

**Mémoire présenté devant l'Université Paris Dauphine
pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 12/11/2012

Par : KIM Chae In

Titre: Méthodes stochastiques du calcul des provisions techniques en prévoyance

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut des Actuaires : Signature : Entreprise :

Nom : Sinalys Consulting

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Membres présents du jury du Master Actuariat de Dauphine :

Nom : Laetitia Spanu

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du candidat :

Résumé

Ce mémoire a pour objectif de proposer des méthodologies pragmatiques au calcul stochastique des provisions techniques pour les garanties en prévoyance, particulièrement, pour les garanties d'incapacité et d'invalidité.

L'une des particularités en prévoyance est le fait que les garanties sont variées et classées en assurance non vie ayant l'aspect d'assurance vie. Après avoir étudié le marché et la définition de la prévoyance en France ainsi que les provisions actuelles en prévoyance, nous nous concentrerons à étudier les méthodologies stochastiques du calcul de deux provisions techniques : provisions mathématiques et provisions pour sinistres à payer.

En effet, le périmètre de l'évaluation des provisions mathématiques est limité aux sinistrés sous la réglementation actuelle. Dans ce mémoire, d'abord, on étend ce périmètre aux assurés valides au cours de l'évaluation des provisions mathématiques. Nous proposons une méthodologie pour estimer l'engagement de l'assureur dans un an, à $t=1$, vis-à-vis d'assurés valides à $t=0$.

Pour les provisions pour sinistres à payer, la méthode de Mack et la méthode de Bootstrap sont proposées avec l'exemple de la garantie d'incapacité et d'invalidité. Avec les deux méthodes, on peut trouver la distribution des provisions ultimes à $t=0$.

Puis on propose une méthodologie qui permet de construire des tables stochastiques en prévoyance. Ici, on se concentre à étudier la table de maintien en incapacité. Le but de cette méthodologie est de mesurer le risque de modèle.

Dans le nouvel environnement réglementaire, il est demandé de mesurer en détails, plus précisément les risques de l'assureur. De ce point de vue, ce mémoire peut contribuer à amplifier les études sur les risques d'incapacité et d'invalidité.

Mots clés : prévoyance, risque d'incapacité, risque d'invalidité, provisions techniques, provisions mathématiques, provisions pour sinistres à payer, calcul stochastique, méthode Mack, Bootstrap

Abstract

The objective of this paper is to propose practical methodologies for calculating technical provisions in stochastic way for Pension and Contingency Fund, particularly, for coverage of disability¹.

One of the characteristics in Pension and Contingency Fund is that their coverage is diverse and that it is classified as non life insurance, having life insurance features. First we will study the French market of Pension and Contingency Fund and present their definition and their current technical provisions. Then, we concentrate on studying on stochastic methodologies of calculating two technical provisions: mathematical provisions and outstanding claims reserves.

Evaluation boundary in mathematical provisions is limited to insurants who are already disabled under the current regulation. In this paper, we extend the sight to the non-disabled insurants in evaluating mathematical provisions. We propose a methodology for estimating the liability of insurer in one year, at t=1, vis-à-vis the non-disabled insurants at t=0.

For the outstanding claims reserves, the Mack and the Bootstrap methods are proposed with examples of disability coverage. With these two methods, we can find the distribution of ultimate provisions at t=0.

Then we propose a methodology that allows to construct stochastic tables in Pension and Contingency Fund. Here, we concentrate on making the table of entry and stay in temporary disability. The objective of this methodology is to measure the model risk.

Under the new regulatory environment, we need to measure insurers' risks more detailed and precise way. From this point of view, this paper may contribute to promote studies about disability risks.

Keywords: French Pension and Contingency Fund (*prévoyance*), risk of disability, technical provisions, mathematical provisions, outstanding claims reserves, stochastic calculating, Mack method, Bootstrap

¹ This type of cover compensates individuals in case of disability caused by accident or diseases. In fact, this kind of cover is separated to two kinds of cover - *incapacité* and *invalidité* in French system. In this paper, I distinguish these terms, respectively, disability and permanent disability only if necessary.

Synthèse

Le but de ce mémoire est de proposer des méthodologies pragmatiques au calcul stochastique des provisions techniques pour les garanties en prévoyance, surtout pour les garanties d'incapacité et d'invalidité. Ce type de garantie permet d'indemniser les individus en cas d'arrêt de travail, suite à une maladie ou à un accident, en complément du régime général de la Sécurité Sociale.

En prévoyance sur le marché français, les provisions mathématiques et les provisions pour sinistres à payer font la plus grande partie, respectivement 75,6% et 16,4% en 2011, parmi les provisions techniques constituées dans le cadre des institutions de prévoyance².

Sous la réglementation actuelle, bien que les garanties appartiennent à la famille des assurances non-vie, on emprunte les méthodes du calcul des provisions techniques en cas d'assurance vie. Par exemple nous évaluons les provisions mathématiques en prenant la probabilisation à partir des tables réglementaires pour la garantie d'incapacité ou d'invalidité. On constitue aussi les provisions pour sinistres à payer pour les garanties d'incapacité et d'invalidité en raison des retards de paiement possibles. Nous nous concentrerons ici aux méthodologies des calculs stochastiques sur ces deux provisions techniques, les provisions mathématiques et les provisions pour sinistres à payer.

En effet, les méthodes de calcul stochastique pour l'évaluation des provisions techniques nous permettront d'approcher le résultat théorique recherché en effectuant des tirages suivant la loi du phénomène observé. Elles nous permettent également d'avoir la distribution des provisions techniques.

Dans le nouvel environnement réglementaire à venir, sous la directive Solvabilité II, les assureurs sont tenus d'évaluer la valeur de leur actif et de leur passif de la manière la plus réaliste possible en reflétant les risques qui affectent les *cash flows* futurs. Dans ce cadre, les méthodologies stochastiques pour le calcul des provisions techniques permettront éventuellement d'avoir une vision sur le calcul des provisions techniques du point de vue d'un bilan économique avec le *best estimate* et la marge de risque.

Ce mémoire est essentiellement divisé en deux parties. Une première fournit l'illustration des provisions techniques sous la réglementation actuelle avec la description du marché de la prévoyance en France. Dans la deuxième partie, on propose des méthodologies de calculs stochastiques des provisions mathématiques et des provisions pour sinistres à payer et on présentera des applications.

Méthodologie pour provisions mathématiques

Sous la réglementation actuelle, les provisions mathématiques doivent se calculer en respectant le principe de prudence. En raison de ce principe, seules les tables réglementaires, ou les tables d'expérience certifiées par un actuair indépendant, agréé par l'Institut des Actuaires, peuvent être utilisées lors des calculs de la provision mathématique. Dans le cadre de la garantie d'incapacité/invalidité, trois lois peuvent servir lors de la construction des tables réglementaires : la loi de maintien en incapacité, la loi de maintien en invalidité et la loi de passage en invalidité.³ Ces lois sont établies par le BCAC⁴ à partir d'une étude réalisée en 1993 sur un portefeuille rassemblant les quatre compagnies d'assurance françaises les plus importantes de l'époque (AGF, AXA, GAN et UAP).

² [12] CTIP

³ La loi de mortalité en incapacité et celle en invalidité ne présentent pour le moment aucun caractère réglementaire.

⁴ BCAC : Bureau Commun des Assurances Collectives

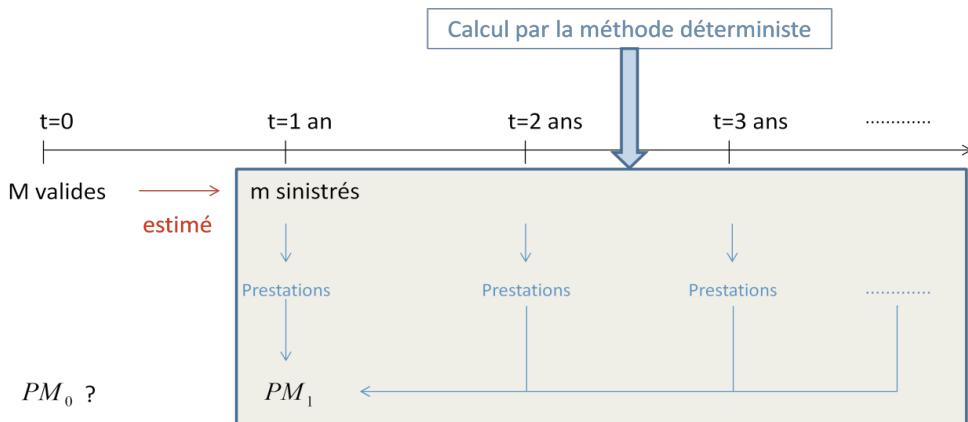
Sous la réglementation actuelle, le périmètre des calculs de PM est limité aux sinistrés. Contrairement à la réglementation actuelle, Solvabilité II a étendu le périmètre aux assurés. Ici, en étendant le périmètre aux assurés valides, nous évaluons les provisions mathématiques ultimes à la vision temporelle $t=1$.

Nous évaluons les provisions mathématiques sur un portefeuille ayant M assurés de même profil, tous sont valides à $t=0$. Supposons qu'une statistique ou une estimation fiable fournit une probabilité p sous laquelle une personne valide est en état d'incapacité dans un an. Après avoir effectué le tirage aléatoire entre $(0;1)$, si le tirage, p' , est plus bas que la probabilité p , on considère que la personne est en incapacité dans un an. Nous effectuons ce tirage avec grands nombres afin d'avoir la fiabilité. En théorie, plus le nombre de simulations est important, plus la distribution des effectifs - entrants en état d'incapacité dans un an sera similaire à la loi normale d'après le théorème central limite.

Afin d'appliquer cette méthodologie, on estime d'abord la probabilité p sous laquelle une personne valide est en état d'incapacité dans un an. Avec la statistique fournie par INSEE⁵, la loi de BCAC et le théorème de Bayes, on estime p à 3,758% pour un assuré âgé 40 ans. Après avoir effectué des tirages aléatoires avec grand nombre, nous déterminons les effectifs en incapacité dans un an à l'aide de l'estimation de p . Cela nous permet d'obtenir la distribution des taux de passage de valide en incapacité de manière stochastique du portefeuille.

Ensuite, nous pouvons évaluer la provision mathématique selon les formules déterministes et cela nous conduit à trouver la distribution des provisions mathématiques sur le portefeuille global dans un an.

Les étapes de cette méthodologie sont résumées à la figure ci-dessous.



Cette méthodologie fournit une prévision à court terme sur l'évaluation de PM. Après avoir étudié cette méthodologie, il nous reste à estimer l'évaluation des provisions mathématiques à $t=0$ sur le portefeuille ayant tous les assurés valides. Sous la réglementation actuelle, les provisions mathématiques s'évaluent en utilisant comme paramètres l'âge et l'ancienneté du sinistré. Sous cette problématique, l'application directe de la méthode déterministe est limitée, parce que la notion d'ancienneté implique la survenance a priori des sinistres. Dans ce mémoire, nous n'approfondissons pas des études sur cette problématique.

Méthodes pour provisions pour sinistre à payer

Afin d'avoir la distribution des provisions pour sinistre à payer de manière stochastique, on présente la méthode de Mack et la méthode Bootstrap. Ici, on présente un exemple de la garantie d'incapacité et d'invalidité basé sur le triangle des montants cumulés et estime les provisions ultimes à $t=0$.

Pour la méthode Mack, on étudie d'abord des méthodes qui servent à vérifier les trois hypothèses fondamentales :

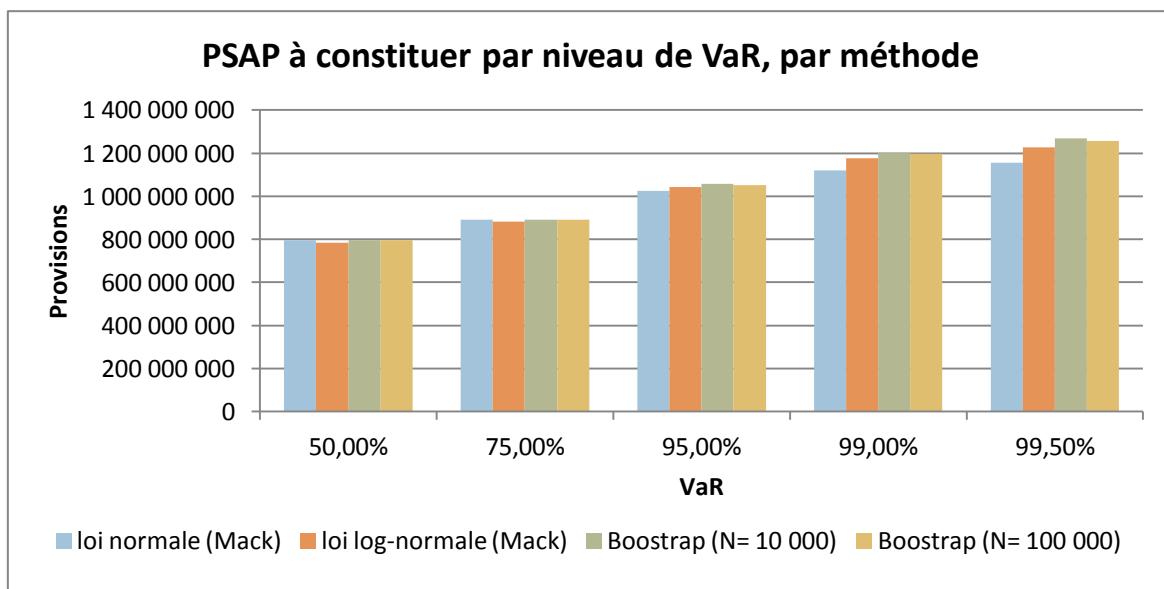
⁵ INSEE : Institut National de la Statistique et des Études Économiques

- non corrélation entre les facteurs développement
- indépendance entre les différentes années de survenance
- caractère aléatoire de la répartition des résidus

Afin de vérifier ces trois hypothèses, on procède aux tests proposés par Mack en 1994. Par les tests, toutes les hypothèses ne sont pas vérifiées dans l'exemple. Cependant, la méthode de Mack nous permet d'avoir l'intervalle de confiance et la distribution des charges ultimes, et la distribution des provisions pour sinistre à payer en supposant une loi de probabilité.

La méthode Bootstrap est une méthode non paramétrique. Elle génère des N triangles en supposant l'indépendance des résidus de Pearson avec N fois de rééchantillonnage avec remise. L'avantage de cette méthode est la simplicité. La méthode Bootstrap permet d'obtenir la distribution des charges ultimes avec un grand nombre de simulations.

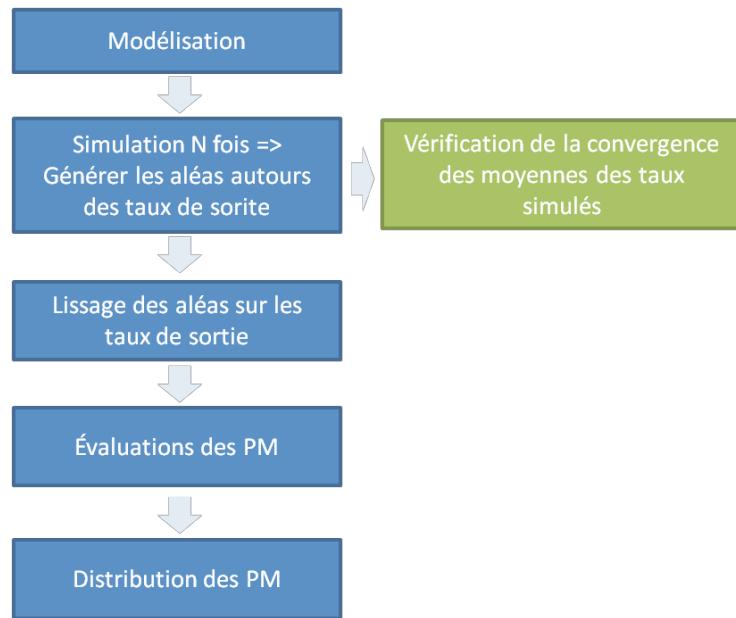
Lorsqu'on compare les résultats, dans cet exemple, les résultats trouvés par la méthode Mack avec la loi log-normale ne sont pas très éloignés de ceux trouvés par la méthode Bootstrap.



Ecart relatif	moyenne	écart-type	VaR 50%	VaR 75%	VaR 95%	VaR 99%	VaR 99,5%
loi log-normale / Bootstrap (N=100 000)	1,60%	0,60%	1,56%	1,14%	0,88%	1,83%	2,24%

Méthodologie de la construction des tables d'expérience stochastiques

En complément, nous proposons une méthodologie qui sert à construire des tables de maintien en incapacité d'expérience stochastiques afin de mesurer le risque de modèle. On utilise les taux de sortie de l'état d'incapacité au cours de cette méthodologie. La méthodologie proposée se compose de plusieurs étapes : la modélisation GLM de taux de sortie, la simulation du modèle validé et le lissage des aléas, etc.



Pour construire des tables stochastiques, la modélisation du taux de sortie via la méthode GLM (*Generalized linear model*) est un premier pas. La modélisation de GLM est choisie en raison de l'existence de deux facteurs : l'ancienneté de maintien de l'état et l'âge de l'entrée dans l'état. L'utilisation du logarithme à cette modélisation permet d'obtenir les taux de sortie de valeur positive. Cette modélisation est réalisée avec la variable à expliquer, le taux de sortie de l'état d'incapacité et les variables explicatives, l'âge d'entrée en état et l'ancienneté.

Pour quantifier le risque de modèle, un grand nombre de simulations est effectué. Cette étape donne des réalisations ayant des volatilités importantes. Afin de les rendre plus raisonnables, les méthodes de lissage par splines, de Whittaker-Henderson sont utilisées.

Après avoir lissé les taux simulés, les provisions mathématiques sont calculées avec ces taux. Finalement, on peut obtenir la distribution des provisions mathématiques et aussi l'écart-type de ces montants de PM. Dans l'exemple, on obtient environ 11% de « Écart-type/Moyenne » et cela nous permet de quantifier le risque de modèle en construisant les tables d'expérience de maintien en incapacité avec un modèle GLM.

Dans ce mémoire, faute d'une table d'expérience, nous appliquons cette méthode sur la table de maintien en incapacité fournie par BCAC. Cependant, on pourrait appliquer le même principe à des tables d'expériences propres à un assureur.

La directive Solvabilité II représente un nouveau challenge au monde de l'assurance. Il s'agit de mesurer en détails, plus précisément les risques de l'assureur. De ce point de vue, ce mémoire peut contribuer à amplifier les études sur le risque d'incapacité ou d'invalidité.

Synthesis

The objective of this paper is to propose practical stochastic methodologies for calculating technical provisions for Pension and Contingency Fund, particularly, in the coverage of disability⁶. This type of coverage indemnifies workers against diseases or accidents, in addition to the general insurance plan of Social Security in France.

For the Pension and Contingency Fund market in France, mathematical provisions and outstanding claims reserves amount to respectively 75.6% and 16.4% in 2011, which explain a large portion of technical provisions, constituted in *Institutions de prévoyance*⁷.

Although the coverage of disability, under the current regulation in France, belongs to non-life insurance, calculating methods of technical provisions which is being used in life insurance are borrowed for it. Mathematical provisions, for example, are estimated by hypothesis from regulatory tables of the coverage of disability. Insurers also hoard outstanding claims reserves for the coverage because of probable lateness of payment. We concentrate on stochastic calculation method for these two technical provisions: mathematical provisions and outstanding claims reserves.

Stochastic methods for calculating technical provisions make us get a result similar to the theoretical result. In this paper, we present a theoretical result by random drawing which follow the law of observed phenomena. These methods also allow us to obtain the distribution of technical provisions.

In the directive Solvency II, under the new regulatory system, insurers should evaluate their assets and liabilities as realistic as possible reflecting the risks that may affect future cash flows. In this frame, stochastic methodologies for calculating technical provisions may provide us an insight in calculating technical provisions from the viewpoint of economic balance sheet with the best estimate and risk margin.

This paper is structured as follows. Part I and II present the description of market in Pension and Contingency Fund and the illustration of technical provisions under the current regulation. Part III proposes stochastic methodologies of calculating mathematical provisions and outstanding claims reserves, and Part IV presents their applications. In Part V, a methodology for constructing of stochastic tables is proposed. Finally, we describe the perspective in Solvency II in Part VI.

Methodology for mathematical provisions

Mathematical provisions need to be calculated, under the current regulation, following the principle of prudence. This principle makes it be only used in calculating mathematical provisions for the regulation tables or the experience tables which certified by an independent actuary who is authorized by *l'Institut des Actuaires*. There are three ruling laws in the disability coverage frame, used for the constructing regulation tables: *the law of entry and stay in temporary disability*, *the law of entry and stay in permanent disability*, and *the law of transition to permanent disability (from temporary disability)*. BCAC⁸ designed these tables in 1993 by analyzing the four biggest insurance companies (AGF, AXA, GAN and UAP) portfolios in France.

⁶ This type of coverage compensates individuals for disability resulted from accident or diseases. In fact, this kind of coverage is divided into *incapacité* and *invalidité* in French system. In this paper, I distinguish disability from permanent disability only when necessary.

⁷ [12] CTIP

⁸ BCAC : Bureau Commun des Assurances Collectives

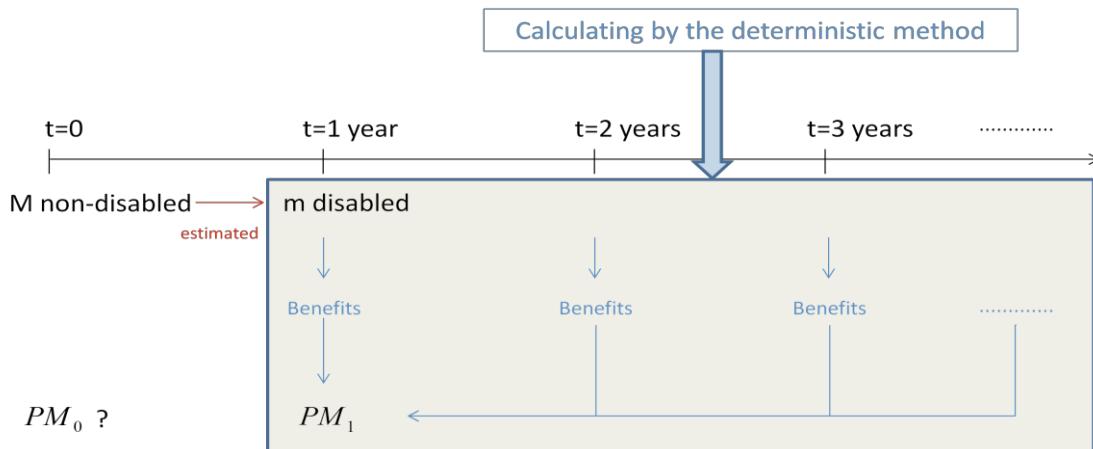
Under the current regulation, only insurants who are already disabled are considered in calculating mathematical provisions. In contrast, Solvency II extends the boundary to the insurants who are non-disabled. We evaluate ultimate mathematical provisions at temporal vision $t=1$ by extending the boundary to the insurants non-disabled.

We evaluate mathematical provisions in a portfolio having M insurants of the same profile; all of them are non-disabled at $t=0$. Suppose that a reliable statistic or estimation gives the probability p that one non-disabled person is in the phase of disability in a certain period of time, e.g., in one year. If the draw, p' , is lower than the probability p , after having randomly drawing between $(0;1)$, one consider that the person is in disability state after one year. We carry out this random draw with large numbers to have a high reliability. Theoretically, the more is important the number of simulations, the distribution of numbers -who enters into the phase of disability in one year- the more is similar to the normal distribution according to the central limit theorem.

To utilize this methodology, we estimate first the probability p that one non-disabled person is in the phase of disability after one year. With the statistics given by INSEE⁹, the law of BCAC and the Bayes' theorem, we estimate p at 3.758% for an insurant aged 40 years old. After having carried out the random draw with large numbers, we determine the number of people in disability after one year with the estimation of p . We can obtain the distribution of passing rates from non-disabled to disabled phase of the portfolio in stochastic way.

Then, we can evaluate the mathematical provision according to deterministic formulas and it permits us to find the distribution of mathematical provisions in the total portfolio in one year.

The steps of this methodology are summarized in the following diagram:



This methodology gives a short-term forecast about PM evaluation. Once this methodology has been studied, a question still remains about PM evaluation at $t=0$ in the portfolio having all of non-disabled insurants. Under the current regulation, the mathematical provision is evaluated with two parameters: an entrance age and the period of experience in the phase. With regard to this problem, applying deterministic method directly is contained because the period of experience in the phase implies the incidence a priori. In this paper, we do not study this issue further.

⁹ INSEE : Institut National de la Statistique et des Études Économiques (the French National Institute for Statistics and Economic Studies)

Methods for outstanding claims reserves

To obtain the distribution of outstanding claims reserves in a stochastic way, we present the Mack and the Bootstrap methods. In this paper, we present a disability coverage example based on a triangle which consists of accumulated total claims amount, and estimate the ultimate outstanding claims reserve at t=0.

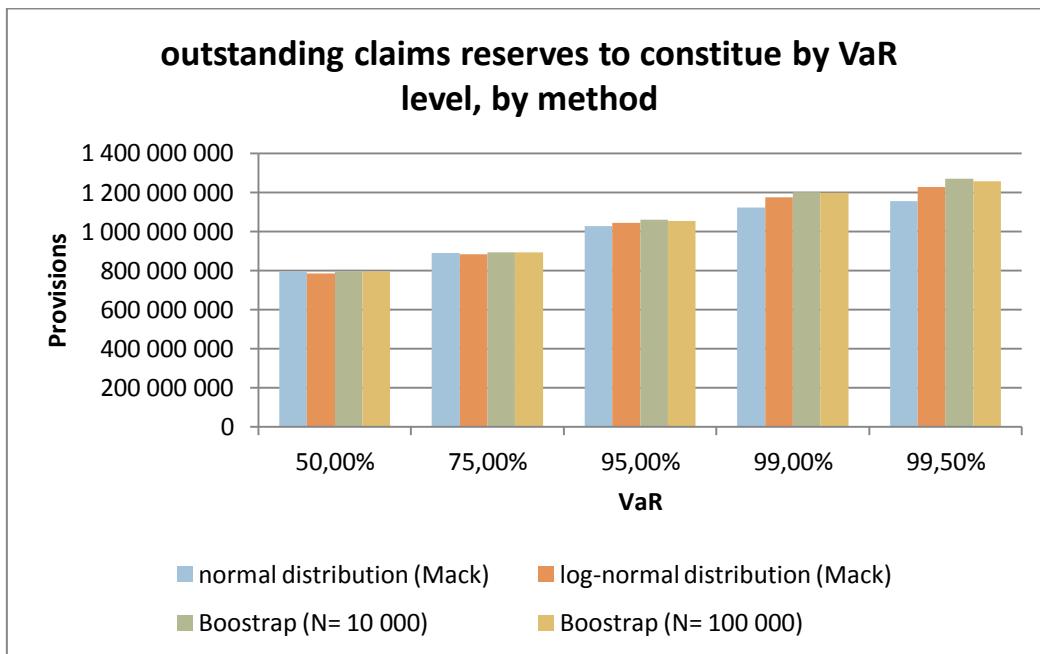
For the Mack method, we study, first, the methods that help verifying the three basic assumptions:

- non-correlation of development factors
- independence of the accident years
- randomness of distribution of residuals

We apply the tests proposed by Mack in 1994 for verifying these three assumptions. All of the assumptions, however, are not verified in this example by these tests. Nonetheless, the Mack methods allow us to get a confidence interval and the distribution of the ultimate outstanding claims reserves under the hypothesis of a probability distribution.

The Bootstrap method is non-parametric. This method generates N triangles under the assumption of independence of Pearson residuals around sampling with replacement from the observed data sample. The advantage of this method lies in its simplicity. The Bootstrap method allows us to have the distribution of ultimate reserves with large number of simulation.

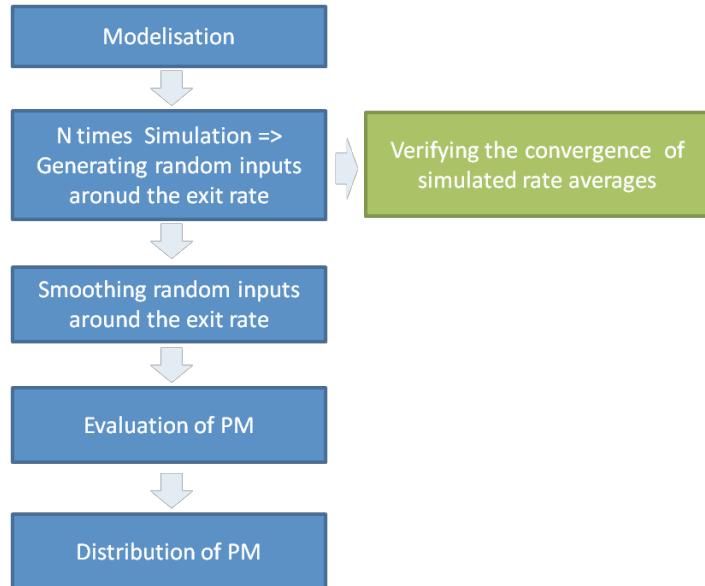
When we compare the results, in this example, the results found by the Mack method with the log-normal distribution are not very different from those found by the Bootstrap method.



relative difference	average	standard deviation	VaR 50%	VaR 75%	VaR 95%	VaR 99%	VaR 99,5%
log-normale distribution / Bootstrap (N=100 000)	1,60%	0,60%	1,56%	1,14%	0,88%	1,83%	2,24%

Methodology of constructing stochastic experience tables

We also propose a methodology that helps constructing stochastic experience tables of entry and stay in temporary disability in order to measure the model risk. The exit rates from the phase of disability are used in this methodology. The proposed methodology is made up of several steps: modelisation GLM of exit rates, the simulation of validate model, and the smoothing of random inputs, etc.



To construct stochastic tables, the modelisation of exit rate via the Generalized Linear Model (GLM) method is a first step. The GLM modelisation is chosen because of the presence of two factors: the period of experience in the phase of disability and the entrance age in the phase of disability. Using logarithm in this modelisation allows us to obtain the exit rates in positive value. The exit rates from the disability phase function as a dependant variable, and the entrance age in the phase of disability and the period of experience in the phase of disability as independent variables in this modelisation.

Simulation with large numbers is carried out to quantify the model risk. This step makes the random inputs have significant volatilities. In order to make the random inputs more reasonable, the smoothing method by splines and the Whittaker-Henderson method are used.

After having smoothed the simulated exit rates, mathematical provisions are calculated with these rates. Finally, we can obtain the distribution of mathematical provisions as well as the standard deviation of these PM. In this example, we obtain about 11% of “Standard deviation/Average” and this allows us to quantify the model risk by constructing experience tables of entry and stay in temporary disability with a GLM model.

In this paper, we apply this methodology to the table of entry and stay in temporary disability given by BCAC because of lack of an experience table. Nonetheless, we would be able to apply the same principle to an insurer's proper experience tables.

The Solvency II directive represents a new challenge in the insurance industry. It concerns about measuring insurer's risks in detailed and more precise way. From this point of view, this paper may contribute to promote further studies about disability risks.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidée, pendant le déroulement de mon stage.

Merci plus particulièrement à Véronique Morand, ma tutrice de stage, qui m'a donné de précieux conseils malgré son emploi du temps chargé tout au long de la rédaction.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à Hervé Morand et Michel Boiteux, les dirigeants de la société, pour m'avoir accueillie dans la société.

Je tiens à remercier à Laetitia Spanu, la tutrice du mémoire et le manager de l'équipe d'études actuarielles, qui m'a donné de précieux conseils, relu et corrigé ce mémoire et m'a transmis sans aucune réserve ses connaissances.

Je remercie à Gwenaëlle Pelloux-Prayer et Yewen Song qui ont consacré beaucoup de temps à relire et à corriger ce mémoire.

Enfin, je remercie à Olivier Wintenberger, responsable du master, pour m'avoir soutenue au cours de l'année.

Sommaire

Résumé.....	2
Abstract.....	3
Synthèse	4
Synthesis	8
Introduction générale	16
Partie I Prévoyance.....	17
1. Marché de la prévoyance.....	17
2. Définition et garanties de prévoyance	22
Partie II Les provisions actuelles en prévoyance.....	24
1. Présentation	24
2. Provisions mathématiques.....	26
2.1. Les méthodes de calcul des PM	26
2.2. Principe de calcul des provisions mathématiques	26
2.3. Calcul des provisions mathématiques	27
2.3.1. Actualisation: Taux technique	27
2.3.2. Probabilisation : tables réglementaires	28
2.3.3. Calculs détaillés	29
3. Les autres provisions.....	34
3.1. Les provisions de primes	34
3.1.1. Provision pour primes non acquises (PPNA)	34
3.1.2. Provision pour risques en cours (PREC)	34
3.2. Les provisions de sinistres	34
3.2.1. Provisions pour sinistres déclarés non encore réglés	34
3.2.2. Provisions pour tardifs (IBNR)	34
3.3. Les provisions globales	37
3.3.1. Provision pour aléas financiers (PAF).....	37
3.3.2. Provisions pour Participation aux Excédents (PPE).....	37
3.3.3. Provision d'égalisation (PE)	38
3.3.4. Provision pour frais d'acquisition reportés (PFAR)	38
3.3.5. Réserve de capitalisation	38
Partie III Evaluation stochastique des provisions techniques en prévoyance.....	40
Préambule : Mesure le risque la Value at Risk	40
VaR (Value at Risk).....	40
TVaR (Tail Value at Risk).....	41
1. Provisions mathématiques.....	43

1.1.	Tirage aléatoire avec grand nombre	43
1.2.	Engagement dans un an vis-à-vis d'assurés valides à t=0.....	46
1.2.1.	Probabilité d'entrée dans l'incapacité d'une personne valide	46
1.2.2.	Calcul des provisions mathématiques.....	48
2.	Provisions pour sinistres à payer : PSAP.....	50
2.1.	Méthode paramétrique : Méthode de Mack.....	50
2.2.	Méthode non paramétrique : Bootstrap	51
Partie IV	Application : Méthodes d'évaluation des provisions techniques.....	55
1.	Provisions mathématiques.....	55
1.1.	Calcul déterministe	55
1.1.1.	Garantie : Incapacité	56
1.1.2.	Garantie : Invalidité	57
1.2.	Calculs stochastiques : Engagement dans un an vis-à-vis d'assurés valides à t=0	58
1.2.1.	Probabilité que l'assuré entre dans l'état d'incapacité.....	58
1.2.2.	Les effectifs entrés en incapacité dans un an.....	60
1.2.3.	Calcul des provisions mathématiques : incapacité	63
1.2.4.	Calcul des provisions mathématiques : invalidité.....	68
1.2.5.	Conclusion.....	69
2.	Provision pour sinistres à payer.....	70
2.1.	Évaluation déterministe: Chain Ladder	70
2.2.	Méthode Mack.....	71
2.2.1.	Vérification des hypothèses de la méthode Mack.....	71
2.2.2.	Résultats par la méthode Mack.....	77
2.3.	Évaluation stochastique : Bootstrap.....	77
2.4.	Comparaison des résultats	81
Partie V	Une méthodologie de la construction des tables d'expérience stochastiques	83
1.	Cadre théorique.....	85
1.1.	Modélisation.....	85
1.1.1.	Quelques modèles appliqués à la mortalité	85
1.1.2.	Modèles linéaires généralisés : GLM	86
1.2.	Simulation.....	90
1.3.	Méthodes d'ajustement.....	91
1.3.1.	Méthode d'ajustement paramétrique : Lissage par splines	92
1.3.2.	Méthode de Whittaker-Henderson	96
1.3.3.	Validation de l'ajustement	100
1.4.	Convergence	101
2.	Application : Table de maintien en incapacité.....	103

2.1.	Modélisation et validation du modèle	103
2.2.	Simulation.....	106
2.3.	Méthode de lissage	106
2.4.	Détermination des tables stochastiques	111
2.5.	Distribution des PM.....	112
2.6.	Convergence des taux de sortie simulés	114
Partie VI Perspectives : la directive Solvabilité II.....		118
Conclusion générale.....		122
Bibliographie.....		124
Annexe		126
1.	Loi forte des grands nombres	126
2.	Théorème Central Limite.....	126
3.	Théorème de Bayes	126
4.	Fonction VBA : PM déterministe.....	126
4.1.	Garantie : Incapacité	126
4.2.	Garantie : Invalidité.....	128
5.	Code VBA : méthode de lissage de Whittaker-Henderson	128
Index		130
1.	Liste des tableaux	130
2.	Liste des figures	130

Introduction générale

En prévoyance, il y a plusieurs types de garanties qui sont classées soit en assurance vie ou soit en assurance non vie. Parmi les garanties principales en prévoyance, les garanties de maintien en incapacité ou en invalidité constituent le versement d'indemnités périodiques déclenchées par le sinistre jusqu'à la sortie de l'état d'incapacité ou d'invalidité. C'est donc des contrats classés en assurance non vie ayant l'aspect d'assurance vie. Cela nous conduit à provisionner en utilisant des méthodes d'assurance vie et d'assurance non vie sous la réglementation actuelle. Afin d'étudier les provisionnements en prévoyance, il faut donc étudier des méthodes de provisionnement d'assurance vie et d'assurance non-vie.

Sous Solvabilité I, le principe de prudence doit être respecté au cours du provisionnement. Basées sur ce principe, les provisions mathématiques sont calculées avec les tables réglementaires. En effet, les provisions mathématiques fournissent une espérance de la provision réelle par des formules fermées au périmètre des sinistrés dans la réglementation actuelle. Contrairement au calcul des provisions mathématiques, les provisions pour sinistres à payer sont calculées par des méthodes statistiques en se composant de paramétrage et d'estimation de manière déterministe sous la réglementation actuelle.

Sous Solvabilité II, les assureurs sont tenus d'évaluer la valeur de leur actif et de leur passif de la manière la plus réaliste possible en reflétant les risques qui affectent les *cash flows* futurs. Le provisionnement se décompose en *best estimate* et la marge de risque. Dans ce cadre, l'estimation au plus juste possible des risques de l'assureur devient un sujet important. En particulier, le périmètre du calcul est étendu aux assurés dans la garantie d'incapacité ou d'invalidité contrairement au calcul sous Solvabilité I.

De ce point de vue, nous allons proposer des méthodologies stochastiques du calcul des provisions mathématiques et des provisions pour sinistres à payer. Il s'agit de la modélisation du passif d'assurance, particulièrement les provisions techniques. Les méthodes de calcul stochastique pour l'évaluation des provisions techniques nous permettront d'approcher le résultat théorique recherché en effectuant des tirages suivant la loi du phénomène.

D'abord, nous étendons le périmètre du calcul aux assurés pour les provisions mathématiques de manière stochastique au calcul des provisions mathématiques.

Pour le calcul des provisions pour sinistres à payer, nous présentons la méthode de Mack et la méthode de Bootstrap. En particulier, nous approfondissons les études sur les hypothèses prises par Mack.

Enfin, nous proposons une méthodologie de la construction des tables stochastiques d'expérience qui permettra de mesurer le risque de modèle.

Partie I Prévoyance

1. Marché de la prévoyance

Le marché de la prévoyance est partagé en trois grandes familles d'intervenants :

- assureurs (régis par le Code des Assurances)
- mutuelles complémentaires, appelées mutuelles 45 (régies par le Code de la Mutualité)
- institution de prévoyance (régies par le Code de la Sécurité Sociale)

Les mutuelles 45 ne sont agréées que pour la couverture complémentaire maladie, et les institutions prévoyances et compagnies d'assurance peuvent vendre des couvertures de prévoyance complètes.

Les fédérations professionnelles de ces trois familles sont :

- la FFSA (ou le GEMA)¹⁰ pour les assureurs
- la FNMF¹¹ pour les mutuelles 45
- le CTIP¹² pour les institutions de prévoyance

Les chiffres fournis par le CTIP ne donnent qu'une vision partielle du marché. Cependant, ils sont généralement les plus détaillés sur le marché de la prévoyance.

- Description

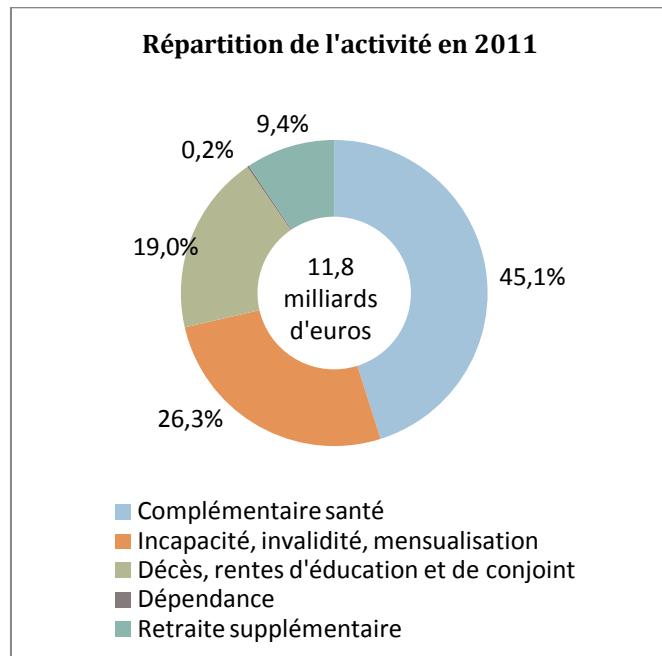
D'après le rapport annuel publié par CTIP (cf. figure 1), l'ensemble des cotisations des garanties de complémentaire santé, de prévoyance (décès, incapacité, invalidité, dépendance) et de retraite supplémentaire est estimé à 11,8 milliards d'euros pour l'année 2011. La garantie complémentaire santé constitue la part la plus importante parmi les activités de prévoyance au niveau des cotisations (6,5 milliards d'euros, 45,1%) suivie par la garantie « Incapacité, invalidité et mensualisation » en deuxième position (5,3 milliards d'euros, 26,3%).

Par rapport à l'année 2010, l'ensemble des cotisations en prévoyance a progressé de 4,7% pour atteindre 5 353 millions d'euros (5 115 millions d'euros en 2010) (cf. tableau 1), tandis que les cotisations en complémentaire santé et en retraite supplémentaire ont diminuées.

¹⁰ FFSA : Fédération Française des Sociétés d'Assurances / GEMA : Groupement des entreprises mutuelles d'assurance

¹¹ FNMF : Fédération nationale de la mutualité française

¹² CTIP : Centre technique des institutions de prévoyance

Figure 1 : Répartition de l'activité en 2011¹³**Évolution des cotisations par garantie en 2011**

[en millions d'euros]

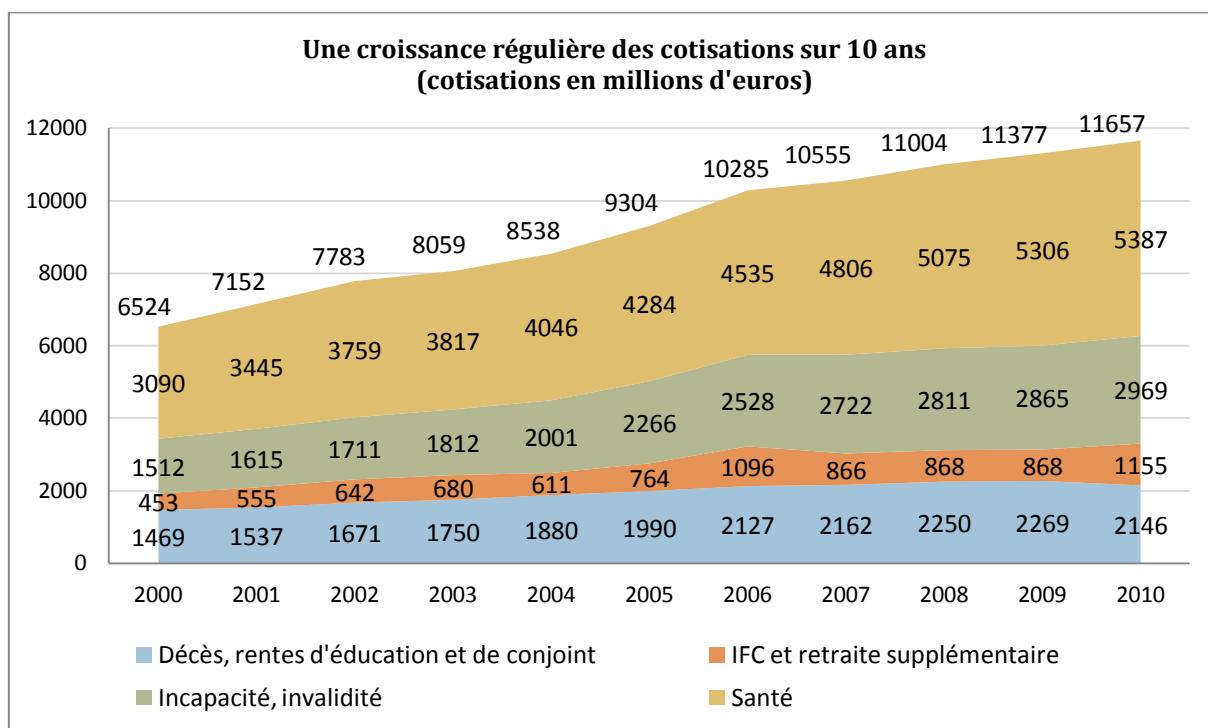
	Cotisations*		
	2010	2011	taux de croissance (2010/2011)
Total complémentaire santé	5 387	5 309	-1,4%
Décès, rentes d'éducation et de conjoint	2 146	2 234	4,1%
Incapacité, invalidité, mensualisation	2 944	3 094	5,1%
Dépendance	25	25	-
Total prévoyance	5 115	5 353	4,7%
Total retraite supplémentaire	1 155	1 111	-3,8%
TOTAL	11 657	11 773	1,0%

*affaires directes, hors réassurance et acceptations.

