Rekursion

Sidst ændret: 07/19/2018 14:11:07

Opgaver

Rekursion er et ord der kan få det til at løbe koldt ned af ryggen på de fleste begyndere inden for programmering, men når man først mestrer rekursionens enkelthed og styrke, vil man aldrig ønske at undvære den igen.

Nedbrydning

Lad os som udgangspunkt se på en af de vigtigste teknikker i algoritmekonstruktion, nemlig nedbrydning. Algoritmisk set tager man et problem, deler det i mindre dele og nedbryder dem igen, indtil problemet umiddelbart kan løses af den der skal gøre det, f.eks. en computer. Når vi nedbryder, søger vi ofte at dele problemet i to nogenlunde lige store dele. Dermed opnår vi nemlig, at vi ikke skal fortsætte nedbrydningen i så lang tid; vores dele bliver hurtigere mindre.

Samme slags problem

Hvad hvis vi gik i den helt anden grøft, og nedbrød ved kun at løse en så simpel del af problemet, at det umiddelbart kunne løses af den der skal udføre det? I den situation vil det resterende problem kun være blevet lidt mindre. En sådan fremgangsmåde vil kun være interessant hvis vi derved kom til at stå med et lidt mindre problem der var at samme slags som det vi først havde - men altså lidt mindre!

Hvis man gjorde selve den proces vi udførte ved at nedbryde, til en del at algoritmen; havde vi dermed lavet en algoritme der kunne løse det samlede problem. Når computeren kommer og beder om nye instrukser, kan vi sige: "Gør det samme som før: tage en lille del fra, som du kan løse, og lad resten være". Når den så kommer med det endnu mindre problem vil den få samme besked, indtil den kommer med et problem der er så lille at den umiddelbart kan løse det.

Rekursion vs. Iteration

Tanken kunne her godt falde på iteration, gentagelse. Rekursion og iteration er på sin vis også to konkurrerende begreber i programmering, man kan lave rekursion om til iteration. Hvilken løsning man vælger er et praktisk spørgsmål. I en konkret situation kan den ene løsning være besværlig at konstruere, mens den anden er ligetil.

Rekursion er nok det mest specielle algoritmiske begreb der findes. Der er nogle der mener det er overflødigt, der er andre der mener det er evig saliggørende. Der er dem der mener det er svært, der er igen andre der mener det er let. En ting er de fleste dog enige om: Det er interessant!

Rekursion er når man kalder sig selv

Rekursion er når en metode kalder sig selv. Man taler om at "metoden er rekursiv". Man kan også sige at en definition er rekursiv; hvis den definerer noget ved sig selv. Som vi senere skal se er der ofte en tæt sammenhæng mellem en rekursiv definition og en rekursiv metode.

1. Ikast Svømmehal

Rekursion er grundlæggende et meget abstrakt begreb. Når man derfor skal illustrere hvor det kan anvendes uden at det bliver for kompliceret fra starten, må man vælge eksempler, der ofte virker som taget ud af en absurd virkelighed, og eksemplet med Ikast svømmehal er ingen undtagelse.

Er der nogen røde bolde?

Af uransagelige grunde har man tømt bassinet for vand og i stedet fyldt det med bordtennisbolde. Alle bordtennisboldene er hvide, men i nattens løb har der været ubudne gæster. Man kan derfor ikke længere med sikkerhed sige at bassinet kun indeholder hvide bolde, da man på den ubudne gæsts bopæl fandt op til flere røde bolde. Om han har nået at smide nogle røde bolde i bassinet, før han blev pågrebet vides ikke. Hvordan skal man undersøge om alle boldene er hvide? Man kunne skue ud over bassinet, mens andre rørte rundt i det, og håbe at eventuelle røde bolde ville vise sig. Ikke nogen sikker metode! Da vi arbejder med computere og alt dette vrøvl til slut ender som kode, kan vi se bort fra hvor lang tid vores algoritme vil tage, når den udføres *manuelt*. Vi kunne derfor løse problemet ved at tage en bold op af gangen, undersøge den, lægge den til side, tage en bold op af bassinet osv. indtil der ikke var flere bolde i bassinet.

Den måde vi løser problemet på er nedbrydning. Der er dog en "ny ting" der er værd at bemærke. Hver gang vi løser en del af problemet har vi en del tilbage, der er af nøjagtig samme slags som det vi startede med, men det er blevet "mindre". Vi kan altså ved en gentagelse arbejde os ind på problemet og til sidst løse det. En metode man kunne kalde salami-metoden.

Vi kan løseligt beskrive vores algoritme rekursivt ved:

Pseudo 1:
Check af bassin

```
static void checkBassin( Bassin b ) {
  checkEnBold( b );
  if ( !tom( b ) )
    checkBassin( b );
}
```

Uafhængige metode-kopier

Man observerer at **`checkBassin()`** kaldes rekursivt, den kalder sig selv! Det ser på denne måde ud som en løkke, hvor kaldet er et slags spring tilbage. Sådan skal det kun i *meget ringe grad* forstås. Når metoden kaldes rekursivt er det ikke den samme metode der køres igen, det er helt igennem en kopi! Hvis den havde haft nogen lokale variable ville de, selvom de havde samme navn som de andre kopier af **`checkBassin()`** være 100% uafhængige af hinanden. Når **`checkBassin()`** bruger dem, vil det ingen betydning have for de "samme" lokale variable som de andre kopier har.

Begrebet rekursion stammer i første række fra matematisk rekursive definitioner, og de mest simple eksempler på rekusion er da også matematiske.

2. Matematiske eksempler

2.1 Fakultet

Fakultet funktionen N! beregnes ved at gange N med N-1, N-2, osv. ned til 1. Lad os se et eksempel med 5!

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = \underline{120}$$

Man ganger altså elementerne i en talrække for at få resultatet.

Hvis man indsætter en parantes i beregningen af 5! vil man se at det kan skrives som 5 gange 4!

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5 * (4 * 3 * 2 * 1) = 5 * 4!$$

idet $4! = 4 * 3 * 2 * 1$

Hvad kan man så bruge det til?

Man kan på den måde definere fakultet rekursivt:

$$N! = N * (N-1)!$$

som man ser, optræder ! nu på begge sider.

