

# Lineær Algebra Eksamens Noter

Morten Nygaard  
2011 4582

Kasper Eenberg  
2011 7679

Jonas Hovmand  
2011 3884

9. juni 2013

## Indhold

<b>Indhold</b>	<b>1</b>
<b>1 Løsninger og mindste kvadraters løsninger af lineære ligningssystemer</b>	<b>3</b>
1.1 Lineære Ligningssystemer . . . . .	3
1.2 REF & RREF . . . . .	4
1.3 Konsistens i Ligningssystemer . . . . .	4
1.4 Mindste Kvadraters Løsninger . . . . .	4
1.5 Den Normale Ligning . . . . .	5
<b>2 Vektorrum og underrum</b>	<b>6</b>
2.1 Vektor- og Underrum . . . . .	6
2.2 Span og Basis . . . . .	7
2.3 Entydig Uafhængighed . . . . .	7
2.4 Basis for Søjlerum . . . . .	9
<b>3 Lineær uafhængighed</b>	<b>10</b>
3.1 Udspændende Mængder . . . . .	10
3.2 Homogene Løsninger . . . . .	10
3.3 Entydighed/Uafhængighed . . . . .	11
3.4 Afhængighed . . . . .	11
<b>4 Basis for vektorrum; koordinatisering</b>	<b>13</b>
4.1 Lineær Uafhængighed . . . . .	13
4.2 Basis . . . . .	13
4.3 Koordinatisering . . . . .	13
<b>5 Matricer og lineære transformationer</b>	<b>18</b>
5.1 Underrum . . . . .	18
5.2 Lineær Transformation . . . . .	18
5.3 Transformation af Underrum . . . . .	18
5.4 Matrixrepræsentationen . . . . .	19
<b>6 Determinanter</b>	<b>22</b>
6.1 Definition og Egenskaber . . . . .	22
6.2 Transponeret Matrix . . . . .	23
6.3 Singulære Matricer og Determinanter . . . . .	24
6.4 Cramers Regel . . . . .	25

<b>7</b>	<b>Egenverdier og egenvektorer</b>	<b>27</b>
7.1	Egenverdi, -vektor og -rum . . . . .	27
7.2	Karakteristik polynomium og multipliciteter . . . . .	27
7.3	Similaritet . . . . .	28
7.4	Diagonalisering . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Diagonalisering</b>	<b>31</b>
8.1	Egenverdi, -vektor og -rum . . . . .	31
8.2	Karakteristisk polynomium . . . . .	31
8.3	Diagonalisering . . . . .	31
8.4	Uafhængige Egenvektorer . . . . .	33
<b>9</b>	<b>Indre produkt</b>	<b>35</b>
9.1	Definition . . . . .	35
9.2	Pythagoras . . . . .	35
9.3	Projektion . . . . .	36
9.4	Cauchy-Schwarz Uligheden . . . . .	36
<b>10</b>	<b>Ortogonal komplement og projektion</b>	<b>38</b>
10.1	Dimensioner . . . . .	38
10.2	Ortogonal Dimension/Basis . . . . .	38
10.3	Indre Produkt . . . . .	39
10.4	Ortogonal Projektion . . . . .	41
<b>11</b>	<b>Ortogonale og ortonormale baser</b>	<b>43</b>
11.1	Indre Produkt . . . . .	43
11.2	Ortogonal Projektion . . . . .	44
11.3	Gram-Schmidt Processen . . . . .	44
11.4	Ortonormal Mængde til Basis . . . . .	46
<b>12</b>	<b>Ortogonale og unitære matricer</b>	<b>47</b>
12.1	Ortogonal Matrix . . . . .	47
12.2	Ækvivalenser for Ortogonale Matricer . . . . .	47
12.3	Unitær og konjugerede transponerede . . . . .	49
12.4	Schurs Sætning . . . . .	49
<b>13</b>	<b>Unitær diagonalisering</b>	<b>52</b>
13.1	Unitær og konjugerede transponerede . . . . .	52
13.2	Schurs Sætning . . . . .	52
13.3	Unitær Diagonalisering . . . . .	53
<b>14</b>	<b>Lineære differentialligninger</b>	<b>55</b>
14.1	Diff. Systems Entydighed . . . . .	55
14.2	Putzers Algoritme . . . . .	56

# 1 Løsninger og mindste kvadraters løsninger af lineære ligningssystemer

([P] 1.2, 5.2, 7.2.10-7.2.13, 8.2.9)

## Disposition

1. Lineær Ligningssystem
2. REF & RREF
3. Konsistens i Ligningssystemer
4. Mindste Kvadraters Løsninger
5. Den Normale Ligning

## 1.1 Lineære Ligningssystemer

### Definition

Et lineært ligningssystem er et system af  $m$  ligninger i  $n$  ubekendte, hvor disse kan skrives som:

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Et sådan system kan også opstilles på matrix form, hvor  $A$  er en matrix,  $x$  og  $b$  er vektorer:

$$Ax = b$$

Systemet løses ved at indsætte  $c_1, \dots, c_n$  på  $x$  plads, så begge sider af ligheden af den samme, altså er vektoren  $c$  en del af løsningsmængden.

### Rækkeækvivalens

Hvis løsningsmængden for et ligningssystem  $Ax = b$  og  $Cx = d$  er ens, altså de har de samme  $x$ , kan  $A$  og  $C$  siges at være rækkeækvivalente. Sammenhængen mellem  $A$  og  $C$  vil da være at der er blevet benyttet en række ERO'er på  $A$  for at danne  $C$ .

### ERO'er

Der er 3 elementære rækkeoperationer, som kan bruges til at manipulere med ligningssystemer.

1.  $R_i \Leftrightarrow R_j$ : byt den  $i$ 'te og den  $j$ 'te ligning.
2.  $R_i \Rightarrow sR_i$ : gang den  $i$ 'te ligning med  $s \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$
3.  $R_i \Rightarrow R_i + tR_j$ : addér  $t$  gange  $R_j$  til  $R_i$  når  $t \in \mathbb{F}, j \neq i$ .

## 1.2 REF & RREF

### REF

Række Echelon Form, er en bestemt form, som en matrix kan komme på. Dette ved hjælp af ERO'er. Formen er som følger:

1. Nulrækker, ligger nederst i matricen.
2. Den første ikke-nulindgang i en række er 1 og ligger til højre for den første ikke-nulindgang i rækken ovenover.

Den første ikke-nulindgang på en række i en REF-matrix, kaldes en *pivot*.

### RREF

En matrix er på RREF (Reduceret Række Echelon Form), hvis den er på REF, og alle søjler som indeholder en pivot har 0 på alle andre indgange.

## 1.3 Konsistens i Ligningssystemer

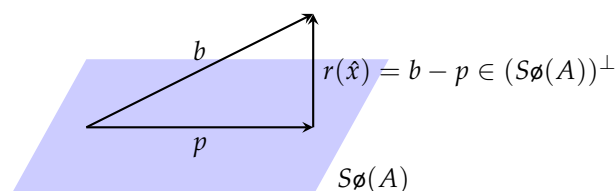
### Lemma 2.2.4

Lad  $A \in \text{Mat}_{m,n}$ . Skriv  $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$  i søjleform.  
Betragt da ligningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , hvor  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ .  
Systemet er konsistent (har en løsning)  $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ .

## 1.4 Mindste Kvadraters Løsninger

En mindste kvadraters løsning er hvor man finder den bedst mulige løsning, til et ligningssystem med flere ligninger end ubekendte. Generelt kan det beskrives som  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  hvor  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  med  $m > n$ .

Generelt kan det ikke forventes at man kan finde et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  som løser ligningssystemet, hvilket gør at man leder efter et  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  som får  $A\mathbf{z}$  til at være tættest på  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .



Hvis man har ovenstående ligningssystem kan man finde et residual

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$$

som er den "overskydende" afstand mellem den bedste løsning og punkterne. Vi søger derfor at finde den mindste længde,  $\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|$ , for residualen, hvilket er det samme som at søge den mindst mulige løsning til  $\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2$ . En vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  der opfylder dette, siges at være en mindste kvadraters løsning for  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  og  $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$ , hvilket gør  $\mathbf{p} \in S(A)$ , der er tættest på  $\mathbf{b}$ .

### Proposition 5.2.2

Der er et unikt  $p \in S\emptyset(A)$  som er tættest på  $b$ . Altså

$$\|b - y\| > \|b - p\|$$

hvor  $y, p \in S\emptyset(A)$  og  $y \neq p$ .

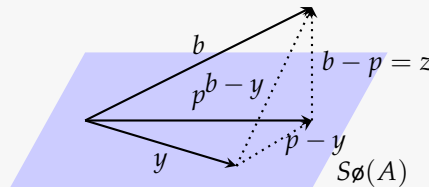
### Bevis

Beviset for at  $p$  er unik er som følger. Enhver vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  kan beskrives som

$$b = p + z$$

hvor  $p \in S\emptyset(A)$  og  $z \in (S\emptyset(A))^\perp$ . Givet en vektor  $y \in S\emptyset(A)$  forskellig fra  $p$  gælder

$$\|b - y\|^2 = \|(b - p) + (p - y)\|^2$$



da  $p - y \in S\emptyset(A)$  og  $b - p = z \in (S\emptyset(A))^\perp$  så får vi fra Pythagoras

$$\|b - y\|^2 = \|b - p\|^2 + \|p - y\|^2$$

og vi kan derfor konkludere at

$$\|b - y\| > \|b - p\|$$

## 1.5 Den Normale Ligning

### Proposition 5.2.4

Systemet  $A^T A x = A^T b$  er konsistent, og  $z$  er en løsning til dette system, hvis  $z$  er en mindste kvadraters løsning til  $Ax = b$ .