Tableau 1 : Évolution des cotisations par garantie en 2011¹⁴

Le secteur de la prévoyance est en progression au niveau des cotisations sur les dix dernières années (cf. figure 2). La garantie complémentaire santé est particulièrement en augmentation. Le montant des cotisations en 2010 est approximativement 1,8 fois plus important que celui en 2000.

¹³ [12] CTIP¹⁴ [12] CTIP

Figure 2 : Une croissance régulière des cotisations sur 10 ans¹⁵

Par ailleurs, la prévoyance constitue une part importante dans le système social français. Selon CTIP [12], plus de 13 millions de salariés, représentant 70 % des salariés du secteur privé, bénéficient actuellement des garanties de prévoyance négociées dans 252 conventions collectives des branches professionnelles dans le cadre des institutions de prévoyance. Parmi ces dernières, 60 prévoient également une couverture en complémentaire santé qui concerne plus de 3 millions de salariés.

En 2011, plus de 2 millions d'entreprises ont confié la gestion de couvertures de prévoyance complémentaire à une institution au profit des 13 millions de participants en prévoyance (décès, incapacité, invalidité, dépendance) et des 6,5 millions de participants pour la complémentaire santé. Les deux tiers des entreprises, majoritairement des entreprises comptant moins de 50 salariés, sont adhérentes auprès d'une institution professionnelle.

En termes de prestations, l'ensemble des prestations, en santé ou en cas de décès, d'incapacité, d'invalidité ou de dépendance, versées par des sociétés d'assurances, des mutuelles 45 et des institutions de prévoyance est estimé à 38,1 milliards d'euros pour l'année 2011 d'après la FFSA (cf. tableau 2).

¹⁵ [31] CTIP

Prestations versées au titre des dépenses de soins et de biens médicaux					
Source : DREES					
En milliards d'euros	2007	2008	2009	2010	2011*
Régimes obligatoires (1)	124,5	127,5	131,7	134,9	138,0
Organismes d'assurances (2)	21,0	22,1	22,9	23,7	24,5
Sociétés d'assurances	5,0	5,5	5,9	6,2	6,6
Mutuelles 45	12,2	12,6	12,9	13,2	13,4
Institutions de prévoyance	3,8	4,0	4,1	4,3	4,5
Ménages (3)	14,9	16,1	16,4	16,4	16,4
Ensemble (1)+(2)+(3)	160,4	165,7	171,0	175,0	178,9

Prestations versées en cas de décès, d'incapacité, d'invalidité ou de dépendance					
Source : FFSA-GEMA-FNMF-CTIP					
En milliards d'euros	2007	2008	2009	2010	2011*
Régimes obligatoires (A)	24,8	25,8	26,6	27,2	27,9
Organismes d'assurances (B)	12,1	12,7	13,1	13,2	13,6
Sociétés d'assurances	7,4	7,5	8,1	8,0	8,2
Mutuelles 45	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3
Institutions de prévoyance	3,5	3,9	3,7	3,9	4,1
Ensemble (A)+(B)	36,9	38,5	39,7	40,4	41,5

* Estimation FFSA-GEMA

Tableau 2 : Prestations versées par garantie en prévoyance¹⁶

- Clauses de participation aux bénéfices (PB)

L'ACP (Autorité Contrôle Prudentiel)¹⁷ donne la définition de la participation aux bénéfices en assurance vie :

La gestion des cotisations épargnées dégage des produits dénommés bénéfices techniques et financiers. La participation aux bénéfices est une obligation légale à la charge des assureurs selon laquelle les assureurs font participer leurs assurés à ces bénéfices.

L'Article L331-3 du Code des Assurances définit l'obligation légale de participation aux bénéfices.

Les catégories des contrats concernés par le dispositif collectif de participation aux bénéfices sont :

- les contrats de risque décès individuels et, depuis l'arrêté du 23 avril 2007, collectifs (par exemple, contrats emprunteurs)

Les soldes de gestion des risques accessoires d'invalidité – arrêt de Travail sont aussi pris en compte car les garanties ont des caractéristiques des garanties assurance vie.

Selon la réglementation, il n'y a aucune obligation d'attribution à telle ou telle catégorie d'assurés, autrement dit, il existe une contrainte globale et pas de contrainte portefeuille par portefeuille ou contrat par contrat.

¹⁶ [16] FFSA

¹⁷ [33] ACP

Un taux plancher est fixé par la réglementation : Un taux de participation aux bénéfices s'élève à 85 % des résultats financiers et 90 % des bénéfices (100 % des pertes) pour les résultats techniques et de gestion. Ce calcul s'effectue globalement au niveau de l'assureur.

Par ailleurs, la constitution d'une provision qui va être utilisée pour reverser la participation aux bénéfices au fil des ans doit intervenir dans un délai d'au plus de 8 ans (article A331.9 du Code des Assurances) à compter de leur constitution. Les entreprises d'assurance doivent donc déterminer aux assurés des bénéfices de leur gestion technique et financière dans un délai d'au plus de 8 ans depuis 1993.

Des clauses contractuelles peuvent préciser le mécanisme de participation aux bénéfices.

La participation aux bénéfices peut être définie au niveau du contrat ou d'un ensemble de contrats. Une analyse précise des clauses contractuelles de participation aux bénéfices est donc nécessaire lors de la souscription.

2. Définition et garanties de prévoyance

- Définition de prévoyance

La prévoyance est une branche d'assurance qui permet de couvrir les risques liés à la personne. Elle est définie, par exemple, dans l'article de loi n° 89-1009 du 31 décembre 1989, dite loi EVIN :

La prévoyance regroupe les opérations ayant pour objet la prévention et la couverture du risque décès, des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne ou liés à la maternité ou des risques d'incapacité de travail ou d'invalidité ou du risque chômage.

Le Code de la Sécurité Sociale (l'article L.931-1) définit les institutions de prévoyance : des personnes morales de droit privé ayant un but non lucratif, administrées paritairement par des membres adhérents et des membres participants définis à l'article L. 931-3, selon lequel les membres adhérents d'une institution de prévoyance sont la ou les entreprises ayant adhéré à un règlement de l'institution ou souscrit un contrat auprès de celle-ci.

L'article L. 931-3 précise que les adhérents sont considérés comme les entreprises, au sens du présent titre, toute personne physique ou morale qui emploie un ou plusieurs salariés.

D'après l'article L.931-1, les institutions de prévoyance ont pour objet :

- i) *De contracter envers leurs participants des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine, de s'engager à verser un capital en cas de mariage ou de naissance d'enfants ou de faire appel à l'épargne en vue de la capitalisation et de contracter à cet effet des engagements déterminés ;*
- ii) *De couvrir les risques de dommages corporels liés aux accidents et à la maladie ;*
- iii) *De couvrir le risque chômage.*

Particulièrement, les institutions de prévoyance gèrent des contrats prévoyance à caractère collectif, autrement dit, dans le cadre exclusif de l'entreprise ou de la branche professionnelle. L'une des particularités des institutions de prévoyance porte sur leur gestion paritaire. Fondé dans le cadre de l'entreprise ayant leurs acteurs des employeurs et des salariés, ces mêmes partenaires concernent directement la mise en œuvre et la gestion des garanties dans l'intérêt exclusif des entreprises adhérentes et des salariés participants. La prévoyance collective et leur gestion paritaire font des institutions de prévoyance des partenaires naturels des entreprises.

- Garanties de prévoyance

Les garanties de prévoyance les plus courantes sont l'incapacité, l'invalidité, le décès, la rente éducation, la rente de conjoint, les obsèques, ainsi que la santé complémentaire et la dépendance. Certaines garanties sont facultatives.

La prévoyance se distingue en : prévoyance collective salarié et prévoyance individuelle.

Les principales garanties présentes sur le marché de la prévoyance collective du salarié sont :

- ITT – Incapacité Temporaire Totale

La garantie consiste au versement d'Indemnités Journalières si l'arrêt de travail intervient avant l'âge de la retraite et si la durée est supérieure à la franchise définie au contrat. La durée maximum d'une ITT est de 1095 jours soit 3 ans. Les assurés d'incapacité peuvent passer en invalidité selon le critère défini.

- IPP / IPT – Invalidité Permanente Partielle / Totale

La garantie consiste au versement d'une rente d'invalidité fonction du niveau d'invalidité définie par la Sécurité Sociale. L'invalidité fait soit suite à une période d'incapacité ou directement suite à un accident ou une maladie professionnelle.

- Décès – Obligatoires

C'est la garantie de base de tout contrat de prévoyance. La garantie consiste en un versement d'un capital aux bénéficiaires, déterminé en fonction d'un pourcentage du salaire de l'assuré décédé.

- Décès accidentel, doublement accident

Ce sont les capitaux annexes au versement de capital décès en cas de décès par accident ou de doublement en cas de décès simultané de l'assuré et de son conjoint.

- Rente d'éducation

La garantie consiste au versement d'une rente aux enfants de l'assuré décédé, soit d'un montant fixe ou d'un montant progressif avec l'âge de l'enfant bénéficiaire afin de financer les études de l'enfant. Il existe une limite de versement de la rente liée à l'âge, ou la date de fin d'étude.

- Rente de conjoint

Le versement d'une rente se présente sous deux formes :

- Rente temporaire : versement d'une rente définie sur le certificat d'adhésion pendant une durée prédéfinie
- Rente viagère, complétant les droits acquis par l'assuré décédé si le décès est survenu avant sa retraite

- Obsèques

La garantie constitue au versement d'un capital en vue du financement des obsèques. Le souscripteur détermine le niveau de financement et désigne un bénéficiaire. Selon les formules, les contrats d'assurance obsèques permettent de prévoir le financement et éventuellement l'organisation des obsèques, le cas échéant, le contrat combine un contrat d'assurance vie et un contrat de prestations funéraires, ce qui implique obligatoirement l'action conjointe d'un assureur et d'un opérateur funéraire.

- Santé complémentaire

Le but de cette garantie est de compléter les prestations des régimes obligatoires d'assurance maladie. Ces contrats d'assurance ont pour objet de garantir la maladie, l'accident et la maternité. Les garanties de remboursement des frais de soins et de biens médicaux varient selon les contrats, de la prise en charge du seul ticket modérateur au remboursement total des frais laissés à la charge de l'assuré.

- Dépendance

La garantie dépendance constitue au versement des prestations financières lorsque l'assuré est en état de dépendance. L'état de dépendance est défini par les grilles basées sur des indices physiologiques. Parmi les grilles, la grille AGGIR (Autonomie Gérontologie Groupes Iso-Ressources) permet d'évaluer le degré de dépendance des assurés, en déterminant, leur appartenance à un des 6 groupes de la nomenclature, de GIR 1 à GIR 6.

La terminologie dépendance est plus souvent associée à la perte d'autonomie liée au grand âge.

Partie II Les provisions actuelles en prévoyance

1. Présentation

- Provisions techniques au bilan comptable

Le bilan d'un assureur décrit la situation financière de l'entreprise à la date d'inventaire ou de clôture des comptes. Au bilan comptable (cf. figure 3), l'actif représente la valeur comptable des actifs et le passif représente les fonds propres, les provisions techniques et les autres passifs à cette date. Une exigence de marge de solvabilité est calculée à partir des éléments techniques. Elle doit être couverte par l'entreprise par des fonds propres afin de lui permettre de conserver son agrément. Les provisions techniques sont comptabilisées au passif mais la partie cédée au réassureur est comptabilisée à l'actif. Les calculs de provisions présentés ici ont donc un impact, à la fois sur le passif et l'actif du bilan.

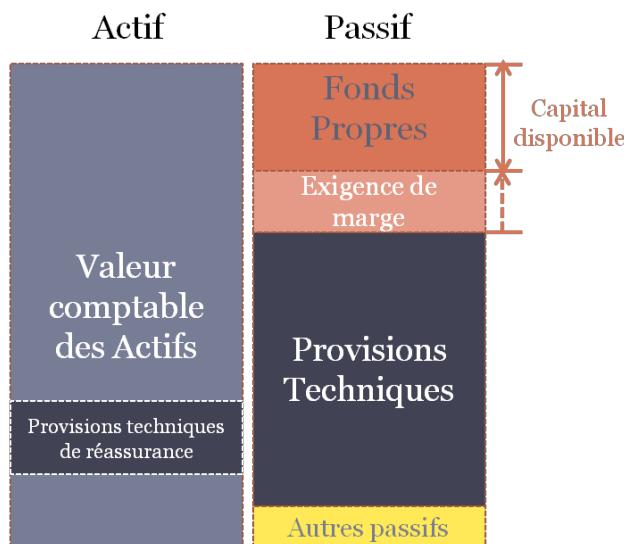


Figure 3 : Bilan comptable

Pour les institutions de prévoyance, l'ensemble des provisions techniques est estimé à 37 564 millions d'euros pour l'année 2011 en progression de 6,5% par rapport à l'année 2010 (cf. tableau 3).

Provisions techniques

[en millions d'euros]

	2010	2011	Δ10/11
Provisions mathématiques	26 974	28 380	5,2%
Provisions pour sinistres à payer	6 191	6 172	-0,3%
Provisions pour participation aux excédents	652	872	33,7%
Autres provisions techniques	1 455	2 140	47,1%
Total des provisions techniques*	35 272	37 564	6,5%

*opérations directes uniquement

Tableau 3 : Provisions techniques pour les institutions de prévoyance (2010-2011)¹⁸

¹⁸ [12] CTIP

Les provisions techniques sont définies par la réglementation, en séparant les branches vie et non vie. En prévoyance, les garanties en vie et en non vie existent en même temps. Les provisions techniques sont traditionnellement regroupées en :

- les provisions mathématiques
- les autres provisions
 - les provisions de prime
 - les provisions de sinistre
 - les provisions globales

Les provisions mathématiques se définissent par la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur (les prestations) et par les assurés (les primes). Les provisions de prime ou de sinistre sont liées à l'exercice futur ou en cours (ou potentielle). Les provisions globales concernent un ensemble des contrats dans un portefeuille entier, par exemple, la PFAR, la PAF, etc.

Dans ce mémoire, nous suivrons la logique présentée ci-dessus sachant qu'il y a différentes manières de regroupement et de définition selon les critères.

2. Provisions mathématiques

2.1. Les méthodes de calcul des PM

Il existe trois méthodes pour le calcul des PM¹⁹ :

- Méthode prospective

Les PM sont calculées comme la différence entre la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et la valeur actuelle probable des engagements de l'assuré. Cette méthode permet de prendre en compte simplement des changements de base de provisionnement. (Ex. Tables de mortalité, loi de maintien en incapacité ou invalidité, taux technique, etc.)

- Méthode rétrospective

Les PM sont calculées comme la valeur capitalisée de l'écart entre les primes versées par l'assuré et les prestations probables versées par l'assureur. Cette méthode est peu utilisée car elle ne permet pas de prendre en compte des changements de base de provisionnement.

- Méthode comptable

Dans cette méthode, l'hypothèse retenue pour le provisionnement (taux technique, tables de mortalité, etc.) porte sur l'égalité des ressources prévisionnelles et des dépenses prévisionnelles.

Parmi ces méthodes, seule la méthode de calcul des provisions mathématiques par la méthode prospective est reconnue par la réglementation.

2.2. Principe de calcul des provisions mathématiques

La démarche du calcul des provisions mathématiques consiste en trois étapes : projection, probabilisation et actualisation. Elles correspondent respectivement à des opérations successives sur les versements futurs²⁰ :

- projection : sur l'axe du temps, à partir de la date d'évolution (ou la date de clôture) les versements des prestations futurs sont identifiés en montants nominaux en fonction des dates d'échéance
- probabilisation : nous tenons compte du fait que les prestations soient versées par nature à des conditions liées à la situation du bénéficiaire
- actualisation : cette étape permet de prendre en compte la valeur de l'argent aux différentes dates de règlement

La figure 4 illustre le poids de ces trois facteurs avec des flux futurs, dans une garantie de rente viagère de 1000 euros par an d'un assuré âgé de 40 ans.

Dans cette figure, il y a quatre courbes qui représentent :

- projection de la rente : sans probabilisation ni actualisation
- probabilisation après la projection, sans actualisation
- actualisation avec le taux de 2% après la projection et la probabilisation
- actualisation avec le taux de 3,5% après la projection et la probabilisation

¹⁹ [6] A. DUPONT

²⁰ [3] F. Planchet, J. Winter

selon l'évolution de l'âge de l'assuré.

Nous remarquons que plus le taux technique est important, plus la courbe est loin de la courbe de probabilisation et moins de provision technique sera demandée. Lorsque le taux d'actualisation retenu est nul, les courbes de flux « probabilisation » et « actualisation » sont confondues.

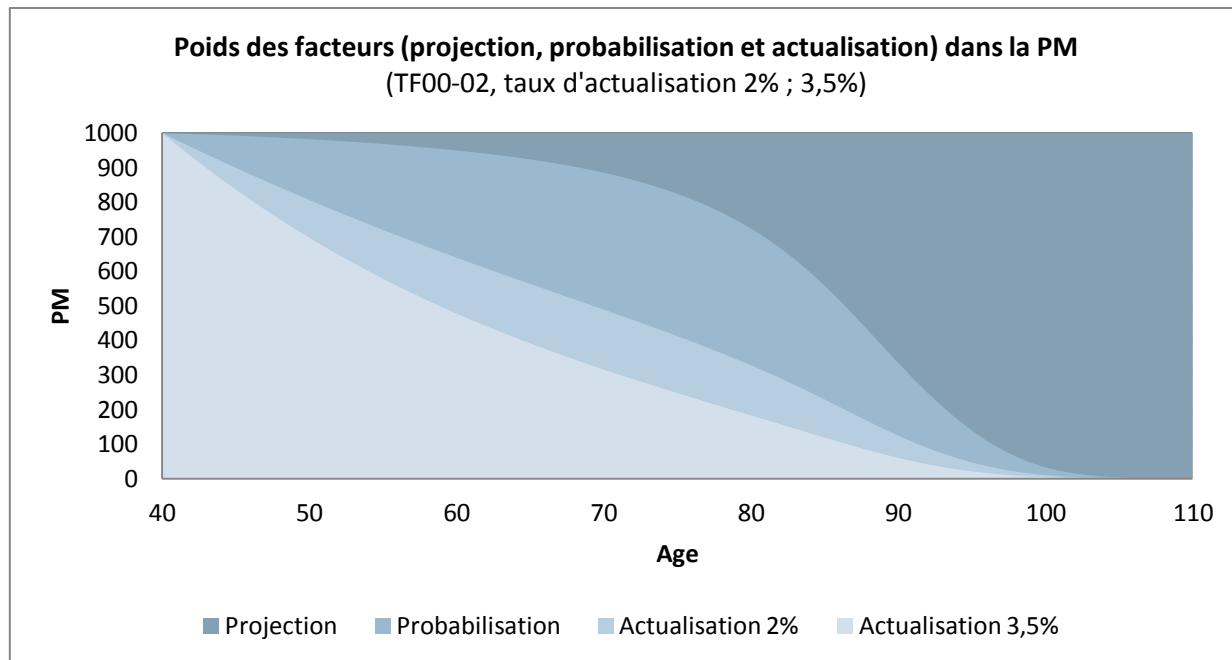


Figure 4 : Poids des facteurs (projection, probabilisation et actualisation) dans la PM

2.3. Calcul des provisions mathématiques

Le calcul des provisions mathématiques utilise deux paramètres : un taux d'intérêt technique et une table biométrique. Le taux d'intérêt technique concerne l'étape d'actualisation et la table biométrique concerne l'étape de probabilisation.

2.3.1. Actualisation: Taux technique

L'étape d'actualisation des flux futurs est effectuée avec la méthode des intérêts composés. Dans la réglementation actuelle, le taux technique utilisé reste constant sur toute la période. (En revanche, dans l'environnement Solvabilité II, on utilisera la courbe des taux sans risque pertinente pour le calcul du *Best Estimate*.)

L'article A 132-1 du code des Assurances définit le taux technique utilisé en tarification sur les garanties vie :

Les tarifs pratiqués par les entreprises pratiquant des opérations mentionnées au 1° de l'article L. 310-1, en ce compris celles mentionnées à l'article L. 143-1 doivent être établis d'après un taux au plus égal à 75 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur une base semestrielle sans pouvoir dépasser, au-delà de huit ans, le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus. Pour les contrats à primes périodiques ou à capital variable, quelle que soit leur durée, ce taux ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus.

L'article A 132-1-1 précise la manière de calcul du taux de référence mensuel :

Le taux moyen des emprunts d'État sur base semestrielle est déterminé en effectuant la moyenne arithmétique sur les six derniers mois des taux observés sur les marchés primaire et secondaire. Le résultat de la multiplication par 60 % ou 75 % de cette moyenne est dénommé "taux de référence mensuel".

Le taux d'intérêt technique maximal applicable aux tarifs est fixé sur une échelle de taux d'origine 0 et de pas de 0,25 point. Il évolue selon la position du taux de référence mensuel par rapport au dernier taux technique maximal en vigueur.

L'article A 331-22 du code des Assurances et l'arrêté du 23 décembre 2010 définissent le taux technique utilisé en tarification sur les garanties non vie :

Un taux d'actualisation qui ne peut excéder 75 p. 100 du taux moyen au cours des vingt-quatre derniers mois des emprunts de l'État français, sans pouvoir dépasser 4,5 p. 100.

En résumant :

	Garanties en vie		Garanties en non vie
Taux de référence mensuel	TME sur base semestrielle		TME au cours des 24 derniers mois
Taux technique	Si Durée > 8 ans ou Prime périodique / capital variable quel que soit la durée	Sinon	
	Min(60% TME ; 3,5%)	Min(75% TME ; 3,5%)	Min(75% TME ; 4,5%)
Particularité	Echelle de taux d'origine 0 de pas de 0,25 point		

2.3.2. Probabilisation : tables réglementaires

À l'étape de probabilisation, les flux sont multipliés par leur probabilité de survenance, estimée à la date de calcul de la provision. Ces probabilités sont données :

- par les tables réglementaires du Bureau Commun des Assurances Collectives (noté BCAC par la suite) : la loi de maintien en incapacité, la loi de maintien en invalidité, la loi de passage d'incapacité en invalidité (A. 331-22 du Code des Assurances, A. 931-10-9 du Code de la Sécurité Sociale et A. 212-9 du Code de la Mutualité)
- ou
- par les tables de mortalité (A. 335-1du Code des assurances) :
 - TH/TF 00-02 : pour le provisionnement des engagements en cas de décès et, en leur appliquant des décalages d'âge, pour le provisionnement des engagements en cas de vie avec sortie en capital. (Arrêté du 20 décembre 2005)
 - TGH/TGF 05 : pour le provisionnement des engagements de rentes viagères (Arrêté du 1er août 2006)

Toutefois, il est possible pour un assureur d'utiliser des tables établies par ses soins et certifiées par un actuaire indépendant.

Pour calculer les PM en cas d'incapacité ou d'invalidité, il faut prendre en compte toutes les successions des états possibles comme décrites à la figure 5.

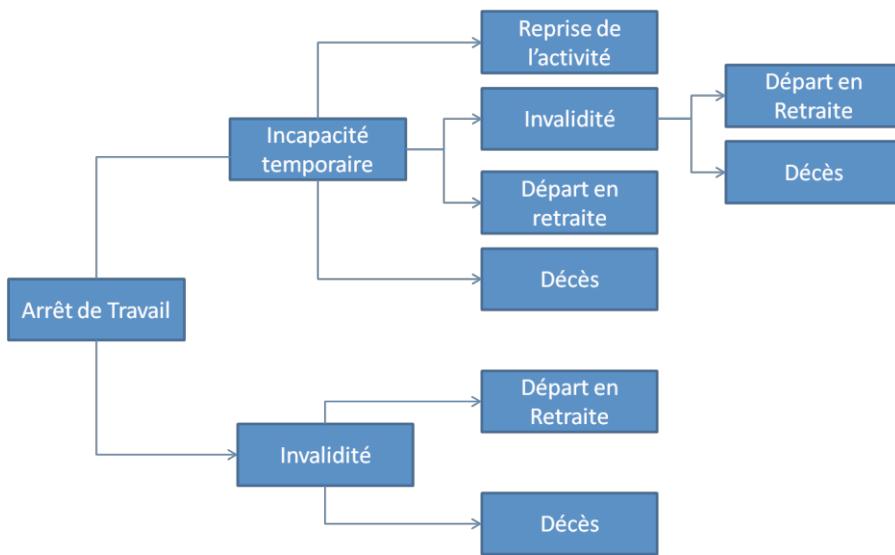


Figure 5 : Succession des états d'un arrêt de travail

2.3.3. Calculs détaillés

Nous nous concentrons, ici, sur les calculs des provisions mathématiques pour les garanties d'incapacité ou d'invalidité, rente éducation et rente de conjoint dans l'approche traditionnelle déterministe. L'approche stochastique sera détaillée plus loin pour les garanties d'incapacité ou d'invalidité.

- Notations communes : garantie d'incapacité et d'invalidité

	Incapacité	Invalidité
x	âge d'entrée en incapacité (en années)	âge d'entrée en invalidité (en années)
k	ancienneté en incapacité, durée <u>en mois</u> entre la date d'entrée en incapacité et la date de calcul avec $k \in \{0, 1, \dots, 35\}$	ancienneté en invalidité, durée <u>en années</u> entre la date d'entrée en invalidité et la date de calcul
i	taux technique annuel	taux technique annuel

- Garantie d'incapacité
 - Notations
 - $l_{inc}(x, j)$: effectif des personnes entrées en incapacité à l'âge x et toujours en incapacité au terme de j mois, déterminé grâce à une loi de maintien en incapacité
 - $s(x, j)$: effectif des personnes entrées en incapacité à l'âge x et qui deviennent invalides au cours du j mois, déterminé grâce à une loi de passage d'incapacité en invalidité
 - $d(x, j)$: le nombre de sorties d'incapacité durant le $(j + 1)$ ième mois d'incapacité pour un assuré entré à l'âge x en incapacité
 - $d^{pass}(x, j)$: le nombre de sorties d'incapacité pour cause de passage en invalidité durant le $(j + 1)$ ième mois d'incapacité pour un assuré entré à l'âge x en incapacité

1) Provision de maintien en incapacité

L'assuré en incapacité perçoit un terme de rente d'incapacité en fin de mois s'il est toujours dans cet état, tant que la garantie est en cours. La provision mathématique de maintien en incapacité pour une prestation mensuelle d'incapacité en service d'un euro est donc définie par la formule suivante :

$$PM_{inc}(x, k) = \sum_{j=k}^{36} \frac{l_{inc}(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\left(\frac{j-k}{12}\right)}}$$

2) Provision de passage d'incapacité en invalidité

L'assuré en incapacité perçoit une rente annuelle d'invalidité à partir du mois j , s'il passe d'incapacité en invalidité au cours de ce mois j . La provision mathématique de passage d'incapacité en invalidité, dite provision technique d'invalidité en attente, pour une prestation annuelle d'invalidité en service d'un euro est définie donc par la formule suivante :

$$PM_{pass}(x, k) = \sum_{j=k}^{35} \frac{s(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\left(\frac{j-k}{12}\right)}} * PM_{inv}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right)$$

où :

- $PM_{inv}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right)$ est déterminé par interpolation linéaire avec les valeurs entières encadrant $x + \frac{j}{12}$. En notant « Ent » la fonction partie entière, on peut écrire :

$$\begin{aligned} PM_{inv}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right) \\ = PM_{inv}\left(Ent\left(x + \frac{j}{12}\right), 0\right) + \left[\left(x + \frac{j}{12}\right) - Ent\left(x + \frac{j}{12}\right)\right] \\ * \left[PM_{inv}\left(Ent\left(x + 1 + \frac{j}{12}\right), 0\right) - PM_{inv}\left(Ent\left(x + \frac{j}{12}\right), 0\right)\right] \end{aligned}$$

3) Provision en cas de décès d'un assuré en incapacité

Le capital décès est versé au cours du mois j si l'assuré en incapacité est toujours dans cet état en début de mois j et qu'il décède entre les dates j et $j+1$, si le mois j est inclus dans la période de garantie, ou s'il passe en invalidité et qu'il décède durant cette période. La provision mathématique pour un capital d'un euro versé en cas de décès d'un incapable, est définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned} PM_{inc}^{DC}(x, k) \\ = \sum_{j=k}^{35} \frac{l_{inc}(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\left(\frac{j-k}{12}\right)}} * \frac{\left(l_{inc}^{DC}(x, j) - l_{inc}^{DC}(x, j+1)\right)}{l_{inc}^{DC}(x, k)} \\ + \sum_{j=k+1}^{36} \frac{s(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\left(\frac{j-k}{12}\right)}} * PM_{inv}^{DC}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right) \end{aligned}$$

où :

- $l_{inc}^{DC}(x, j)$: effectif des personnes entrées en incapacité à l'âge x et toujours en vie au terme de j années, déterminé grâce à une loi de mortalité en incapacité
- $PM_{inv}^{DC}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right)$ est déterminé par interpolation linéaire avec les valeurs entières encadrant $x + \frac{j}{12}$. En notant « Ent » la fonction partie entière, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
PM_{inv}^{DC}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right) \\
= PM_{inv}^{DC}\left(Ent\left(x + \frac{j}{12}\right), 0\right) + \left[\left(x + \frac{j}{12}\right) - Ent\left(x + \frac{j}{12}\right)\right] \\
* \left[PM_{inv}^{DC}\left(Ent\left(x + 1 + \frac{j}{12}\right), 0\right) - PM_{inv}^{DC}\left(Ent\left(x + \frac{j}{12}\right), 0\right)\right]
\end{aligned}$$

- Garantie d'invalidité

- **Notations**

- $l_{inv}(x, j)$: effectif des personnes entrées en invalidité à l'âge x et toujours en invalidité au terme de j années, déterminé grâce à une loi de maintien en invalidité.

1) Provision de maintien en invalidité

L'assuré en invalidité perçoit un terme de rente d'invalidité en fin d'année s'il est toujours dans cet état, à la condition que la garantie soit en cours. La provision mathématique de maintien en invalidité pour une indemnisation annuelle d'invalidité en service d'un euro est donc définie par la formule suivante :

$$PM_{inv}(x, k) = \sum_{j=k}^{\text{âge retraite}-x} \frac{l_{inv}(x, j)}{l_{inv}(x, k) * (1+i)^{j-k}}$$

2) Provision en cas de décès d'un assuré en invalidité

Le capital décès est versé au cours de l'année j si l'assuré en invalidité est toujours dans cet état en début d'année j et qu'il décède entre les dates j et $j+1$, si l'année j est incluse dans la période de garantie. Nous supposons qu'en moyenne les décès ont lieu en milieu d'année. La provision mathématique pour un capital d'un euro versé en cas de décès d'un invalide, est définie donc par la formule suivante :

$$PM_{inv}^{DC}(x, k) = \sum_{j=k}^{\text{âge retraite}-x-1} \frac{l_{inv}(x, j)}{l_{inv}(x, k) * (1+i)^{j-k+\frac{1}{2}}} * \frac{(l_{inv}^{DC}(x, j) - l_{inv}^{DC}(x, j+1))}{l_{inv}^{DC}(x, k)}$$

où

- $l_{inv}^{DC}(x, j)$: effectif des personnes entrées en invalidité à l'âge x et toujours en vie au terme de j années, déterminé grâce à une loi de mortalité en invalidité.

Remarque

Au calcul du nombre de sorties, il y a des différences dans le cas d'incapacité et dans le cas d'invalidité.

✓ Incapacité

$$d(x, k) = d^{pass}(x, k) + d^{décès}(x, k) + d^{rétab}(x, k)$$

$d^{pass}(x, k)$, $d^{décès}(x, k)$, $d^{rétab}(x, k)$ se traduisent respectivement par le nombre de sorties d'incapacité entre l'ancienneté k et $k+1$ pour un assuré entré à l'âge x en incapacité pour les causes respectives : passage en invalidité, décès et rétablissement de l'assuré.

✓ Invalidité

$$d(x, k) = d^{\text{décès}}(x, k) + d^{\text{retraite}}(x, k)$$

$d^{\text{décès}}(x, k)$, $d^{\text{retraite}}(x, k)$ se traduisent respectivement par le nombre de sorties d'invalidité entre l'ancienneté k et $k + 1$ pour un assuré entré à l'âge x en invalidité pour les causes respectives : décès et retraite de l'assuré. Nous considérons qu'il y a peu de probabilité de reprendre le travail pour l'invalidé.

- Les rentes de conjoint

- 1) Reversions de la rente au profit du conjoint

Si le taux de réversion est $t\%$ de la rente de l'assuré (ici, supposons 1 euro) et l'âge de conjoint est y ans plus jeune que l'assuré. La formule de calcul de la PM est la suivante :

$$PM_{RC} = t\% * \sum_{k=\omega-x}^{\omega-(x-y)} \left(\frac{l_{x-y+k}}{l_{x-y}} * \frac{1}{(1+i)^k} - \frac{l_{x+k}l_{x-y+k}}{l_x l_{x-y}} * \frac{1}{(1+i)^k} \right)$$

- 2) Rente viagère

Si la rente est versée au conjoint jusqu'à son décès (versement à terme échu). La formule de calcul de la PM est la suivante :

$$PM_{RC} = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{l_{x+k}}{l_x} * \frac{1}{(1+i)^k}$$

où

- x : âge de l'individu (=conjoint) au moment du décès de l'assuré
- i : le taux d'actualisation annuel
- l_x : nombre d'individus d'âge x dans la table de mortalité

- 3) Rente temporaire

La rente est versée au conjoint à terme échu, pour une durée déterminée. La formule du calcul de la PM est la suivante :

$$PM_{RC} = \sum_{k=1}^n \frac{l_{x+k}}{l_x} * \frac{1}{(1+i)^k}$$

où

- n : durée en années de la rente temporaire
- x : âge de l'individu (=conjoint) au moment du décès de l'assuré
- i : le taux d'actualisation annuel
- l_x : nombre d'individus d'âge x dans la table de mortalité

- Les rentes éducatives

Les rentes éducatives sont versées aux enfants du salarié décédé, en général jusqu'à l'âge maximum dépendant du contrat. Dans le cas d'un enfant handicapé, la rente peut se rendre viagère.

Le calcul de la provision fait appel à une « loi de poursuite d'étude » permettant d'apprecier la probabilité du versement de la rente lorsque celle-ci est conditionnée à la poursuite d'études.

La probabilité de décès de l'enfant a un impact faible sur le niveau de provision entre 0 et 26 ans ; on peut ainsi retenir que la probabilité de décès avant 26 ans et de 0,90% pour les femmes et de 1,59% pour les hommes d'après les tables TH (hommes) et TF (femmes) 00-02 (0,66% et 0,90% respectivement avant 18 ans). Parallèlement, la probabilité d'interrompre des études entre 14 et 18 ans est d'environ 13,5% (que ce soit d'après la référence INSEE 1990 ou INED 1996).

Ces écarts expliquent que la mortalité puisse être négligée dans les calculs de provision.

La formule du calcul de la PM rente éducation, dans le cas où la rente est versée à l'enfant à terme échu jusqu'à un âge limite, est la suivante :

$$PM_{RE} = \sum_{k=1}^{n-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} * \frac{s_{x+k}}{s_x} * \frac{1}{(1+i)^k}$$

où

- x : âge de l'individu (=enfant) au moment du décès de l'assuré (=parent)
- n : âge limite de versement de la rente éducation
- i : le taux d'actualisation annuel
- l_x : nombre d'individus d'âge x dans la table de mortalité
- s_x : nombre d'individus d'âge x qui poursuivent les études (loi de poursuite des études)

La rente étant temporaire, la table de mortalité à utiliser pour le provisionnement est :

- La TH00-02 pour les enfants bénéficiaires de sexe masculin et la TF00-02 pour les enfants bénéficiaires de sexe féminin
- La TH00-02 pour tous les enfants bénéficiaires.

Il est à noter que le choix de la table a peu d'impact sur les jeunes âges.

3. Les autres provisions

3.1. Les provisions de primes

3.1.1. Provision pour primes non acquises (PPNA)

Le montant de la PPNA correspond à la fraction des primes brutes émises qui doit être allouée à l'exercice comptable suivant. Ces provisions s'expliquent par le fait que, d'une manière générale, les cotisations d'assurance doivent être payées au début de la période couverte (début du contrat), qui ne coïncide habituellement pas avec l'exercice comptable.

En général, le montant est calculé par contrat de la manière suivante :

$$\text{PPNA} = \frac{\text{durée résiduelle}}{\text{durée totale}} * \text{primes émises}$$

Dans la réglementation actuelle, sous réserve de l'autorisation de l'ACP (Autorité de Contrôle Prudentiel), une dérogation est possible si la cadence de règlement des sinistres n'est pas linéaire. Dans ce cas on peut adapter le mode de calcul pour tenir compte de la saisonnalité.

3.1.2. Provision pour risques en cours (PREC)

La provision pour risque en cours est destinée à couvrir la charge des sinistres et des frais rapportant à un exercice futur pour la part de ce coût n'étant pas couverte par la provision pour primes non acquises. Il s'agit d'une provision destinée à compenser une insuffisance de tarif.

Le calcul de PREC est formalisé comme suivant :

$$\text{PREC} = \text{MAX}\left(\frac{S}{P} - 1 ; 0\right) * \text{PPNA}$$

Le montant S inclut tous les frais, y compris les frais d'administration liés aux contrats d'assurance en cours et le montant P représente l'ensemble des primes. Le ratio $\frac{S}{P}$ est calculé sur des deux dernières années.

3.2. Les provisions de sinistres

3.2.1. Provisions pour sinistres déclarés non encore réglés

Les provisions pour sinistres déclarés non encore réglés sont évaluées par la méthode dite « Dossier par dossier ». Cette méthode consiste à sommer les montants en suspens pour l'ensemble des sinistres connus.

3.2.2. Provisions pour tardifs (IBNR)

Les sinistres peuvent être déclarés plusieurs mois (ou années) après la fin de l'exercice de survenance.

Nous présentons, ici, une méthode classique pour estimer les provisions pour tardifs : La méthode Chain Ladder. [18]

Avant de présenter les deux méthodes, les triangles de *run-off* doivent être étudiés.

		Années de développement				
Année de survenance	Y _{1,1}	Y _{1,2}	...	Y _{1,n-1}	Y _{1,n}	
	Y _{2,1}	Y _{2,2}	...	Y _{2,n-1}		
	:		Y _{i,i}			
	Y _{n,1}					

Tableau 4 : Triangle de *run-off* des incrément

		Années de développement				
Année de survenance	C _{1,1}	C _{1,2}	...	C _{1,n-1}	C _{1,n}	
	C _{2,1}	C _{2,2}	...	C _{2,n-1}		
		...	C _{i,i}			
	:					
	C _{n,1}					

Tableau 5 : Triangle de *run-off* des montants cumulés

où

- i : indice des années de survenance des sinistres ($i = 1, \dots, n$)
- j : indice des années de développement ou de déroulement ($j = 1, \dots, n$)
- $Y_{i,j}$: montant des sinistres survenus l'année i et payés après j années de développement, on parle également d'incrément
- $C_{i,j}$: les paiements agrégés des sinistres survenus l'année i, en j années de développement ayant la formule suivante. On parle également de montant cumulé

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^j Y_{i,k}$$

Afin de provisionner les paiements non encore effectués, il faut prévoir le montant final des sinistres. En pratique, sous l'hypothèse que n représente le temps maximal nécessaire pour clore une année, cela signifie qu'il s'agit de compléter la partie inférieure du triangle, c'est-à-dire sous la diagonale. On cherche alors les $\hat{Y}_{i,j}$ et les $\hat{C}_{i,j}$ pour $i + j \geq n + 2$:

		Années de développement				
Année de survenance	Y _{1,1}	Y _{1,2}	...	Y _{1,n-1}	Y _{1,n}	
	Y _{2,1}	Y _{2,2}	...	Y _{2,n-1}	Y _{n-1,n-1}	Ŷ _{n-1,n-1}
	:		Y _{i,i}			:
			...		Ŷ _{n-1,n-1}	Ŷ _{n-1,n}
	Y _{n,1}	Ŷ _{n,2}			Ŷ _{n,n-1}	Ŷ _{n,n}

Tableau 6 : Estimation dans le triangle des incrémentes

		Années de développement				
Année de survenance	C _{1,1}	C _{1,2}	...	C _{1,n-1}	C _{1,n}	
	C _{2,1}	C _{2,2}	...	C _{2,n-1}	C _{2,n}	Ŷ _{2,n}
		...	C _{i,i}	...	:	
	:		...		Ŷ _{n-1,n-1}	Ŷ _{n-1,n}
	C _{n,1}	Ŷ _{n,2}			Ŷ _{n,n-1}	Ŷ _{n,n}

Tableau 7 : Estimation dans le triangle des montants cumulés

Après avoir estimé ces paiements futurs, le montant des provisions pour l'année de souscription i est donc donné par :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i} = \hat{Y}_{i,n+2-i} + \hat{Y}_{i,n+3-i} + \cdots + \hat{Y}_{i,n}$$

Un montant total de la provision :

$$R = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i = \sum_{i=1}^n \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i} = \sum_{(i,j) \in \Delta_n} \hat{Y}_{i,j}$$

où $\Delta_n = \{(i,j), i+j \geq n+2, i \leq n \text{ et } j \leq n\}$

- Méthode « Chain Ladder »

La méthode de Chain Ladder a pour but d'estimer les règlements futurs et de compléter les triangles afin de calculer le montant des provisions. L'idée est que le déroulement des paiements soit déterminé par des facteurs de déroulement (notée λ_j) qui ne dépendent que de l'année de déroulement.

Les hypothèses sous-jacentes sont :

- les années de survenance sont indépendantes entre elles,
- les années de développement sont les variables explicatives du comportement des sinistres futurs.

La méthode standard de Chain Ladder consiste à supposer que les $(C_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ soient liés par un modèle de la forme :

$$C_{i,k+1} = \lambda_k * C_{i,k} \quad \forall i, k = 1, \dots, n$$

Les coefficients λ_k peuvent être estimés par :

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}}$$

À partir de ces coefficients estimés, il est possible d'estimer des montants de provision en considérant :

$$\hat{C}_{i,j} = \left(\prod_{k=j-1}^{n+1-i} \hat{\lambda}_k \right) * C_{i,n+1-i}$$

3.3. Les provisions globales

3.3.1. Provision pour aléas financiers (PAF)

Les modalités du calcul de la provision pour les aléas financiers (PAF) sont définies par l'article A331-2 du Code des Assurances.

L'objectif de la PAF est d'obliger l'assureur à conserver en toutes circonstances une marge financière suffisante (25 %) entre le rendement réel des actifs et le taux d'actualisation moyen de manière à compenser une éventuelle diminution du rendement des actifs.

La PAF ne concerne que les risques Vie (rentes de conjoint, rentes éducation). On pourrait imaginer de suivre les critères d'appréciation de la PAF également pour les risques longs non-vie (surtout invalidité).

Le calcul se fait globalement en trois étapes :

- étape 1 : calcul de 80 % du taux de rendement réel des actifs de l'exercice achevé.
- étape 2 : calcul du taux moyen d'actualisation
- étape 3 : comparaison des deux taux et le cas échéant, recalcul des provisions mathématiques, afin de déterminer le montant de la PAF.

Plus précisément, la PAF se calcule de la manière suivante :

- Si $TM < 80\% TR$, il n'y a pas de PAF à constituer
- Si $TM > 80\% TR$, nous recalculons les PM en actualisant au taux 80 % TR : Si $PM(80\% TR) > Provisions d'inventaire (PMT)$ alors $PAF = PM(80\% TR) - PMT$, sinon PAF est nulle.

Le taux de rendement moyen TM et TR se calculent de la manière suivante :

- $TM = \frac{\text{Intérêts techniques}}{\frac{1}{2}(PM \text{ ouverture} + PM \text{ clôture})}$
- $TR = \frac{\text{Produits des placements}}{\text{Montant moyen des placements}}$

La PAF actuellement définie comporte quelques limites : elle repose sur un calcul rétrospectif, global au niveau de l'assureur, et constitue à certains égards une incitation à la réalisation des plus-values latentes sur les actions, lorsque les rendements ne sont déjà pas bons.

3.3.2. Provisions pour Participation aux Excédents (PPE)

Comme nous avons cité au § I.1. la PPE est constituée par le montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires des contrats lorsque ces bénéfices des contrats sont payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produit. La réglementation permet de lisser sur 8 années (article A331.9 du Code des

Assurances) la participation aux bénéfices réglementaire accordée aux contrats pour pallier aux irrégularités des performances. Un taux de participation aux bénéfices s'élève à 85 % des résultats financiers et 90 % des bénéfices (100 % des pertes) pour les résultats techniques et de gestion. Ce calcul s'effectue globalement au niveau de l'assureur.

3.3.3. Provision d'égalisation (PE)

Les modalités du calcul de la provision d'égalisation (PE) sont définies par l'article 39 Quinques GB C.G.I. au Code général des impôts. Elle a pour objectif de faire face aux fluctuations de sinistralité et pour domaine d'application l'assurance de groupe contre les risques décès, incapacité ou invalidité.

Son périmètre est défini de la manière suivante : *La provision est calculée pour chaque contrat d'assurance couvrant les risques en cause ou pour chaque ensemble de contrats de même nature si leurs résultats sont mutualisés.* La dotation annuelle est à 75 % du bénéfice technique du contrat ou de l'ensemble des contrats concernés, net de cessions en réassurance. Par ailleurs, le montant total atteint par la provision ne peut, pour chaque exercice, excéder par rapport au montant des primes ou cotisations afférentes aux contrats concernés, nettes d'annulations et de cessions en réassurance, acquises au cours de l'exercice : 23 % pour un effectif d'au moins 500 000 assurés, 33 % pour un effectif de 100 000 assurés, 87 % pour un effectif de 20 000 assurés et 100 % pour un effectif de 10 000 assurés au plus.