Rekusions-skridt

Nu kunne man måske mene at det var lidt ubehjælpsomt at definere noget ved hjælp af sig selv. For hvor langt er man egentlig kommet ved det? Det er rigtigt at en definition, der på denne måde bider sig selv i halen, er i fare for ikke at være noget bevendt. Vi ønskede at vide hvad fakultet var, og definitionen siger umiddelbart blot at fakultet er fakultet! Der er dog et lille men, og det ligger i at vi faktisk kommer ud af stedet. Det skyldes at det tal vi nu skal tage fakultet af (N-1) er mindre end det oprindelige tal N. På den måde arbejder vi os nedad mod 1, hvor vi stopper. De skridt vi tager nedad mod 1, kaldes generelt for *rekursions-skridt*.

Rekursions-basis

Den rolle 1 spiller i forbindelse med beregning af fakultet, at den er en slags stopklods, har også en særlig betegnelse: *Rekusions-basis,* eller i daglig tale: *basis*. Uden en basis vil rekursionen aldrig stoppe, og man ville derfor opleve et fænomen ækvivalent med uendelige løkker.

Man samler rekursionsskridt og basis i det der bliver den endelige rekursive definition af fakultet:

$$N! = N * (N-1)!$$

$$0! = 1$$

Det bemærkes at denne basis bevirker, at man kommer til at gange 1 med sig selv. Ikke specielt effektivt, men vi vil dog alligevel holde os til den matematiske definition i det følgende:

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 1 = \underline{120}$$

Funktionelt orienteret notation

Det var så den matematisk rekursive definition; hvad med en rekursiv metode? Den rekursive metode er i virkeligheden meget mekanisk at lave ud fra den matematiske. Vi indfører i første omgang en funktionelt orienteret notation og kalder N! for fak(N):

fak(N) = N * fak(N-1)

fak(0) = 1

Dernæst observerer vi at der er tale om selektion mht. hvilken af de to del-definitioner vi skal bruge. Er N = 0 skal vi bruge den nederste, ellers den øverste. Vores første udkast til en metode vil derfor være:

Pseudo 2:
Fakultet

```
static int fak( int n ) {
// PRE: n >= 0

  if ( n == 0 )
    // 0! = 1
  else
    // N! = N * fak( N-1 )
}
```

Her er definitionerne indsat i if-sætningen. Den endelige metode er triviel at færdiggøre:

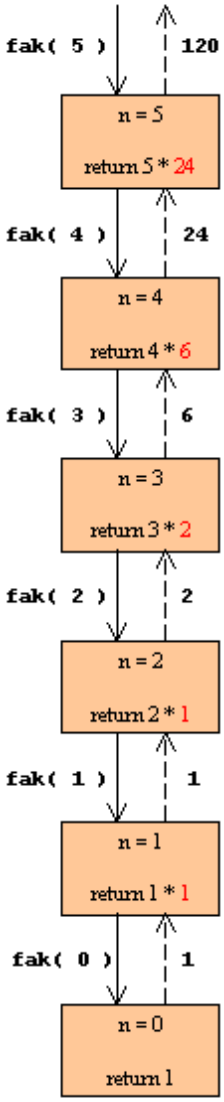
Source 1:
Rekursiv: Fakultet

```
static int fak( int n ) {
// PRE: n >= 0

  if ( n == 0 )
    return 1;
  else
    return n * fak( n-1 );
}
```

Når man præcist vil forstå hvordan rekusionen virker, kan man lave et diagram der beskriver forløbet for et kald, med aktuelle parametre. Hvis vi f.eks. ser på et kald med `5`, vil vi få følgende rekursive forløb:

Figur 1:
Forløbet af de rekursive kald



Hvert felt repræsenterer en metode-kopi. Disse kopier er, som alle metode-kopier, uafhængige af hinanden idet deres parametre n er lokale i hver metode-kopi; hvor de intet kender til hinandens eksistens.

Det første kald **`fak( 5 )`** kommer ind fra oven, og **`n`** får værdien **`5`**. Da **`n`** ikke er **`0`** kaldes der videre med **`n-1`**, som er **`4`**, altså **`fak( 4 )`**.

Sådan forløber det nedad, indtil vil kalder med **`0`**. Ved **`fak( 0 )`** er **`n`** netop **`0`** og der returneres **`1`**. Returpilene er stiplede, og man ser hvorledes delresultaterne returneres op igennem metode-kopierne og løbende sammenregnes til det endelige resultat: **`120`**.

Bemærk at hver gang der returneres, slettes metode-kopien der returnerer. Dvs. når en stiplet pil effektueres forsvinder feltet nedenunder.

Bemærk ligeledes at vi, når vi returnerer **`120`**, ikke ved hvad der sker med denne værdi. Den der oprindelig kaldte med **`fak( 5 )`** kunne f.eks. også være en metode-kopi af **`fak`**, der selv var blevet kaldt med den aktuelle parameter **`6`**.

Det var så en rekusiv metode, men er det noget bevendt at lave en rekursiv frem for en iterativ løsning? Lad os betragte en iterativ metode, der ligeledes beregner fakultet:

Source 2:
Iterativ: Fakultet

```
static int fak( int n ) {
// PRE: n >= 0

  int fakultet = 1;

  for ( int faktor=n; faktor>0; faktor-- )
    fakultet *= faktor;

  return fakultet;
}
```

Ikke den store forskel

Man ser her at den iterative metode kræver en lokal variabel, samt at vi ikke længere kan returnere direkte i beregningsudtrykket fordi det gentages. Når man skal illustrere fordelen ved rekusion, gør man det ved at sammenligne en rekursiv med en iterativ løsning, men i tilfældet med fakultet er der ikke rigtig nogen gevinst. Grunden til at de to metoder ser nogenlunde lige bekvemme ud, skal findes i den meget nære sammenhæng der er mellem de talværdier vi arbejder med, og dem en for-løkke naturligt vil gennemløbe.

2.2 Fibonacci

Fibonacci talrækken:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

er klassisk i rekursiv sammenhæng.

Leonardi Pisano

Leonardo Pisano (kaldet Fibonacci: "søn af Bonacci") var den nok største europæiske matematiker i middelalderen. Han studerede bla. al-Khwarizmi's værker (hr. Algoritme fra kapitlet om algoritmer). Talrækken der er opkaldt efter ham, stammer fra et populotions problem har opstillede: "Hvor mange kaninpar bliver det til i løbet af et år; hvis man starter med ét kaninpar. Når der gælder at et kaninpar føder endnu et kaninpar hver måned og det ligeledes tager en måned for at kaninpar at blive kønsmodent". Vi skal ikke her fordybe os i problemet, men blot notere os den historiske sammenhæng.

Eftersom der er tale om en talrække og ikke nogen sammenregning af tallene, er det et spørgsmål om hvilket tal der skal stå på en given position. Sammenhængen er rekursiv, idet ethvert tal i talrækken er lig summen af de to foregående. *Dette er rekursionsskridtet*.

