Lineær Algebra Eksamens Noter

Morten Nygaard 2011 4582
Kasper Eenberg 2011 7679
Jonas Hovmand 2011 3884

7. juni 2013

Indhold

1 Løsninger og mindste kvadraters løsninger af lineære ligningssystemer

([P] 1.2, 5.2, 7.2.10-7.2.13, 8.2.9)

Disposition

1. Lineær Ligningssystem
2. ~~Rækkeækvivalens~~
3. ERO'er
4. REF & RREF
5. Konsistens i Ligningssystemer
6. Mindste Kvadraters Løsninger

1.1 Lineære Ligningssystemer

Eventuelt finde bevis der passer til lineære liningssystemer og måske define-re hvad søjlerum og nulrum er.

Definition

Et lineært ligningssystem er et system af m ligninger i n ubekendte, hvor disse kan skrives som:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Et sådan system kan også opstilles på matrix form, hvor A er en matrix, x og b er vektorer:

$$Ax = b$$

Systemet løses ved at indsætte $c_1, \ldots, c_n$ på x plads, så begge sider af ligheden af den samme, altså er vektoren c en del af løsningsmængden.

1.2 Rækkeækvivalens

Hvis løsningsmængden for et ligningssystem $Ax = b$ og $Cx = d$ er ens, altså de har de samme x, kan A og C siges at være rækkeækvivalente. Sammenhængen mellem A og C vil da være at der er blevet benyttet en række *ERO'er* på A for at danne C.

ERO'er

Der er 3 elementære rækkeoperationer, som kan bruges til at manipulere med ligningssystemer.

1. $R_i \Leftrightarrow R_j$: byt den i'te og den j'te ligning.
2. $R_i \Rightarrow sR_i$: gang den i'te ligning med $s \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$
3. $R_i \Rightarrow R_i + tR_j$: addér t gange R_j til R_i når $t \in \mathbb{F}, j \neq i$.

1.3 REF & RREF

REF

Række Echelon From, er en bestemt form, som en matrix kan komme på. Dette ved hjælp af *ERO'er*. Formen er som følger:

1. Nulrækker, ligger nederst i matricen.
2. Den første ikke-nulindgang i en række er 1 og ligger til højre for den første ikke-nulindgang i rækken ovenover.

Den første ikke-nulindgang på en række i en REF-matrix, kaldes en *pivot*.

RREF

En matrix er på RREF (Reduceret Række Echelon Form), hvis den er på REF, og alle søjler som indeholder en pivot har 0 på alle andre indgange.

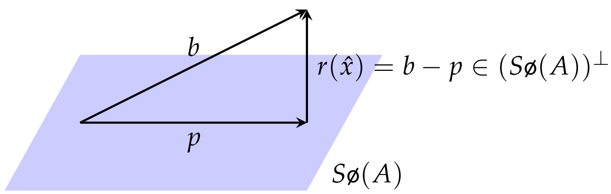
1.4 Konsistens i Ligningssystemer

Lemma 2.2.4

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}$. Skriv $A = [\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}]$ i søjleform.
Betragt da ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor $b \in \mathbb{F}^{m \times 1}$.
Systemet er konsistent (har en løsning) $\Leftrightarrow b \in \mathsf{Span}(\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n})$.

1.5 Mindste Kvadraters Løsninger

En mindste kvadraters løsning er hvor man finder den bedst mulige løsning, til et ligningssystem med flere ligninger end ubekendte. Generelt kan det beskrives som $Ax = b$ hvor $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ med $m > n$.
Generelt kan det ikke forventes at man kan finde et $x \in \mathbb{R}^n$ som løser ligningssystemet, hvilket gør at man leder efter et $z \in \mathbb{R}^n$ som får Az til at være tættest på $b \in \mathbb{R}^m$.



Hvis man har ovenstående ligningssystem kan man finde et residual

$$r(x) = b - Ax$$

som er den "overskydende" afstand mellem den bedste løsning og punkterne. Vi søger derfor at finde den den mindste længde, $\|r(x)\|$, for residualet, hvilket er det samme som at søge den mindst mulige løsning til $\|r(x)\|^2$. En vektor $\hat{x}$ der opfylder dette, siges at være en mindste kvadraters løsning for $Ax = b$ og $p = A\hat{x}$, hvilket gør $p \in S\o(A)$, der er tættest på b.

Proposition 5.2.2

Der er et unikt $p \in S\o(A)$ som er tættest på b. Altså

$$\|b-y\| > \|b-p\|$$

hvor $y, p \in S\o(A)$ og $y \neq p$.

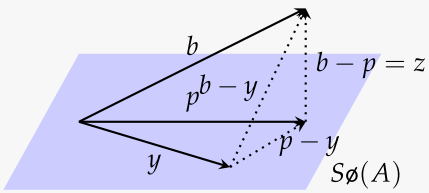
Bevis

Beviset for at p er unik er som følger. Enhver vektor $b \in \mathbb{R}^m$ kan beskrives som

$$b = p + z$$

hvor $p \in S\o(A)$ og $z \in (S\o(A))^{\perp}$. Givet en vektor $y \in S\o(A)$ forskellig fra p gælder

$$\|b-y\|^2 = \|(b-p)+(p-y)\|^2$$



da $p-y \in S\o(A)$ og $b-p = z \in (S\o(A))^{\perp}$ så får vi fra Pythagoras

$$\|b-y\|^2 = \|b-p\|^2 + \|p-y\|^2$$

og vi kan derfor konkludere at

$$\|b-y\| > \|b-p\|$$

Proposition 5.2.4

Systemet $A^TAx = A^Tb$ er konsistent, og z er en løsning til dette system, hhvis z er en mindste kvadraters løsning til $Ax = b$.

Bevis

$$\begin{aligned}
Az = p &\Leftrightarrow b - Az \in (S\o(A))^{\perp} && \text{fordi } p = P_{S\o(A)}(b) \\
&\Leftrightarrow b - Az \in N(A^T) && \text{Sætning 5.1.16} \\
&\Leftrightarrow A^T(b - Az) = 0 \\
&\Leftrightarrow A^Tb = A^TAz
\end{aligned}$$

2 Vektorrum og underrum

([P] 2.1, 3.2)

Disposition

1. Vektorrum
2. Underrum
3. Udspændende Mængde
4. Basis
5. Løsninger til homogent ligningssystem
6. Lineær (U)afhængighed

2.1 Vektorrum

Definition 2.1.1

Et vektorrum er en mængde V udstyret med addition og skalarmultiplikation således at følgende egenskaber er overholdt:

A1 $\forall x, y \in V\colon x + y = y + x$

A2 $\forall x, y, z \in V\colon (x + y) + z = x + (y + z)$

A3 $\exists 0 \in V\colon x + 0 = x \,\forall x \in V$

A4 $\forall x \in V, \exists - x \in V\colon x + (-x) = 0$

S1 $\forall \alpha \in \mathbb{F},\ x, y \in V\colon \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

S2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ x \in V\colon (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

S2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ x \in V\colon (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

S4 $\exists 1 \in \mathbb{F}, \forall x \in V\colon 1 \cdot x = x$

Sætning 2.1.2

Et vektorrum har nogle elementære egenskaber

(I) 0 er det entydige neutrale element i V

(II) $0 \cdot x = 0 \,\forall x \in V$

(III) Hvis $x, y \in V$ er således at $x + y = 0$, så er $y = -x$

(IV) $(-1)x = -x \,\forall x \in V$

2.2 Underrum

En delmængde S af et $\mathbb{F}$-vektorrum V kaldes et underrum, hvis de har følgende egenskaber:

C0 $S \neq \emptyset$

C1 $\forall x \in S, \alpha \in \mathbb{F} \colon \alpha x \in S$

C2 $\forall x, y \in S \colon x + y \in S$

2.3 Udspændende Mængde

Definition 2.2.1

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum og lad $v_1, \ldots, v_n \in V$.
En vektor givet ved $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$ hvor $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ er en lineær kombination af $v_1, \ldots, v_n$.
Mængden af alle lineære kombinationer af $v_1, \ldots, v_n$ kaldes spannet af $v_1, \ldots, v_n$, skrevet $\mathsf{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.

$Span(v_1, \ldots, v_n)$ er et underrum af V, idet spannet overholder C0 - C2. Se eventuelt beviset side 34 [duPlessis].

2.4 Basis

Definition 2.2.11

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum, og lad $v_1, \ldots, v_n \in V$. Da er $v_1, \ldots, v_n$ en basis for V hvis:

1. $v_1, \ldots, v_n$ er lineært uafhængige.
2. $v_1, \ldots, v_n$ udspænder (spanner) V.

2.5 Løsninger til det homogene ligningssystem

Korollar 1.2.13

Lad $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$.