Cette provision doit être utilisée de la manière suivante : *chaque provision est affectée à la compensation des résultats techniques déficitaires de l'exercice dans l'ordre d'ancienneté des dotations annuelles. Les dotations annuelles qui n'ont pu être utilisées conformément à cet objet, dans un délai de dix ans, sont rapportées au bénéfice imposable de la onzième année suivant celle de leur comptabilisation. En cas de transfert de tout ou partie d'un portefeuille de contrats, la provision correspondant aux risques cédés est également transférée.*

3.3.4. Provision pour frais d'acquisition reportés (PFAR)

L'ACP définit la provision pour frais d'acquisition reportés :

Elle correspond à un montant qui est au plus égal à l'écart entre les montants des provisions mathématiques inscrites au bilan et le montant des provisions mathématiques qui seraient à inscrire si les chargements d'acquisition n'étaient pas pris en compte dans les engagements des assurés.

En effet, au moment de la commercialisation, les frais d'acquisition des contrats sont demandés tandis que les ressources d'acquisition sont perçues tout au long du paiement des cotisations. Ce décalage a conduit à la « zillmérisation » des provisions dans les comptes sociaux, c'est-à-dire la valeur actuelle des engagements pris par le souscripteur intègre les chargements d'acquisition.

En pratique, les assureurs qui inscrivent à l'actif de leur bilan et reportent sur la durée de la vie résiduelle les frais d'acquisition sont ceux qui commercialisent des contrats d'assurance vie ou d'épargne à primes périodiques conduisant au versement d'avance sur les commissions.

3.3.5. Réserve de capitalisation

Elle est destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu (plus ou moins-values obligataires). Elle est définie par l'article A333-2 Code des Assurances qui prévoit qu'en cas de vente ou de conversion des valeurs concernées (obligations), des versements ou des prélèvements sont faits sur la réserve de capitalisation de telle sorte que le rendement actuariel des titres cédés soit égal, après

versement et prélèvement, à celui qui en était attendu lors de l'acquisition. Le fondement de la réserve de capitalisation est double :

- d'une part, en cas de baisse des taux, la vente d'une obligation en plus-value procurerait un bénéfice immédiat au prix d'une réduction des revenus futurs, d'où l'idée de ne pas distribuer ces bénéfices et de les doter à une provision appelée réserve de capitalisation
- d'autre part, en cas de hausse des taux, le principe de l'art R332-19 autorisant à ne pas tenir compte des moins-values latentes sur les obligations, un prélèvement sur la réserve de capitalisation permettra de compenser la perte réalisée, en cas de cession.

En effet, la réserve de capitalisation fonctionne comme un volant régulateur qui doit permettre à l'assureur de réaliser des arbitrages obligataires tout en maintenant les revenus en cas de baisse des taux et en parant à la dépréciation de l'actif en cas de hausse des taux. Cette réserve fait partie des fonds propres à l'actif sur le bilan.

Partie III Evaluation stochastique des provisions techniques en prévoyance

Dans la partie III, nous nous concentrons à l'évaluation stochastique des provisions mathématiques et des provisions pour sinistres à payer, en particulier les provisions pour tardifs (également appelées IBNR *Incurred But Not Reported*) pour les garanties d'incapacité et d'invalidité.

Les provisions mathématiques et les provisions pour sinistres à payer constituent les plus importantes parties dans l'ensemble des provisions techniques en prévoyance, respectivement 75% (provisions mathématiques) et 16% (provision pour sinistres à payer). (cf. tableau 3)

Préambule : Mesure le risque la Value at Risk

En assurance, l'utilisation des mesures de risque permet d'estimer le montant de la provision technique à disposer pour honorer l'engagement vis-à-vis des assurés à un certain niveau de seuil de confiance (à 75% cité dans le cadre de QIS 2).

Nous présentons, ici, la méthode de VaR (*Value at Risk*) et la méthode de la TVaR (*Tail Value at Risk*).

VaR (Value at Risk)

- Définition

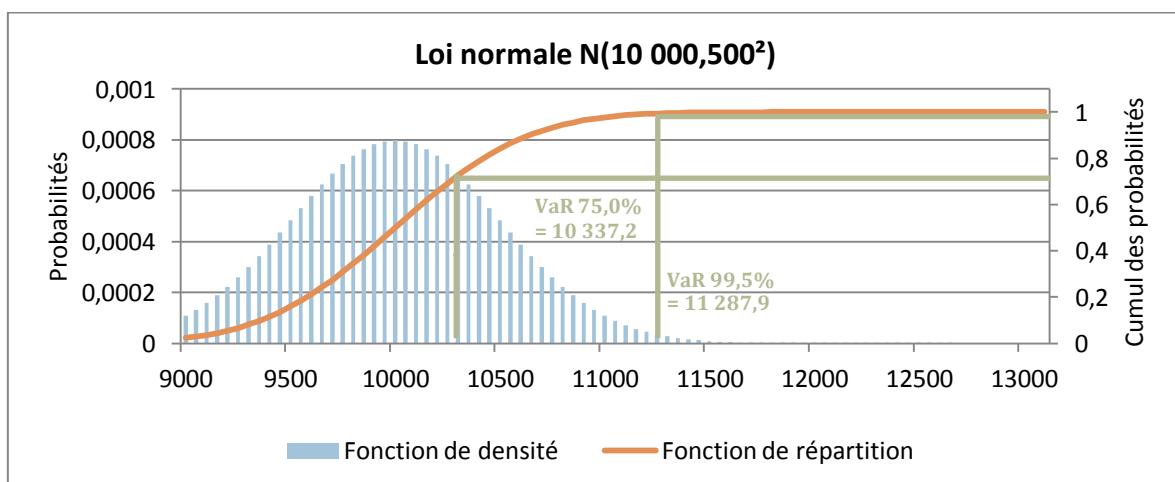
La *Value at Risk* au seuil α d'une distribution X , noté $VaR(X, \alpha)$ se définit comme le quantile d'ordre α ($\alpha \in (0,1)$):

$$VaR(X, \alpha) = \inf\{x, \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

La VaR permet de mesurer le risque d'un portefeuille correspondant au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné.

D'ailleurs, elle n'est pas une mesure cohérente de risque, présentée par la suite, dans le cas où la distribution des montants n'est pas gaussienne parce que la propriété de sous-additivité ne se vérifie pas.

La figure 6 représente une distribution d'une loi normale $\mathcal{N}(10\,000, 500^2)$ et la VaR 75% et VaR 99,5% dans cette distribution. Par la fonction quantile, on peut déterminer les VaR.



TVaR (Tail Value at Risk)

La *Tail Value at Risk* au seuil α d'une distribution X , noté $TVaR(X, \alpha)$ se définit la moyenne des VaR de niveau supérieur à α ($\alpha \in (0,1)$):

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, \mu) d\mu = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \mathbb{E}[X] - \int_0^{\alpha} VaR(X, \mu) d\mu \right\}$$

ou d'une autre manière :

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(X - VaR(X, \alpha))_+]$$

La mesure de risque TVaR est une mesure cohérente.

On peut aussi définir une mesure similaire CTE (*Conditional Tail Expectation*), la perte attendue sachant que la VaR au niveau α est dépassée :

$$CTE(X, \alpha) = \mathbb{E}[X | X > VaR(X, \alpha)]$$

ou d'une autre manière :

$$CTE(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1 - F_X(VaR(X, \alpha))} * \mathbb{E}[(X - VaR(X, \alpha))_+]$$

La TVaR et la CTE sont identiques pour des risques dont la fonction de répartition est continue.

- Mesure risque cohérente

P.Altzner [34] a défini que une mesure de risque est cohérente si elle satisfait les quatre propriétés : la transitivité, la sous-additivité, l'homogénéité positive et la monotonie.

- transitivité :
 $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- Sous-additivité :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \forall X, Y \in G$$

- homogénéité positive :

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \forall X \in G \text{ et } \lambda \geq 0$$

- monotonie :

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \quad \forall X, Y \in G \text{ et } X \leq Y$$

où

- $\rho(\cdot)$: mesure de risque
- X, Y : les pertes
- G : l'ensemble de tous les risques

- Exemple

Supposons que on a obtenu les montants de provisions et trouvé la distribution des montants de provisions chez un assureur. La distribution est caractérisée par sa fonction de répartition :

x	F(x)
452,45	99,50%
461,96	99,55%
467,91	99,60%
474,38	99,65%
483,83	99,70%
486,88	99,75%
488,25	99,80%
492,54	99,85%
500,53	99,90%
504,35	99,95%
512,67	100,00%

On obtient la quantile de la distribution :

$$VaR(X ; 99,5\%) = 452,45$$

Pour le calcul de $TVaR(X; 99,5\%)$:

$$\begin{aligned} TVaR(X; 99,5\%) &= \frac{1}{1 - 99,5\%} * (461,96 * 0,0005 + \dots + 512,67 * 0,0005) = \frac{1}{10} * (461,96 + \dots + 512,67) \\ &= VaR(X; 99,5\%) + \frac{1}{10} * ((461,96 - 452,45) + \dots + (512,67 - 452,45)) = 487,33 \end{aligned}$$

1. Provisions mathématiques

Dans ce paragraphe, nous présentons une approche pour évaluer les provisions mathématiques de manière stochastique pour estimer l'engagement de l'assureur dans un an vis-à-vis d'assurés valides à t=0

Sous la réglementation actuelle, les provisions mathématiques doivent se calculer en respectant le principe de prudence. En raison de ce principe, seules les tables réglementaires, ou les tables d'expérience certifiées par un actuaire indépendant, agréée par l'Institut des Actuaires, peuvent être utilisées lors des calculs de la provision mathématique. Dans le cadre de la garantie d'incapacité/invalidité, il y a trois lois réglementaires : la loi de maintien en incapacité, la loi de maintien en invalidité et la loi de passage en invalidité²¹. Ces lois sont établies par le BCAC (Bureau Commun des Assurances Collectives) à partir d'une étude réalisée en 1993 sur un portefeuille rassemblant les quatre compagnies d'assurance françaises les plus importantes de l'époque (AGF, AXA, GAN et UAP).

Dans la réglementation actuelle, le périmètre du calcul de la provision mathématique est le sinistré, pas l'assuré. Ici, nous étendrons ce périmètre **aux assurés**. Le terme stochastique s'appuie sur l'évaluation des taux d'entrée en incapacité de l'état valide.

Avec les table réglementaires, on évalue les provisions mathématiques sur un portefeuille *run-off* fictif. Dans le portefeuille, on suppose que tous les N assurés sont valides. Par les tirages aléatoires, nous pouvons obtenir les valeurs entre (0;1) pour N assurés à chaque simulation, qui correspondent à la probabilité de rester en état valide. Supposons que la probabilité d'entrée en incapacité soit p selon des statistiques ou des estimations fiables. Si la probabilité simulée (notée p') est plus bas que p , nous considérons que l'assuré est en état d'incapacité dans un horizon temporel prédefini, par exemple, dans un an. Après avoir effectué plusieurs fois des simulations, nous pouvons obtenir la distribution des effectifs des assurés entrants dans l'état en incapacité. Plus le nombre de simulations est important, plus la distribution sera similaire à la loi normale d'après le théorème central limite.

En effet, ici, on utilise cette méthode avec les tables réglementaires, mais cette méthode serait aussi utilisable avec les tables d'expériences.

1.1. Tirage aléatoire avec grand nombre

Au cours de l'évaluation stochastique des provisions mathématiques, on s'appuie sur la méthode de tirage aléatoire. Ici, nous effectuons le tirage aléatoire sous le logiciel R. Afin de générer les aléas, il y a trois méthodes classiques :

- Simulation uniforme

La fonction *runif* est le générateur uniforme fondamental dans le logiciel R. Cette fonction demande une seule entrée, le nombre de valeurs à générer. Les autres paramètres optionnels sont *min* et *max*, qui désignent l'intervalle sur lequel est générée la loi uniforme.

Le code de R ci-dessous génère les propriétés statistiques d'une véritable suite indépendante et identiquement distribuée comme la figure 7 montre.

```
Nsim=10000
x=runif(Nsim)
x1=x[-Nsim]
x2=x[-1]
par(mfrow=c(1,3))
```

²¹ La loi de mortalité en incapacité et celle en invalidité ne présentent pour le moment aucun caractère réglementaire.

```
hist(x,freq = FALSE)
plot(x1,x2)
acf(x)
```

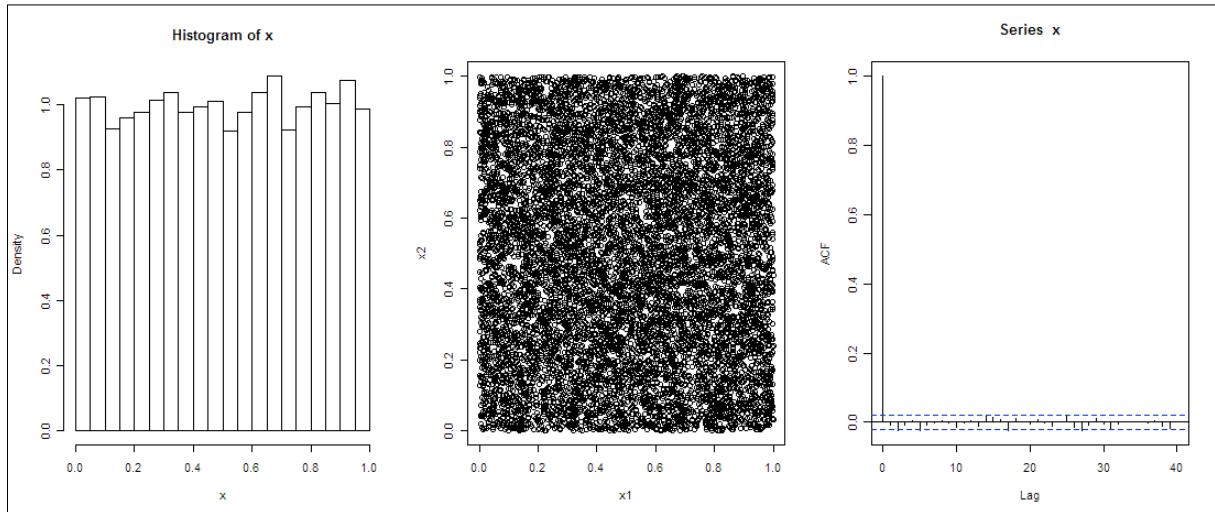


Figure 7 : Histogramme (gauche), représentation par paire (centre) et fonction d'autocorrélation estimée (droite) d'une suite de 10 000 nombres aléatoires générées par *runif*

- Méthode de la transformation inverse

Cette méthode permet de générer les aléas lorsqu'on connaît la loi sous-jacente des variables.

Posons $U = F(X)$, F une fonction de répartition d'une variable aléatoire X , U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(0,1)$ uniforme. Sous l'hypothèse que F admette une fonction inverse, nous avons :

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq F(x)) = P[F^{-1}(F(X)) \leq F^{-1}(F(x))] = P(X \leq x)$$

Par exemple, soit X suivant la loi exponentielle $\text{Exp}(10)$.

$$F(x) = 1 - e^{-10x}$$

\Leftrightarrow

$$u = 1 - e^{-10x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{10} \log(1 - u)$$

Donc, si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, alors

$$X = -\frac{1}{10} \log U \sim \text{Exp}(10)$$

On peut comparer le résultat utilisant la transformation inverse de la fonction de répartition avec le résultat obtenu par *rexp*, fonction fournie dans le logiciel R et qui génère des aléas suivant la loi exponentielle, à l'aide du code :

```
Nsim=10000
U=runif(Nsim)
X=-0.1*log(U)
Y=rexp(Nsim,rate=10)
par(mfrow=c(1,2))
hist(X,freq=F,main="Exponentielles par la transformation inverse")
hist(Y,freq=F,main="Exponentielles par logiciel R")
```

La figure 8 montre que les deux représentations graphiques produites par le code ci-dessus se ressemblent.

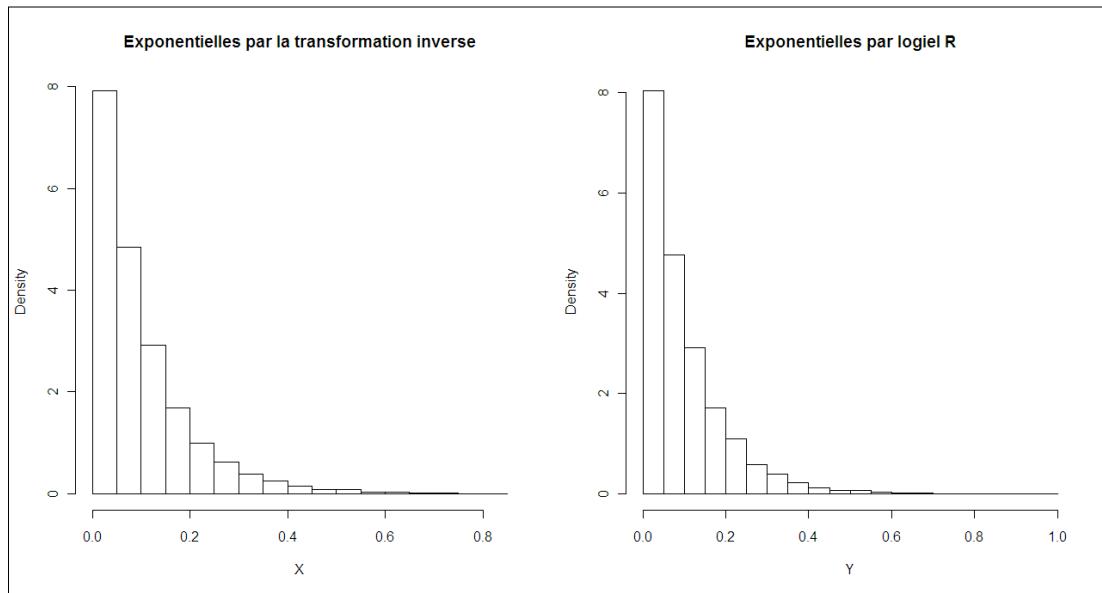


Figure 8 : Histogrammes d'échantillons exponentiels utilisant la transformation inverse et la fonction R *rexp*

Cette méthode constitue les générateurs pseudo-aléatoires des distributions autres que la loi uniforme qui nécessite tous les recours à une suite simulée de variables uniformes.

- Générateur aléatoire normal

Pour la génération de lois $\mathcal{N}(0,1)$, l'algorithme de Box-Muller constitue une référence.

Si U_1 et U_2 sont indépendantes et identiquement distribuées suivantes $\mathcal{U}[0,1]$, les variables X_1 et X_2 définies par

$$X_1 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2); X_2 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

suivent la loi normale centrée réduite. Cet algorithme n'est pas un générateur implémenté dans le logiciel R, il utilise par défaut la transformation inverse de la fonction de répartition, fondée sur une représentation *qnorm*.

Avec la programmation ci-dessous, on peut comparer les aléas générés par :

- la fonction *rnorm*
- la transformation inverse avec la fonction *qnorm*²²
- l'algorithme de Box-Muller dans le logiciel R :

```
Nsim=10000
U1=runif(Nsim)
U2=runif(Nsim)
X1=(-2*log(U1))^0.5*cos(2*pi*U2) #l'algorithme de Box-Muller
X2=(-2*log(U1))^0.5*sin(2*pi*U2) #l'algorithme de Box-Muller
X=rnorm(Nsim) #génération par la fonction rnorm
R1=qnorm(U1) #génération par la transformation inverse
R2=qnorm(U2) # génération par la transformation inverse
par(mfrow=c(1,5))
hist(X,freq=F,main="Normal par la fonction rnorm") # histogramme par génération par la fonction rnorm
hist(R1,freq=F,main="Normal R1, fonction qnorm(U1)") # histogramme par génération par la transformation inverse
hist(R2,freq=F,main="Normal R2, fonction qnorm(U2)") # histogramme par génération par la transformation inverse
hist(X1,freq=F,main="Normal X1") #histogramme par l'algorithme de Box-Muller
hist(X2,freq=F,main="Normal X2") # histogramme par l'algorithme de Box-Muller
```

²² La fonction *qnorm* avec paramètres (probabilité, moyenne, écart-type) donne les quantiles de la loi normale.

La figure 9 représente les histogrammes des aléas générés par cette programmation.

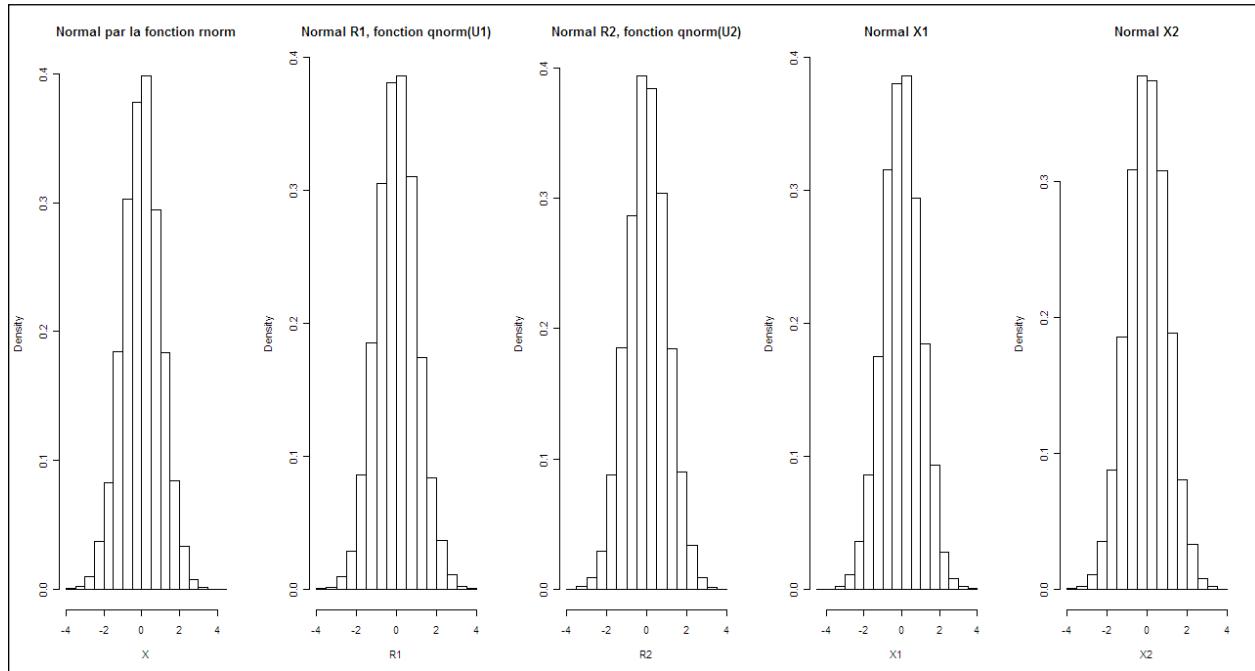


Figure 9 : Comparaison des aléas générés par *rnorm*, *qnorm* et l'algorithme de Box-Muller

Par la suite, on utilisera la méthode du générateur uniforme avec la fonction *runif* en raison de sa simplicité.

1.2. Engagement dans un an vis-à-vis d'assurés valides à t=0

Sous la réglementation actuelle, le périmètre des calculs des provisions mathématiques est limité aux sinistrés. Ici, nous allons évaluer les provisions mathématiques sur un portefeuille *run-off* ayant M assurés, de même profil, tous sont valides à t=0. Supposons qu'une statistique fiable ou une estimation fiable fournit une probabilité p sous laquelle une personne valide est en état d'incapacité dans un an. Après avoir effectué le tirage aléatoire entre (0;1), si le tirage, p' , est plus bas que la probabilité p , on considère que la personne sera en incapacité dans un an. Disons que p' est la probabilité sous laquelle une personne valide à t=0 reste valide dans un an. Nous effectuons ce tirage avec grands nombres afin d'avoir la fiabilité. En théorie, plus le nombre de simulations est important, plus la distribution des effectifs - entrants en état d'incapacité dans un an sera similaire à la loi normale d'après le théorème central limite.

Par des tirages aléatoires avec grand nombre, nous déterminons la distribution des entrées en incapacité du portefeuille. Ensuite, nous pouvons facilement évaluer la provision mathématique selon les formules présentées au paragraphe II.2.3.3.

La problématique dans ce paragraphe est donc

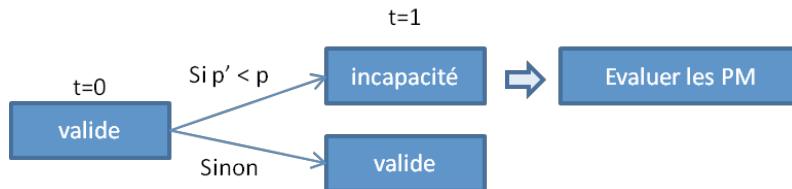
- génération des aléas entre (0;1)
- estimation de la probabilité p
- calcul des provisions mathématiques

L'explication théorique sur la génération des aléas entre (0;1) est déjà présentées au § III.1.1.

1.2.1. Probabilité d'entrée dans l'incapacité d'une personne valide

La problématique est, maintenant, d'estimer la probabilité p .

Afin de simplifier notre problématique, supposons que personne n'entre dans l'état en invalidité sans être passé par l'état d'incapacité.



Pour une population globale ayant même profil que celui du portefeuille, on peut supposer :

$$\mathbb{P}(inc_t) + \mathbb{P}(inv_t) = q, \forall t$$

$$\mathbb{P}(inv_t) + \mathbb{P}(inc_t) + \mathbb{P}(valide_t) = 1, \forall t$$

où

- $\mathbb{P}(inc_t)$: Probabilité qu'une personne du profil est dans l'état d'incapacité à l'instant t
- $\mathbb{P}(inv_t)$: Probabilité qu'une personne du profil est dans l'état d'invalidité à l'instant t
- $\mathbb{P}(valide_t)$: Probabilité qu'une personne du profil est valide à l'instant t

En plus, on suppose que chaque probabilité soit stable sur une période assez longue. Autrement dit :

- $\mathbb{P}(inv_t) = \mathbb{P}(inv_{t-1}), \forall t$
- $\mathbb{P}(inc_t) = \mathbb{P}(inc_{t-1}), \forall t$
- $\mathbb{P}(valide_t) = \mathbb{P}(valide_{t-1}), \forall t$

Ici, on suppose que personne n'entre dans l'état en invalidité sans être passé par l'état d'incapacité.

Cette hypothèse et le théorème de Bayes (cf. annexe) nous conduit à :

$$\mathbb{P}(inv_t) = \mathbb{P}(inv_t|inc_{t-1}) * \mathbb{P}(inc_{t-1}) + \mathbb{P}(inv_t|inv_{t-1}) * \mathbb{P}(inv_{t-1})$$

$$\mathbb{P}(inc_t) = \mathbb{P}(inc_t|inc_{t-1}) * \mathbb{P}(inc_{t-1}) + \mathbb{P}(inc_t|valide_{t-1}) * \mathbb{P}(valide_{t-1})$$

où

- $\mathbb{P}(inv_t|inc_{t-1})$: estimée à partir de la loi de passage d'incapacité en invalidité (BCAC)
- $\mathbb{P}(inv_t|inv_{t-1})$: estimée à partir de la loi de maintien en invalidité (BCAC)
- $\mathbb{P}(inc_t|inc_{t-1})$: estimée à partir de la loi de maintien en incapacité (BCAC)

Il est demandé d'estimer $\mathbb{P}(inc_t|valide_{t-1}) (= p)$.

Maintenant, on doit déterminer la probabilité q , la probabilité dans laquelle une personne est dans un état d'incapacité ou d'invalidité.

Pour déterminer cette probabilité, ici, on introduit une étude menée par l'INSEE²³, « Population handicapée selon le sexe et l'âge en 2007 ».

²³ [35] INSEE

	en %					
	Population bénéficiant d'une reconnaissance administrative ¹		Population handicapée définie au sens large ²		Ensemble de la population de 15 à 64 ans	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
15 à 24 ans	3	4	9	9	19	18
25 à 39 ans	20	17	29	27	31	31
40 à 49 ans	27	30	25	26	22	22
50 à 64 ans	50	49	37	38	28	29
Total	100	100	100	100	100	100
Effectifs (en milliers)	998,00	815,00	4415,00	5 180,00	19 470,00	19 920,00
1. Personnes ayant une reconnaissance administrative du handicap.						
2. Personne ayant une reconnaissance administrative ou déclarant un problème de santé de plus de 6 mois et connaître des difficultés importantes dans le déplacement, dans les activités quotidiennes, vis-à-vis du travail ou ayant eu un ou plusieurs accidents du travail au cours de la dernière année.						
Champ : population âgée de 15 à 64 ans en France métropolitaine vivant en ménage ordinaire (collectivités exclues).						
Source : Dares, enquête complémentaire à l'enquête Emploi 2007.						

Tableau 8 : "Population handicapée selon le sexe et l'âge en 2007" INSEE [35]

A partir du tableau 8, nous pouvons calculer la population par chaque tranche de la population.

	Population bénéficiant d'une reconnaissance administrative (en milliers) ¹		Ensemble de la population de 15 à 64 ans (en milliers)		Population bénéficiant d'une reconnaissance administrative (%) ¹		Population bénéficiant d'une reconnaissance administrative (%) ¹	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes + Femmes	Hommes + Femmes
25 à 39 ans	199,60	138,55	3699,3	3585,6	5,40%	3,86%		4,64%
40 à 49 ans	269,46	244,50	6035,7	6175,2	4,46%	3,96%		4,21%
50 à 64 ans	499,00	399,35	4283,4	4382,4	11,65%	9,11%		10,37%

Tableau 9 : Calcul du taux handicapé selon l'âge en 2007 (cf. Tableau 8)

Maintenant, il faut estimer $\mathbb{P}(inv_t | inc_{t-1})$, $\mathbb{P}(inv_t | inv_{t-1})$ et $\mathbb{P}(inc_t | inc_{t-1})$. Nous expliquons les détails d'estimation avec un exemple au § IV.1.2.1.

Des statistiques propres et fiables sur un historique suffisamment long pour un portefeuille permettront évidemment une meilleure évaluation des provisions mathématiques.

1.2.2. Calcul des provisions mathématiques

Après avoir trouvé p , la probabilité d'entrée en incapacité d'une personne valide, nous simulons N fois pour un portefeuille ayant M assurés valides.

L'étape de simulation nous donne une distribution des effectifs de personnes d'entrée en incapacité pour une période prédéfinie, ici un an. On peut évaluer des provisions mathématiques sur cette distribution avec les formules déterministes (cf. § II.2.3.3). Enfin, nous pouvons trouver une distribution des PM à t=1. La méthode VaR sera utile pour déterminer une valeur des provisions mathématiques.

En effet, ici, on détermine les provisions mathématiques à $t=1$ (cf. figure 10). L'évaluation des provisions mathématiques à $t=0$ est toujours en question. On va présenter cette problématique au § IV.1.2.5 dans le cadre d'un exemple.

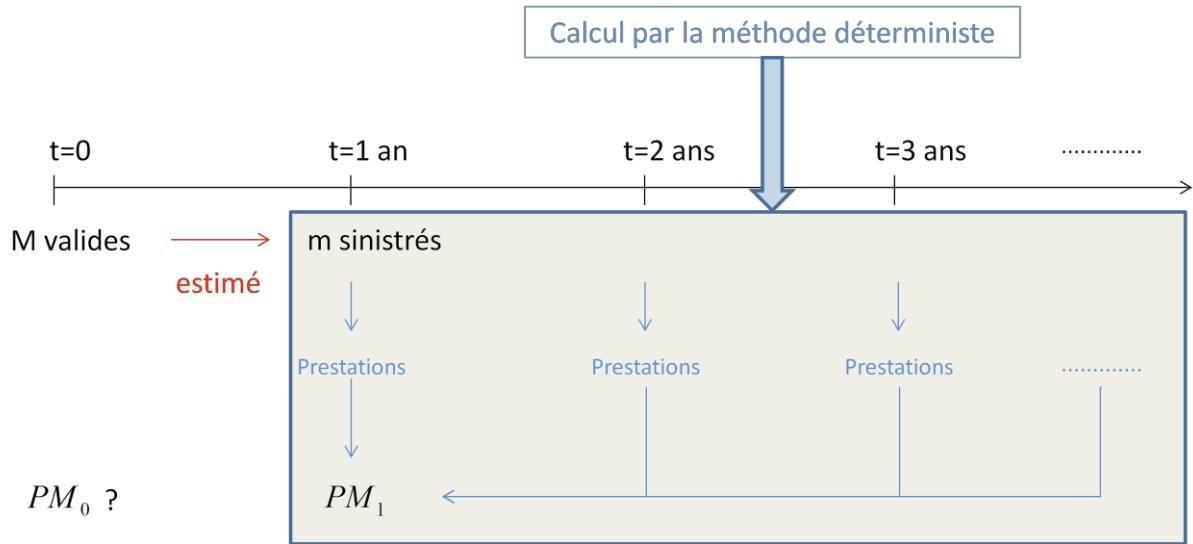


Figure 10 : méthodologie: calcul des provisions mathématiques

2. Provisions pour sinistres à payer : PSAP

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à modéliser les provisions pour sinistre à payer de manière stochastique basé sur la méthode de Chain Ladder.

Nous présentons deux manières différentes :

- Méthode de type paramétrique
- Méthode de type non paramétrique

2.1. Méthode paramétrique : Méthode de Mack²⁴

La méthode « Chain Ladder » permet d'évaluer la charge ultime des sinistres pour chaque année de survenance i . En 1993, T. Mack a proposé une méthode qui permet de déterminer la variabilité de la charge ultime.

Le modèle est fondé sur trois hypothèses :

- hypothèse 1 : Pour $k = 1, \dots, l - 1$, il existe des facteurs f_1, \dots, f_{l-1} tels que

$$E(C_{i,k+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k}f_k, 1 \leq i \leq l$$

- hypothèse 2 : Les variables aléatoires des exercices d'origine, $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,l}\}$, $\{C_{j,1}, \dots, C_{j,l}\}$ sont indépendants $\forall i \neq j$.

- hypothèse 3 : Pour $k = 1, \dots, l - 1$, il existe un paramètre σ_k tel que

$$Var(C_{i,k+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k}\sigma_k^2, 1 \leq i \leq l$$

où σ_k^2 peut être estimé par son estimateur sans biais :

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{l-k-1} \sum_{i=1}^{l-k} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \text{ pour } 1 \leq k \leq l-2$$

Mack indique que sous les hypothèses 1,2 et 3, l'erreur quadratique moyenne (*mean squared error*, MSE) de la provision de l'année de survenance i , noté R_i , peut être estimée par :

$$\widehat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,l}^2 \sum_{k=l+1-i}^{l-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{l-k} C_{j,k}} \right) \quad (1)$$

où $\hat{C}_{i,k} = C_{i,l+1-i} \hat{f}_{l+1-i} \cdots \hat{f}_{k-1}$, $k > l + 1 - i$ sont les valeurs estimées du triangle inférieur

Sous les mêmes hypothèses 1, 2, 3 et l'équation (1), on en déduit le corollaire suivant :

$$\widehat{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^l \left\{ \left(s.e.(\hat{R}_i) \right)^2 + \hat{C}_{i,l} \left(\sum_{j=i+1}^l \hat{C}_{j,l} \right) \sum_{k=l+1-i}^{l-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{l-k} C_{n,k}} \right\}$$

où $\hat{R} = \hat{R}_2 + \cdots + \hat{R}_l$

²⁴ [26] T.Mack (1993)

La méthode Mack sert à déterminer l'écart type. Suite à ce calibrage, il nous reste à mesurer le risque par la méthode VaR ou TVaR ou à déterminer un intervalle de confiance en supposant que R suive une loi normale ou une loi log-normale (deux lois les plus utilisées)

- Rappel
 - Loi normale

La fonction de densité de la loi normale d'une variable aléatoire X qui suit cette loi avec paramètres $(\mu ; \sigma^2)$ est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Ici, nous déterminons :

$$\mu_i = \hat{R}_i ; \sigma_i = Se(\hat{R}_i)$$

Alors, l'intervalle de confiance à 95% est construit :

$$[\hat{R}_i - 1,96 * Se(\hat{R}_i); \hat{R}_i + 1,96 * Se(\hat{R}_i)]$$

- Loi log-normale

Une variable aléatoire Y obéit une loi log-normale $(\mu ; \sigma^2)$ si $\ln Y$ suit une loi normale de paramètres $(\mu ; \sigma^2)$. La variable aléatoire Y a des moments d'ordre 1 et 2 :

$$E[Y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} ; Var[Y] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

Ici, nous déterminons :

$$\hat{R}_i = e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} ; [Se(\hat{R}_i)]^2 = (e^{\sigma_i^2} - 1)e^{2\mu_i + \sigma_i^2}$$

\Leftrightarrow

$$\sigma_i^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{Se(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i}\right)^2\right) ; \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

Alors, l'intervalle de confiance à 95% est construit :

$$[\exp(\mu_i - 1,96 * \sigma_i); \exp(\mu_i + 1,96 * \sigma_i)]$$

\Leftrightarrow

$$\left[\hat{R}_i \exp\left(-\frac{\sigma_i^2}{2} - 1,96 * \sigma_i\right); \hat{R}_i \exp\left(-\frac{\sigma_i^2}{2} + 1,96 * \sigma_i\right) \right]$$

2.2. Méthode non paramétrique : Bootstrap

Le Bootstrap est une technique de rééchantillonnage spécialement conçue pour remédier au problème d'insuffisance d'observations par Efron en 1993. En effet, le rééchantillonnage se fait par un tirage aléatoire avec remise. Cette technique a l'avantage de générer un très grand nombre de réalisations et de ne pas être exigeant dans le choix du logiciel.

L'algorithme du Bootstrap est le suivant²⁵ :

- i. A partir de $X = \{X_1, \dots, X_n\}$, on calcule la fonction de répartition empirique F_n , définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{[X_k \leq x]}$$

- ii. Conditionnellement à F_n , on procède, dans X à N tirages équiprobables avec remise : $X^* = \{X_1^*, \dots, X_N^*\}$ est alors le nouvel échantillon
- iii. On définit la statistique bootstrappée $T^* = T(X_1^*, \dots, X_N^*, F_n)$

Afin d'obtenir des approximations par la méthode de Monte Carlo, nous pouvons réitérer la troisième étape avec m fois de répétition pour générer m échantillons X_1^*, \dots, X_m^* et enfin, nous observons m valeurs T_1^*, \dots, T_m^* de T .

Avant d'effectuer le Bootstrap, il faut vérifier deux hypothèses sur lesquelles repose le Bootstrap :

- i. indépendance
- ii. distribution identique

Le problème pour estimer les provisions techniques par la méthode Bootstrap est que l'indépendance entre les montants ne soit pas vérifiée. Pour régler ce problème, le « Résiduels Bootstrap », rééchantillonnage non pas sur les observations mais sur les résidus calculés à partir de ces observations, peut être une solution, à condition qu'on suppose l'indépendance et une distribution identique entre ces résidus. Les résidus de Pearson $r_{i,j}^{(p)}$ vont être utilisés.

Pour estimer les résidus de Pearson, nous utilisons la méthode « *Over dispersed Poisson Chain-ladder model* ».²⁶

Over dispersed Poisson chain-ladder model²⁷

Pour un triangle d'années d'origine i et de d'années de déroulement j ($i, j \in \{1, \dots, l\}$), le modèle est sous la forme :

$$E[C_{i,j}] = m_{i,j} \quad Var[C_{i,j}] = \phi m_{i,j}$$

Deux propositions pour spécifier la forme de $m_{i,j}$:

- $m_{i,j} = x_i y_j$ ou
- $\log m_{i,j} = c + \alpha_i + \beta_j$

Grâce à cette modélisation, nous pouvons déterminer les valeurs des résidus de Pearson :

$$r_{i,j}^{(p)} = \frac{C_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{m}_{i,j}}} \quad (1)$$

où $\hat{m}_{i,j}$: montants incrémentés prévus par le modèle

²⁵ [18] M. DENUIT, A. CHARPENTIER

²⁶ [17] C. SAUVET

²⁷ [28] P. D. England et R. J. Verrall

L'erreur standard du bootstrap ne tient pas compte du nombre de paramètres du modèle. Ceci introduit un biais que l'on corrige en ajustant les résidus de Pearson. On note $n \left(= \frac{l(l+1)}{2}\right)$ le nombre de données et $p (= 2 * l - 1)$ le nombre de paramètres. Les résidus ajustés sont définis :

$$r_{i,j}^{adj*} = r_{i,j}^{(p)} * \sqrt{\frac{n}{n-p}}$$

Enfin, la méthode Bootstrap concerne le rééchantillonnage avec remise à partir des résidus. L'échantillon de données par Bootstrap est créé par le calcul d'équation (1) en utilisant les résidus rééchantillonnés avec les valeurs ajustées. Avec les résidus de Pearson ajustés rééchantillonnés $r_{i,j}^{adj*}$ et les valeurs prévues $\hat{m}_{i,j}$, les montants incrémentés, $C_{i,j}^*$, sont déterminés par l'équation (2) :

$$C_{i,j}^* = r_{i,j}^{adj*} \sqrt{\hat{m}_{i,j}} + \hat{m}_{i,j} \quad (2)$$

Puis la simulation avec un grand nombre d'itération (N fois) est effectuée pour obtenir N montants de provisions différentes permettant d'en déduire la loi de distribution de l'estimateur des provisions techniques.

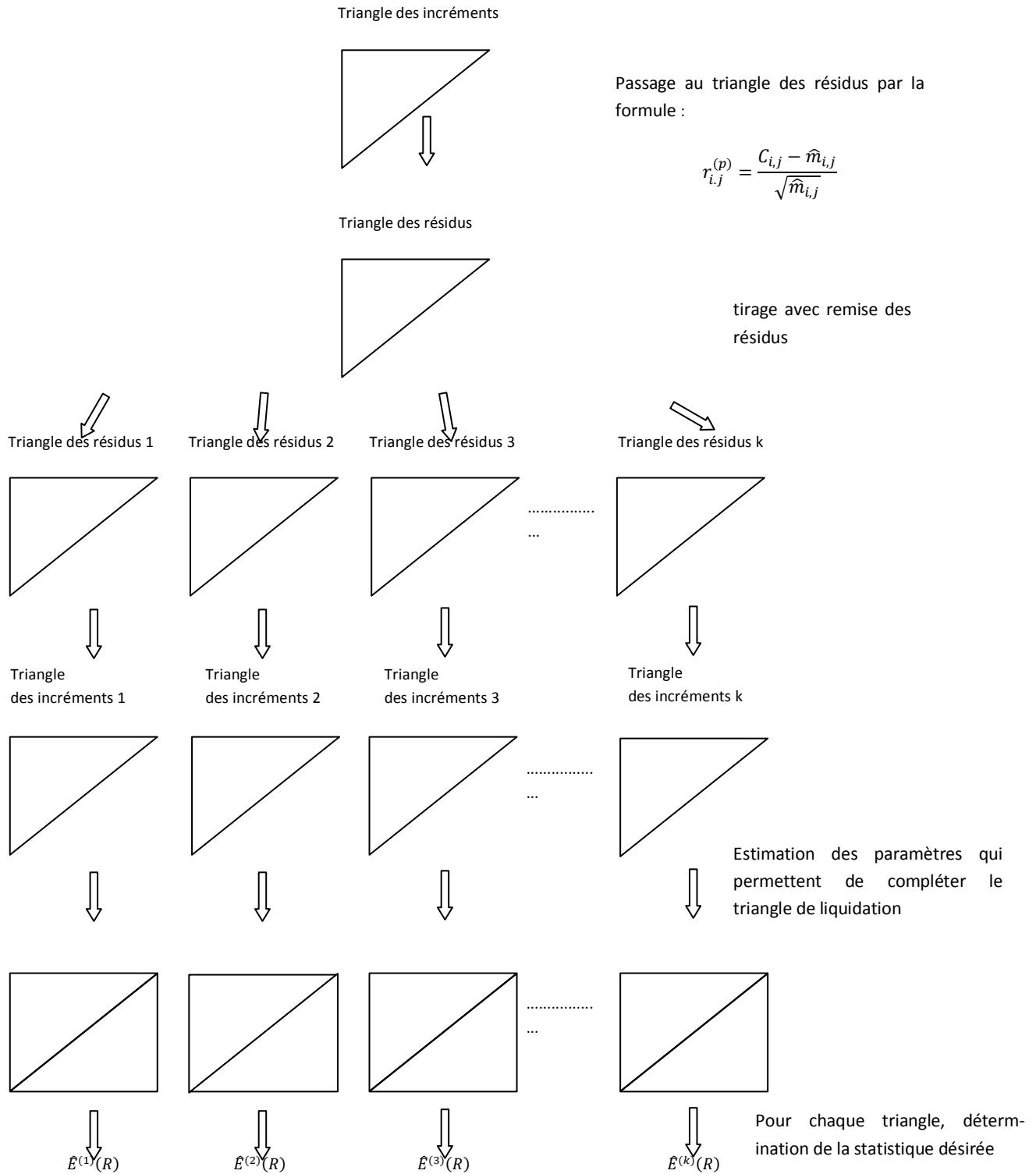
Par ailleurs, pour calculer le *best estimate* (cf. Partie VI) dans Solvabilité II, il faut considérer l'actualisation au taux financier prudent (ex. courbe des taux zone euro).

Dans ce cas, le triangle simulé et actualisé est obtenu de la manière suivante :

$$C_{non\ cumulé}^{Simulé\ actualisé}(i,j) = \frac{C_{non\ cumulé}^{Simulé}}{(1+r_t)^{i+j-n}} \text{ pour } i+j > n$$

La limite de la méthode Bootstrap réside dans la robustesse de cette méthode pour des sinistres à queue épaisse.

La figure 11 décrit la méthode de Boostrap au cours du calcul des provisions techniques.

Figure 11 : Méthode de Bootstrap au calcul des provisions techniques²⁸²⁸ [30] P.E. THÉOROND et F. PLANCHET

Partie IV Application : Méthodes d'évaluation des provisions techniques

1. Provisions mathématiques

Les provisions mathématiques se calculent tête par tête. Le taux d'actualisation est déterminé par 2,3% (75%*TME base bisannuelle)²⁹ selon réglementation (cf. § II.2.3.1). Ici, on choisit par analogie avec le taux défini en vie, de préconiser le même type d'évolution, afin d'éviter les variations mensuelles et de permettre des taux arrondis. Le taux d'actualisation est donc fixé par 2,25% pour les garanties non vie au cours des calculs.

