählung von I. Dann gilt:

(i) $\lim(\alpha) \Rightarrow \delta_\alpha = \gamma_\alpha$

(ii) $\alpha \leq \beta, \alpha, \beta$ Limesordinalzahlen $\Rightarrow L_{\gamma_\alpha} \prec L_{\gamma_\beta}$

Also nach Tarski gilt für $\lim(\alpha)$ $L_{\gamma_\alpha} \prec L$. Also ist I Klasse von Indiscernibles für L, und für alle $\gamma \in I$ gilt $L_\gamma \prec L$. Außerdem erzeugt I L, da I_α erzeugt L_{γ_α} für $\lim(a)$. Nur noch zu zeigen (G2), das heißt $I \backslash \gamma_\alpha$ ist Klasse von Indiscernibles für $\langle L, (\xi)_{\xi<\gamma_\alpha}\rangle$. Aus Notationsgründen einfacher Fall: $\xi < \gamma_\alpha \leq \gamma_\eta \leq \gamma_\mu$ Wollen zeigen L
$L \models \varphi(\xi, \gamma_\eta) \leftrightarrow \varphi(\xi, \gamma_\mu)$. Wegen (c) $\xi = t'(\gamma_{\xi_0}, \ldots, \gamma_{\xi_{n-1}}, \gamma_{\xi_n}, \ldots, \gamma_{\xi_{n+m}})$ mit
$\xi_{n-1} < \alpha \leq \xi_n$. Dann wegen $O^\sharp$ bemerkenswert gilt auch
$\xi = t'(\gamma_{\xi_0}, \ldots, \gamma_{\xi_{n-1}}, \gamma_{\mu+1}, \ldots, \gamma_{\mu+m})$. Also
$L \models \varphi(t'(\gamma_{\xi_0}, \ldots, \gamma_{\xi_{n-1}}, \gamma_{\mu+1}, \ldots, \gamma_{\mu+m}), \mu_\eta) \leftrightarrow \varphi(t'(\gamma_{\xi_0}, \ldots, \gamma_{\xi_{n-1}}, \gamma_{\mu+1}, \ldots, \gamma_{\mu+m}), \gamma_\mu)$.
□

Bemerkung: I ist durch (a), (b), (c) eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $\overline{I}$ eine weitere Klasse mit (a), (b), (c), dann ist $I \cap \overline{I}$ unendlich. Also ist der "Type" von I gleich dem Type von $\overline{I}$. Sei $k : I \xrightarrow{\sim} \overline{I}$. Definiere $j : L \to L$ durch $j(t^L(\vec{\gamma})) = t^L(k(\vec{\gamma}))$. Dann ist j Isomorphismus, also $j = \mathrm{id}$ und damit $k = \mathrm{id}$. □

I heißt "Klasse der kanonischen Indiscernibles für L". Es gilt nach Konstruktion $\forall_{\gamma\in I} |\gamma| \leq \{\omega, |I \cap \gamma|\}$. Also für alle $\kappa \in \mathrm{Card}, \kappa > \omega$ $\sup(I \cap \kappa) = \kappa$ und daher auch $\mathrm{Card} \backslash (\omega + 1) \subseteq I$. Insbesondere $O^\sharp \neg \in L$.

Lemma 14: $O^\sharp$ existiere und I sei die Klasse der kanonischen Indiscernibles für L. Sei $\gamma \in I$ und $\alpha < \omega_1^L$. Dann ist γ α-Erdös in L.

Beweis: Es genügt dies für ein $\gamma \in I$ zu zeigen. Wähle etwa $\gamma = \omega_1$, also $\sup(I \cap \gamma) = \gamma$. Nach Beweis von Satz 7 genügt es zu zeigen

(*) Sei $f : [C]^{<\omega} \to \gamma$, $C \subseteq \gamma$ abgeschlossen unbeschränkt in γ, regressiv mit $f \in L$. Dann existiert ein $X \in V$ mit $\mathrm{otp}(X) \geq \alpha$ und X homogen für f.

Sei hierzu $f = t^L(\vec{\mu}, \vec{\delta})$ mit $\vec{\mu}, \vec{\delta} \in I, \vec{\mu} < \gamma \leq \vec{\delta}$. Folgt leicht, dass $(I \cap \gamma) \backslash \max(\vec{\mu} + 1)$ homogen für f. □

Die Existenz von $O^\sharp$ impliziert also die Konsistenz von sehr starken Theorien. In gewisser Weise ist "$O^\sharp$ existiert" ein "großes Kardinalzahlaxiom".

Bemerkung: $O^\sharp$ existiere. Sei $\kappa \geq \omega$ Kardinalzahl in L. Dann gilt $\mathrm{cf}((\kappa^+)^L) = \omega$.

Beweis: Sei $\tau = (\kappa^+)^L$. Sei J die Menge der ersten ω-vielen Elemente von $I \backslash (\kappa + 1)$ und $\delta = \sup J$. Es gilt nun $\mathrm{Hull}_{L_\delta}((\kappa + 1) \cap J) \supseteq \tau$ (hier $\mathrm{Hull}_{L_\delta}(x) =$ Skolemhülle von x in L_δ[siehe 7]). Sei $\langle \delta_n \mid n \in \omega\rangle$ die monotone Aufzählung von J. Setze nun für $n \in \omega$ $X_n = \mathrm{Hull}_{L_\delta}((\kappa + 1) \cap \{\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\})$. Dann $X_n \in L$ und $|X_n|^L \leq \kappa$. Also $\tau_n := \sup(X_n \cap \tau) < \tau$, da τ regulär in L. Aber $\bigcup_{n\in\omega} X_n = X \supseteq \tau$. Also $\sup_n \tau_n = \tau$. Also $\mathrm{cf}(\tau) = \omega$. □

Also auch: $O^\sharp$ existiert $\Rightarrow |\mathfrak{P}(\kappa) \cap L| \leq \kappa$ für $\kappa \geq \omega$.

Bemerkung: Sei $i : I \to I$ streng monoton wachsend. Dann existiert $j \supseteq i$ mit $j : L \to L$ elementar.

[siehe 7] $\mathrm{Hull}_{L_\delta}(X) = \{t^{L_\delta}(\vec{x}) | t \in \mathcal{L} \text{ und } \vec{x} \in X\}$

Beweis: Definiere j durch

$$j(t^L(\vec{\gamma})) = t^L(i(\vec{\gamma})) \text{ für } \vec{\gamma} \in I$$

Das ist wohldefiniert und elementar.

Falls $O^\sharp$ existiert, existieren also sehr viele elementare Einbettungen von L nach L. Wir zeigen nun, dass schon eine nichttriviale genügt, um die Existenz von $O^\sharp$ zu beweisen. 04.12.2012

Satz 15 (Kunen): Es sind äquivalent:

(a) $0^\#$ existiert.

(b) es existiert elementare Einbettung $j\colon L \to L$, $j \neq id$

(c) es existiert elementare Einbettung $j\colon L_\alpha \to L_\beta$, $j \neq id \restriction L_\alpha$, mit α Kardinalzahl in V.

Beweis: (a)→(b) nach obiger Bemerkung. (b)→(a): Sei j wie in (2). Sei α Kardinalzahl mit $j \restriction L_\alpha \neq id \restriction L_\alpha$. Dann $j \restriction L_\alpha \colon L_\alpha \to L_\beta$ elementare Einbettung für $\beta = j(\alpha)$.

(c)→(a): Sei $j\colon L_\alpha \to L_\beta$ elementar, $j \neq id \restriction L_\alpha$ mit α Kardinalzahl in V. Wir werden zeigen, dass ein κ^* existiert mit $L_{\kappa*}$ besitzt überabzählbare Menge von guten Indiscernibles. Dann sind wir nach Beweis von Satz 13 fertig. Hierzu zeigen wir zuerst eine starke Version von (b). Wegen $j \neq id \restriction L_\alpha$ ist auch $j \restriction \alpha \neq id \restriction \alpha$ (und natürlich $\alpha > \omega$). Setze $\kappa = \min\{\gamma < \alpha \mid j(\gamma) \neq \gamma\}$. Dann ist natürlich $j(\kappa) > \kappa$. Nach Vor. ist $(\kappa^+)^L \leq \alpha$. Wir können also $U \subseteq \mathcal{P}(\kappa) \cap L$ durch: für $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap L$: $X \in U$ gdw $\kappa \in j(X)$. (beachte, dass $\mathcal{P}(\kappa) \cap L \subseteq L_{(\kappa^+)^L} \subseteq L_\alpha$) Es gilt dann:

(i) $\kappa \in U$, $\emptyset \notin U$, $X \subseteq Y \subseteq \kappa$ und $X \in U \wedge Y \in L \to Y \in U$

Denn: $\kappa \in j(\kappa)$, $\kappa \notin \emptyset = j(\emptyset)$, $X \in U \to \kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$.

(ii) Ist $\langle X_i \mid i < \gamma\rangle \in L$ mit $\gamma < \kappa$ und $X_i \in U$ so gilt $\bigcap_{i<\gamma} X_i \in U$

Denn: z.Z. $\kappa \in j(\bigcap_{i<\gamma} X_i)$. Aber wegen Elementarität ist $j(\bigcup_{i<\gamma} X_i) = \bigcup_{i<\gamma} j(X_i)$ (da $j(\gamma) = \gamma$), also klar.

(iii) $\forall_{X \in \mathcal{P}(\kappa)\cap L}(X \in U$ oder $\kappa - X \in U)$

Da $j(X) \cup j(\kappa - X) = j(\kappa)$.

(iv) $\forall_{\gamma<\kappa} \kappa - \gamma \in U$

Da $j(\kappa - \gamma) = j(\kappa) - \gamma$.

Also ist U Ultrafilter auf $\mathcal{P}(\kappa) \cap L$. Bilde interne Ultrapotenz von L, d.h. setze $\overline{M} = \{f \in L \mid f\colon \kappa \to L\}$. Für $f, g \in \overline{M}$ setze: $f \sim g$ gdw $\{\delta < \kappa \mid f(\delta) = g(\delta)\} \in U$ ist Äquivalenzrelation.

Setze $[f] = \{g \mid f \sim g$ und $\forall_h(h \sim f \to \text{rng}(h) \geq \text{rng}(g)\} \in V$ („Trick von Scott").
$M = \{[f] \mid f \in \overline{M}\}$. Definiere $E \subseteq M^2$ durch:

$$[f]E[g] \text{ gdw } \{\delta < \kappa \mid f(\delta) \in g(\delta)\} \in U$$

Analog zum Beweis von Kapitel 1, Satz 6 (4)→(5) erhält man

(1) $\langle M, E\rangle \models \varphi([f_1], \dots, [f_n])$ gdw $\{\delta \leq \kappa \mid L \models \varphi(f_1(\delta), \dots, f_n(\delta))\} \in U$

Also haben wir $\overline{j} \models L \to \langle M, E\rangle$ elementar, wobei $\overline{j}(a) = [c_a]$, wobei $c_a(\delta) = a$ für $\delta < \kappa$.

(2) E ist stark fundiert

Beweis: „Stark“ klar, denn für $f \in M$

$$\{[g] \mid [g]E[f]\} = \{[h] \mid \forall_{\delta<\kappa} h(\delta) \in f(\delta) \text{ oder } h(\delta) = 0\} \in V$$

zu fundiert: Annahme: $[f_{n+1}E[f_n]$ für alle n. Wähle τ regulär mit $\{f_n \mid n < \omega\} \subseteq L_\tau$. Nach Löwenheim-Skolem existiert $X \preceq L_\tau$ mit $\kappa \cup \{f_n \mid n < \omega\} \subseteq X$ und $|X| = |\kappa|$. Sei $\pi\colon X \tilde{\to} L_\eta$ nach Kondensationslemma. Also $|\eta| = |\kappa|$ und daher $\eta < \alpha$, da α Kardinalzahl in V. Setze $g_n = \pi(f_n)$. Wegen $\pi \restriction \kappa = id \restriction \kappa$, also $\pi(\kappa) = \kappa$, gilt $\pi(\{\delta < \kappa \mid f_{n+1}(\delta) < f_n(\delta)\}) = \{\delta < \kappa \mid g_{n+1}(\delta) < g_n(\delta)\}$. Also $[g_{n+1}]E[g_n]$. Also $g_n \in L_\eta \subseteq L_\alpha$. Setze nun $X_n = \{\delta < \kappa \mid g_{n+1}(\delta) < g_n(\delta)\}$. Somit $X_n \in U$. Also

$$\kappa \in j(X_n) = j(\{\delta < \kappa \mid g_{n+1}(\delta) < g_n(\delta)\}) = \{\delta < j(\kappa) \mid j(g_{n+1}(\delta) < j(g_n)(\delta)\}$$

d.h. $\forall_n j(g_{n+1})(\kappa) < j(g_n)(\kappa)$. Wid. zu $<$ Wohlordnung.

