

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

KHOA CƠ KHÍ
BỘ MÔN CƠ ĐIỆN TỬ



Bài tập lớn
Động lực học và Điều khiển (ME3011)

Giảng viên hướng dẫn TS. Phạm Phương Tùng
Lớp DT01
Thành viên nhóm

Họ và tên	MSSV	Nhiệm vụ chính
Nguyễn Đức Đạt	2111009	Viết báo cáo, thiết kế bộ điều khiển
Trần Quang Đạo	2210647	Thiết kế bộ điều khiển, lập trình MATLAB
Thành viên bí mật	XXXXXX2	Cung cấp chữ số cuối MSSV

TP.HCM, 22/08/2025

Mục lục

1	Tổng quan	2
2	Mô hình hóa	3
2.1	Phân tích lực và xây dựng phương trình vi phân mô tả hệ	3
2.2	Tuyến tính hóa hệ thống và xây dựng hàm truyền	4
2.3	Phương trình không gian trạng thái của hệ	5
2.4	Sơ đồ khối của không gian trạng thái	6
3	Phân tích hệ thống	7
3.1	Yêu cầu đề bài	7
3.2	Sơ đồ MATLAB/Simulink	7
3.3	Phân tích và đánh giá kết quả mô phỏng	10
3.3.1	Đầu vào hàm Dirac	10
3.3.2	Đầu vào hàm nấc đơn vị	10
3.3.3	Đầu vào hàm (23)	11
4	Thiết kế hệ thống điều khiển	12
4.1	Thiết kế bộ điều khiển PID cho góc con lắc	12
4.1.1	Yêu cầu thiết kế	12
4.1.2	Thiết kế bộ điều khiển	12
4.1.3	Mô phỏng bằng MATLAB/Simulink	13
4.1.4	Đánh giá, nhận xét	14
4.2	Thiết kế bộ điều khiển PID cho vị trí xe đẩy	14
4.2.1	Yêu cầu thiết kế	14
4.2.2	Thiết kế bộ điều khiển	14
4.2.3	Mô phỏng bằng MATLAB/Simulink	15
4.2.4	Đánh giá, nhận xét	15
4.3	Thiết kế bộ điều khiển không gian trạng thái	16
4.3.1	Yêu cầu thiết kế	16
4.3.2	Thiết kế bộ điều khiển	16

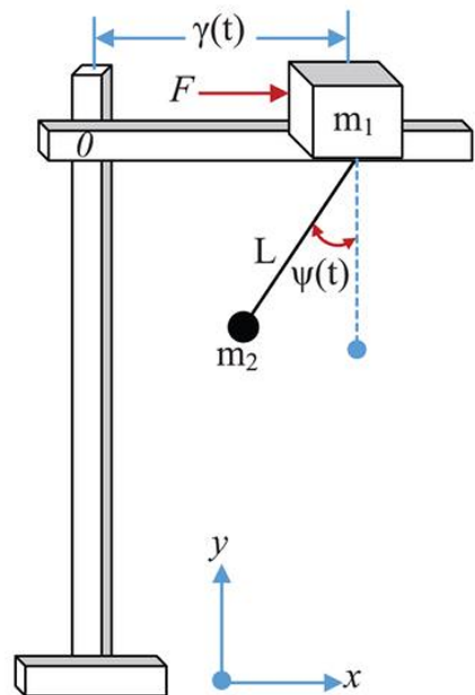
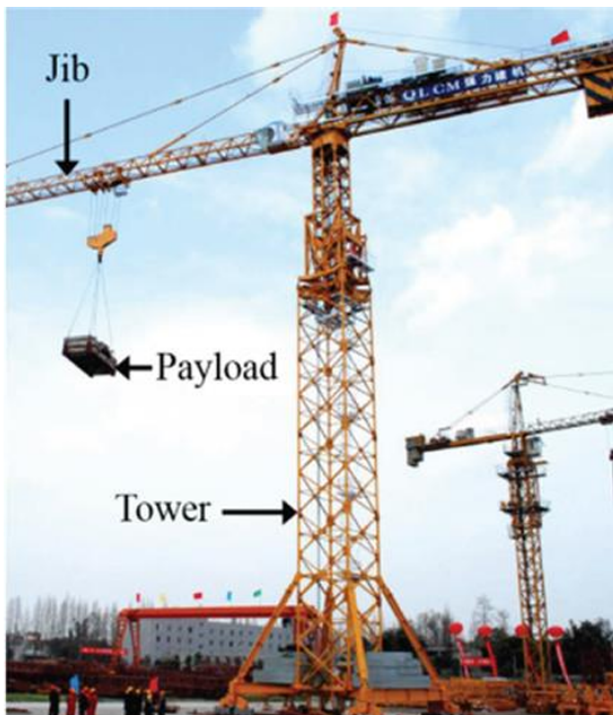
1 Tổng quan

Bài tập lớn tập trung vào việc mô hình hóa động lực học và điều khiển cần cầu tháp. Hệ thống có thể mô hình hóa đơn giản như hệ thống con lắc gắn trên xe đẩy. Sinh viên sẽ xây dựng mô hình, thiết kế bộ điều khiển và thực hiện mô phỏng để đạt được các yêu cầu về ổn định con lắc và vị trí xe đẩy.

Với hệ thống con lắc trên xe đẩy, giả sử các thông số sau:

Thông số	Giá trị
Khối lượng của xe đẩy m_1	$\frac{9 + 7 + 2}{10} = 1.8 \text{ kg}$
Khối lượng của con lắc m_2	$\frac{2 + 7}{20} = 0.45 \text{ kg}$
Chiều dài dây cáp L	$\frac{7 + 2}{20} = 0.45 \text{ m}$
Hệ số ma sát của xe đẩy B	$\frac{9 + 2}{10 \times 7} = 0.15714 \text{ Ns/m}$
Hệ số tắt dần của con lắc b	$\frac{9 + 7}{10 \times 2} = 0.8 \text{ Ns/m}$

Bảng 1: Bảng thông số hệ thống



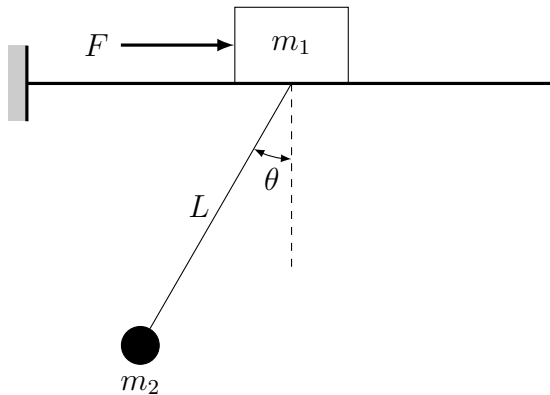
Hình 1: Mô hình cần cầu tháp

Toàn bộ các tệp tin báo cáo, MATLAB/Simulink của bài tập lớn này được lưu tại địa chỉ https://github.com/dat-nguyen500/bai_tap_lon_ME3011_HK243.git. Truy cập vào đường dẫn này và đọc kỹ hướng dẫn để có thể chạy được các tệp tin MATLAB/Simulink.

2 Mô hình hóa

2.1 Phân tích lực và xây dựng phương trình vi phân mô tả hệ

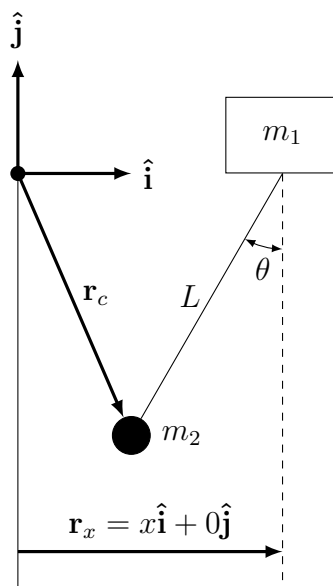
Hệ thống con lắc và xe đẩy có sơ đồ như sau:



Hình 2: Sơ đồ hệ con lắc và xe đẩy

Gọi \mathbf{r}_x và \mathbf{r}_c lần lượt là vector vị trí của xe và con lắc đơn. Ta sẽ biểu diễn \mathbf{r}_x và \mathbf{r}_c theo 2 vector đơn vị $\hat{\mathbf{i}}$ và $\hat{\mathbf{j}}$ dựa vào hình dưới như sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x &= x\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_c &= (x - L \sin \theta)\hat{\mathbf{i}} - L \cos \theta \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}\tag{1}$$



Hình 3: Biểu diễn vector vị trí theo hai vector $\hat{\mathbf{i}}$ và $\hat{\mathbf{j}}$

Đạo hàm theo thời gian hai vector \mathbf{r}_x và \mathbf{r}_c ta có:

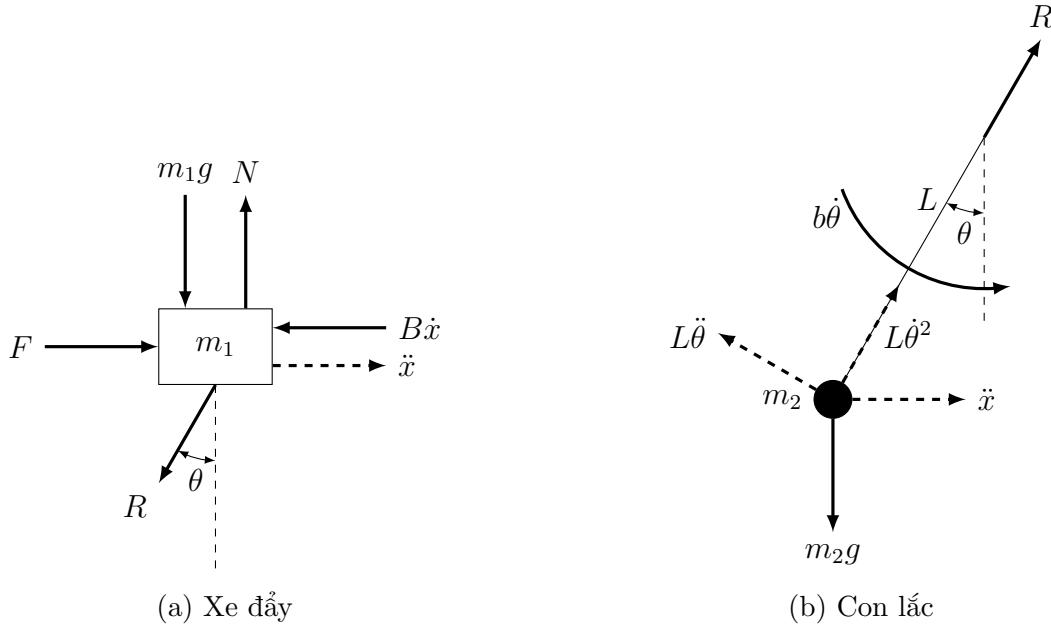
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_x &= \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} \\ \dot{\mathbf{r}}_c &= (\dot{x} - L\dot{\theta} \cos \theta)\hat{\mathbf{i}} + L\dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}\tag{2}$$

Tiếp tục đạo hàm theo thời gian hai vector $\dot{\mathbf{r}}_x$ và $\dot{\mathbf{r}}_c$ để thu được hai vector gia tốc:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_x &= \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} \\ \ddot{\mathbf{r}}_c &= (\ddot{x} + L\dot{\theta}^2 \sin \theta - L\ddot{\theta} \cos \theta)\hat{\mathbf{i}} + (L\dot{\theta}^2 \cos \theta + L\ddot{\theta} \sin \theta)\hat{\mathbf{j}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + L\dot{\theta}^2(\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) + L\ddot{\theta}(-\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}})\end{aligned}\tag{3}$$

Hệ có 2 bậc tự do là x và θ nên hệ sẽ có hai phương trình mô tả chuyển động, gồm một phương trình chuyển động tịnh tiến của xe đẩy và một phương trình chuyển động quay của con lắc.

Từ sơ đồ tổng thể trong hình 2 và 3, ta tách thành hai sơ đồ vật tự do (free body diagram) để phân tích lực tác dụng lên từng thành phần của hệ dựa vào các gia tốc mà ở phương trình (3).



Hình 4: Sơ đồ vật tự do của con lắc và xe đẩy với R là phản lực tác dụng từ con lắc lên xe đẩy. Phương, chiều của các gia tốc (nét đứt) được xác định dựa trên phương trình (3)

Với xe đẩy, theo định luật II Newton, ta có:

$$m_1 \ddot{x} = F - B\dot{x} - R \sin \theta \quad (4)$$

Với con lắc, theo định luật II Newton, ta có:

$$m_2(\ddot{x} - L\ddot{\theta} \cos \theta + L\dot{\theta}^2 \sin \theta) = R \sin \theta \quad (5)$$

Ngoài ra, theo định luật II Newton cho hệ quay quanh tâm quay con lắc, ta có:

$$m_2 L(L\ddot{\theta} - \ddot{x} \cos \theta) = -m_2 L g \sin \theta - b\dot{\theta} \quad (6)$$

Kết hợp các phương trình (4), (5) và (6), thu được

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + B\dot{x} - m_2 L\ddot{\theta} \cos \theta + m_2 L\dot{\theta}^2 \sin \theta &= F \\ m_2 L^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + m_2 L g \sin \theta - m_2 L\ddot{x} \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 Tuyến tính hóa hệ thống và xây dựng hàm truyền

Khi góc θ trở nên rất nhỏ ($\theta \rightarrow 0$), ta có thể xấp xỉ $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ và $\dot{\theta}^2 \approx 0$. Do đó, ta có thể tuyến tính hóa hệ phương trình (7) như sau:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + B\dot{x} - m_2 L\ddot{\theta} &= F \\ m_2 L^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + m_2 L g \theta - m_2 L\ddot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Biến đổi Laplace hệ phương trình (8) với điều kiện đầu bằng không, ta có:

$$\begin{aligned} [(m_1 + m_2)s^2 + Bs]X(s) - m_2Ls^2\Theta(s) &= F(s) \\ -m_2Ls^2X(s) + (m_2L^2s^2 + bs + m_2Lg)\Theta(s) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Giải hệ phương trình (9) thu được các hàm truyền:

1. Thể hiện mối quan hệ giữa vị trí xe đẩy và lực đầu vào

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{m_2L^2s^2 + bs + m_2Lg}{m_1m_2L^2s^4 + [(m_1 + m_2)b + Bm_2L^2]s^3 + [(m_1 + m_2)m_2gL + Bb]s^2 + Bm_2gLs} \quad (10)$$

2. Thể hiện mối quan hệ giữa góc lắc và lực đầu vào

$$G_2(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{m_2Ls}{m_1m_2L^2s^3 + [(m_1 + m_2)b + Bm_2L^2]s^2 + [(m_1 + m_2)m_2gL + Bb]s + Bm_2gL} \quad (11)$$

2.3 Phương trình không gian trạng thái của hệ

Giải hệ phương trình (8) theo hai biến \ddot{x} và $\ddot{\theta}$, ta thu được:

$$\ddot{x} = -\frac{B\dot{x}}{m_1} - \frac{m_2g\theta}{m_1} - \frac{b\dot{\theta}}{m_1L} + \frac{F}{m_1} \quad (12)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{B\dot{x}}{m_1L} - \frac{(m_1 + m_2)g\theta}{m_1L} - \frac{(m_1 + m_2)b\dot{\theta}}{m_1m_2L^2} + \frac{F}{m_1L} \quad (13)$$

Chọn các biến $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ làm biến trạng thái. Kết hợp với hai phương trình (12) và (13), ta có phương trình trạng thái của hệ với đầu ra là x và θ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{m_1} & -\frac{m_2g}{m_1} & -\frac{b}{m_1L} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{m_1L} & -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1L} & -\frac{(m_1 + m_2)b}{m_1m_2L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{1}{m_1L} \end{bmatrix} F \quad (14)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

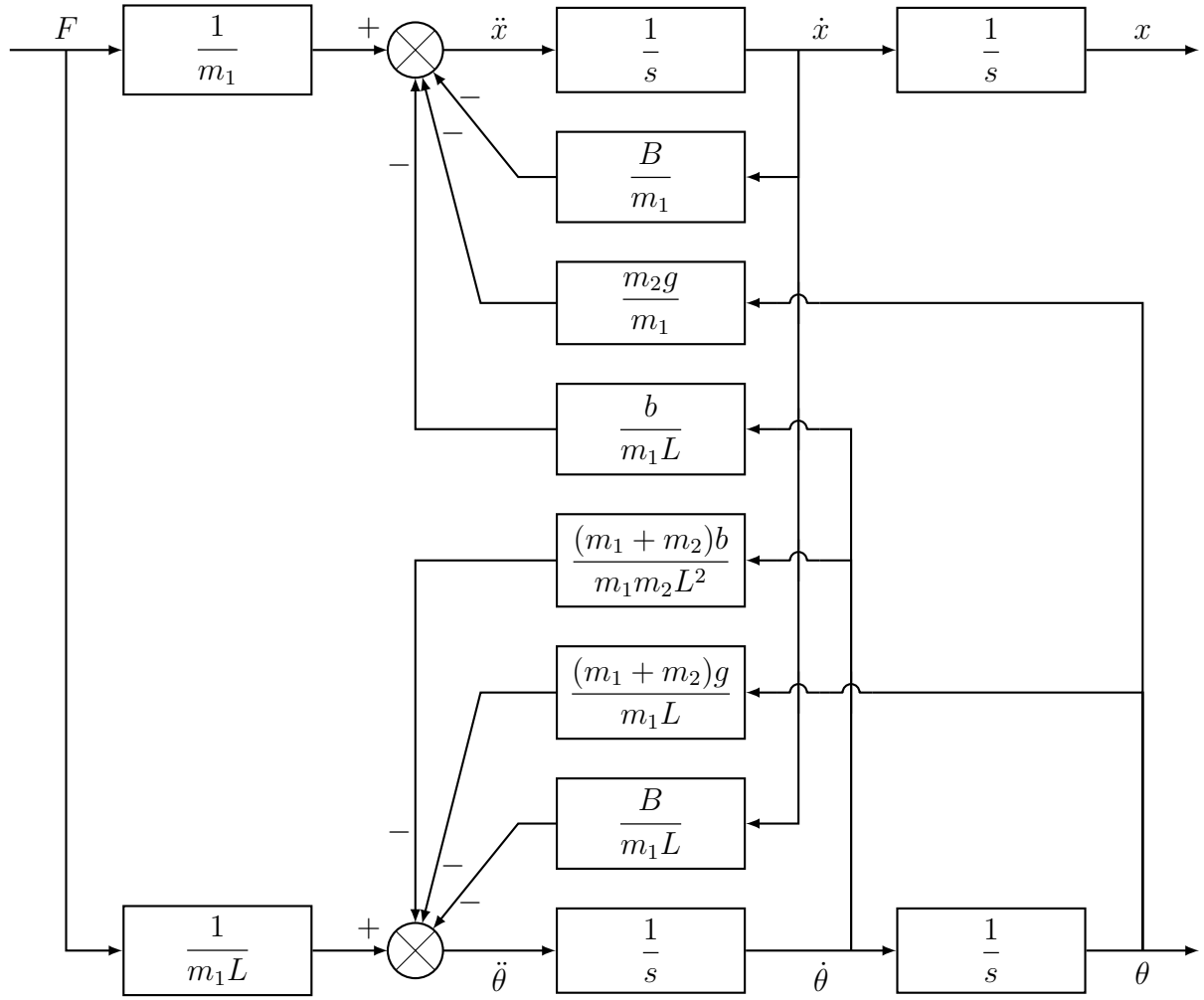
Hay viết lại dưới dạng ký hiệu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{BF} \quad (16)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (17)$$