1.1. Calcul déterministe

Les provisions mathématiques déterministes ont été programmées sur Excel via VBA (*Visual Basic Application*). Les tables BCAC ont les deux axes, l'âge d'entrée dans l'état et l'ancienneté. La figure 12 est la table BCAC pour la loi de maintien en invalidité. Dans la table, l'abscisse donne l'ancienneté en année et l'ordonnée donne l'âge d'entrée dans l'état en année. Pour récupérer les effectifs dans l'état ayant tel âge d'entrée et telle ancienneté, on lit simplement la valeur correspondante selon l'abscisse et l'ordonnée. La composition des axes est identique pour la loi de maintien en incapacité et la loi de passage d'incapacité temporaire en invalidité (cf. figure 13) (à ceci près que l'ancienneté est exprimée en mois).

Les lois de mortalité pour des personnes en incapacité ou en invalidité (cf. figure 14) ne sont pas dans le cadre de la réglementation. Ici, nous prenons les lois fournies sur le site <http://www.ressources-actuarielles.net/>.

Au cours de l'application de la méthode déterministe, nous prenons un profil pour la garantie d'incapacité et un autre profil pour la garantie d'invalidité.

- Pour la garantie d'incapacité :

40 ans ayant une ancienneté de 6 mois sous la garantie incapacité donnant droit à une indemnité journalière à 8 euros sans franchise. Dans le cas de décès du sinistré, la prestation est d'un capital de 5 000 euro.

- Pour la garantie d'invalidité :

Un sinistré d'âge à l'entrée de 40 ans, avec 10 ans d'ancienneté en invalidité, versement d'une indemnité journalière de 8 euros sans franchise. Dans le cas de décès du sinistré, la prestation est d'un capital de 5 000 euro.

LOIS DE MAINTIEN EN INVALIDITE (DEFINITION SECURITE SOCIALE)																																												
Sur la première colonne, figure l'âge de l'assuré à l'entrée en invalidité ;																																												
Age	Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
20	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
21	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
22	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
23	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
24	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
25	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
26	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
27	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
28	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
29	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
30	10 000	3 059	3 659	3 954	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747			
31	10 000	3 063	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
32	10 000	3 063	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
33	10 000	3 064	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
34	10 000	3 064	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
35	10 000	3 064	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
36	10 000	3 065	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
37	10 000	3 065	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
38	10 000	3 065	3 751	3 958	3 944	3 974	3 931	3 963	3 935	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
39	10 000	3 071	3 944	3 924	3 986	3 954	3 930	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
40	10 000	3 075	3 943	3 923	3 985	3 953	3 931	3 963	3 934	3 974	3 761	3 636	3 659	3 751	3 429	3 321	3 205	2 823	2 088	8 049	8 006	8 089	7 748	7 634	7 550	7 489	7 426	7 359	7 291	6 935	6 960	6 932	6 607	6 528	6 443	6 371	6 252	6 181	6 113	6 027	5 939	5 852	5 747	
41	10 000	3 075																																										

PROBABILITES DE PASSAGE D'INCAPACITE TEMPORAIRE EN INVALIDITE

**Sur la première colonne, figure l'âge de l'assuré à l'arrêt de travail,
sur la première ligne, le nombre de mois écoulés depuis l'arrêt de travail**

Chaque ligne donne pour un âge à l'arrêt de travail donné k, le nombre de personnes en incapacité reconnues invalides par la Sécurité Sociale au cours d'un mois fixé, ce nombre étant rapporté à un effectif originel de 10 000.

Figure 13 : Loi de passage d'incapacité en invalidité

Figure 14 : Lois de mortalité pour des personnes invalides

1.1.1. Garantie : Incapacité

Ici, on utilise les formules présentées au § II.2.3.3. afin de calculer les PM. Dans ce paragraphe, on rappelle chaque formule et présente les résultats. Pour réaliser les calculs, on construit des fonctions VBA présentés en annexe.

- Maintien en incapacité

La provision mathématique pour une prestation mensuelle d'incapacité en service d'un euro se calcule par la formule suivante :

$$PM_{inc}(x, k) = \sum_{i=4nc}^{36} \frac{l_{inc}(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\frac{j-k}{12}}}$$

- Passage d'incapacité en invalidité

La provision mathématique pour une prestation annuelle d'invalidité en service d'un euro se calcule par la formule suivante :

$$PM_{pass}(x, k) = \sum_{i=k}^{36} \frac{s(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\frac{(j-k)}{12}}} * PM_{inv}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right)$$

- Décès d'un assuré en incapacité

La provision mathématique pour un capital d'un euro versé en cas de décès d'un incapable, se calcule par la formule suivante :

$$PM_{inc}^{DC}(x, k) = \sum_{j=k}^{35} \frac{l_{inc}(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\left(\frac{j-k}{12}\right)}} * \frac{\left(l_{inc}^{DC}(x, j) - l_{inc}^{DC}(x, j+1)\right)}{l_{inc}^{DC}(x, k)} \\ + \sum_{j=k+1}^{36} \frac{s(x, j)}{l_{inc}(x, k)} * \frac{1}{(1+i)^{\left(\frac{j-k}{12}\right)}} * PM_{inv}^{DC}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right)$$

où $PM_{inv}^{DC}\left(x + \frac{j}{12}, 0\right)$ est calculée par l'interpolation linéaire entre les valeurs entières encadrant $x + \frac{j}{12}$.

On calcule d'abord la VAP (Valeur actuelle probable), PM pour la prestation d'un euro, puis on multiplie chaque prestation par la VAP au calcul de la PM. C'est-à-dire,

- PM_maintien_incapacité = rente_mensuelle (incapacité) * VAP_maintien_incapacité
- PM_passage_invalidité = rente_annuelle (invalidité) * VAP_passage_invalidité
- PM_décès_incapacité = Capital_décès * VAP_décès_incapacité

Les résultats par chaque fonction pour le profil décrit précédemment sont présentés par la suite:

PM_incapacité	
Age d'entrée	40
Ancienneté (mois)	0
Age de retraite	62
Taux technique	2,25%
rente_annuelle (invalidité)	2 922,00
rente_mensuelle (incapacité)	244
Capital_décès	5000
VAP_maintien_incapacité	3,41
VAP_passage_invalidité	0,35
VAP_décès_incapacité	0,15
PM_maintien_incapacité	833,01
PM_passage_invalidité	1 031,38
PM_décès_incapacité	769,68

1.1.2. Garantie : Invalidité

- Maintien en invalidité

La provision mathématique pour une indemnisation annuelle d'invalidité en service d'un euro se calcule par la formule suivante :

$$PM_{inv}(x, k) = \sum_{j=k}^{\text{âge retraite}-x} \frac{l_{inv}(x, j)}{l_{inv}(x, k) * (1+i)^{j-k}}$$

- Décès d'un assuré en invalidité

La provision mathématique pour un capital d'un euro versé en cas de décès d'un invalide se calcule par la formule suivante :

$$PM_{inv}^{DC}(x, k) = \sum_{j=c}^{\text{âge retraite}-x-1} \frac{l_{inv}(x, j)}{l_{inv}(x, k) * (1+i)^{j-k+\frac{1}{2}}} * \frac{(l_{inv}^{DC}(x, j) - l_{inv}^{DC}(x, j+1))}{l_{inv}^{DC}(x, k)}$$

On calcule d'abord la VAP (Valeur actuelle probable), PM pour la prestation d'un euro, puis on multiplie chaque prestation par la VAP au calcul de la PM. C'est-à-dire,

- PM_maintien_invalidité = rente_annuelle * VAP_maintien_invalidité
- PM_décès_invalidité = Capital_décès * VAP_décès_invalidité

Les résultats par chaque fonction pour le profil décrit précédemment sont présentés par la suite. :

PM_invalidité	
Age d'entrée	40
Ancienneté (année)	10
Age de retraite	62
Taux technique	2,25%
rente_annuelle	2 922,00
Capital_décès	5000
VAP_maintien_invalidité	10,25
VAP_décès_invalidité	0,09
PM_maintien_invalidité	29 949,44
PM_décès_invalidité	473,50

1.2. Calculs stochastiques : Engagement dans un an vis-à-vis d'assurés valides à t=0

Dans ce paragraphe, nous appliquons la méthodologie présentée au § III.1.2.

D'abord il faut estimer la probabilité qu'un assuré valide entre dans l'état d'incapacité dans un an. Puis on va générer les aléas avec grand nombre pour répartir la probabilité d'entrer dans l'état d'incapacité dans un an entre les assurés.

Pour simplifier, on fixe le profil des assurés dans un portefeuille ayant 10 000 assurés, les valides sont âgés de 40 ans.

1.2.1. Probabilité que l'assuré entre dans l'état d'incapacité

D'abord, il faut estimer la probabilité $p, \mathbb{P}(inc_t | valide_{t-1})$. Le principe d'estimation est présenté au § III. 1.2.1. Rappelons que l'unité de temps sur la loi de maintien en invalidité est annuelle, celle des deux autres lois est mensuelle.

L'objectif de ce paragraphe est donc d'estimer $\mathbb{P}(inc_t | valide_{t-1})$ avec $t = 1 \text{ an}$ à l'aide des équations :

$$\mathbb{P}(inv_t) = \mathbb{P}(inv_t | inc_{t-1}) * \mathbb{P}(inc_{t-1}) + \mathbb{P}(inv_t | inv_{t-1}) * \mathbb{P}(inv_{t-1})$$

$$\mathbb{P}(inc_t) = \mathbb{P}(inc_t | inc_{t-1}) * \mathbb{P}(inc_{t-1}) + \mathbb{P}(inc_t | valide_{t-1}) * \mathbb{P}(valide_{t-1})$$

où

- $\mathbb{P}(inv_t | inc_{t-1})$: estimée à partir de la loi de passage d'incapacité en invalidité (BCAC)
- $\mathbb{P}(inv_t | inv_{t-1})$: estimée à partir de la loi de maintien en invalidité (BCAC)
- $\mathbb{P}(inc_t | inc_{t-1})$: estimée à partir de la loi de maintien en incapacité (BCAC)

Il est donc demandé de trouver chaque probabilité conditionnelle avec $t = 1 \text{ an}$.

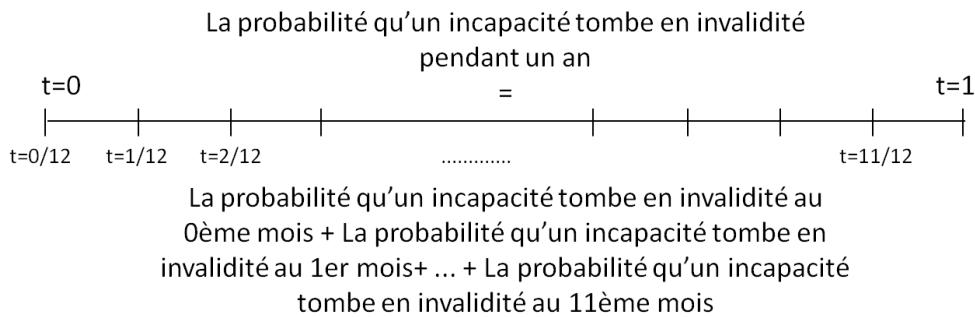
On respecte les notations présentées au § II.2.3.3. au cours des calculs, c'est-à-dire :

- $l_{inc}(x, j)$: effectif des personnes entrées en incapacité à l'âge x et toujours en incapacité au terme de j mois, déterminé grâce à une loi de maintien en incapacité
- $s(x, j)$: effectif des personnes entrées en incapacité à l'âge x et qui deviennent invalides au cours du j mois, déterminé grâce à une loi de passage d'incapacité en invalidité
- $l_{inv}(x, j)$: effectif des personnes entrées en invalidité à l'âge x et toujours en invalidité au terme de j années, déterminé grâce à une loi de maintien en invalidité.
- Calcul : $\mathbb{P}(inv_1 | inc_0)$

La table ci-dessous est une partie de la table BCAC, passage d'incapacité en invalidité. Le nombre représente la probabilité rapportée à 10 000 qu'une personne d'âge 40 ans en incapacité entre en invalidité pour chaque mois d'ancienneté.

Mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Age												
40	1	2	0	1	1	3	1	1	1	5	3	4

Par hypothèse, personne n'entre dans l'état d'invalidité sans être passé par l'état d'incapacité. En plus, une fois qu'on tombe en invalidité, on ne peut pas retomber en incapacité. On peut donc introduire une logique présentée par le diagramme :



Par cette logique, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(inv_1 | inc_0) &= \mathbb{P}\left(inv_{\frac{1}{12}} \middle| inc_{\frac{0}{12}}\right) + \mathbb{P}\left(inv_{\frac{2}{12}} \middle| inc_{\frac{1}{12}}\right) + \dots + \mathbb{P}\left(inv_{\frac{11}{12}} \middle| inc_{\frac{10}{12}}\right) \\ &= \frac{s(40,0)}{10\,000} + \frac{s(40,1)}{10\,000} + \dots + \frac{s(40,11)}{10\,000} = \frac{1}{10\,000} + \frac{2}{10\,000} + \dots + \frac{4}{10\,000} = 0,0023 \end{aligned}$$

- Calcul : $\mathbb{P}(inv_1 | inv_0)$

La table ci-dessous est une partie de la table BCAC, maintien en invalidité. Selon cette table, parmi 10 000 personnes en invalidité d'âge 40 ans ayant 0 année d'ancienneté, 9 751 personnes restent en invalidité dans un an.

Année	0	1
Age		
40	10 000	9 751

Donc, on peut calculer tout simplement,

$$\mathbb{P}(inv_1 | inv_0) = \frac{l_{inv}(40,1)}{l_{inv}(40,0)} = \frac{9\,751}{10\,000} = 0,9751$$

- Calcul : $\mathbb{P}(inc_1 | inc_0)$

La table ci-dessous est une partie de la table BCAC, maintien en incapacité. Selon cette table, parmi 10 000 personnes en incapacité d'âge 40 ans ayant 0 mois d'ancienneté, 659 personnes restent en incapacité dans un an.

Mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Age												
40	10 000	4 073	2 652	1 973	1 575	1 303	1 097	965	853	783	719	659

On peut immédiatement calculer :

$$\mathbb{P}(inc_1 | inc_0) = \frac{l_{inc}(40,11)}{l_{inc}(40,0)} = \frac{659}{10\,000} = 0,0659$$

Finalement, on trouve quatre équations :

$$\mathbb{P}(inv_t) + \mathbb{P}(inc_t) = 4,21\% \text{ (cf. Partie III. 1.1.2.1.) pour } x=40 \text{ ans}$$

$$\mathbb{P}(inv_t) + \mathbb{P}(inc_t) + \mathbb{P}(valide_t) = 1$$

$$\mathbb{P}(inv_t) = 0,0023 * \mathbb{P}(inc_t) + 0,9751 * \mathbb{P}(inv_t)$$

$$\mathbb{P}(inc_t) = 0,0659 * \mathbb{P}(inc_t) + \mathbb{P}(inc_t | valide_{t-1}) * \mathbb{P}(valide_t)$$

car $\mathbb{P}(inc_t) = \mathbb{P}(inc_{t-1})$, $\mathbb{P}(inv_t) = \mathbb{P}(inv_{t-1})$ et $\mathbb{P}(valide_t) = \mathbb{P}(valide_{t-1})$ par hypothèse

Avec ces quatre équations, on peut estimer la valeur de p , $\mathbb{P}(inc_1 | valide_0)$ comme on a quatre termes inconnus.

	Probabilité
$\mathbb{P}(inc_t)$	3,854%
$\mathbb{P}(inv_t)$	0,356%
$\mathbb{P}(valide_t)$	95,790%
$\mathbb{P}(inc_1 valide_0)$.	3,758%

La probabilité d'être en incapacité à t=1 pour des assurés valides en t=0 est estimée à 3,758%.

1.2.2. Les effectifs entrés en incapacité dans un an

On considère 10 000 assurés. Pour chaque assuré, on fait un tirage aléatoire entre 0 et 1 par la fonction *runif*, simulation uniforme, avec le code du logiciel R :

```
Proba_tete_par_tete<-matrix(nrow= Nassuré, ncol=NSim)
for(k in 1:Nassuré) {
  for (i in 1: NSim){
```

```
Proba_tete_par_tete [k,i]<-runif(1)
{}
```

On obtient une matrice $NSim * 10\ 000$, où $NSim$ prendra plusieurs valeurs 500, 1 000 et 5 000. On obtient ainsi trois matrices : $Nassuré$ lignes * $Nsim$ colonnes :

Simulation												
Assuré	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]	[,11]	[,12]
[1,]	0.753443651	0.8820381991	0.582736948	0.19902866	0.867589515	0.931402802	0.647045807	0.750508935	0.4980856	0.42881416	0.960401767	0.43723331
[2,]	0.972608791	0.494080753	0.953288435	0.71539646	0.745645940	0.096919867	0.398702724	0.786980419	0.26907596	0.87690095	0.140918907	0.48412361
[3,]	0.641321864	0.9065910638	0.27168309	0.36615557	0.265788673	0.047795724	0.504141481	0.037245187	0.94375319	0.47334673	0.394920944	0.52388184
[4,]	0.498390765	0.6156791183	0.582382387	0.13740835	0.480015382	0.971782334	0.601991113	0.164286688	0.91035271	0.48429991	0.404376967	0.71467824
[5,]	0.805218165	0.9338585655	0.320461339	0.65494493	0.954742877	0.449251878	0.164352899	0.337645354	0.48148191	0.16803173	0.714056676	0.30468694
[6,]	0.830655335	0.3264241822	0.541514951	0.08407700	0.797207800	0.619746304	0.686498532	0.066754062	0.383554395	0.44782550	0.347530104	0.41072239
[7,]	0.428098761	0.4568686991	0.570589832	0.36247325	0.165625319	0.006837649	0.854039694	0.447731756	0.21986555	0.97054858	0.855706388	0.69948238
[8,]	0.168059804	0.2507143649	0.254499950	0.94295726	0.310074301	0.9246462180	0.563866901	0.2842426729	0.58303377	0.32923847	0.068473792	0.03945847
[9,]	0.764286577	0.5870247241	0.938150859	0.75371668	0.915564745	0.759255222	0.697592119	0.079753075	0.98769129	0.69275615	0.022719553	0.08602504
[10,]	0.263179180	0.2389187866	0.479011928	0.14210812	0.294169390	0.545194574	0.823844775	0.278681415	0.63674424	0.86889927	0.391342737	0.23611718
[11,]	0.432701413	0.9244697022	0.365877378	0.49878515	0.312699108	0.186222804	0.392515149	0.185111942	0.44550772	0.48497584	0.904500005	0.89721052
[12,]	0.122589301	0.7142444055	0.158174232	0.02440394	0.627268404	0.762291245	0.319247650	0.984918246	0.08653722	0.77114369	0.698312966	0.66262001
[13,]	0.999143499	0.6965747837	0.989145591	0.889893911	0.348389650	0.719614774	0.618721267	0.642812898	0.70497655	0.07020382	0.411623944	0.29226976
[14,]	0.002177316	0.0728823699	0.824641683	0.7103318	0.147520068	0.891911987	0.206696657	0.686425363	0.51850856	0.11252693	0.389273050	0.51837286
[15,]	0.888130521	0.3562747100	0.645301539	0.18709242	0.186388203	0.514093368	0.067527388	0.96589774	0.40857223	0.283386752	0.46919342	
[16,]	0.794124252	0.8621668101	0.241517022	0.29927879	0.004704731	0.541117068	0.081815027	0.558550894	0.65289645	0.03231891	0.015425058	0.799978299
[17,]	0.072312076	0.5661323920	0.60721589	0.19217047	0.696914668	0.528465378	0.182391025	0.947466107	0.65273949	0.98560913	0.466291708	0.55033553
[18,]	0.592056760	0.6160073658	0.123317187	0.51921755	0.240836127	0.424846258	0.803104914	0.570938915	0.51600316	0.62170307	0.080079687	0.07554919
[19,]	0.577951174	0.6879021339	0.275865041	0.34473717	0.609431199	0.091803226	0.960594334	0.871530238	0.32600990	0.45384757	0.945107062	0.71228069
[20,]	0.049096715	0.7211945960	0.912220042	0.79797633	0.149656318	0.290434529	0.111368340	0.263064312	0.29379233	0.29160522	0.786497970	0.13467076
[21,]	0.047781407	0.2620914190	0.974473387	0.92791679	0.876298807	0.326058865	0.783755535	0.080597098	0.69811170	0.81940905	0.085382006	0.82162677

Figure 15 : Génération des aléas entre 0 et 1 ($Nassuré$ lignes * $Nsim$ colonnes)

Ayant estimé p , on peut construire les trois matrices des effectifs des entrants en incapacité durant la première année pour chaque simulation, avec le code du logiciel R :

```
pf_incapacite=matrix(ncol=NSim,nrow=Nassuré)
p=0.03758
```

```
for(i in 1:Nassuré){
  for(j in 1:NSim){
    if(Proba_tete_par_tete[i,j]<p)
      pf_incapacite[i,j]=1
    else
      pf_incapacite[i,j]=0}}
```

On peut trouver les résultats :

Simulation												
Assuré	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]	[,11]	[,12]
[1,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[2,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[3,]	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
[4,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[5,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[6,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[7,]	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
[8,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[9,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[10,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[11,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[12,]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
[13,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[14,]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[15,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[16,]	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
[17,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[18,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[19,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[20,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[21,]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figure 16 : Détermination de l'incapacité des assurés par simulation

L'effectif des assurés entrés en incapacité est obtenu en sommant, pour chaque simulation, les 10 000 lignes (représentant l'état de chacun des assurés valant 0 ou 1) avec le code du logiciel R :

```
nb_incap=matrix(ncol=Nsim,nrow=1)
nb_incap=colSums(pf_incapacite)
```

```
> nb_incap
[,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14] [,15] [,16] [,17] [,18] [,19] [,20] [,21] [,22] [,23] [,24] [,25] [,26]
[1,] 373 409 353 370 412 392 362 385 368 361 376 357 384 388 365 402 382 361 411 361 380 364 371 399 354 364
[2,] 381 365 386 374 386 378 376 375 387 372 390 380 385 355 388 363 363 398 371 404 396 392 374 375 359
[3,] 368 361 368 367 370 397 371 364 402 376 400 388 372 356 354 383 391 385 366 359 359 361 344 361 395
[4,] 377 378 379 380 381 332 379 341 384 379 385 394 388 368 397 382 343 381 343 379 369 369 379 363 344
[5,] 368 374 385 381 332 379 341 384 379 385 394 388 368 397 382 343 381 343 379 369 369 379 363 344
```

Figure 17 : Effectif des entrants en incapacité

N= 500, 1 000 et 5 000. On trouve les distributions des effectifs pour chaque N simulations :

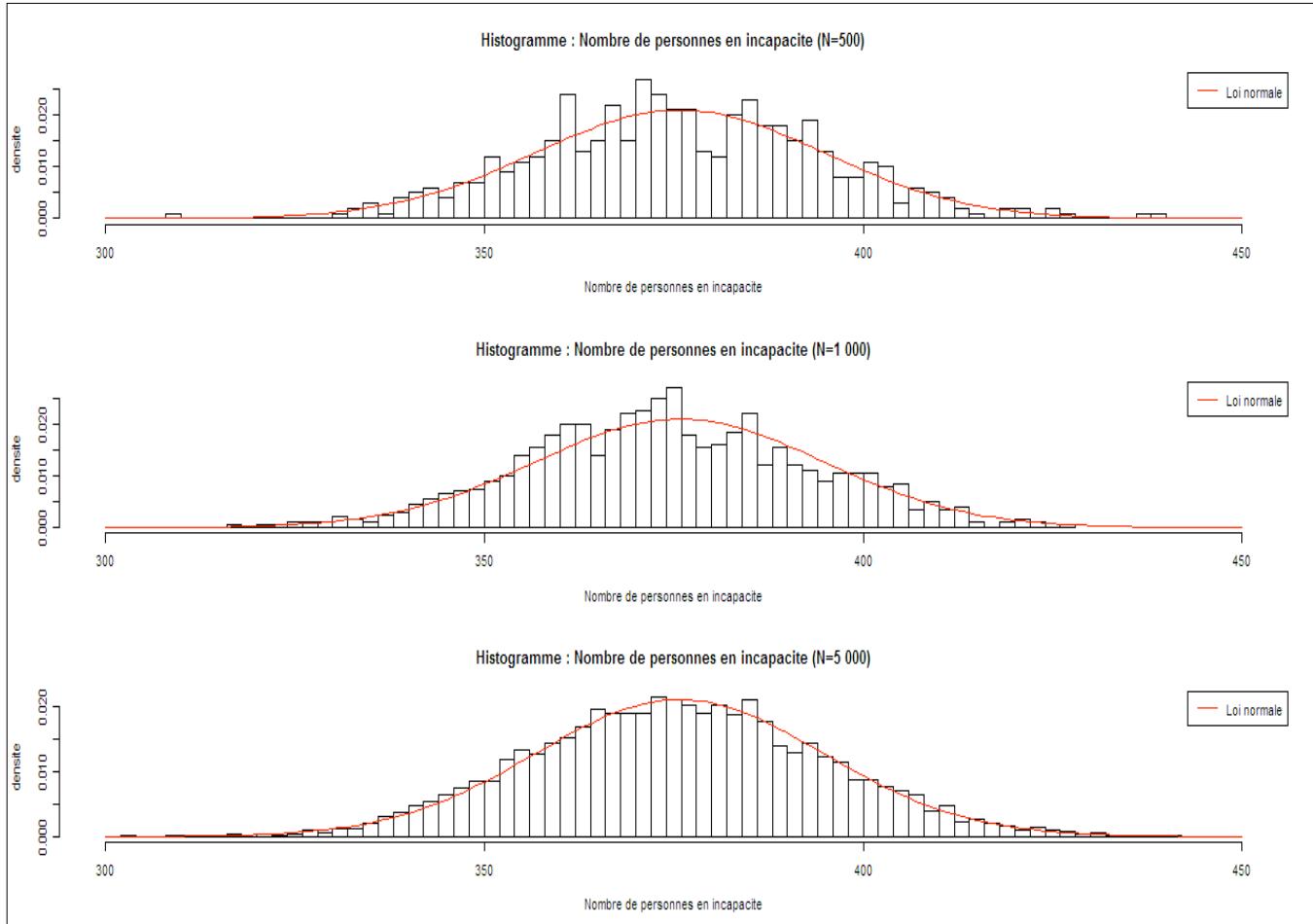


Figure 18 : Distribution des effectifs entrés dans l'incapacité dans un an

En effet, cette distribution suit la loi binomiale, $\mathcal{B}(Nassuré, p)$ qui converge vers la loi normale $\mathcal{N}(Nassuré * p, \sqrt{Nassuré * p * (1 - p)^2})$ (cf. note 25)³⁰ lorsque le nombre de simulations est important. On peut graphiquement vérifier ce constat dès lors que N est égal à 5 000. L'intervalle de confiance à 95% est de : [338,54 ; 413,06]

Résultats sur l'incertitude autour du taux d'entrée en incapacité pour 5 000 simulations :

³⁰ $Nassuré * p = 375,8$; $\sqrt{Nassuré * p * (1 - p)^2} = 19,01^2$

p	3,76%
NbAssuré	10 000
NbSim	5 000
Moyenne	375,94
Variance	372,01(=19,29 ²)
P*	3,76%

où p* est la probabilité empirique estimée à partir des simulations : $\frac{\text{Moyenne}}{\text{NbAssuré}} = \frac{375,94}{10\ 000} = 3,76\%$

1.2.3. Calcul des provisions mathématiques : incapacité

Le profil du portefeuille au départ est d'âge 40 ans, valide. On a estimé les effectifs entrés en incapacité dans un an. Donc, le profil du portefeuille dans cet horizon temporel sera d'âge 41 ans qui sont tombés en incapacité durant l'année. En pratique, l'unité de temps est mensuelle dans le calcul des provisions mathématiques de la garantie incapacité. Ici, on prend une hypothèse simplifiée, en supposant que les aléas (dans la matrice *Proba_tete_par_tete*) représentent les probabilités sous lesquelles les assurés sont dans l'état d'incapacité dans un an.

Le caractère stochastique, ici, s'appuie sur la détermination des effectifs et pas sur le calcul de la provision mathématique. D'abord, on calcule les provisions mathématiques pour les assurés entrés en incapacité d'âge 41 ans par chaque ancienneté et par tête grâce aux fonctions présentées au § IV.1.1.1 en prenant le même montant de chaque prestation :

Ancienneté	PM_maintien_incapacité	PM_passage_invalidité	PM_décès_inc
0	882,91	1 175,10	923,46
1	1 518,97	2 783,65	1 872,84
2	1 939,00	4 202,94	2 741,77
3	2 249,08	5 576,83	3 595,87
4	2 506,21	6 970,67	4 480,00
5	2 704,24	8 302,86	5 349,52
6	2 909,01	9 676,79	6 348,66
7	3 022,07	10 854,26	7 269,47
8	3 130,76	12 232,25	8 281,49
9	3 129,23	13 211,65	9 055,43
10	3 136,90	14 104,07	9 965,05
11	3 163,91	15 255,51	11 033,46

Tableau 10 : PM incapacité pour un profil 41 ans

Par ailleurs, il est possible que les entrants en incapacité passent en invalidité durant la première année. Cette probabilité était estimée par 0,23% ($\mathbb{P}(inv_1 | inc_0)$) au § IV.1.2.1. qui est négligeable en déterminant les effectifs en incapacité. Donc, on ne prend pas en compte cette probabilité lors de la détermination des effectifs.

On estime ensuite la distribution des provisions mathématiques pour chaque simulation N= 500, 1 000 et 5 000 par multiplication des PM par personne et les effectifs trouvés précédemment.

On suppose avoir un engagement sur 10 000 assurés, on calcule la PM totale à t=1 :

$$PM = \sum_{j=0}^{11} PM(41, j) * m_j$$

où

- $PM(41, j)$: calculé au tableau 10
- m_j : effectifs des sinistrés qui sont tombés en incapacité à l'ancienneté j et restent à $t=1$ an

En effet, on suppose que les effectifs simulés précédemment sont les effectifs en incapacité à $t=1$ ans. Il faut maintenant estimer les effectifs ayant chaque ancienneté.

- Estimation m_j

La figure 19 montre que le principe du calcul des effectifs m_j . Nous avons le nombre des effectifs globaux après la simulation. A partir de ces effectifs, on veut estimer leur répartition de l'année, c'est-à-dire, combien des effectifs sont en incapacité à $t=1$ qui sont tombés en incapacité durant l'année.

Si le nombre des nouvelles entrants (x_j) en incapacité est connu par mois, on peut simplement estimer les m_j par la multiplication de x_j par la probabilité $\mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}} \mid inc_{\frac{1}{12}}\right)$ pour chaque j .

Le problème d'ici est que les effectifs de sinistrés tombent en incapacité à chaque ancienneté ne sont pas connus.

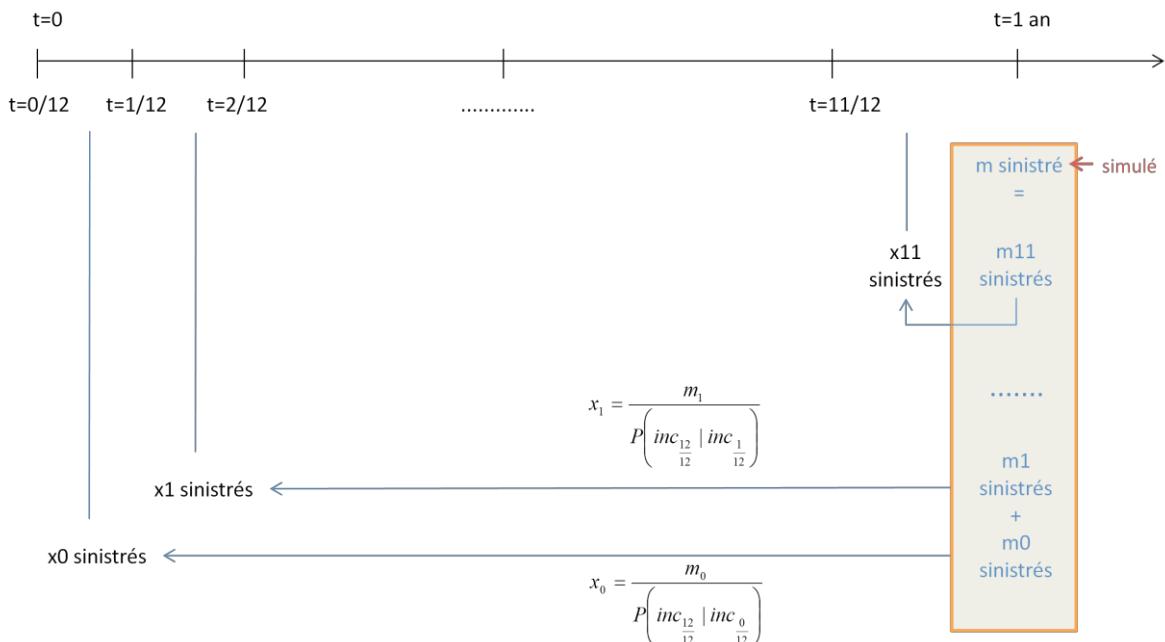


Figure 19 : calcul les effectif à chaque ancienneté

Ici, les informations qu'on a :

- m : le nombre des sinistrés à $t=1$ par simulation
- $\mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}} \mid inc_{\frac{1}{12}}\right) \forall j \in \{0, \dots, 11\}$

Par le théorème de Bayes, on peut trouver la probabilité qu'un sinistré à $t=1$ a été tombé en incapacité à $t=j$:

$$\mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}} \mid inc_{\frac{1}{12}}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(inc_{\frac{1}{12}} \mid inc_{\frac{j}{12}}\right) * \mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}}\right)}{\sum_{k=0}^{11} \mathbb{P}\left(inc_{\frac{1}{12}} \mid inc_{\frac{k}{12}}\right) * \mathbb{P}\left(inc_{\frac{k}{12}}\right)}$$

où $\mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}}\right) = \mathbb{P}\left(inc_{\frac{k}{12}}\right)$ par hypothèse

Par ce théorème, dans le portefeuille ayant tous les assurés d'âge 40 ans, on trouve :

Age 40 ans / Ancienneté	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Loi BCAC	10 000	4 073	2 652	1 973	1 575	1 303	1 097	965	853	783	719	659	607
Probabilité $P(inc(j/12) inc(12/12))$	1,01%	2,47%	3,79%	5,10%	6,39%	7,72%	9,17%	10,43%	11,80%	12,85%	14,00%	15,27%	

Exemple du calcul :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(inc_{\frac{5}{12}} \middle| inc_{\frac{12}{12}}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(inc_{\frac{12}{12}} \middle| inc_{\frac{5}{12}}\right) * \mathbb{P}\left(inc_{\frac{5}{12}}\right)}{\sum_{k=0}^{11} \mathbb{P}\left(inc_{\frac{12}{12}} \middle| inc_{\frac{k}{12}}\right) * \mathbb{P}\left(inc_{\frac{k}{12}}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(inc_{\frac{12}{12}} \middle| inc_{\frac{5}{12}}\right)}{\sum_{k=0}^{11} \mathbb{P}\left(inc_{\frac{12}{12}} \middle| inc_{\frac{k}{12}}\right)} = \frac{\frac{l_{inc}(40,12)}{l_{inc}(40,5)}}{\sum_{k=0}^{11} \frac{l_{inc}(40,12)}{l_{inc}(40,k)}} \\ &= \frac{\frac{607}{1303}}{\frac{607}{10000} + \frac{607}{4073} + \dots + \frac{607}{659}} = 7,72\% \end{aligned}$$

Finalement, on peut calculer à chaque simulation :

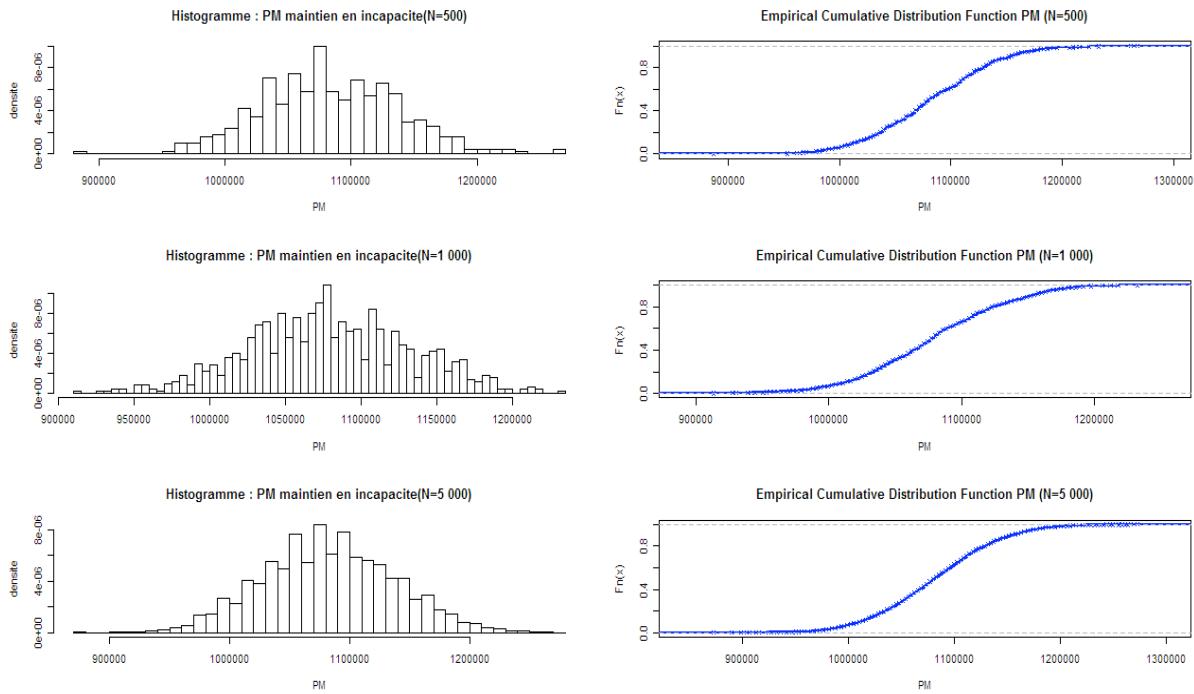
$$m_j = m * \mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}} \middle| inc_{\frac{11}{12}}\right)$$

On peut simplifier le calcul des PM :

$$PM = \sum_{j=0}^{11} PM(41, j) * m_j = \sum_{j=0}^{11} PM(41, j) * m * \mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}} \middle| inc_{\frac{11}{12}}\right) = m * \sum_{j=0}^{11} PM(41, j) * \mathbb{P}\left(inc_{\frac{j}{12}} \middle| inc_{\frac{11}{12}}\right)$$

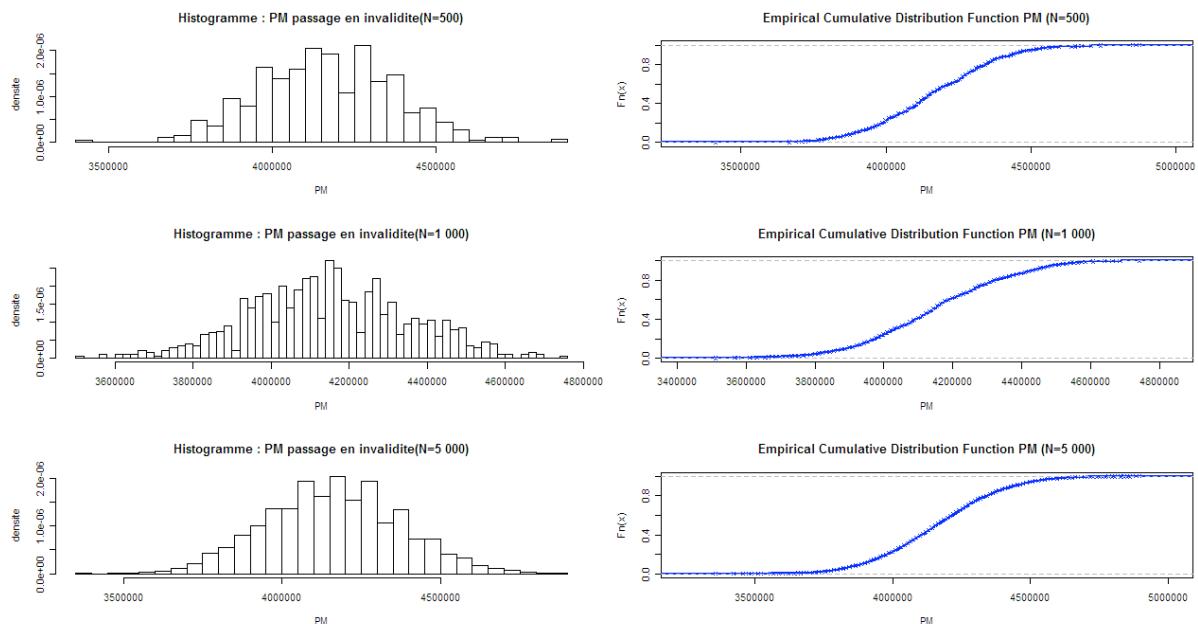
- Études sur la distribution de la PM maintien en incapacité (histogramme et la fonction de distribution cumulative empirique) pour N= 500, 1 000 et 5 000

	PM maintien en incapacité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
moyenne	1 083 343	1 078 935	1 082 453
écart-type	54 435	53 310	55 535



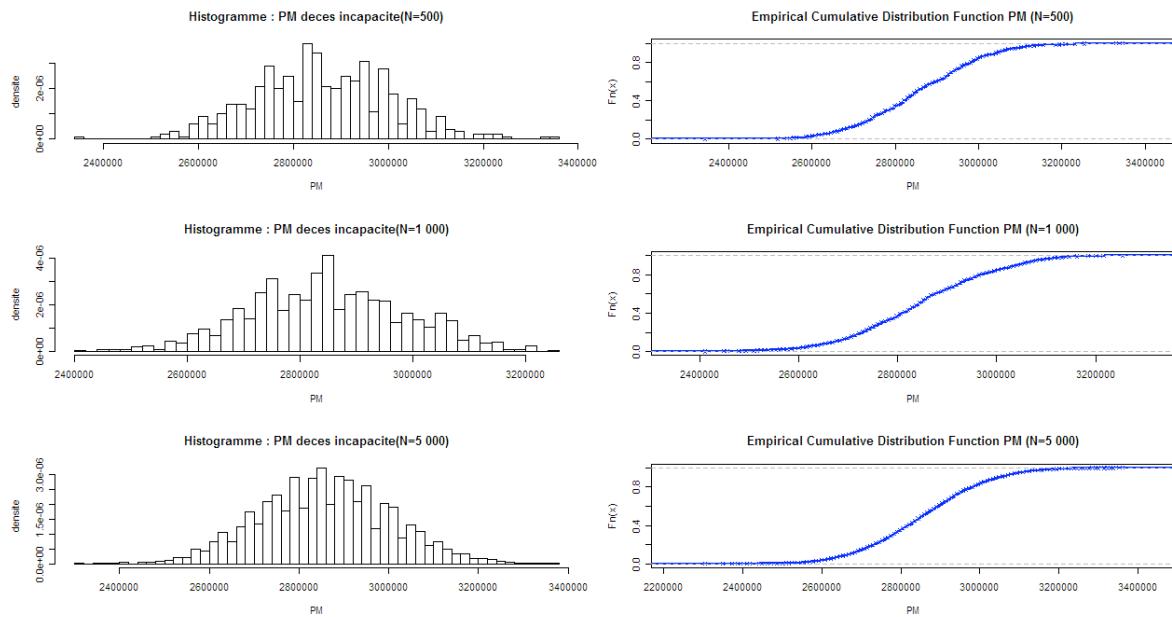
- Étude sur la distribution de la PM passage en invalidité (histogramme et la fonction de distribution cumulative empirique) pour N= 500, 1 000 et 5 000

	PM passage en invalidité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
moyenne	4 167 010	4 150 054	4 163 585
écart-type	209 381	205 053	213 613



- Étude sur la distribution de la PM décès en incapacité (histogramme et la fonction de distribution cumulative empirique) pour N= 500, 1 000 et 5 000

	PM décès en incapacité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
moyenne	2 860 648	2 849 007	2 858 297
écart-type	143 740	140 769	146 645



Rappel : Tous les résultats ci-dessous représentent l'engagement à t=1an vis-à-vis de 10 000 assurés valides à t=0.

La fonction « quantile » nous permet de trouver les VaR pour chaque PM :

- VaR pour la PM maintien en incapacité (N= 500, 1 000 et 5 000)

	PM maintien en incapacité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
50,0%	1 079 750	1 076 870	1 082 629
75,0%	1 120 060	1 114 302	1 120 060
95,0%	1 172 032	1 166 130	1 174 768
99,0%	1 215 165	1 192 101	1 212 228
99,5%	1 228 079	1 212 199	1 226 596

- VaR pour la PM passage en invalidité (N= 500, 1 000 et 5 000)

	PM passage en invalidité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
50,0%	4 153 188	4 142 113	4 164 263
75,0%	4 308 240	4 286 090	4 308 240
95,0%	4 508 147	4 485 443	4 518 669
99,0%	4 674 053	4 585 341	4 662 757
99,5%	4 723 725	4 662 646	4 718 022

- VaR pour la PM décès en incapacité (N= 500, 1 000 et 5 000)

	PM décès en incapacité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
50,0%	2 851 159	2 843 556	2 858 762
75,0%	2 957 602	2 942 396	2 957 602
95,0%	3 094 838	3 079 252	3 102 061
99,0%	3 208 733	3 147 832	3 200 977
99,5%	3 242 832	3 200 901	3 238 917

1.2.4. Calcul des provisions mathématiques : invalidité

Comme nous l'avons cité au paragraphe précédent, la probabilité que les entrants en incapacité passent en invalidité durant la première année est faible : 0, 23%.