1. Det homogene ligningssystem $Ax = 0$ har altid en løsning, $x = 0$.
2. Hvis $n > m$ så har $Ax = 0$ flere løsninger.

For eksempel har nedenstående $Mat_{2,3}(\mathbb{F})$ uendelige mange løsninger, hvis det gælder at den er lig 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bevis

1. Da $A0 = 0$ er 0 en løsning til ligningssystemet.
2. Lad $A \sim H$ på RREF, så $[A \mid 0] = [H \mid 0]$. H har m rækker, og dermed højst m pivot'er, og da $n > m$ må der altså være mindst $n - m$ søjler uden pivot.

   Så ligningssystemet må have uendeligt mange løsninger hvis $\mathbb{F}$ har uendeligt mange elementer, eller q^{n-m} løsninger, hvis $\mathbb{F}$ har $p < \infty$ elementer.

2.6 Lineær (U)afhængighed

Definition 2.2.6

Et sæt $v_1, \ldots, v_n$ af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at en lineær kombination af vektorerne

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$$

kun har den trivielle løsning, altså at $c_i = 0$ for alle $i = 1, \ldots, n$. Hvis der derimod eksisterer et $c_i \neq 0$, så samme ligning stadig er opfyldt, så er vektorerne istedet lineært afhængige, da en kan skrives som en lineær kombination af de andre.

Sætning 2.2.9

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum, lad $v_1, \ldots, v_n \in V$, og lad $S = \mathsf{Span}(v_1, \ldots, v_n)$. Et element $v \in S$ kan udtrykkes *entydigt* som en lineær kombination af $v_1, \ldots, v_n \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n$ er lineært uafhængige.

Bevis

Da $v \in S$ ved vi per definition af spannet, at vi kan skrive v som en lineær kombination.

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \text{ med } a_1, \ldots a_n \in \mathbb{F}$$

Hvis der samtidig gælder at vi kan skrive v som:

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \text{ med } b_1, \ldots b_n \in \mathbb{F}$$

så er

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

Hvis $v_1, \ldots, v_n$ er lineært **uafhængige** så må:

$$(a_1 - b_1) = 0, \ldots, (a_n - b_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$$

Der findes dermed kun 1 måde at udtrykke v som en lineær kombination af $v_1, \ldots, v_n$
Hvis $v_1, \ldots, v_n$ er lineært **afhængige**, må der findes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, hvor ikke alle c_i er 0, og hvor $c_1 v_1 + \ldots c_n v_n = 0$, hvilket giver os:

$$v = v + 0 = (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) + (c_1 v_1 + \ldots c_n v_n) = (a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_n + c_n)v_n$$

Altså er $(a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_n + c_n)v_n$ et andet udtryk for en lineær kombination af v, da mindst 1 c ikke er 0 og ligningen derfor ikke er lig den øverste.

Sætning 2.2.15

Lad $V = \text{Span}(v_1, \ldots\ v_n)$ være et $\mathbb{F}$-vektorrum. Lad $u_1, \ldots, u_m \in V$, hvor $m > n$. Så er $u_1, \ldots, u_m$ afhængige.

Bevis

Vi kan opstille hver af u_i'erne som en lineær kombination af V for $i = 1, \ldots, m$.

$$u_i = a_{1i}v_1 + \cdots + a_{ni}v_n, \text{ hvor } a_{1i}, \ldots, a_{ni} \in \mathbb{F}$$

Samtidig kan vi opstille en lineær kombination af alle $u_i'er$ og omskrive denne til at være en sum af de ovenstående lineære kombinationer.

$$\begin{aligned} 0 = U &= x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i)v_j \end{aligned}$$

Vi ved at $v_1, \ldots, v_n$ ikke er 0, da disse er baser. Derfor må $\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i) = 0$. Dette kan opstilles som et ligningssystem der har n ligninger og m ubekendte:

$$\begin{aligned} &x_1a_{11} + \cdots + x_ma_{1m} \\ &\vdots \\ &x_1a_{n1} + \cdots + x_ma_{nm} \end{aligned}$$

Per korollar 1.2.13, ved vi at et sådan ligningssystem må have en ikke triviel løsning, og per definitionen af lineær afhængighed, ved vi da at vektorerne $u_1, \ldots, u_m$ må være lineært afhængige.

Definition 3.1.1

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum.

1. Hvis $V = \{0\}$, så har V dimension 0.
2. Hvis V har en basis bestående af n vektorer, så har V dimension n.
3. Hvis V ikke har en endelig basis, så har det *uendelig dimension*.

Et $\mathbb{F}$-vektorrum er *endeligt frembragt*, hvis der findes $v_1, \ldots, v_n \in V$ så $V = \text{Span}(v_1, \ldots, v_n)$. Et endelig frembragt vektorrum har en endelig dimension, da den udspændende mængde kan udtyndes til en basis.

Sætning 3.1.4

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum af $\dim V = n$, for n > 0.

1. Enhver mængde af n uafhængige vektorer fra V udspænder V, og er derfor en basis.
2. Enhver mængde af n vektorer, som udspænder V, består af uafhængige vektorer, og er derfor en basis.

Bevis

1. Antag at $v_1, \ldots, v_n \in V$ er uafhængige, og lad $v \in V$ være et vilkårligt element i V. Ifølge 2.2.15 er de $n+1$ vektorer $v, v_1, \ldots, v_n$ afhængige. Altså må der findes en ikke-triviel løsning til
$$cv + c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$$
Hvor $c \neq 0$, da der ellers ville være en ikke-triviel løsning til $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$. Derfor kan vi skrive v som
$$v = (-c_1 c^{-1}) v_1 + \cdots + (-c_n c^{-1}) v_n \in \mathsf{Span}(v_1, \ldots, v_n)$$
Så er $V = \mathsf{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.
2. Antag at $v_1, \ldots, v_n$ udspænder V og at vektorerne er afhængige. I så fald, kan en af dem skrives som en lineær kombination af de andre: $v_n = c_1 v_1 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1}$, hvilket vil sige at $v_1, \ldots, v_{n-1}$ må udspænde V. Samtidig må $u_1, \ldots, u_n$ være en basis for V, da den er udspændt af n vektorer. Per sætning 2.2.15, må $u_1, \ldots, u_n$ være afhængige, hvilket er en modstrid til definitionen på en basis. Så $v_1, \ldots, v_n$ kan ikke være afhængige.

2.7 Backlog

- Kig evt. på lemma 3.1.6
- Overvej beviser fra 3.2

3 Lineær uafhængighed

([P], 2.2, 3.1)

3.1 Basis

Definition 2.2.11

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum, og lad $v_1, \ldots, v_n \in V$. Da er $v_1, \ldots, v_n$ en basis for V hvis:

1. $v_1, \ldots, v_n$ er lineært uafhængige.
2. $v_1, \ldots, v_n$ udspænder (spanner) V.

3.2 Løsninger til Ligningssystem

Korollar 1.2.13

Lad $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$.

1. Det homogene ligningssystem $Ax = 0$ har altid en løsning, $x = 0$.
2. Hvis $n > m$ så har $Ax = 0$ flere løsninger.

For eksempel har nedenstående $Mat_{2,3}(\mathbb{F})$ uendelige mange løsninger, hvis det gælder at den er lig 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bevis

1. Da $A0 = 0$ er 0 en løsning til ligningssystemet.
2. Lad $A \sim H$ på RREF, så $[A \,|\, 0] = [H \,|\, 0]$. H har m rækker, og dermed højst m pivot'er, og da $n > m$ må der altså være mindst $n - m$ søjler uden pivot.

   Så ligningssystemet må have uendeligt mange løsninger hvis $\mathbb{F}$ har uendeligt mange elementer, eller q^{n-m} løsninger, hvis $\mathbb{F}$ har $p < \infty$ elementer.

3.3 {Ua,A}fhængighed

Definition 2.2.6

Et sæt $v_1, \ldots, v_n$ af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at en lineær kombination af vektorerne

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$$

kun har den trivielle løsning, altså at $c_i = 0$ for alle $i = 1, \ldots, n$. Hvis der derimod eksisterer et $c_i \neq 0$, så samme ligning stadig er opfyldt, så er vektorerne istedet lineært afhængige, da en kan skrives som en lineær kombination af de andre.

Sætning 2.2.9

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum, lad $v_1, \ldots, v_n \in V$, og lad $S = \mathsf{Span}(v_1, \ldots, v_n)$. Et element $v \in S$ kan udtrykkes *entydigt* som en lineær kombination af $v_1, \ldots, v_n \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n$ er lineært uafhængige.

Bevis

Da $v \in S$ ved vi per definition af spannet, at vi kan skrive v som en lineær kombination.