For de to første tals vedkommende findes der naturligvis ikke to foregående tal. 0 og 1 er derfor givet pr. definition. *De er basis*.

Vi fastlægger dernæst at det første tal er det 0'te fibonacci-tal, det andet er det 1'te fibonacci-tal osv. Vi indfører den notation at F_n er det n'te fibonacci-tal.

Efter nu at have fastlagt notationen, kan vi formulere den rekursive definition på fibonacci talrækken:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_0 = 0 \text{ og } F_1 = 1$$

Dernæst skal vi formulere definitionen funktions-orienteret:

fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)

fib(0) = 0 og fib(1) = 1

Og kan endelig lave omformningen til rekursiv metode:

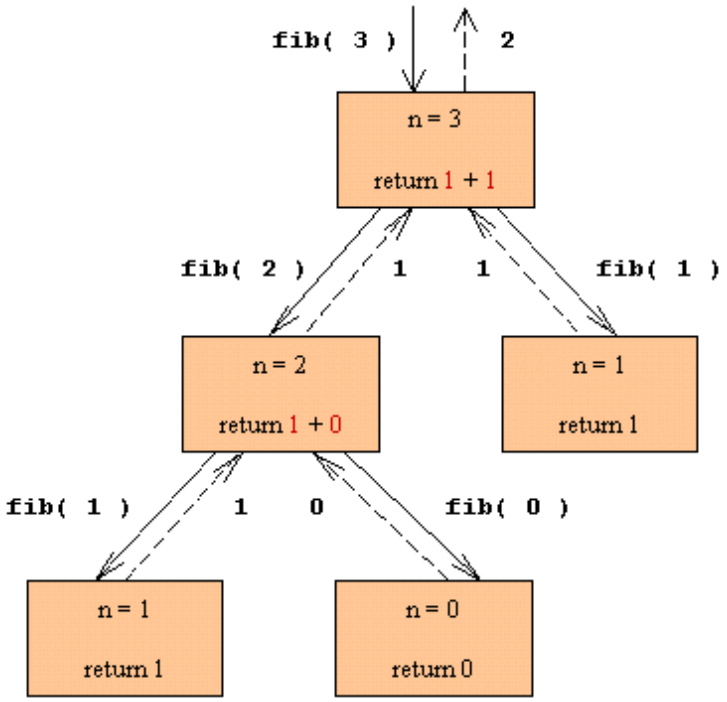
Source 3:
Rekursiv: Fibonacci

```
static int fib( int n ) {
// PRE: n >= 0

  if ( n < 2 )
    return n;
  else
    return fib( n-1 ) + fib( n-2 );
}
```

Her foretages der to rekursive kald hver gang metoden endnu ikke har nået basis. Derfor får diagrammet, der viser forløbet ved de rekusive kald, en anden struktur. Lad os se det med et kald: **`fib( 3 )`**:

Figur 2:
Forløbet af de rekursive kald



Der er nu to metode-kopier under hver af dem, pånær dem der har nået basis. I diagrammet er det altid den venstre der kaldes først. Det betyder i vores eksempel, at kaldet **`fib( 1 )`** længst til højre er det sidste der bliver udført.

Først kommer **`fib( 3 )`** ind fra oven. Det resulterer først i et kald til venstre **`fib( 2 )`**. Dernæst kaldet **`fib( 1 )`** ned til venstre efterfulgt af **`fib( 0 )`** til højre. Der returneres videre op til den øverste metode-kopi, der afslutter med kaldet **`fib( 1 )`** yderst til højre.

Spild af

Man bemærker at kaldet **`fib( 1 )`** foretages to forskellige steder (der naturligvis intet kender til hinanden, og de to metode-kopier eksisterer forøvrigt heller ikke på

metode-kald

samme tid). Det er på sin vis spild at det skal gøres to gange. Hvis man gjorde eksemplet større, f.eks. **`fib( 20 )`**, ville det være endnu mere graverende. Vi vil i opgaverne studere dette fænomen nærmere.

Lad os se en iterativ metode, der finder det n'te fibonacci-tal:

Source 4: *Iterativ: Fibonacci*

```
static int fib( int n ) {
// PRE: n >= 0

  if ( n < 2 )
    return n;
  else {
    int fib2=0;
    int fib1=1;

    for ( int i=1; i<n ; i++ ) {
      tmp = fib1;
      fib1 = fib1 + fib2;
      fib2 = tmp;
    }

    return fib1;
  }
}
```

`fib1` er F_{n-1}, mens **`fib2`** er F_{n-2}.

Her synes den iterative løsning mere utilgængelig end den enkle rekursive.

Ny basis

Det skal dog retfærdigvis siges at man kan optimere den iterative løsning lidt. Man kan nemlig foretage en udvidelse af fibonacci-tallene så også det 0'te og det 1'te kan beregnes. Det gøres ved at starte med 1 og 0 som en slags intern forskudt basis:

1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Den optimerede metode bliver:

Source 5: *Optimeret iterativ: Fibonacci*

```
static int fib( int n ) {
// PRE: n >= 0

  int fib2=1;
  int fib1=0;

  for ( int i=0; i<n ; i++ ) {
    tmp = fib1;
    fib1 = fib1 + fib2;
    fib2 = tmp;
  }

  return fib1;
}
```

Det virker, men vi skal gøres os en del krumsping, der er afhængige af matematikken, for at opnå en nogenlunde enkel iterativ løsning.

2.3 Største fælles divisor

Euclid

Euclid (300 fvt.) er ophavsmand til en meget kraftfuld algoritme til at finde den største fælles divisor (det største tal der går op i dem begge). Metoden er rekusiv og givet ved:

> gcd(m, n) = gcd(n, m modulus n), hvis n ikke går op i m
>
> gcd(m, n) = n, ellers

hvor man antager: m >= n > 0. Man navngiver traditionelt funktionen, der beregner største fælles divisor: **gcd** (**g**reatest **c**ommon **d**ivider).

Basis er, når n går op i m; hvor resultatet blot er n. Rekursions-skridtet er et enkelt kald videre. Man bemærker at der om **m modulus n** gælder: **n > m modulus n > 0**. Derfor passer antagelsen om m >= n > 0 også i kaldet videre.