### Bevis

$$\begin{aligned} Az = p &\Leftrightarrow b - Az \in (S\emptyset(A))^\perp && \text{fordi } p = P_{S\emptyset(A)}(b) \\ &\Leftrightarrow b - Az \in N(A^T) && \text{Sætning 5.1.16} \\ &\Leftrightarrow A^T(b - Az) = 0 \\ &\Leftrightarrow A^T b = A^T A z \end{aligned}$$

## 2 Vektorrum og underrum

([P] 2.1, 3.2)

### Disposition

1. Vektor- og Underrum
2. Span og Basis
3. Entydig Uafhængighed
4. Underrum - Matrix

### 2.1 Vektor- og Underrum

#### Definition 2.1.1

Et vektorrum er en mængde  $V$  udstyret med addition og skalarmultiplikation således at følgende egenskaber er overholdt:

**A1**  $\forall x, y \in V: x + y = y + x$

**A2**  $\forall x, y, z \in V: (x + y) + z = x + (y + z)$

**A3**  $\exists 0 \in V: x + 0 = x \forall x \in V$

**A4**  $\forall x \in V, \exists -x \in V: x + (-x) = 0$

**S1**  $\forall \alpha \in \mathbb{F}, x, y \in V: \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

**S2**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, x \in V: (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

**S2**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, x \in V: (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

**S4**  $\exists 1 \in \mathbb{F}, \forall x \in V: 1 \cdot x = x$

#### Sætning 2.1.2

Et vektorrum har nogle elementære egenskaber

**(I)**  $0$  er det entydige neutrale element i  $V$

**(II)**  $0 \cdot x = 0 \forall x \in V$

**(III)** Hvis  $x, y \in V$  er således at  $x + y = 0$ , så er  $y = -x$

**(IV)**  $(-1)x = -x \forall x \in V$

En delmængde  $S$  af et  $\mathbb{F}$ -vektorrum  $V$  kaldes et underrum, hvis de har følgende egenskaber:

**C0**  $S \neq \emptyset$

**C1**  $\forall x \in S, \alpha \in \mathbb{F}: \alpha x \in S$

**C2**  $\forall x, y \in S: x + y \in S$

## 2.2 Span og Basis

### Definition 2.2.1

Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum og lad  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

En vektor givet ved  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$  hvor  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  er en lineær kombination af  $v_1, \dots, v_n$ .

Mængden af alle lineære kombinationer af  $v_1, \dots, v_n$  kaldes spannet af  $v_1, \dots, v_n$ , skrevet  $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ .

$\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$  er et underrum af  $V$ , idet spannet overholder C0 - C2. Se eventuelt beviset side 34 [duPlessis].

### Definition 2.2.11

Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum, og lad  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Da er  $v_1, \dots, v_n$  en basis for  $V$  hvis:

1.  $v_1, \dots, v_n$  er lineært uafhængige.
2.  $v_1, \dots, v_n$  udspænder (spanner)  $V$ .

## 2.3 Entydig Uafhængighed

### Definition 2.2.6

Et sæt  $v_1, \dots, v_n$  af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at en lineær kombination af vektorerne

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

kun har den trivielle løsning, altså at  $c_i = 0$  for alle  $i = 1, \dots, n$ . Hvis der derimod eksisterer et  $c_i \neq 0$ , så samme ligning stadig er opfyldt, så er vektorerne istedet lineært afhængige, da en kan skrives som en lineær kombination af de andre.

### Sætning 2.2.9

Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum, lad  $v_1, \dots, v_n \in V$ , og lad  $S = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ . Et element  $v \in S$  kan udtrykkes *entydigt* som en lineær kombination af  $v_1, \dots, v_n \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$  er lineært uafhængige.

### Bevis

Da  $v \in S$  ved vi per definition af spannet, at vi kan skrive  $v$  som en lineær kombination.

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \text{ med } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$$

Hvis der samtidig gælder at vi kan skrive  $v$  som:

$$v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \text{ med } b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$$

så er

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$



Hvis  $v_1, \dots, v_n$  er lineært **uafhængige** så må:

$$(a_1 - b_1) = 0, \dots, (a_n - b_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

Der findes dermed kun 1 måde at udtrykke  $v$  som en lineær kombination af  $v_1, \dots, v_n$

Hvis  $v_1, \dots, v_n$  er lineært **afhængige**, må der findes  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ , hvor ikke alle  $c_i$  er 0, og hvor  $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ , hvilket giver os:

$$v = v + 0 = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = (a_1 + c_1) v_1 + \dots + (a_n + c_n) v_n$$

Altså er  $(a_1 + c_1) v_1 + \dots + (a_n + c_n) v_n$  et andet udtryk for en lineær kombination af  $v$ , da mindst 1  $c$  ikke er 0 og ligningen derfor ikke er lig den øverste.

## 2.4 Basis for Søjlerum

### Sætning 3.2.6

Lad  $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$  på søjleform, og lad  $A \sim H$  på RREF, således at  $H$  har  $k$  søjler med pivot.

Hvor  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$  omnummereres til at indeholde søjlerne med pivoter, som er en basis for  $S\emptyset(A)$ .

### Bevis

$A$  og  $H$  har samme løsningsmængde da vi kan lave en lineær kombination af  $H$

$$c_1 \mathbf{h}_1 + \dots + c_n \mathbf{h}_n = 0$$

hvor  $c_1, \dots, c_n$  findes hvis og kun hvis  $A\mathbf{c} = 0 \Leftrightarrow H\mathbf{c} = 0$ .

Da  $H$  er på RREF må

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

for  $i = 1, \dots, k$  og der gælder at de  $k$  søjler i  $H$  er uafhængige og de  $n - k$  andre søjler kan beskrives som en lineær kombinationer af de  $k$  søjler.

Dermed må  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$  være en basis for  $S\emptyset(A)$  på grund af ækvivalensen mellem løsningsmængderne til  $A$  og  $H$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & ? \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & 0 & \end{array} \right]$$

### 3 Lineær uafhængighed

([P], 2.2, 3.1)

#### Disposition

1. Udspændende Mængder
2. Homogene Løsninger
3. Entydighed/Uafhængighed
4. Afhængighed

#### 3.1 Udspændende Mængder

##### Definition 2.2.1

Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum og lad  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

En vektor givet ved  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$  hvor  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  er en lineær kombination af  $v_1, \dots, v_n$ .

Mængden af alle lineære kombinationer af  $v_1, \dots, v_n$  kaldes spannet af  $v_1, \dots, v_n$ , skrevet  $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ .

$\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$  er et underrum af  $V$ , idet spannet overholder C0 - C2. Se eventuelt beviset side 34 [duPlessis].

#### 3.2 Homogene Løsninger

##### Korollar 1.2.13

Lad  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$ .

1. Det homogene ligningssystem  $Ax = 0$  har altid en løsning,  $x = 0$ .
2. Hvis  $n > m$  så har  $Ax = 0$  flere løsninger.

For eksempel har nedenstående  $\text{Mat}_{2,3}(\mathbb{F})$  uendelige mange løsninger, hvis det gælder at den er lig 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

##### Bevis

1. Da  $A0 = 0$  er 0 en løsning til ligningssystemet.
2. Lad  $A \sim H$  på RREF, så  $[A | 0] = [H | 0]$ .  $H$  har  $m$  rækker, og dermed højst  $m$  pivot'er, og da  $n > m$  må der altså være mindst  $n - m$  søjler uden pivot.  
Så ligningssystemet må have uendeligt mange løsninger hvis  $\mathbb{F}$  har uendeligt mange elementer, eller  $q^{n-m}$  løsninger, hvis  $\mathbb{F}$  har  $q < \infty$  elementer.

### 3.3 Entydighed/Uafhængighed

#### Definition 2.2.6

Et sæt  $v_1, \dots, v_n$  af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at en lineær kombination af vektorerne

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

kun har den trivielle løsning, altså at  $c_i = 0$  for alle  $i = 1, \dots, n$ . Hvis der derimod eksisterer et  $c_i \neq 0$ , så samme ligning stadig er opfyldt, så er vektorerne istedet lineært afhængige, da en kan skrives som en lineær kombination af de andre.

#### Sætning 2.2.9

Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum, lad  $v_1, \dots, v_n \in V$ , og lad  $S = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ . Et element  $v \in S$  kan udtrykkes *entydigt* som en lineær kombination af  $v_1, \dots, v_n \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$  er lineært uafhængige.

#### Bevis

Da  $v \in S$  ved vi per definition af spannet, at vi kan skrive  $v$  som en lineær kombination.

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \text{ med } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$$

Hvis der samtidig gælder at vi kan skrive  $v$  som:

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \text{ med } b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$$

så er

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n$$

Hvis  $v_1, \dots, v_n$  er lineært **uafhængige** så må:

$$(a_1 - b_1) = 0, \dots, (a_n - b_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

Der findes dermed kun 1 måde at udtrykke  $v$  som en lineær kombination af  $v_1, \dots, v_n$

Hvis  $v_1, \dots, v_n$  er lineært **afhængige**, må der findes  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ , hvor ikke alle  $c_i$  er 0, og hvor  $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ , hvilket giver os:

$$v = v + 0 = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = (a_1 + c_1)v_1 + \dots + (a_n + c_n)v_n$$

Altså er  $(a_1 + c_1)v_1 + \dots + (a_n + c_n)v_n$  et andet udtryk for en lineær kombination af  $v$ , da mindst 1  $c$  ikke er 0 og ligningen derfor ikke er lig den øverste.

### 3.4 Afhængighed

### Sætning 2.2.15

Lad  $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum. Lad  $u_1, \dots, u_m \in V$ , hvor  $m > n$ . Så er  $u_1, \dots, u_m$  afhængige.

### Bevis

Vi kan opstille hver af  $u_i$ 'erne som en lineær kombination af  $V$  for  $i = 1, \dots, m$ .

$$u_i = a_{1i}v_1 + \dots + a_{ni}v_n, \text{ hvor } a_{1i}, \dots, a_{ni} \in \mathbb{F}$$

Samtidig kan vi opstille en lineær kombination af alle  $u_i$ 'er og omskrive denne til at være en sum af de ovenstående lineære kombinationer.

$$\begin{aligned} 0 = U &= x_1 u_1 + \dots + x_m u_m \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \right) v_j \end{aligned}$$

Vi ved at  $v_1, \dots, v_n$  ikke er 0, da disse er baser. Derfor må  $\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \right) = 0$ . Dette kan opstilles som et ligningssystem der har  $n$  ligninger og  $m$  ubekendte:

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + \dots + x_m a_{1m} \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + \dots + x_m a_{nm} \end{aligned}$$

Per [korollar 1.2.13](#), ved vi at et sådan ligningssystem må have en ikke trivial løsning, og per definitionen af lineær afhængighed, ved vi da at vektorerne  $u_1, \dots, u_m$  må være lineært afhængige.