On peut effectuer d'autres simulations avec cette probabilité et les effectifs trouvés au § IV.1.2.2. mais par rapport au temps de travail, le taux de passage en invalidité n'est pas important.

Rappelons qu'on n'a pas d'invalidé qui entre en invalidité sans passer l'incapacité.

Donc, on simplifie l'estimation des effectifs des invalides par la multiplication :

les effectifs en incapacité * probabilité 0, 23%.

Puis on effectue la même procédure qu'en incapacité. Ici, on calcule les PM avec l'âge d'entrée en invalidité 41 ans ayant l'ancienneté 0 année. En effet, l'ancienneté dans l'état d'invalidité est mesurée en année. Tous les assurés sont valides à t=0 donc l'ancienneté à t=1 est nécessairement de zero. On trouve les VaR :

- VaR pour la PM maintien en invalidité (N= 500, 1 000 et 5 000)

	PM maintien en invalidité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
50,0%	36 558,3	36 460,8	36 655,8
75,0%	37 923,2	37 728,2	37 923,2
95,0%	39 682,8	39 483,0	39 775,5
99,0%	41 143,2	40 362,3	41 043,8
99,5%	41 580,5	41 042,8	41 530,3

- VaR pour la PM décès en invalidité (N= 500, 1 000 et 5 000)

	PM décès en invalidité		
	N=500	N=1 000	N=5 000
50,0%	558,4	557,0	559,9
75,0%	579,3	576,3	579,3
95,0%	606,2	603,1	607,6
99,0%	628,5	616,6	627,0
99,5%	635,2	627,0	634,4

1.2.5. Conclusion

Avec cette méthode on peut trouver la distribution des provisions mathématiques sur un portefeuille global. Les résultats précédents ne sont pas sur le même périmètre que l'évaluation des engagements sur les sinistrés, puisqu'on part de personnes valides, il n'est pas donc possible de comparer ces résultats avec le montant des provisions mathématiques. La comparaison serait possible sur des historiques obtenus sur un profil d'assurés.

D'ailleurs, lorsqu'on a un portefeuille ayant la garantie d'incapacité à étudier, on pourra s'inspirer de cette méthodologie pour mesurer les risques sur le nombre des entrants en état d'incapacité. Cette méthodologie permet d'avoir une prévision à court terme sur un portefeuille de la garantie d'incapacité ou d'invalidité ayant tous les assurés valides.

En outre, on pourra appliquer cette méthodologie sur une période plus longue en étudiant les probabilités qu'on entre dans l'état sur plusieurs années.

- Problématique : Engagement à t=0

Suite au paragraphe précédent, on veut estimer l'engagement à t=0. Précédemment, nous avons estimé l'engagement dans un an vis-à-vis d'assurés valides à t=0 après avoir estimé les effectifs ($m_j, j \in \{0, \dots, 11\}$) qui sont en incapacité à t=1 et qui sont tombés en incapacité à chaque mois de l'année. Une fois estimé les effectifs, on a estimé l'engagement à t=1 par la méthode déterministe.

Ici, on ne peut plus s'appuyer sur la méthode déterministe. La méthode déterministe demande les paramètres l'âge d'entrée dans l'état et l'ancienneté. En effet, la notion d'ancienneté implique la survenance a priori des sinistres. Ici, on ne peut pas apporter cette notion. Alors qu'on peut estimer « théoriquement » le nombre des nouvelles entrants (x_j) en incapacité chaque mois de l'année de manière réciproque (cf. équation(*)), on ne peut pas calculer les PM déterministes sans utiliser l'ancienneté.

$$m_j = x_j * \mathbb{P}\left(\text{inc}_{\frac{1}{12}} \mid \text{inc}_{\frac{j}{12}}\right) \Leftrightarrow x_j = \frac{m_j}{\mathbb{P}\left(\text{inc}_{\frac{1}{12}} \mid \text{inc}_{\frac{j}{12}}\right)} (*)$$

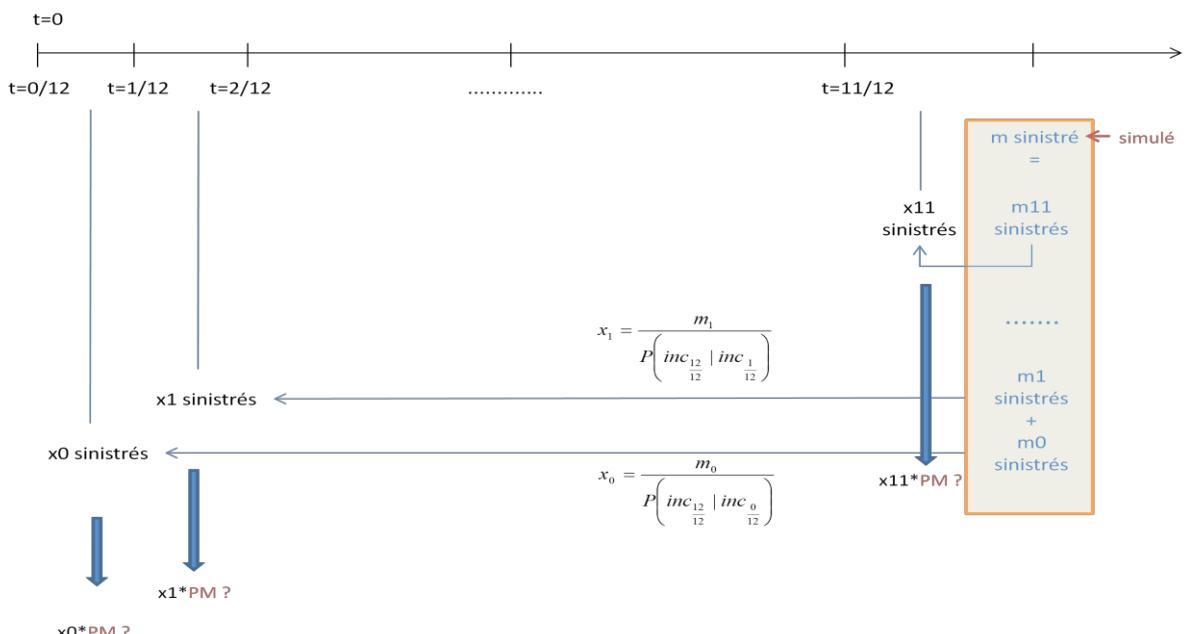


Figure 20 : problématique sur l'engagement t=0

Dans ce mémoire, on ne pose que cette problématique et n'approfondit pas des études sur cette problématique.

2. Provision pour sinistres à payer

2.1. Évaluation déterministe: Chain Ladder

La méthode Chain Ladder est la plus utilisée pour le calcul des provisions pour sinistres, surtout pour celui de l'IBNR (*Incurred but not reported*; tardifs). Elle permet de déterminer un estimateur de la charge ultime à partir de l'historique des règlements cumulés de sinistres. Seul le triangle de liquidation est nécessaire pour réaliser le calcul de la provision.

Prenons un exemple du triangle en *run-off* comme ci-dessous. Cet exemple est basé sur un triangle construit à partir des montants de prestations d'incapacité et d'invalidité d'une institution de prévoyance.

Montants cumulés de sinistres

Années de développement

Année de survenance	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
2004	684 166	5 478 559	17 560 765	49 224 784	89 353 754	145 909 208	176 073 331	176 135 635
2005	346 182	2 100 471	13 849 837	37 391 845	76 244 411	131 315 715	164 000 058	
2006	839 335	4 757 747	21 554 367	50 114 246	92 903 795	149 410 279		
2007	1 662 991	7 297 192	20 463 087	44 500 110	81 389 054			
2008	1 457 831	8 048 693	22 771 786	47 531 116				
2009	1 749 307	8 652 129	22 893 434					
2010	2 850 641	7 392 374						
2011	1 117 692							
Coefficient de développement	4,5594	3,2777	2,3780	1,8755	1,6504	1,2267	1,0004	

En appliquant la méthode présentée au § II.3.2.2, nous obtenons la provision totale : 795 553 006 euros. Le calcul est effectué à l'aide du logiciel Excel.

Montants cumulés de sinistres

Années de développement

Année de survenance	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	Provision
2004	684 166	5 478 559	17 560 765	49 224 784	89 353 754	145 909 208	176 073 331	176 135 635	0
2005	346 182	2 100 471	13 849 837	37 391 845	76 244 411	131 315 715	164 000 058	164 058 090	58 032
2006	839 335	4 757 747	21 554 367	50 114 246	92 903 795	149 410 279	183 282 439	183 347 294	33 937 014
2007	1 662 991	7 297 192	20 463 087	44 500 110	81 389 054	134 325 618	164 777 999	164 836 306	83 447 252
2008	1 457 831	8 048 693	22 771 786	47 531 116	89 142 589	147 122 160	180 475 590	180 539 451	133 008 335
2009	1 749 307	8 652 129	22 893 434	54 440 318	102 100 503	168 508 080	206 709 820	206 782 965	183 889 531
2010	2 850 641	7 392 374	24 229 726	57 618 006	108 060 121	178 343 916	218 775 495	218 852 910	211 460 536
2011	1 117 692	5 096 060	16 703 176	39 719 958	74 493 094	122 944 431	150 816 632	150 869 999	149 752 306
Coefficient de développement	4,5594	3,2777	2,3780	1,8755	1,6504	1,2267	1,0004		795 553 006

2.2. Méthode Mack

Avant d'appliquer la méthode Mack, il faut d'abord vérifier si nous pouvons accepter les trois hypothèses pour le triangle à estimer. Dans son article publié en 1994³¹, T. Mack présente les méthodes qui servent à vérifier les hypothèses.

2.2.1. Vérification des hypothèses de la méthode Mack

Rappelons les hypothèses de la méthode de Mack présentées au § III.2.1.

- (H1) Il existe des facteurs $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{l-1}$ tels que
 $E(C_{i,k+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k}f_k$ pour $1 \leq i \leq l$ et $1 \leq k \leq l-1$
- (H2) $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,l}\}, \{C_{j,1}, \dots, C_{j,l}\}$ sont indépendants $\forall i \neq j$
- (H3) $Var(C_{i,k+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k}\sigma_k^2$ pour $1 \leq i \leq l$ et $1 \leq k \leq l-1$
- Vérification (H1)³²

Afin de vérifier l'hypothèse 1, nous procédons au test de Spearman.

Test de Spearman

L'hypothèse 1 (H1) implique que les facteurs de développement $\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}$ et $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$ ne sont pas corrélés. Autrement dit, nous avons (pour $1 \leq i \leq l$ et $2 \leq k \leq l-1$) :

$$\mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}} \cdot \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right) \cdot \mathbb{E}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right)$$

Ici, la justification théorique ne se présente pas. Pour le détail, nous invitons à lire l'article de Mack [37]. A présent, nous appliquons ce test sur le triangle de sinistres présenté au paragraphe 2.1.

i. Calculer les F_k

A partir du triangle de sinistres, nous calculons les facteurs $F_k = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$, pour chaque colonne $k = 0, \dots, l-1$, et chaque ligne $i = 0, \dots, n-l-1$.

Calcul des $F_{i,k}$:

Années de développement

	0	1	2	3	4	5	6
0	7,0076	2,5201	2,6207	1,2673	1,4093	0,5334	0,0021
1	5,0675	6,6975	2,0037	1,6504	1,4174	0,5935	
2	4,6685	4,2866	1,7003	1,4982	1,3206		
3	3,3880	2,3368	1,8257	1,5347			
4	4,5210	2,2339	1,6817				
5	3,9460	2,0631					
6	1,5932						

³¹ [37] T. MACK

³² [32] C. CICHOWLAS

ii. Déterminer les rangs

Pour chaque colonne $k = 0, \dots, l - 1$, il faut trier les facteurs de développement $\frac{c_{i,k+1}}{c_{i,k}}$ dans un ordre croissant.

Notons $r_{i,k}$ le rang des facteurs, $1 \leq r_{i,k} \leq l - k$ ($i = 0, \dots, l - k$).

Calcul des $r_{i,k}$:

		Années de développement						
		0	1	2	3	4	5	6
Année de survenance	0	1	3	1	4	2	2	1
	1	2	1	2	1	1	1	
	2	3	2	4	3	3		
	3	6	4	3	2			
	4	4	5	5				
	5	5	6					
	6	7						

On élimine le dernier coefficient de chaque colonne $\frac{c_{l+1-k,k}}{c_{l+1-k,k-1}}$ puis on trie de nouveau les facteurs dans un ordre croissant. Notons le nouveau rang de chaque facteur $s_{i,k}$ avec $1 \leq s_{i,k} \leq l - k$ ($i = 0, \dots, l - k$).

Calcul des $s_{i,k}$:

		Années de développement						
		0	1	2	3	4	5	
Année de survenance	0	0	1	2	3	4	5	
	1	1	3	1	3	2	1	
	2	2	1	2	1	1		
	3	3	2	4	2			
	4	6	4	3				
	5	4	5					
	6	5						

iii. Calculer le T

Les coefficients de Spearman pour chaque colonne sont :

$$T_k = 1 - 6 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{l-k} (r_{i,k} - s_{i,k})^2}{((l-k)^3 - l+k)}$$

Ainsi nous calculons le coefficient de corrélation total pour le triangle :

$$T = \sum_{k=2}^{l-2} \frac{l-k-1}{(l-2)(l-3)/2} \cdot T_k$$

Calcul des T_k :

k	1	2	3	4	5	6
Tk	1,0	1,0	1,0	0,8	1,0	0,0

Calcul du T :

T	0,23095
---	---------

iv. Déterminer la corrélation

Afin de vérifier l'hypothèse de non corrélation, la valeur de T doit appartenir à l'intervalle :

$$\left[\frac{-0,67}{\sqrt{(n-1)(n-2)/2}}; \frac{0,67}{\sqrt{(n-1)(n-2)/2}} \right]$$

Cet intervalle vaut ici : [-0,146206 ; 0,146206].

T n'appartient pas à cet intervalle, donc, l'hypothèse 1 n'est pas vérifiée dans ce triangle. Cependant, nous vérifions la deuxième hypothèse.

- Vérification (H2)

L'indépendance entre les différentes années de survenance n'est pas souvent vérifiée en pratique en raison des « effets calendriers » par exemple des changements importants dans le traitement des sinistres ou de l'inflation.

Un effet calendaire possède un effet localisé sur l'une des diagonales :

$$D_j = \{C_{j,1}, C_{j-1,2}, \dots, C_{2,j-1}, C_{1,j}\}, 1 \leq j \leq l$$

et aussi sur les facteurs de développement :

$$A_j = \left\{ \frac{C_{j,2}}{C_{j,1}}, \frac{C_{j-1,3}}{C_{j-1,2}}, \dots, \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} \right\}$$

$$A_{j-1} = \left\{ \frac{C_{j-1,2}}{C_{j-1,1}}, \frac{C_{j-2,3}}{C_{j-2,2}}, \dots, \frac{C_{1,j}}{C_{1,j-1}} \right\}$$

i. Calculer les F_k

Afin de vérifier l'effet d'une année calendaire, il faut trier les éléments de l'ensemble F_k pour chaque k , $1 \leq k \leq l-1$:

$$F_k = \left\{ \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \mid 1 \leq i \leq l-k \right\}$$

Calcul des $F_{i,k}$:

Années de développement

Année de survenance	0	1	2	3	4	5	6
0	7,0076	2,5201	2,6207	1,2673	1,4093	0,5334	0,0021
1	5,0675	6,6975	2,0037	1,6504	1,4174	0,5935	
2	4,6685	4,2866	1,7003	1,4982	1,3206		
3	3,3880	2,3368	1,8257	1,5347			
4	4,5210	2,2339	1,6817				
5	3,9460	2,0631					
6	1,5932						

ii. Subdiviser les F_k

D'abord, nous déterminons la médiane à chaque colonne puis marquons d'un S ou d'un L les coefficients, respectivement, si le coefficient est inférieur à la médiane ou supérieur à la médiane et 0 si le coefficient est égal à la médiane.

- S : inférieur à la médiane
- L : supérieur à la médiane
- 0 : la médiane

		Années de développement						
		0	1	2	3	4	5	6
Année de survenance	0	L	L	L	S	0	S	0
	1	L	L	L	L	L	L	
	2	L	L	S	S	S		
	3	S	S	0	L			
	4	0	S	S				
	5	S	S					
	6	S						
	Médiane	4,5210	2,4284	1,8257	1,5165	1,4093	0,5634	0,0021

Ensuite, chaque élément des F_k appartient à l'ensemble SF ou LF si la valeur est S ou L. On élimine les zéros.

iii. Déterminer les effets calendaires

Pour chaque diagonale A_j , $0 \leq j \leq n - 1$, il faut compter le nombre de facteurs qui appartiennent à l'ensemble SF (noté S_j) et le nombre de facteurs qui appartiennent à l'ensemble LF (noté L_j).

On définit :

- $Z_j = \min(L_j, S_j)$
- $n_j = L_j + S_j$
- $m_j = \left[\frac{n_j-1}{2} \right]$
- $E(Z_j) = \frac{n_j}{2} - \binom{n_j-1}{m_j} \cdot \frac{n_j}{2^{n_j}}$
- $Var(Z_j) = \frac{n_j(n_j-1)}{4} - \binom{n_j-1}{m_j} \cdot \frac{n_j(n_j-1)}{2^{n_j}} + E(Z_j) - (E(Z_j))^2$

Afin d'éviter des erreurs d'accumulation, il est déconseillé de tester chaque Z_j . On considère plutôt la variable Z, $Z = \sum_{j=2}^{l-1} Z_j$ qui suit approximativement la loi normale avec :

$$E(Z) = \sum_{j=2}^{l-1} E(Z_j)$$

$$Var(Z) = \sum_{j=2}^{l-1} Var(Z_j)$$

Cela signifie qu'on peut accepter avec une probabilité d'erreur de 5 %, l'hypothèse d'absence d'effet calendaire si Z appartient à l'intervalle :

$$\left[E(Z) - 1,96 * \sqrt{Var(Z)}; E(Z) + 1,96 * \sqrt{Var(Z)} \right]$$

Calculer les éléments nécessaires :

Diagonale (j)	Lj	Sj	Z _j	n _j	m _j	E(Z _j)	Var(Z _j)
1	2	0	0	2	0	0,5000	0,2500
2	3	0	0	3	1	0,7500	0,1875
3	2	2	2	4	1	1,2500	0,4375
4	2	1	1	3	1	0,7500	0,1875
5	1	4	1	5	2	1,5625	0,3711
6	2	4	2	6	2	2,0625	0,6211
Total			6			6,8750	2,0547 = (1,4334) ²

Déterminer l'intervalle confiance : [4,0655; 9,6845]

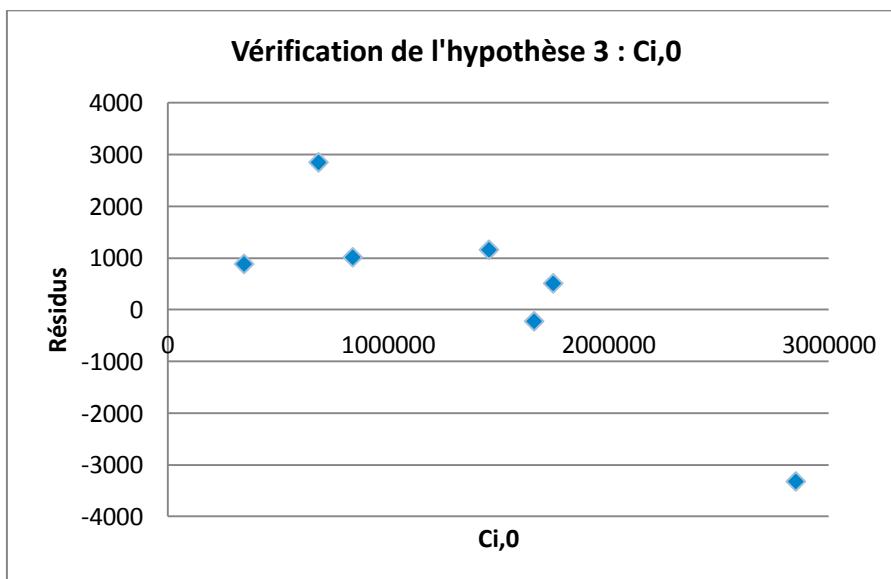
Conclusion :

Z(-6) appartient à cet intervalle. L'hypothèse 2, donc, est vérifiée.

- Vérification (H3)³³

L'hypothèse 3 peut être vérifiée graphiquement. Si le graphique des résidus $\frac{c_{i,k+1} - c_{i,k+1}\hat{f}_k}{\sqrt{c_{i,k}}}$ en fonction de $C_{i,k}$ représente la forme aléatoire, l'hypothèse 3 est vérifiée.

Avec les graphiques présentées en dessous (cf. figure 21), il est difficile de déterminer le caractère aléatoire de la répartition des résidus.



³³ [32] C. CICHOWLAS

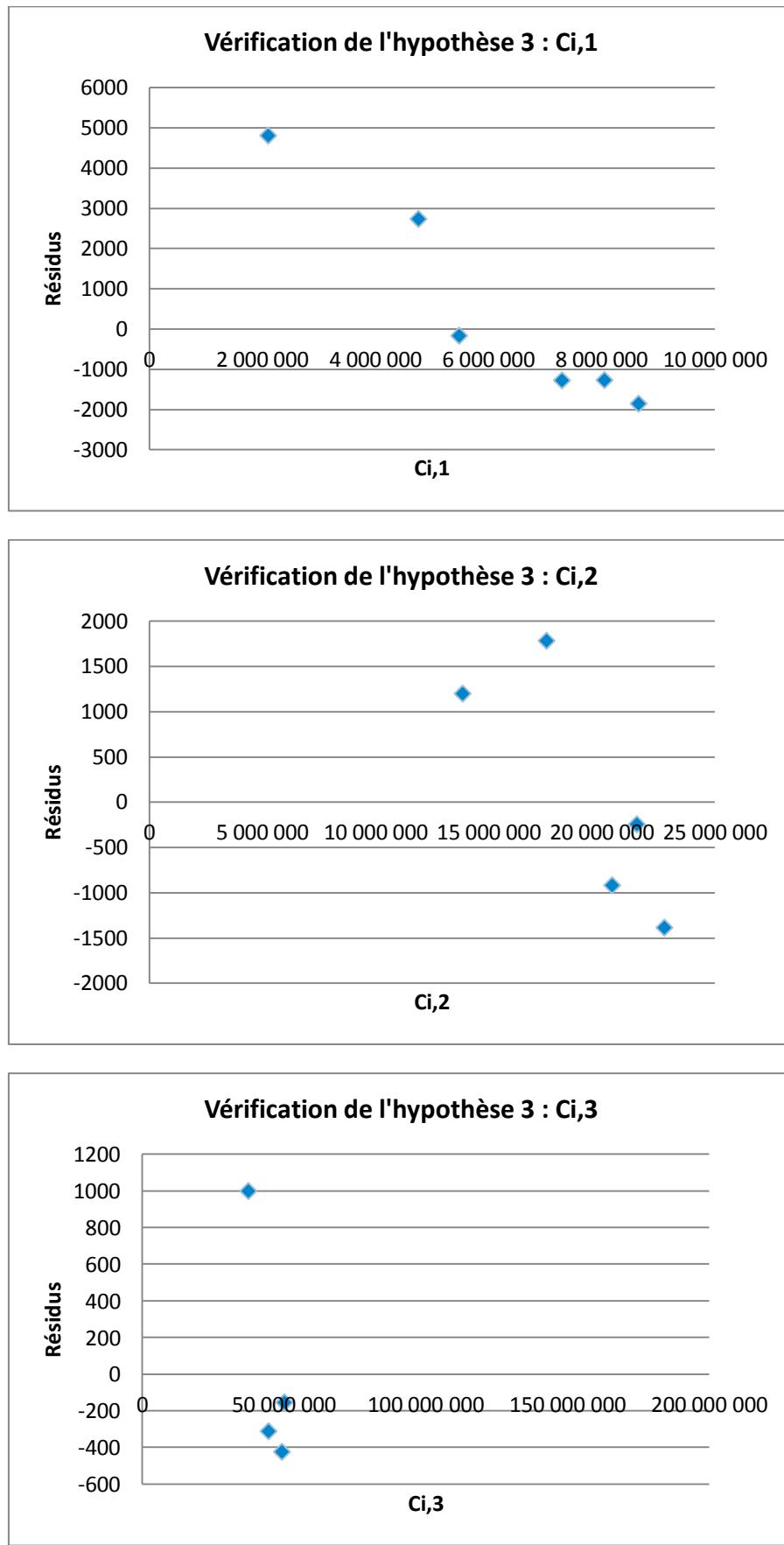


Figure 21 : Vérification de l'hypothèse 3 de la méthode Mack

Bien que le triangle dans cet exemple ne vérifie pas toutes les hypothèses, nous appliquons ici la méthode Mack.

2.2.2. Résultats par la méthode Mack

Après avoir effectué le calcul dans le logiciel Excel, les résultats sur l'exemple par la méthode Mack sont expliqués ci-dessous.

Par rapport à la loi Normale, la loi Log-Normale a l'avantage de ne pas prendre en compte les valeurs négatives et sa distribution est plus asymétrique, ce qui permet de donner une importance plus grande aux risques extrêmes qu'aux risques moyens.

L'erreur quadratique moyenne est de 17,57%, autrement dit, la variance de l'estimation $E(R_i)$ ne représente que 17,57% du montant total des sinistres estimé.

i	R _i	se(R _i)	se(R _i)/R _i	Intervalle de confiance 95%			
				Normal		Log-normal	
				Borne inf	Borne sup	Borne inf	Borne sup
1	0						
2	58 032	3 624 492	6245,69%	-7 045 841	7 161 905	3	260 475
3	33 937 014	6 085 531	17,93%	22 009 594	45 864 435	23 570 628	47 340 316
4	83 447 252	9 117 145	10,93%	65 577 976	101 316 528	67 005 717	102 697 238
5	133 008 335	13 554 636	10,19%	106 441 737	159 574 933	108 421 378	161 493 774
6	183 889 531	30 273 479	16,46%	124 554 603	243 224 459	131 690 291	250 003 697
7	211 460 536	78 616 570	37,18%	57 374 890	365 546 181	97 913 615	401 226 420
8	149 752 306	95 567 143	63,82%	-37 555 852	337 060 464	40 147 353	396 932 116
Total	795 553 006	139 799 732	17,57%	521 550 565	1 069 555 447	556 701 344	1 102 828 406

Lors du calcul de la VaR, l'utilisation simple d'une fonction « loi.normale.inverse(α ; μ ; σ) » ou « loi.lognormale.inverse(α ; μ ; σ) » dans le logiciel Excel nous donne le résultat suivant pour la réserve totale.

Probabilité	Méthode Mack: Quantile (VaR)	
	loi normale	loi log-normale
50,00%	795 553 006	783 547 098
75,00%	889 846 493	881 351 801
95,00%	1 025 503 103	1 043 860 016
99,00%	1 120 775 816	1 175 592 903
99,50%	1 155 653 253	1 227 869 081

La PSAP déterministe qu'on a calculé au § IV.2.1. était de : 795 553 006 euros

2.3. Évaluation stochastique : Bootstrap

Pour procéder la méthode de Boostrap, d'abord, nous calculons les résidus de Pearson :

$$r_{i,j}^{(p)} = \frac{C_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{m}_{i,j}}}$$

	Années de développement							
	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
2004	-543	70	-399	925	-73	-1	-416	0
2005	-788	-1237	-246	-297	169	329	432	
2006	-445	-417	716	111	82	-309		
2007	400	618	136	-221	-179			
2008	104	839	224	-530				
2009	176	621	-418					
2010	965	-512						
2011	0							

Puis on calcule les résidus de Pearson ajustés avec la formule :

$$r_{i,j}^{adj} = r_{i,j}^{(p)} * \sqrt{\frac{n}{n-p}}$$

où $n = \frac{l(l+1)}{2}$; $p = 2 * l - 1$

Ici, nous avons : $l = 8$; $n = 36$; $p = 15$

	Années de développement							
	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
2004	-711	91	-522	1211	-96	-2	-545	0
2005	-1032	-1619	-322	-389	221	430	565	
2006	-583	-546	938	146	107	-405		
2007	523	809	178	-290	-234			
2008	136	1098	293	-695				
2009	230	813	-547					
2010	1264	-670						
2011	0							

Les deux résidus de l'extrême de la diagonale, nuls par construction, non i.i.d doivent être exclus lorsqu'on effectue le rééchantillonnage.

Exemple de rééchantillonnage avec remise:

	Années de développement							
	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
2004	-290	107	-322	136	809	-547	813	1098
2005	-546	230	146	-405	-234	221	-522	
2006	-546	-290	523	221	-547	-711		
2007	-711	-389	-547	-670	-1619			
2008	-2	430	-547	-670				
2009	1264	178	-389					
2010	-234	293						
2011	-2							

Reconstitution du pseudo-triangle des incrément par la formule :

$$C_{i,j}^* = r_{i,j}^{adj*} \sqrt{\hat{m}_{i,j}} + \hat{m}_{i,j}$$

Reconstitution du pseudo-triangle des incréments :

Année de survenance	Années de développement							
	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
2004	973 675	4 875 062	12 367 420	27 577 541	45 748 418	52 448 576	37 177 808	336 426
2005	613 832	4 804 454	13 139 199	23 001 535	36 371 761	54 293 643	27 432 691	
2006	722 350	4 197 267	16 071 866	29 142 440	38 700 402	53 422 085		
2007	434 969	3 535 432	10 732 375	21 787 612	28 013 241			
2008	1 335 511	5 699 281	11 849 754	24 026 891				
2009	3 096 444	5 868 546	14 356 801					
2010	1 322 940	6 474 374						
2011	1 115 880							

Reconstitution du pseudo-triangle des montants cumulés :

Année de survenance	Années de développement							
	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
2004	973 675	5 848 737	18 216 157	45 793 698	91 542 116	143 990 693	181 168 501	181 504 927
2005	613 832	5 418 286	18 557 485	41 559 020	77 930 781	132 224 424	159 657 115	
2006	722 350	4 919 618	20 991 484	50 133 924	88 834 325	142 256 411		
2007	434 969	3 970 401	14 702 776	36 490 388	64 503 630			
2008	1 335 511	7 034 792	18 884 545	42 911 436				
2009	3 096 444	8 964 990	23 321 791					
2010	1 322 940	7 797 314						
2011	1 115 880							

Calcul des facteurs de développement suivant Chain-Ladder puis calcul des estimations:

N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
	5,1712	3,1716	2,3742	1,8555	1,6201	1,2339	1,0019

Année de survenance	Années de développement								Provision
	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	
2004	973 675	5 848 737	18 216 157	45 793 698	91 542 116	143 990 693	181 168 501	181 504 927	0
2005	613 832	5 418 286	18 557 485	41 559 020	77 930 781	132 224 424	159 657 115	159 953 594	296 480
2006	722 350	4 919 618	20 991 484	50 133 924	88 834 325	142 256 411	175 532 134	175 858 093	33 601 682
2007	434 969	3 970 401	14 702 776	36 490 388	64 503 630	104 499 333	128 943 158	129 182 602	64 678 973
2008	1 335 511	7 034 792	18 884 545	42 911 436	79 621 300	128 990 768	159 163 476	159 459 039	116 547 603
2009	3 096 444	8 964 990	23 321 791	55 370 466	102 738 777	166 442 318	205 375 456	205 756 833	182 435 042
2010	1 322 940	7 797 314	24 729 800	58 713 353	108 941 436	176 490 958	217 774 610	218 179 013	210 381 699
2011	1 115 880	5 770 490	18 301 568	43 451 480	80 623 341	130 614 128	161 166 561	161 465 844	160 349 964
									768 291 442

Dans le logiciel Excel, nous pouvons récupérer les montants de provisions à chaque nombre de simulation. Ici, les simulations se font 1 000 fois, 10 000 fois et 100 000 fois et les résultats sont suivants :

échantillon (N=1000)	échantillon (N=10 000)	échantillon (N=100 000)
930 888 972	853 262 351	694 459 500
794 979 335	1 143 687 008	909 866 397
636 457 384	703 835 775	772 002 545
633 778 577	646 371 912	741 509 966
718 996 982	1 047 669 454	713 438 718
830 552 755	832 899 476	960 546 466
688 567 882	811 567 875	889 813 509
798 197 383	788 681 180	949 969 008
738 539 210	724 498 751	972 029 189
975 701 456	756 145 882	1 061 335 844
895 950 239	749 948 008	768 528 556
474 838 802	731 499 967	713 389 033
741 975 670	1 007 864 262	736 989 977
632 347 434	616 476 155	494 345 351
710 533 684	698 481 838	684 852 610
599 801 073	829 658 643	964 896 969
956 994 823	820 069 033	774 416 714
815 225 004	860 490 317	854 064 787
579 352 349	1 075 311 244	706 811 678
776 265 362	816 778 871	764 569 383
854 917 102	842 583 804	812 300 750
777 292 062	619 741 559	778 745 136
825 843 229	622 547 932	885 695 640
778 327 823	725 891 291	1 023 050 011
866 996 773	777 346 908	654 066 685
934 833 124	867 392 472	761 118 891
861 352 100	709 011 123	657 204 225
1 079 748 232	695 127 874	1 098 366 094
1 139 190 519	842 016 188	719 521 510
746 999 434	706 326 935	667 802 252

Nous pouvons calculer les VaR à l'aide d'une fonction d'Excel *Centile* et trouver les valeurs :

Probabilité	Quantile		
	N= 1000	N= 10 000	N= 100 000
50,00%	784 960 878	795 573 970	795 965 402
75,00%	882 995 686	892 519 292	891 531 142
95,00%	1 061 365 461	1 059 275 767	1 053 101 267
99,00%	1 200 616 591	1 200 220 209	1 197 531 196
99,50%	1 204 176 334	1 268 648 534	1 256 054 602

Nous pouvons également appliquer une fonction « BootChainLadder » sous le logiciel R (library « « ChainLadder »») en prenant le nombre de simulation de 1 000, de 10 000 et de 100 000 (cf. figure 22). Cette représentation graphique confirme l'intérêt d'effectuer un nombre de simulation important.

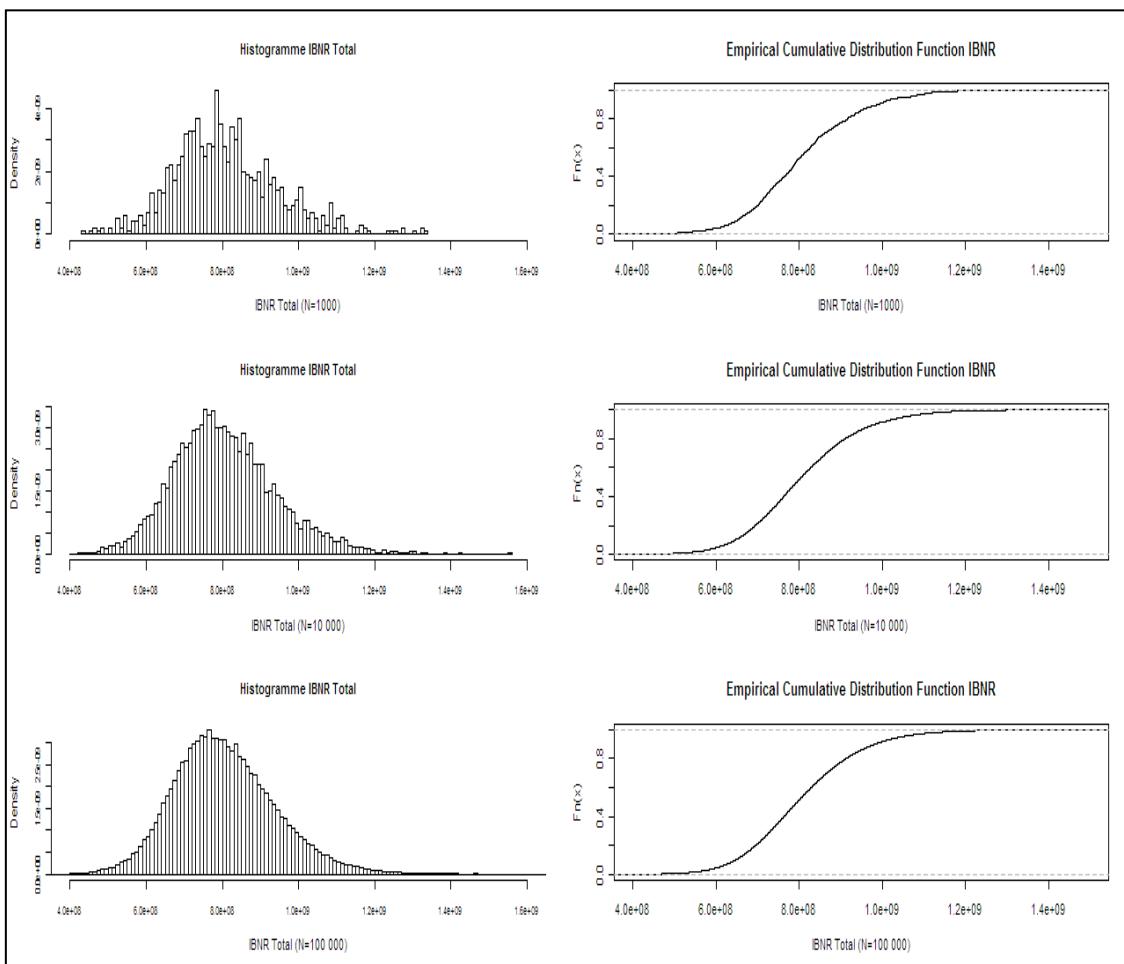


Figure 22 : Évolution de la densité de sinistralité selon le nombre de simulation (N=1 000, 10 000 , 100 000)

La fonction *quantile* du logiciel R nous permet d'obtenir les résultats suivants pour la réserve totale.

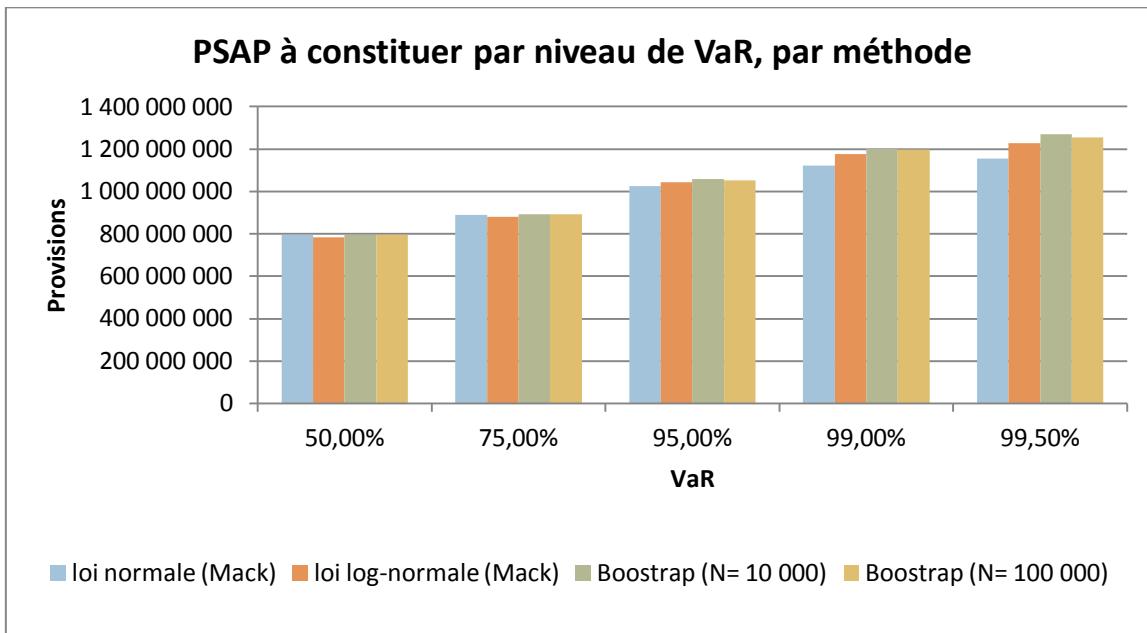
Probabilité	Quantile (VaR)		
	N=1000	N=10 000	N=100 000
50,00%	792 412 977	793 826 656	794 993 870
75,00%	893 394 535	885 963 411	887 736 588
95,00%	1 053 047 892	1 051 089 813	1 044 415 856
99,00%	1 164 248 079	1 178 661 612	1 180 280 480
99,50%	1 192 796 192	1 239 113 128	1 234 053 746

La PSAP déterministe qu'on a calculé au paragraphe 2.1. était de : 795 553 006 euros

2.4. Comparaison des résultats

On compare les valeurs de la PSAP en fonction de la méthode utilisée :

Ici, on prend les résultats calculés dans le logiciel Excel pour la méthode Bootstrap afin d'avoir l'homogénéité.



La méthode Mack permet de déterminer la variabilité de la charge ultime. Avec cette variabilité, on trouve une distribution des provisions techniques en supposant que la charge ultime suit la loi log-normale. C'est pourquoi on appelle la méthode Mack une méthode paramétrique.

La méthode Bootstrap est non paramétrique. Elle génère des N triangles en supposant l'indépendance des résidus de Pearson avec N fois de rééchantillonnage. Cette méthode constitue un choix souvent retenu de par sa simplicité de mise en œuvre. En effet, la méthode Bootstrap ne peut fournir des informations que sur la zone où des données sont disponibles. Cette méthode permet de déterminer la distribution des charges ultimes.

On compare la moyenne et l'écart-type par la méthode de Mack et Bootstrap :

	Méthode Mack	Bootstrap		
		N= 1000	N= 10 000	N= 100 000
moyenne	795 553 006	801 559 193	808 906 036	808 528 964
écart-type	139 799 732	138 398 762	141 367 591	140 639 641

Étude des écarts relatifs obtenus entre les résultats issus de la modélisation par une loi paramétrique et la méthode Bootstrap ($N=100 000$):

Ecart relatif	moyenne	écart-type	VaR 50%	VaR 75%	VaR 95%	VaR 99%	VaR 99,5%
loi normale / Bootstrap (N=100 000)	1,60%	0,60%	0,05%	0,19%	2,62%	6,41%	7,99%
loi log-normale / Bootstrap (N=100 000)	1,60%	0,60%	1,56%	1,14%	0,88%	1,83%	2,24%

Pour le triangle étudié, Les écarts entre les résultats issus de la modélisation par la loi normale et la méthode Bootstrap sont relativement plus importants que ceux entre les résultats issus de la modélisation par la loi log-normale et la méthode Bootstrap.

Partie V Une méthodologie de la construction des tables d'expérience stochastiques

Dans la réglementation actuelle, les provisions mathématiques fournissent une espérance de la provision réelle par des formules fermées (cf. II.2.3.3).

Les tables de maintien dans l'état, de décès dans l'état ou de passage en invalidité jouent un rôle majeur au cours du calcul des PM. C'est pourquoi le choix des tables est strictement réglementé.

En effet, l'application des lois réglementaires BCAC imposait la constitution d'un montant supplémentaire de provision significatif au moment de leurs publications.³⁴ En plus, l'échantillon retenu lors de la construction des tables n'a pas été strictement représentatif de la population française. Les lois fournies par la réglementation peuvent s'avérer en décalage par rapport à la réalité du comportement des assurés.³⁵ Aussi l'assureur a intérêt à prendre en compte l'expérience de ses propres portefeuilles. L'utilisation des tables d'expérience certifiées permet de retenir un tarif au plus juste et d'avoir une meilleure vision du risque du portefeuille.³⁶

En pratique, pour les risques liés aux garanties de prévoyance, les difficultés pour estimer des tables propres aux assureurs conduit les assureurs à utiliser les tables de mortalité ou les tables d'arrêt de travail du BCAC.

Afin de mesurer les risques de sous ou sur provisionnement, il est intéressant d'avoir une idée du niveau de risque que des différentes méthodes prennent en constituant les provisions mathématiques.

Dans la partie V, on propose une méthodologie qui peut servir à étudier le risque de modèle lors de la construction d'une table d'expérience. Le risque de modèle correspond aux différences potentielles entre les mesures délivrées par un modèle mathématique et la réalité. L'efficience d'un modèle peut être mise en cause pour différentes raisons :

- le contexte est hors norme : le modèle se base sur des informations historiques qui ne décrivent pas - ou plus - la réalité du moment
- le modèle est pertinent, mais il est mal utilisé : données historiques insuffisantes (quantité ou qualité)

Afin d'étudier le risque de modèle, on introduit une méthodologie qui constitue à construire des tables stochastiques avec simulation basé sur un modèle. On prend l'exemple de la loi maintien en incapacité et en y introduit la modélisation GLM et des méthodes d'ajustement développées dans le domaine de la mortalité.

Une fois des tables stochastiques construites, la distribution des PM est obtenue par des formules fermées. Le thème principal est donc la méthodologie de construction des tables stochastiques.

Nous présentons, d'abord, les modèles qui pourront servir à construire la table d'expérience de maintien en incapacité. Nous étudions les modèles développés dans le domaine de la mortalité. Ensuite, nous présentons les modèles linéaires généralisés (noté GLM par la suite).

L'une des grandes différences entre la table de mortalité et la table de maintien en incapacité est le fait que la seconde a deux différents axes affectant le taux de sortie de l'incapacité. (cf. figure 23) :

- l'âge de l'entrée dans l'état
- l'ancienneté de l'arrêt

³⁴ [38] BCAC

³⁵ [3] F. Planchet, J. Winter

³⁶ [40] M. Juillard, F. Planchet

C'est pourquoi nous ne pouvons pas directement appliquer les modèles développés dans le domaine de mortalité présentées par la suite.

La figure 23 montre que le taux de sortie de l'état d'incapacité dépend de l'âge au début de l'arrêt de travail et de l'ancienneté de l'arrêt.