Den rekusive metode bliver:

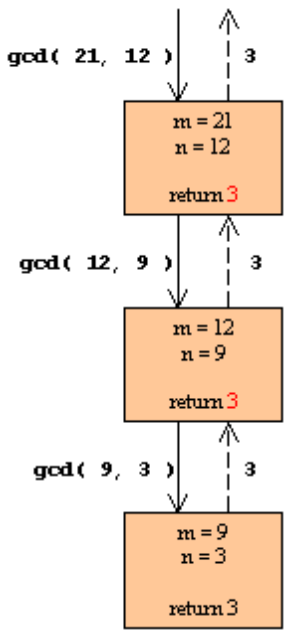
Source 6:
Rekursiv: Største fælles divisor

```
static int gcd( int m, int n ) {
// PRE: m >= n > 0

  if ( m%n == 0 )
    return n;
  else
    return gcd( n, m%n );
}
```

Lad os igen tegne et diagram der viser de rekursive kalds sammenhæng. Vi vil finde den største fælles divisor for 21 og 12:

Figur 3:
Forløbet af de rekursive kald



Diagrammet ligner i sin struktur det vi tegnede for fakultet. Det skyldes at de begge arbejder med ét rekursivt kald videre, mens f.eks. fibonacci bruger to kald og dermed får en anderledes struktur.

Den iterative løsning bliver:

Source 7:
Iterativ: Største fælles divisor

```
static int gcd( int m, int n ) {
// PRE: m >= n > 0

  int tmp;

  while ( m%n > 0 ) {
    tmp = n;
    n = m%n;
    m = tmp;
  }

  return n;
}
```

Den rekursive er en anelse enklere, men forskellen er igen ubetydelig.

2.4 Eksponentiering

Vi vil her udnytte følgende formel til at beregne x^y på en hurtig måde:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Hvis vi f.eks. vil beregne 2^8, kan vi udnytte at $2^8 = 2^4 * 2^4$, og $2^4 = 2^2 * 2^2$, og $2^2 = 2^1 * 2^1 = 2 * 2 = 4$. Hvis vi indsætter den anden vej får vi $2^4 = 4 * 4 = 16$, og $2^8 = 16 * 16 = 256$.

Man skal bemærker, at vi kun har udført 3 multiplikationer, i modsætning til den traditionelle metode: $2^8 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 256$, med 7 multiplikationer.

Hvis vi giver x^y den funktionelle betegnelse pow(x, y) kan vi formulere denne teknik rekursivt:

pow(x, y) = pow(x, y/2) * pow(x, y/2), y er lige

pow(x, y) = pow(x, y/2) * pow(x, y/2) * x, hvis y er ulige

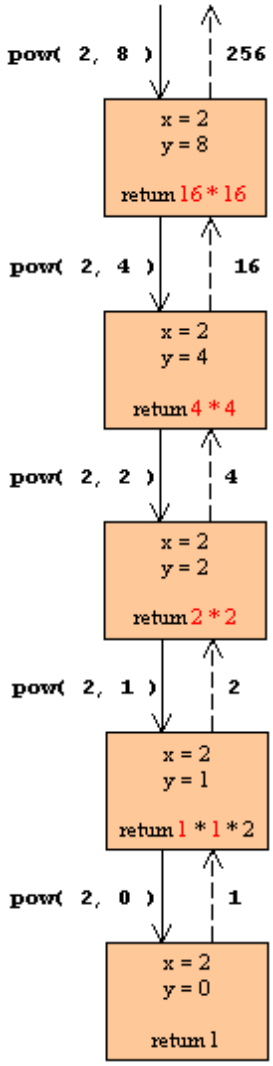
pow(x, 0) = 1

hvis y ikke er negativ.

Den sidste formel ganger x på, hvis y er ulige. Det skyldes, at der bliver en til rest i forhold til de to y/2'er når y er ulige.

Hvis vi igen ser eksemplet med 28, vil det rekursive forløb blive

Figur 4:
Forløbet af de rekursive kald



Ud fra definitionen skulle man tro at det rekursive forløb ville være et træ, da der er to rekursive kald. Disse to kald er dog ens, hvorfor man kun udfører det én gang og genbruger resultatet.

Den rekursive metode bliver:

Source 8: *Rekursiv: Exponentiering*

```
class Eksponentiering {

  static int pow( int x, int y ) {
  // PRE: y>=0

    if ( y==0 )
      return 1;
    else {
      int halvPow = pow( x, y/2 );
      int fuldPow = halvPow * halvPow;

      if ( y%2 == 1 )
        fuldPow *= x;

      return fuldPow;
    }
  }

  public static void main( String[] argv ) {
    for ( int i=0; i<=10; i++ )
      System.out.print( pow( 2, i ) + " " );
    System.out.println();
```

```
  }
}
```

```
1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024
```

2.5 Skabelon for matematisk rekursion

Man kan opstille en generel skabelon, som stort set alle matematisk rekursive metoder kan opbygges efter:

Pseudo 3:
Matematisk rekursion

```
static int rekursiv( int n ) {
// PRE: n er okay

  if ( n er basis )
    // basis - én eller flere mulige værdier
  else
    // rekursions skridt -  ét eller flere rekursive kald
}
```

Man bemærker at basis godt kan bestå af flere værdier (som i fibonacci eksemplet), hvilket blot kræver flere else-if'er.

3. Andre eksempler

3.1 Palindrom

Palindromer er ord der staves ens forfra og bagfra. F.eks. MELLEM og REJER. Det problem vi vil se på, er at fastslå om et givet ord er et palindrom. Vores metode vil derfor have signaturen:

```
boolean palindrom( String ord )
```

Sætte samme bogstav udenom

Umiddelbart kan det være lidt vanskeligt at se hvad der skal være det rekursive skridt, men så kan man modsat starte med at identificere basis. En tom streng er et palindrom, og en streng med ét tegn er også et palindrom, men hvad så. Hvis man skal udvide en streng der er et palindrom så det vedbliver med at være et palindrom, kan man gøre det ved at sætte det samme bogstav udenom. Hvis vi f.eks. havde ELLE og ville udvide det, så kunne vi placere det samme bogstav M på begge sider og få MELLEM. Da man i rekursion arbejder sig frem mod basis, vil processen derimod blive den omvendte: at man fjerner de to yderste bogstaver, så man går fra MELLEM, til ELLE, til LL, til den tomme streng. Man skal så hele tiden kontrollere at de to bogstaver man fjerner er ens, ellers er det ikke et palindrom.

Vores rekursive definition på et palindrom bliver:

$S_0S_1 \ldots S_{n-1}S_n$ er et palindrom hvis S_0 er det samme bogstav som S_n og $S_1 \ldots S_{n-1}$ er et palindrom

S_0 er et palindrom og den tomme streng er et palindrom

hvor vi angiver strengene som sekvenser af tegn S_i.