## 4 Basis for vektorrum; koordinatisering

([P] 3.1, 3.3)

### Disposition

1. Definitioner
  - a) Lineær Uafhængighed
  - b) Basis
  - c) Koordinatvektor
2. Koordinat Transformations Matrix

### 4.1 Lineær Uafhængighed

#### Definition 2.2.6

Et sæt  $v_1, \dots, v_n$  af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at en lineær kombination af vektorerne

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

kun har den trivielle løsning, altså at  $c_i = 0$  for alle  $i = 1, \dots, n$ . Hvis der derimod eksisterer et  $c_i \neq 0$ , så samme ligning stadig er opfyldt, så er vektorerne istedet lineært afhængige, da en kan skrives som en lineær kombination af de andre.

### 4.2 Basis

#### Definition 2.2.11

Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum, og lad  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Da er  $v_1, \dots, v_n$  en basis for  $V$  hvis:

1.  $v_1, \dots, v_n$  er lineært uafhængige.
2.  $v_1, \dots, v_n$  udspænder (spanner)  $V$ .

### 4.3 Koordinatisering

#### Definition 3.3.1

Lad  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  være en ordnet basis for  $V$ . Lad  $\mathbf{v} \in V$ , da kan  $\mathbf{v}$  skrives entydig som en lineær kombination af  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ :

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Der er således et entydigt element  $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ , som angiver koordinaterne for  $\mathbf{v}$  i  $\mathcal{V}$ . Dette kaldes *koordinatvektoren* for  $\mathbf{v}$  mht.  $\mathcal{V}$  og denne skrives som:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

En sådan koordinatisering bevarer lineær struktur (lemma 3.3.2), hvilket vil sige at:

- (1)  $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} + [\mathbf{w}]_{\mathcal{V}}$
- (2)  $[r\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = r[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$

#### Sætning 1.4.8

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Følgende er ækvivalent:

- (a)  $A$  er ikke singulær, altså invertibel.
- (b) Ligningen  $A\mathbf{x} = 0$  har kun løsningen  $0$ .
- (c)  $A$  er række ækvivalent til  $I$ .

#### Bevis

(a)  $\Rightarrow$  (b) Lad  $\mathbf{z}$  være en løsning til  $A\mathbf{x} = 0$ , så er

$$\mathbf{z} = I\mathbf{z} = (A^{-1}A)\mathbf{z} = A^{-1}(A\mathbf{z}) = A^{-1}0 = 0$$

(b)  $\Rightarrow$  (c) Brug din fantasi.

(c)  $\Rightarrow$  (a) Endnu mere magi.

#### Proposition 3.3.7

Lad  $\mathcal{U} = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ,  $\mathcal{V} = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  være 2 ordnede baser i  $W \in \mathbb{F}^n$ . Lad  $K \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  være givet i søjleform ved  $[[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{V}}, \dots, [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{V}}]$ . Følgende gør sig da gældende:

- 1.  $K$  er invertibel
- 2.  $\forall \mathbf{w} \in W, [\mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = K[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}}$ .
- 3.  $K$  er den entydige matric i  $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ , således at (2) gør sig gældende.

Sagt med andre ord

$$V = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \Leftrightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V \text{ er uafhængige}$$



### Bevis

1. Vi antager at  $K' = K \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$ , så vi kan skrive  $K'$  som en lineær kombination:

$$K' = x_1[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{V}} + \dots + x_n[\mathbf{u}_n]_{\mathcal{V}} = [x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_n\mathbf{u}_n]_{\mathcal{V}} = 0$$

Hvor det sidste lighedstegn kommer af at koordinatisering bevarer lineær struktur. Da  $K' = 0$  må det gælde  $\forall x = 0$ , da  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  er uafhængige, per definitionen af en basis, og dermed ikke kan være 0. Ligningssystemet har da kun løsningen 0 per [sætning 1.4.8](#), og  $K$  er dermed invertibel.

2. For  $i = 1, \dots, n$  kan  $\mathbf{u}_i$  skrives som en lineær kombination  $\mathbf{u}_i = k_{1i}\mathbf{v}_1 + \dots + k_{ni}\mathbf{v}_n$  hvor

$$\begin{bmatrix} k_{1i} \\ \vdots \\ k_{ni} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{V}}$$

er den  $i$ 'te søjle i  $K$ .

En anden vektor  $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Skrives denne helt ud har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= c_1(k_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + k_{n1}\mathbf{v}_n) + \dots + c_n(k_{1n}\mathbf{v}_1 + \dots + k_{nn}\mathbf{v}_n) \\ &= (c_1k_{11} + \dots + c_nk_{1n})\mathbf{v}_1 + \dots + (c_1k_{n1} + \dots + c_nk_{nn})\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

hvor

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} k_{11}c_1 + \dots + k_{n1}c_n \\ \vdots \\ k_{n1}c_1 + \dots + k_{nn}c_n \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = K[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}}$$

Vi har hermed vist at  $K$  er koordinattransformationsmatricen til  $\mathcal{V}$ -koordinater fra  $\mathcal{U}$ -koordinater.

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = K_{\mathcal{V},\mathcal{U}}[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}}$$

3. Vi antager at  $K'$  eksisterer så

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = K'[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$$

Det gælder så for  $u_i, i = 1, \dots, n$  at

$$\begin{bmatrix} k_{1i} \\ \vdots \\ k_{ni} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{V}} = K'[\mathbf{u}_i]_{\mathcal{U}} = K'\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} k'_{1i} \\ \vdots \\ k'_{ni} \end{bmatrix}$$

for  $i = 1, \dots, n$ .



Da

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n\} \Rightarrow \mathbf{u}_i = \mathcal{U} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$i$ 'te index

$= \mathcal{U}e_i$

Så  $K$  og  $K'$  har samme søjler, og de er ens.

## 5 Matricer og lineære transformationer

([P] 4.1, 4.2, 4.3)

### Disposition

1. Underrum
2. Lineær Transformation
3. Transformation af Underrum
4. Matrixrepræsentationen

### 5.1 Underrum

En delmængde  $S$  af et  $\mathbb{F}$ -vektorrum  $V$  kaldes et underrum, hvis de har følgende egenskaber:

**C0**  $S \neq \emptyset$

**C1**  $\forall x \in S, \alpha \in \mathbb{F}: \alpha x \in S$

**C2**  $\forall x, y \in S: x + y \in S$

### 5.2 Lineær Transformation

#### Definition 4.1.1

Lad  $V, W$  være  $\mathbb{F}$ -vektorrum. En lineær transformation  $L : V \rightarrow W$  er en afbildning, som respekterer lineær struktur, dvs.

1.  $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2)$ .
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \mathbf{v} \in V, L(\alpha \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v})$ .

En *lineær transformation* kaldes også for en *lineær afbildning*, og en *lineær operator* Hvis de 2 rum  $V$  og  $W$  er ens. Følgende egenskaber gør sig gældende for en lineær transformation:

1.  $L(0_V) = 0_W$ .
2.  $L$  respekterer lineære kombinationer dvs.

$$L(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 L(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n L(\mathbf{v}_n)$$

3.  $L(-\mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V$

### 5.3 Transformation af Underrum

#### Sætning 4.1.7

Lad  $V, W$  være  $\mathbb{F}$ -vektorrum. Lad  $L : V \rightarrow W$  være en lineær transformation.

1. Lad  $S \subset V$  være et underrum. Da er  $L(S)$  et underrum af  $W$ .

2. Lad  $T \subset W$  være et underrum. Da er  $L^{-1}(S)$  et underrum af  $V$ .

### Bevis

Vi skal for begge vise alle **egenskaberne for underrum**.

1. Da  $\mathbf{0}_W = L(\mathbf{0}_V)$  er  $L(S) \neq \emptyset$

Lad  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in L(S), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$

Det eksisterer et  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S$  så  $L(\mathbf{s}_1) = \mathbf{w}_1$  og  $L(\mathbf{s}_2) = \mathbf{w}_2$

Samtidig ved vi at  $\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 \in S$ , og derfor:

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 = \alpha_1 L(\mathbf{s}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{s}_2) = L(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2) \in L(S)$$

2. Det gælder som før at  $\mathbf{0}_V \in L^{-1}(T) \implies L^{-1}(T) \neq \emptyset$

Lad  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L^{-1}(T), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ . Vi har

$$L(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 L(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{v}_2)$$

Da  $L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2) \in T$ , er  $\alpha_1 L(\mathbf{v}_1), \alpha_2 L(\mathbf{v}_2) \in T$

Så  $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \in L^{-1}(T)$ .

Diagrammet her kan bruges til at beskrive transitioner i følgende beviser.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \downarrow \theta_V & & \downarrow \theta_W \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{L_{M_{\mathcal{W}, \mathcal{V}}(L)}} & \mathbb{F}^m \end{array}$$

## 5.4 Matrixrepræsentationen

### Sætning 4.2.1

Lad  $L : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  være en lineær transformation.

Vi definerer  $M(L) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$  ved  $M(L) = [L(\mathbf{e}_1), \dots, L(\mathbf{e}_n)]$ . Så er  $L(\mathbf{x}) = M(L)\mathbf{x}$  for alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$  og  $M(L)$  er den entydige matix med denne egenskab.

### Bevis

Lad  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ , så kan  $x$  skrives som en lineær kombination:  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$ .

Da må det gælde at:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= L(x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 L(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n L(\mathbf{e}_n) \\ &= [L(\mathbf{e}_1), \dots, L(\mathbf{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= M(L) \mathbf{x} \end{aligned}$$

Entydighed: Hvis vi antager at  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$  tilfredsstiller  $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  for alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ , så gælder dette specielt for  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  hvor  $i = 1, \dots, n$  at  $L(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i \Rightarrow \{\text{i'te søjle i } A\} = \{\text{i'te søjle i } M(L)\}$ .

#### Sætning 4.2.4

Lad  $V, W$  være  $\mathbb{F}$ -vektorrum og lad  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ,  $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$  være ordnede baser for  $V, W$ . Lad  $L: V \rightarrow W$  være en lineær transformation.

$$M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(L) = [[L(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{W}}, \dots, [L(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{W}}]$$

Der gælder, at  $[L(\mathbf{v})]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(L)[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$  for alle  $\mathbf{v} \in V$ , samt at  $M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(L)$  er den entydige matrix med denne egenskab.

#### Bevis

Lad  $\mathbf{v} \in V$  hvor  $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n$  og  $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ . Vi har

$$L(\mathbf{v}) = L(x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n) = x_1 L(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_n L(\mathbf{v}_n)$$

så

$$\begin{aligned} [L(\mathbf{v})]_{\mathcal{W}} &= [x_1 L(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_n L(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{W}} \\ &= x_1 [L(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{W}} + \cdots + x_n [L(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{W}} \\ &= [[L(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{W}}, \dots, [L(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{W}}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(L)[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

Hvis  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$  tilfredsstiller at

$$[L(\mathbf{v}_i)]_{\mathcal{W}} = A[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{V}} = A\mathbf{e}_i = \{\text{i'te søjle i } A\}$$

Så har  $M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(L)$  og  $A$  de samme søjler og er derfor ens.