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \text{ med } a_1, \ldots a_n \in \mathbb{F}$$

Hvis der samtidig gælder at vi kan skrive v som:

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \text{ med } b_1, \ldots b_n \in \mathbb{F}$$

så er

$$0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$$

Hvis $v_1, \ldots, v_n$ er lineært **uafhængige** så må:

$$(a_1 - b_1) = 0, \ldots, (a_n - b_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$$

Der findes dermed kun 1 måde at udtrykke v som en lineær kombination af $v_1, \ldots, v_n$
Hvis $v_1, \ldots, v_n$ er lineært **afhængige**, må der findes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, hvor ikke alle c_i er 0, og hvor $c_1 v_1 + \ldots c_n v_n = 0$, hvilket giver os:

$$v = v + 0 = (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) + (c_1 v_1 + \ldots c_n v_n) = (a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_n + c_n)v_n$$

Altså er $(a_1 + c_1)v_1 + \cdots + (a_n + c_n)v_n$ et andet udtryk for en lineær kombination af v, da mindst 1 c ikke er 0 og ligningen derfor ikke er lig den øverste.

Sætning 2.2.15

Lad $V = \mathsf{Span}(v_1, \ldots\ v_n)$ være et $\mathbb{F}$-vektorrum. Lad $u_1, \ldots, u_m \in V$, hvor $m > n$. Så er $u_1, \ldots, u_m$ afhængige.

Bevis

Vi kan opstille hver af u_i'erne som en lineær kombination af V for $i = 1, \ldots, m$.

$$u_i = a_{1i} v_1 + \cdots + a_{ni} v_n, \text{ hvor } a_{1i}, \ldots, a_{ni} \in \mathbb{F}$$

Samtidig kan vi opstille en lineær kombination af alle $u_i'er$ og omskrive denne til at være en sum af de ovenstående lineære kombinationer.

$$\begin{aligned}0 = U &= x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i)v_j\end{aligned}$$

Vi ved at $v_1, \ldots, v_n$ ikke er 0, da disse er baser. Derfor må $\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i) = 0$. Dette kan opstilles som et ligningssystem der har n ligninger og m ubekendte:

$$\begin{aligned}x_1a_{11} + \cdots + x_ma_{1m} \\ \vdots \\ x_1a_{n1} + \cdots + x_ma_{nm}\end{aligned}$$

Per korollar 1.2.13, ved vi at et sådan ligningssystem må have en ikke triviel løsning, og per definitionen af lineær afhængighed, ved vi da at vektorerne $u_1, \ldots, u_m$ må være lineært afhængige.

3.4 Dimension

Definition 3.1.1

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum.

1. Hvis $V = \{0\}$, så har V dimension 0.
2. Hvis V har en basis bestående af n vektorer, så har V dimension n.
3. Hvis V ikke har en endelig basis, så har det *uendelig dimension*.

Et $\mathbb{F}$-vektorrum er *endeligt frembragt*, hvis der findes $v_1, \ldots, v_n \in V$ så $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$. Et endelig frembragt vektorrum har en endelig dimension, da den udspændende mængde kan udtyndes til en basis.

Sætning 3.1.4

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum af $\dim V = n$, for n > 0.

1. Enhver mængde af n uafhængige vektorer fra V udspænder V, og er derfor en basis.
2. Enhver mængde af n vektorer, som udspænder V, består af uafhængige vektorer, og er derfor en basis.

Bevis

1. Antag at $v_1, \ldots, v_n \in V$ er uafhængige, og lad $v \in V$ være et vilkårligt element i V. Ifølge 2.2.15 er de $n+1$ vektorer $v, v_1, \ldots, v_n$ afhængige. Altså må der findes en ikke-triviel løsning til
$$cv + c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$$
Hvor $c \neq 0$, da der ellers ville være en ikke-triviel løsning til $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$. Derfor kan vi skrive v som
$$v = (-c_1c^{-1})v_1 + \cdots + (-c_nc^{-1})v_n \in \mathsf{Span}(v_1, \ldots, v_n)$$
Så er $V = \mathsf{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.

2. Antag at $v_1, \ldots, v_n$ udspænder V og at vektorerne er afhængige. I så fald, kan en af dem skrives som en lineær kombination af de andre: $v_n = c_1v_1 + \ldots + c_{n-1}v_{n-1}$, hvilket vil sige at $v_1, \ldots, v_{n-1}$ må udspænde V. Samtidig må $u_1, \ldots, u_n$ være en basis for V, da den er udspændt af n vektorer. Per sætning 2.2.15, må $u_1, \ldots, u_n$ være afhængige, hvilket er en modstrid til definitionen på en basis. Så $v_1, \ldots, v_n$ kan ikke være afhængige.

4 Basis for vektorrum; koordinatisering

([P] 3.1, 3.3)

4.1 Lineær Uafhængighed

Definition 2.2.6

Et sæt $v_1, \ldots, v_n$ af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at en lineær kombination af vektorerne

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$$

kun har den trivielle løsning, altså at $c_i = 0$ for alle $i = 1, \ldots, n$. Hvis der derimod eksisterer et $c_i \neq 0$, så samme ligning stadig er opfyldt, så er vektorerne istedet lineært afhængige, da en kan skrives som en lineær kombination af de andre.

Sætning 2.2.15

Lad $V = \mathsf{Span}(v_1, \ldots\ v_n)$ være et $\mathbb{F}$-vektorrum. Lad $u_1, \ldots, u_m \in V$, hvor $m > n$. Så er $u_1, \ldots, u_m$ afhængige.

Bevis

Vi kan opstille hver af u_i'erne som en lineær kombination af V for $i = 1, \ldots, m$.

$$u_i = a_{1i} v_1 + \cdots + a_{ni} v_n, \text{ hvor } a_{1i}, \ldots, a_{ni} \in \mathbb{F}$$

Samtidig kan vi opstille en lineær kombination af alle $u_i' er$ og omskrive denne til at være en sum af de ovenstående lineære kombinationer.

$$\begin{aligned} 0 = U &= x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} x_i\right) v_j \end{aligned}$$

Vi ved at $v_1, \ldots, v_n$ ikke er 0, da disse er baser. Derfor må $\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} x_i) = 0$. Dette kan opstilles som et ligningssystem der har n ligninger og m ubekendte:

$$\begin{aligned} &x_1 a_{11} + \cdots + x_m a_{1m} \\ &\vdots \\ &x_1 a_{n1} + \cdots + x_m a_{nm} \end{aligned}$$

Per korollar 1.2.13, ved vi at et sådan ligningssystem må have en ikke triviel løsning, og per definitionen af lineær afhængighed, ved vi da at vektorerne $u_1, \ldots, u_m$ må være lineært afhængige.

4.2 Basis

Definition 2.2.11

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum, og lad $v_1, \dots, v_n \in V$. Da er $v_1, \dots, v_n$ en basis for V hvis:

1. $v_1, \dots, v_n$ er lineært uafhængige.
2. $v_1, \dots, v_n$ udspænder (spanner) V.

Definition 3.1.1

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum.

1. Hvis $V = \{0\}$, så har V dimension 0.
2. Hvis V har en basis bestående af n vektorer, så har V dimension n.
3. Hvis V ikke har en endelig basis, så har det *uendelig dimension*.

Et $\mathbb{F}$-vektorrum er *endeligt frembragt*, hvis der findes $v_1, \dots, v_n \in V$ så $V = \mathsf{Span}(v_1, \dots, v_n)$. Et endelig frembragt vektorrum har en endelig dimension, da den udspændende mængde kan udtyndes til en basis.

Sætning 3.1.4

Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum af dim $V = n$, for n > 0.

1. Enhver mængde af n uafhængige vektorer fra V udspænder V, og er derfor en basis.
2. Enhver mængde af n vektorer, som udspænder V, består af uafhængige vektorer, og er derfor en basis.

Bevis

1. Antag at $v_1, \dots, v_n \in V$ er uafhængige, og lad $v \in V$ være et vilkårligt element i V. Ifølge 2.2.15 er de $n+1$ vektorer $v, v_1, \dots, v_n$ afhængige. Altså må der findes en ikke-triviel løsning til
$$cv + c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$$
Hvor $c \neq 0$, da der ellers ville være en ikke-triviel løsning til $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$. Derfor kan vi skrive v som
$$v = (-c_1c^{-1})v_1 + \cdots + (-c_nc^{-1})v_n \in \mathsf{Span}(v_1, \dots, v_n)$$
Så er $V = \mathsf{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

2. Antag at $v_1, \dots, v_n$ udspænder V og at vektorerne er afhængige. I så fald, kan en af dem skrives som en lineær kombination af de andre: $v_n = c_1v_1 + \ldots + c_{n-1}v_{n-1}$, hvilket vil sige at $v_1, \dots, v_{n-1}$ må udspænde V. Samtidig må $u_1, \dots, u_n$ være en basis for V, da den er udspændt af n vektorer. Per sætning 2.2.15, må $u_1, \dots, u_n$ være afhængige, hvilket er en modstrid til definitionen på en basis. Så $v_1, \dots, v_n$ kan ikke være afhængige.