Sei also $k\colon \langle M, E\rangle \tilde{\to} \langle L, \in\rangle$ die Transitivierung von $\langle M, E\rangle$ (beachte: $\langle M, E\rangle \models$ ZF + V=L) Definiere nun $j^*\colon L \to L$ durch $j^*(x) = k(\overline{j}(x)) = k([c_k])$ Dann ist j^* elementar. Es gilt dann

(3) (a) $j^* \restriction \kappa = id \restriction \kappa$, $j^*(\kappa) > \kappa$

(b) Setze $C = \{\tau > \kappa \mid j^{*\prime\prime}\tau \subseteq \tau\}$ Ist $\tau \in C$ und $\mathrm{cf}(\tau) > \kappa$, so $j^*(\tau) = \tau$

Beweis: Zu (a). Wegen (i)-(iv) genau wie in §1, Satz 6 (4)→(5). Zu (b): Sei $k([f]) < k([c_\tau]) = j^*(\tau)$. z.Z. es existiert $\eta < \tau$ mit $k([f]) < k([c_\eta])$. Nun ist o.E. $\forall \delta < \tau$ mit $f''\kappa \subseteq \eta$, also $[f]E[c_\eta]$, d.h. $k([f]) < k([c_\eta])$. Also $j^*(\tau) \leq \tau$ und somit $=$. 06.12.2012

Nun ist C abg. unb. in On. Definiere rekursiv X_β durch

$$\begin{aligned} X_0 &= \{\tau \in C \mid \mathrm{cf}(\tau) > \kappa\} \\ X_{\beta+1} &= \{\tau \in X_\beta \mid |X_\beta \cap \tau| = \tau\} \\ X_\lambda &= \textstyle\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \text{ , falls } \lim(\alpha) \end{aligned}$$

Beweis: (a) wegen (3)(b). Zu (b): Zeige durch Induktion über β

(I) X_β unbeschränkt in On

(II) τ Limespunkt von X_β und $\mathrm{cf}(\tau) > \kappa \to \tau \in X_\beta$

Beweis: $\beta = 0$: (I) klar, da C abg. unb. in On. (II) folgt aus (3)(b).

$\beta = \gamma + 1$: Setze $Z = \{\tau \mid |X_\gamma \cap \tau| = \tau\}$ Dann ist Z abg. unb. in On, da X_γ unb. in On. Sei $\delta \in$ On. Wähle $\tau \in Z$, $\tau > \delta$ mit $\mathrm{cf}(\tau) > \kappa$. Dann nach Ind. vor. (II) $\tau \in X_\gamma$. Also $\tau \in X_\beta$. zu (II): Sei τ Limespunkt von X_β mit $\mathrm{cf}(z) > \kappa$. Dann natürlich $|X_\gamma \cap \tau| = \tau$. Also nach Ind. vor. ist auch $\tau \in X_\gamma$. Also $\tau \in X_\beta$.

lim(λ): Zu (I): Sei X^*_α = Klasse aller Limespunkte von X_α. X_α ist abg. unb. in On. Setze $\tilde{X} = \bigcap_{\alpha<\lambda} X^*_\alpha$. Dann ist auch $\tilde{X}$ abg. unb. in On. Sei $\delta \in$ On. Wähle $\tau \in \tilde{X}$ mit $\mathrm{cf}(\tau) > \kappa$ und $\tau > \delta$. Dann ist für alle $\alpha < \lambda$ τ Limespunkt von X_α. Also nach Ind. vor. $\tau \in X_\alpha$. Zu (II): Sei τ Limespunkt von X_λ mit $\mathrm{cf}(\tau) > \kappa$. Dann ist $\forall_{\alpha<\lambda}\tau$ Limespunkt von X_α. Also nach Ind. vor. $\tau \in \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha = X_\lambda$.

Wähle $\rho \in X_{\omega_1}$. Also ρ Kardinalzahl. Für $\alpha < \omega_1$ setze $Y_\alpha = X_\alpha \cap \rho$. Weiterhin sei $\tilde{j} = j^* \restriction L_\rho$. Dann $\tilde{j}\colon L_\rho \to L_\rho$ elementare Einbettung (da $j^*(L_\rho) = L_\rho$). Weiterhin ist $|Y_\alpha| = \rho$. Für $\nu < \omega_1$ setze $M_\nu = \mathrm{Hull}_{L_\rho}(\kappa \cup Y_\nu)$. Also $M_\nu \supseteq M_\tau$ für $\nu < \tau$. Sei nach Kondensationslemma $\pi_\nu\colon L_\rho \xrightarrow{\sim} M_\nu$. (beachte, dass $|M_\nu| = \rho$) Setze $\kappa_\nu = \pi_\nu(\kappa)$ und $\kappa^* = \sup_{\nu<\omega_1} \kappa_\lambda$. Ziel: $\{\kappa_\nu \mid \nu < \omega_1\}$ ist gut für L_{κ^*} mit Ordnungstyp ω_1.

(5) (a) $\pi_\nu \restriction \kappa = id \restriction \kappa$, $\kappa < \kappa_\nu$

(b) $\pi_\nu \restriction M_\tau = id \restriction M_\tau$, für $\nu < \tau$

(c) $\kappa_\nu < \kappa_\tau$, für $\nu < \tau$

Beweis: Zu (a): Wegen $\kappa \cup Y_\nu \subseteq \{\alpha \mid \tilde{j}(\alpha) = \alpha\}$ gilt $M_\nu \subseteq \mathrm{rng}(\tilde{j}\}$, also $\kappa \notin M_\nu$, d.h. $\kappa < \kappa_\nu$.

Zu (b): Es genügt z.z. $\pi_\nu \restriction Y_\tau = id \restriction Y_\tau$ für $\nu < \tau$. Dies ist klar nach Def. von Y_τ und Eigenschaften der Transitivierung.

Zu (c): Offenbar $\kappa_\nu \subseteq \kappa_\tau$, da $M_\nu \supseteq M_\tau$. Also nach (b) $\pi_\nu(\kappa_\tau = \kappa_\tau$. Also $\kappa_\nu \neq \kappa_\tau$, da offenbar $\pi_\nu(\kappa_\nu) = \kappa_\nu$.

Für $\nu < \tau < \omega_1$ setze nun: $M_{\nu\tau} = \mathrm{Hull}_{L_\rho}(\kappa_\nu \cap Y_\tau)$. Sei $\pi_{\nu\tau}\colon L_\rho \xrightarrow{\sim} M_{\nu\tau}$ nach Kondensatioslemma.

(6) (a) $\pi_{\nu\tau} \restriction \kappa_\nu = id \restriction \kappa_\nu$

(b) $\pi_{\nu\tau} \restriction M_\rho = id \restriction M_\rho$ für $\rho > \tau$

(c) $\pi_{\nu\tau}(\kappa_\nu = \kappa_\nu$

Beweis: (a) ist klar. (b) genau wie (5)(b). Zu (c): Z.Z. $[\kappa_\nu, \kappa_\tau) \cap M_{\nu\tau} = \emptyset$. Ann.: nicht. Dann $L_\rho \models \exists_{\vec{\alpha}<\kappa_\nu} \kappa_\nu \leq t(\vec{\alpha}, \vec{\eta}) < \kappa_\tau$ mit $\vec{\eta} \in Y_\tau$. Durch Anwendung von π_λ^{-1} also $L_\rho \models \exists_{\vec{\alpha}<\kappa} \kappa \leq t(\vec{\alpha}, \vec{\eta}) < \kappa_\tau$ Wid. zu $\pi_\tau(\kappa) = \kappa_\tau$ und $t(\vec{\alpha}, \vec{\eta}) \in M_\tau$.

Wir zeigen schließlich

(7) $\langle \kappa_\nu \mid \nu < \omega_1 \rangle$ ist Folge von guten Indisvernibles für L_{κ^*}.

Beweis: Zu (G1) gilt $L_{\kappa_0} \prec L_{\kappa_1} \prec L_{\kappa_2} \prec \ldots$ also nach Tarski $L_{\kappa_\nu} \prec L_{\kappa^*}$. Zu (G2): Genügt z.Z.: Sei $\nu_0 < \ldots < \nu_n < \tau_0 < \ldots < \tau_n < \omega_1$ und $\vec{\alpha} < \nu_0$. Dann

$$L_{\kappa^*} \models \varphi(\vec{\alpha}, \kappa_{\nu_0}, \ldots, \kappa_{\nu_n}) \text{ gdw } L_{\kappa^*} \models \varphi(\vec{\alpha}, \kappa_{\tau_0}, \ldots, \kappa_{\tau_n})$$

Setze hierzu $\pi = \pi_{\nu_0\tau_0} \circ \pi_{\nu_1\tau_1} \circ \ldots \circ \pi_{\nu_n\tau_n}$. Sei $\tau_n < \eta < \omega_1$. Dann $L_{\kappa^*} \models \varphi(\vec{\alpha}, \kappa_{\nu_0}, \ldots, \kappa_{\nu_n})$ gdw $L_{\kappa_\eta} \models \varphi(\vec{\alpha}, \kappa_{\nu_0}, \ldots, \kappa_{\nu_n})$ gdw $L_{\kappa_\eta} \models \varphi(\pi(\vec{\alpha}), \pi(\kappa_{\nu_0}), \ldots, \pi(\kappa_{\nu_n}))$ gdw $L_{\kappa^*} \models \varphi(\pi(\vec{\alpha}), \pi(\kappa_{\nu_0}), \ldots, \pi(\kappa_{\nu_n}))$ Also genügt es z.z. $\pi(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$, $\pi(\kappa_{\nu_i}) = \kappa_{\tau_i}$. $\pi(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$ ist klar nach (6)(a). $\pi(\kappa_{\nu_i} = \kappa_{\tau_i}$ folgt aus (6)(a)(b). 11.12.2012

Ohne Beweis:

Überdeckungssatz von Jensen: $O^\sharp$ existiere nicht. Sei $X \subseteq \mathrm{On}$ überabzählbar. Dann existiert $Y \in L$ mit $X \subseteq Y$ und $|X| = |Y|$.

Folgerungen: $O^\sharp$ existiere nicht. Sei κ eine singuläre Kardinalzahl.

(a) κ ist singulär in L und $(\kappa^+)^L = \kappa^+$

(b) Gilt $2^{<\kappa} = \kappa$, so $2^\kappa = \kappa^+$

Beweis:

(a) Sei $X \subseteq \kappa$ konfinal mit $|X| < \kappa$. Dann existiert $Y \in L$ mit $X \subseteq Y$ und $|Y| < \kappa$. Also $Y \cap \kappa$ konfinal in κ, das heißt κ singulär in L, da $\mathrm{otp}(Y \cap \kappa) < \kappa$. Zum zweiten Teil: Angenommen $(\kappa^+)^L < \kappa^+$. Dann $\mathrm{cf}((\kappa^+)^L) < \kappa$. Folgt wieder $\mathrm{cf}^L((\kappa^+)^L < \kappa$. Widerspruch.

(b) Sei $2^\kappa = \kappa$. Um $2^\kappa = \kappa^+$ zu zeigen, genügt dann $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^+$. Aber $\{X \subseteq \kappa \mid |X| = \mathrm{cf}(\kappa)\} \subseteq \bigcup\{\mathfrak{P}(Y) \mid Y \in L, Y \subseteq \kappa, |Y| < \kappa\}$. Also folgt die Behauptung.

□

3 Messbare Kardinalzahlen

Definition: κ ist messbar $:\Leftrightarrow \kappa > \omega$ und es existiert ein nichttrivialer κ-vollständiger Ultrafilter auf κ.