## 6 Determinanter

([P] 8.1, 8.2)

### Disposition

1. Definition og Egenskaber
2. Transponeret Matrix
3. Singulære Matricer og Determinanter
4. Cramers Regel

### 6.1 Definition og Egenskaber

#### Definition 8.1.1

For  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  med  $n \geq 2$  er den  $(i, j)$ 'te minor  $M(A)_{ij} \in \text{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{F})$  dannet ved at sløjfe den  $i$ 'te søjle og  $j$ 'te række.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,i} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

#### Definition 8.1.2

For  $B \in \text{Mat}_{1,1}(\mathbb{F})$  er  $\det B = b_{1,1}$ .

For  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  og  $n > 1$  antager vi at det er vist for en  $(n-1) \times (n-1)$ -matrix.

1. For  $1 \leq i, j \leq n$  er den  $(i, j)$ 'te cofaktor  $A_{ij}$  af  $A$  givet som

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M(A)_{ij})$$

2. Determinanten af  $A$  er givet som

$$\det A = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Determinanten udvikles altså efter første række.

#### Bemærkning

Der er en række basale regler for determinanter:

- 8.1.3: Determinanten kan udvikles efter første søjle:  $\det(A) = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$
- 8.1.4: Hvis  $B$  er  $A$  med de første to rækker byttet om, så er  $\det B = -\det A$ .

- 8.1.5: Hvis  $B$  er  $A$  med to vilkårlige rækker byttet gælder  $\det A = -\det B$ .
- 8.1.6: Determinanten kan udvikles efter  $k$ 'te række:  $\det(A) = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn}$ .
- 8.1.8: Hvis  $B$  er  $A$  med to søjler byttet, so er  $\det(A) = -\det(B)$ .
- 8.1.9: For  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  og  $n > 1$ , hvis  $A$  har to ens rækker/søjler gælder det at  $\det(A) = 0$ .
- 8.1.10/11 (a): Hvis  $A$  har en nul-række/søjle er  $\det(A) = 0$ .
- 8.1.10/11 (b): Hvis  $B$  er  $A$  med  $k$ 'te række/søjle gange med  $r$ , så gælder  $\det(B) = r \det(A)$ .
- 8.1.10/11 (c): Hvis  $B$  er  $A$  med  $s$  gange  $i$ 'te række/søjle lagt til  $j$ 'te række,  $i \neq j$ , så er  $\det(A) = \det(B)$ .
- 8.1.12: Hvis  $A$  er triangulær, så er  $\det(A)$  produktet af  $A$ 's diagonalindgange.
- 8.1.13: Hvis  $E$  er elementærmatrix gælder  $\det(EA) = \det(E) \det(A)$ . Deraf følger  $\det(AE) = \det(E) \det(A)$ .

## 6.2 Transponeret Matrix

### Lemma 8.1.7

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Der gælder  $\det(A^T) = \det(A)$ .

### Bevis

Vi beviser lemmaet ved induktion. Vores basistilfælde kan være for matricen hvor  $n = 2$ .

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det(A^T) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

I ovenstående må der gælde lighedstegn, da den kommutative lov er gældende.

Herefter opstiller vi induktions hypotesen at  $\det(A^T) = \det(A)$  når  $A$  er en  $(n-1) \times (n-1)$  matrix.

Vi vil herefter via induktion vise at dette også gør sig gældende for en  $n \times n$  matrix.

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M(A^T)_{j1})$$

Vi kan da skrive minoren som  $M(A^T)_{j1} = (M(A)_{1j})^T$ . Da må det per induktionshypotesen gælde:

$$\det(M(A^T)_{j1}) = \det(M(A)_{1j}^T) = \det(M(A)_{1j})$$

Da minoren netop er en  $(n-1) \times (n-1)$  matrix. Derfor må:

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M(A)_{1j}) = \det(A)$$

## 6.3 Singulære Matricer og Determinanter

### Sætning 8.1.15

$A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  er singulær  $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ .



### Bevis

$A \sim H$ , hvor  $H$  er på RREF.

$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 H$$

hvilket giver en determinant

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(E_k E_{k-1} \cdots E_1 H) \\ &= \det(E_k) \det(E_{k-1} \cdots E_1 H) \\ &= \det(E_k) \det(E_{k-1}) \cdots \det(E_1) \det(H) \end{aligned}$$

- $(\Rightarrow)$   $H$  må have en nulrække, hvilket giver  $\det(H) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ .
- $(\Leftarrow)$   $H = I$ ;  $H$  er ikke singulær hvilket betyder at  $\det(A) \neq 0$ .

## 6.4 Cramers Regel

### Definition 8.2.6

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Den adjungerede matrix er da

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

svarende til den transponerede kofaktormatrice.

### Korollar 8.2.9

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  være invertibel, og lad  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ . Lad  $A_i$  være matricen, der fås ved at erstatte den  $i$ 'te søjle i  $A$  med  $\mathbf{b}$ . Den entydige løsning  $\hat{\mathbf{x}}$  til  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  er da givet ved:

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = 1, \dots, n$$

### Bevis

Hvis vi ombytter lidt på ligningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , får vi at  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Dette kan vi ved hjælp af Korollar 8.2.8 omskrive:

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)\mathbf{b}$$

hvor  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}$ , og derfor må det gælde at for  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \frac{1}{\det(A)} (\text{adj } A)_{i:} \mathbf{b} && \text{(den i'te række)} \\ &= \frac{1}{\det(A)} (A_{1i}b_1 + \dots + A_{ni}b_n) \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det(A_i) \\ &= \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \end{aligned}$$

## 7 Egenverdier og egenvektorer

([P] 9.1)

### Disposition

1. Egenverdi, -vektor og -rum
2. Karakteristik polynomium og multipliciteter
3. Similaritet
4. Diagonalisering

### 7.1 Egenverdi, -vektor og -rum

#### Definition 9.1.1

1. Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorum og lad  $T : V \rightarrow V$  være en lineær transformation.  $\lambda \in \mathbb{F}$  er en egenverdi for  $T$ , hvis der findes  $\mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$ , så  $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ .  
 $\mathbf{v}$  er da en egenvektor for  $T$  associeret til  $\lambda$ .
2. Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ .  $\lambda \in \mathbb{F}$  er en egenverdi for  $A$  hvis der findes  $\mathbf{z} \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ , så  $A\mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$ .  
 $\mathbf{z}$  er da en egenvektor for  $A$  associeret til  $\lambda$ .

Egenvektoren findes ved at finde nulrummet  $N(A - \lambda I)$ , eller sagt på en anden måde indsætte egenverdierne på  $\lambda$ 's plads, hvorefter matricen reduceres, for at man så kan finde egenvektoren. Nulrummet  $N(A - \lambda_i I)$  kaldes for  $E_A(\lambda_i)$ .

### 7.2 Karakteristik polynomium og multipliciteter

#### Notation 9.1.6

$p_A$  kaldet det karakteristiske polynomium for  $A$ , hvor  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Hvis  $\det(A - \lambda I)$  beregnes for et ubestemt  $\lambda$ , så fås et polynomium af grad  $n$  i  $\lambda$ ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Rødderne for polynomiet er de  $\lambda$  hvor  $p_A(\lambda) = 0$ , og disse  $\lambda$  er egenverdier for  $A$ .

#### Notation 9.1.8

Dimensionen af egenrummet for en egenverdi  $\dim(E_A(\lambda_i))$  kaldes den *geometriske multiplicitet*.  $\text{Geo}_A(\lambda_i)$  af  $\lambda_i$ .

Den *algebraiske multiplicitet*  $\text{Alg}_A(\lambda_0)$  af  $\lambda_0$  er det antal gange  $\lambda - \lambda_0$  går op i  $p_A(\lambda)$ , altså hvis:  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} q(\lambda)$ , hvor  $q(\lambda) \neq 0$ , så er  $m_0 = \text{Alg}_A(\lambda_0)$ .

## 7.3 Similaritet

### Bemærkning

Det siges at  $A, B \in \text{Mat}(\mathbb{F})$  er similære, hvis der eksisterer et  $S \in \text{Mat}(\mathbb{F})$ , så det gælder at  $S^{-1}AS = B$ . Det følger derfor at  $S$  er invertibel. Hvis dette er tilfældet, gælder det at  $SBS^{-1} = A$ .

### Lemma 9.1.16

Lad  $A, B$  være similære.

1.  $p_A = p_B$ .
2. Hvis  $\lambda_0$  er en egen værdi for  $A$  og  $B$ , så er  $\text{Geo}_A(\lambda_0) = \text{Geo}_B(\lambda_0)$ .

### Bevis

1. Der eksisterer en ikke singulær  $S \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  så  $B = S^{-1}AS$ . For et vilkårligt  $\lambda$  gælder det at

$$S^{-1}(A - \lambda I)S = (S^{-1}AS) - (S^{-1}\lambda S) = B - \lambda I$$

Derfor

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= \det(S^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(S) \\ &= \det(S^{-1}) \det(S) \det(A - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}S) \det(A - \lambda I) \\ &= \det(A - \lambda I) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

2. Lad  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  være en basis for  $N(B - \lambda_0 I)$ . Så har vi for  $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} S^{-1}(A - \lambda_0 I)S\mathbf{v}_i &= (B - \lambda_0 I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \\ \Rightarrow (A - \lambda_0 I)S\mathbf{v}_i &= S(B - \lambda_0 I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \\ \Rightarrow S\mathbf{v}_i &\in N(A - \lambda_0 I) \end{aligned}$$

Ud fra foregående kan vi se at vi har minimum  $k$  vektorer i nulrummet. Argumentet for at  $S\mathbf{v}_1, \dots, S\mathbf{v}_k$  er uafhængige er at antage

$$\begin{aligned} c_1 S\mathbf{v}_1 + \dots + c_k S\mathbf{v}_k \\ &= S(c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Og derfor er

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = S^{-1}S(c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k) = S^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

og vi ved at  $c_1 = \dots = c_k = 0$ , da  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  er uafhængige.