Sætning 1.4.8

Lad $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{F})$. Følgende er ækvivalent:

(a) A er ikke singulær, altså invertibel.

(b) Ligningen $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningen 0.

(c) A er række ækvivalent til I.

Bevis

(a) $\Rightarrow$ (b) Lad $\mathbf{z}$ være en løsning til $A\mathbf{x} = 0$, så er

$$\mathbf{z} = I\mathbf{z} = (A^{-1}A)\mathbf{z} = A^{-1}(Az) = A^{-1}0 = 0$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Brug din fantasi.

(c) $\Rightarrow$ (a) Endnu mere magi.

4.3 Koordinatisering

Definition 3.3.1

Lad $\mathcal{V} = \{\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ være en ordnet basis for V. Lad $\mathbf{v} \in V$, da kan $\mathbf{v}$ skrives entydig som en lineær kombination af $\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}$:

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

Der er således et entydigt element $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$, som angiver koordinaterne for $\mathbf{v}$ i $\mathcal{V}$. Dette kaldes *koordinatvektoren* for $\mathbf{v}$ mht. $\mathcal{V}$ og denne skrives som:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

En sådan koordinatisering bevarer lineær struktur (lemma 3.3.2), hvilket vil sige at:

1. $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} + [\mathbf{w}]_{\mathcal{V}}$
2. $[r\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = r[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$

Proposition 3.3.7

Lad $\mathcal{U} = \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n}$, $\mathcal{V} = \mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ være 2 ordnede baser i $W \in \mathbb{F}^n$. Lad $K \in Mat_{n,n}(\mathbb{F})$ være givet givet i søjleform ved $[[\mathbf{u_1}]_\mathcal{V}, \dots, [\mathbf{u_n}]_\mathcal{V}]$. Følgende gør sig da gældende:

1. K er invertibel
2. $\forall \mathbf{w} \in W, [\mathbf{w}]_\mathcal{V} = K[\mathbf{w}]_\mathcal{U}$.
3. K er den entydige matric i $Mat_{n,n}(\mathbb{F})$, således at (2) gør sig gældende.

Bevis

1. Vi antager at $K' = K \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$, så vi kan skrive K' som en lineær kombination:

$$K' = x_1[\mathbf{u_1}]_\mathcal{V} + \ldots + x_n[\mathbf{u_n}]_\mathcal{V} = [x_1\mathbf{u_1} + \ldots + x_n\mathbf{u_n}]_\mathcal{V} = 0$$

   Hvor det sidste lighedstegn kommer af at koordinatisering bevarer lineær struktur. Da $K' = 0$ må det gælde $\forall x = 0$, da $\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n}$ er uafhængige, per definitionen af en basis, og dermed ikke kan være 0. Ligningssystemet har da kun løsningen 0 per sætning 1.4.8, og K er dermed invertibel.

2. For $i = 1, \dots, n$ kan $\mathbf{u_i}$ skrives som en lineær kombination $\mathbf{u_i} = k_{1i}\mathbf{v_1} + \cdots + k_{ni}\mathbf{v_n}$ hvor

$$\begin{bmatrix} k_{1i} \\ \vdots \\ k_{ni} \end{bmatrix} = [\mathbf{u_i}]_\mathcal{V}$$

   er den i'te søjle i K.

   En anden vektor $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u_1} + \cdots + c_n\mathbf{u_n}$

$$[\mathbf{w}]_\mathcal{U} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

   Skrives denne helt ud har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= c_1(k_{11}\mathbf{v_1} + \cdots + k_{n1}\mathbf{v_n}) + \cdots + c_n(k_{1n}\mathbf{v_1} + \cdots + k_{nn}\mathbf{v_n}) \\ &= (c_1k_{11} + \cdots + c_nk_{1n})\mathbf{v_1} + \cdots + (c_1k_{n1} + \cdots + c_nk_{nn})\mathbf{v_n} \end{aligned}$$

   hvor

$$[\mathbf{w}]_\mathcal{V} = \begin{bmatrix} k_{11}c_1 + \cdots + k_{1n}c_n \\ \vdots \\ k_{n1}c_1 + \cdots + k_{nn}c_n \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = K[\mathbf{w}]_\mathcal{U}$$

   Vi har hermed vist at K er koordinattransformationsmatricen til $\mathcal{V}$-koordinater fra $\mathcal{U}$-koordinater.

$$[\mathbf{w}]_\mathcal{V} = K_{\mathcal{V}\mathcal{U}}[\mathbf{w}]_\mathcal{U}$$

3. Vi antager at K' eksisterer så

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{V}} = K'[\mathbf{w}]_{\mathcal{U}}, \; \forall \; \mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$$

Det gælder så for $u_i, i = 1, \ldots, n$ at

$$\begin{bmatrix} k_{1i} \\ \vdots \\ k_{1n} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{V}} = K'[\mathbf{u}_i]_{\mathcal{U}} = K'\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} k'_{1i} \\ \vdots \\ k'_{1n} \end{bmatrix}$$

for $i = 1, \ldots, n$.

Da

i'te index

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_i, \cdots, \mathbf{u}_n\} \Rightarrow \mathbf{u}_i = \mathcal{U} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = \mathcal{U}e_i$$

Så K og K' har samme søjler, og de er ens.

5 Matricer og lineære transformationer

([P] 4.1, 4.2, 4.3)

5.1 Underrum

En delmængde S af et $\mathbb{F}$-vektorrum V kaldes et underrum, hvis de har følgende egenskaber:

C0 $S \neq \emptyset$

C1 $\forall x \in S,\ \alpha \in \mathbb{F} \colon \alpha x \in S$

C2 $\forall x, y \in S \colon x + y \in S$

5.2 Lineær transformation

Definition 4.1.1

Lad V, W være $\mathbb{F}$-vektorrum. En lineær transformation $L : V \to W$ er en afbildning, som respekterer lineær struktur, dvs.

1. $\forall \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V, L(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = L(\mathbf{v_1}) + L(\mathbf{v_2})$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \mathbf{v} \in V, L(\alpha \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v})$.

En *lineær transformation* kaldes også for en *lineær afbildning*, og en *lineær operator* Hvis de 2 rum V og W er ens. Følgende egenskaber gør sig gældende for en lineær transformation:

1. $L(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$.
2. L respekterer lineære kombinationer dvs.

$$L(\alpha_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{v_n}) = \alpha_1 L(\mathbf{v_1}) + \cdots + \alpha_n L(\mathbf{v_n})$$

3. $L(-\mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V$

Sætning 4.1.7

Lad V, W være $\mathbb{F}$-vektorrum. Lad $L : V \to W$ være en lineær transformation.

1. Lad $S \subset V$ være et underrum. Da er $L(S)$ et underrum af W.
2. Lad $T \subset W$ være et underrum. Da er $L^{-1}(S)$ et underrum af V.

Bevis

Vi skal for begge vise alle egenskaberne for underrum.

1. Da $\mathbf{0}_W$ er $L(S) \neq \emptyset$
   Lad $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in L(S)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$
   Det eksisterer et $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S$ så $L(\mathbf{s}_1) = \mathbf{w}_1$ og $L(\mathbf{s}_2) = \mathbf{w}_2$
   Samtidig ved vi at $\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 \in S$, og derfor:

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 = \alpha_1 L(\mathbf{s}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{s}_2) = L(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2) \in S$$

2. Det gælder som før at $\mathbf{0}_W = L^{-1}(T) \implies L^{-1}(T) \neq \emptyset$
   Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L^{-1}(T)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. Vi har

$$L(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = L(\alpha_1 \mathbf{v}_1) + L(\alpha_2 \mathbf{v}_2)$$

   Da $L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2) \in T$, er $\alpha_1 L(\mathbf{v}_1), \alpha_2 L(\mathbf{v}_2) \in T$
   Så $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \in L^{-1}(T)$.

Diagrammet her kan bruges til at beskrive transitioner i følgende beviser.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\text{L}"] \arrow[d, "\theta_{\mathcal{V}}"] & W \arrow[d, "\theta_{\mathcal{W}}"'] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, "L_{M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(L)}"] & \mathbb{F}^m
\end{tikzcd}$$

Sætning 4.2.1

Lad $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ være en lineær tranformation. Vi definerer $M(L) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$ ved $M(L) = [L(\mathbf{e_1}), \cdots, L(\mathbf{e_n})]$. Så er $L(\mathbf{x}) = M(L)\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ og $M(L)$ er den entydige matix med denne egenskab.