Bemerkung: κ messbar $\Rightarrow$ κ schwach kompakt.

Satz 1: Sei $S = \{\tau \mid \text{existiert } \omega_1\text{-vollständiger nichttrivialer Ultrafilter auf } \tau\}$. Sei $S \neq \emptyset$ und $\kappa = \min S$. Dann ist κ messbar.

Beweis: Sei U nichttrivialer ω_1-vollständiger Ultrafilter auf κ. Wir zeigen: U ist κ-vollständig. Angenommen nicht. Sei also $\tau < \kappa$ und $\langle X_\alpha \mid \alpha < \tau\rangle$, $X_\alpha \in U$, mit $X = \bigcap\limits_{\alpha<\tau} X_\alpha \notin U$. Definiere dann $f : \kappa \to \tau$ durch

$$f(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma \in X \\ \min\{\alpha < \tau \mid \gamma \notin X_\alpha\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere $D \subseteq \mathfrak{P}(\tau)$ durch (für $Y \subseteq \tau$) $Y \in D \Leftrightarrow (f^{-1})''Y \in U$. Offenbar ist D Ultrafilter auf τ.

(1) D ist ω_1-vollständig.

Beweis: Falls $\langle Y_i \mid i < \omega\rangle$ aus D, so $(f^{-1})'' \bigcap\limits_{i<\omega} Y_i = \bigcap\limits_{i<\omega} \underbrace{(f^{-1})''Y_i}_{\in U} \in D$.

(2) D ist nichttrivial (d.h. $\forall_{\alpha<\tau}\{\alpha\} \notin D$).

Beweis: Sei $\alpha < \tau$. Zu zeigen $(f^{-1})''\{\alpha\} \notin U$. $(f^{-1})''\{\alpha\} \subseteq \underbrace{X}_{\notin U} \cup \underbrace{(\kappa \setminus X_\alpha)}_{\notin U}$. Also $(f^{-1})''\{\alpha\} \notin U$.

Wegen (1) und (2) ist $\tau \in S$. Widerspruch zu $\tau < \kappa = \min S$. □

Satz 2: Es sind äquivalent

(1) κ ist messbar

(2) es existiert elementare Einbettung $j : V \to M$ mit M transitiv, $j \restriction \kappa = \mathrm{id} \restriction \kappa$, $j(\kappa) > \kappa$ (d.h. $\kappa = \mathrm{cp}(j)$[siehe 8]).

Beweis:

- (1)⇒(2): analog zum Beweis von (4)⇒(5) von Satz 14 aus §1. Sei U nichttrivialer κ-vollständiger Ultrafilter auf κ. Sei $\langle N, E\rangle$ die Ultrapotenz von V mit U. Dabei modifizierte Äquivalenzklasse

$$[f] = \{g \sim f \mid \text{für alle } h \sim f \text{ gilt } \mathrm{rn}(g) \subseteq \mathrm{rn}(h)\}$$

  E ist stark fundiert. Also $\langle N, E\rangle \overset{\cong}{\pi} \langle M, \in\rangle$ mit M transitiv. $j(x) = \pi([c_x])$. Wegen κ-Vollständigkeit und Nichttrivialität ist $\kappa = \mathrm{cp}(j)$.

- (2)⇒(1): Sei j wie in (2). Definiere $U = U_j$ auf κ durch: $X \in U :\Leftrightarrow \kappa \in j(X)$. U ist κ-vollständiger nichttrivialer Ultrafilter auf κ.

□

Definition: Sei U Ultrafilter auf κ. U ist normal ⇔ für alle $\gamma < \kappa$ ist $\kappa \setminus \gamma \in U$ und für alle regressiven $f : \kappa \to \kappa$ existiert $X \in U$ mit $f \restriction X$ konstant.

Bemerkung:

(1) genügt $f \restriction Z$ regressiv für ein $Z \in U$.

(2) U normal *Rightarrow* U κ-vollständig.

Beweis: Sei $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ aus U mit $\gamma < \kappa$. $X = \bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha$. Annahme $\kappa \setminus X \in U$. Definiere $f : \kappa \setminus X \to \kappa$ durch $f(\delta) = \min\{\alpha \mid \delta \notin X_\alpha\}$. Ist regressiv modulo U, aber nicht konstant auf Menge in U.

(3) Sei U normal auf κ, $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ aus U. Dann ist $X = \underset{\alpha<\kappa}{\Delta} X_\alpha = \{\alpha \mid \forall_{\gamma<\alpha} \alpha \in X_\gamma\} \in U$ (Übung).

(4) Falls U normal auf κ, so $U \supseteq \{C \subseteq \kappa \mid C \text{ abgeschlossen unbeschränkt in } \kappa\}$.

Beweis: Falls C abgeschlossen unbeschränkt in κ, so $f(\gamma) = \sup(C \cap \gamma)$ regressiv auf $\kappa \setminus C$ und nicht einmal konstant auf einer unbeschränkten Teilmenge von κ.

[siehe 8] cp = kritischer punkt

Satz 3: Sei κ messbar. Dann existiert ein normaler Ultrafilter auf κ.

Beweis: Sei $j : V \to M$ elementar mit M transitiv und $\kappa = \mathrm{cp}(j)$. Sei wieder $U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$. U ist normal, denn: Für $\gamma < \kappa$ ist $\kappa \backslash \gamma \in U$, da $j(\kappa \backslash \gamma) = j(\kappa) \backslash j(\gamma) = j(\kappa) \backslash \gamma$, also $\kappa \in j(\kappa) \backslash \gamma$, da $\gamma < \kappa < j(\kappa)$. Sei $f : \kappa \to \kappa$ regressiv. Dann auch $j(f) : j(\kappa) \to j(\kappa)$ regressiv. Setze $\alpha = j(f)(\kappa)$. Also $\alpha < \kappa$. Dann aber nach Definition von α ist $\kappa \in \{\gamma < j(\kappa) \mid j(\kappa)(\gamma) = \alpha\} = j(\{\gamma < \kappa \mid f(\gamma) = \alpha\})$. Also $\{\gamma < \kappa \mid f(\gamma) = \alpha\} \in U$. $\square$ 13.12.2012

Satz 4: Sei U normaler Ultrafilter auf κ. Sei $f \colon [X]^{<\omega} \to \kappa$ regressiv mit $X \in U$. Dann existiert $Z \in U$ mit Z homogen für f.

Beweis: Zeige durch Induktion über $n \geq 1$

(*) Falls $g \colon [Y]^n \to \kappa$ regressiv mit $Y \in U$, so existiert $Z \in U$ mit Z homogen für g.

Dies genügt. Denn wähle dann $Z_n \in U$ mit Z_n homogen für $f \restriction [X]^n$. Dann ist $Z = \bigcap_{n \in \omega} Z_n$ homogen für f.

Zu (*): $n = 1$: nach Definition von normal.

$n \to n+1$: Sei $g \colon [Y]^{n+1} \to \kappa$ regressiv. Definiere für $\alpha < \kappa$ $g_\alpha \colon [Y - (\alpha+1)]^n \to \kappa$ durch $g_\alpha(\{\vec{\gamma}\}) = g(\{\alpha, \vec{\gamma}\})$. Dann ist g_α regressiv. Nach Ind.-vor. existiert $Z_\alpha \in U$ mit Z_α homogen für g_α. Sei $h \colon \kappa \to \kappa$ so definiert, dass $g''_\alpha[Z_\alpha]^n = \{h(\alpha)\}$. h ist regressiv. Also nach Normalität existiert $\xi < \kappa$ und $\overline{Z} \in U$ mit $h''\overline{Z} = \{\xi\}$. Setze nun $Z = \overline{Z} \cap \Delta_{\alpha<\kappa} Z_\alpha \in U$. Z ist homogen für g, denn für $\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in Z$ ist $g(\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}) = g_{\gamma_0}(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) = h(\gamma_0) = \xi$ (da $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in Z_{\gamma_0}$ und $\gamma_0 \in \overline{Z}$).

Korollar:

(a) κ messbar $\to$ κ Ramsey

(b) κ messbar $\to$ $\exists_{\tau<\kappa} \tau$ Ramsey

Beweis: (a) ist klar. zu (b): Sei $j \colon V \to M$ elementar mit M transitiv und $\kappa = \mathrm{cp}(j)$. Dann $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq M$, da für $A \subseteq \kappa$ $A = j(A) \cap \kappa \in M$. Also nach (a) $M \models \kappa$ ist Ramsey, d.h. $M \models \exists_{\tau < j(\kappa)} \tau$ ist Ramsey. Somit folgt Beh.

Satz 5: Sei κ messbar. Es gelte $\forall_{\omega \leq \tau < \kappa} 2^\tau = \tau^+$. Dann gilt $2^\kappa = \kappa^+$.

Beweis: Sei $j \colon V \to M$ wie immer. Nach Vor. $M \models \forall_{\omega \leq \tau < j(\kappa)} 2^\tau = \tau^+$. Also insbesondere $M \models 2^\kappa = \kappa^+$. Aber $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq M$. Also $2^\kappa = \kappa^+$.

Ziel: Sei κ messbar. Sei weiterhin U irgendein normaler Ultrafilter auf κ. Dann ist $L[U]$ das kleinste innere Modell in dem κ messbar ist.

Methode: *Iterierte Ultrapotentzen*

Bem: Sei U normaler Ultrafilter auf κ. Setze $\overline{U} = U \cap L[U]$. Dann gilt $L[U] = L[\overline{U}]$ und $L[U] \models \overline{U}$ ist normaler Ultrafilter auf κ. Insbesondere ist κ messbar in $L[U]$.

Direkter Limes Sei λ eine Limesordinalzahl. Sei der Einfachheit halber sei $M = \langle\langle M_j \mid i < \lambda\rangle, \langle \pi_{ij} \mid i \leq j < \lambda\rangle\rangle$ ein kommutatives System mit

(a) M_i ist transitiv

(b) $\pi_{ij}\colon M_i \to M_j$ elementar

(c) $\pi_{ij} = id \restriction M_i$

$$i \leq j \leq k < \lambda \to \pi_{ik} = \pi_{jk} \circ \pi_{ij}$$

Eine Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, E\rangle$ mit Abbildung $\pi_i\colon M_i \to M$ ist ein direkter Limes von M, wenn gilt:

(D1) $\forall_{x,y\in M}(x \in y \leftrightarrow \pi_i(x)E\pi_i(y))$

(D2) $i \leq j < \lambda \to \pi_i = \pi_j \circ \pi_{ij}$

(D3) $M = \bigcup_{i<\lambda} \operatorname{rng}(\pi_i)$

Genau wie beim Lemma von Tarski folgt dann:

$$\pi_i\colon M_i \to \langle M, E\rangle \text{ist elementar}$$

Sind $\mathfrak{M}, \pi_i$ und $\mathfrak{M}', \pi_i'$ direkte Limites von M, so existiert Isomorphismus $\delta\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ mit $\forall_i \delta \circ \pi_i = \pi_i'$

Beweis: Setze $\delta(\pi_i(x)) = \pi_i'(x)$

Existenz: Für $x \in M_i$ setze $b_i(x) = \langle \pi_{ij}(x) \mid i \leq j < \lambda\rangle$ Setze $M = \{b_i(x) \mid \forall_{k<i} x \notin \operatorname{rng}(\pi_{ki})\}$. ($M$ ist die Klasse der maximalen Fäden) Definiere E auf M durch $b_i(x)Eb_j(y)$ gdw $b_i(x)(k) \in b_i(y)(k)$ mit $k = \max\{i, j\}$. Definiere $\pi_i\colon M_i \to M$ durch $\pi_i(x) =$ der maximale Faden b mit $b_i(x)$ Endstück von b. Dies tut's.

$\mathfrak{M}$ ist im allgemeinen nicht fundiert.