Den rekursive metode bliver derfor:

Source 9:
Rekursiv: Palindrom

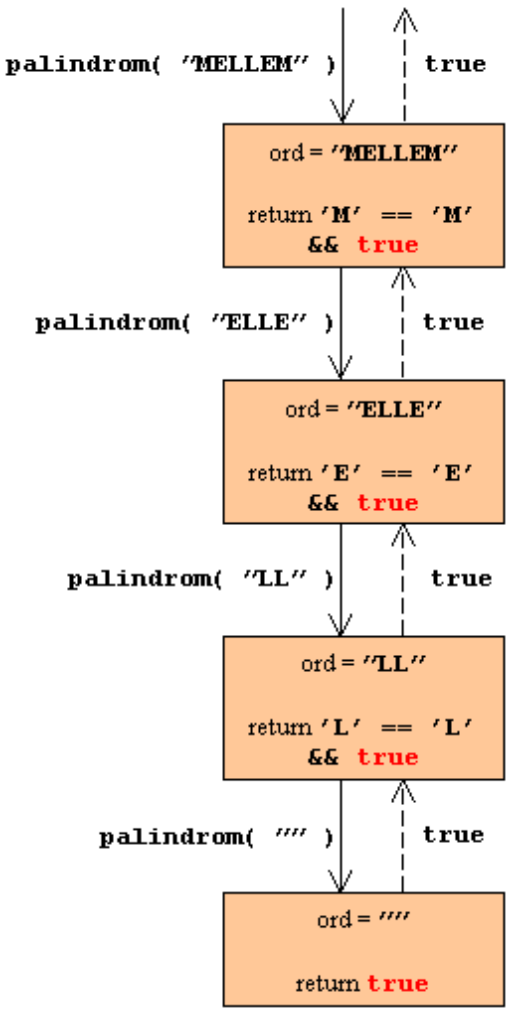
```
static boolean palindrom( String ord ) {

  if ( ord.length() < 2 )
    return true;
  else if ( ord.charAt( 0 ) == ord.charAt( ord.length()-1 ) )
    return palindrom( ord.substring( 1, ord.length()-1 ) );
  else
    return false;
}
```

Frem mod terminering

Det der her driver rekursionen frem mod terminering er naturligvis at den tekststreng vi skal kontrollere bliver stadig mindre. Man bemærker også at den tunede effekt af **`&&`** stopper rekursionen første gang to tegn ikke er ens, ellers ville rekursionen altid nå basis.

Hvis vi ser på kaldet: **`palindrom( "MELLEM" )`**, bliver forløbet som følger:



Figur 5:
Forløbet af de rekursive kald

Her er der tale om et palindrom og man observerer derfor at kaldene når helt ned til basis, der i dette tilfælde er den tomme streng.

Lad os se en iterativ løsning:

Source 10: *Iterativ: Palindrom*

```
static boolean palindrom( String ord ) {
  for ( int pos=0; pos<ord.length(); pos++ )
    if ( ord.charAt( pos ) != ord.charAt( ord.length - 1 - pos ) )
      return false;
  return true;
}
```

Igen er der ikke den store forskel i løsningernes omfang.

3.2 Towers of Hanoi

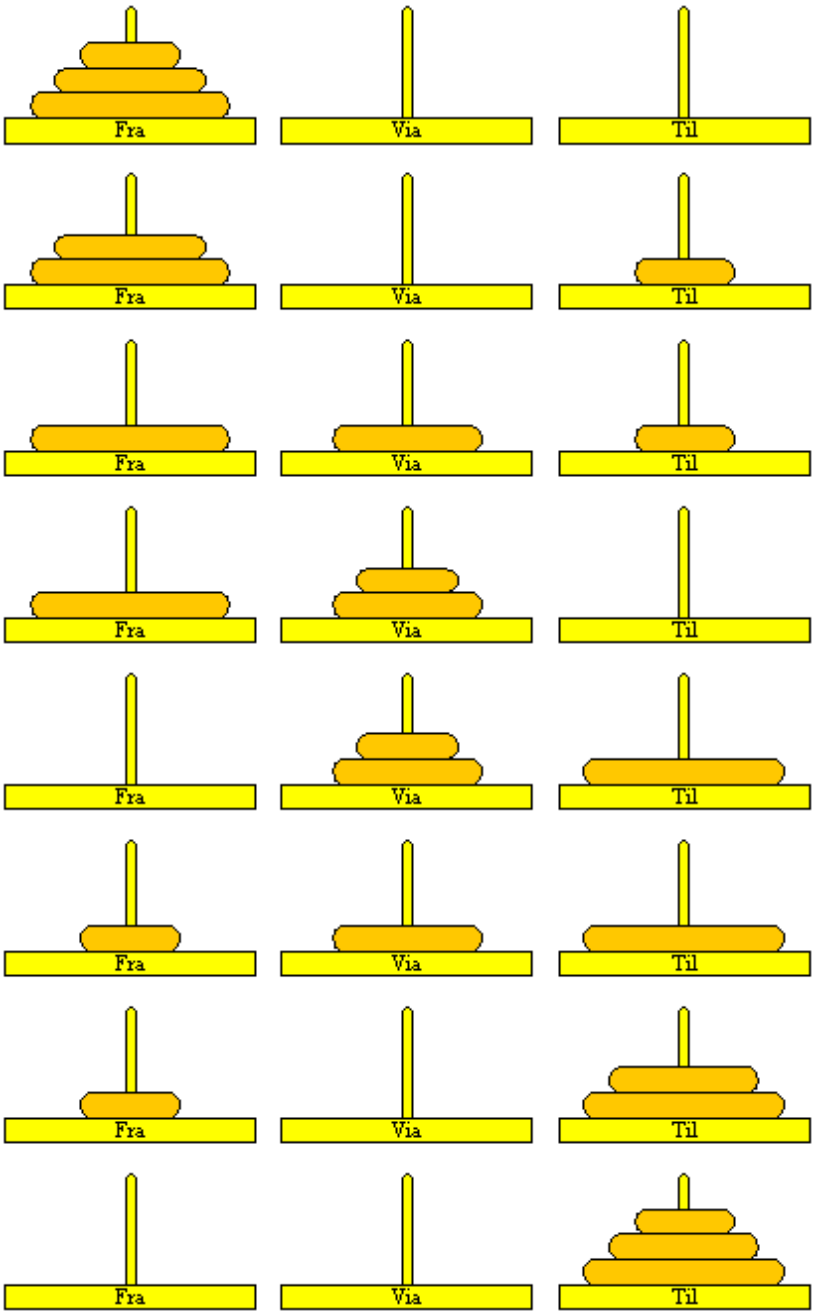
Towers of Hanoi er konge-eksemplet i rekursion. Når man først ser og forstår Towers of Hanoi vil man blive imponeret over hvor utrolig enkelt, et ellers meget uoverskueligt problem kan løses. Det er et af de mest kraftfulde af sin art.