Bevis

Lad $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$, så kan x skrives som en lineær kombination: $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e_1} + \cdots + x_n \mathbf{e_n}$.
Da må det gælde at:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}) &= L(x_1 \mathbf{e_1} + \cdots + x_n \mathbf{e_n}) \\
&= x_1 L(\mathbf{e_1}) + \cdots + x_n L(\mathbf{e_n}) \\
&= [L(\mathbf{e_1}), \cdots, L(\mathbf{e_n})] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= M(L)\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Entydigheden kan vises hvis det så gælder at $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$ tilfredsstiller $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, så gælder dette specielt for $\mathbf{x} = \mathbf{e_i}$ hvor $i = 1, \cdots, n$ at $L(\mathbf{e_i}) = A\mathbf{e_i} \Rightarrow \{\text{i'te række i A}\} = \{\text{i'te række i M(L)}\}$.

Sætning 4.2.4

Lad V, W være $\mathbb{F}$-vektorrum og lad $\mathcal{V} = \{\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$, $\mathcal{W} = \{\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ være ordnede baser for V, W. Lad $L \colon V \to W$ være en lineær transformation.

$$M_{\mathcal{W},\mathcal{V}} = [[L(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{W}}, \cdots, [L(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{W}}]$$

Der gælder, at $[L(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{W}} = M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$ for alle $\mathbf{v} \in V$, samt at $M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}$ er den entydige matrix med denne egenskab.

Bevis

Lad $\mathbf{v} \in V$ hvor $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v_1}, \cdots, x_1\mathbf{v_1}$ og $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$. Vi har

$$L(\mathbf{v}) = L(x_1\mathbf{v_1} + \cdots + x_n\mathbf{v_n})$$

så

$$\begin{aligned} [L(\mathbf{v})]_{\mathcal{W}} =& [x_1 L(\mathbf{v_1}) + \cdots + x_n L(\mathbf{v_n})]_{\mathcal{W}} \\ =& x_1[L(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{W}} + \cdots + x_n[L(\mathbf{v_n})]_{\mathcal{W}} \\ =& [[L(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{W}}, \cdots, [L(\mathbf{v_n})]_{\mathcal{W}}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ =& M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

Hvis $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$ tilfredsstiller at

$$[L(\mathbf{v})]_{\mathcal{W}} = A[\mathbf{v_1}]_{\mathcal{V}} = Ae_i = \{i\text{'te søjle i } A\}$$

Så har $M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(L)$ og A de samme søjler og er derfor ens.

6 Determinanter

([P] 8.1, 8.2)

6.1 Definition og Egenskaber

Definition 8.1.1

For $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ med $n \geq 2$ er den (i,j)'te minor $M(A)_{ij} \in \mathsf{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{F})$ dannet ved at sløjfe den i'te søjle og j'te række.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,i} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Definition 8.1.2

For $B \in \mathsf{Mat}_{1,1}(\mathbb{F})$ er $\det B = b_{1,1}$.
For $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ og $n > 1$ antager vi at det er vist for en $(n-1) \times (n-1)$-matrix.

1. For $1 \leq i, j \leq n$ er den (i,j)'te cofaktor A_{ij} af A givet som

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M(A)_{ij})$$

2. Determinanten af A er givet som

$$\det A = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Determinanten udvikles altså efter første række.

Bemærkning

Der er en række basale regler for determinanter:

- 8.1.3: Determinanten kan udvikles efter første søjle: $\det(A) = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$
- 8.1.4: Hvis B er A med de første to rækker byttet om, så er $\det A = -\det B$.
- 8.1.5: Hvis B er A med to vilkårlige rækker byttet gælder $\det A = -\det B$.
- 8.1.6: Determinanten kan udvikles efter k'te række: $\det(A) = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn}$.
- 8.1.8: Hvis B er A med to søjler byttet, so er $\det(A) = -\det(B)$.
- 8.1.9: For $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ og $n > 1$, hvis A har to ens rækker/søjler gælder det at $\det(A) = 0$.
- 8.1.10/11 (a): Hvis A har en nul-række/søjle er $\det(A) = 0$.

- 8.1.10/11 (b): Hvis B er A med k'te række/søjle gange med r, så gælder $\det(B) = r\det(A)$
- 8.1.10/11 (c): Hvis B er A med s gange i'te række/søjle lagt til j'te række, $i \neq j$, så er $\det(A) = \det(B)$.
- 8.1.12: Hvis A er triangulær, så er $\det(A)$ produktet af A's diagonalindgange.
- 8.1.13: Hvis E er elementærmatrix gælder $\det(EA) = \det(E)\det(A)$. Deraf følger $\det(AE) = \det(E)\det(A)$.

6.2 Transponeret Matrix

Lemma 8.1.7

Lad $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{F})$. Der gælder $\det(A^T) = \det(A)$.

Bevis

Vi beviser lemmaet ved induktion. Vores basistilfælde kan være for matricen hvor $n = 2$.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
$$\det(A^T) = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

I ovenstående må der gælde lighedstegn, da den kommutative lov er gældende.
Herefter opstiller vi induktions hypotesen at $\det(A^T) = \det(A)$ når A er en $(n-1) \times (n-1)$ matrix.
Vi vil herefter via induktion vise at dette også gør sig gældende for en $n \times n$ matrix.

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M(A^T)_{j1})$$

Vi kan da skrive minoren som $M(A^T)_{j1} = (M(A)_{1j})^T$. Da må det per induktionshypotesen gælde:

$$M(A^T)_{j1} = (M(A)_{1j})^T = \det(M(A)_{1j})$$

Da minoren netop er en $(n-1) \times (n-1)$ matrix. Derfor må:

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M(A)_{1j}) = \det(A)$$

6.3 Singulære Matricer og Determinanter

Sætning 8.1.15

$A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ er singulær $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$.

Bevis

$A \sim H$, hvor H er på RREF.

$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 H$$

hvilket giver en determinant

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(E_k E_{k-1} \cdots E_1 H) \\ &= \det(E_k) \det(E_{k-1} \cdots E_1 H) \\ &= \det(E_k) \det(E_{k-1}) \cdots \det(E_1) \det(H)\end{aligned}$$

- ($\Rightarrow$) H må have en nulrække, hvilket giver $\det(H) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$.
- ($\Leftarrow$) $H = I$; H er ikke singulær hvilket betyder at $\det(A) \neq 0$.

6.4 Cramers Regel

Definition 8.2.6

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. Den adjungerede matrix er da

$$\mathsf{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

svarende til den transponerede kofaktormatrice.

Korollar 8.2.9

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ være invertibel, og lad $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$. Lad A_i være matricen, der fås ved at erstatte den i'te søjle i A med $\mathbf{b}$. Den entydige løsning $\hat{x}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er da givet ved:

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = 1, \cdots, n$$

Bevis

Hvis vi ombytter lidt på ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, får vi at $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Dette kan vi ved hjælp at Korrolar 8.2.8 omskrive:

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\mathbf{b}$$

hvor $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}$, og derfor må det gælde at for $i = 1, \cdots, n$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_i &= \frac{1}{\det(A)} (\mathsf{adj}\ A)_{:i} \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{\det(A)} (A_{1i} b_1 + \cdots + A_{ni} b_n) \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det(A_i) \\ &= \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \end{aligned}$$

7 Egenværdier og egenvektorer

([P] 9.1)

Definition 9.1.1

1. Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum og lad $T : V \to V$ være en lineær transformation. $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for T, hvis der findes $\mathbf{v} \in V \backslash \{0\}$, så $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

   $\mathbf{v}$ er da en egenvektor for T associeret til λ.

2. Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for A hvis der findes $\mathbf{z} \in \mathbb{F}^n \backslash \{0\}$, så $A\mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$.

   $\mathbf{z}$ er da en egenvektor for A associeret til λ.

Egenvektoren findes ved at finde nulrummet $N(A - \lambda I)$, eller sagt på en anden måde indsætte egenværdierne på λ's plads, hvorefter matricen reduceres, for at man så kan finde egenvektoren. Nulrummet $N(A - \lambda_i I)$ kaldes for $E_A(\lambda_i)$.

Notation 9.1.6

p_A kaldet det karakteristiske polynomium for A, hvor $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. Hvis $\det(A - \lambda I)$ beregnes for et ubestemt λ, så fås et polynomium af grad n i λ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Rødderne for polynomiet er de λ hvor $p_A(\lambda) = 0$, og disse λ er egenværdier for A.

Notation 9.1.8

Dimensionen af egenrummet for en egenværdi $dim(E_A(\lambda_i))$ kaldes den *geometriske multiplicitet*. $Geo_A(\lambda_i)$ af λ_i.
Den *algrebraiske multiplicitet* $Alg_A(\lambda_0)$ af λ_0 er det antal gange $\lambda - \lambda_0$ går op i $p_A(\lambda)$, altså hvis: $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} q(\lambda)$, hvor $q(\lambda) \neq 0$, så er $m_0 = Alg_A(\lambda_0)$.