Beispiel: Sei hierzu $j\colon L \to L$ elementar mit $j \neq id$. $L \xrightarrow{j} L \xrightarrow{j} L \xrightarrow{j} L \xrightarrow{j} L \xrightarrow{j} \ldots$

Ist aber $\mathfrak{M}$ (stark) fundiert, so auch extensional. Dann ist auch die Transitivierung von $\mathfrak{M}$ ein direkter Limes von $\mathfrak{M}$ und natürlich eindeutig bestimmt. Also ist dies dann *der* transitive Limes von $\langle M_i, \pi_{ij}\rangle$. 18.12.2012

Sei nun M ein inneres Modell und $U \in M$ mit $M \models U$ normaler Ultrafilter auf κ. Weiterhin sei $\alpha \in \mathrm{On}$ oder $\alpha = \mathrm{On}$. Dann heißt $\langle\langle M_i, U_i, \kappa_i\rangle, \langle \pi_{ij} \mid i \leq j < \alpha\rangle\rangle$ die α-Iteration von M bezüglich U, wenn gilt:

(a) $\langle M_i, \langle \pi_{ij} \mid i \leq j < \alpha\rangle\rangle$ ist kommutatives System, M_i transitiv, d.h. $\pi_{ij}\colon M_i \to M_j$, $\pi_{ij} = \mathrm{id}$, $i \leq j \leq k \to \pi_{ik} = \pi_{jk} \circ \pi_{ij}$

(b) $M_0 = M$, $U_0 = U$, $\kappa_0 = \kappa$

(c) $U_i = \pi_{0i}(U)$, $\kappa_i = \pi_{0i}(\kappa)$

(d) $\pi_{i,i+1}\colon M_i \to M_{i+1}$ ist die Ultrapotenzabbildung von M_i bezüglich U_i

(e) Ist $\lim(\lambda)$, $\lambda < \alpha$, so ist $\langle M_\lambda, \langle \pi_{i\lambda} \mid i < \lambda\rangle\rangle$ der transitive direkte Limes von $\langle\langle M_i \mid i < \lambda\rangle, \langle \pi_{ij} \mid i \leq j < \lambda\rangle\rangle$

Bemerkung: Wenn die α-Iteration existiert, so ist sie eindeutig bestimmt durch M, U.

Bemerkung: Die Abbildungen π_{ij} sind alle elementar.

Bemerkung: Sei $\langle\langle M_i, U_i, \kappa_i\rangle, \langle\pi_{ij} \mid i \leq j < \alpha\rangle$ die α-Iteration von M bezüglich U. Sei $\beta < \alpha$ und $\gamma = \alpha - \beta$. Dann ist $\langle\langle M_{\beta+i}, U_{\beta+i}, \kappa_{\beta+i}\rangle, \langle\pi_{\beta+i,\beta+j} \mid i \leq j < \gamma\rangle\rangle$ die α-Iteration von M_β und U_β.

Satz 6: Sei M ein inneres Modell und $M \models U$ normaler Ultrafilter auf κ. Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. Dann existiert die α-Iteration von M bezüglich U.

Beweis: Arbeite in M. Annahme: Beh. falsch. Sei α das kleinste Gegenbeispiel. Folgt unmittelbar, dass $\alpha = \lambda + 1$ mit $\lim(\lambda)$ und für die λ-Iteration $\langle\langle M_i, U_i, \kappa_i\rangle, \langle\pi_{ij} \mid i \leq j < \kappa\rangle\rangle$ gilt: Sei $\langle\mathfrak{N} = \langle N, E\rangle, \langle\pi_i \mid i < \lambda\rangle\rangle$ ein direkter Limes hiervon. Dann ist E nicht fundiert. Also sind die Ordinalzahlen von $\mathfrak{N}$ nicht fundiert. Sei ξ minimal mit: die Ordinalzahlen von $\mathfrak{N}$ sind unterhalb von $\pi_0(\xi)$ nicht fundiert. (Beachte, dass $\pi_0\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}^{\mathfrak{N}}$ konfinal ist.) Sei $x_{n+1} E x_n E \pi_0(\xi)$ $(n \in \omega)$ absteigende Folge in $\mathrm{On}^{\mathfrak{N}}$. Wähle $\beta < \lambda$ mit $x_0 = \pi_\beta(\eta)$. Dann gilt $\eta < \pi_{0\beta}(\xi)$, denn: $\pi_\beta(\eta) = x_0 E \pi_0(\xi) = \pi_\beta(\pi_{0\beta}(\xi))$. Also wegen $\pi_{0\beta}\colon M \to M_\beta$ elementar und $\pi_{0\beta}(\lambda) \geq \lambda$ gilt: Für $\gamma = \lambda - \beta$: Die γ-Iteration von M_β bezüglich U_β existiert und für ihren direkten Limes $\mathfrak{N}' = \langle N', E'\rangle$, ρ_i gilt: $\mathfrak{N}'$ ist fundiert unterhalb von $\rho_\gamma(\eta)$. Dies liefert Widerspruch zu obiger Bem., da bis auf Isomorphie $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ und $\rho_0(\eta) = \pi_\beta$. Dies ist Widerspruch, da $x_{n+2} E x_{n+1}$ für alle $n \in \omega$.

Folgerung: Vor. wie in Satz 6 Dann existiert die On-Iteration von M bezüglich U.

Bemerkung: Sei U normaler Ultrafilter auf κ und $j\colon V \to M$ die Ultrapotenz. Dann gilt für $X \subseteq \kappa$:

$$X \in U \text{ gdw } \kappa \in j(X)$$

Beweis: Sei $d = \mathrm{id} \upharpoonright \kappa$. Wegen U normal gilt "$[d] = \kappa$". Also $\kappa \in j(X)$ gdw $[d] E [c_X]$ gdw $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in X\} = X \in U$.

Lemma 7: Sei $\langle\langle M_i, U_i, \kappa_i\rangle, \langle\pi_{ij} \mid i \leq j \in \mathrm{On}\rangle\rangle$ die On-Iteration von M bezüglich U (Wobei $M \models U$ normaler Ultrafilter auf κ). Dann gilt:

(a) $\pi_{ij} \upharpoonright \kappa_i = \mathrm{id} \upharpoonright \kappa_i$, $\pi_{ij}(\kappa_i) = \kappa_j$

(b) $\langle\kappa_i \mid i \in \mathrm{On}\rangle$ ist normal, d.h. streng monoton wachsend und stetig

(c) Sei $\lim(\lambda)$. Dann gilt für $X \in \mathcal{P}(\kappa_\lambda) \cap M_\lambda$: $X \in U_\lambda$ gdw $\exists_{i<\lambda}\{\kappa_j \mid i \leq j < \lambda\} \supseteq X$

Beweis: Zu (a): 2. Teil: Sei $i \leq j$ $\pi_{ij}(\pi_{0i}(\kappa_0) = \pi_{0j}(\kappa_0) = \kappa_j$. Also ist insbesondere $\langle\kappa_i \mid i \in \mathrm{On}\rangle$ schwach monoton.

1. Teil: Induktion über j. Nachfolgerschritt klar, da $\pi_{j,j+1} \upharpoonright \kappa_j = \mathrm{id} \upharpoonright \kappa_j$ und $\kappa_j \geq \kappa_i$ Limesschritt: da für $\lim(j)$ $\langle\kappa_j, \pi_{ij} \upharpoonright \kappa_i\rangle$ ist direkter Limes von $\langle\langle\kappa_k \mid i \leq k < j\rangle, \langle\pi_{kl} \upharpoonright \kappa_k \mid i \leq k \leq l < j\rangle\rangle$.

Zu (b): aus (a) folgt $i \leq j \to \kappa_i \leq \kappa_j$, außerdem $\kappa_i < \kappa_{i+1}$, da $\pi_{i,i+1}$ die Ultrapotenz ist. Also um z.z. für $\lim(j)$ $\kappa_j \leq \sup\{\kappa_i \mid i < j\}$. Hierzu: $\xi < \kappa_j \to \exists_\eta \exists_{i<j} \xi = \pi_{ij}(\eta)$. Nach (a) dann $\eta < \kappa_i$. Also auch $\xi = \eta < \kappa_i$.

Zu (c): Wegen U_λ Ultrafilter in M_λ genügt es ''$\rightarrow$'' zu Zeigen. Sei also $X \in U_\lambda$. Dann $\exists_{i<\lambda} X = \pi_{i\lambda}(X_i)$. Also $X_i \in U_i$, da $\pi_{i\lambda}(U_i) = U_\lambda$. Für $i \leq j < \lambda$ setze $X_j = \pi_{ij}(X_i)$. Also $X_j \in U_j$. Somit nach Bem. $\kappa_j \in \pi_{j,j+1}(X_j) = X_{j+1}$. Also nach (a) $\kappa_j \in \pi_{j+1,\lambda}(X_{j+1}) = X$. 20.12.2012

Definition: Sei $\mathrm{cf}(\theta) > \omega$. Setze $\mathcal{F}_\theta = \{A \subseteq \theta \mid$ es existiert abg. unb. $C \subseteq \theta$ mit $C \subseteq A\}$. $\mathcal{F}_\theta$ ist also Filter auf θ.

Lemma 8: Vor. wie in Lemma 7. Sei $\mathrm{cf}(i) > \omega$. Setze $\theta = \kappa_i$. Dann gilt: $U_i = \mathcal{F}_\theta \cap M_i$.

Beweis: Wegen U_i Ultrafilter in M_i genügt es ''$\subseteq$'' zu Zeigen. Sei also $X \in U_i$. Nach 7(c) existiert dann $j < i$ mit $C := \{\kappa_k \mid j \leq k < i\} \subseteq X$. Also nach 7(b) ist C abg. unb. in $\kappa_i = \theta$. Also $X \in \mathcal{F}_\theta$.

Lemma 9: Vor. wie in Lemma 7. Setze $C_i := \{\lambda \in \mathrm{Card} \mid \pi''_{0i}\lambda \subseteq \lambda\}$. Also ist C abg. unb. in On. Dann existiert τ_i mit: Falls λ Limespunkt von C_i mit $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \tau_i$, so ist $\pi_{0i}(\lambda) = \lambda$.

Beweis: Durch Induktion über i. Nachfolgerschritt: da $\pi_{i,i+1}$ Ultrapotenz völlig analog zum Beweis von 3(b) aus Satz 15, §2.

Limesschritt: Sei $\tau_i = \max\{|i|^+, \sup\{\tau_j \mid j < i\}\}$. Sei λ Limespunkt von C_i mit $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \tau_i$. Es genügt z.Z.: Es ist $|\xi| < \lambda$ für alle $\xi < \pi_{0i}(\lambda)$. Sei also $\xi < \pi_{0i}(\lambda)$. Dann existiert jyi und $\xi_j < \lambda$ mit $\xi = \pi_{ji}(\xi_j)$. Für $j \leq k < i$ setze $\xi_k = \pi_{jk}(\xi_j)$. Also ist $\xi_k < \lambda$, da $\pi''_{jk}\lambda \subseteq \lambda$. Nun ist aber wegen direkter Limes $\xi \subseteq \bigcup_{j \leq k < i} \pi''_{ki}\xi_k$. Somit $|\xi| \leq |i| \cdot \underbrace{\sup\{|\xi_k| \mid j \leq k < i\}}_{<\lambda,\ \text{da}\, \mathrm{cf}(\tau) > |i|} < \lambda$.

Lemma 10: Sei $V = L[A]$ mit $A \subseteq \mathfrak{P}(\kappa)$, $\kappa \geq \omega$. Dann gilt $\mathfrak{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}[A]$.

Beweis: Sei $X \subseteq \kappa$. Zu zeigen $X \in L_{\kappa^+}[A]$. Wähle $\theta > \kappa$ regulär mit $X \in L_\theta[A]$. Sei $N \prec L_\theta[A]$ mit $\kappa + 1) \cup \{X\} \subseteq N$ und $|N| = k$. Sei nach (relativiertem) Kondensationslemma $\pi : N \xrightarrow{\sim} L_\gamma[\overline{A}]$, wobei $\overline{A} = \pi''(A \cap N)$. Wegen $\pi \restriction \mathfrak{P}(\kappa) \cap N = \mathrm{id} \restriction \mathfrak{P}(\kappa) \cap N$ folgt aber $\overline{A} = A \cap N = A \cap L_\gamma[\overline{A}]$. Also ist $X = \pi(X) \in L_\gamma[\overline{A}] = L_\gamma[A \cap L_\gamma[A]] \stackrel{!}{=} L_\gamma[A]$ und $\gamma < \kappa^+$. □

Lemma 11: Sei $\lambda > \kappa > \omega$ Kardinalzahl und sei $B \subseteq \lambda$ mit $|B| \geq \kappa^+$. Sei $A \subseteq \mathfrak{P}(\kappa)$ mit $A \in L[A]$. Setze $N = \mathrm{Hull}_{L_\lambda[A]}((\kappa + 1) \cap B)$. Dann gilt $\mathfrak{P}(\kappa) \cap L[A] \subseteq N$.