2.4 Sơ đồ khối của không gian trạng thái

Từ hệ phương trình trạng thái (14) và (15), ta xây dựng được sơ đồ khối như sau:



Hình 5: Sơ đồ khối của hệ thống xe đẩy-con lắc

3 Phân tích hệ thống

Từ các thông số ở bảng 1, các ma trận của hệ thống (16) và (17) được xác định như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0873 & -2.453 & -0.9877 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.194 & -27.25 & -10.97 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5556 \\ 0 \\ 1.235 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Sử dụng hàm `ss2tf` trong MATLAB để chuyển đổi từ dạng không gian trạng thái sang dạng hàm truyền, thu được

$$G_1(s) = \frac{0.5556s^2 + 4.877s + 12.11}{s^4 + 11.06s^3 + 28.02s^2 + 1.903s} \quad (21)$$

$$G_2(s) = \frac{1.235s}{s^3 + 11.06s^2 + 28.02s + 1.903} \quad (22)$$

3.1 Yêu cầu đề bài

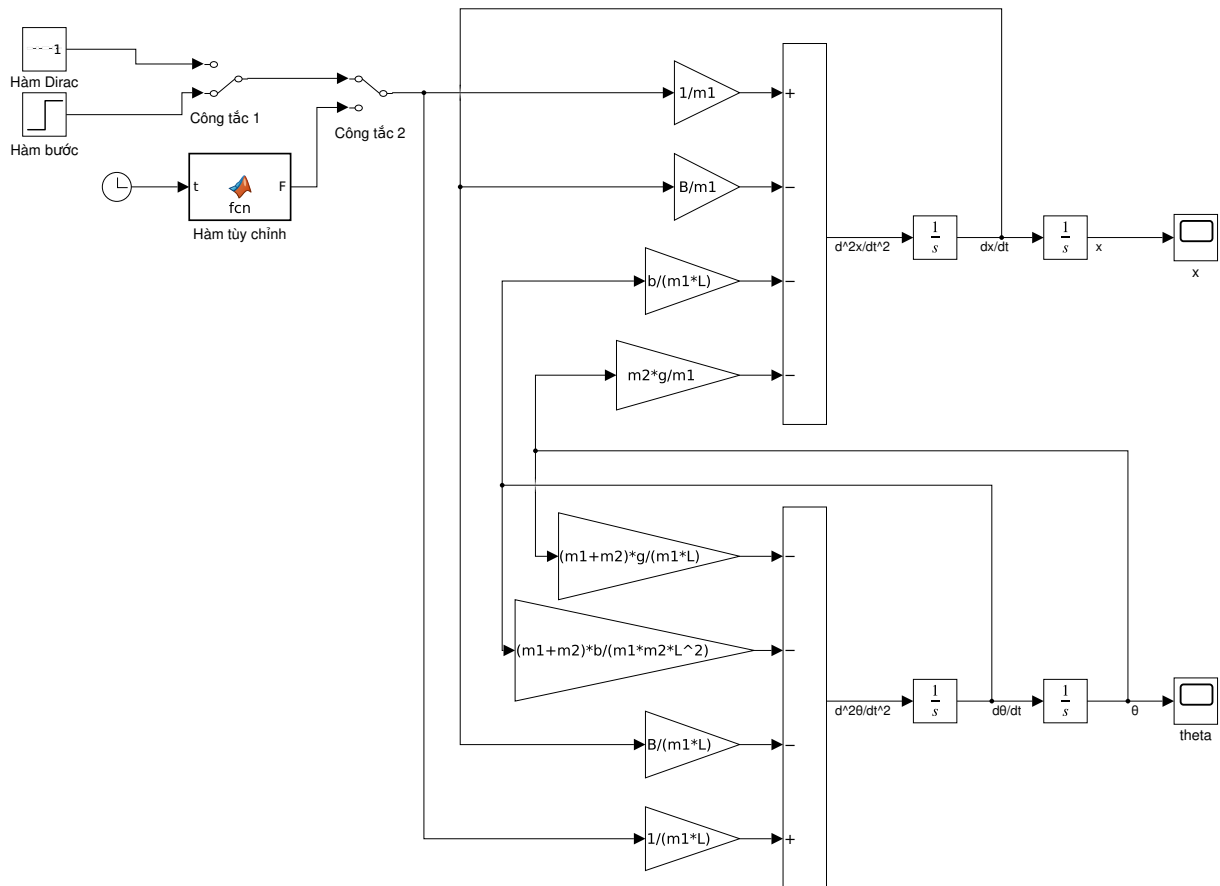
Mô phỏng đáp ứng hệ thống sử dụng mô hình sơ đồ khối trên MATLAB/Simulink. Phân tích và đánh giá đáp ứng hệ thống

1. Với đầu vào $F(t)$ là hàm xung Dirac (impulse).
2. Với đầu vào $F(t)$ là hàm nấc đơn vị (unit step).
3. Với đầu vào là như sau:

$$F(t) = \begin{cases} 10 \text{ N}, & 0 \leq t < 5 \text{ giây} \\ 0 \text{ N}, & t \geq 5 \text{ giây} \end{cases} \quad (23)$$

3.2 Sơ đồ MATLAB/Simulink

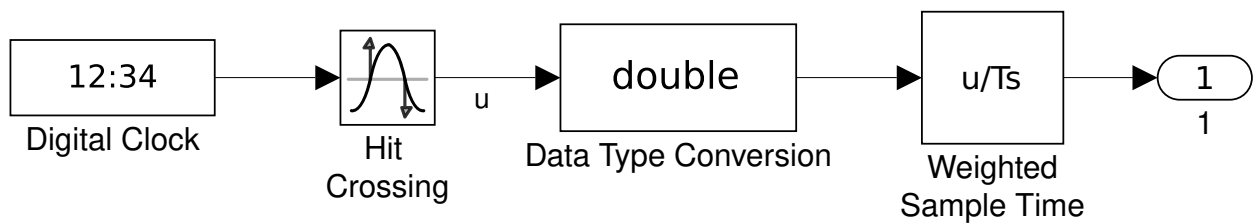
Dựa vào sơ đồ khối ở hình 5, ta xây dựng được sơ đồ MATLAB/Simulink được cho như hình dưới:



Hình 6: Sơ đồ MATLAB/Simulink để phân tích hệ thống

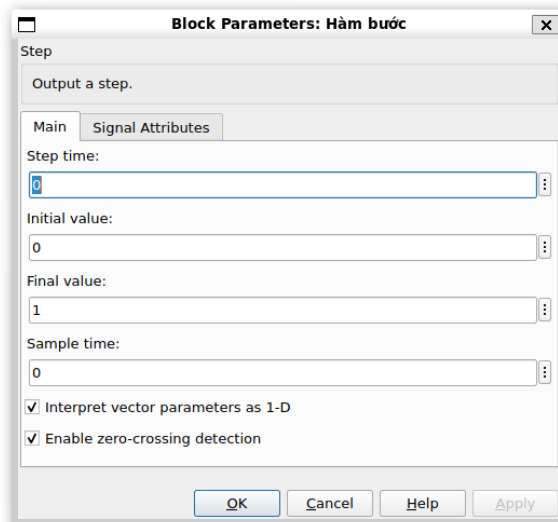
Trong sơ đồ MATLAB/Simulink hình 6, các hàm $F(t)$ đầu vào được khai báo như sau:

1. Hàm Dirac được khai báo bằng khối **Hàm Dirac**. Khối này là một hệ con (subsystem) được xây dựng dựa vào một bài viết của MATLAB [1].