Bemærkning

Det siges at $A, B \in \mathsf{Mat}(\mathbb{F})$ er similære, hvis der eksisterer et $S \in \mathsf{Mat}(\mathbb{F})$, så det gælder at $S^{-1}AS = B$. Det følger derfor at S er invertibel.
Hvis dette er tilfældet, gælder det at $SBS^{-1} = A$.

Lemma 9.1.16

Lad A, B være similære.

1. $p_A = p_B$.

2. Hvis λ_0 er en egenværdi for A og B, så er $\mathsf{Geo}_A(\lambda_0) = \mathsf{Geo}_B(\lambda_0)$.

Bevis

1. Der eksisterer en ikke singulær $S \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ så $B = S^{-1}AS$. For et vilkårligt λ gælder det at
$$S^{-1}(A - \lambda I)S = (S^{-1}AS) - (S^{-1}\lambda S) = B - \lambda I$$
Derfor
$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= \det(S^{-1}\det(A - \lambda I)\det(S) \\ &= \det(S^{-1}\det(S)\det(A - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}S)\det(A - \lambda I) \\ &= \det(A - \lambda I) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

2. Lad $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en basis for $N(A - \lambda_0 I)$. Så har vi for $i = 1, \ldots, n$
$$\begin{aligned} &S^{-1}(A - \lambda_0 I)S\mathbf{v}_i = (B - \lambda_0 I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \\ \Rightarrow &(A - \lambda_0 I)S\mathbf{v}_i = S(B - \lambda_0 I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \\ \Rightarrow &S\mathbf{v}_i \in N(A - \lambda_0 I) \end{aligned}$$
Ud fra foregående kan vi se at vi har minimum k vektorer i nulrummet. Argumentet for at $S\mathbf{v}_1, \ldots, S\mathbf{v}_k$ er uafhængige er at antage
$$\begin{aligned} &c_1 S\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k S\mathbf{v}_k \\ &= S(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$
Og derfor er
$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = S^{-1}S(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = S^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
og vi ved at $c_1 = \cdots = c_k = 0$, da $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ er uafhængige.
Så vi kan konkludere at nulrummet for $N(A - \lambda_0 I)$ er større eller lig $N(B - \lambda_0 I)$.
$$\dim N(A - \lambda_0 I) \geq \dim N(B - \lambda_0 I)$$
På samme måde kan man køre med baserne $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ for $N(A - \lambda_0 I)$, og nå frem til
$$\dim N(A - \lambda_0 I) \geq \dim N(B - \lambda_0 I)$$
Så
$$\mathsf{Geo}_A(\lambda_0) = \dim N(A - \lambda_0 I) = \dim N(B - \lambda_0 I) = \mathsf{Geo}_B(\lambda_0)$$

Lemma 9.2.2

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. Følgende er ækvivalente

(1) Der findes en basis for $\mathbb{F}^n$ bestående af egenvektorer for A.

(2) Der findes n lineært uafhængige egenvektorer for A.

(3) Der findes en invertibel matrix $V \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ så $V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.

Bevis

(1) $\Rightarrow$ **(2)** Oplagt, da en basis er uafhængige.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Hvis man har n lineært uafhængige vektorer danner de en basis, se sætning 3.1.4.

(2) $\Rightarrow$ **(3)** Lad $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ være lineært uafhængige egenvektorer med tilhørende $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ for A, hvor $V = [\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}]$ i søjleform. Vi har

$$\begin{aligned} AV = A[\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}] &= [A\mathbf{v_1}, \dots, A\mathbf{v_n}] \\ &= [\lambda_1\mathbf{v_1}, \dots, \lambda_n\mathbf{v_n}] \\ &= [\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}]D \\ &= VD \end{aligned}$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

er diagonal. Da V har uafhængige søjler er den diagonal og $V^{-1}AV = V^{-1}VD = D$.

(3) $\Rightarrow$ **(2)** Antag, $X \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ så $X^{-1}AX = D$, hvor D er er diagonal, som ovenover. Da X er invertibel er søjlerne i $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ uafhængige.

Vi har $AX = X(X^{-1}AX) = XD$, dvs. $[A\mathbf{v_1}, \dots, A\mathbf{x_n}] = [\lambda_1\mathbf{v_1}, \dots, \lambda_n\mathbf{x_n}]$. Dette giver $A\mathbf{x_i} = \lambda_i\mathbf{x_i}$, hvilket betyder at $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ er uafhængige og egenvektorer for A.

8 Diagonalisering

([P] 9.2, 11.1)

Definition 9.1.1

1. Lad V være et $\mathbb{F}$-vektorrum og lad $T : V \to V$ være en lineær transformation. $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for T, hvis der findes $\mathbf{v} \in V \backslash \{0\}$, så $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

   $\mathbf{v}$ er da en egenvektor for T associeret til λ.

2. Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi for A hvis der findes $\mathbf{z} \in \mathbb{F}^n \backslash \{0\}$, så $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$.

   $\mathbf{z}$ er da en egenvektor for A associeret til λ.

Egenvektoren findes ved at finde nulrummet $N(A - \lambda I)$, eller sagt på en anden måde indsætte egenværdierne på λ's plads, hvorefter matricen reduceres, for at man så kan finde egenvektoren. Nulrummet $N(A - \lambda_i I)$ kaldes for $E_A(\lambda_i)$.

Notation 9.1.6

p_A kaldet det karakteristiske polynomium for A, hvor $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. Hvis $\det(A - \lambda I)$ beregnes for et ubestemt λ, så fås et polynomium af grad n i λ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Rødderne for polynomiet er de λ hvor $p_A(\lambda) = 0$, og disse λ er egenværdier for A.

Notation 9.1.8

Dimensionen af egenrummet for en egenværdi $dim(E_A(\lambda_i))$ kaldes den *geometriske multiplicitet*. $Geo_A(\lambda_i)$ af λ_i.
Den *algrebraiske multiplicitet* $Alg_A(\lambda_0)$ af λ_0 er det antal gange $\lambda - \lambda_0$ går op i $p_A(\lambda)$, altså hvis: $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} q(\lambda)$, hvor $q(\lambda) \neq 0$, så er $m_0 = Alg_A(\lambda_0)$.

Definition 9.2.1

1. Lad $L \mid V \to V$ være en lineær transformation. L er diagonaliserbar hvis der findes en basis $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for V bestående af egenvektorer for L.

2. Lad $A \in \mathsf{Mat}(\mathbb{F})$. A er diagonaliserbar hvis der findes en basis $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for $\mathbb{F}$ bestående af egenvektorer for A.

En diagonalmatrix har nuller på alle andre indgange end diagonalen.

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ d_{i,j} & \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{n,n} \end{bmatrix}$$

Lemma 9.2.2

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. Følgende er ækvivalente

(1) Der findes en basis for $\mathbb{F}^n$ bestående af egenvektorer for A.

(2) Der findes n lineært uafhængige egenvektorer for A.

(3) Der findes en invertibel matrix $V \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ så $V^{-1}AV$ er en diagonalmatrix.

Bevis

(1) ⇒ (2) Oplagt, da en basis er uafhængige.

(2) ⇒ (1) Hvis man har n lineært uafhængige vektorer danner de en basis, se sætning 3.1.4.

(2) ⇒ (3) Lad $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ være lineært uafhængige egenvektorer med tilhørende $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ for A, hvor $V = [\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}]$ i søjleform. Vi har

$$\begin{aligned} AV = A[\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}] &= [A\mathbf{v_1}, \dots, A\mathbf{v_n}] \\ &= [\lambda_1\mathbf{v_1}, \dots, \lambda_n\mathbf{v_n}] \\ &= [\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}]D \\ &= VD \end{aligned}$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

er diagonal. Da V har uafhængige søjler er den diagonal og $V^{-1}AV = V^{-1}VD = D$.

(3) ⇒ (2) Antag, $X \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ så $X^{-1}AX = D$, hvor D er er diagonal, som ovenover. Da X er invertibel er søjlerne i $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ uafhængige.

Vi har $AX = X(X^{-1}AX) = XD$, dvs. $[A\mathbf{v_1}, \dots, A\mathbf{x_n}] = [\lambda_1\mathbf{v_1}, \dots, \lambda_n\mathbf{x_n}]$. Dette giver $A\mathbf{x_i} = \lambda_i\mathbf{x_i}$, hvilket betyder at $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ er uafhængige og egenvektorer for A.