Beweis: Sei nach Kondensationslemma $\pi : N \xrightarrow{\sim} L_\gamma[\overline{A}]$. Wie oben folgt, dass $\overline{A} = A \cap L_\gamma[\overline{A}]$, also $L_\gamma[\cap A]) = L_\gamma[A]$. Aber $\gamma \geq \kappa^+$. Also nach obigem Lemma $\mathfrak{P}(\kappa) \cap L[A] \subseteq L_\gamma[A]$. Aber $\mathfrak{P}(\kappa) \cap L_\gamma[A] = N \cap \mathfrak{P}(\kappa)$. □

Satz 12: Sei $\kappa \in \mathrm{On}$. Seien $M = L[U]$ mit $M \models U$ normaler Ultrafilter auf κ und $\overline{M} = L[\overline{U}]$ mit $\overline{M} \models \overline{U}$ normaler Ultrafilter auf κ. Dann gilt $U = \overline{U}$ (also $M = \overline{M}$).

Beweis: Seien $\langle \langle M_i, U_i, \kappa_i \rangle, \langle \pi_{ij} \rangle \rangle$ die On-Iteration von M und $\left\langle \left\langle \overline{M_i}, \overline{U_i}, \overline{\kappa_i} \right\rangle, \langle \overline{\pi_{ij}} \rangle \right\rangle$ die On-Iteration von $\overline{M}$. Da nach Lemma 7 (b) $\langle \kappa_i \mid i \in \mathrm{On} \rangle$ und $\langle \overline{\kappa_i} \mid i \in \mathrm{On} \rangle$ normal sind, existiert $i \in \mathrm{On}$ mit $\mathrm{cf}(i) > \omega$ und $\kappa_i = \overline{\kappa_i} = i =: \theta$. Nach Lemma 8 gilt dann $U_i = \mathcal{F}_\theta \cap M_i$ und $\overline{U_i} = \mathcal{F}_\theta \cap \overline{M_i}$. Also $M_i = L[U_i] = L[\mathcal{F}_\theta] = L[\overline{U_i}] = \overline{M_i}$. Setze $\pi = \pi_{0i}$ und $\overline{\pi} = \overline{\pi_{0i}}$. Also

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\pi"] & \\ & L[\mathcal{F}_\theta] \\ \overline{M} \arrow[ur, "\overline{\pi}"] & \end{tikzcd}$$

08.01.2013

Setze $B = \{\delta \in \text{Card} \mid \pi(\delta) = \delta\}$ und $\overline{B} = \{\delta \in \text{Card} \mid \overline{\pi}(\delta) = \delta\}$. Setze $D = C \cap \lambda$. Nach Lemma 9 ist $C := B \cap \overline{B}$ unbeschränkt in On. Wähle $\lambda \in C$ mit $|C \cap \lambda| \geq \kappa^+$. Setze $\pi^* = \pi \upharpoonright L_\lambda[U]$ und $\overline{\pi}^* = \overline{\pi} \upharpoonright L_\lambda[\overline{U}]$. Also $\pi^* \colon L_\lambda[U] \to L_\lambda[\mathcal{F}_\theta$ und $\overline{\pi}^* \colon L_\lambda[\overline{U}] \to L_\lambda[\mathcal{F}_\theta]$ sind elementar. Wir zeigen nun die Behauptung. Aus Symmetrie genügt z.Z., dass $U \subseteq \overline{U}$. Sei also $X \in U$. Nach Lemma 11 gilt, da $X \subseteq \kappa$, $X \in \text{Hull}_{L_\lambda[U]}((\kappa + 1) \cup D)$, da $|D| \geq \kappa^+$. Also existiert Term t und $\vec{\lambda} < \kappa$, $\vec{\rho} \in D$ mit $X = t^{L_\lambda[U]}(\vec{\lambda}, \kappa, \vec{\rho})$. Dann aber $Z := \pi * (x) = t^{L_\lambda[\mathcal{F}_\theta]}(\vec{\lambda}, \theta, \vec{\rho})$, da $\pi * (\vec{\gamma}, \kappa, \vec{\rho}) = (\vec{\gamma}, \theta, \vec{\rho})$. Also auch $Z \in \text{rng}(\overline{\pi}^*)$, da $Z = \overline{\pi}^*(t^{L_\lambda[\overline{U}]}(\vec{\gamma}, \kappa, \vec{\rho})$. Also $\overline{\pi}^*(Z \cap \kappa) = Z$ und $Z \cap \kappa \in \overline{U}$, da $Z \in \mathcal{F}_\theta$. Aber $Z \cap \kappa = X$, da $\pi^*(X) = Z$.

Korollar: Sei κ meßbar in einem inneren Modell W. Sei $U \in W$ mit $W \models U$ normaler Ultrafilter auf κ. Dann ist $M = L[U]$ das kleinste innere Modell, in dem κ meßbar ist. Außerdem ist $U \cap M$ in M der einzige normale Ultrafilter auf κ.

Beweis: Sei $\overline{W}$ ein weiteres inneres Modell, in dem κ meßbar ist und sei $\overline{W} \models \overline{U}$ normaler Ultrafilter auf κ. Nach obigem Satz gilt dann $L[U] = L[\overline{U}]$, da $L[U] = L[U \cap L[U]]$ und $L[\overline{U}] = L[\overline{U} \cap L[\overline{U}]]$. Insbesondere also $L[U] = L[\overline{U}] \subseteq \overline{W}$. Ist $D \in M$ mit $M \models D$ normaler Ultrafilter auf κ, so nach Satz ist $D = U \cap M$.

Satz 13: Sei $I = \{\kappa \mid \kappa$ ist meßbar in einem inneren Modell $\}$ Sei $I \neq \emptyset$ und $\kappa = \min I$. Sei M das kleinste innere Modell, in dem κ messbar. Also $M = L[U]$ für ein $U \in M$ mit $L[U] \models U$ normaler Ultrafilter auf κ. Sei $\langle\langle M_i, U_i, \kappa_i\rangle, \pi_{ij}\rangle$ die On-Iteration von M bezüglich U. Dann gilt $I = \{\kappa_i \mid i \in \text{On}\}$.

Beweis: ''$\supseteq$'' klar. ''$\subseteq$'': Sei $\overline{\kappa} \in I$. Wegen $\langle \kappa_i \mid i \in \text{On}\rangle$ normal und $\overline{\kappa} \geq \kappa_0$ existiert dann $i \in \text{On}$ mit $\kappa_i \leq \overline{\kappa} < \kappa_{i+1}$. z.Z. $\kappa_i = \overline{\kappa}$. Annahme: $\kappa_i < \overline{\kappa}$. Sei $\overline{M} = L[\overline{U}]$ mit $\overline{M} \neq \overline{U}$ normaler Ultrafilter auf $\overline{\kappa}$. Sei wieder $\langle\langle \overline{M}_j, \overline{U}_j, \overline{\kappa}_j\rangle, \overline{\pi}_{jk}\rangle$ die On-Iteration von $\overline{M}$ bezüglich $\overline{U}$. Wir finden wieder $j \in \text{On}$ mit $\text{cf}(j) > \omega$ und $\kappa_j = \overline{\kappa}_j =: \theta$. Gilt wieder $M_j = L[\mathcal{F}_\theta] = \overline{M}_j$. Setze nun $\pi = \pi ij$ und $\overline{\pi} = \overline{\pi}_{0j}$. Existiert wieder unbeschränktes $C \subseteq \text{Card}$ mit $\pi \upharpoonright C = \text{id} \upharpoonright C = \overline{\pi} \upharpoonright C$. Wähle wieder $\lambda \in C$ mit $|C \cap \lambda| \geq \kappa_i^+$ und setze $D = C \cap \lambda$. Wir zeigen nun zuerst

(*) Sei $\sigma = \pi_{i,i+1}$. Dann existiert $f \mid \kappa_i \to \kappa_i$, $f \in M_i$, mit $\overline{\kappa} = \sigma(f)(\kappa_i)$.

Beweis von (*): σ ist die Ultrapotenz von M_i mit U_i. Wegen $\overline{\kappa} < \kappa_{i+1} = [c\kappa_i]$ ist $\overline{\kappa} = [f]$ für ein $f \colon \kappa_i \to \kappa_i$. Wegen U normal ist $[\text{id} \upharpoonright \kappa_i] = \kappa_i$. Also $[c_f]([\text{id} \upharpoonright \kappa_i]) = [f]$, da $\forall_{\alpha < \kappa_i} c_f(\alpha)(\alpha') = f(\alpha)$.

Setze wieder $\pi^* = \pi \upharpoonright L_\lambda[U]$, $\overline{\pi}^* = \overline{\pi} \upharpoonright L_\lambda[\overline{U}]$. Also $\pi^* \colon L_\lambda[U_i] \to L_\lambda[\mathcal{F}_\theta]$, $\overline{\pi}^* \colon L_\lambda[\overline{U}] \to L_\lambda[\mathcal{F}_\theta]$ sind elementar. Sei f wie in $(*)$. Existiert wieder $\vec{\eta} < \kappa$ und $\vec{\rho} \in D$ mit $f = t^{L_\lambda[U_i]}(\vec{\eta}, \kappa_i, \vec{\rho})$, da $f \subseteq \kappa_i \times \kappa_i$, also im wesentlichen "$f \in \mathcal{P}(\kappa_i)$". Nun ist aber $\pi^*(f) = \pi_{i+1,j}(\pi_{i,i+1}(f))$. Wegen $\pi_{i+1,j} \upharpoonright \kappa_{i+1} = \text{id} \upharpoonright \kappa_{i+1}$ ist also $\pi^*(f)(\kappa_i) = \overline{\kappa}$. Aber

$\pi^*(f) = t^{L_\lambda[\mathcal{F}_\theta]}(\vec{\eta}, \theta, \vec{\rho}) \in \operatorname{rng}(\overline{\pi}^*)$, da $\pi^*(f) = \overline{\pi}^*(t^{L_\lambda[\overline{U}]}(\vec{\eta}, \overline{\kappa}, \vec{\rho})$. Außerdem $\kappa_i \in \operatorname{rng}(\overline{\pi}^*)$, da $\kappa_i < \overline{\kappa} = \operatorname{cp}(\overline{\pi})$. Also $\overline{\kappa} = \pi^*(f)(\kappa_i) \in \operatorname{rng}(\overline{\pi}^*)$. Widerspruch zu $\overline{\kappa}$ = kritische Punkt von $\overline{\pi}^*$. 10.01.2013

Satz 14 (Silver): Sei $V = L[U]$ mit U normaler Filter auf κ. Dann gilt GCH.

Beweis: Sei $\rho \geq \omega$ Kardinalzahl. Wollen zeigen $2^\rho = \rho^+$.

- 1. Fall: $\rho \geq \kappa$. Dann gilt nach Lemma 10 $\mathfrak{P}(\rho) \subseteq L_{\rho^+}[U]$. Also fertig.
- 2. Fall: $\rho < \kappa$. Genügt zu zeigen:

  (*) Sei $a \subseteq \rho$, $a \in L_{\gamma+1}[U] \setminus L_\gamma[U]$. Dann ist $|\mathfrak{P}(\rho) \cap L_{\gamma+1}[U]| \leq \rho$.

  Beweis: Sei $\Theta > \gamma$, 2^κ regulär. Setze $\mathfrak{A} = \langle L_\Theta[U], \in, U, \{a\}, (\alpha)_{\alpha \leq \rho} \rangle$. Zeige zuerst:

  (1) existiert $I \in U$ mit I ist Menge von Indiscernibles für $\mathfrak{A}$

  Beweis: (Analog zu Lemma 2 aus §2:) Sei $\mathcal{L}$ die zu $\mathfrak{A}$ gehörige Sprache. Definiere $f : [\kappa]^{<\omega} \to \mathfrak{P}(\mathcal{L})$ durch $f(\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}) = \operatorname{tp}_{\mathfrak{A}}(\langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle)$. Nach Satz 3 existiert $I \in U$ mit I homogen für f. I ist wie gewünscht. $\square$

  Sei also I wie in (1). Setze $\mathcal{H} = \operatorname{Hull}_{\mathfrak{A}}(I)$. Sei $\sigma : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \langle L_\delta[\overline{U}], \in, \overline{U}, \ldots \rangle$. Gilt $\sigma \upharpoonright (\rho + 1) = \operatorname{id} \upharpoonright (\rho + 1)$, $\sigma(a) = a$.