"Der var engang ..."

Et sted i østen er der et munkekloster. I dette kloster befinder der sig en mærkelig opstilling. På tre pinde af guld er der placeret 64 skiver ligeledes af guld. Alle skiverne har forskellig diameter, og sidder på pindene gennem et hul i deres centrum. Ved verdens begyndelse anbragte en guddom de 64 skiver på den ene pind, på en sådan måde at ingen skive lå ovenpå en mindre skive - de lå som en pyramide! Munkene fik nu til opgave at flytte skiverne over på en af de andre pinde. Der var dog nogle strenge regler for hvordan dette skulle gå for sig. De måtte kun flytte en skive af gangen, og de måtte aldrig placere en større skive oven på en mindre. Når munkene havde fundført deres opgave ville verden gå under! Man skal dog ikke være så bekymret over det. For ca. 1000 år siden opstod der en religiøs strid om hvilken af de to andre pinde den endelige pyramide skal være på. Der er endog en tredie fraktion der mener at de to andre modarbejder det hele, da det de betragter som startpinden af disse regnes for at være slutpinden. Da de tre fraktioner af politiske grunde er blevet nød til at dele arbejde mellem sig, forventes de ikke at blive færdige før De kære læser for længst har lært at programmere!

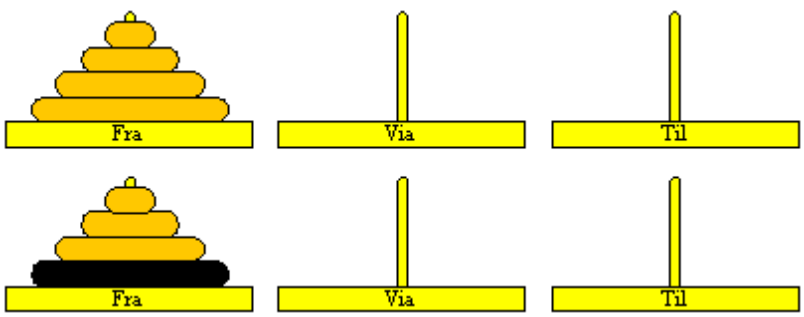
Se, det med 64 skiver af guld, det var der ikke rigtig råd til, og det tager jo også så forfærdelig lang tid - så vi nøjes lige med tre skiver i første omgang:

Figur 6: *Towers of Hanoi med tre skiver*



Med tre skiver er det rimelig nemt at kombinere sig frem til en løsning. Syv gange flytter vi en skive. Man observerer at den største skive flyttes som den midterste flytning og at det først kan lade sig gøre når alle de andre er på den midterste pind.

Lad os bruge denne observation til at løse problemet med 4 skiver:

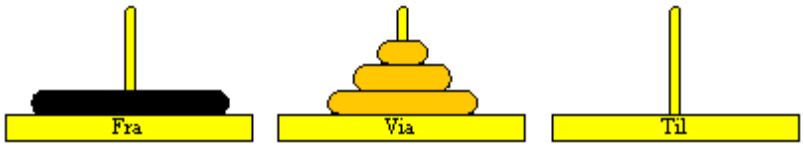


Figur 7:
Del-problem med tre skiver

Først skiller vi rent visuelt den største skive ud. Dermed er problemet for en stund reduceret til at flytte de tre øverste skiver til den midterste pind.

At flytte de tre skiver gøres ved at bruge løsningen fra før; hvor vi i stedet flytter til den midterste via den højre

Figur 8:
Løsning af del-problem med tre skiver



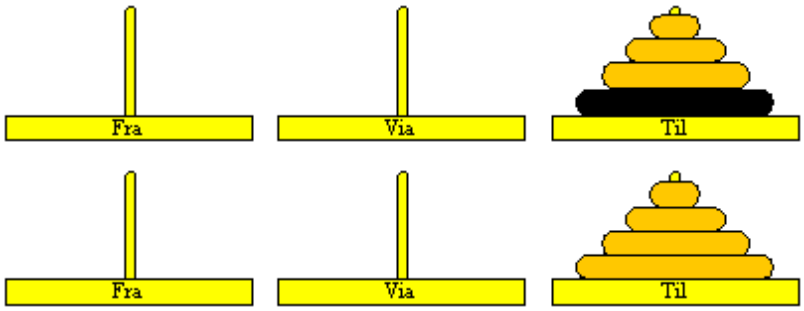
Dernæst skal den store skive flyttes:

Figur 9:
Flytning af den store skive

Endelig er der så opgaven med at flytte de tre skiver fra pinden i midten over på den store skive, men det er jo det samme del-problem som før.

En tur via pinden til venstre giver derfor:

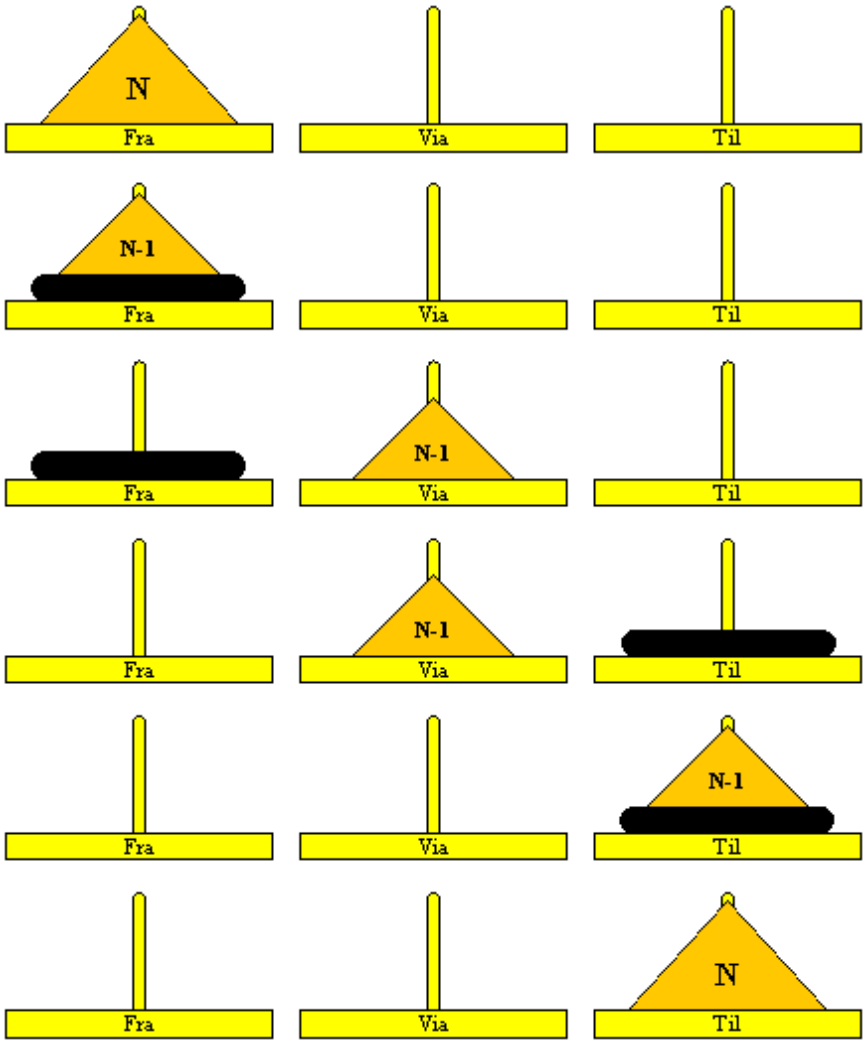
Figur 10:
Løsning af del-problem med tre skiver



Det rekursive i løsningen begynder nu at tegne sig. Hvis vi kan løse problemet med tre skiver kan vi også løse det med fire skiver. Vi gør det ved først at løse et del-problem med tre skiver, dernæst flytte én skive og igen løse et del-problem med tre skiver.

Lad os generalisere det til N skiver, med to del-problemer med N-1 skiver:

Figur 11:
Løsning af problem med N skiver, ved løsning af to del-problemer med N-1 skiver



Når vi skal lave et program der løser dette problem vha. rekursion er spørgsmålet mere præcist: Hvad er en løsning? Hvad skal programmet skrive ud?

Det der skal specificeres, er hvilke flytninger der skal foretages.

Towers of Hanoi bliver som følger:

Source 11: *Rekursiv: Towers of Hanoi*

```
import java.io.*;

class Hanoi {

  static void hanoi( int antal, int fra, int til, int via ) {
    if ( antal>1 ) {
      hanoi( antal-1, fra, via, til );
      System.out.println( fra + " -> " + til );
      hanoi( antal-1, via, til, fra );
    } else
      System.out.println( fra + " -> " + til );
  }

  public static void main( String[] argv ) throws IOException {
    BufferedReader indlæser =
      new BufferedReader(
        new InputStreamReader( System.in ) );

    System.out.print("Hvor mange skiver: ");
    int nSkiver = Integer.parseInt( indlæser.readLine() );
    hanoi( nSkiver, 1, 3, 2 );
  }
}
```

```
Hvor mange skiver: 3
1 -> 3
1 -> 2
3 -> 2
1 -> 3
2 -> 1
2 -> 3
1 -> 3
```

Hvad så med en iterativ løsning? Det ligger det faktisk temlig tungt med!

Stakke

Vi skal senere, når vi studerer den datastruktur der kaldes stakke, se hvordan man altid kan implementere rekursion iterativt vha. en stak, og dét er nødvendigt, hvis vi vil lave Towers of Hanoi iterativt.

4. Adapter-metode

Betragt følgende rekursive metode:

Source 12: *Rekursiv: Udskriv array*

```
class AdapterMetode_Eksempel {

  static void udskrivArray( int[] tabel, int pos ) {
    if ( pos < tabel.length ) {
      System.out.print( tabel[pos] + " " );
      udskrivArray( tabel, pos+1 );
    }

    if ( pos == 0 )
      System.out.println();
  }

  public static void main( String[] argv ) {
    int t[] = { 5, 8, 9, 3, 6, 5, 4, 1 };

    udskrivArray( t, 0 );
  }
}
```

Nødvendigt at hjælpe metoden

Det man skal bemærke er det grimme kald. Man er altid nød til at sætte den i gang med den første værdi for **`pos`**, nemlig **`0`**. Samtidig er det grimt at den rekursive metode skal have en ekstra if-sætning for at kunne afslutte med et linieskift når den er færdig med udskriften. Den if-sætning bliver slæbt med igennem hele forløbet selv om den *altid* kun blive udført af den første metode-kopi. Det ville være at foretrække at flytte **`System.out.println()`** ned efter kaldet i **`main`**, men så er der endnu mere man skal *hjælpe* metoden med.

For at slippe af med disse upraktiske krav til den der kalder metoden bruger man normalt en adapter-metode [*FKJ*]. Adapter-metoden bruger overloading til at lægge sig mellem den rekursive metode og den der ønsker at kalde den. Adapter-metoden yder den rekursive metoden den hjælp den behøver.

Med en sådan overloading bliver vores program:

Source 13: *Rekursiv:*

```
class AdapterMetode_Eksempel {
```

Udskriv array, med adapter metode

```
  static void udskrivArray( int[] tabel, int pos ) {
    if ( pos < tabel.length ) {
      System.out.print( tabel[pos] + " " );
      udskrivArray( tabel, pos+1 );
    }
  }

  static void udskrivArray( int[] tabel ) {
    udskrivArray( tabel, 0 );
    System.out.println();
  }

  public static void main( String[] argv ) {
    int t[] = { 5, 8, 9, 3, 6, 5, 4, 1 };

    udskrivArray( t );
  }
}
```

Vi kan nu tilbyde en metode der blot skal kaldes, med de nødvendige oplysninger og ikke mere.

Man kan en sjælden gang komme ud for at adapter-metoden og den rekursive metode har samme signatur. I så flad må man opgive at overloade og i stedet ændre navnet på den rekursive metode, så adapter-metoden får det "rigtige" navn.

5. Hale-rekursion

En bestemt gruppe af rekursive metoder kaldes "hale-rekursive":

> **Definition: Hale-rekursiv metode**
>
> En rekursiv metode er **hale-rekursiv**, hvis den *højest* kalder sig selv én gang, og dette kald er det *sidste der udføres* før metoden returnerer.

Lad os se hvilke af de eksempler vi har gennemgået, der er hale-rekursive.