Lemma 9.2.5

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$. Antag at $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ er forskellige egenværdier for A. Lad $v_1, \cdots, v_k$ være tilsvarende egenvektorer. Så er $v_1, \cdots, v_k$ uafhængige.

Bevis

Lad $S = \mathsf{Span}(\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_k})$ og lad $r = dim(S)$. Vi skal så vise at $r = k$. Vi antager modsætningsvis at $r < k$, ydermere antager vi da at $\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_r}$ er en basis for S. Da må en ny egenvektor $\mathbf{v_{r+1}}$ kunne skrives som en lineær kombination af $\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_r}$.

$$\mathbf{v_{r+1}} = c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_r\mathbf{v_r}, \text{ hvor } c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{F}$$

Så vi kan skrive:

$$A\mathbf{v_{r+1}} = A(c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_r\mathbf{v_r}) = c_1 A\mathbf{v_1} + \cdots + c_r A\mathbf{v_r}$$

Da vi ved at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ kan vi omskrive dette til:

$$A\mathbf{v_{r+1}} = \lambda_{r+1}\mathbf{v_{r+1}} = c_1\lambda_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_r\lambda_r\mathbf{v_r}$$

Ganger vi så den første ligning med λ_{r+1} og trækker det fra den sidste, så får vi:

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v_1} + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v_r}$$

Da vi ved at $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$ er en basis for S må disse være uafhænigige og derfor ikke 0.
Ydermere ved vi per antagelse at alle λ er forskellige, hvilket vil sige at $\lambda_i - \lambda_{r+1}$ er forskellig fra 0 for alle $i = 1, \ldots, r$.
Derfor må det være konstanterne $c_1, \ldots, c_n$ der alle må være 0, for at ovenstående ligning kan opfyldes. Men da egenvektoren $\mathbf{v_{r+1}}$ ikke kan være nul, er dette en modstrid med den første ligning, og derfor må vores første antagelse være forkert, og dermed må $r = k$, der gør at $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ alle må være uafhængige.

Sætning 9.2.11

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$; lad $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ være de forskellige egenværdier for A. Så er A diagonaliserbar $\Leftrightarrow$

(1) $\mathsf{Alg}(\lambda_1) + \cdots + \mathsf{Alg}(\lambda_k) = n$.

(2) $\mathsf{Alg}(\lambda_i) = \mathsf{Geo}(\lambda_i)$ for $i = 1, \ldots, k$.

Bemærkning

Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gælder (1) altid.

Bevis

$\Leftarrow$: Hvis (1) og (2) gælder, så har vi at $\mathsf{Geo}(\lambda_1) + \cdots + \mathsf{Geo}(\lambda_k) = n$
$\Rightarrow$:

8.1 backlog

1. Gennemgå 9.2.11, eller evt. 9.2.9.

9 Indre produkt

([P] 6.1, 6.2, 6.3)

9.1 Definitioner

Definition 6.2.1

Lad V være et $\mathbb{C}$-vektorrum. Et (komplekst) indre produkt er en afbildning $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, som tilfredsstiller:

(I) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ er reel, og ikke-negativ for alle $\mathbf{v} \in V$; og er 0 hhvis $v = 0$.

(II) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$ for alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(III) $\langle \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$.

(IV) $\langle \mathbf{v}, \beta\mathbf{w} + \alpha\mathbf{z} \rangle = \overline{\alpha}\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\beta}\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$.

Associeret til det indre produkt er en <u>længde</u> eller <u>norm</u>

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \text{ for } \mathbf{v} \in V$$

(I) siger at $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Noter at $\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\|$ for alle $a \in \mathbb{C}$ og $\mathbf{v} \in V$.

9.2 Pythagoras

Proposition 6.2.4 (Pythagoras)

Lad V være et $\mathbb{C}$-vektorrum med indre produkt $\langle\ ,\ \rangle$. Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ være ortogonale. Der gælder det:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Dette gælder ligeledes for det reele ($\mathbb{R}$) tilfælde.

Bevis

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

Da $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ er ortogonale gælder:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} = 0\overline{0} = 0$$

Og derfor fås ligheden $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Definition 6.2.5

Lad V være et $\mathbb{C}$-vektorrum med indre produkt $\langle\ ,\ \rangle$.
Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$, så er *skalarprojektionen* af $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ tallet

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}$$

mens *vektorprojektionen* er

$$\mathbf{p} = \alpha \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \right) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$$

9.3 Cauchy-Schwarz Uligheden

Sætning 6.2.7 (Cauchy-Swartz-Uligheden)

Lad V være et $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ vektorrum med indre produkt $\langle\ ,\ \rangle$. Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Der gælder

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}, \mathbf{v}\|$$

Ligheden gælder hvis og kun hvis $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ er lineært afhængige.

Bevis

Hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ er der lighed

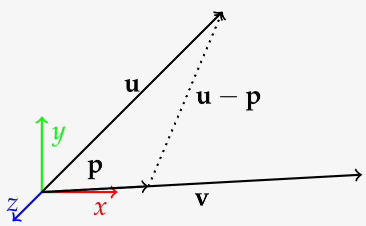
$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = 0 = \|\mathbf{u}, \mathbf{v}\|$$

Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ lades $\mathbf{p}$ være projektionen af $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Da $\mathbf{p}$ og $\mathbf{u} - \mathbf{p}$ er ortogonale er

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

Fra skalarprojektionen så

$$\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|^2} = |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha} = \|\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2$$



Hvilket giver

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{p}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}, \mathbf{v}\|$$

hvor der gælder lighed hvis $u = p$.
Det er hermed vist at der kun gælder lighed når u og v er lineært afhængige.

10 Ortogonalt komplement og projektion

([P] 5.1, 5.2.10, 6.4.12-6.4.17, 7.2.5-7.2.6)

10.1 Dimensioner og Baser for ortogonale komplementer

Proposition 3.2.8

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$, lad $A \sim U$ på REF.

(1) $\dim N(A) =$ # af søjler uden pivot i U.

(2) $\dim \mathsf{Ræ}(A) =$ # af ikke nul-rækker i U.

(3) $\dim \mathsf{Sø}(A) =$ # af søjler med pivot i U.

Det gælder at $\dim(\mathsf{Ræ}(A)) = \dim(\mathsf{Sø}(A))$, samt at $\dim N(A) + \dim \mathsf{Sø}(A) = n$, antallet af søjler i A.

Bevis

(1),(2),(3) følger fra 3.2.1 → 3.1.6.
Da antallet af ikke-nul rækker i U er lig antallet af pivot'er, er $\dim \mathsf{Ræ}(A) = \dim \mathsf{Sø}(A)$.
Hvis k er antallet af søjler med pivot, er $\dim N(A)) = n - k$. $\dim \mathsf{Sø}(A) = k$ og

$$\dim N(A) + \dim \mathsf{Sø}(A) = (n-k) + k = n$$

Sætning 5.1.17

Lad $S \in \mathbb{R}^n$ være et underrum.

1. $S^\perp$ er også et underrum i $\mathbb{R}^n$ og $\dim(S^\perp) = n - \dim(S)$.
2. Hvis $S \neq \{0\}$, $S \neq \mathbb{R}^n$ og $\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_r}\}$ er en basis for S og $\{\mathbf{x_{r+1}}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ er en basis for $S^\perp$, så er $\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.

Bevis

1. Hvis $S = \{0\}$, og $S^\perp \in \mathbb{R}^n$, så følger det naturligt, at $\dim(S^\perp) = n - \dim(S) = n - \dim(\{0\})$.

   Hvis $S \neq \{0\}$, lad da $\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_r}\}$ være en basis for S. Da kan vi skrive $X = [\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_r}]$, hvor $X \in \mathsf{Mat}_{n,r}(\mathbb{R})$ er en matrix hvor søjlerne består af basis vektorerne.

   Da må $S = S\text{ø}(X)$ og da giver lemma 5.1.16 at:

   $$S^\perp = S\text{ø}(X)^\perp = N(X^T)$$

   Hvor det gælder at $N(X^T) \in \mathbb{R}^n$. Da kan vi finde:

   $$\dim(N(X^T)) = \#\mathsf{søjler\ i}\ X^T - \mathsf{rang}(X^T) = n - r = n - \dim(S)$$

Dette fordi X har r uafhængige søjler per definition af basis, så:

$$\text{rang}(X^T) = \text{rang}(X) = r = \dim(S\o(X)) = \dim(S)$$

2. Ifølge sætning 3.1.4 skal vi blot vise at $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$ er uafhængige. Vi antager derfor:

$$c_1\mathbf{x_1} + \ldots + c_r\mathbf{x_r} + c_{r+1}\mathbf{x_{r+1}} + \ldots + c_n\mathbf{x_n} = 0$$

Derpå lader vi vektoren $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x_1} + \ldots + c_r\mathbf{x_r}$ og vektoren $\mathbf{z} = c_{r+1}\mathbf{x_{r+1}} + \ldots + c_n\mathbf{x_n}$. Da må $\mathbf{y} \in S$ og $\mathbf{z} \in S^\perp$, og $\mathbf{y} + \mathbf{z} = 0$.