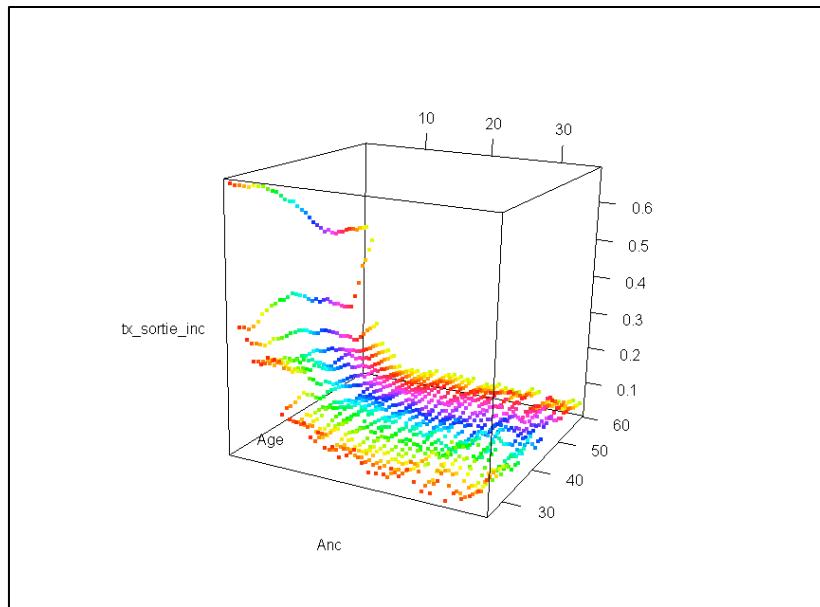


Figure 23 : Taux de sortie de l'état d'incapacité par âge de l'entrée dans l'état et par ancienneté

Le taux de sortie croît de manière exponentielle entre le 35ème et le 36ème mois en raison de l'existence de la limite d'indemnisation au 36ème mois. (cf. figure 24)

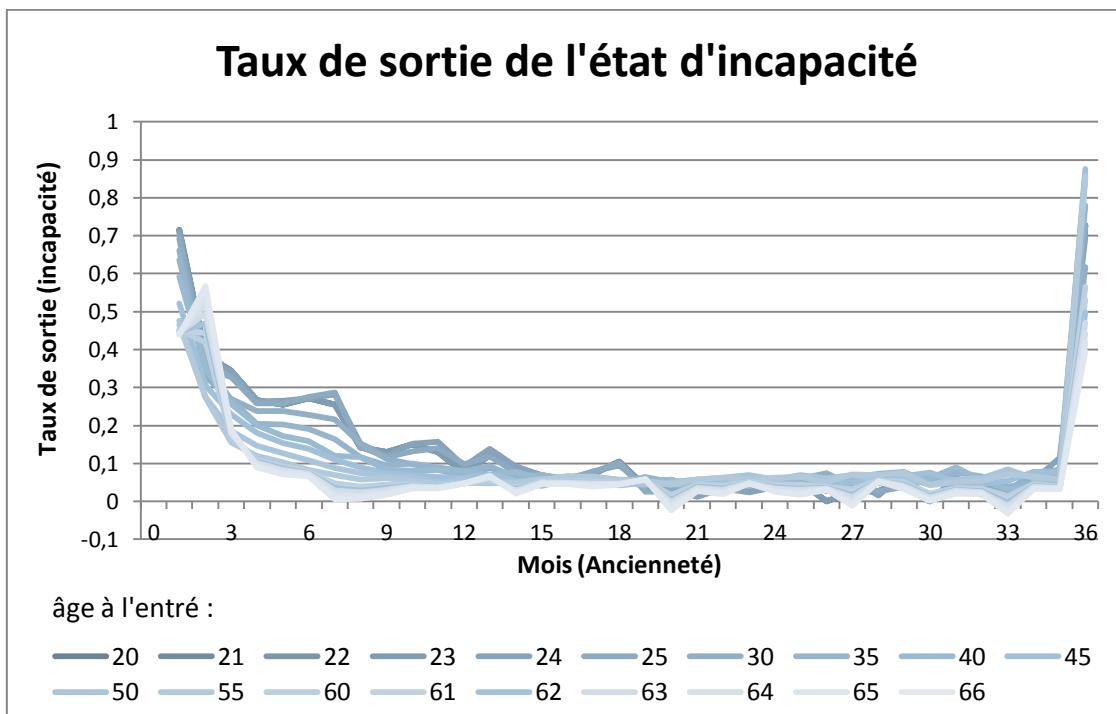


Figure 24 : Taux de sortie de l'état d'incapacité (BCAC)

Après avoir étudié les divers modèles, nous simulons avec grand nombre un modèle ayant comme variables explicatives : l'ancienneté et l'âge d'entrée dans l'état, et comme variable à expliquer : le taux de sortie de l'état d'incapacité. Dans cette étape, les aléas se produisent autour des taux de sortie de l'état.

Après les simulations, un problème de l'irrégularité des aléas générés se pose. Pour y remédier, on introduit les méthodes d'ajustement : la méthode de lissage par splines et la méthode de Whittaker-Henderson.

Puis, on peut trouver une distribution des PM en utilisant la table construite à partir des taux simulés, ajustés avec des formules fermées.

Finalement, on va étudier la convergence de ces tables stochastiques.

Faute de tables d'expériences, ici, nous allons étudier la méthodologie en appliquant à la table de maintien en incapacité du BCAC. Bien qu'il y ait des limites sur cette approche, la méthodologie pourrait être applicable à la construction des tables d'expérience propres aux assureurs.

1. Cadre théorique

Dans ce paragraphe, nous présentons le cadre théorique pour qu'on puisse construire les tables stochastiques de maintien en incapacité.

1.1. Modélisation

1.1.1. Quelques modèles appliqués à la mortalité

Avant de décrire la modélisation GLM, nous rappelons brièvement quelques modèles développés dans le domaine de la mortalité. Comme mentionné précédemment, l'existence des deux axes (l'ancienneté et l'âge d'entrée dans l'état) nous empêche d'appliquer les modèles utilisés en mortalité.

Pour un modèle de fonction de survie continue $L(x)$ à l'âge x , nous introduisons le taux instantané de mortalité $\mu(x)$ définit :

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{L(x)} * \frac{L(x) - L(x + \Delta x)}{\Delta x} \\ \mu(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{L(x)} * \frac{L(x + \Delta x) - L(x)}{\Delta x} = -\frac{L'(x)}{L(x)} = -(\ln L(x))'\end{aligned}\quad (1)$$

▪ Modèle de Makeham

Le modèle Makeham (ou Gompertz-Makeham) part d'un taux instantané de décès défini par un risque exponentiel lié au vieillissement auquel s'ajoute une constante liée au risque accidentel :

$$\mu(x) = A + \alpha c^x$$

- α : le risque initial de la population
- c : le coefficient d'aggravation du taux de décès par année
- $A > 0$ et $c > 1$

En prenant l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned}\mu(x) &= -(\ln L(x))' = A + \alpha c^x \\ \ln L(x) &= -Ax - \frac{\alpha}{\ln c} c^x + \ln k\end{aligned}$$

et

$$L(x) = k \cdot e^{-Ax} \cdot e^{-\frac{\alpha c^x}{\ln c}} = k \cdot s^x \cdot g^{cx}$$

- $s = e^{-A}$: vu comme la probabilité de ne pas mourir par accident
- $g = e^{-\frac{\alpha}{\ln c}}$
- $k = \frac{L(0)}{g}$

▪ Modèle de Lee-Carter

R.D. LEE et L. Carter ont proposé le modèle supposant la forme log-bilinéaire de la mortalité

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa(t) + \varepsilon_x(t)$$

où $\varepsilon_x(t)$ suit indépendamment, identiquement la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Le modèle est invariant sous la transformation ci-dessous :

$$\beta_x \leftarrow c \beta_x$$

$$\kappa(t) \leftarrow \frac{\kappa(t)}{c}, c \in \mathbb{R}^*$$

Lee et Carter ont proposé les contraintes d'identifiabilité suivantes :

$$\sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \kappa(t) = 0$$

$$\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \beta_x = 1$$

Dans le modèle,

α_x décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité,

$$\alpha_x = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \ln \mu_x(t)$$

$\kappa(t)$ décrit l'évolution de la mortalité au cours du temps,

β_x décrit la sensibilité de l'âge à l'évolution de la mortalité au cours du temps.

$$\frac{d}{dt} \ln \mu_x(t) = \beta_x \frac{d}{dt} \kappa(t)$$

1.1.2. Modèles linéaires généralisés : GLM

Les modèles linéaires généralisés permettent d'unifier divers modèles statistiques tels que la régression linéaire, la régression logistique et la régression de Poisson.

Soit Y une variable à expliquer et X un vecteur contenant plusieurs variables explicatives. Dans les modèles GLM, nous supposons que Y suit une loi qui fait partie de la famille exponentielle (lois normale, de Poisson, binomiale, Gamma, etc.) par rapport à une mesure dominante v .

La loi de probabilité Y appartient à la famille exponentielle si et seulement si la fonction de densité peut se mettre sous la forme :

$$f(y, \theta, \varphi) = \exp\left(\frac{\theta y - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi)\right) \quad (*)$$

où

- y : observation de Y
- a : une fonction non nulle définie sur \mathbb{R} , connue et dérivable
- b : une fonction définie sur \mathbb{R} , de plus trois fois dérivable et sa dérivée première est inversible
- c : une fonction définie sur \mathbb{R}^2 , connue et dérivable
- θ : paramètre canonique ou paramètre de la moyenne appartenant à \mathbb{R}
- φ : paramètre de dispersion appartenant à \mathbb{R}

- Propriétés

- Espérance de Y

Puisque $f(y, \theta, \varphi)$ est une densité par rapport à ν nous avons :

$$u(\theta, \varphi) = \int_y f(y, \theta, \varphi) d\nu = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$$

En dérivant cette fonction $u(\theta, \varphi)$ par rapport à θ , on obtient grâce à la linéarité de l'intégrale et au lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\theta + h, \varphi) - u(\theta, \varphi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_y f(y, \theta + h, \varphi) - f(y, \theta, \varphi) d\nu}{h} \\ &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\int_y f(y, \theta + h, \varphi) - f(y, \theta, \varphi) d\nu}{h} = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\int_y f(y, \theta + h, \varphi) - f(y, \theta, \varphi) d\nu}{h} = 0 \\ \int_y \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(y, \theta + h, \varphi) - f(y, \theta, \varphi)}{h} d\nu &\leq 0 \leq \int_y \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(y, \theta + h, \varphi) - f(y, \theta, \varphi)}{h} d\nu \end{aligned}$$

Puis que la dérivée partielle de $f(y, \theta, \varphi)$ par rapport à θ existe donc :

$$\int_y \frac{\partial f(y, \theta, \varphi)}{\partial \theta} d\nu = 0$$

Or, nous calculons la dérivée partielle par rapport à θ :

$$\frac{\partial f(y, \theta, \varphi)}{\partial \theta} = f(y, \theta, \varphi) * \frac{y - b'(\theta)}{a(\varphi)}$$

$$\int_y \frac{\partial f(y, \theta, \varphi)}{\partial \theta} d\nu = \frac{1}{a(\varphi)} * \left[\int_y y f(y, \theta, \varphi) d\nu - b'(\theta) \int_y f(y, \theta, \varphi) d\nu \right] = 0$$

Comme $a(\varphi) \neq 0$ on en déduit :

$$\mathbb{E}(Y) = b'(\theta)$$

- Variance de Y

De la même logique, en utilisant la dérivée partielle seconde par rapport à θ on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \int_y \frac{\partial^2 f(y, \theta, \varphi)}{\partial \theta^2} d\nu = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(y, \theta, \varphi)}{\partial \theta^2} = -\frac{b''(\theta)}{a(\varphi)} * f(y, \theta, \varphi) + \frac{1}{(a(\varphi))^2} [(y - b'(\theta))^2 * f(y, \theta, \varphi)]$$

Comme nous avons obtenu $\mathbb{E}(Y) = b'(\theta)$,

$$-\frac{b''(\theta)}{a(\varphi)} * \int_y f(y, \theta, \varphi) d\nu + \frac{1}{(a(\varphi))^2} \int_y [(y - \mathbb{E}(Y))^2 * f(y, \theta, \varphi)] d\nu = 0$$

\Leftrightarrow

$$Var(Y) = b''(\theta)a(\varphi)$$

- famille exponentielle

Ici, on présente trois familles exponentielles : loi normale, loi Bernoulli et loi Poisson.

- Loi normale

Soit Y qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La fonction de densité $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ peut s'écrire sous la forme (*) :

- $\theta = \mu$
- $\varphi = \sigma$
- $a(\varphi) = \varphi^2$
- $b(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$
- $c(y, \varphi) = -\frac{y^2}{2\varphi^2} - \log(\sqrt{2\pi\varphi^2})$

- Loi Bernoulli

Soit Y suit une loi de Bernoulli dont la fonction de masse est ($y \in \{0,1\}$) :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mu^y (1 - \mu)^{1-y} = \begin{cases} \mu & \text{si } y = 1 \\ 1 - \mu & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela peut être transformé sous la forme (*) :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \frac{e^{y\theta}}{1 + e^\theta}$$

où

$$\theta = \log \frac{\mu}{1 - \mu}$$

$$a(\varphi) = 1$$

$$b(\theta) = \log(1 + e^\theta)$$

$$c(y, \varphi) = 0$$

- Loi Poisson

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Y est à valeurs discrètes.

Sa fonction de densité est sous la forme :

$$\mathbb{P}(Y = y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

qui peut être mis sous la forme (*) :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \exp(y \ln \lambda - \lambda - \ln(y!))$$

ainsi la loi de Poisson appartient à la famille exponentielle naturelle avec :

$$\theta = \ln \lambda$$

$$a(\varphi) = 1$$

$$b(\theta) = e^\theta$$

$$c(y, \varphi) = -\ln(y!)$$

Dans les modèles GLM, il existe une fonction de lien, notée g , entre la variable à expliquer Y et les variables explicatives X . La variance de Y est déterminé en fonction de son espérance. Nous avons :

$$\mathbb{E}(Y) = \mu = g^{-1}(X\beta) = b'(\theta)$$

$$Var(Y) = V(\mathbb{E}(Y)) = V(g^{-1}(X\beta)) = b''(\theta)a(\varphi)$$

β : un vecteur de paramètres inconnus à déterminer

V une fonction établissant entre $Var(Y)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Les fonctions de lien, g correspondant aux distributions sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Loi	Nom du lien	$g(\mu)$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	lien identité	μ
Binomiale $Bin(n, p)$	lien logit	$\ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$
Poisson $P(\mu)$	lien log	$\ln(\mu)$
Gamma $\Gamma(\mu, \beta)$	lien réciproque	$-\frac{1}{\mu}$

Si les données de variable à expliquer sont des comptages, le lien classique est le lien log associé à la loi de Poisson.
Si les données sont continues, le choix classique est le lien identité ou le lien réciproque.

- Estimation : Maximum de vraisemblance

L'estimation des paramètres du GLM se fait par maximum de vraisemblance. La vraisemblance est un produit de fonctions de densité par définition. Pour en déterminer le maximum, on cherche la valeur du paramètre de la fonction qui annule tout en gardant la dérivée seconde négative. Comme la fonction logarithme est strictement croissante, le maximum du logarithme d'une fonction équivaut au maximum de la fonction.

Supposons qu'on a des observations : $(X_i, Y_i) i \in \{1, 2, \dots, n\}$

On va noter $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^t$

Par hypothèse de modélisation, la fonction de densité est connue et donc pour une observation i , on obtient le logarithme de la fonction de densité :

$$l(Y_i, \theta, \varphi) = \log f(Y_i, \theta, \varphi) = \frac{\theta Y_i - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(Y_i, \varphi)$$

La log-vraisemblance est donc :

$$L(Y, \mu, \varphi) = \sum_{i=1}^n l(Y_i, \theta_i, \varphi) \quad (1)$$

La déviance est alternative pour trouver le maximum de la vraisemblance et définie par :

$$D(Y, \mu, \varphi) = 2 * \{l(Y, \mu^{max}, \varphi) - l(Y, \mu, \varphi)\} \quad (2)$$

Ici, μ^{max} est un vecteur qui maximise le modèle saturé et le terme $l(Y, \mu^{max}, \varphi)$ ne dépend pas de paramètre β . La minimisation de cette déviance (2) est alors équivalent à la maximisation de la log-vraisemblance (1).

A l'application (cf. § V.2.1.), on va utiliser la fonction *glm* dans le logiciel R qui demande la famille exponentielle comme paramètre.

- Validité d'un modèle

Dans le modèle linéaire classique, on vérifie la qualité du modèle en décomposant une partie explicative et une partie résiduelle. Par contre, dans le modèle GLM, il n'existe pas ce type de décomposition. Il est donc plus difficile de vérifier la validité du modèle GLM.

Ici, afin de valider un modèle sur le taux de sortie, on va comparer un modèle réduit ayant un seul terme 1 (constante) avec un modèle ayant les variables explicatives avec le test χ^2 . Pour cela, on utilisera la fonction *anova(modèle GLM, test= "Chisq")* qui fournit le test χ^2 sous le logiciel R avec les valeurs de déviance.

1.2. Simulation

Les méthodes de simulation s'appuient sur la possibilité de produire un flux supposé infini de variables aléatoires suivant des distributions déjà connues ou de nouvelles distributions. La simulation de ce flux est fondée sur la production (approximative) de variables aléatoires uniformes (0,1). [39]

Au § III.1.1. on a produit les variables aléatoires uniformes sous l'hypothèse d'une distribution par la simulation uniforme en utilisant *runif* sous le logiciel R. Ici, on produit les variables aléatoires uniformes sous l'hypothèse de la distribution connue. On utilise la méthode de la transformation inverse. Nous avons déjà étudié cette méthode au § III.1.1.

Pour représenter plus clairement la méthodologie, on prend l'exemple d'une suite :

$$Y_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i X_j \ (*)$$

où $X_j \sim \mathcal{N}(0,1)$ généré par la fonction *rnorm* sous le logiciel R.

A partir de tirage aléatoire des valeurs de X_j , on peut représenter la courbe de Y_i construite par l'équation (*) (cf. figure 25) selon les valeurs de i .

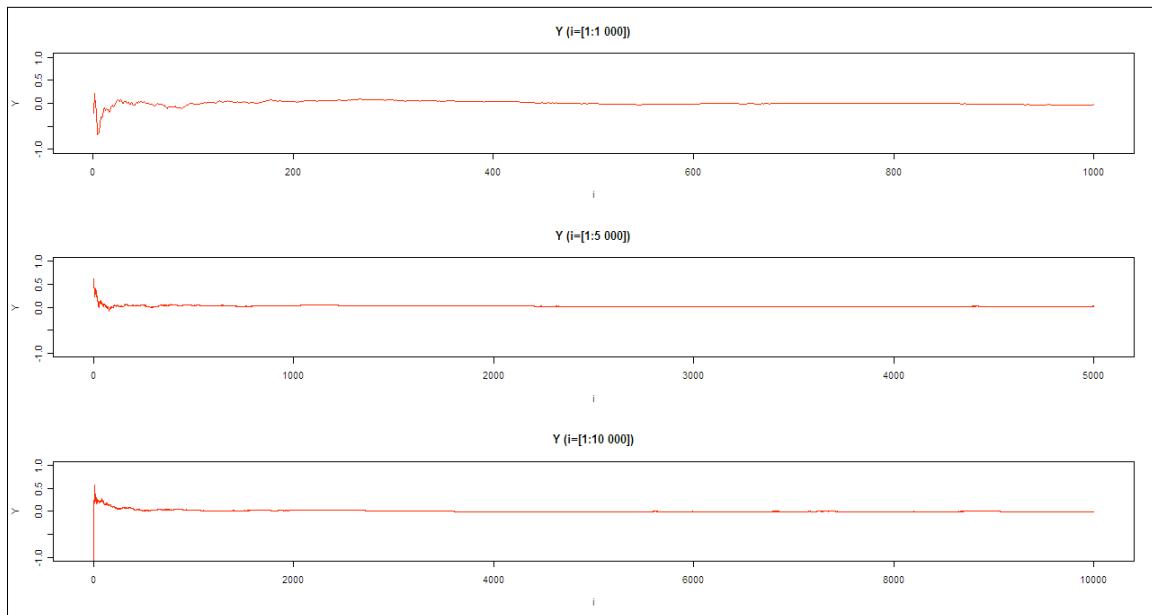


Figure 25 : Représentation graphique de Y

1.3. Méthodes d'ajustement

Après l'étape de simulation, on peut avoir des valeurs irrégulières autours de la variable à expliquer. Pour rendre les simulations plus régulières, on introduit des méthodes d'ajustement :

- lissage par splines
- méthode de Whittaker-Henderson

La grande différence entre ces deux méthodes est que la méthode de lissage par splines est dans le cadre paramétrique et la seconde ne cherche pas une représentation paramétrique. Le terme « paramétrique » s'appuie sur l'idée qu'on cherche une forme a priori pour la loi sous-jacente en supposant une distribution définie par un certain paramètre.

1.3.1. Méthode d'ajustement paramétrique : Lissage par splines³⁷

L'idée du lissage par splines est de découper la plage de la fonction à ajuster en sous-intervalles, puis d'ajuster sur chaque sous-intervalle une fonction simple, sous conditions de raccordement aux points de jonction, appelés nœuds.

Les polynômes sont des fonctions simples et peuvent être utilisés pour l'ajustement par splines. En raison de la continuité et de la régularité, les polynômes sont de classe C^2 . En pratique, pour construire des splines cubiques, nous considérons des polynômes de degré 3. En effet, dans ce mémoire, nous nous concentrerons à la modélisation présentée par F.Planchet [20].

- Notations

- $P(t, x)$: polynôme de degré n défini par la donnée de $(n + 1)^2$ paramètres en fonction de t et x :

$$P(t, x) = \sum_{(i,j) \in \{0,1,\dots,n\}^2} a_{i,j} t^i x^j$$

Sous la forme matricielle :

$$P(t, x) = {}^t T_n A X_n$$

où

- $T_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$
- $A_n = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{0,1,\dots,n\}^2}$: la matrice des coefficients du polynôme $P(t, x)$
- $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

- Calculs des dérivées

Les conditions de régularité nécessitent le calcul des dérivées partielles premières et secondes de $P(t, x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, x) &= {}^t T'_n A X_n & \frac{\partial}{\partial x} P(t, x) &= {}^t T_n A X'_n \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(t, x) &= {}^t T''_n A X_n & \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(t, x) &= {}^t T_n A X''_n \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} P(t, x) &= {}^t T'_n A X'_n \end{aligned}$$

où

- ${}^t X'_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n x^{n-1} \end{pmatrix}$ et ${}^t T'_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n t^{n-1} \end{pmatrix}$: les vecteurs dérivés terme à terme

- Contraintes

³⁷ [20] F. PLANCHET, P. WINTER,
[21] F. PLANCHET,
[22] A. GAUMET,
[23] A. ROLLAND et I. AUBIN

Comme mentionné précédemment, la continuité et la régularité restreints les dérivés des polynômes. Rappelons que chaque ligne représente une ancienneté et chaque colonne un âge dans la matrice.

Soient $P^1(t, x)$ et $P^2(t, x)$ adjacents horizontalement :

i. Contraintes horizontales : ancienneté fixe

- Continuité aux points de jonction :

En notant $(a_{i,j})$ et $(b_{i,j})$ les paramètres des splines adjacents, les valeurs de $P^1(t, x)$ et $P^2(t, x)$ doivent être égales.

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{i,j} t^i x^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n b_{i,j} t^i x^j$$

- Régularité :

Les dérivées partielles premières et secondes en fonction de t de deux polynômes doivent être égales.

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n i a_{i,j} t^{i-1} x^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n i b_{i,j} t^{i-1} x^j$$

avec t fixé et pour tout x variant dans l'ensemble de définition du splines. Cela conduit à écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=0}^n (a_{i,j} - b_{i,j}) t^i = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^n (a_{i,j} - b_{i,j}) t^i = 0 \quad \forall j = 0, \dots, n \Leftrightarrow {}^t T_n (A - B) = (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=0}^n (a_{i,j} - b_{i,j}) i t^{i-1} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^n (a_{i,j} - b_{i,j}) i t^{i-1} = 0 \quad \forall j = 0, \dots, n \Leftrightarrow {}^t T'_n (A - B) = (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Si $t \neq 0$, ces équations forment un système libre de $2(n + 1)$ équations avec $2(n + 1)^2$ paramètres.

ii. Contraintes verticales : âge fixe

Dans la même logique, les valeurs de $P^1(t, x)$ et $P^2(t, x)$ et leur dérivées partielles premières et secondes en fonction de x doivent être égales. Donc:

$$(A - B) X_n = {}^t (0, \dots, 0)$$

$$(A - B) X'_n = {}^t (0, \dots, 0)$$

iii. Contraintes aux noeuds : âge et ancienneté fixes

En un noeud, quatre polynômes adjacents se trouvent.

$${}^t T_n(A - B) = (0, \dots, 0)$$

$${}^t T'_n(A - B) = (0, \dots, 0)$$

$$(A - B)X_n = {}^t(0, \dots, 0)$$

$$(A - B)X'_n = {}^t(0, \dots, 0)$$

iv. Contraintes en bord de table

En bord de la table, il n'y a pas de condition de régularité car le polynôme n'est pas raccordé à un autre.

- Exemple

On utilise, ici, la fonction *smooth.spline* (package « stats ») dans le logiciel R. Cette fonction nous permet de récupérer les valeurs lissées par la méthode de lissage par spline cubique.

Dans la fonction *smooth.spline*, il y a quelques paramètres à définir :

- *df*: le degré de liberté optimal
- *spar*: le paramètre de lissage. Généralement appartenant à]0,1] (mais pas nécessairement).

Si *df* et *spar* ne sont pas déterminés, par défaut, la méthode « leave-one-out cross-validation » est utilisée afin de déterminer les coefficients.

Pour présenter les effets de la méthode de lissage par splines, nous prenons les calculs présentés au § V.1.2. et leurs calculs ajustés. (cf. figure 26)

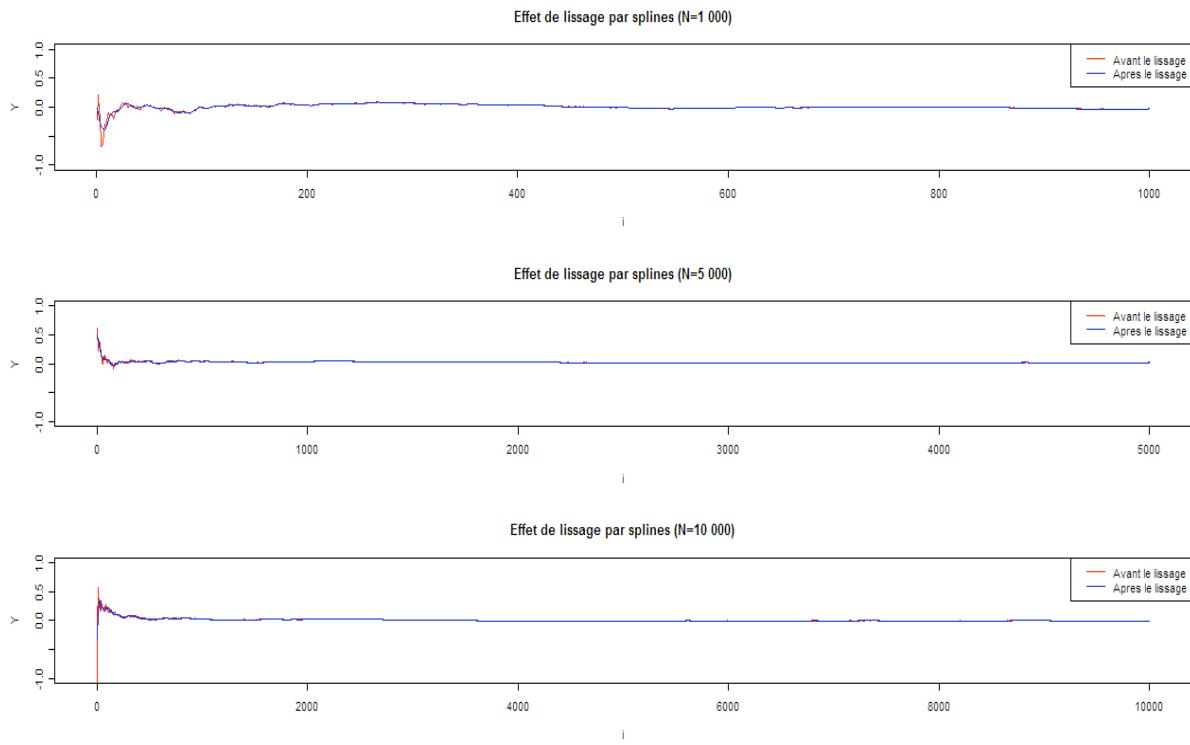


Figure 26 : Effet de lissage par splines

On calcule les variances avant / après lissage pour chaque N fois de simulations :

$$Var(Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \mathbb{E}(Y_i))^2$$

où $\mathbb{E}(Y_i) = 0 \forall i$ car $\mathbb{E}(X_j) = 0 \forall j$

$Var(Y)$	N=1 000	N=5 000	N=10 000
Avant le lissage	0,00285	0,00122	0,00134
Après le lissage	0,00230	0,00117	0,00100

Par F-test (`var.test` dans le logiciel R), on peut comparer les variances avant / après le lissage pour chaque N fois de simulations :

```
> var.test(random1000,predict1000)

F test to compare two variances

data: random1000 and predict1000
F = 1.238, num df = 999, denom df = 999, p-value = 0.000752
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
1.093520 1.401559
sample estimates:
ratio of variances
1.237995

> var.test(random5000,predict5000)

F test to compare two variances

data: random5000 and predict5000
F = 1.092, num df = 4999, denom df = 4999, p-value = 0.001867
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
1.033098 1.154259
sample estimates:
ratio of variances
1.091999

> var.test(random10000,predict10000)

F test to compare two variances

data: random10000 and predict10000
F = 1.3546, num df = 9999, denom df = 9999, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
1.302488 1.408722
sample estimates:
ratio of variances
1.354564
```

Les trois p-values sont faibles. On peut donc dire que les variances avant/après le lissage sont significativement différentes pour les trois N simulations. Evidemment, les variances après le lissage sont inférieures à celles avant le lissage.

1.3.2. Méthode de Whittaker-Henderson³⁸

En 1923, E.T Whittaker a présenté cette méthode et R. Henderson l'a complétée en 1924. Le principe de cette méthode est de combiner un critère de fidélité et un critère de régularité pour obtenir le meilleur compromis entre la fidélité et la régularité. La méthode nous conduit à rechercher les valeurs ajustées qui minimisent la somme des deux critères.

- Cas 1 : Une dimension

Nous fixons des poids (w_i) et posons pour le critère de fidélité :

$$F = \sum_{i=1}^p w_i (q_i - \hat{q}_i)^2$$

et pour le critère de régularité :

$$S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$$

où

- z est un paramètre du modèle.
- Δ^z est un opérateur de différentiation discrète.

$$\Delta(u(x)) = u(x+1) - u(x)$$

Cet opérateur peut être appliqué de manière récursive :

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \Delta(\Delta u) \\ \Leftrightarrow \Delta^2 u(x) &= u(x+2) - 2u(x+1) + u(x) \end{aligned}$$

Généralement :

$$\Delta^n u(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} u(x+j)$$

Le critère à minimiser est une combinaison linéaire de la fidélité et de la régularité, le poids de chacun des deux termes étant contrôlé par un second paramètre h :

$$M = F + h * S$$

Plus ce paramètre h est grand, plus l'effet de lissage est important, au détriment de la fidélité aux données brutes.

La solution de ce problème d'optimisation est telle que :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} M = 0, 1 \leq i \leq p$$

Sous la forme matricielle, nous posons :

$$q = (q_i)_{1 \leq i \leq p}, \hat{q} = (\hat{q}_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ et } w = \text{diag}(w_i)_{1 \leq i \leq p}$$

$$F = {}^t(q - \hat{q})w(q - \hat{q})$$

³⁸ [21] Frédéric PLANCHET,
[23] Anne ROLLAND et Igotz AUBIN

$$S = {}^t(\Delta^z q) \Delta^z q$$

Pour faciliter le calcul, introduisons une matrice K_z telle que :

$$K_z q = \Delta^z q$$

Finalement, la matrice M est sous la forme:

$$M = {}^t(q - \hat{q}) w (q - \hat{q}) + h {}^t(K_z q) K_z q$$

La solution du problème d'optimisation :

$$q^* = (w + h {}^t K_z K_z)^{-1} w \hat{q}$$

- Choix du paramètre z

E.T Whittaker et R. Henderson ont trouvé que des irrégularités apparaissent lorsque z est égal à 1 ou 2. Par contre si z est égal à 4, la courbe à lisser représente une droite. Donc on choisit z égal à 3 qui intervient dans la matrice K_z .

La matrice K_3 est de la forme :

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & -1 & 3 & -3 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Choix du paramètre h

Ce paramètre sera variable selon l'intensité du lissage souhaité.

- Exemple

Supposons qu'on a des taux bruts à lisser, \hat{q} :

$$\begin{bmatrix} -0,2074 \\ 0,2147 \\ -0,0677 \\ -0,1280 \\ -0,6900 \end{bmatrix}$$

Nous allons appliquer le lissage par la méthode de Whittaker-Henderson à ces taux bruts. Par la construction du code Excel VBA³⁹, on peut construire la matrice $(w + h {}^t K_z K_z)^{-1}$ avec z égal à 3, selon le choix de h :

- $(w + h {}^t K_z K_z)^{-1}$ avec h=10 :

$$\begin{array}{ccccc} 0,8877 & 0,2531 & -0,0855 & -0,1391 & 0,0838 \\ 0,2531 & 0,3799 & 0,3419 & 0,1642 & -0,1391 \\ -0,0855 & 0,3419 & 0,4872 & 0,3419 & -0,0855 \\ -0,1391 & 0,1642 & 0,3419 & 0,3799 & 0,2531 \\ 0,0838 & -0,1391 & -0,0855 & 0,2531 & 0,8877 \end{array}$$

³⁹ cf. Annexe

- $(w + h^t K_z K_z)^{-1}$ avec $h=100$:

0,8859	0,2567	-0,0857	-0,1425	0,0855
0,2567	0,3723	0,3428	0,1707	-0,1425
-0,0857	0,3428	0,4859	0,3428	-0,0857
-0,1425	0,1707	0,3428	0,3723	0,2567
0,0855	-0,1425	-0,0857	0,2567	0,8859

- $(w + h^t K_z K_z)^{-1}$ avec $h=1000$:

0,8857	0,2571	-0,0857	-0,1428	0,0857
0,2571	0,3715	0,3428	0,1714	-0,1428
-0,0857	0,3428	0,4857	0,3428	-0,0857
-0,1428	0,1714	0,3428	0,3715	0,2571
0,0857	-0,1428	-0,0857	0,2571	0,8857

Ensuite, on peut calculer les taux lissés, q^* selon le choix de h :

Avant le lissage	$h=10$	$h=100$	$h=1\ 000$
-0,2074	-0,1640	-0,1636	-0,1635
0,2147	0,0808	0,0799	0,0798
-0,0677	0,0733	0,0737	0,0737
-0,1280	-0,1822	-0,1817	-0,1816
-0,6900	-0,6860	-0,6863	-0,6863

Les écarts dépendant le critère h ne sont pas importants dans cet exemple.

La figure 27 présente l'effet de la méthode de lissage par Whittaker Henderson, nous prenons les calculs présentés au § V.1.2. et leurs calculs lissés avec h égal à 100 choisi arbitrairement.

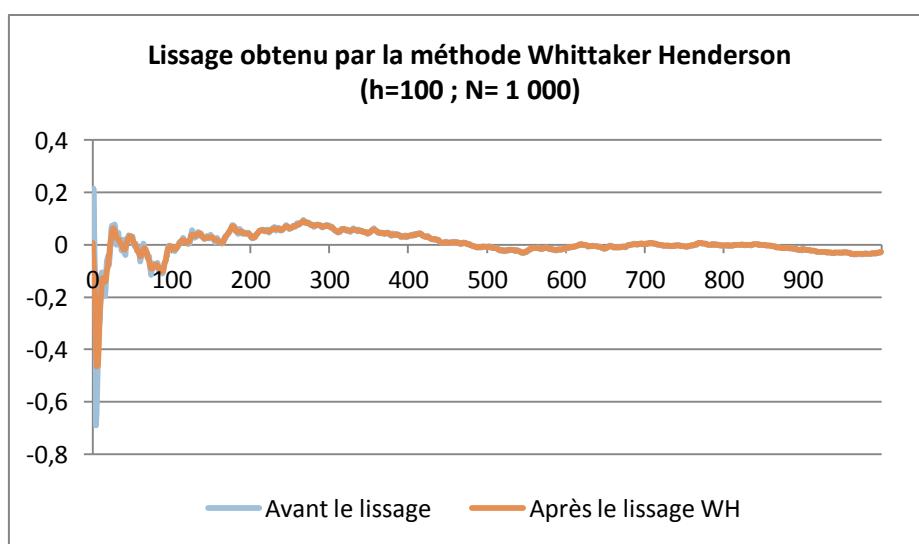


Figure 27 : Lissage obtenu par la méthode Whittaker Henderson ($h=100$; $N = 1\ 000$)

Puis on calcule les variances :

	h=100
Avant le lissage	0,00285
Après le lissage	0,00242

Par F-test (`var.test` dans le logiciel R), on peut comparer les variances avant / après le lissage :

```
> var.test(avant_lissage,apres_lissage)

F test to compare two variances

data:  avant_lissage and apres_lissage
F = 1.1799, num df = 999, denom df = 999, p-value = 0.008986
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
1.042228 1.335819
sample estimates:
ratio of variances
1.179927
```

La p-value est inférieur à 5%. On peut donc dire que les variances avant/après le lissage sont significativement différentes au seuil de risque de 5%. Evidemment, la variance après le lissage est inférieure à celle avant le lissage.

- Cas 2 : Dimension deux

En dimensions deux, la méthode peut être appliquée sans difficulté pour le critère de fidélité.

$$F = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q w_{ij} (q_{ij} - \hat{q}_{ij})^2$$

Pour le critère de régularité, nous distinguons la régularité verticale via l'opérateur Δ_v^z .

$$S_v = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta_v^z q_{ij})^2$$

De la même manière, nous calculons l'indice de régularité horizontale S_h puis posons la matrice M à minimiser :

$$M = F + \alpha * S_v + \beta * S_h$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, nous posons le vecteur de taille $p \times q$, u tel que :

$$u_{q(i-1)+j} = \hat{q}_{ij}$$

Et une matrice de poids $(w_{i,j}^*)$ telle que :

$$w_{q(i-1)+j,q(i-1)+j}^* = w_{ij}$$

Par la même logique du cas de dimension un, K_z^v et K_y^h sont construites.

En fin, nous obtenons :

$$q^* = (w^* + \alpha {}^t K_z^v K_z^v + \beta {}^t K_y^h K_y^h)^{-1} w^* u$$

Pour le calcul détaillé et les exemples, le lecteur est invité à lire F.Planchet ([21]).

1.3.3. Validation de l'ajustement

Afin de s'assurer que les valeurs lissées ne sont pas trop éloignées des valeurs brutes, il faut vérifier la validité par quelques tests statistiques classiques.

- Test des changements de signe

Le signe de la différence $d_x = q_x - \hat{q}_x$ a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être positif ou négatif avec q_x taux de sortie brut et \hat{q}_x lissé. Si la plage considérée contient p valeurs, on en déduit que le nombre de changement de signe dans la série des d_x est distribué suivant une loi binomiale de paramètre $(p - 1, \frac{1}{2})$. Le nombre moyen de changement de signe est $\frac{p-1}{2}$. On peut déduire un test, en faisant l'approximation gaussienne, sur la statistique :

$$S = \frac{2n - (p - 1)}{\sqrt{p - 1}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

où n : le nombre de changements de singe constaté.

Ce test permet de vérifier le caractère aléatoire des changements de signe de $d_x = q_x - \hat{q}_x$.

- Exemple

Avec les exemples présentés précédemment, on peut calculer les valeurs de S :

Pour le lissage par splines, n égal 485, p égal 1 000 et pour le lissage par Whittaker-Henderson, n égal 506 et p égal 1 000.

N = 1 000	Lissage par splines	Lissage par Whittaker-Henderson
S	-8,76	-3,45

Les deux valeurs n'appartiennent pas à l'intervalle de confiance à 95% : [-1,96 ; 1,96]

Par ces deux méthodes, on ne peut pas vérifier que le changement de signe est significativement aléatoire avec un niveau de confiance de 95%.

- Test de Khi-deux

Le test de Khi-deux permet de vérifier la qualité globale des valeurs lissées afin de s'assurer qu'elles ne sont pas trop différentes des valeurs brutes. On calcule la statistique :

$$Z = \sum_{i=1}^p n_i \frac{(\hat{q}_i - q_i)^2}{q_i(1 - q_i)}$$

où q_i taux de sortie brut et \hat{q}_i lissé

Avec un degré de confiance $\alpha \in]0;1[$, l'approximation du seuil critique C est déterminé avec la loi χ^2_{p-r-1} . Dans le cas du lissage par splines, r est égal à 3 et r est égal à 0 dans le cas du lissage par la méthode Whittaker-Henderson.

- Exemple

Avec les exemples présentés précédemment, on peut calculer les valeurs de Z :

N = 1 000	Lissage par splines	Lissage par Whittaker-Henderson
Z	39,29	9,87

Pour le lissage par splines, nous avons p égal 1000 et r égal 3. L'intervalle de confiance à 95% est de : (0 ; 1070,53)

Pour le lissage par la méthode Whittaker-Henderson, nous avons p égal 1000 et r égal 0. L'intervalle de confiance à 95% est de : (0 ; 1 073,64)

Les ajustements par deux méthodes sont valables avec un niveau de confiance de 95%.

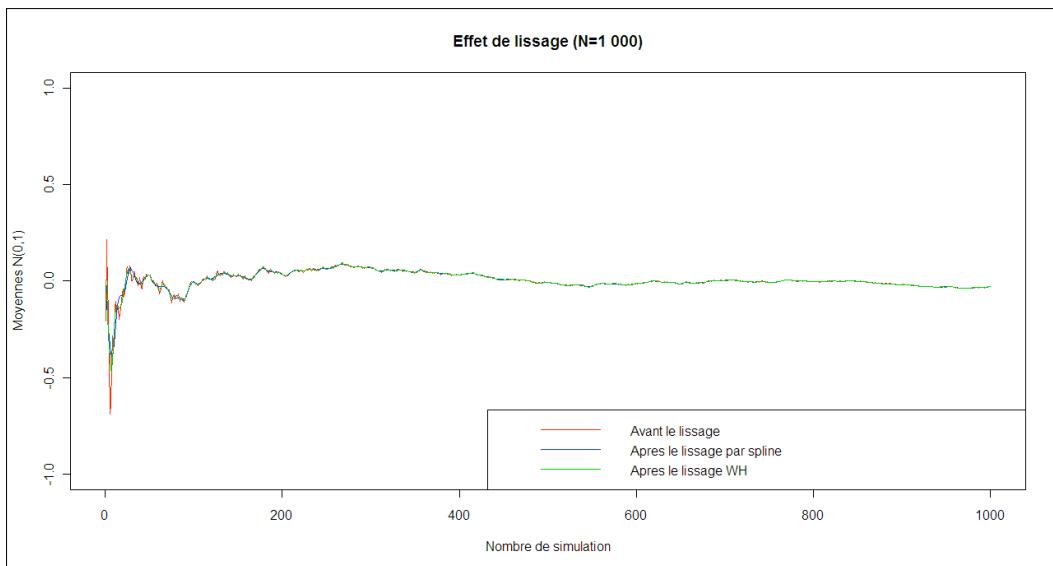


Figure 28 : Deux méthodes d'ajustement et la suite brute

1.4. Convergence

En effet, la suite qu'on a étudiée précédemment est la moyenne empirique des aléas suivant la loi normale centrée et réduite. Par la loi des grands nombres, on a la convergence des suites vers l'espérance. Les figures 29 et 30 représentent cette propriété.