Hình 7: Nội dung khối **Hàm Dirac**

2. Hàm nấc đơn vị, sử dụng khối **Step** được khai báo như hình dưới



Hình 8: Khai báo khối **Step** đối với hàm nấc đơn vị

3. Đối với hàm (23), ta xây dựng bằng hàm **MATLAB function** như sau:

Listing 1: Khai báo hàm (23)

```

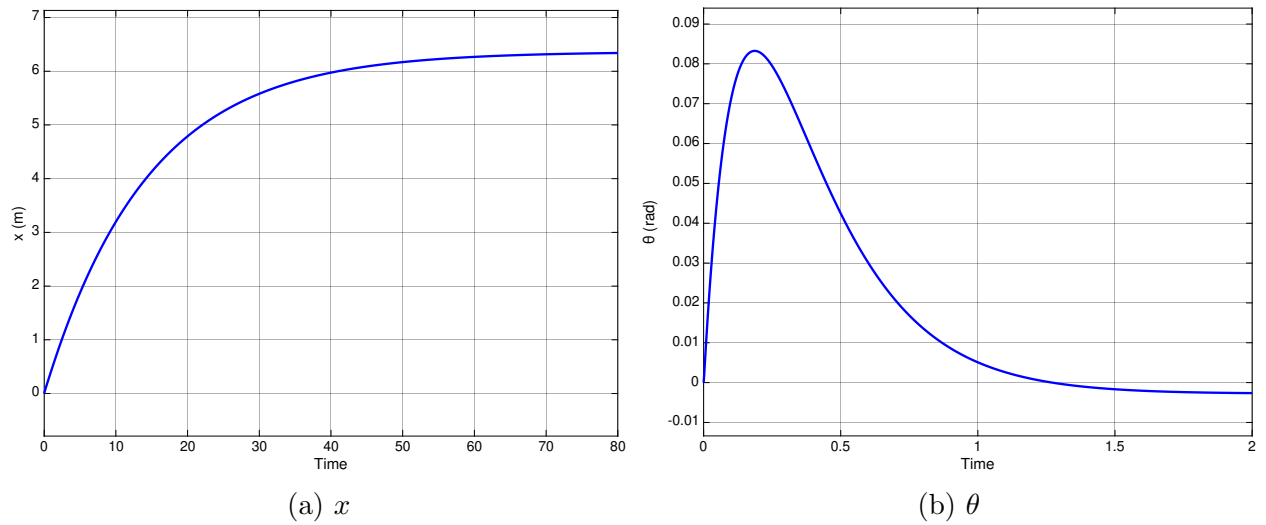
1 function F = fcn(t)
2     if t >= 0 && t <= 5
3         F = 10;
4     else
5         F = 0;
6     end
7 end
8

```

3.3 Phân tích và đánh giá kết quả mô phỏng

3.3.1 Đầu vào hàm Dirac

- Kết quả mô phỏng



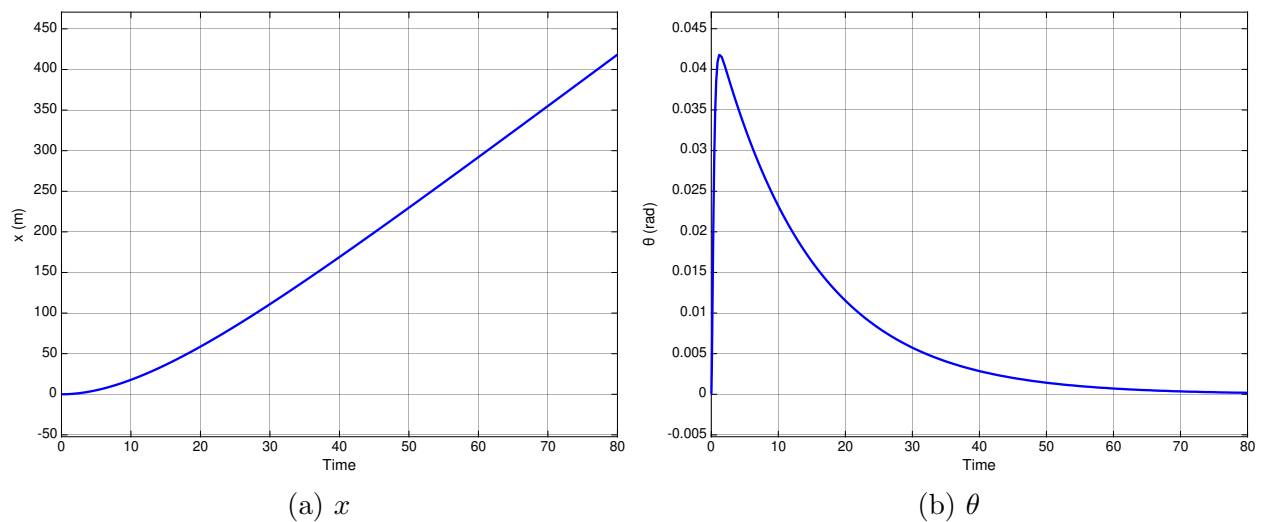
Hình 9: Kết quả mô phỏng với đầu vào là hàm Dirac

- Phân tích, nhận xét

—

3.3.2 Đầu vào hàm nấc đơn vị

- Kết quả mô phỏng



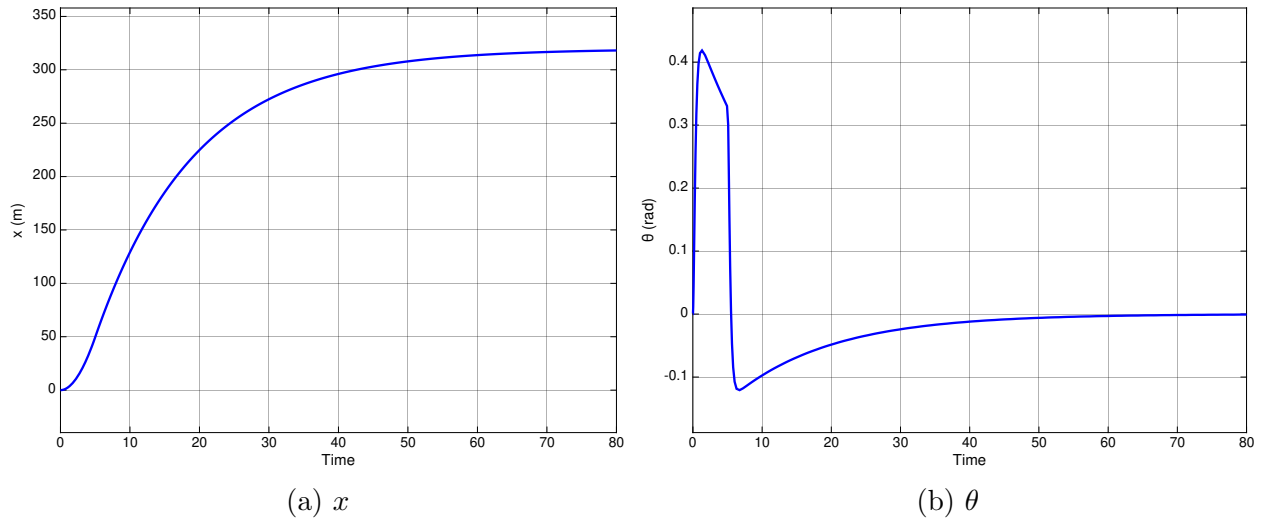
Hình 10: Kết quả mô phỏng với đầu vào là hàm nấc đơn vị

- Phân tích, nhận xét

—

3.3.3 Đầu vào hàm (23)

- Kết quả mô phỏng



Hình 11: Kết quả mô phỏng với đầu vào là hàm (23)

- Phân tích, nhận xét

—

4 Thiết kế hệ thống điều khiển

4.1 Thiết kế bộ điều khiển PID cho góc con lắc

4.1.1 Yêu cầu thiết kế

Đề bài

- Giữ cho con lắc ở vị trí thẳng đứng sau khi bị xô lệch.

Yêu cầu thiết kế

- Thời gian xác lập của góc lệch θ phải nhỏ hơn 5 giây.
- Góc lệch của con lắc không được vượt quá 0.05 radian so với vị trí thẳng đứng.

Phương pháp thực hiện

- Sử dụng phương pháp quỹ đạo nghiệm số để xác định các thông số của bộ điều khiển PID.
- Mô phỏng tác động của một xung đơn vị vào xe đẩy, sau đó quan sát quá trình con lắc quay trở lại vị trí thẳng đứng.
- Đưa ra nhận xét và đánh giá đáp ứng của góc lắc.

4.1.2 Thiết kế bộ điều khiển

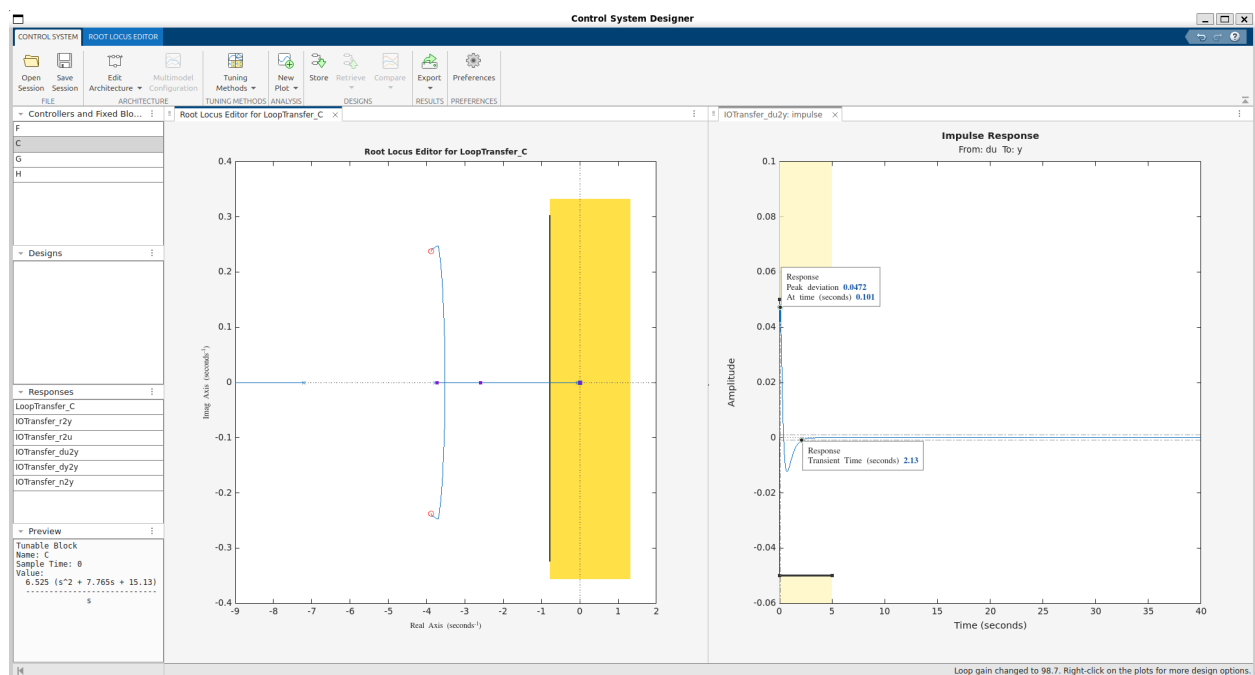
Sử dụng công cụ **Control System Designer** của MATLAB để thiết kế bộ điều khiển.