  (2) es existiert $X \in U$ mit $\rho \upharpoonright X = \operatorname{id} \upharpoonright X$ (insbesondere $X \subseteq \mathcal{H}$)

  Beweis: Angenommen nicht. Beachte, dass für alle $\beta \in \mathcal{H}$ gilt $\sigma(\beta) \leq \beta$. Nach Annahme ist also $Z = \{\beta \in I \mid \rho(\beta) < \beta\} \in U$. Dann existiert wegen U normal ein $\mu < \kappa$ mit $\overline{Z} = \{\beta \in I \mid \sigma(\beta) = \mu\} \in U$. Widerspruch zu σ injektiv. $\square$

  (3) $L_\delta[\overline{U}] = L_\delta[U]$.

  Beweis: Es ist $\overline{U} = \sigma''(\mathcal{H} \cap U)$. Also genügt es zu zeigen, dass $\sigma''(\mathcal{H} \cap U) = U \cap L_\delta[\overline{U}]$. Genügt zu zeigen "$\subseteq$", da beide Seiten Ultrafilter auf $\mathfrak{P}(\kappa) \cap L_\delta[\overline{U}]$ sind. Sei hierzu X wie in (2). Dann gilt für $Z \in \mathcal{H} \cap U$

  $$\sigma(Z) = \sigma''(Z \cap \mathcal{H}) \supseteq \sigma''(Z \cap X) = Z \cap X \in U$$

  Also $\sigma(Z) \in U$. $\square$

  Wegen $a = \sigma(a) \in L_\delta[\overline{U}]$, also nach (3) $a \in L_\delta[U]$. Somit $\delta \geq \gamma + 1$. Genügt also zu zeigen $|\mathfrak{P}(\rho) \cap L_\delta[U]| \leq \rho$. Hierzu zeigen wir

  (4) $\mathfrak{P}(\rho) \cap \mathcal{H} \subseteq \operatorname{Hull}_{\mathfrak{A}}(\overline{I})$, wobei $\overline{I}$ die ersten ω Elemente von I

  Beweis: Sei $b \in \mathfrak{P}(\rho) \cap \mathcal{H}$. Dann existiert $\delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \in I$ und Term t mit $b = t^{\mathcal{H}}(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1})$. Seien nun $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ die ersten n Elemente von I. Dann gilt auch $b = t^{\mathcal{H}}(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$, denn für $\alpha < \rho$ $\mathfrak{A} \models \alpha \in t^{\mathcal{H}}(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) \leftrightarrow \alpha \in t^{\mathcal{H}}(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1})$ und $t^{\mathcal{H}}(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) \subseteq \rho$ $\square$

Satz 15: Sei U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ. Sei $j : V \to M$, M transitiv, die Ultrapotenzabbildung mit U. Dann gilt $U \notin M$.

Beweis: $F = \{f \mid f : \kappa \to \kappa\}$. Dann gilt $\operatorname{otp}(\langle F, <_u \rangle) = j(k)$ wobei $f <_u g \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$. Nun ist aber $F \in M$, da $\mathfrak{P}(\kappa) \subseteq M$. Angenommen $U \in M$. Dann ist auch $<_u \in M$, also $\langle F, <_\kappa \rangle \in M$. Also in M $j(\kappa) = \operatorname{otp}(\langle F, <_u \rangle) < (2^\kappa)^+$, da $|F| = 2^\kappa$. Also $j(\kappa)$ ist unerreichbar in M, da κ unerreichbar in V. Widerspruch.

Folgerung: Sei $\langle \langle M_i, U_i, \kappa_i \rangle, \pi_{ij} \rangle$ die On-Iteration von M bezüglich U. Dann gilt

$$M_o \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \ldots \supsetneq M_i$$

Satz 16: Sei $V = L[U]$ mit U normaler Ultrafilter auf κ. Dann ist κ die einzige messbare Kardinalzahl.

Beweis:

- 1. Fall: $\tau > \kappa$. Sei D ein τ-vollständiger Ultrafilter auf τ und $j : V \to M$ die Ultrapotenzabbildung mit D. Dann gilt wegen $\tau > \kappa$ auch $j(U) = U$, als $M = L[j(U)] = L[U] = V$. Widerspruch zu Satz 15, da $D \notin M$.
- 2. Fall: $\tau < \kappa$. Sei N das kleinste innere Model, in dem τ messbar ist. Dann ist nach Satz 15 V eine Iteration von N. Also nach obiger Folgerung ist $V \subsetneq N$. Widerspruch.

□

$j : V \to M$ Ultrapotenz mit U auf κ, $U \notin M$, das heißt $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\kappa)) \not\subseteq M$. 15.01.2013

4 Sehr große Kardinalzahlen

Für eine Kardinalzahl κ setze

$$H_\kappa = \{x \mid |\operatorname{TC}(x)| < \kappa\}$$

wobei $\operatorname{TC}(x)$ die transitive Hülle von x ist. Natürlich gilt $\kappa < \lambda \Rightarrow H_\kappa \subseteq H_\lambda$, κ Limeskardinalzahl $\Rightarrow H_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} H_\lambda$, $V = \bigcup_\kappa H_\kappa$.

Satz 1: Sei $j : H_\kappa \to M$ elementar mit M transitiv. Weiterhin sei $\operatorname{cf}(\kappa) > \omega$. Dann existeren transitives N und $j^* : V \to N$ elementar mit $j^* \supseteq j$.

Beweis: Setze

$$Q = \{\langle f, a \rangle \mid \text{es existiert } u \in H_\kappa \text{ mit } f : u \to V \text{ und } a \in j(u)\}$$

Definiere eine Relation $\sim$ auf Q durch:

$$\langle f, a \rangle \sim \langle g, b \rangle \Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in j(\{\langle c, d \rangle \mid f(c) = g(d)\})$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation, denn:

- $\langle f, a\rangle \sim \langle f, a\rangle$, denn: $j(\{\langle c, d\rangle \mid f(c) = g(d)\}) \supseteq \{\langle e, e\rangle \mid e \in \operatorname{dom} j(f)\} \ni \langle a, a\rangle$.
- Symmetrie ist klar, denn
$\langle a, b\rangle \in j(\{\langle c, d\rangle \mid f(c) = g(d)\}) \to \langle b, a\rangle \in j(\{\langle d, c\rangle \mid g(d) = f(c)\})$.
- Transitiv: $\langle a, b\rangle \in j(\{\langle c, d\rangle \mid f(c) = g(d)\})$ und
$\langle b, e\rangle \in j(\{\langle d, i\rangle \mid g(d) = h(i)\}) \to \langle c, i\rangle \mid f(c) = h(i)\}$

Für $\langle f, a\rangle \in Q$ setze

$$[f, a] = \{\langle g, b\rangle \mid \langle f, a\rangle \sim \langle g, b\rangle \text{ und für alle } \langle h, c\rangle \text{ mit } \langle f, a\rangle \sim \langle h, c\rangle \text{ ist } \operatorname{rng}(g) \leq \operatorname{rng}(h)\}$$

Sei $\tilde{Q} = \{[f, a] \mid \langle f, a\rangle \in Q\}$. Definiere eine Relation E auf $\tilde{Q}$ durch
$[f, a]E[g, b] \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in j(\{\langle c, d\rangle \mid f(c) \in g(d)\})$. Dies ist wohldefiniert.

Wir zeigen nun:

(1) Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel. Dann: $\left\langle \tilde{Q}, E\right\rangle \models \varphi([f_1, a_1], \dots, [f_n, a_n]) \Leftrightarrow$
$\langle a_1, \dots, a_n\rangle \in j(\{\langle c_1, \dots, c_n\rangle \mid H_\kappa \models \varphi(f_1(c_1), \dots, f_n(c_n))\})$.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau:

(a) φ atomar
nach Def.

(b) $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$
da $j(A \cup B) = j(A) \cup j(B)$, für $A, B \in H_\kappa$

(c) $\varphi \equiv \neg\psi$
da $j(U \backslash A) = j(U) \backslash j(A)$, für $A, U \in H_\kappa$

(d) $\varphi \equiv \exists_z \psi(z, x_1, \dots, x_n)$

"$\Rightarrow$" Sei $\left\langle \tilde{Q}, E\right\rangle \models \psi([g, b], [f_1, a_1], \dots, [f_n, a_n])$. Setze
$A = \{\langle c, c_1, \dots, c_n\rangle \mid H_\kappa \models \psi(g(c), f_1(c_1), \dots, f_n(c_n))\}$. Nach Induktionsvoraussetzung $\langle b, a_1, \dots, a_n\rangle \in j(A)$. Setze
$D = \{\langle c_1, \dots, c_n\rangle \mid H_\kappa \models \varphi(f_1(c_1), \dots, f_n(c_n))\}$. Dann gilt für alle $\langle c, c_1, \dots, c_n\rangle \in A$ dass $\langle c_1, \dots, c_n\rangle \in D$. Dies überträgt sich auf $j(A), j(D)$. Wegen $\langle b, a_1, \dots, a_n\rangle \in j(A)$ also $\langle a_1, \dots, a_n\rangle \in j(D)$. □

"$\Leftarrow$" Setze wieder $D = \{\langle c_1, \dots, c_n\rangle \mid H_\kappa \models \varphi(f_1(c_1), \dots, f_n(c_n))\}$. Sei $\operatorname{dom}(f_i) = u_i$. Definiere $g : u_1 \times \ldots \times u_n \to V$ so, dass gilt:
$H_\kappa \models \varphi(f_1(c_1), \dots, f_n(c_n)) \to H_\kappa \models \psi(g(c_1, \dots, c_n), f_1(c_1), \dots, f_n(c_n))$.
Setze nun $A = \{\langle c, c_1, \dots, c_n\rangle \mid H_\kappa \models \psi(g(c), f_1(c_1), \dots, f_n(c_n))\}$ und $b = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$. Also $b \in j(u_1 \times \ldots \times u_n)$. Es gilt:

$$\langle c_1, \dots, c_n\rangle \in D \to \langle \langle c_1, \dots, c_n\rangle, c_1, \dots, c_n\rangle \in A$$

Dies überträgt sich auf $j(D)$ und $j(A)$. Somit erhalten wir: Ist $\langle c_1, \dots, c_n\rangle \in j(D)$, so ist $\langle b, a_1, \dots, a_n\rangle \in j(A)$. Also nach Induktionsvoraussetzung $\left\langle \tilde{Q}, E\right\rangle \models \psi([g, b], [f_1, a_1], \dots, [f_n, a_n])$ und daher $\left\langle \tilde{Q}, E\right\rangle \models \varphi([f_1, a_1], \dots, [f_n, a_n])$. □(1)

Für $x \in V$ definiere $c_x : 1 \to V$ durch $c_x(0) = x$. Definiere nun $\tilde{(j)} : V \to \tilde{Q}$ durch $\tilde{j}(x) = [c_x, 0]$. Aus (1) folgt sofort:

(2) $\tilde{j} : V \to \left\langle \tilde{Q}, E \right\rangle$

Wir zeigen nun:

(3) E ist stark fundiert.