Så vi kan konkludere at nulrummet for  $N(A - \lambda_0 I)$  er større eller lig  $N(B - \lambda_0 I)$ .

$$\dim N(A - \lambda_0 I) \geq \dim N(B - \lambda_0 I)$$

På samme måde kan man køre med baserne  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  for  $N(A - \lambda_0 I)$ , og nå frem til

$$\dim N(A - \lambda_0 I) \leq \dim N(B - \lambda_0 I)$$

Så

$$\text{Geo}_A(\lambda_0) = \dim N(A - \lambda_0 I) = \dim N(B - \lambda_0 I) = \text{Geo}_B(\lambda_0)$$

## 7.4 Diagonalisering

### Definition 9.2.1

1. Lad  $L : V \rightarrow V$  være en lineær transformation.  $L$  er diagonaliserbar hvis der findes en basis  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  for  $V$  bestående af egenvektorer for  $L$ .
2. Lad  $A \in \text{Mat}(\mathbb{F})$ .  $A$  er diagonaliserbar hvis der findes en basis  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  for  $\mathbb{F}$  bestående af egenvektorer for  $A$ .

En diagonalmatrix har nulle på alle andre indgange end diagonalen.

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ d_{i,i} & i = j \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{n,n} \end{bmatrix}$$

### Lemma 9.2.2

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Følgende er ækvivalente

- (1) Der findes en basis for  $\mathbb{F}^n$  bestående af egenvektorer for  $A$ .
- (2) Der findes  $n$  lineært uafhængige egenvektorer for  $A$ .
- (3) Der findes en invertibel matrix  $V \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  så  $V^{-1}AV$  er en diagonalmatrix.

### Bevis

- (1)  $\Rightarrow$  (2) Oplagt, da en basis er uafhængige.
- (2)  $\Rightarrow$  (1) Hvis man har  $n$  lineært uafhængige vektorer danner de en basis, se [sætning 3.1.4](#).
- (2)  $\Rightarrow$  (3) Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  være lineært uafhængige egenvektorer med tilhørende  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

for  $A$ , hvor  $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  i søjleform. Vi har

$$\begin{aligned} AV &= A[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n] \\ &= [\lambda_1 \mathbf{v}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{v}_n] \\ &= [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] D \\ &= VD \end{aligned}$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

er diagonal. Da  $V$  har uafhængige søjler er den diagonal og  $V^{-1}AV = V^{-1}VD = D$ .

**(3)  $\Rightarrow$  (2)** Antag,  $X \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  så  $X^{-1}AX = D$ , hvor  $D$  er diagonal, som ovenover. Da  $X$  er invertibel er søjlerne i  $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  uafhængige.

Vi har  $AX = X(X^{-1}AX) = XD$ , dvs.  $[A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n] = [\lambda_1 \mathbf{x}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{x}_n]$ . Dette giver  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ , hvilket betyder at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er uafhængige og egenvektorer for  $A$ .

## 8 Diagonalisering

([P] 9.2, 11.1)

### Disposition

1. Egen værdi, -vektor og -rum
2. Karakteristisk polynomium
3. Diagonalmatrix
4. Uafhængige Egenvektorer

### 8.1 Egen værdi, -vektor og -rum

#### Definition 9.1.1

1. Lad  $V$  være et  $\mathbb{F}$ -vektorrum og lad  $T : V \rightarrow V$  være en lineær transformation.  $\lambda \in \mathbb{F}$  er en egen værdi for  $T$ , hvis der findes  $\mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$ , så  $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ .  
 $\mathbf{v}$  er da en egenvektor for  $T$  associeret til  $\lambda$ .
2. Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ .  $\lambda \in \mathbb{F}$  er en egen værdi for  $A$  hvis der findes  $\mathbf{z} \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ , så  $A\mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$ .  
 $\mathbf{z}$  er da en egenvektor for  $A$  associeret til  $\lambda$ .

Egenvektoren findes ved at finde nulrummet  $N(A - \lambda I)$ , eller sagt på en anden måde indsætte egen værdierne på  $\lambda$ 's plads, hvorefter matricen reduceres, for at man så kan finde egenvektoren. Nulrummet  $N(A - \lambda_i I)$  kaldes for  $E_A(\lambda_i)$ .

### 8.2 Karakteristisk polynomium

#### Notation 9.1.6

$p_A$  kaldet det karakteristiske polynomium for  $A$ , hvor  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Hvis  $\det(A - \lambda I)$  beregnes for et ubestemt  $\lambda$ , så fås et polynomium af grad  $n$  i  $\lambda$ ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Rødderne for polynomiet er de  $\lambda$  hvor  $p_A(\lambda) = 0$ , og disse  $\lambda$  er egen værdier for  $A$ .

### 8.3 Diagonalisering

**Definition 9.2.1**

1. Lad  $L : V \rightarrow V$  være en lineær transformation.  $L$  er diagonaliserbar hvis der findes en basis  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  for  $V$  bestående af egenvektorer for  $L$ .
2. Lad  $A \in \text{Mat}(\mathbb{F})$ .  $A$  er diagonaliserbar hvis der findes en basis  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  for  $\mathbb{F}$  bestående af egenvektorer for  $A$ .

En diagonalmatrix har nuller på alle andre indgange end diagonalen.

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ d_{i,i} & i = j \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{n,n} \end{bmatrix}$$

**Lemma 9.2.2**

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Følgende er ækvivalente

- (1) Der findes en basis for  $\mathbb{F}^n$  bestående af egenvektorer for  $A$ .
- (2) Der findes  $n$  lineært uafhængige egenvektorer for  $A$ .
- (3) Der findes en invertibel matrix  $V \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  så  $V^{-1}AV$  er en diagonalmatrix.

**Bevis**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Oplagt, da en basis er uafhængige.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Hvis man har  $n$  lineært uafhængige vektorer danner de en basis, se [sætning 3.1.4](#).

(2)  $\Rightarrow$  (3) Lad  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  være lineært uafhængige egenvektorer med tilhørende  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  for  $A$ , hvor  $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  i søjleform. Vi har

$$\begin{aligned} AV &= A[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{v}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{v}_n] \\ &= [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]D \\ &= VD \end{aligned}$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

er diagonal. Da  $V$  har uafhængige søjler er den diagonal og  $V^{-1}AV = V^{-1}VD = D$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Antag,  $X \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$  så  $X^{-1}AX = D$ , hvor  $D$  er diagonal, som ovenover. Da  $X$  er invertibel er søjlerne i  $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  uafhængige.



Vi har  $AX = X(X^{-1}AX) = XD$ , dvs.  $[Ax_1, \dots, Ax_n] = [\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n]$ . Dette giver  $Ax_i = \lambda_i x_i$ , hvilket betyder at  $x_1, \dots, x_n$  er uafhængige og egenvektorer for  $A$ .

## 8.4 Uafhængige Egenvektorer

### Lemma 9.2.5

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ . Antag at  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  er forskellige egenverdier for  $A$ . Lad  $v_1, \dots, v_k$  være tilsvarende egenvektorer. Så er  $v_1, \dots, v_k$  uafhængige.

### Bevis

Lad  $S = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$  og lad  $r = \dim(S)$ . Vi skal så vise at  $r = k$ . Vi antager modsætningsvis at  $r < k$ , ydermere antager vi da at  $v_1, \dots, v_r$  er en basis for  $S$ . Da må en ny egenvektor  $v_{r+1}$  kunne skrives som en lineær kombination af  $v_1, \dots, v_r$ .

$$v_{r+1} = c_1 v_1 + \dots + c_r v_r, \text{ hvor } c_1, \dots, c_r \in \mathbb{F}$$

Så vi kan skrive:

$$A v_{r+1} = A(c_1 v_1 + \dots + c_r v_r) = c_1 A v_1 + \dots + c_r A v_r$$

Da vi ved at  $A v = \lambda v$  kan vi omskrive dette til:

$$A v_{r+1} = \lambda_{r+1} v_{r+1} = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_r \lambda_r v_r$$

Ganger vi så den første ligning med  $\lambda_{r+1}$  og trækker det fra den sidste, så får vi:

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})v_1 + \dots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})v_r$$

Da vi ved at  $v_1, \dots, v_r$  er en basis for  $S$  må disse være uafhængige og derfor ikke 0. Ydermere ved vi per antagelse at alle  $\lambda$  er forskellige, hvilket vil sige at  $\lambda_i - \lambda_{r+1}$  er forskellig fra 0 for alle  $i = 1, \dots, r$ .

Derfor må det være konstanterne  $c_1, \dots, c_r$  der alle må være 0, for at ovenstående ligning kan opfyldes. Men da egenvektoren  $v_{r+1}$  ikke kan være nul, er dette en modstrid med den første ligning, og derfor må vores første antagelse være forkert, og dermed må  $r = k$ , der gør at  $v_1, \dots, v_k$  alle må være uafhængige.

## Multiplicitet

### Sætning 9.2.11

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ ; lad  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$  være de forskellige egenverdier for  $A$ . Så er  $A$  diagonaliserbar  $\Leftrightarrow$

$$(1) \text{Alg}(\lambda_1) + \dots + \text{Alg}(\lambda_k) = n.$$

$$(2) \text{Alg}(\lambda_i) = \text{Geo}(\lambda_i) \text{ for } i = 1, \dots, k.$$

#### Bemærkning

Hvis  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  gælder (1) altid.

#### Bevis

$\Leftarrow$ : Hvis (1) og (2) gælder, så har vi at  $\text{Geo}(\lambda_1) + \cdots + \text{Geo}(\lambda_k) = n$   
 $\Rightarrow$ :

## 9 Indre produkt

([P] 6.1, 6.2, 6.3)

### Disposition

1. Definition
2. Pythagoras
3. Projektion
4. Cauchy-Schwarz Uligheden

### 9.1 Definition

#### Definition 6.2.1

Lad  $V$  være et  $\mathbb{C}$ -vektorrum. Et (komplekst) indre produkt er en afbildning  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , som tilfredsstiller:

- (I)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  er reel, og ikke-negativ for alle  $\mathbf{v} \in V$ ; og er 0 hvis  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- (II)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$  for alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- (III)  $\langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$  for alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ .
- (IV)  $\langle \mathbf{v}, \beta \mathbf{w} + \alpha \mathbf{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle$  for alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ .

Associeret til det indre produkt er en længde eller norm

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \text{ for } \mathbf{v} \in V$$

(I) siger at  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Noter at  $\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$  for alle  $a \in \mathbb{C}$  og  $\mathbf{v} \in V$ .