Listing 2: Thiết kế bộ điều khiển PID cho hàm truyền $G_2(s)$

```
1 controlSystemDesigner('rlocus', G2);
```

Do bộ điều khiển PID có một cực tại $s = 0$ và 2 zero nên trong cửa sổ **Control System Designer**, nhóm chọn 2 zero phức (complex zero).

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (24)$$



Hình 12: Thiết kế bộ điều khiển PID cho góc lắc θ con lắc

Vùng màu vàng trong **Root Locus Editor for LoopTransfer_C** và **Impulse Response** là các vùng mà không thỏa mãn yêu cầu đề bài. Bằng cách kéo thả cặp zero phức của bộ điều khiển và các cực của hệ kín (hình vuông màu tím) ở bên cửa sổ **Root Locus Editor for LoopTransfer_C** vào vùng màu trắng, nhóm tìm được hàm truyền của bộ điều khiển PID cho góc lắc θ của con lắc.

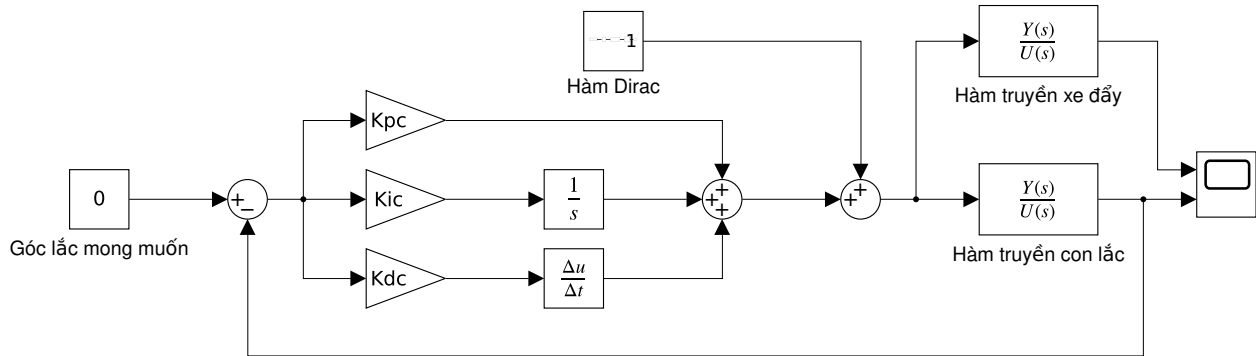
$$C_{\text{PID con lắc}} = \frac{6.525(s^2 + 7.765s + 15.13)}{s} \quad (25)$$

Các hệ số của bộ điều khiển PID con lắc là

- $K_p = 50.6646$.
- $K_i = 98.7160$.
- $K_d = 6.5250$.

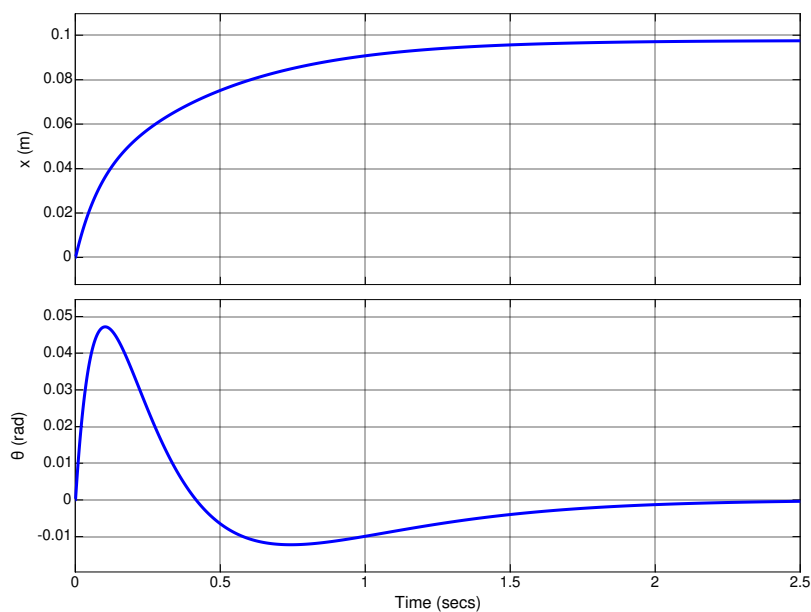
4.1.3 Mô phỏng bằng MATLAB/Simulink

Dưới đây là sơ đồ MATLAB/Simulink cho hệ thống điều khiển con lắc:



Hình 13: Sơ đồ MATLAB/Simulink cho hệ thống điều khiển con lắc

Kết quả mô phỏng bằng MATLAB/Simulink



Hình 14: Kết quả mô phỏng bằng MATLAB/Simulink cho hệ thống điều khiển con lắc

4.1.4 Đánh giá, nhận xét

4.2 Thiết kế bộ điều khiển PID cho vị trí xe đẩy

4.2.1 Yêu cầu thiết kế

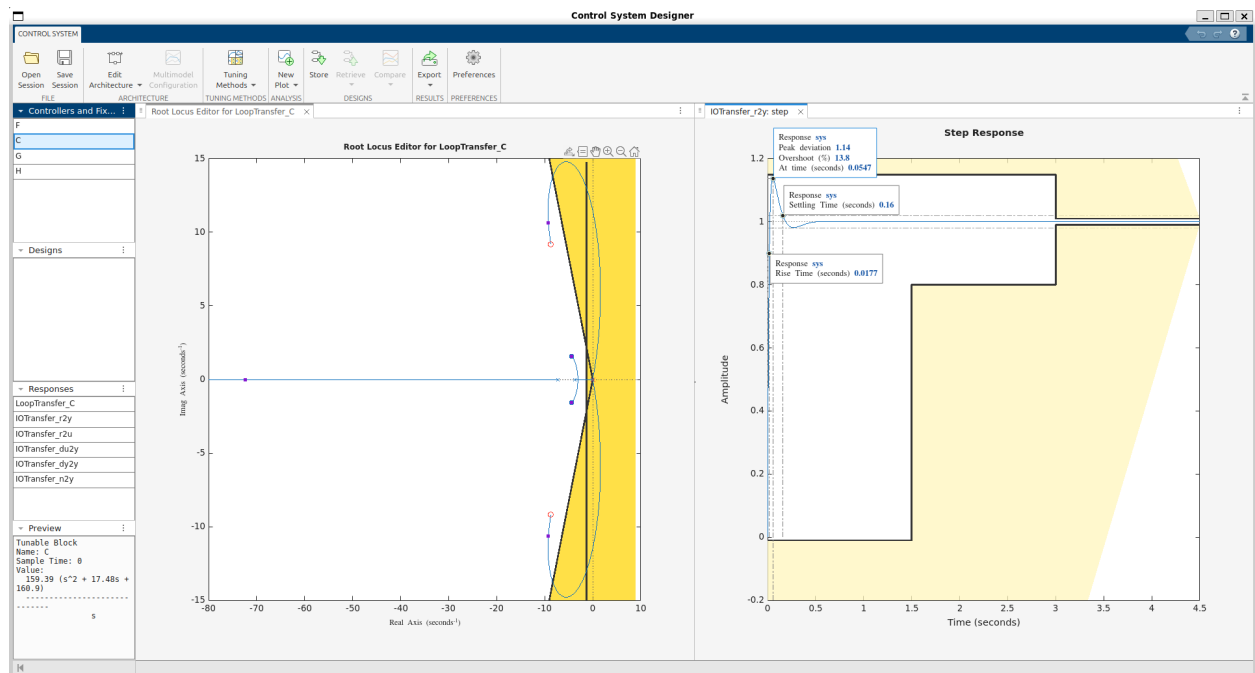
Đề bài	<ul style="list-style-type: none">Di chuyển xe đẩy đến vị trí mong muốn.
Yêu cầu thiết kế	<ul style="list-style-type: none">Thời gian xác lập cho x nhỏ hơn 3 giây.Độ vọt lố nhỏ 15%.
Phương pháp thực hiện	<ul style="list-style-type: none">Sử dụng phương pháp quỹ đạo nghiệm số để xác định thông số cho bộ điều khiển PID.Mô phỏng đáp ứng hệ thống với vị trí mong muốn $x_d = 0.5$ m.Nhận xét và đánh giá cả đáp ứng của góc lắc và vị trí xe đẩy.