Beweis "stark": Sei $[g, b] \in \tilde{Q}$. Sei $v = \bigcup\limits_{d \in \mathrm{dom}(g)} g(d)$ und sei $z \notin v$ fest. Ist nun $[f, a]E[g, b]$, so definiere $f^* : \mathrm{dom}(f) \to V$ durch

$$f^*(c) = \begin{cases} f(c) & \text{falls } f(c) \in v \\ z & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $[f, a] \sim [f^*, a]$, denn: $a \in j(\{c \mid \exists_d . f(c) \in g(d)\}) = j(\{c \mid f(c) = f^*(c)\})$. Also ist $\{[f, a] \mid [f, a]E[g, b]\} \in V$, da $\{f^* \mid \ldots\}$ eine Menge ist. 17.01.2013

Beweis "fundiert": Ann.: E ist nicht fundiert. Sei also $[f_{n+1}, a_{n+1}E[f_n, a_n]$ für alle n. Sei $\{f_n \mid n \in \omega\} \subseteq H_\lambda$ für ein λ. Setze $u = \bigcup_n \mathrm{dom}(f_n)$. Dann ist $n \in H_\kappa$, da $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ und für alle n $\mathrm{dom}(f_n) \in H_\kappa$. Wähle ein $X \prec H_\lambda$ mit $TC(u) \cup \{f_n \mid n \in \omega\} \subseteq X$ und $|X| < \kappa$. Sei $\pi \colon X \tilde{\to} R$ mit R transitiv. Also $R \in H_\kappa$. Setze $g_n = \pi(f_n)$. Weiterhin sei $A_n = \{\langle c, d\rangle \mid f_{n+1}(c) \in f_n(d)\}$. Es ist dann $A_n \subseteq u \times u$. Wegen $\pi \restriction TC(u) = \mathrm{id} \restriction u$ ist dann $\pi(A_n) = A_n$. Aber $\pi(A_n) = \{\langle c, d\rangle \mid g_{n+1}(c) \in g_n(d)\}$. Wegen $[f_{n+1}, a_{n+1}]E[f_n, a_n]$ ist aber dann $\langle a_{n+1}, a_n\rangle \in j(A_n) = j(\{\langle c, d\rangle \mid g_{n+1}(c) \in g_n(d)\}) = \{\langle c, d\rangle \mid j(g_{n+1}(c) \in j(g_n)(d)\}$, d.h. $j(g_{n+1}(a_{n+1}) \in j(g_n))(a_n)\ \forall_n$. Wid.

Sei also $\pi \colon \langle \tilde{Q}, E\rangle \tilde{\to} N$ mit N transitiv. Definiere $j^* \colon V \to N$ durch $j^* = \pi \circ \tilde{j}$. Dann ist j^* elementar. Wir müssen zeigen:

(4) $j^* \supseteq j$

Beweis: Setze $M' = \bigcup_{n \in H_\kappa} j(n)$. Definiere eine Abbildung $\sigma \colon M' \to N$ wie folgt. Sei $a \in M'$. Wähle $u \in H_\kappa$ mit $a \in j(u)$ und setze $\sigma(a) = \pi([\mathrm{id} \restriction u, a])$. Dies hängt nicht von der Wahl von u ab. Setze $N' = \mathrm{rng}(\sigma)$. Man sieht leicht, das $\sigma \colon M' \to N'$ ein Isomorphismus ist. Aber N' ist transitiv. Denn sei $[f, b]E[\mathrm{id} \restriction u, a]$, wobei o.E. u transitiv. Wie im Beweis von (3) dann o.E. $f \in H_\kappa$. Dann aber $\langle f, b\rangle \sim \langle \mathrm{id} \restriction u, j(f)(b)\rangle$, woraus das Gewünscht folgt. Somit ist σ die Identität. Aber für $x \in H_\kappa$ ist $\tilde{j}(x) = [c_x, 0] \stackrel{!}{=} [\mathrm{id} \restriction \{x\}, j(x)]$ also $j^*(x) = \sigma(j(x)) = j(x)$. $j^*(x) = \pi(\tilde{j}(x)) = \sigma(j(x)) = j(x)$.

Definition: Sei $j \colon V \to M$ elementar mit M transitiv, und sei $j \neq \mathrm{id}$. Setze dann $\mathrm{cp}(j) = \min\{\kappa \mid j(\kappa) \neq \kappa\}$ der *kritische Punkt* von j.

Definition:

(a) Seien κ, λ Kardinalzahlen. κ ist λ-*stark* $\iff$ es existiert $j \colon V \to M$ elementar mit M transitiv, $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $\lambda < j(\kappa)$ und $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq M$.

(b) κ ist *stark*, wenn κ λ-stark für alle λ ist.

Bemerkung: Nach Satz 1 lässt sich “κ ist λ-stark” in ZFC definieren, denn es gilt: κ ist λ-stark $\iff$ es existiert λ: $j(\kappa)$ und $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq N$.

Bemerkung: κ ist 0-stark $\iff$ κ ist κ–stark $\iff$ κ ist messbar.

Bemerkung: Sei M ein inneres Modell und $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq M$. Dann gilt $H_{\lambda^+} \subseteq M$.

Beweis: Da in M eine Bijektion von λ nach $\lambda \times \lambda$ existiert ist $\mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \subseteq M$. Sei nun $x \in H_{\lambda^+}$, und sei $z = \mathrm{TC}(x)$. Also $|z| \leq \lambda$. Sei $f\colon \alpha \to z$ Bijektion mit $\alpha = |z|$ und definiere $E \subseteq \alpha \times \alpha$ so, dass $f\colon \langle \alpha, E \rangle \to \langle z, \in \rangle$ en Isomorphismus ist. Somit ist f die Transitivierung von $\langle \alpha, E \rangle$. Wegen $E \subseteq \lambda \times \lambda$ ist also $\langle \alpha, E \rangle \in M$. Somit ist aber auch $f \in M$, da M inneres Modell. Sei non $y = f^{-1\prime\prime}x$. Also $y \in M$, da $y \subseteq \lambda$. Somit $x = f''y \in M$.

Satz 2: Sei κ 2^κ-stark. Dann existiert normaler Ultrafilter U auf κ mit $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ messbar}\} \in U$.

Beweis: Sei $j\colon V \to M$ wie in Def. von “κ ist 2^κ-stark”. Setze $U = \{X \in \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$. Dann ist U normaler Ultrafilter auf κ (siehe früher). Aber $U \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa)) \subseteq H_{(2^\kappa)^+}$. Wegen $\mathcal{P}(2^\kappa) \subseteq M$ ist also nach Bem. $U \in M$. Somit $M \models \kappa$ ist messbar. Somit nach Def. von U ist $X = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ is messbar}\} \in U$, da $\kappa \in j(X)$.

Bemerkung: Sei κ λ-stark, wobei $\lambda \geq \kappa$. Dann existieren transitives N und $j\colon H_{\kappa^+} \to N$ elementar mit $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $\lambda < j(\kappa)$, $(\lambda) \subseteq N$ und $|N| \leq 2^\lambda$.

Beweis: Sei $k\colon H_{\kappa^+} \to M$ elementar mit M transitiv. $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $\lambda < k(\kappa)$, $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq M$. Sei $X \prec N$ mit $\mathrm{rng}(k) \cup \mathcal{P}(\lambda) \subseteq X$ und $|X| \leq 2^\lambda$. Sei $\pi\colon X \to N$ die Transitivierung von X. Setze $j = \pi \circ k$. Dann ist j wie gewünscht. 22.01.2013

Bemerkung: κ ist stark $\to$ κ ist total unbeschreibbar

Beweis: Sei $A \subseteq V_\kappa$ und $\gamma > \kappa$ mit $V_\gamma \models \varphi(A)$. Wegen κ stark existiert $j\colon V \to M$ elementar, M transitiv, mit $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \gamma$ und $V_\gamma \subseteq M$. Denn $V^M_{j(\gamma)} \models \varphi(j(A))$. Aber $M \models \exists_\alpha \exists_\delta\, (\alpha < \delta < j(\kappa) \text{ und } V_\delta \models \varphi(j(A) \cap V_\alpha))$ nämlich $\alpha = \kappa$ und $\delta = \gamma$, da $j(A) \cap V_\kappa = A$ und $V^M_\gamma = V_\gamma$. Also $V \models \exists_\alpha \exists_\delta\, (\alpha < \delta < \kappa \text{ und } V_\delta \models \varphi(A \cap V_\alpha))$.

Definition: κ ist *Woodin* $:\iff$ für alle $f\colon \kappa \to \kappa$ existiert $\tau < \kappa$ mit $f''\tau \subseteq \tau$ und ein elementares $j\colon V \to M$ mit M transitiv, $cp(j) = \tau$ und $V_{j(f)(\tau)} \subseteq M$.

Bemerkung: Sei κ Woodin. Dann ist $\{\tau < \kappa \mid \tau \text{ messbar }\}$ stationär in κ. Insbesondere ist κ Mahlo.

Beweis: Sei $C \subseteq \kappa$ abgeschlossen unbeschränkt. Definiere $f\colon \kappa \to \kappa$ durch $f(\alpha) = \min(C - (\alpha + 1))$. Sei τ wie in Definition, dann $f''\tau \subseteq \tau$, also τ Limespunkt von C, also $\tau \in C$ und wegen Existenz von j ist τ messbar.

Satz 3: Sei κ Woodin. Dann existiert $\tau < \kappa$ mit $V_\kappa \models \tau$ ist stark.

Beweis: Annahme: nicht. Definiere also $g\colon \kappa \to \kappa$ so, dass für alle $\tau < \kappa$ $V_\kappa \models \tau$ ist nicht $g(\tau)$-stark, und $g(\tau) \geq \tau$. Nach obiger Bemerkung gilt dann wirklich, dass τ nicht $g(\tau)$-stark. Definiere nun $f\colon \kappa \to \kappa$ durch $f(\tau) =$ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl $> g(\tau)$. Wegen κ Woodin existiert $\tau < \kappa$ und ein elementares $j\colon V \to M$ mit M transitiv, $cp(j) = \tau$ und $V_{j(f)(\tau)} \subseteq M$, also $M \models \exists \beta < j(f)(\tau)$ τ ist nicht

β-stark. Wegen $V_{j(f)(\tau)} \subseteq M$ ist dann τ wirklich nicht β-stark für ein $\beta < j(f)(\tau)$. Wegen $\mathcal{P}(\beta) \subseteq V_{j(f)(\tau)} \subseteq M$ ist dies aber ein Wiederspruch zur Existenz von j.

Definition: Sei A eine Klasse. κ ist stark bezüglich A, wenn für alle γ ein $j \colon V \to M$ elementar existiert mit M transitiv, $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $\gamma < j(\kappa)$, $v_\gamma \subseteq M$ und $A \cap V_\gamma = j(A) \cap V_\gamma$ [wobei: $j(A) = \bigcup\{j(A \cap x) \mid x \in V\}$]

Bemerkung: Wie früher zeigt man: Ist κ stark bezüglich A, so existiert für alle γ ein $j \colon H_{\kappa^+} \to N$ mit N transitiv, $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $\gamma < j(\kappa)$, $V_\gamma \subseteq M$, $A \cap V_\gamma = j(A) \cap V_\gamma$ und $|N| = |V_\gamma|$.

Satz 4: Es sind äquivalent:

(1) κ ist Woodin

(2) (κ ist unerreichbar und) für alle $A \subseteq V_\kappa$ ist $\{\tau < \kappa \mid V_\kappa \models \tau \text{ ist stark bezüglich } A\}$ stationär in κ.