### 9.2 Pythagoras

#### Proposition 6.2.4 (Pythagoras)

Lad  $V$  være et  $\mathbb{C}$ -vektorrum med indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Lad  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  være ortogonale. Der gælder det:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Dette gælder ligeledes for det reelle ( $\mathbb{R}$ ) tilfælde.

#### Bevis

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

Da  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  er ortogonale gælder:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} = 0\overline{0} = 0$$

Og derfor fås ligheden  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ .

### 9.3 Projektion

#### Definition 6.2.5

Lad  $V$  være et  $\mathbb{C}$ -vektorrum med indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Hvis  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{v} \neq 0$ , så er *skalarprojektionen* af  $\mathbf{u}$  på  $\mathbf{v}$  tallet

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

mens *vektorprojektionen* er

$$\mathbf{p} = \alpha \left( \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \right) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$$

### 9.4 Cauchy-Schwarz Uligheden

#### Sætning 6.2.7 (Cauchy-Swartz-Uligheden)

Lad  $V$  være et  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$  vektorrum med indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Lad  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Der gælder

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Ligheden gælder hvis og kun hvis  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  er lineært afhængige.

#### Bevis

Hvis  $\mathbf{v} = 0$  er der lighed

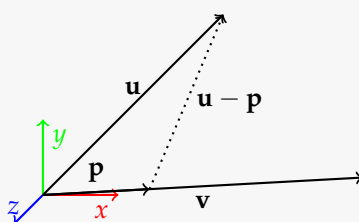
$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = 0 = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Hvis  $\mathbf{v} \neq 0$  lades  $\mathbf{p}$  være projektionen af  $\mathbf{u}$  på  $\mathbf{v}$ . Da  $\mathbf{p}$  og  $\mathbf{u} - \mathbf{p}$  er ortogonale er

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

Fra skalarprojektionen så

$$\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^4} = |\alpha|^2 = \alpha \bar{\alpha} = \|\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2$$



Hvilket giver

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

hvor der gælder lighed hvis  $u = p$ .

Det er hermed vist at der kun gælder lighed når  $u$  og  $v$  er lineært afhængige.

## 10 Ortogonalt komplement og projektion

([P] 5.1, 5.2.10, 6.4.12-6.4.17, 7.2.5-7.2.6)

### Disposition

1. Dimensioner
2. Ortogonal Dimension/Basis
3. Indre Produkt
4. Ortogonal Projektion

### 10.1 Dimensioner

#### Proposition 3.2.8

Lad  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$ , lad  $A \sim U$  på REF.

- (1)  $\dim N(A) = \#$  af søjler uden pivot i  $U$ .
- (2)  $\dim \text{Ræ}(A) = \#$  af ikke nul-rækker i  $U$ .
- (3)  $\dim \text{Sø}(A) = \#$  af søjler med pivot i  $U$ .

Det gælder at  $\dim(\text{Ræ}(A)) = \dim(\text{Sø}(A))$ , samt at  $\dim N(A) + \dim \text{Sø}(A) = n$ , antallet af søjler i  $A$ .

#### Bevis

(1),(2),(3) følger fra 3.2.1  $\rightarrow$  3.1.6.

Da antallet af ikke-nul rækker i  $U$  er lig antallet af pivot'er, er  $\dim \text{Ræ}(A) = \dim \text{Sø}(A)$ .

Hvis  $k$  er antallet af søjler med pivot, er  $\dim N(A) = n - k$ .  $\dim \text{Sø}(A) = k$  og

$$\dim N(A) + \dim \text{Sø}(A) = (n - k) + k = n$$

#### Notation 3.2.9

$\dim(\text{Ræ}(A)) = \dim(\text{Sø}(A))$  kaldes rangen af  $A$ ,  $\text{rang}(A)$ .

$\dim(N(A))$  kaldes nulliteten af  $A$ ,  $\text{nul}(A)$ .

### 10.2 Ortogonal Dimension/Basis

### Sætning 5.1.17

Lad  $S \in \mathbb{R}^n$  være et underrum.

1.  $S^\perp$  er også et underrum i  $\mathbb{R}^n$  og  $\dim(S^\perp) = n - \dim(S)$ .
2. Hvis  $S \neq \{0\}$ ,  $S \neq \mathbb{R}^n$  og  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  er en basis for  $S$  og  $\{\mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_n\}$  er en basis for  $S^\perp$ , så er  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  en basis for  $\mathbb{R}^n$ .

### Bevis

1. Hvis  $S = \{0\}$ , og  $S^\perp \in \mathbb{R}^n$ , så følger det naturligt, at  $\dim(S^\perp) = n - \dim(S) = n - \dim(\{0\})$ .

Hvis  $S \neq \{0\}$ , lad da  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  være en basis for  $S$ . Da kan vi skrive  $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r]$ , hvor  $X \in \text{Mat}_{n,r}(\mathbb{R})$  er en matrix hvor søjlerne består af basis vektorene.

Da må  $S = S\emptyset(X)$  og da giver lemma 5.1.16 at:

$$S^\perp = S\emptyset(X)^\perp = N(X^T)$$

Hvor det gælder at  $N(X^T) \in \mathbb{R}^n$ . Da kan vi finde:

$$\dim(N(X^T)) = \# \text{søjler i } X^T - \text{rang}(X^T) = n - r = n - \dim(S)$$

Dette fordi  $X$  har  $r$  uafhængige søjler per definition af basis, så:

$$\text{rang}(X^T) = \text{rang}(X) = r = \dim(S\emptyset(X)) = \dim(S)$$

2. Ifølge sætning 3.1.4 skal vi blot vise at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er uafhængige. Vi antager derfor:

$$c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_r\mathbf{x}_r + c_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} + \dots + c_n\mathbf{x}_n = 0$$

Derpå lader vi vektoren  $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_r\mathbf{x}_r$  og vektoren  $\mathbf{z} = c_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} + \dots + c_n\mathbf{x}_n$ . Da må  $\mathbf{y} \in S$  og  $\mathbf{z} \in S^\perp$ , og  $\mathbf{y} + \mathbf{z} = 0$ .

Dette må betyde at  $\mathbf{y} = (-1)\mathbf{z}$ , hvilket vil sige at  $\mathbf{y} \in S$  og  $(-1)\mathbf{z} \in S^\perp$ , altså må  $\mathbf{y} = (-1)\mathbf{z} \in S \cap S^\perp$ , hvilket giver at  $\mathbf{y} = (-1)\mathbf{z} = 0$ .

Da  $c_1x_1 + \dots + c_rx_r = 0$ , må alle  $c_1, \dots, c_r = 0$ , da  $x_1, \dots, x_r$  er uafhængige. Da  $c_{r+1}x_{r+1} + \dots + c_nx_n = 0$ , må alle  $c_{r+1}, \dots, c_n = 0$ , da  $x_{r+1}, \dots, x_n$  er uafhængige. Så  $x_1, \dots, x_n$  er uafhængige og derfor en basis for  $\mathbb{R}^n$ .

## 10.3 Indre Produkt

**Definition 6.2.1**

Lad  $V$  være et  $\mathbb{C}$ -vektorrum. Et (komplekst) indre produkt er en afbildning  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , som tilfredsstiller:

- (I)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  er reel, og ikke-negativ for alle  $\mathbf{v} \in V$ ; og er 0 hvis  $v = 0$ .
- (II)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$  for alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- (III)  $\langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$  for alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ .



(IV)  $\langle \mathbf{v}, \beta \mathbf{w} + \alpha \mathbf{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle$  for alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ .

Associeret til det indre produkt er en længde eller norm

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \text{ for } \mathbf{v} \in V$$

(I) siger at  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Noter at  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \|\mathbf{v}\|$  for alle  $a \in \mathbb{C}$  og  $\mathbf{v} \in V$ .

## Konstant Relation

### Sætning 6.4.8

For  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  som en ortonormal mængde i  $V$ .

Hvis  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n$ , så er  $c_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ .

### Bevis

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = c_i$$

Det sidste gælder da for  $i \neq j$  gælder der at  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ , og  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1$ , da det er en ortonormal basis.

## 10.4 Ortogonal Projektion

### Sætning 6.4.14

Projektionen (eller ortogonalprojektion) af  $v$  på  $S$  er defineret ved

$$\mathbf{p} - \mathbf{v} \in S^\perp \Leftrightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

hvor  $S$  er et underrum af det indre-produktrum  $V$ , med indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  og  $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k\}$  er en ortonormalbasis for  $S$ , med  $v \in V$  og  $p \in S$ .

### Bevis

Projektionen  $p$  kan skrives som

$$p = c_1 \mathbf{s}_1 + \dots + c_k \mathbf{s}_k$$

med  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  hvor  $c_i = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle$  for  $i = 1, \dots, k$ , så

$$p = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_1 \rangle \mathbf{s}_1 + \dots + \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_k \rangle \mathbf{s}_k = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

Der gælder derfor

$$\begin{aligned}\mathbf{p} - \mathbf{v} \in S^\perp &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 && \text{for alle } \mathbf{s} \in S \\ &\Leftrightarrow \langle \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{s}_k, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 && \text{for alle } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle + \dots + \alpha_k \langle \mathbf{s}_k, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 && \text{for } i = 1, \dots, k \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle\end{aligned}$$

hvilket betyder at vi kan redefinere  $\mathbf{p}$  som værende afhængig af  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

## 11 Ortogonale og ortonormale baser

([P] 7.2, 6.4)

### Disposition

1. Indre Produkt
2. Ortogonal Projektion
3. Gram-Schmidt Processen
4. Ortonormal Mængde til Basis

### 11.1 Indre Produkt

#### Definition 6.2.1

Lad  $V$  være et  $\mathbb{C}$ -vektorrum. Et (komplekst) indre produkt er en afbildning  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , som tilfredsstiller:

- (I)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  er reel, og ikke-negativ for alle  $\mathbf{v} \in V$ ; og er 0 hvis  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- (II)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$  for alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- (III)  $\langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$  for alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ .
- (IV)  $\langle \mathbf{v}, \beta \mathbf{w} + \alpha \mathbf{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle$  for alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ .

Associeret til det indre produkt er en længde eller norm

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \text{ for } \mathbf{v} \in V$$

(I) siger at  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Noter at  $\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$  for alle  $a \in \mathbb{C}$  og  $\mathbf{v} \in V$ .

### Konstant Relation

#### Sætning 6.4.8

For  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  som en ortonormal mængde i  $V$ .  
Hvis  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n$ , så er  $c_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ .

#### Bevis

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = c_i$$

Det sidste gælder da for  $i \neq j$  gælder der at  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ , og  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1$ , da det er en ortonormal basis.

## 11.2 Ortogonal Projektion

### Sætning 6.4.14

Projektionen (eller ortogonalprojektion) af  $v$  på  $S$  er defineret ved

$$\mathbf{p} - \mathbf{v} \in S^\perp \Leftrightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

hvor  $S$  er et underrum af det indre-produkt rum  $V$ , med indre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  og  $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k\}$  er en ortonormalbasis for  $S$ , med  $v \in V$  og  $p \in S$ .

### Bevis

Projektionen  $p$  kan skrives som

$$p = c_1 \mathbf{s}_1 + \dots + c_k \mathbf{s}_k$$

med  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$  hvor  $c_i = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle$  for  $i = 1, \dots, k$ , så

$$p = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_1 \rangle \mathbf{s}_1 + \dots + \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_k \rangle \mathbf{s}_k = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

Der gælder derfor

$$\begin{aligned} \mathbf{p} - \mathbf{v} \in S^\perp &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 && \text{for alle } \mathbf{s} \in S \\ &\Leftrightarrow \langle \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{s}_k, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 && \text{for alle } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle + \dots + \alpha_k \langle \mathbf{s}_k, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle = 0 && \text{for } i = 1, \dots, k \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \end{aligned}$$

hvilket betyder at vi kan redefinere  $\mathbf{p}$  som værende afhængig af  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

## 11.3 Gram-Schmidt Processen

### Sætning 7.2.1 (Gram-Schmidt processen)

Lad  $V$  være et indre-produkt rum, og skriv  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  for indre-produkt. Lad ydermere  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  være en basis for  $V$ .  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  er en ortonormal basis for  $V$  lavet på følgende måde:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|} \mathbf{x}_1$$

Og  $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  er defineret rekursivt ved

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k\|} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k)$$

hvor

$$\mathbf{p}_k = \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \dots + \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

er den ortogonale projektion af  $\mathbf{x}_{k+1}$  på  $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ .

Da er  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  er en ortonormal basis for  $\text{Span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ , for  $k = 1, \dots, n$ .

Og dermed for  $k = n$ , en ortonormal basis for  $V$ .

### Bevis

Definer  $S_k = \text{Span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$  for  $k = 1, \dots, n$ .

Basis: For  $S_1$  er det klart at  $\text{Span}(\mathbf{u}_1) = \text{Span}(\mathbf{x}_1) = S_1$ .

Induktion: Antag nu at det er vist for  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ , for  $k < n$ , og  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  er en ortonormal basis for  $S_k$ .

Lad  $\mathbf{p}_k$  være projektionen af  $\mathbf{x}_{k+1}$  på  $S_k$ . Ifølge sætning 6.1.14 kan denne skrives som

$$\mathbf{p}_k = \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \dots + \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

Da  $\mathbf{p}_k \in S_k$ , kan  $\mathbf{p}_k$  skrives som en linearkombination af  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ :

$$\mathbf{p}_k = c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_k \mathbf{x}_k$$

Vi vil gerne have fat i den ortogonale vektor  $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k$ , som går ud af  $S_k$ :

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k = \mathbf{x}_{k+1} - c_1 \mathbf{x}_1 - \dots - c_k \mathbf{x}_k$$

Da vi ved at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$  er uafhængige og  $\mathbf{x}_{k+1}$  derfor ikke kan skrives som en lineær kombination af de andre, ved vi at  $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k \neq 0$ .

Vi ved at

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k \in \text{Span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}) = S_{k+1}$$

Og ifølge sætning 6.1.14 er

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k \in S_k^\perp$$

og derfor

$$(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k) \perp \mathbf{u}_i$$

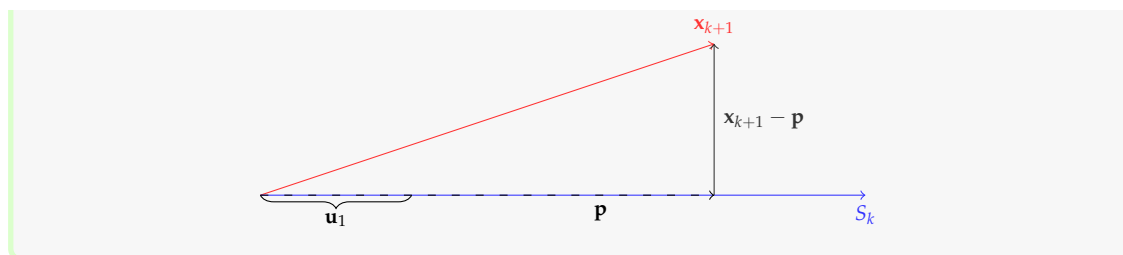
for  $i = 1, \dots, k$ .

Vi kan nu skalere den ortogonale projektion og definere  $\mathbf{u}_{k+1}$ :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k\|} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k)$$

Så er  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}\} \in S_{k+1}$  og ortonormal.

Da der er  $k + 1$  uafhængige elementer i rummet  $S_{k+1}$ , udgør de en basis, og  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}\}$  er en ortogonal basis for  $S_{k+1}$ .



## 11.4 Ortonormal Mængde til Basis

### Korollar 7.2.4

Enhver ortonormal mængde i et indre-produkt rum kan udvides til en ortonormal basis.

### Bevis

Lad  $\dim(V) = n$ . Antag, at  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset V$  er ortonormal.  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  kan udvides til en basis  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-k}\}$  af  $V$  når Gram-Schmidt-Processen anvendes på denne basis fås en basis  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$  som udvider  $\{u_1, \dots, u_k\}$ .

## 12 Ortogonale og unitære matricer

([P] 6.4.19-6.4.23, 11.1)

### Disposition

1. Ortogonal Matrix
2. Ækvivalenser for Ortogonale Matricer
3. Unitær og konjugerede transponerede
4. Schurs Sætning

### 12.1 Orthogonal Matrix

#### Definition 6.4.19

En matrix  $Q \in \text{Mat}(\mathbb{R})$  er ortogonal hvis søjlerne i  $Q$  udgør en ortonormalbasis for  $\mathbb{R}^n$ .

### 12.2 Ækvivalenser for Ortogonale Matricer

#### Sætning 6.4.21

Lad  $Q \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ . Følgende udsagn er ækvivalente:

- (a)  $Q$  er ortogonal
- (b)  $Q^T Q = I$
- (c)  $Q$  er invertibel og  $Q^{-1} = Q^T$
- (d)  $(Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$  for alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- (e)  $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$  for alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

### Bevis

(a)  $\Rightarrow$  (b) følger fra Lemma 6.4.18, da søjlerne da må være en ortonormal mængde.

(b)  $\Rightarrow$  (d)  $(Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T Q^T Q \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$  for alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a) Vi kan opskrive  $Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]$  i søjleform. Der gælder at:

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = (Q\mathbf{e}_i)^T(Q\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

hvor det gælder for  $\delta_{ij}$ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

hvilket per definition gør at  $\{q_1, \dots, q_n\}$  er ortonormal.

(b)  $\Rightarrow$  (c) følger af Lemma 1.4.10, som siger at  $AB = I$  så må  $A$  og  $B$  være invertible.

(c)  $\Rightarrow$  (b) følger af at være invers.



$$(d) \Rightarrow (e) \quad \|Q\mathbf{x}\|^2 = (Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

$(e) \Rightarrow (d)$  følger af proposition 6.3.5, hvor  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$  og  $(Q\mathbf{x})^T (Q\mathbf{y})$  kan omskrives nogenlunde på samme måde, således at det passer.

## 12.3 Unitær og konjugerede transponerede

### Definition 11.1.1

Den konjugerede transponerede  $C^H$  af  $C$  er givet ved  $C^H = (\overline{C})^T$ .

### Definition 11.1.3

En matrix  $U \in \text{Mat}(\mathbb{C})$  er unitær, hvis søjlerne i  $U$  udgør en ortonormalbasis for  $\mathbb{C}^n$ .

## 12.4 Schurs Sætning

### Sætning 11.1.9 (Schurs Sætning)

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ . Der findes en unitær matrix  $U \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ , så  $U^H A U$  er en øvretriangulær matrix.

### Bevis

Beviset foregår ved induktion over  $n$ . I basen  $n = 1$  er det trivielt opfyldt, da alle matricer  $\in \text{Mat}_{1,1}$  er øvre triangulære.

Antag nu at det gælder for en matrix  $B \in \text{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$ .

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{B})$  med en egen værdi  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ , og en tilhørende egenvektor  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ .

Vi kan arrangere at  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ . Og vi kan udvide  $\{\mathbf{v}_1\}$  til en basis for  $\mathbb{C}^n$ , og ved at anvende Gram-Schmidt på denne basis, får vi en ortonormalbasis  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  for  $\mathbb{C}^n$ .

Vi lader  $U_1 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ , hvilket gør  $U_1$  unitær.

Vi vil nu forsøge at afgøre opbygningen af den første søjle i  $U_1^H A U_1$ . Dette kan vi gøre ved at gange med  $\mathbf{e}_1$ :

$$U_1^H A U_1 \mathbf{e}_1 = U_1^H A \mathbf{v}_1 = U_1^H \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1^H \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1^H U_1 \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$$

Vi ved derfor at første i  $U_1^H A U_1$  er på formen  $(\lambda_1, 0, \dots, 0)^T$ , og kan derfor skrive  $U_1^H A U_1$  som

$$U_1^H A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}$$

Her er  $\mathbf{r}$  en rækkevektor og  $\mathbf{0}$  en søjlevektor, begge med  $n - 1$  indgange, og  $A_1$  er defineret som minoren  $M(A)_{1,1}$ .

Per induktionshypotesen findes der en unitær matrix  $C \in \text{Mat}_{n-1,n-1}$  der opfylder  $C^H A_1 C = B$ , så  $B$  er en øvre triangulær matrix  $\in \text{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$ .

Vi definerer

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$$

hvor  $\mathbf{0}$  igen er en søjlevektor med  $n - 1$  indgange.

$U_2$  er unitær, da de sidste  $n - 1$  søjler udgør en ortonormal mængde, per definition, og hver for sig er ortogonale på  $(U_2)_{:,1}$ , som er lig enhedsvektoren  $e_1$ .

Ifølge lemma 11.1.16 er  $U = U_1 U_2$  også unitær.