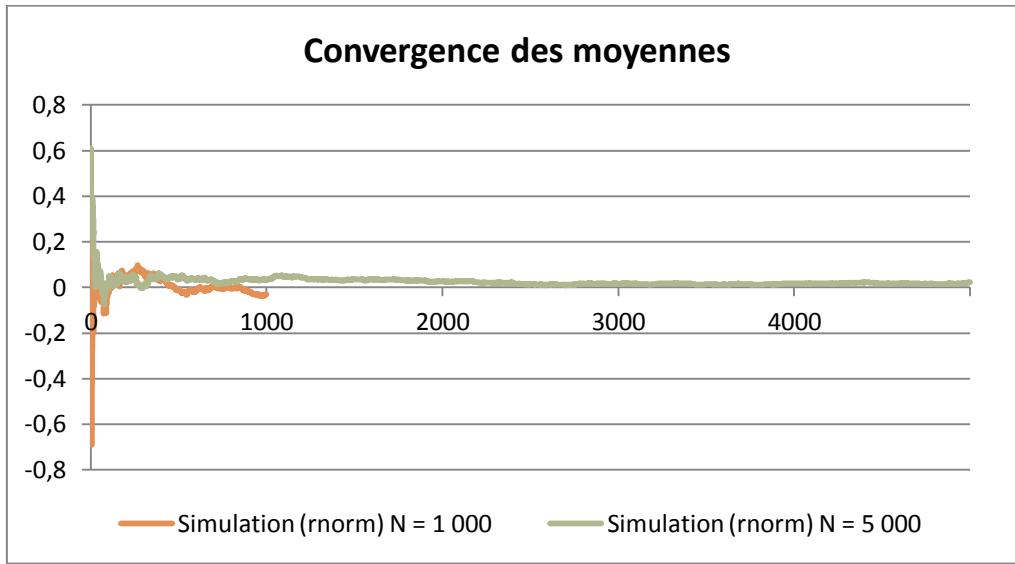


Figure 29 : Convergence des moyennes (N=1 000 / N= 5 000)

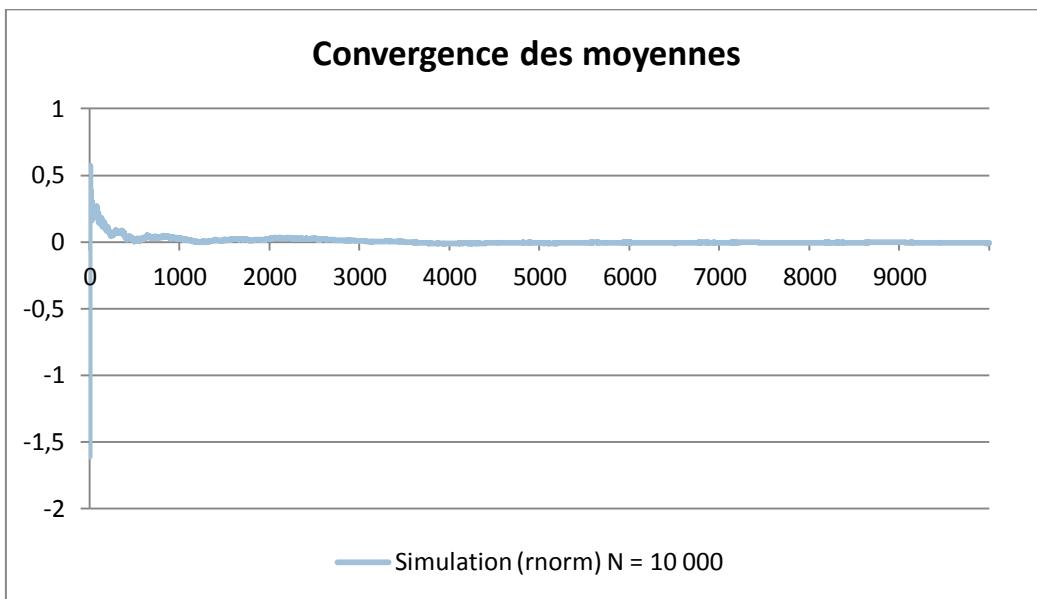
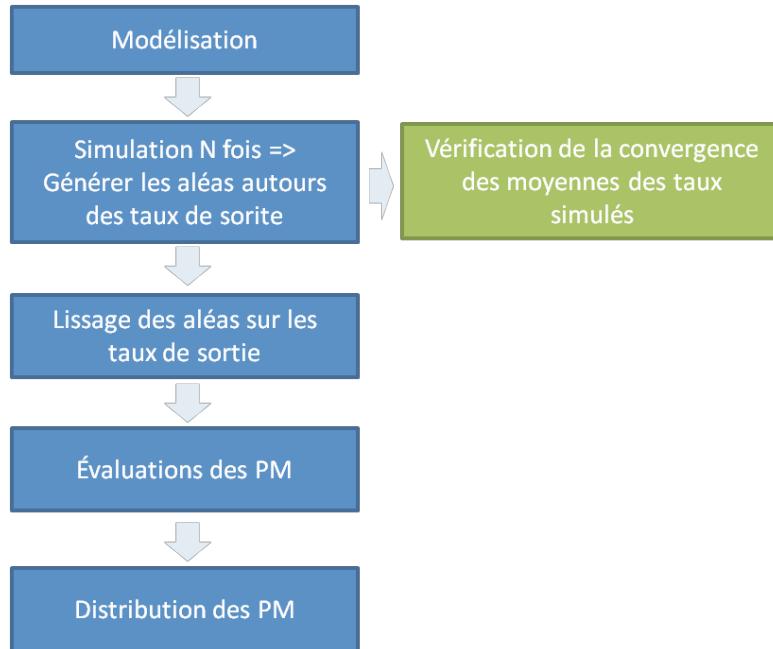


Figure 30 : Convergence des moyennes (N=10 000)

2. Application : Table de maintien en incapacité

Dans ce paragraphe, nous appliquons la méthodologie présentée au § V.1. à la table de maintien en incapacité.

On peut résumer la méthodologie :



Pour les tables de maintien en incapacité ou en invalidité, on peut modéliser le taux de sortie de l'état avec GLM.

Comme la méthodologie et la variable à expliquer sont identiques entre les tables de maintien d'incapacité et d'invalidité, on ne présente que l'application sur l'une des deux tables, celle de la table de maintien en incapacité.

2.1. Modélisation et validation du modèle

- Modélisation

Dans la table de maintien il faut considérer deux éléments liés au risque d'incapacité/invalidité : l'âge d'entrée dans l'état (x) et l'ancienneté (k). Ici, on utilise la table BCAC.

Afin de faciliter la modélisation, on construit un vecteur ayant 3 colonnes, l'âge d'entrée dans l'état, l'ancienneté et le taux de sortie de l'état ($q_{x,k} = 1 - \frac{l_{x,k+1}}{l_{x,k}}$) :

Age	Ancienneté	Taux de sortie BCAC $q(x,k)$
20	0	0,7158
20	1	0,3867
20	2	0,3437
20	3	0,2675
20	4	0,2542
20	5	0,2720

66	33	0,0314

66	34	0,0324
66	35	0,3953
66	36	1,0000

D'abord, pour éliminer la forte volatilité, nous ne considérons que les données $x \in \{26, 27, \dots, 59, 60\}$ et $k \in \{0, 1, \dots, 34\}$ au cours de la modélisation. La figure 24 (cf. page 84) montre le taux de sortie dépendant de l'ancienneté par l'âge d'entrée dans l'état avant ce traitement des données.

La figure 31 est le graphiques après le traitement des données et elle montre que la volatilité est plus importante pour les sinistrés ayant une ancienneté courte que pour ceux ayant une ancienneté longue. De plus, le taux de sortie est plus élevé pour les sinistrés entrés en jeune âge. Autrement dit, il est plus probable pour les jeunes sinistrés de sortir de l'état d'incapacité.

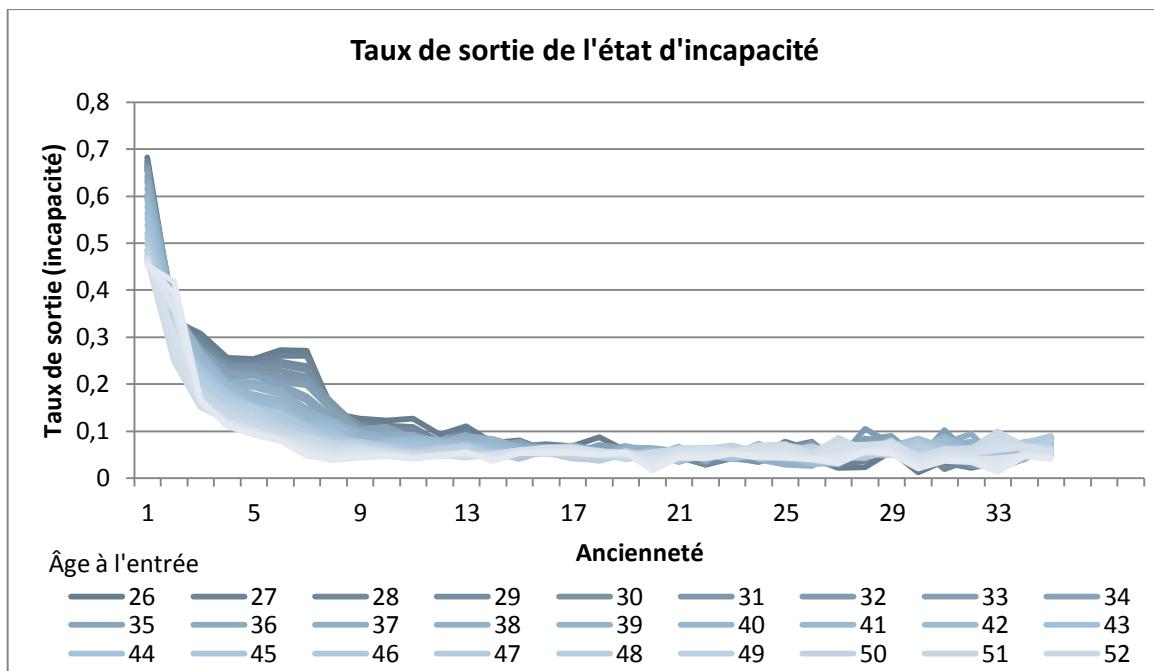


Figure 31 : Taux de sortie q_x par l'ancienneté

Pour modéliser le taux de sortie en fonction de l'âge à l'entrée dans l'état et de l'ancienneté, nous utilisons la méthode « GLM » dans le logiciel « R ». Dans le cadre de la fonction « GLM » avec option « family = gaussian », le modèle choisi est le suivant :

$$\mathbb{E}(Y) = bX$$

car la fonction de lien pour le cas de la famille gaussienne est la fonction identité.

Afin d'exclure les valeurs négatives des résultats, nous prenons le logarithme au taux de sortie et le modèle devient :

$$\mathbb{E}(\log(\text{taux de sortie})) = bX$$

avec $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 26 & 27 & \dots & \dots & 59 & 60 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & 34 & 35 \end{pmatrix}^t$

- Validation du modèle

La figure 32 précise les résultats numériques des tests de significativité du modèle, on constate que les significativités de chaque variable explicative (l'âge d'entrée et l'ancienneté) ne sont pas contredites.

```
> anova(glmGaussian.tx_sortie_inc, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table

Model: gaussian, link: identity

Response: log(tx_sortie_inc)

Terms added sequentially (first to last)

          Df Deviance Resid. Df Resid. Dev P(>|Chi|)
NULL           1224      514.56
Age      1     13.287    1223      501.27 1.595e-15 ***
Anc      1    245.605    1222      255.66 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '****' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(glmGaussian.tx_sortie_inc)

Call:
glm(formula = log(tx_sortie_inc) ~ Age + Anc, family = gaussian)

Deviance Residuals:
    Min      1Q   Median      3Q      Max
-1.44190 -0.33641 -0.08643  0.32496  1.32572

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.366642  0.061719 -22.143 < 2e-16 ***
Age        -0.010312  0.001294 -7.969 3.63e-15 ***
Anc        -0.044335  0.001294 -34.263 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '****' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 0.2092174)

Null deviance: 514.56 on 1224 degrees of freedom
Residual deviance: 255.66 on 1222 degrees of freedom
AIC: 1565.0

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

Figure 32 : Test de significativité pour GLM avec « family=gaussian »

Désormais, on va vérifier la qualité globale du modèle. Afin de la vérifier, on compare le modèle avec un modèle réduit n'ayant qu'un terme 1. Le test du ratio vraisemblance du modèle et du modèle réduit peut s'effectuer par la fonction *anova* avec une option *test="Chisq"* :

```
> glmGaussian.tx_sortie_inc2<-glm(log(tx_sortie_inc)~1,family = gaussian)
> glmGaussian.tx_sortie_inc2

Call:  glm(formula = log(tx_sortie_inc) ~ 1, family = gaussian)

Coefficients:
(Intercept)
-2.608

Degrees of Freedom: 1224 Total (i.e. Null);  1224 Residual
Null Deviance:      514.6
Residual Deviance: 514.6       AIC: 2418

> anova(glmGaussian.tx_sortie_inc2,glmGaussian.tx_sortie_inc, test = "Chisq")
Analysis of Deviance Table

Model 1: log(tx_sortie_inc) ~ 1
Model 2: log(tx_sortie_inc) ~ Age + Anc
          Resid. Df Resid. Dev Df Deviance P(>|Chi|)
1         1224      514.56
2         1222      255.66  2     258.89 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '****' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

La statistique du ratio vraisemblance χ^2 est de 258,89 avec p-value < 0,01. On peut donc avoir une forte preuve qu'on peut rejeter l'hypothèse nulle (le modèle n'est pas significatif).

D'après le résultat (cf. figure 33), on obtient l'équation :

$$\log(\text{taux de sortie}) = -1,3666 - 0,0103 * \text{Age} - 0,0443 * \text{Ancienneté}$$

\Leftrightarrow

$$\text{taux de sortie} = \exp(-1,3666 - 0,0103 * \text{Age} - 0,0443 * \text{Ancienneté})$$

2.2. Simulation

Afin d'avoir les aléas autour de la table, l'étape suivante est de simuler N fois la variable aléatoire selon le modèle validé. Ici, on effectue la simulation N=1 000 et 5 000. A partir de cette étape, on peut construire des N tables stochastiques.

La fonction « Simulate » dans le logiciel R permet de récupérer facilement les simulations de grand nombre. Le code du logiciel R ci-dessous nous permet de construire une matrice ayant N colonnes, chaque colonne contenant les taux simulés pour chaque simulation.

```
glmGaussian.tx_sortie_inc<-glm(log(Qx_inc)~Age_inc+Anc_inc,family = gaussian)
N= nombre de simulation
S1.Logtx<- simulate(glmGaussian.tx_sortie_inc, nsim = N)
for (i in (1:1225)){Sim1.tx[i,4:(N+3)]=exp(S1.Logtx[i,1:N])}}
```

La figure 33 montre le taux de sortie BCAC et les taux de sortie simulés dans le cas d'âge d'entrée dans l'incapacité égal à 40 ans.

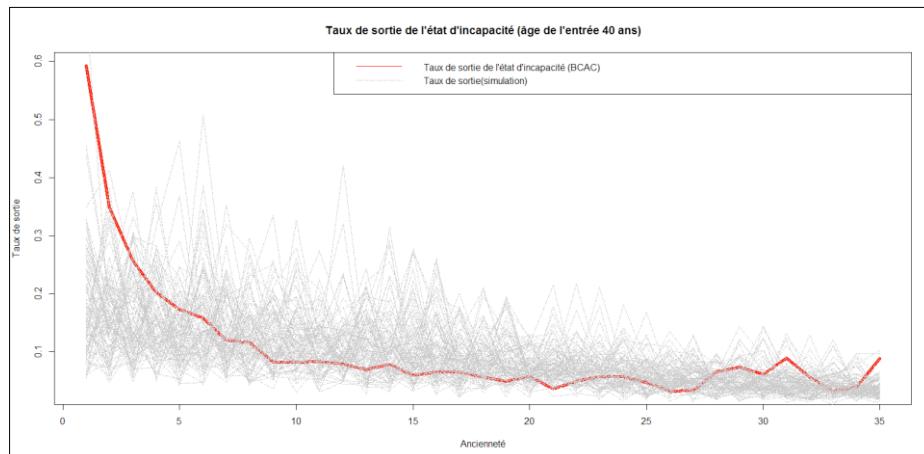


Figure 33 : Simulation pour le modèle GLM pour l'âge d'entrée dans l'état 40 ans

2.3. Méthode de lissage

Par les simulations, on trouve les irrégularités et les aléas ayant des valeurs extrêmes. Pour les réduire, on introduit ici les méthodes de lissage présentées au § V.1.3.

En effet, le taux de sortie dépend de l'âge d'entrée dans l'état et l'ajustement serait –intuitivement– meilleur lors qu'on lisse par l'âge d'entrée dans l'état. On se concentre ici sur la plage de l'âge d'entrée égale à 40 ans.

- Lissage par splines

On utilise le code dans le logiciel R pour retrouver les taux de sortie simulés, ajustés par la méthode lissage par splines :

```
for (j in (1:N)) {
  for (i in (1:35)) {spline.sim_N[i,j]=predict(smooth.spline(taux_inc_sim_40ans_N[,j]),x=i)$y}
}
```

On prend les paramètres par défaut.

La figure 34 représente les deux courbes de :

- l'une des taux de sortie simulés
- l'ajustement de cette simulation par la méthode lissage par splines

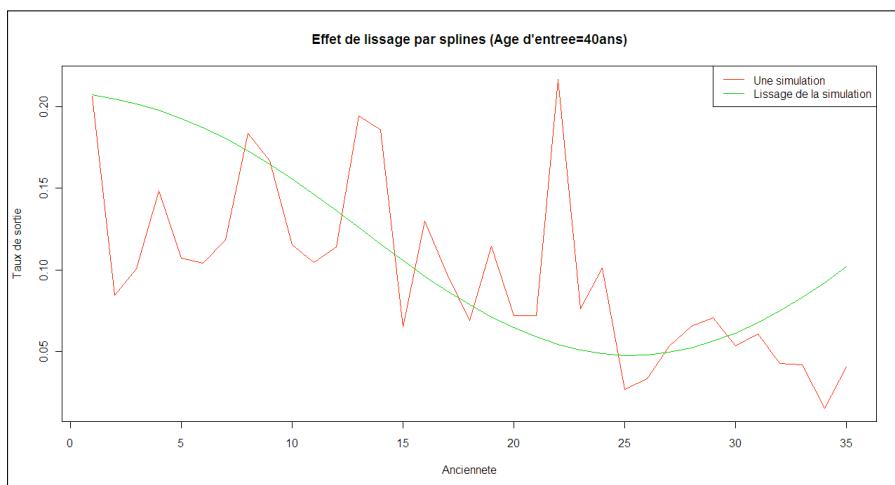


Figure 34 : Effet de lissage par splines

- Lissage par la méthode Whittaker-Henderson

Par le code VBA (cf. Annexe) et le principe présenté au § V.1.3.2, on applique cette méthode sur les simulations. Le choix de paramètre h est de 100, arbitrairement.

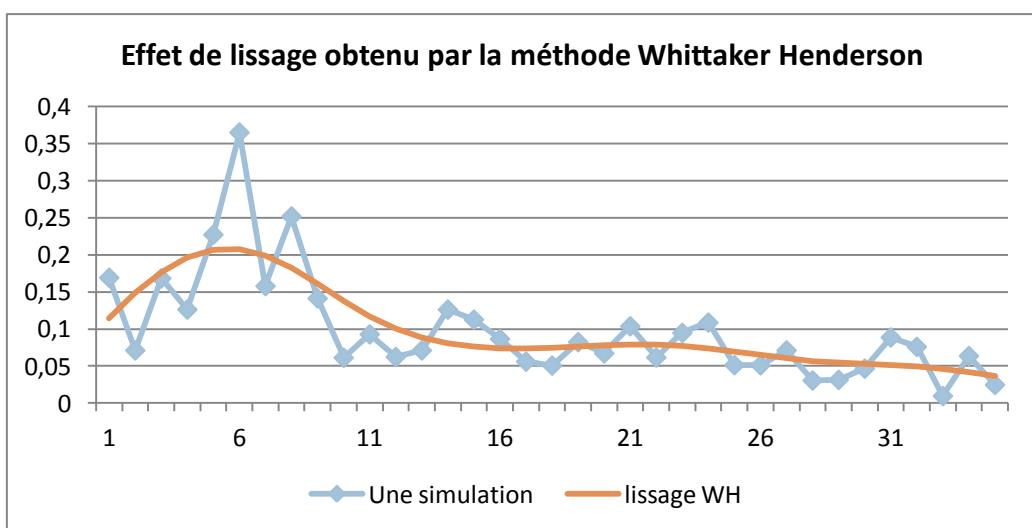


Figure 35 : Effet de lissage par la méthode Whittaker-Henderson

- Validation de l'ajustement
 - Test des changements de signe
 - Lissage par splines

Les figures 36, 37 montrent les valeurs de S (cf. V.1.3.3) et l'intervalle de convergence à 95% de la loi normale centrée, réduite. Comme il y a N simulations pour N=1 000 et 5 000, on effectue ce test pour chaque N.

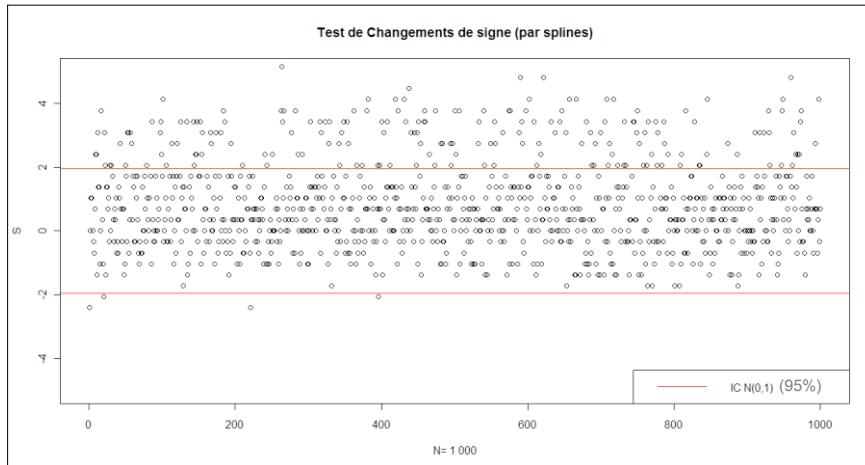


Figure 36 : Test de changements de signe (méthode lissage par splines) N= 1 000

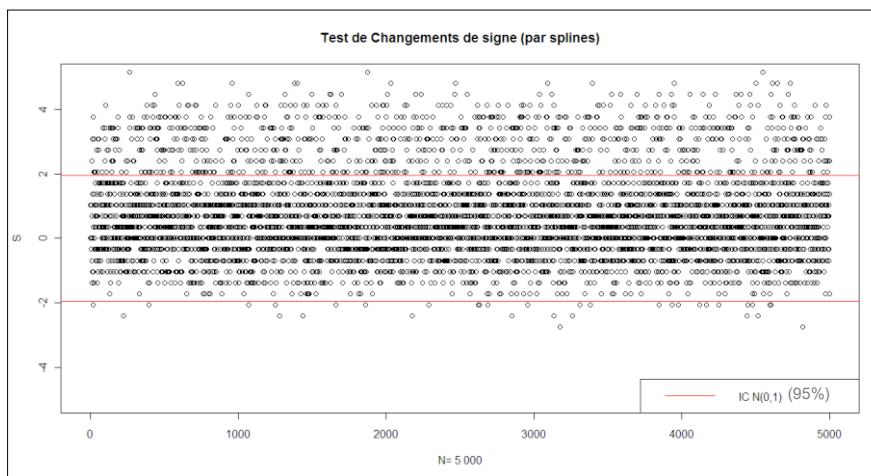


Figure 37 : Test de changements de signe (méthode lissage par splines) N=5 000

Environs 20% des valeurs de S simulations sont retrouvés hors de l'intervalle de confiance :

Nombre de S	N= 1 000	N= 5 000
Dans l'intervalle de confiance	804	4 014
Hors l'intervalle de confiance	196	986
Ratio de S (hors de l'IC) (%)	19,6%	19,7%

- Méthode Whittaker-Henderson

On effectue le même test pour les taux de sortie lissés par la méthode Whittaker-Henderson (cf. figure 38, 39)

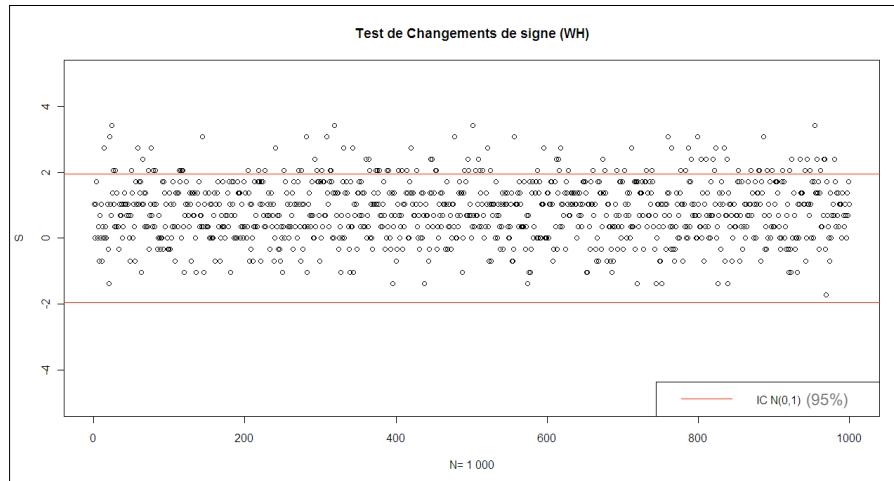


Figure 38 : Test de changements de signe (méthode Whittaker-Henderson) N= 1 000

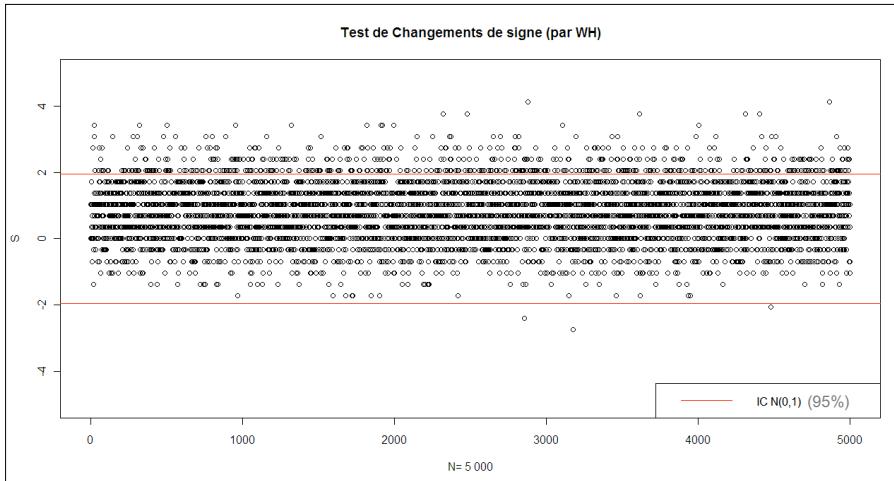


Figure 39 : Test de changements de signe (méthode Whittaker-Henderson) N= 5 000

En comptant le nombre des valeurs de S dans/hors l'intervalle de confiance à 95% :

Nombre de simulations	N= 1 000	N= 5 000
Dans l'intervalle de confiance	888	4 427
Hors de l'intervalle de confiance	112	573
Ratio de S (hors de l'IC) (%)	11,2%	11,5%

- Test de Khi-deux

On a présenté le principe du test de Khi-deux au V.1.3.3. Ici, on applique ce principe aux taux simulés, lissés par la méthode de lissage par splines et celle de Whittaker-Henderson.

- Lissage par splines

Les figures 40 et 41 représentent les valeurs de Z et le seuil critique du test Khi-deux à 95%. Ici, p est égal à 35 et r égal à 3. Le seuil critique à 95% est de 19,28.

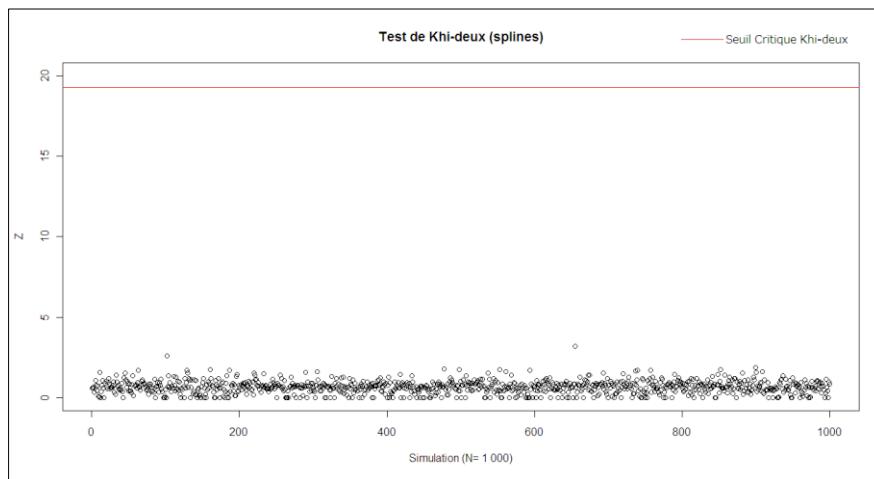


Figure 40 : Test Khi-deux (lissage par splines N= 1 000)

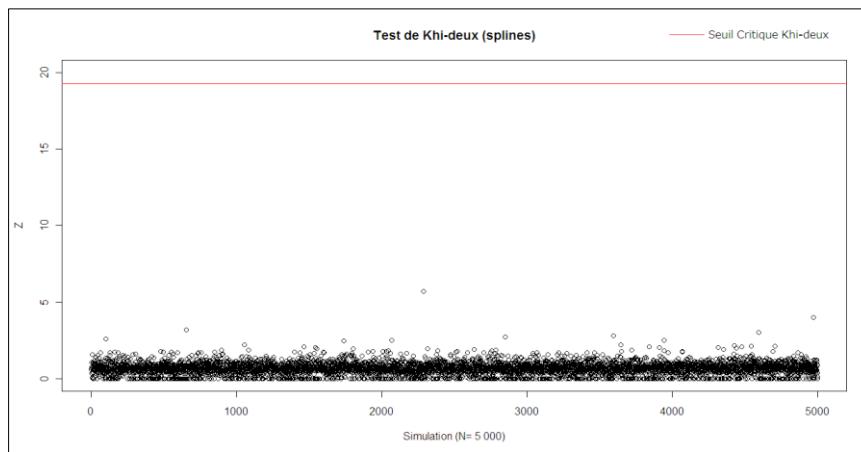


Figure 41 : Test Khi-deux (lissage par splines N= 5 000)

- Méthode Whittaker-Henderson

Les figures 42 et 43 représentent les valeurs de Z et le seuil critique du test Khi-deux à 95%. Ici, p est égal à 35 et r égal à 0. Le seuil critique est de 21,66.

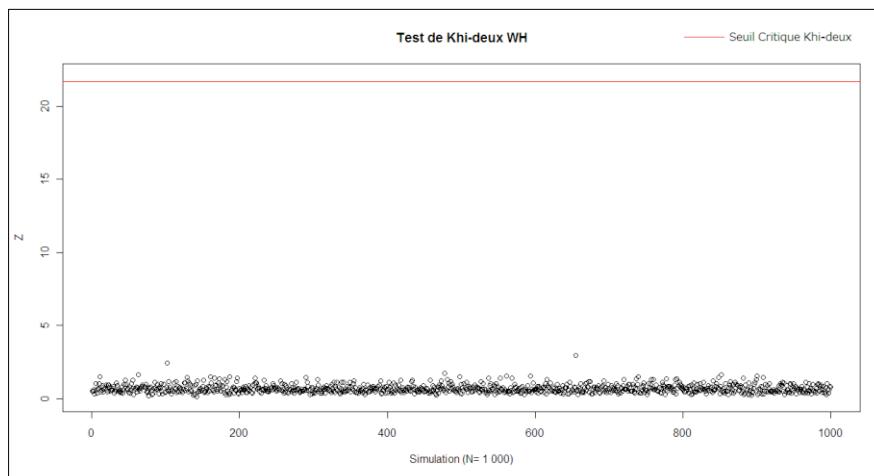


Figure 42 : Test Khi-deux (Whittaker-Henderson N= 1 000)

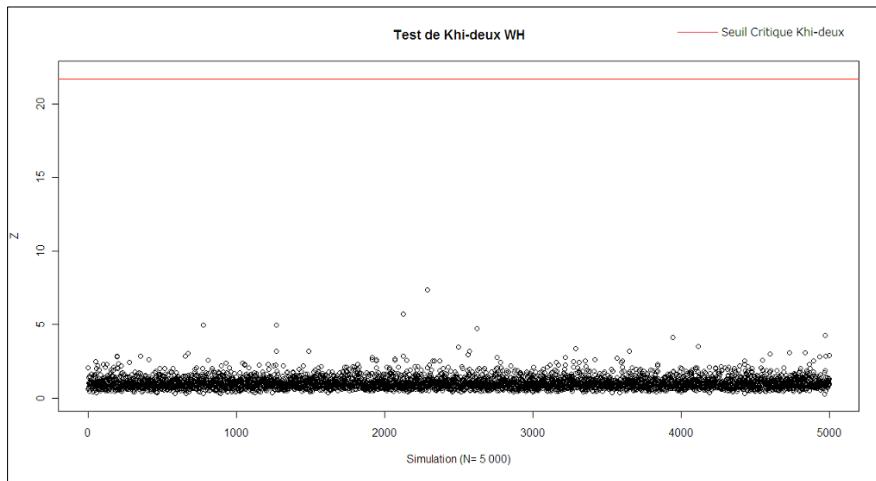


Figure 43 : Test Khi-deux (Whittaker-Henderson N= 5 000)

- Conclusion

Par le test de Khi-deux, les deux méthodes permettent d'avoir globalement de bonnes qualités. Par contre, le caractère aléatoire des changements de signe est mieux vérifié dans le cas de méthode Whittaker-Henderson. Par la suite, on va lisser les taux simulés par les deux méthodes puis comparer les montants des PM.

2.4. Détermination des tables stochastiques

A partir de ces taux de sortie simulés et lissés, on peut construire les tables stochastiques de maintien en incapacité par la simple transformation. Classiquement, on suppose que la population au départ est de 10 000. Par cette hypothèse, une fois le taux de sortie déterminé, la population peut être récursivement calculée :

$$q_{x,k} = 1 - \frac{l_{x,k+1}}{l_{x,k}}$$

\Leftrightarrow

$$l_{x,k+1} = l_{x,k} * (1 - q_{x,k})$$

avec $l_{x,0} = 10\,000, \forall x$

où x : l'âge d'entrée en état ; k : l'ancienneté

A l'étape de traitement des données, on a enlevé le dernier mois d'ancienneté, 36^{ème} mois. Le taux de sortie au 35^{ème} mois est donc vide et on remplace par le taux déterminé par la loi de BCAC pour le taux de sortie au 35^{ème} mois afin d'avoir l'homogénéité entre les tables stochastiques et la table BCAC.

Finalement, on peut trouver des tables stochastiques de maintien en incapacité dans le cas l'âge d'entrée en incapacité égal 40 ans ($x=40$) par simulation :

Simulations																		
Âge d'entrée	Ancienneté	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
40	0	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	
40	1	8448	8402	8534	8746	7691	7392	8580	8642	8099	8674	9042	8318	7601	8608	8231	8892	
40	2	7285	7094	7263	7639	5864	5582	7333	7429	6775	7614	7863	7072	6034	7321	6995	7953	
40	3	6364	6017	6174	6677	4457	4321	6263	6380	5787	6732	6638	6117	4941	6191	6069	7125	
40	4	5594	5125	5245	5850	3400	3435	5362	5495	4998	5971	5498	5359	4132	5239	5324	6167	
40	5	4922	4380	4453	5145	2622	2808	4610	4767	4331	5293	4514	4737	3503	4459	4682	5658	
40	6	4317	3755	3776	4547	2060	2356	3986	4176	3745	4677	3704	4213	2999	3827	4103	4984	
40	7	3766	3231	3195	4037	1656	2020	3463	3696	3227	4115	3056	3763	2589	3317	3573	4347	
40	8	3266	2793	2698	3597	1362	1758	3020	3303	2774	3605	2547	3368	2253	2897	3089	3753	
40	9	2819	2427	2278	3213	1147	1543	2636	2973	2388	3146	2150	3014	1980	2545	2657	3216	
40	10	2425	2123	1929	2875	984	1357	2300	2689	2068	2737	1842	2693	1756	2240	2287	2748	
40	11	2085	1870	1644	2577	858	1191	2005	2439	1809	2375	1601	2401	1571	1972	1980	2355	
40	12	1795	1660	1417	2314	757	1043	1750	2217	1601	2056	1409	2137	1416	1735	1732	2034	
40	13	1551	1487	1238	2085	673	912	1534	2019	1434	1781	1250	1903	1283	1525	1534	1777	
40	14	1348	1342	1098	1886	602	801	1355	1843	1299	1549	1114	1699	1166	1342	1374	1573	
40	15	1181	1219	989	1715	541	708	1210	1688	1187	1359	995	1525	1061	1185	1242	1410	
40	16	1042	1114	903	1567	489	631	1092	1553	1094	1206	889	1378	964	1052	1129	1276	
40	17	926	1022	836	1439	444	569	998	1436	1015	1085	796	1253	874	943	1029	1164	
40	18	828	942	781	1326	405	518	921	1334	947	988	713	1148	791	854	941	1068	
40	19	743	872	785	1226	371	475	857	1246	887	910	642	1057	716	784	861	983	
40	20	668	812	695	1137	342	438	802	1169	834	847	581	979	649	728	789	908	
40	21	603	759	658	1058	317	406	753	1101	785	795	529	912	593	683	725	839	
40	22	547	714	623	988	295	377	708	1040	739	751	484	853	544	645	669	776	
40	23	499	673	589	926	279	351	667	984	696	712	446	801	504	612	620	719	

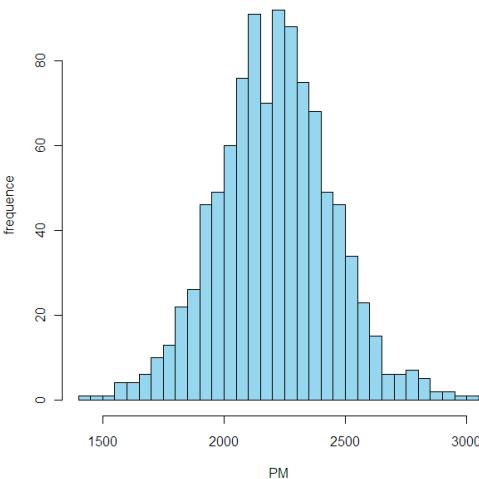
2.5. Distribution des PM

Finalement, on peut trouver la distribution des PM selon les méthodes de lissage présentées au § V.2.4.

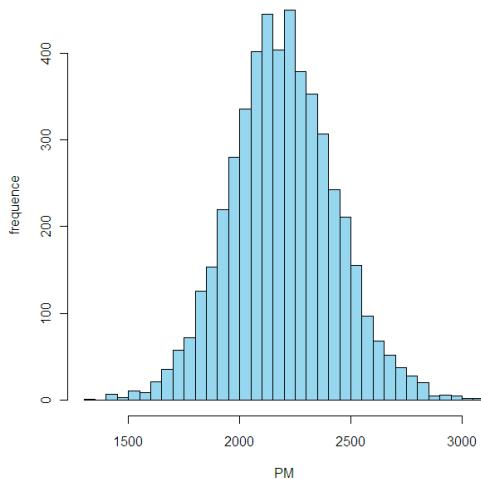
- Lissage par splines

VaR	PM (N= 1 000)	PM (N= 5 000)
50,0%	2 215,53	2 189,99
75,0%	2 359,94	2 347,73
95,0%	2 579,37	2 583,25
99,0%	2 805,48	2 778,46
99,5%	2 883,15	2 843,56
Moyenne	2 208,07	2 194,49
Ecart-type	236,44	235,71
Ecart-type/Moyenne	10,71%	10,68%

Histogramme : PM (lissage splines, N=1 000)



Histogramme : PM (lissage splines, N=5 000)



- Lissage par la méthode Whittaker-Henderson

VaR	PM (N= 1 000)	PM (N= 5 000)
50,0%	2 257,67	2 224,71
75,0%	2 427,78	2 394,24
95,0%	2 633,94	2 626,30
99,0%	2 855,53	2 815,92
99,5%	2 919,83	2 861,51
Moyenne	2 257,24	2 222,94
Ecart-type	250,39	246,83
Ecart-type/Moyenne	11,09%	11,10%

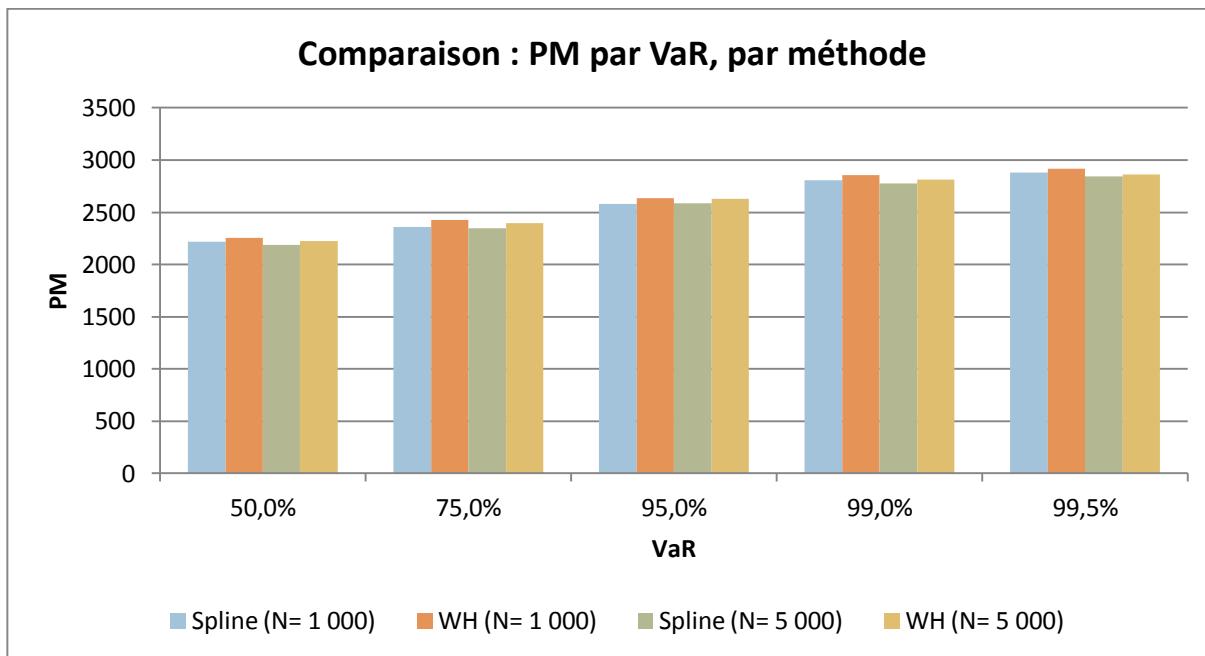
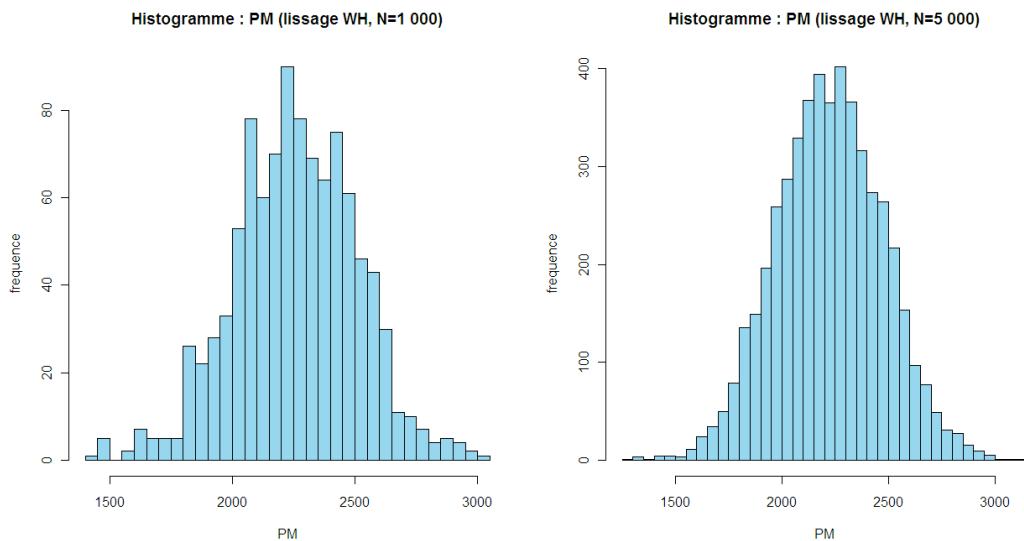


Figure 44 : Comparaison des PM par VaR, par méthode

Lors de N=1 000, les écarts entre deux méthodes sont relativement plus importants qu'au cas de N = 5 000 (cf. figure 44). On peut vérifier plus précisément :

Ecart relatif (Spline / WH)	50,0%	75,0%	95,0%	99,0%	99,5%
N= 1 000	1,87%	3,10%	2,45%	1,75%	1,26%
N= 5 000	1,56%	1,94%	1,64%	1,33%	0,63%

Si on a réalisé la simulation avec N relativement moins important, le choix de méthode de lissage est donc plus important. En effet, la distribution des PM trouvée par la méthode Whittaker-Henderson n'est pas stable lors de N=1 000. Donc, dans cet exemple, on devrait choisir la méthode lissage par splines quand N=1 000. Le plus bas de l'écart-type / moyenne est retrouvé dans le cas de lissage par splines, avec N= 5 000.

Les Ecart-type/Moyenne sont assez stables à chaque méthode par contre les montants de PM ne sont pas stables pour chaque simulation.

La PM déterministe dans la garantie de maintien en incapacité, était de : 2 837,48 euros (cf. IV.1.1.1)

Au niveau de 99,5% de VaR, on peut disposer la marge des PM avec les deux méthodes.

2.6. Convergence des taux de sortie simulés

Dans ce paragraphe, on vérifie la convergence des taux simulés avec N=1 000, 5 000 et 10 000. Pour la vérifier, on calcule les moyennes empiriques :

$$\bar{q}(x; k)_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \hat{q}(x; k)_j$$

où

- $\bar{q}(x; k)_i$: la moyenne des i premières simulations pour un assuré ayant l'âge d'entrée en état x ans avec l'ancienneté k mois
- $\hat{q}(x; k)_j$: les taux de sortie simulés pour un assuré ayant l'âge d'entrée en état x ans avec l'ancienneté k mois pour j ème simulation

Les figures 45, 46 et 47 montrent la convergence des moyennes pour le taux de sortie de l'incapacité pour un assuré d'âge d'entrée 40 ans ayant l'ancienneté 6 mois, calculées par :

$$\bar{q}(40; 6)_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \hat{q}(40; 6)_j$$

Par ces figures le constat que plus N important, plus la convergence stable est vérifié. On peut donc supposer que les moyennes calculées convergent vers les « vraies » espérances des taux de sortie lors que N est important.