(3) κ ist unerreichbar und für alle $A \subseteq V_\kappa$ existiert $\tau < \kappa$ mit $V_\kappa \models \tau$ ist stark bezüglich A 24.01.13

Beweis:

- (1)$\to$(2): Sei $A \subseteq V_\kappa$ und setze $E = \{\tau < \kappa \mid V_\kappa \models \tau \text{ ist stark bezüglich } A\}$. Sei $C \subseteq \kappa$ abgeschlossen unbeschränkt in κ. Z.Z. $C \cap E \neq \emptyset$. Definiere hierzu $g \colon \kappa \to \kappa$ wie folgt: Sei $\tau < \kappa$. Gilt $V_\kappa \models \tau$ ist stark bezüglich A, so sei $g(\tau) = 0$. Ist die nicht der Fall, so wähle $\gamma < \kappa$ minimal, so dass in V_κ kein $j \colon H_{\kappa^+} \to N$ mit N transitiv, $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $\gamma < j(\kappa)$, $A \cap V_\gamma = j(A) \cap V_\gamma$ existiert. Setze $g(\tau) = \gamma$. Definiere nun $f \colon \kappa \to \kappa$ durch $f(\tau) = \max\{g(\tau) + 2, \min(C - (\tau + 1))\}$. Nach (1) existiert dann $\tau < \kappa$ und mit $f''\tau \subseteq \tau$ und ein elementares $j \colon V \to M$ mit M transitiv, $\mathrm{cp}(j) = \tau$ und $V_{j(f)(\tau)} \subseteq M$. Wegen $f''\tau \subseteq \tau$ ist dann Limespunkt von C, also $\tau \in C$. Somit auch $\tau \in j(C)$, da $C \cap \tau \subseteq j(C)$. Somit genügt z.Z., dass $\tau \in j(E)$. Nehme an, dass dies nicht der Fall ist und setze $\gamma = j(g)(\tau)$. Dann existiert also in $j(V_\kappa)$ kein $k \colon H_{\tau^+} \to N$ min N transitiv, $\tau = \mathrm{cp}(k)$, $\gamma < k(\tau)$, $V_\gamma \subseteq N$, $j(A) \cap V_\gamma = k(j(A)) \cap V_\gamma$. Setze nun $j^* = j \restriction H_{\tau^+}$, $N = j(H_{\tau^+})$. Also $j^* \colon H_{\tau^+} \to N$ elementar, N transitiv. Weiterhin ist $V_\gamma \subseteq N$ und $j^*(j(A)) \cap V_\gamma = j^*(j(A) \cap H_\tau) \cap V_\gamma = j^*(A \cap H_\tau) \cap V_\gamma = j^*(A) \cap V_\gamma$ Dann existiert aber auch solch ein k, $\tilde{N}$ mit $|\tilde{N}| \leq V_\gamma$. Dann ist aber $k \in M$, also $k \in j(V_\kappa)$, was ein Widerspruch ist.
- (2)$\to$(3): ist trivial.
- (3)$\to$(1): Sei $f \colon \kappa \to \kappa$. Wähle gemäß (3) ein $\tau < \kappa$ mit $V_\kappa \models \tau$ stark bezüglich f. Wegen κ regulär existiert $\tau < \beta < \kappa$ mit $f''(\tau + 1) \subseteq \beta$. Wähle dann ein $j \colon V_\kappa \to M$ elementar mit M transitiv, $\tau = \mathrm{cp}(j)$, $\beta < j(\tau)$, $V_\beta \subseteq M$ und $f \cap V_\beta = j(f) \cap V_\beta$. Für $\alpha < \tau$ ist dann $\langle \alpha, f(\alpha) \rangle \in f \cap V_\beta$. $j(f)(\alpha) = f(\alpha)$. Somit $f(\alpha) < \tau$, da sonst $j(f(\alpha)) \geq j(\tau) > \beta \geq f(\alpha)$. Also $f''\tau \subseteq \tau$. Weiterhin ist $\langle \tau, f(\tau) \rangle \in f \cap V_\beta = j(f) \cap V_\beta$. Also $j(f)(\tau) = f(\tau)$. Wegen $f(\tau) \leq \beta$. Also $V_{j(f)(\tau)} \subseteq V_\beta \subseteq M$. Dies war zu zeigen.

Definition: κ ist *superstark* :gdw es existiert $j\colon V \to M$ elementar mit M transitiv, $\kappa = \mathrm{cp}(j)$ und $V_{j(\kappa)} \subseteq M$.

Satz 5: Sei κ superstark. Dann ist κ Woodin. Es existiert $\tau < \kappa$ mit τ ist Woodin.

Beweis: Sei $f\colon \kappa \to \kappa$. Wähle $j\colon V \to M$ elementar mit M transitiv, $k = \mathrm{cp}(j)$ und $V_{j(\kappa)} \subseteq M$. Somit gilt insbesondere $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$, da $j(f)(\kappa) < j(\kappa)$. Mit dem üblichen Argument existiert dann $k \in V_{j(\kappa)}$ und transitives $N \in V_{j(\kappa)}$ mit $k\colon H_{\kappa^+} \to N$ elementar und $V_{k(f)(\kappa)} \subseteq N$. Also $M \models$ es existiert $\tau < j(\kappa)$ mit $j(f)''\tau \subseteq \tau$ und $\pi\colon H_{\tau^+} \to R$ elementar mit R transitiv, $\mathrm{cp}(\pi) = \tau$ und $V_{\pi(f)(\tau)} \subseteq R$, nämlich $\tau = \kappa$. Somit $V \models \ldots$.

Sei weiterhin j, M wie oben. Dann $M \models \kappa$ ist Woodin. Also existiert $\tau < \kappa$ mit τ ist Woodin.

Definition: κ ist *subkompakt* :gdw für alle $B \subseteq H_{\kappa^+}$ existieren $\tau < \kappa$, $A \subseteq H_{\tau^+}$ und elementare Einbettung

$$j\colon \langle H_{\tau^+}, A\rangle \to \langle H_{\kappa^+}, B\rangle \text{ mit } \mathrm{cp}(j) = \tau$$

Bemerkung: Ist κ subkompakt, so ist κ unerreichbar (denn oben: τ unerreichbar (sogar messbar), also κ unerreichbar, da $j(\tau) = \kappa$.)

Satz 6: Sei κ subkompakt. Dann $V_\kappa \models$ es existiert γ mit γ ist superstark (also existiert $\gamma < \kappa$ mit γ ist superstark). 29.01.2013

Beweis: Sei $j\colon H_{\tau^+} \to H_{\kappa^+}$ elementar mit $\tau = \mathrm{cp}(j)$. Dann ist $j(\tau) = \kappa$, also $V_{j(\tau)} = H_\kappa \subseteq H_{\kappa^+}$. Also ist τ superstark. Aber $j \in H_{\kappa^+}$ und existiert transitives $N \prec H_{\kappa^+}$ mit $\mathrm{rng}(j) \subseteq N$ und $N \in H_{\kappa^+}$. Also $j\colon H_{\tau^+} \to N$ elementar. Somit existieren $\gamma < \tau$ und transitives $M \in H_{\tau^+}$ mit $k\colon H_{\gamma^+} \to M$ elementar, $\mathrm{cp}(k) = \gamma$, $k(\gamma) = \tau$ und $V_\gamma \subseteq M$. Dann aber $V_\kappa \models \gamma$ ist superstark.

Definition: $\square_\kappa$ ist das folgende Prinzip: es existiert Folge $\langle C_\nu \mid \nu < \kappa^+, \lim(\nu)\rangle$ mit

(a) $C_\nu \subseteq$ ist abgeschlossen unbeschränkt in ν

(b) λ Limespunkt von $\nu \to C_\lambda = C_\nu \cap \lambda$

(c) $\mathrm{otp}(C_\nu) \leq \kappa$

Jensen hat gezeigt: falls $V = L$, so gilt $\square_\kappa$ für alle Kardinalzahlen $\kappa \geq \omega$.

Satz 7: Sei κ subkompakt. Dann ist $\square_\kappa$ falsch.

Beweis: Annahme: $\square_\kappa$ gilt. Sei dies gegeben durch $\vec{C} = \langle C_\nu \mid \nu < \kappa^+, \lim(\nu)\rangle$. Somit ist $\vec{C} \subseteq H_{\kappa^+}$. Wegen κ supkompakt existieren also $\tau < \kappa$, $\vec{D} \subseteq H_{\tau^+}$ und elementares $j\colon \langle H_{\tau^+}, \vec{D}\rangle \to \langle H_{\kappa^+}, \vec{C}\rangle$ mit $\tau = \mathrm{cp}(j)$. Dann ist $\vec{D} = \langle D_\nu \mid \nu < \tau^+, \lim(\tau)\rangle$ eine $\square_\tau$-Folge. Setze nun $\nu = \sup j''\tau^+ < \kappa^+$. Nun ist $j''\tau^+$ ω-abgeschlossen in ν. Also $T = j''\tau^+ \cap$ Limespunkt von C_ν ist unbeschränkt in ν. Nun gilt aber für $\eta, \lambda \in T$ mit $\eta < \lambda$:

$$C_\eta = C_\nu \cap \eta = (C_\nu \cap \lambda) \cap \eta = C_\lambda \cap \eta$$

Somit ist für alle $\lambda \in T$ $T \cap \lambda \subseteq C_\lambda$. Setze man nun $S = \{\eta < \tau^+ \mid j(\eta) \in T\}$, so gilt also auch $S \cap \eta \subseteq D_\eta$ für $\eta \in S$. Wegen S unbeschränkt in τ^+ ist also $\mathrm{otp}(D_\eta > \tau$ für ein $\eta \in S$. Widerspruch.

Definition: Seien κ, λ Kardinalzahlen, $\kappa \leq \lambda$.

(a) κ ist λ-superkompakt :gdw es existiert elementares $j\colon V \to M$ mit M transitiv, $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $j(\kappa) > \lambda$ und $j''\lambda \in M$.

(b) κ ist superkompakt, wenn κ λ-superkompakt für alle $\lambda \geq \kappa$ ist.

Bemerkung: Sei $j\colon V \to M$ wie in Def. von "κ ist λ-superkompakt".

(a) Ist $|A| \leq \lambda$, so $j''A \in M$

(b) Ist A transitiv und $|A| \leq \lambda$, so $j \restriction A \in M$

(c) $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq M$

Beweis: Zu (a): Sei $f\colon A \to \lambda$ injektiv. Dann ist $j''A = \{a \in j(A) \mid j(f)(a) \in j''\lambda\} \in M$. Zu (b): Ist A transitiv, so ist $j \restriction A$ die Umkehrung der Transitivierung von $j''A$. Zu (c): Sei $A \subseteq \lambda$. Dann ist $A = \{\alpha < \lambda \mid j(\alpha) \in j(A)\}$. Also $A \in M$, da $j \restriction \lambda \in M$.

Ist also κ λ-superstark, so ist κ λ-stark.

Satz 8: Sei κ 2^λ-superkompakt. Dann ist κ subkompakt, und es existiert $\tau < \kappa$ mit τ ist subkompakt.

Beweis: Sei j wie in Def. von κ ist 2^κ-superkompakt. Sei $B \subseteq H_{\kappa^+}$. Dann gilt

$$j \restriction H_{\kappa^+}\colon \langle H_{\kappa^+}, B\rangle \to \langle j(H_{\kappa^+}), j(B)\rangle$$

Nun ist aber $j \restriction H_{\kappa^+} \in M$, da $|H_{\kappa^+}| = 2^\kappa$. Außerdem ist $j(H_{\kappa^+} = (H_{j(\kappa)^+})^M$. Also $M \models \exists_{\tau < j(\kappa)} \exists_A \exists_k k\colon \langle H_{\tau^+}, A\rangle \to \langle H_{j(\kappa)^+}, j(B)\rangle$ elementar. Somit j elementar: es existieren $\tau < \kappa$ und A und k mit $k\colon \langle H_{\tau^+}, A\rangle \to \langle H_{\kappa^+}, B\rangle$ elementar, wie gewünscht. Der zweite Teil folgt durch Reflektion, da auch $M \models \kappa$ superkompakt.

Interessanterweise kann man die Eigenschaft "κ ist λ-superkompakt" auch durch die Existenz von gewissen Ultrafiltern charakterisieren.

Definition:

(a) Sei $\lambda \geq \kappa$. Setze $\mathcal{P}_\kappa(\lambda) = \{a \subseteq \lambda \mid |a| < \kappa\}$.

(b) Sei $U \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ ein Ultrafilter. U ist normal, wenn gilt:

  (1) für alle $a \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ ist $\{b \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \mid a \leq b\} \in U$ und

  (2) ist $f\colon \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda$ regressiv, d.h. $f(a) \in a$ für alle $a \neq \emptyset$, so existiert $x \in U$ mit $f \restriction x$ konstant.

Bemerkung: Ist U normaler Ultrafilter auf $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$, so ist U κ-vollständig.

Beweis: Seien $X_\alpha \in U$ für $\alpha < \gamma$, wobei $\gamma < \kappa$. Annahme: $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \notin U$. Dann ist $Z = \mathcal{P}_\kappa(\lambda) - X \in U$. Setze $Y = \{b \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \mid \gamma \leq b\} \in U$ Definiere $f\colon \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda$ durch

$$f(b) = \begin{cases} \text{ein } \alpha < \gamma \text{ mit } b \notin X_\alpha & \text{falls } b \in Y \cap Z \\ \text{ein } \alpha \in b & \text{falls } b \notin Y \cap Z, b \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f regressiv, aber nicht konstant auf einer Menge in U. Wid.