Da  $U_1^H A U_1$  og  $U_2$  har samme former ( $n \times n$ ), kan vi udregne  $U_2^H (U_1^H A U_1) U_2$  ved direkte brug af matrix-regler

$$\begin{aligned} U^H A U &= U_2^H (U_1^H A U_1) U_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & C^H A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} C \\ \mathbf{0} & C^H A_1 C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Som er øvre triangulær fordi  $B$  er det.

Induktionsskridtet er derfor taget, og sætningen er bevist.

## 13 Unitær diagonalisering

([P] 11.1)

### Disposition

1. Unitær og konjugerede transponerede
2. Schurs Sætning
3. Unitær Diagonalisering

### 13.1 Unitær og konjugerede transponerede

#### Definition 11.1.1

Den konjugerede transponerede  $C^H$  af  $C$  er givet ved  $C^H = (\overline{C})^T$ .

#### Definition 11.1.3

En matrix  $U \in \text{Mat}(\mathbb{C})$  er unitær, hvis søjlerne i  $U$  udgør en ortonormalbasis for  $\mathbb{C}^n$ .

### 13.2 Schurs Sætning

#### Sætning 11.1.9 (Schurs Sætning)

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ . Der findes en unitær matrix  $U \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ , så  $U^H A U$  er en øvretriangulær matrix.

#### Bevis

Beviset foregår ved induktion over  $n$ . I basen  $n = 1$  er det trivielt opfyldt, da alle matricer  $\in \text{Mat}_{1,1}$  er øvre triangulære.

Antag nu at det gælder for en matrix  $B \in \text{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$ .

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  med en egenverdi  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ , og en tilhørende egenvektor  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ .

Vi kan arrangere at  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ . Og vi kan udvide  $\{\mathbf{v}_1\}$  til en basis for  $\mathbb{C}^n$ , og ved at anvende Gram-Schmidt på denne basis, får vi en ortonormalbasis  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  for  $\mathbb{C}^n$ .

Vi lader  $U_1 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ , hvilket gør  $U_1$  unitær.

Vi vil nu forsøge at afgøre opbygningen af den første søjle i  $U_1^H A U_1$ . Dette kan vi gøre ved at gange med  $\mathbf{e}_1$ :

$$U_1^H A U_1 \mathbf{e}_1 = U_1^H A \mathbf{v}_1 = U_1^H \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1^H \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1^H U_1 \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$$

Vi ved derfor at første i  $U_1^H A U_1$  er på formen  $(\lambda_1, 0, \dots, 0)^T$ , og kan derfor skrive  $U_1^H A U_1$  som

$$U_1^H A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}$$

Her er  $\mathbf{r}$  en rækkevektor og  $\mathbf{0}$  en søjlevektor, begge med  $n - 1$  indgange, og  $A_1$  er defineret som minoren  $M(A)_{1,1}$ .

Per induktionshypotesen findes der en unitær matrix  $C \in \text{Mat}_{n-1, n-1}$  der opfylder  $C^H A_1 C = B$ , så  $B$  er en øvre triangulær matrix  $\in \text{Mat}_{n-1, n-1}(\mathbb{C})$ .

Vi definerer

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$$

hvor  $\mathbf{0}$  igen er en søjlevektor med  $n - 1$  indgange.

$U_2$  er unitær, da de sidste  $n - 1$  søjler udgør en ortonormal mængde, per definition, og hver for sig er ortogonale på  $(U_2)_{:1}$ , som er lig enhedsvektoren  $e_1$ .

Ifølge lemma 11.1.16 er  $U = U_1 U_2$  også unitær.

Da  $U_1^H A U_1$  og  $U_2$  har samme former ( $n \times n$ ), kan vi udregne  $U_2^H (U_1^H A U_1) U_2$  ved direkte brug af matrix-regler

$$\begin{aligned} U^H A U &= U_2^H (U_1^H A U_1) U_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & C^H A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} C \\ \mathbf{0} & C^H A_1 C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Som er øvre triangulær fordi  $B$  er det.

Induktionsskridtet er derfor taget, og sætningen er bevist.

### 13.3 Unitær Diagonalisering

#### Sætning 11.1.10

Lad  $A \in \text{Mat}(\mathbb{C})$  være hermite'sk. Så kan  $A$  diagonaliseres unitært, det vil sige der findes en unitær matrix  $U \in \text{Mat}(\mathbb{C})$  så

$$U^{-1} A U = U^H A U$$

er diagonal, med reelle diagonalindgange.

#### Bevis

Ifølge Schurs sætning findes der en unitær matrix  $U \in \text{Mat}(\mathbb{C})$  så  $U^H A U = T$  er en øvretrekantsmatrix.  $T$  er hermite'sk da

$$T^H = (U^H A U)^H = U^H A^H (U^H)^H = U^H A U = T \quad (1)$$

Da  $T$  er øvretriangulær må  $T^H$  være nedrettriangulær

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad T^H = \begin{bmatrix} \overline{t_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{t_{1n}} & \cdots & \overline{t_{nn}} \end{bmatrix}$$

men (1) siger også at  $T^H = T$ , så for  $i \neq j$  er  $t_{ij} = 0$  og  $t_{ii} = \overline{t_{ii}}$  for  $i = 1, \dots, n$ , hvilket betyder at  $T$  er diagonal med reelle indgange.

## 14 Lineære differentialligninger

([P] 10.1, 12.2)

### Disposition

1. Entydighed
2. Putzers Algoritme

### 14.1 Diff. Systems Entydighed

#### Lemma 10.1.1

Lad  $\lambda, a \in \mathbb{C}$ . Ligningen

$$x' = \lambda x \quad (\diamond)$$

har en entydig løsning  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  med  $z(0) = a$  givet ved  $z(t) = e^{\lambda t} a$

#### Bevis

Vi ved at  $\lambda$  er på formen  $c + id$ . Det kan vi sætte ind i  $e^{\lambda t}$  og differentiere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt} e^{(c+id)t} \\ &= \frac{d}{dt} e^{ct+idt} \\ &= \frac{d}{dt} e^{ct} e^{idt} \\ &= \frac{d}{dt} e^{ct} (\cos(dt) + i \sin(dt)) \\ &= c e^{ct} (\cos(dt) + i \sin(dt)) + e^{ct} (-d \sin(dt) + id \cos(dt)) \\ &= c e^{ct} (\cos(dt) + i \sin(dt)) + i d e^{ct} (i \sin(dt) + \cos(dt)) \\ &= (c + id) e^{ct} (\cos(dt) + i \sin(dt)) \\ &= (c + id) e^{ct} e^{idt} \\ &= (c + id) e^{ct+idt} \\ &= (c + id) e^{(c+id)t} \\ &= \lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Altså er  $z'(t) = \lambda e^{\lambda t} a = \lambda z(t)$ , og  $z(t)$  er derfor en løsning til  $(\diamond)$ . Og det er klart at  $z(0) = a$ .

For at vise at alle løsninger er på samme form som  $z(t)$  kan vi lade  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  være en løsning til  $x' = \lambda x$ , med  $y(0) = a$ .

Så har vi at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}y(t)) &= -\lambda e^{-\lambda t}y(t) + e^{-\lambda t}y'(t) \\ &= e^{-\lambda t}(y'(t) - \lambda y(t)) \\ &= 0\end{aligned}\tag{★}$$

Hvilket giver os at  $e^{-\lambda t}y(t)$  er konstant. Som kun kan ske hvis  $y(t)$  er invers til  $e^{-\lambda t}$ , nemlig på formen  $e^{\lambda t}$ . Bemærk at (★) følger af  $y'(t) = \lambda y(t)$ .

Vi er også givet for  $t = 0$  at

$$e^{-\lambda t}y(t) = e^{-\lambda 0}y(0) = y(0) = a$$

Derfor

$$y(t) = e^{\lambda t}a = z(t)$$

$z(t)$  er altså den entydige løsning til (◇) med  $z(0) = a$ .

## 14.2 Putzers Algoritme

### Sætning 12.2.2 (Putzers Algoritme)

Lad  $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$  og  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  være  $A$ 's egenverdier, talt med multiplicitet.

Vi lader  $P_k$  være

$$P_k = \begin{cases} I & \text{hvis } k = 0 \\ \prod_{j=1}^k (A - \lambda_j I) & \text{for } k = 1, \dots, n \end{cases}$$

og kan nu definere  $Q(t)$  som

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k$$

hvor  $r_k$  er

$$r_k(t) = \begin{cases} e^{\lambda_1 t} & \text{hvis } k = 1 \\ e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s) ds & \text{for } k = 2, \dots, n \end{cases}$$

Så gælder at  $Q(0) = I$ , og  $Q'(t) = AQ(t) = Q(t)A$ .

### Bevis

Først kan vi sige at  $r_1(0) = 1$ , og  $r_k(0) = 0$  for  $k = 2, \dots, n$ , så  $Q(0) = P_0 = I$ .

Vi kan se at  $A$  kommuterer med  $(A - \lambda_i I)$  for  $i = 1, \dots, n$ , derfor kommuterer den også med  $P_0, \dots, P_{n-1}$ , og så med  $Q(t)$ . Altså gælder det at  $AQ(t) = Q(t)A$ .



For  $k > 1$  gælder ddet at

$$\begin{aligned}
 r'_k(t) &= (e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s) ds)' \\
 &= \lambda_k e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s) ds + e^{\lambda_k t} e^{-\lambda_k t} r_{k-1}(t) && \text{kæde reglen} \\
 &= \lambda_k r_k(t) + r_{k-1}(t)
 \end{aligned}$$

Ved at definere  $r_0(t) = 0$ , så gælder dette også for  $k = 1$ .

Vi har så at

$$\begin{aligned}
 Q'(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} r'_{k+1}(t) P_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t)) P_k
 \end{aligned}$$

og derfor

$$\begin{aligned}
 Q'(t) - A Q(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t)) P_k - A \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-r_{k+1}(t)(A - \lambda_{k+1} I) P_k + r_k(t) P_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-r_{k+1}(t) P_{k+1} + r_k(t) P_k) && (\clubsuit) \\
 &= -r_n(t) P_n && (\sharp) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

I  $(\clubsuit)$  udnytter vi at  $r_0(t) P_0 = 0$ , og at alle andre end  $-r_n(t) P_n$  går ud med hinanden.

I  $(\sharp)$  siger Cayley-Hamilton at  $P_n = 0$ . Beviset er fuldført.