4.2.2 Thiết kế bộ điều khiển

Sử dụng công cụ **Control System Designer** của MATLAB để thiết kế bộ điều khiển.

Listing 3: Thiết kế bộ điều khiển PID cho hàm truyền $G_2(s)$

```
1 controlSystemDesigner('rlocus', G1);
```



Hình 15: Thiết kế bộ điều khiển PID cho vị trí x xe đẩy

Vùng màu vàng trong **Root Locus Editor for LoopTransfer_C** và **Step Response** là các vùng mà không thỏa mãn yêu cầu đề bài. Bằng cách kéo thả cặp zero phức của bộ điều khiển và các cực của hệ kín (hình vuông màu tím) ở bên cửa sổ **Root Locus Editor for LoopTransfer_C** vào vùng màu trắng, nhóm tìm được hàm truyền của bộ điều khiển PID cho vị trí x xe đẩy.

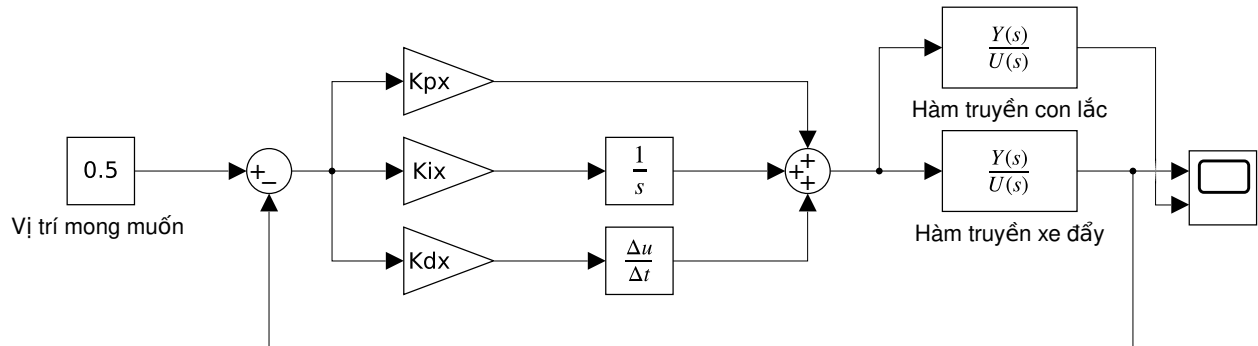
$$C_{\text{PID xe đẩy}} = \frac{159.4s^2 + 2786s + 2.564 \cdot 10^4}{s} \quad (26)$$

Các hệ số của bộ điều khiển PID xe đẩy là

- $K_p = 2786.3$.
- $K_i = 2.5638 \cdot 10^4$.
- $K_d = 159.3864$.

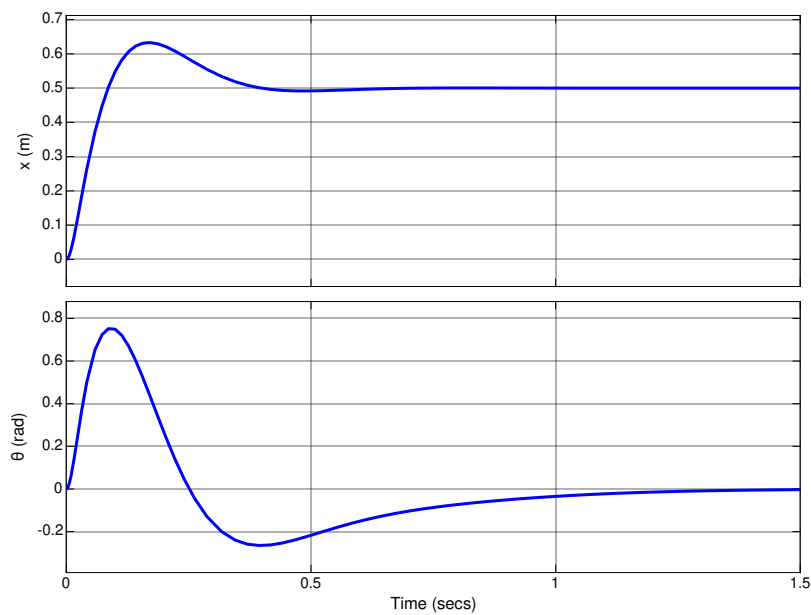
4.2.3 Mô phỏng bằng MATLAB/Simulink

Dưới đây là sơ đồ MATLAB/Simulink cho hệ thống điều khiển xe đẩy:



Hình 16: Sơ đồ MATLAB/Simulink cho hệ thống điều khiển xe đẩy

Kết quả mô phỏng bằng MATLAB/Simulink



Hình 17: Kết quả mô phỏng bằng MATLAB/Simulink cho hệ thống điều khiển xe đẩy

4.2.4 Đánh giá, nhận xét

4.3 Thiết kế bộ điều khiển không gian trạng thái

4.3.1 Yêu cầu thiết kế

Đề bài	<ul style="list-style-type: none">Điều khiển cả góc con lắc θ và vị trí xe đẩy x.
Yêu cầu thiết kế	<ul style="list-style-type: none">Thời gian xác lập cho x và θ nhỏ hơn 5 giây.Thời gian tăng cho x nhỏ hơn 0.5 giây.Độ vọt lố tối đa cho θ nhỏ hơn 0.35 radian (20°).Sai số xác lập nhỏ hơn 2% cho cả x và θ.
Phương pháp thực hiện	<ul style="list-style-type: none">Thiết kế bộ điều khiển không gian trạng thái theo phương pháp đặt cực để đạt được độ ổn định cho cả vị trí và góc.Đánh giá bộ điều khiển thông qua mô phỏng MATLAB/Simulink.

4.3.2 Thiết kế bộ điều khiển

4.3.2.1 Kiểm tra tính điều khiển được và quan sát được của hệ thống

Để có thể thiết kế bộ điều khiển không gian trạng thái, trước tiên ta cần kiểm tra tính điều khiển được và quan sát được của hệ thống. Sử dụng hàm `ctrb` và `obsv` trong MATLAB, ta kiểm tra tính điều khiển được và quan sát được của hệ thống.

Listing 4: Kiểm tra tính điều khiển được và quan sát được của hệ thống

```
1 rank(ctrb(sys.A, sys.B)), rank(obsv(sys.A, sys.C))
```

Hạng của hai ma trận này đều bằng 4, bằng với số các trạng thái của hệ thống, do đó hệ thống là điều khiển được và quan sát được.

4.3.2.2 Thiết kế bộ điều khiển không gian trạng thái

Nhóm đề xuất phương pháp thiết kế bộ điều khiển cho bài toán này như sau:

- Sử dụng bộ điều khiển tích phân để đảm bảo sai số xác lập nhỏ hơn 2% cho cả x và θ .
- Tìm cặp cực thống trị theo các yêu cầu thiết kế của vị trí xe đẩy x trước rồi chọn các cực khác xa trục ảo $j\omega$ ít nhất 5 lần so với cặp cực thống trị.
- Điều chỉnh vị trí của các cực khác cực thống trị để đảm bảo các yêu cầu thiết kế về thời gian xác lập và độ vọt lố cho góc lắc θ .

Đầu tiên, ta cần triển khai công thức bộ điều khiển tích phân để đảm bảo sai số xác lập nhỏ hơn 2% cho cả x và θ . Công thức của bộ điều khiển tích phân là:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_e \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (27)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad (28)$$

với $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_N \\ \theta_N \end{bmatrix}$ là các vector trạng thái được thêm vào, $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$ là vector hệ số của bộ điều khiển phản hồi, $\mathbf{K}_e = [k_{ex} \quad k_{e\theta}]$ là vector hệ số điều khiển sai số tích phân,

$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_d \\ \theta_d \end{bmatrix}$ là vector đầu vào mong muốn, \mathbf{I} là ma trận đơn vị và $\mathbf{0}$ là các ma trận không. Kích thước của các ma trận \mathbf{I} và $\mathbf{0}$ được ghi ở phía dưới bên phải từng ma trận.

Sử dụng phương pháp đặt cực, ta có các cực đã chọn trước đó là s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 và s_6 là nghiệm của đa thức

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)(s - s_6) = 0 \quad (29)$$

Đa thức đặc trưng của hệ (27) và (28) là

$$\det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_e \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (30)$$

Bằng cách so sánh các hệ số của đa thức (29) và (30), ta tìm được các hệ số của bộ điều khiển phản hồi \mathbf{K} và bộ điều khiển sai số tích phân \mathbf{K}_e . Ta sẽ thiết kế bộ điều khiển với đầu vào là

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_d \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Tiếp theo, ta tìm cặp cực thống trị cho hệ thống dựa theo các yêu cầu thiết kế của vị trí xe đẩy x . Các yêu cầu thiết kế này bao gồm thời gian xác lập $T_s \leq 5$ giây và thời gian tăng $T_r \leq 0.5$ giây.

$$T_s = \frac{4}{\omega_n \zeta} = 5 \text{ giây}$$

$$T_r = \frac{1.8}{\omega_n} = 0.5 \text{ giây}$$

Lưu ý, MATLAB định nghĩa thời gian tăng (rise time) là khoảng thời gian tăng từ 10% đến 90% từ giá trị ban đầu $c(0)$ đến giá trị cuối $c(\infty)$ [2] nên công thức xấp xỉ thời gian tăng được chọn như công thức trên [3].