Først er der eksemplet med Ikast Svømmehal. Det afsluttes med et kald af **`checkBassin`**, og da det ligeledes er det eneste kald er metoden hale-rekursiv.

Fakultet, største fælles divisor og palindrom er på samme måde hale-rekursive.

Fibonacci og Towers of Hanoi er ikke hale-rekursive. For begge gælder der, at der er mere end et rekursivt kald.

Hale-rekursion - hvad kan man så bruge det til?

Bør omformes til iterativ

Hvis en metode er hale-rekursiv er det rimelig enkelt at omforme den til en iterativ løsning. Så enkelt at man reelt altid bør foretrække at gøre det. Selve argumentet for at foretrække en iterativ løsning frem for en rekusiv, såfremt de er lige enkle at implementere, vender vi tilbage til i næste afsnit.

En hale-rekursiv metode vil normalt have følgende opbygning:

Pseudo 4:
Hale-rekusion

```
static ... haleRekursion( ... ) {
// PRE: parametre er okay

  if ( <ikke basis> ) {
    <udfør rekursions-skridt>;
    haleRekursion( ... );
  } else {
    // basis
    ...
  }
}
```

Der generelt kan omformes til:

Pseudo 5:
Iterativ udgave af Hale-rekusion

```
static ... haleRekursion( ... ) {
// PRE: parametre er okay

  ...

  while ( <ikke basis> ) {
    <udfør rekusions-skridt>;
  }

  ...
}
```

`if` og `while`

Det kan være lidt forskelligt hvordan det konkret skal laves, bla. mht. hvordan basis skal håndteres. Dog er udskiftningen af **`if`** med **`while`** meget karakteristisk for *alle* omformninger af rekursive løsninger til iterative.

6. Rekursion eller iteration

Hvad skal man så bruge: Rekursion eller iteration?

Spørgsmålet er naturligvis hvilken løsning der i det konkrete tilfælde er den bedste, men hvad vil det i den sammenhæng sige at være bedst?

Her kan vi se på nogle af de mål, fra kapitlet om programmeringssprog, der kommer ind i billedet.

Det skal være let at formulere løsningen	Det kommer naturligvis an på det konkrete problem man løser. I første række falder det tilbage på om problemet viser sine rekursive eller iterative egenskaber. Dette afhænger ofte af øjet der ser. Som vi senere skal se, i kapitlet om stakke, kan man altid implementere en rekursiv løsning iterativt, men det gør det aldrig lettere at formulere den.
Det skal være let at	Her forudsættes naturligvis at den der læser forstår rekursion. Rekursive løsninger er ofte lettere at læse end iterative. Det er sjældent

forstå løsningen	omvendt. I de fleste tilfælde kan det være det samme, såfremt de udviser samme enkelthed.
Løsningen skal være hurtig	Hvad er hurtigst? Generelt er iteration klart hurtigere end rekursion. Det skyldes at metode-kald tager ekstra tid at udføre.

Som man ser, ligger rekursionens primære styrke i formuleringen af løsningen. Hvis man af effektivitetsgrunde insisterer på en iterativ løsninger kan man altid få det.

Konklusion:

Man skal benytte rekursion i stedet for iteration, såfremt:

- Den rekursive løsning er enklere at formulere/forstå
- Det ikke giver effektivitetsproblemer

Repetitionsspørgsmål

1. Hvilken sammenhæng er der mellem rekursion og nedbrydning?
2. Hvad er en rekursiv metode?
3. Hvad er et rekursions-skridt?
4. Hvad er rekursions-basis?
5. Hvad er rekursions-skridt og -basis i fakultet eksemplet?
6. Hvad er rekursions-skridt og -basis for fibonacci talrækken?
7. Hvad menes der med "spildte metode-kald" i fibonacci eksemplet?
8. Hvordan optimeres den iterative udgave af fibonacci-metoden?
9. Hvad er rekursions-skridt og -basis i eksemplet med Euclids algoritme, til at finde største fælles divisor?
10. Hvad er et palindrom?
11. Hvad er rekursions-skridtet og -basis i palindrom eksemplet?
12. Hvorfor bruger man i nogle situationer en adapter-metode?
13. Hvad er en hale-rekursiv metode?

14 Giv et eksempel på en hale-rekursiv metode og forklar?

15 Hvad interessant er der ved hale-rekursion?

16 Hvilket forhold er der mellem if og while i forbindelse med rekursion og iteration?

17 Hvornår skal man anvende rekursion i stedet for iteration?

Svar på repetitionsspørgsmål

1 Rekursion laves ved en meget skæv nedbrydning. Man deler i to del-problemer: Et lille der umiddelbart kan løses og et større der er af samme slags som det oprindelige problem.

2 En metode der kalder sig selv.

3 Det er opdeling af problemet, løsning af det lille del-problem.samt videresendelse af det resterende problem ved et eller flere rekursive kald.

4 Det resterende problem, når det selv når et omfang der umiddelbart kan løses.

5 Skridtet er at man ganger det tal man er nået til med resten af løsningen. Basis er 0 der giver 1.

6 Skridtet er at man lægger de to foregående tal sammen. Basis i talrækken er 0 og 1 (man lader nogle gange basis være 1 og 1).

7 Metode-kald der alle har samme aktuelle parameter. I princippet burde kun en af dem være nødvendig.

8 Ved at flytte basis, så man i stedet beregner den oprindelige basis.

9 Skridtet er, at man finder den største fælles divisor for to tal, som den største fælles divisor af den mindste af tallene, og den største modulus den mindste. Basis er, at den mindste går op i den største (dvs. at førnævnte modulus giver 0).

10 Et palindrom er et ord der staves ens forfra og bagfra.

11 Skridtet er, at man sammenligner og fjerner det første og sidste tegn i ordet. Basis er enten den tomme streng eller strengen med længde 1. I begge tilfælde angiver basis, at der er tale om et palindrom.

12 Fordi den rekusive metode kan have brug for lidt "hjælp", der ikke bør vedkomme den der kalder metoden.

13 En metode der højest foretager ét rekursivt kald og dette i så fald er det sidste der sker før metoden returnerer.

14 Den rekursive metode i palindrom eksemplet er hale-rekusiv fordi den kun har et rekusivt kald og dette er placeret som det sidste før der returneres.

15 Hale-rekursion kan altid ellimineres uden at man er nød til at simulere rekursion.

16 if udskiftes typisk med while i forbindelse med, at man omformer en rekursiv metode til en iterativ.

17 Når det giver en enklere løsning, der er lettere at læse/formulere, og det samtidig ikke giver effektivitetsproblemer.