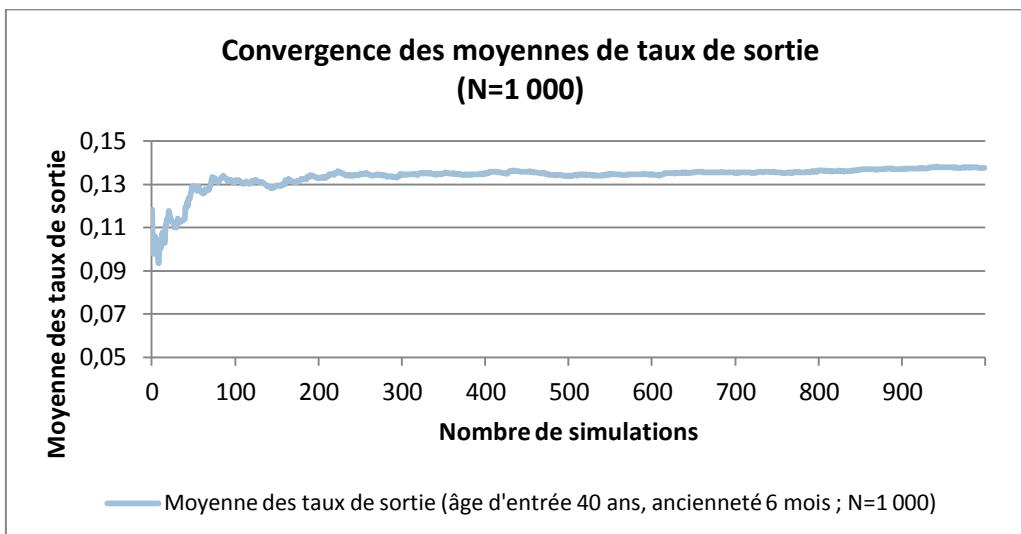


Figure 45 : Convergence des moyennes de taux de sortie (N= 1 000)

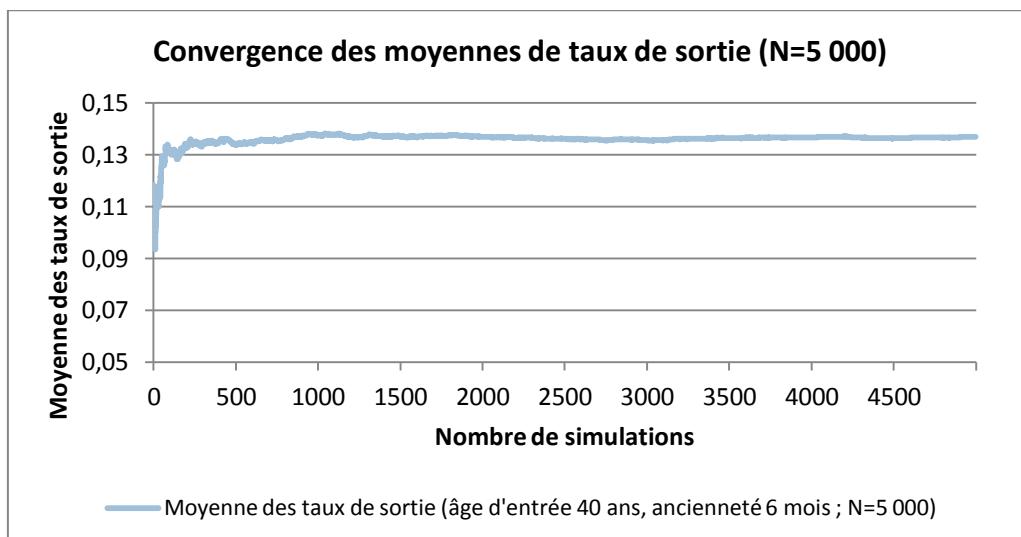


Figure 46 : Convergence des moyennes de taux de sortie (N= 5 000)

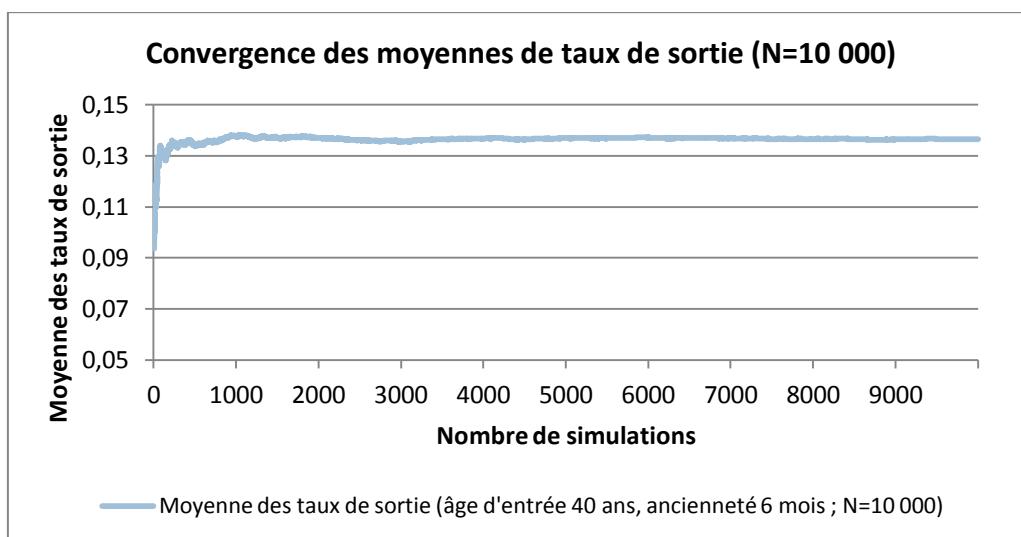


Figure 47 : Convergence des moyennes de taux de sortie (N= 10 000)

A partir des moyennes calculées, on peut construire la table de maintien en incapacité :

Age d'entrée	Ancienneté	lx,k (calculé avec les qx,k moyenne)	qx,k (moyenne)	lx,k (BCAC)	qx,k (BCAC)
40	0	10000	0,1779	10000	0,5927
40	1	8221	0,1706	4073	0,3489
40	2	6818	0,1636	2652	0,2560
40	3	5703	0,1556	1973	0,2017
40	4	4815	0,1495	1575	0,1727
40	5	4095	0,1430	1303	0,1581
...
40	31	379	0,0455	195	0,0564
40	32	361	0,0433	184	0,0326
40	33	346	0,0416	178	0,0393
40	34	331	0,0395	171	0,0877
40	35	318		156	0,8654
40	36			21	

Lorsqu'on compare les effectifs de maintien en incapacité entre la table trouvée ici et la table BCAC, le problème est qu'on a une grande différence entre $qx,0$ (moyenne) et qx,k (BCAC) et qu'on a enlevé le 36ème mois lors de la modélisation. Afin de vérifier la convergence des effectifs de la table calculée à partir de la moyenne des simulations vers ceux de la table BCAC, on prend le taux de sortie observé au premier mois et au dernier mois. On peut trouver les effectifs ajustés :

Age	Anc	lx,k ajusté	qx,k ajusté	lx,k (BCAC)	qx,k (BCAC)
40	0	10000	0,5927	10000	0,5927
40	1	4073	0,1706	4073	0,3489
40	2	3378	0,1636	2652	0,2560
40	3	2825	0,1556	1973	0,2017
40	4	2386	0,1495	1575	0,1727
40	5	2029	0,1430	1303	0,1581
...
40	31	188	0,0455	195	0,0564
40	32	179	0,0433	184	0,0326
40	33	171	0,0416	178	0,0393
40	34	164	0,0395	171	0,0877
40	35	158	0,8654	156	0,8654
40	36	21		21	

Lorsqu'on observe la figure 48, la table déterminée à partir des moyennes de simulation, sans ajustement est « trop » éloignée de la table originale, BCAC. Par contre, la table « ajustée » avec les taux de BCAC représente la courbe assez proche de la table originale à la fin de la période.

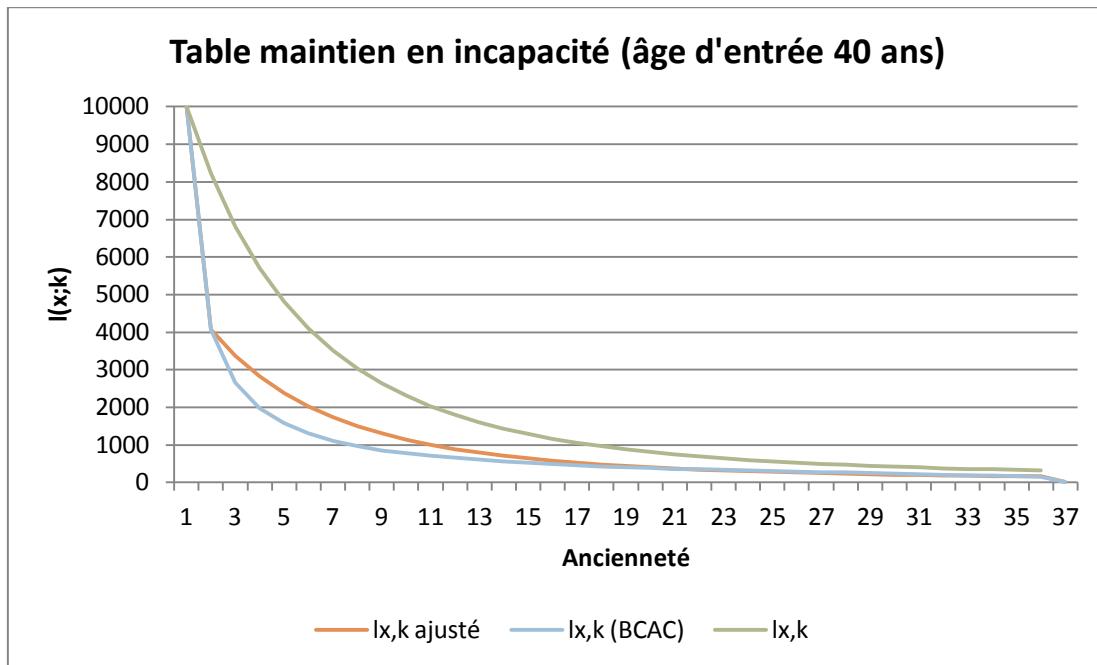


Figure 48 : Table maintien en incapacité (âge d'entrée 40 ans)

Partie VI Perspectives : la directive Solvabilité II

Le 25 novembre 2009, le Parlement Européen a publié une importante directive de réforme de l'assurance : « Solvabilité II » (directive 2009/138/CE) ayant deux grands objectifs :

1. Créer un marché de l'assurance unique, compétitif et ouvert à la concurrence en Europe.
2. Protéger les créanciers, notamment les assurés et les contreparties des compagnies.

Le premier objectif résulte du caractère européen de la réforme et de l'uniformisation des contraintes prudentielles au sein de chaque pays membre. L'harmonisation de la réglementation supprime les inégalités de référentiels réglementaires et permet la construction d'un marché unique et libre.

Le second objectif est porté par l'idée qu'un assureur doit mieux gérer, connaître et évaluer ses risques. Dans une logique similaire à Bâle II, Solvabilité II se construit autour de trois piliers (cf. figure 49) :

- Exigences quantitatives
- Exigences qualitatives
- Reporting et information du public

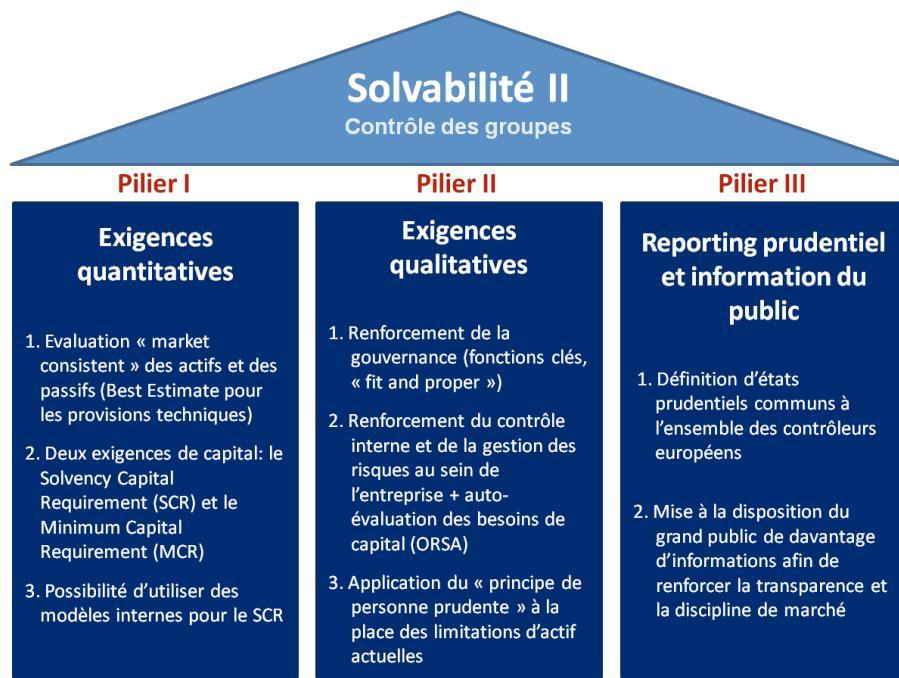


Figure 49 : Trois piliers de Solvabilité II

Le premier pilier rassemble les exigences quantitatives. Il comprend ainsi des dispositions sur les provisions, l'évaluation des actifs, les risques qui doivent être pris en compte ainsi que leur mesure et leur dépendance et la détermination des principes d'investissement. Ce pilier définit particulièrement les calculs de marge de solvabilité, c'est-à-dire, la détermination des ressources financières qu'une compagnie d'assurance se doit de disposer afin d'être considérée solvable représenté par SCR (*Solvency Capital Requirement*) et MCR (*Minimum Capital Requirement*).

Les assureurs peuvent adopter un mode de calcul du SCR basé sur la formule standard ou y déroger, soit par un modèle interne complet, soit par un modèle interne partiel.

Toutefois, quelle que soit l'approche adoptée pour évaluer le SCR, ce dernier doit correspondre aux fonds propres requis pour remplir toutes les obligations à un horizon temporel donné, fixé à un an, et en fonction d'un niveau de confiance défini (équivalent à une probabilité de ruine de 0,5 %) en utilisant des données internes à l'assureur.

La formule standard d'évaluation de la solvabilité est en cours de stabilisation, après un certain nombre d'enquêtes réalisées par l'Europe sur le marché. Le dernier test mené, le QIS 5, a fixé les modules de risques (cf. figure 50) : le risque opérationnel (SCR_{op}), le risque de marché (SCR_{market}), le risque de contrepartie ($SCR_{default}$), le risque de souscription vie ((SCR_{life})), le risque de souscription santé (SCR_{health}), le risque de souscription non-vie ($SCR_{non-life}$) et le risque d'actifs incorporels(SCR_{intang}).

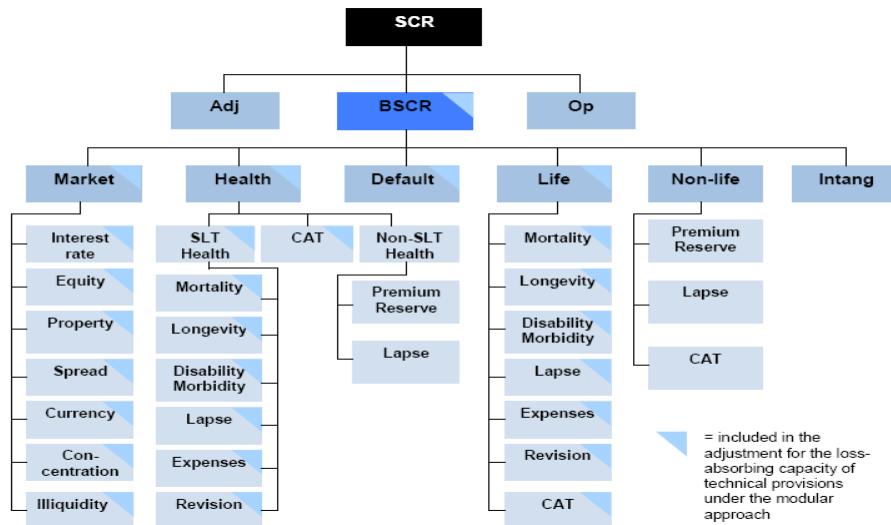


Figure 50 : Segmentation du calcul SCR⁴⁰

Cette structure n'est pas définitive. La formule standard fait l'objet d'une nouvelle consultation du marché en janvier 2013 au travers du LTGA (*long-term guarantees assessment*).

Le deuxième pilier définit les exigences qualitatives qu'une compagnie d'assurance se doit de remplir. Ceci recouvre la gouvernance, le contrôle interne, la gestion des risques mais aussi l'exercice du contrôle par le superviseur. Il comprend une évaluation des risques non pris en compte au niveau du premier pilier, notamment, au travers de l'ORSA, qui est une auto évaluation de ses risques, par l'assureur (à l'horizon de son business plan).

Enfin, le troisième pilier explicite les règles de transparence à respecter afin de favoriser la discipline de marché. Il fixe ainsi les règles de publication d'information et de reporting au superviseur.

- Provisions techniques sous Solvabilité II

Sous Solvabilité II, les provisions techniques sont calculées comme la somme des *Best Estimate* et de la marge de risque (*Risk margin*) comme l'illustre le bilan économique (cf. figure 51).

$$\text{Provisions techniques} = \text{Best Estimate} + \text{Marge de Risque}$$

⁴⁰ [2] Commission Européenne (2010)

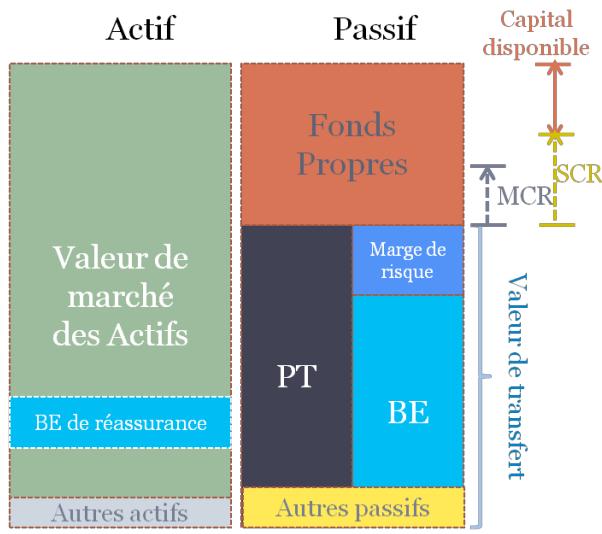


Figure 51 : Bilan économique sous Solvabilité II

Le *best estimate* est égal à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente [14]. Autrement dit, le *best estimate* est calculé comme la moyenne des résultats de tous les scénarios possibles pondérés par leurs probabilités respectives. ([2] TP.2.3) Le calcul du *best estimate* est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses现实的 et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates.[14] Les projections de *cash flows* doivent refléter les futurs développements démographiques, judiciaires, médicaux, technologiques, sociaux ou économiques. ([2] TP.2.9)

La marge de risque est une composante des provisions techniques destinée à garantir que leur valeur est équivalente au montant dont des entreprises d'assurance et de réassurance auraient besoin pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance. ([2] TP 5.2)

Dans QIS 5, la méthode du coût du capital est appliquée au calcul de la marge de risque. ([2] TP 5.1)

- Risques de souscription en prévoyance

Comme Solvabilité II exige un pilotage par les risques, il est demandé aux assureurs d'identifier et de maîtriser leurs risques. Les assureurs doivent donc considérer les risques sous-jacents dans leurs activités ou encore appellés risques de souscription.

L'article 13 de la directive définit le risque de souscription [1]:

Le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement.

Dans un portefeuille de contrats de prévoyance classique, individuelle ou collective, dont les garanties sont de l'assurance vie et santé, les effets de mortalité ou de morbidité (le fait de souffrir d'une maladie pendant un temps donné) sont importants. S'il y a une hausse de la mortalité ou de la morbidité parmi la population assurée, les prestations à verser pour les garanties décès, incapacité, invalidité et santé augmenteraient. En revanche, s'il y a une baisse de la mortalité ou de la morbidité parmi la population assurée, des prestations à verser diminueraient dans un premier temps, excepté pour les rentes de conjoint et les rentes éducatives pour lesquelles le risque principal est la longévité.

Les garanties seront segmentées selon leur nature technique, selon qu'elles relèvent plutôt de l'assurance vie ou de l'assurance non vie.

- Intérêts et limites des méthodes stochastiques présentées dans le mémoire

Sous la directive Solvabilité II, les assureurs sont tenus d'évaluer la valeur de l'actif et du passif la plus réaliste possible en reflétant les risques qui affectent les *cash flows* futurs. Les assureurs peuvent développer un modèle interne partiel ou complet s'ils considèrent que la formule standard ne répond pas à leurs spécificités.

Comme nous l'avons vu précédemment, les provisions techniques sous Solvabilité II sont évaluées par la somme de la marge de risque et du *best estimate*.

L'objectif des méthodes stochastiques de calcul des provisions techniques est de prendre en compte les divers facteurs de risque impactant les provisions techniques : périmètre du calcul (§ III.1.2 et § IV.1.2), incertitude de la sinistralité (§ III. 2, § IV.2.2 - § IV.2.4), inadéquation des tables d'expérience (§ V), etc.

Pour mesurer les provisions techniques sous Solvabilité II, il faut prendre en compte tous les flux futurs. Les méthodes présentées ne contiennent pas l'évaluation des frais futurs de gestion. Il faut aussi prendre en compte des chocs au calcul de SCR sous Solvabilité II. Ce point n'est pas développé dans ce mémoire. En outre, sous Solvabilité II, le calcul de capital requis nécessite d'analyser les risques sur un horizon d'un an. Cette vision n'est pas adoptée dans ce mémoire.

Conclusion générale

Ce mémoire fournit une illustration du calcul des provisions techniques sous la réglementation actuelle et propose des méthodes stochastiques pour l'estimation des provisions techniques pour quelques garanties de prévoyance, les garanties d'incapacité et d'invalidité.

Étudier des méthodes stochastiques du calcul des provisions techniques nous permet de mesurer les risques sous-jacents des garanties et d'avoir la distribution des provisions techniques. Nous pourrons ainsi déterminer différents indicateurs qui permettront aux décideurs d'avoir une idée du niveau de risque qu'ils prennent en constituant les provisions calculées par les formules classiques.

Les méthodes stochastiques pour le calcul des provisions techniques utilisent les méthodes actuelles comme référence. Pour les méthodologies stochastiques, nous nous sommes concentrés aux deux provisions techniques principales : les provisions mathématiques et les provisions pour sinistres à payer.

En effet, le périmètre du calcul des PM sous la réglementation actuelle est limité aux sinistrés, c'est-à-dire, aux personnes étant en incapacité ou en invalidité. Contrairement à la réglementation actuelle, Solvabilité II a étendu le périmètre aux assurés.

Pour les provisions mathématiques, nous avons proposé une méthodologie pour estimer l'engagement de l'assureur dans un an vis-à-vis d'assurés valides dans le cadre de la problématique posée sous Solvabilité II.

La méthodologie proposée dans ce mémoire nous permet d'obtenir la distribution des PM sur un portefeuille global en générant des aléas sur le taux d'entrée en incapacité pour des assurés valides. Dans cette approche, nous avons calculé les PM ultimes à la vision temporelle $t=1$. Lorsqu'on a un portefeuille à étudier ayant un historique suffisamment long, on pourra s'inspirer de cette méthodologie pour comparer les résultats historiques et les résultats théoriques. Ces derniers pourraient être étudiés par cette méthodologie. Cela nous permettrait de mesurer les risques sur le nombre des entrants en état d'incapacité. Ainsi cette méthodologie permet d'avoir une prévision à court terme sur l'engagement long d'un portefeuille de garanties d'incapacité et invalidité ayant tous les assurés valides à $t=0$.

Pour les provisions pour sinistres à payer, nous avons étudié la méthode de Mack et la méthode de Bootstrap.

La méthode de Mack permet d'avoir l'intervalle de confiance et la distribution en supposant une loi de probabilité des provisions. Quand on a appliqué cette méthode, le choix de la loi de probabilité a engendré une différence importante entre les résultats. Parmi deux lois les plus utilisées, la loi normale et la loi log-normale, ici, nous avons préféré la loi log-normale afin d'éviter des provisions à valeurs négatives.

La méthode Bootstrap ne suppose pas de loi de probabilité. La simplicité est un atout de cette méthode. Par la méthode Bootstrap, on peut obtenir la distribution des PSAP par la simulation avec grands nombres.

Dans l'exemple que l'on a étudié, les résultats trouvés par la méthode de Mack avec la loi log-normale ne sont pas très éloignés de ceux obtenus par la méthode Bootstrap avec $N = 100\,000$.

En effet, sous Solvabilité II, en particulier au calcul de SCR, il faut étudier les risques à horizon temporel d'un an. Mais, ici, on n'a pas pris cette vision.

En complément, on a étudié une méthodologie ayant pour objectif de mesurer le risque de modèle à la construction des tables d'expérience. Faute de données, on a appliquée ici cette méthodologie à la table BCAC. Par application, on a pu disposer la marge des PM au niveau de 99,5% de VaR par rapport au montant de PM déterministe. D'ailleurs, on a pu vérifier la convergence des moyennes des taux simulés vers les taux fournis par la

table BCAC. Autrement dit, après avoir simulé avec grands nombres le modèle validé puis calculé les moyennes empiriques, on a retrouvé la table qui est cohérente à la table BCAC.

Cette méthodologie permet de générer des aléas sur le taux de sortie de l'incapacité à partir de la modélisation GLM, de construire des tables stochastiques, de mesurer le risque de modèle et de trouver la distribution des PM. Dans l'exemple, on a trouvé environ 11% de «Ecart-type/Moyenne» qui pourrait donner une idée sur la quantification du risque de modèle. Une suite intéressante de ce mémoire serait l'application sur une table d'expérience.

Ce mémoire s'est inspiré de méthodes existantes en mortalité et en prévoyance. Cependant, les méthodes stochastiques des risques d'incapacité et d'invalidité sont aujourd'hui moins connues que celles utilisées dans le domaine de la mortalité. Des études complémentaires à ce mémoire pourraient être réalisées et permettraient d'estimer les risques et les impacts sur le provisionnement et les engagements des assureurs de leurs garanties d'incapacité ou d'invalidité.

Bibliographie

- [1] Européen Commission (2009) : Directive 2009/138/CE du Parlement Européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)
- [2] Commission Européenne (2010) : QIS 5 Technical Specification
- [3] Frédéric PLANCHET, Joël WINTER (2006) : Les provisions techniques des contrats de prévoyance collective, Economica
- [4] Jean-Paul FELIX, Frédéric PLANCHET (2009) : Mesure des risques de marché et de souscription vie en situation d'information incomplète pour un portefeuille de prévoyance
- [5] Matthias BÖRGER (2010) : Deterministic Shock vs. Stochastic Value-at-Risk – An analysis of the Solvency II Standard Model Approach to Longevity Risk
- [6] Alexis DUPONT (2011) : Théorie de l'Assurance vie (Cours), Université Dauphine
- [7] Stéphane LE MER (2010) : Calcul du capital économique en assurance vie
- [8] Alexandre HELUIN (2010) : Solvency II - Techniques de modélisation du Best Estimate en assurance-vie
- [9] Jean-Baptiste CROGUENNEC (2009) : Méthodes de calcul des provisions techniques en prévoyance arrêt de travail – Cas particulier de la fonction publique
- [10] Emeric BAILLARD (2011) : Pilotage prévoyance individuelle
- [11] Marc VAUCHER (2011) : Comptabilité et réglementation de l'assurance (Cours), Université Dauphine
- [12] CTIP (Centre Technique des Institutions de Prévoyance) (2011) : Rapport annuel
- [13] COMAREP (La Commission des Accords de Retraite et de Prévoyance) (2011) : Rapport d'activité
- [14] ACP (Autorité de Contrôle Prudentiel) (2011) : Analyses et synthèses Solvabilité 2 : principaux enseignements de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5)
- [15] Thomas BEHAR et André BERNAY (2011) : Retraite et prévoyance (Cours), Université Dauphine
- [16] FFSA (FÉDÉRATION FRANÇAISE DES SOCIÉTÉS D'ASSURANCES) (2011) : Rapport 2011
- [17] Clélia SAUVET (2006) : Solvency II – Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non vie ?
- [18] Michel DENUIT, Arthur CHARPENTIER (2005) : Mathématiques de l'assurance non-vie, Tome II : Tarification et provisionnement, Economica
- [19] Marie DOITTEAU (2011) : La réglementation et la modélisation stochastique de l'incapacité
- [20] Frédéric PLANCHET, Pascal WINTER (2007) : L'utilisation des splines bidimensionnels pour l'estimation de lois de maintien en arrêt de travail
- [21] Frédéric PLANCHET(2011) : Modèles de durée : Méthodes de lissage et d'ajustement (Cours), ISFA
- [22] Aurélie GAUMET (2001) : Construction de tables d'expérience pour l'entrée et le maintien en incapacité

- [23] Anne ROLLAND et Igotz AUBIN (2005) : Comparaison des méthodes de construction des lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité, et analyse de l'impact du choix sur les niveaux de provisionnement et de charge ultime
- [24] Frédéric PLANCHET(2009) : Sur quelques problématiques liées au *best estimate* en assurance-vie et en assurance santé/prévoyance
- [25] Julien PECAULT (2008) : Evaluation stochastique des provisions mathématiques pour le risque incapacité-invalidité
- [26] Thomas MACK (1993) : Distribution free Calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates
- [27] John C. HULL (2009) : Options, futures, and other derivatives», Person International Edition
- [28] P. D. England et R. J. Verrall (2002) : Stochastic claims reserving in general insurance
- [29] Christelle RIEDINGER (2007) : Modélisation stochastique des produits de prévoyance
- [30] Pierre E. THÉOROND et Frédéric PLANCHET (2007) : Technical reserves and solvency capital of insurance company : how to use the Value-at-Risk?
- [31] CTIP (Centre Technique des Institutions de Prévoyance) (2011) : Les règles et le marché de la prévoyance collective
- [32] Clara CICHOWLAS (2010) : Traitement du risque de Perte d'emploi en environnement Solvabilité II
- [33] <http://www.acp.banque-france.fr>
- [34] Philippe ARTZNER, Freddy DELBAEN, Jean-Marc EBER et David HEATH (1999) : « Coherent Measures of Risk »
- [35] http://www.insee.fr/fr/themes/document.asp?ref_id=T11F037#tableaux
- [36] Frédéric PLANCHET (2009) : Sur quelques problématiques liées au best estimate en assurance-vie et en assurance santé/prévoyance
- [37] Thomas MACK (1994) : Measuring the variability of chain ladder reserve estimates, Casualty Actuarial Society
- [38] BCAC (1993) : Note technique « Provisionnement des indemnités journalières et des rentes d'invalidité »
- [39] Chritian P. ROBERT, George CASELLA (2010) : « Méthodes de Monte-Carlo avec R », Springer
- [40] Marc JULLIARD, Frédéric PLANCHET (2010) : « Tables d'expériences », Winter

Annexe

1. Loi forte des grands nombres

Soit (X_1, \dots, X_n) une suite de variables aléatoires réelles intégrables indépendantes entre elles et identiquement distribuées, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X) \text{ p.s dans L1}$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ supposant que (X_n) est constitué de variables indépendantes et de même loi μ . La loi forte des grands nombres entraîne que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la mesure empirique aléatoire :

$$L_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k(\omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$$

2. Théorème Central Limite

Soit (X_1, \dots, X_n) une suite de variables aléatoires réelles intégrables indépendantes entre elles et identiquement distribuées, on a :

$$\sqrt{\frac{n}{Var(X)}} (\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi}$$

3. Théorème de Bayes

- Théorème :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) * \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

où $\mathbb{P}(A|B)$: la probabilité conditionnelle de A sachant B

- Autres écritures

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) * \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) * \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C) * \mathbb{P}(A^C)}$$

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) * \mathbb{P}(A_i)}{\sum_j \mathbb{P}(B|A_j) * \mathbb{P}(A_j)}$$

4. Fonction VBA : PM déterministe

4.1. Garantie : Incapacité

- Maintien en incapacité

Function VAP_maintien_INC(x As Integer, Anc As Integer, taux_tech As Double)

'calcul de la valeur actuelle probable d'une rente d'un 1 euro mensuel pour un assuré d'âge d'entrée x avec l'ancienneté Anc pour la garantie de maintien en incapacité temporaire

Dim BCAC_table_inc As Range, k As Integer, Terme As Double

```

Set BCAC_table_inc = Worksheets("Maintien_inc").Range("B1:AL66")
Terme = 0
For k = Anc To 36
Terme = Terme + BCAC_table_inc.Cells(x, k + 1) / ((1 + taux_tech) ^ ((k - Anc) / 12))
Next k
VAP_maintien_INC = Terme / (BCAC_table_inc.Cells(x, Anc + 1))
End Function

```

- Passage d'incapacité en invalidité

```
Function VAP_PASS_INV(x As Integer, Anc As Integer, Age_retraite As Integer, taux_tech As Double)
```

'Calcul de la valeur actuelle probable d'une rente d'un 1 euro mensuelle pour un assuré d'âge d'entrée dans l'état x avec l'ancienneté Anc pour le cas de passage d'incapacité temporaire en incapacité

```
Dim BCAC_table_pass As Range, BCAC_table_mt_inc As Range, BCAC_table_inv As Range, k As Integer, Terme As Double, VAP_Inval_x_Ek_0 As Double, VAP_Inval_x_Ek1_0 As Double, coeff As Double, VAP_Inval_xk As Double
```

```

Set BCAC_table_pass = Worksheets("Pass_incinv").Range("B1:AL61")
Set BCAC_table_mt_inc = Worksheets("Maintien_inc").Range("C1:AL66")
Set BCAC_table_inv = Worksheets("Maintien_inval").Range("C1:AS61")

Terme = 0

For k = Anc To 35
    VAP_Inval_x_Ek_0 = VAP_maintien_INV(Int(x + k / 12), 0, Age_retraite, taux_tech)
    VAP_Inval_x_Ek1_0 = VAP_maintien_INV(Int(x + 1 + k / 12), 0, Age_retraite, taux_tech)
    coeff = x + k / 12 - Int(x + k / 12)
    VAP_Inval_xk = (1 - coeff) * VAP_Inval_x_Ek_0 + coeff * VAP_Inval_x_Ek1_0
    Terme = Terme + (BCAC_table_pass.Cells(x, k + 1) / ((1 + taux_tech) ^ ((k - Anc) / 12))) * VAP_Inval_xk
    Next k
VAP_PASS_INV = Terme / (BCAC_table_mt_inc.Cells(x, Anc))
End Function

```

- Décès d'un assuré en incapacité

```
Function VAP_DC_INC(x As Integer, Anc As Integer, Age_retraite As Integer, taux_tech As Double)
```

'Calcul de la valeur actuelle probable d'une rente d'un 1 euro annuelle pour un assuré d'âge d'entrée dans l'état x avec l'ancienneté Anc pour le cas de maintien en invalidité

```
Dim BCAC_table_inc As Range, BCAC_table_inc_mort As Range, BCAC_table_pass As Range, k As Integer, Terme As Double, VAP_Inval_DC_xEj_0 As Double, VAP_Inval_DC_xEj1_0 As Double, coeff As Double, VAP_Inval_xj_DC_0 As Double
```

```

Set BCAC_table_inc = Worksheets("Maintien_inc").Range("B1:AL66")
Set BCAC_table_inc_mort = Worksheets("IxIncap").Range("C12:AV47")
Set BCAC_table_pass = Worksheets("Pass_incinv").Range("B1:AL61")

Terme = 0

For k = Anc To 35
    VAP_Inval_DC_xEj_0 = VAP_DC_INV(Int(x + (k + 1) / 12), 0, Age_retraite, taux_tech)
    VAP_Inval_DC_xEj1_0 = VAP_DC_INV(Int(x + 1 + (k + 2) / 12), 0, Age_retraite, taux_tech)
    coeff = x + k / 12 - Int(x + k / 12)
    VAP_Inval_xj_DC_0 = (1 - coeff) * VAP_Inval_DC_xEj_0 + coeff * VAP_Inval_DC_xEj1_0
    Terme = Terme + BCAC_table_inc.Cells(x, k + 1) / (BCAC_table_inc.Cells(x, Anc + 1) * ((1 + taux_tech) ^ ((k - Anc) / 12))) *
    ((BCAC_table_inc_mort.Cells(k + 1, x - 24) - BCAC_table_inc_mort.Cells(k + 1 + 1, x - 24)) /
    BCAC_table_inc_mort.Cells(Anc + 1, x - 24)) + BCAC_table_pass.Cells(x, k + 2) / (BCAC_table_inc.Cells(x, Anc + 1) * ((1 +
    taux_tech) ^ ((k + 1 - Anc) / 12))) * VAP_Inval_xj_DC_0
    Next k
VAP_DC_INC = Terme

```

End Function

4.2. Garantie : Invalidité

- Maintien en invalidité

Function VAP_maintien_INV(x As Integer, Anc As Integer, Age_retraite As Integer, taux_tech As Double)

'Calcul de la valeur actuelle probable d'une rente d'un 1 euro annuelle pour un assuré d'âge d'entrée x avec l'ancienneté Anc pour la garantie de maintien en invalidité

Dim BCAC_table_inv As Range, k As Integer, Terme As Double

*Set BCAC_table_inv = Worksheets("Maintien_inval").Range("C1:AS61")
Terme = 0*

For k = Anc To (Age_retraite - x)

Terme = Terme + (BCAC_table_inv.Cells(x, k + 1) / ((1 + taux_tech) ^ (k - Anc)))

Next k

VAP_maintien_INV = Terme / (BCAC_table_inv.Cells(x, Anc + 1))

End Function

- Décès d'un assuré en invalidité

Function VAP_DC_INV(x As Integer, Anc As Integer, Age_retraite As Integer, taux_tech As Double)

'Calcul de la valeur actuelle probable d'une rente d'un 1 euro annuelle pour un assuré d'âge d'entrée dans l'état x avec l'ancienneté Anc pour le cas décès s'il est invalide

Dim BCAC_table_inv As Range, BCAC_table_inv_mort As Range, k As Integer, Terme As Double

*Set BCAC_table_inv = Worksheets("Maintien_inval").Range("C1:AS61")
Set BCAC_table_inv_mort = Worksheets("IxInval").Range("C12:AU47")*

Terme = 0

For k = Anc To Age_retraite - x - 1

*Terme = Terme + BCAC_table_inv.Cells(x, k + 1) / (BCAC_table_inv.Cells(x, Anc + 1) * ((1 + taux_tech) ^ (k - Anc + 1 / 2))) * (BCAC_table_inv_mort.Cells(k + 1, x - 24) - BCAC_table_inv_mort.Cells(k + 1 + 1, x - 24)) / BCAC_table_inv_mort.Cells(Anc + 1, x - 24)*

Next k

VAP_DC_INV = Terme

End Function

5. Code VBA : méthode de lissage de Whittaker-Henderson

- Construction de la matrice $(\mathbf{w} + \mathbf{h}^T \mathbf{K}_z \mathbf{K}_z)^{-1}$ par code VBA

Sub matrice_WH ()

Dim matres(1 To 200, 1 To 200) As Double

Dim matK(1 To 200, 1 To 200) As Double

Dim mattransK(1 To 200, 1 To 200) As Double

Dim id(1 To 200, 1 To 200) As Double

Dim nb As Integer

```

Dim Res(1 To 200, 1 To 200) As Double
Dim vectlisseur(1 To 200) As Double
Dim resultats(1 To 200) As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim k As Integer
Dim h As Double

nb = Worksheets("Donnees").Cells(5, 1).Value 'la plage d'âge ou d'ancienneté
nb_calcul = Worksheets("Donnees").Cells(2, 1).Value

'Construction des matrices :  ${}^t K_z K_z$ 
For i = 1 To nb
    For j = 1 To nb
        matK(i, j) = 0
        mattransK(i, j) = 0
        matres(i, j) = 0
    Next j
    matK(i, i) = -1
    mattransK(i, i) = -1
    Next i

    For i = 4 To nb
        matK(i - 3, i) = 1
        matK(i - 2, i) = -3
        matK(i - 1, i) = 3

        mattransK(i, i - 3) = 1
        mattransK(i, i - 2) = -3
        mattransK(i, i - 1) = 3

        Next i

        matK(1, 3) = -3
        matK(1, 2) = 3
        matK(2, 3) = 3
        mattransK(2, 1) = 3
        mattransK(3, 1) = -3
        mattransK(3, 2) = 3

        'w+ h*  ${}^t K_z K_z$ 

        h = InputBox("entrez la valeur du paramètre h")
        For i = 1 To nb
            For j = 1 To nb
                For k = 1 To nb - 3
                    matres(i, j) = matres(i, j) + mattransK(i, k) * matK(k, j)
                Next k
                Res(i, j) = 0 + matres(i, j) * h
            Next j
            Res(i, i) = 1 + matres(i, i) * h
        Next i

        
$$(w + h {}^t K_z K_z)^{-1}$$


        Call inversemat(Res, nb)
        For i = 1 To nb
            For j = 1 To nb
                id(i, j) = Worksheets("Matrix_WH").Cells(i, j).Value
            Next j
        Next i

    End Sub

```

Index

1. Liste des tableaux

Tableau 1 : Évolution des cotisations par garantie en 2011	18
Tableau 2 : Prestations versées par garantie en prévoyance	20
Tableau 3 : Provisions techniques pour les institutions de prévoyance (2010-2011)	24
Tableau 4 : Triangle de <i>run-off</i> des incrémentés	35
Tableau 5 : Triangle de <i>run-off</i> des montants cumulés	35
Tableau 6 : Estimation dans le triangle des incrémentés	36
Tableau 7 : Estimation dans le triangle des montants cumulés	36
Tableau 8 : "Population handicapée selon le sexe et l'âge en 2007" INSEE [35]	48
Tableau 9 : Calcul du taux handicapé selon l'âge en 2007 (cf. Tableau 8).....	48
Tableau 10 : PM incapacité pour un profil 41 ans.....	63

2. Liste des figures

Figure 1 : Répartition de l'activité en 2011.....	18
Figure 2 : Une croissance régulière des cotisations sur 10 ans.....	19
Figure 3 : Bilan comptable.....	24
Figure 4 : Poids des facteurs (projection, probabilisation et actualisation) dans la PM.....	27
Figure 5 : Succession des états d'un arrêt de travail	29
Figure 6 : Distribution de la loi normale et VaR	40
Figure 7 : Histogramme (gauche), représentation par paire (centre) et fonction d'autocorrélation estimée (droite) d'une suite de 10 000 nombres aléatoires générées par <i>runif</i>	44
Figure 8 : Histogrammes d'échantillons exponentiels utilisant la transformation inverse et la fonction R <i>rexp</i>	45
Figure 9 : Comparaison des aléas générés par <i>rnorm</i> , <i>qnorm</i> et l'algorithme de Box-Muller	46
Figure 10 : méthodologie: calcul des provisions mathématiques.....	49
Figure 11 : Méthode de Bootstrap au calcul des provisions techniques	54
Figure 12 : Table BCAC_Maintien en invalidité.....	55
Figure 13 : Loi de passage d'incapacité en invalidité.....	56
Figure 14 : Lois de mortalité pour des personnes invalides	56
Figure 15 : Génération des aléas entre 0 et 1 (<i>Nassuré</i> lignes * <i>Nsim</i> colonnes).....	61
Figure 16 : Détermination de l'incapacité des assurés par simulation	61
Figure 17 : Effectif des entrants en incapacité.....	62
Figure 18 : Distribution des effectifs entrés dans l'incapacité dans un an	62
Figure 19 : calcul les effectif à chaque ancienneté	64
Figure 20 : problématique sur l'engagement t=0.....	69
Figure 21 : Vérification de l'hypothèse 3 de la méthode Mack	76
Figure 22 : Évolution de la densité de sinistralité selon le nombre de simulation (N=1 000, 10 000 , 100 000)	81
Figure 23 : Taux de sortie de l'état d'incapacité par âge de l'entrée dans l'état et par ancienneté	84
Figure 24 : Taux de sortie de l'état d'incapacité (BCAC).....	84
Figure 25 : Représentation graphique de Y	91
Figure 26 : Effet de lissage par splines	94
Figure 27 : Lissage obtenu par la méthode Whittaker Henderson (h=100 ; N = 1 000)	98
Figure 28 : Deux méthodes d'ajustement et la suite brute	101
Figure 29 : Convergence des moyennes (N=1 000 / N= 5 000).....	101
Figure 30 : Convergence des moyennes (N=10 000).....	102

Figure 31 : Taux de sortie qx par l'ancienneté	104
Figure 32 : Test de significativité pour GLM avec « family=gaussian »	105
Figure 33 : Simulation pour le modèle GLM pour l'âge d'entrée dans l'état 40 ans	106
Figure 34 : Effet de lissage par splines	107
Figure 35 : Effet de lissage par la méthode Whittaker-Henderson	107
Figure 36 : Test de changements de signe (méthode lissage par splines) N= 1 000	108
Figure 37 : Test de changements de signe (méthode lissage par splines) N=5 000	108
Figure 38 : Test de changements de signe (méthode Whittaker-Henderson) N= 1 000	109
Figure 39 : Test de changements de signe (méthode Whittaker-Henderson) N= 5 000	109
Figure 40 : Test Khi-deux (lissage par splines N= 1 000).....	110
Figure 41 : Test Khi-deux (lissage par splines N= 5 000).....	110
Figure 42 : Test Khi-deux (Whittaker-Henderson N= 1 000).....	110
Figure 43 : Test Khi-deux (Whittaker-Henderson N= 5 000).....	111
Figure 44 : Comparaison des PM par VaR, par méthode.....	113
Figure 45 : Convergence des moyennes de taux de sortie (N= 1 000)	115
Figure 46 : Convergence des moyennes de taux de sortie (N= 5 000)	115
Figure 47 : Convergence des moyennes de taux de sortie (N= 10 000)	115
Figure 48 : Table maintien en incapacité (âge d'entrée 40 ans)	117
Figure 49 : Trois piliers de Solvabilité II	118
Figure 50 : Segmentation du calcul SCR	119
Figure 51 : Bilan économique sous Solvabilité II.....	120