Giải hệ trên, ta tìm được $\omega_n = 3.6 \text{ rad/s}$ và $\zeta = 0.5556$. Từ đó, ta tìm được cặp cực thống trị cho vị trí xe đẩy x là:

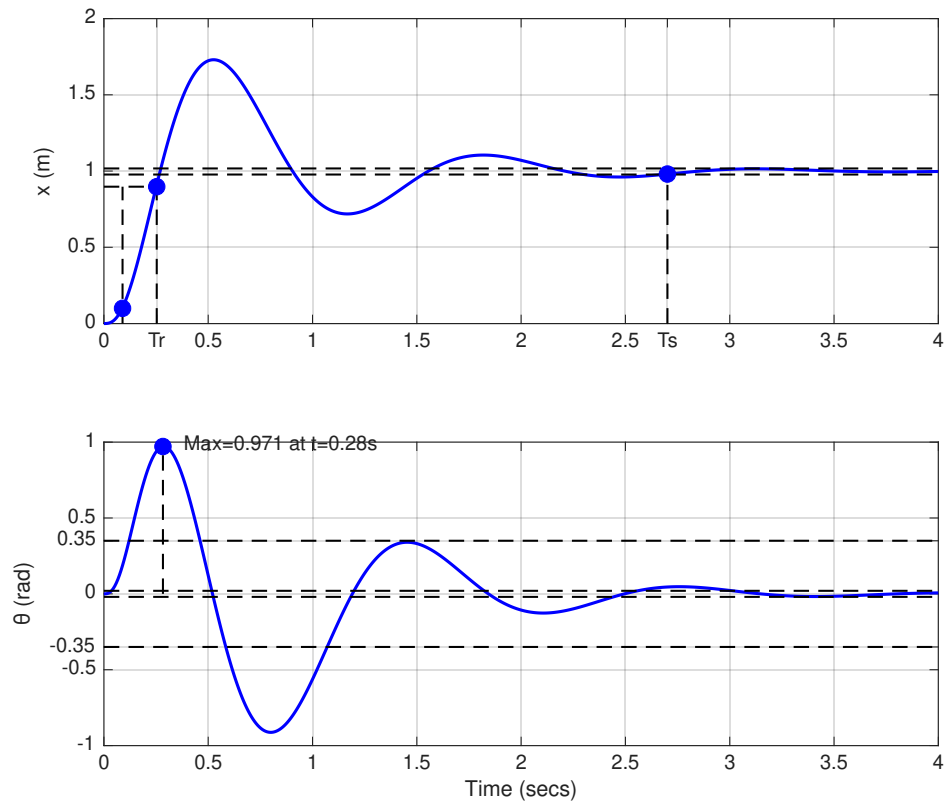
$$s_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -0.8 \pm j3.51$$

Đối với các cực khác, ta chọn các cực cách xa trục ảo $j\omega$ ít nhất 5 lần so với cặp cực thống trị. Do đó, ta chọn các cực thực là cực bội bốn cách trục ảo $j\omega$ 10 lần:

$$s_{3,4,5,6} = -8 + j0$$

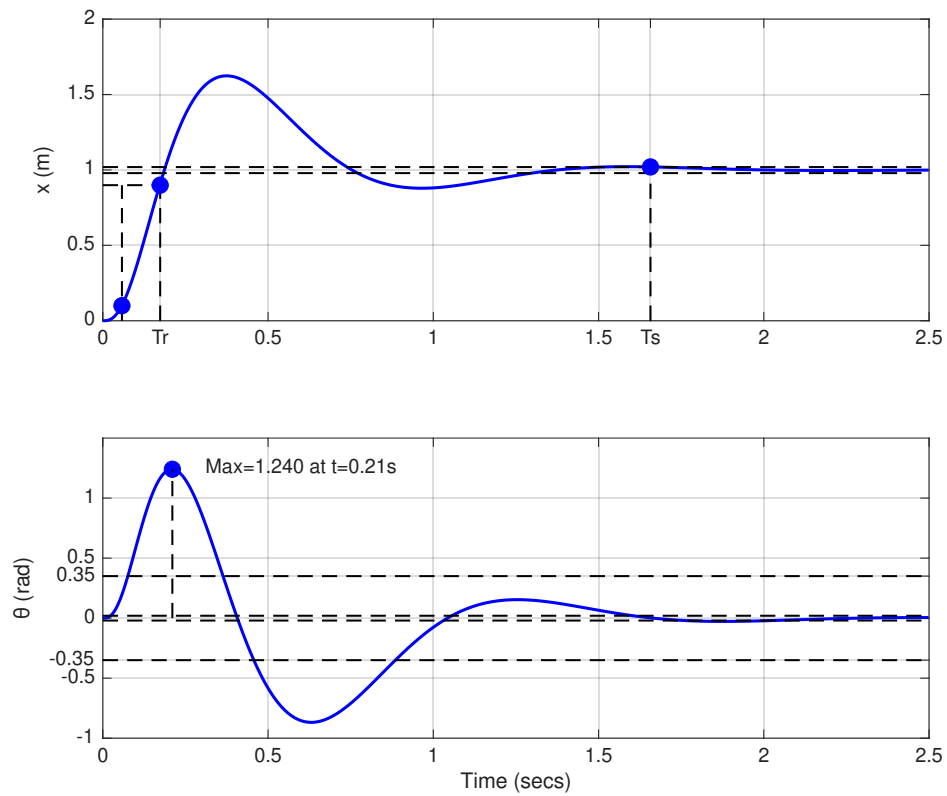
Với các cực $s_{3,4,5,6} = -8 + j0$, đáp ứng của hệ thống như sau:

- Thời gian xác lập của x là $T_s = 2.701 < 5$ giây (thỏa mãn).
- Thời gian tăng của x là $T_r = 0.164 < 0.5$ giây (thỏa mãn).
- Đỉnh của θ là $\theta_{\max} = 0.971 > 0.35 \text{ rad}$ (không thỏa mãn).



Hình 18: Đáp ứng của hệ thống với các cực $s_{3,4,5,6} = -8 + j0$

Tiếp tục cho các các cực $s_{3,4,5,6} = -12 + j0$ (xa trục ảo $j\omega$ gấp 15 lần cặp cực thốn trị), đáp ứng của hệ thống như sau:



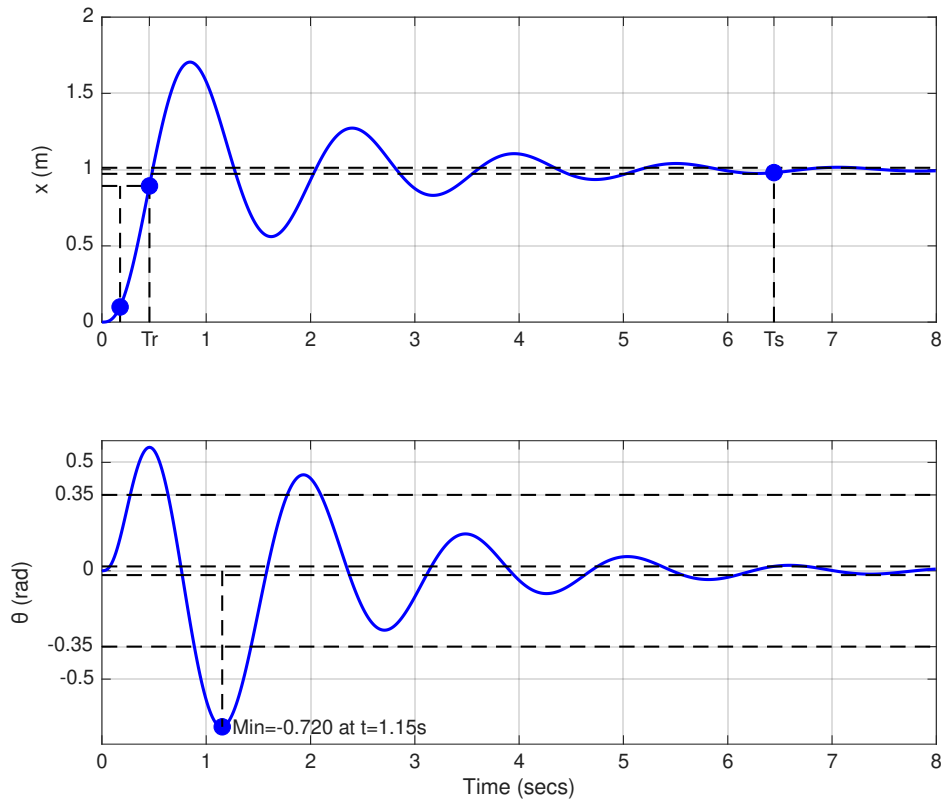
Hình 19: Đáp ứng của hệ thống với các cực $s_{3,4,5,6} = -12 + j0$

- Thời gian xác lập của x là $T_s = 1.657 < 5$ giây (thỏa mãn).
- Thời gian tăng của x là $T_r = 0.115 < 0.5$ giây (thỏa mãn).
- Đỉnh của θ là $\theta_{\max} = 1.24 > 0.35$ rad (không thỏa mãn).

Nhận xét: Ta thấy khi các cực $s_{3,4,5,6}$ càng xa trục ảo $j\omega$ thì đáp ứng của của vị trí xe đẩy x càng nhanh hơn (thỏa mãn các yêu cầu đề bài) nhưng giá trị góc lắc tối đa θ_{\max} cũng tăng lớn hơn yêu cầu đề bài cho ($\theta_{\max} \leq 0.35$). Do đó, ở bước tiếp theo, các cực $s_{3,4,5,6}$ sẽ được thu ngắn khoảng cách với trục ảo $j\omega$ để đảm bảo đáp ứng của góc lắc.

Lần lượt, ta thử với $s_{3,4,5,6} = -4 + j0$ (cách trục ảo $j\omega$ 5 lần so với cặp cực thống trị) và $s_{3,4,5,6} = -0.8 + j0$ (bằng khoảng cách tới trục ảo $j\omega$ của cặp cực thống trị).

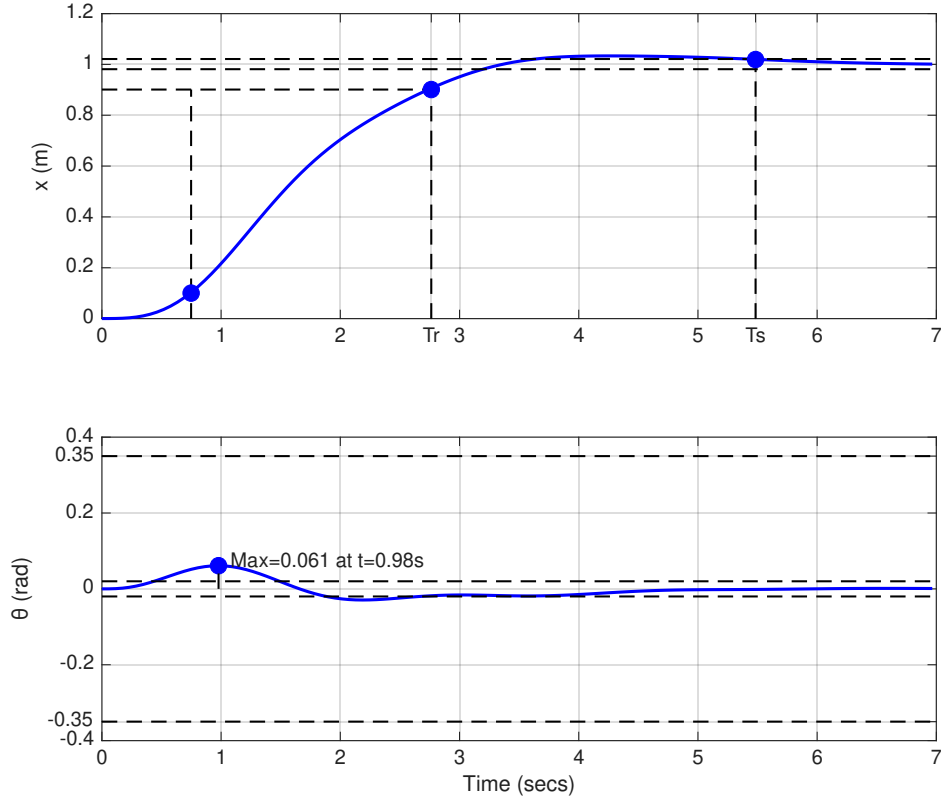
Với $s_{3,4,5,6} = -4 + j0$, đáp ứng của hệ thống như sau:



Hình 20: Đáp ứng của hệ thống với các cực $s_{3,4,5,6} = -4 + j0$

- Thời gian xác lập của x là $T_s = 6.443 > 5$ giây (không thỏa mãn).
- Thời gian tăng của x là $T_r = 0.284 < 0.5$ giây (thỏa mãn).
- Đỉnh của θ là $\theta_{\max} = 0.720 > 0.35$ rad (không thỏa mãn).

Với $s_{3,4,5,6} = -0.8 + j0$, đáp ứng của hệ thống như sau:



Hình 21: Đáp ứng của hệ thống với các cực $s_{3,4,5,6} = -0.8 + j0$

- Thời gian xác lập của x là $T_s = 5.483 > 5$ giây (không thỏa mãn).
- Thời gian tăng của x là $T_r = 1.993 > 0.5$ giây (không thỏa mãn).
- Đỉnh của θ là $\theta_{\max} = 0.061 < 0.35$ rad (thỏa mãn).

Nhận xét: Ta thấy rằng khi các cực $s_{3,4,5,6}$ gần trục ảo $j\omega$ thì đáp ứng của vị trí xe đẩy x chậm hơn (không thỏa mãn các yêu cầu đề bài) nhưng giá trị θ_{\max} sẽ giảm dần và thỏa mãn yêu cầu $\theta_{\max} < 0.35$. Do đó, để thỏa mãn các yêu cầu thiết kế, nhóm quyết định chọn các cực $s_{3,4} = -0.8 + j0$ (cách trục ảo $j\omega$ 1 lần so với cặp cực thống trị) và $s_{5,6} = -12 + j0$ (cách trục ảo $j\omega$ 12 lần so với cặp cực thống trị).

Cuối cùng, ta sẽ chọn các cực như sau cho bộ điều khiển không gian trạng thái:

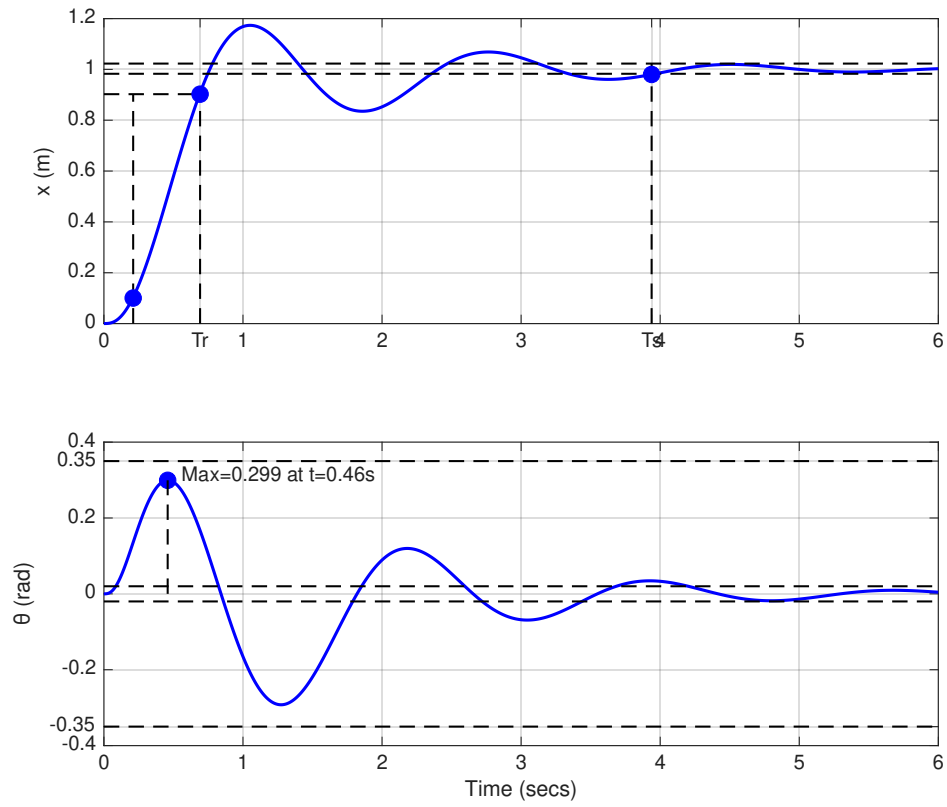
$$s_{1,2} = -0.8 \pm j3.51$$

$$s_{3,4} = -0.8 + j0$$

$$s_{5,6} = -12 + j0$$

Đáp ứng của hệ thống với các cực này như sau:

- Thời gian xác lập của x là $T_s = 3.938 < 5$ giây (thỏa mãn).
- Thời gian tăng của x là $T_r = 0.48 < 0.5$ giây (thỏa mãn).
- Đỉnh của θ là $\theta_{\max} = 0.299 < 0.35$ rad (thỏa mãn).



Hình 22: Đáp ứng của hệ thống với các cực $s_{3,4} = -0.8 + j0$ và $s_{5,6} = -12 + j0$

Ta thấy, các yêu cầu thiết kế đều được thỏa mãn với cặp cực đã chọn. Do đó, ta có thể xác định được các hệ số của bộ điều khiển không gian trạng thái \mathbf{K} và \mathbf{K}_e .

$$\mathbf{K} = [125.1355 \quad 8.6949 \quad 78.5829 \quad 9.1597]$$

$$\mathbf{K}_e = [275.1610 \quad 0]$$

Nhận xét:

Tài liệu

- [1] MathWorks. *MATLAB Documentation*. MathWorks Inc., 2024. Đã truy cập: 2025-08-17. URL: <https://blogs.mathworks.com/simulink/2024/08/23/how-can-i-create-an-impulse-delta-signal-in-simulink/>.
- [2] MathWorks. *stepinfo - Rise time, settling time, and other step-response characteristics*. MathWorks Inc., 2025. Đã truy cập: 2025-08-17. URL: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/dynamicsystem.stepinfo.html>.
- [3] Shreyas Sundaram. Ece 380: Control systems, course notes, 2014. Đã truy cập: 2025-08-17. URL: https://engineering.purdue.edu/~sundara2/misc/ece380_notes.pdf.