Dette må betyde at $\mathbf{y} = (-1)\mathbf{z}$, hvilket vil sige at $\mathbf{y} \in S$ og $(-1)\mathbf{z} \in S^\perp$, altså må $\mathbf{y} = (-1)\mathbf{z} \in S \cap S^\perp$, hvilket giver at $\mathbf{y} = (-1)\mathbf{z} = 0$.

Da $c_1x_1 + \ldots + c_rx_r = 0$, må alle $c_1, \ldots, c_r = 0$, da $x_1, \ldots, x_r$ er uafhængige. Da $c_{r+1}x_{r+1} + \ldots + c_nx_n = 0$, må alle $c_{r+1}, \ldots, c_n = 0$, da $x_{r+1}, \ldots, x_n$ er uafhængige. Så $x_1, \ldots, x_n$ er uafhængige og derfor en basis for $\mathbb{R}^n$.

10.2 Ortogonal Projektion

Sætning 6.4.8

For $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ som en ortonormal mængde i V.
Hvis $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$, så er $c_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$.

Bevis

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle = c_i$$

Det sidste gælder da for $i \neq j$ gælder der at $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$, og $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1$, da det er en ortonormal basis.

Sætning 6.4.14

Projektionen (eller ortogonalprojektionen) af v på S er defineret ved

$$\mathbf{p} - \mathbf{v} \in S^\perp \Leftrightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

hvor S er et underrum af det indre-produktrum V, med indre produkt $\langle \, , \rangle$ og $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ er en ortonormalbasis for S, med $v \in V$ og $p \in S$.

Bevis

Projektionen p kan skrives som

$$p = c_1\mathbf{s}_1 + \ldots + c_k\mathbf{s}_k$$

med $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ hvor $c_i = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_i} \rangle$ for $i = 1, \ldots, k$, så

$$p = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_k} \rangle \mathbf{s}_1 + \ldots + \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_k} \rangle \mathbf{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_i} \rangle \mathbf{s}_i$$

Der gælder derfor

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} - \mathbf{v} \in S \Leftrightarrow & \langle \mathbf{s}, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle && \text{for alle } \mathbf{s} \in S \\
\Leftrightarrow & \langle \alpha_1 \mathbf{s}_1, \ldots, \alpha_k \mathbf{s}_k, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle && \text{for alle } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K} \\
\Leftrightarrow & \alpha_1 \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle, \ldots, \alpha_k \langle \mathbf{s}_k, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle && \\
\Leftrightarrow & \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle && \text{for } i = 1, \ldots, k \\
\Leftrightarrow & \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} \rangle && \\
\Leftrightarrow & \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle &&
\end{aligned}$$

hvilket betyder at vi kan redefinere $\mathbf{p}$ som værende afhængig af $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

11 Ortogonale og ortonormale baser

([P] 7.2, 6.4)

11.1 Ortogonal Projektion

Sætning 6.4.14

Projektionen (eller ortogonalprojektionen) af v på S er defineret ved

$$\mathbf{p} - \mathbf{v} \in S^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

hvor S er et underrum af det indre-produktrum V, med indre produkt $\langle\ ,\ \rangle$ og $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ er en ortonormalbasis for S, med $v \in V$ og $p \in S$.

Bevis

Projektionen p kan skrives som

$$p = c_1 \mathbf{s}_1 + \ldots + c_k \mathbf{s}_k$$

med $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ hvor $c_i = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_i} \rangle$ for $i = 1, \ldots, k$, så

$$p = \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_k} \rangle \mathbf{s}_1 + \ldots + \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_k} \rangle \mathbf{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{p}, \mathbf{s_i} \rangle \mathbf{s}_i$$

Der gælder derfor

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} - \mathbf{v} \in S &\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}, \mathbf{p} - \mathbf{v} \rangle && \text{for alle } \mathbf{s} \in S \\
&\Leftrightarrow \langle \alpha_1 \mathbf{s}_1, \ldots, \alpha_k \mathbf{s}_k, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle && \text{for alle } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K} \\
&\Leftrightarrow \alpha_1 \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle, \ldots, \alpha_k \langle \mathbf{s}_k, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle && \\
&\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle && \text{for } i = 1, \ldots, k \\
&\Leftrightarrow \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{p} \rangle && \\
&\Leftrightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle &&
\end{aligned}$$

hvilket betyder at vi kan redefinere $\mathbf{p}$ som værende afhængig af $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}_i \rangle \mathbf{s}_i$$

11.2 Gram-Schmidt Processen

Sætning 7.2.1 (Gram-Schmidt processen)

Lad V være et indre-produkt rum, og skriv $\langle\ ,\ \rangle$ for indre-produkt.
Lad ydermere $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ være en basis for V.
$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ er en ortonormal basis for V lavet på følgende måde:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|}\mathbf{x}_1$$

Og $\mathbf{u}_2 \ldots, \mathbf{u}_n$ er defineret rekursivt ved

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k\|}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k)$$

hvor

$$\mathbf{p}_k = \langle \mathbf{x}_{k+1}\ ,\ \mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{x}_{k+1}\ ,\ \mathbf{u}_k\rangle\mathbf{u}_k$$

er den ortogonale projektion af $\mathbf{x}_{k+1}$ på $\mathsf{Span}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
Da er $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en ortonormal basis for $\mathsf{Span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$, for $k = 1, \ldots, n$.
Og dermed for $k = n$, en ortonormal basis for V.

Bevis

Definer $S_k = \mathsf{Span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ for $k = 1, \ldots, n$.
Basis: For S_1 er det klart at $\mathsf{Span}(\mathbf{u}_1) = \mathsf{Span}(\mathbf{x}_1) = S_1$.
Induktion: Antag nu at det er vist for $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, for $k < n$, og $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en ortonormal basis for S_k.
Lad $\mathbf{p}_k$ være projektionen af $\mathbf{x}_{k+1}$ på S_k. Ifølge sætning 6.1.14 kan denne skrives som

$$\mathbf{p}_k = \langle \mathbf{x}_{k+1}\ ,\ \mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{x}_{k+1}\ ,\ \mathbf{u}_k\rangle\mathbf{u}_k$$

Da $\mathbf{p}_k \in S_k$, kan $\mathbf{p}_k$ skrives som en linearkombination af $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{p}_k = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$$

Vi vil gerne have fat i den ortogonale vektor $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k$, som går ud af S_k:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k = \mathbf{x}_{k+1} - c_1\mathbf{x}_1 - \cdots - c_k\mathbf{x}_k$$

Da vi ved at $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1}$ er uafhængige og $c_1, \ldots, c_k \neq 0$, ved vi at $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k \neq 0$.
Vi ved at

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k \in \mathsf{Span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1}) = S_{k+1}$$

Og ifølge sætning 6.1.14 er

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k \in S_k^{\perp}$$

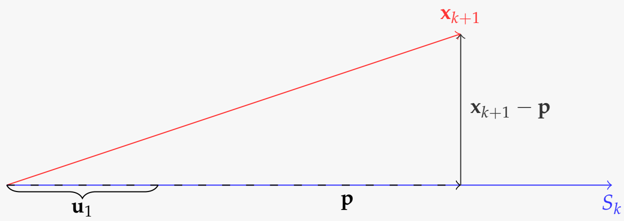
og derfor

$$(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k)\perp\mathbf{u}_i$$

for $i = 1, \ldots, k$.
Vi kan nu skalere den ortogonale projektion og definere $\mathbf{u}_{k+1}$:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k\|}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k)$$

Så er $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}\} \in S_{k+1}$ og ortonormal.
Da der er $k+1$ uafhængige elementer i rummet S_{k+1}, udgør de en basis, og $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}\}$ er en ortogonal basis for S_{k+1}.



Korollar 7.2.4

Enhver ortonomal mængde i et indre-produkt rum kan udvides til en ortonomal basis.

Bevis

Lad $\dim(V) = n$. Antag, at $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_k}\} \subset V$ er ortonormal. $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_k}\}$ kan udvies til en basis $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_k}, \mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_{n-k}}\}$ af V når Gram-Schmidt-Processen anvendes på denne basis fås en basis $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_k}, \mathbf{u_{k+1}}, \dots, \mathbf{u_n}\}$ som udvider $\{u_1, \dots, u_k\}$.

12 Ortogonale og unitære matricer

([P] 6.4.19-6.4.23, 11.1)

Disposition

1. Definitioner
2. Ækvivalenser for Ortogonale Matricer
3. Schurs Sætning

12.1 Definitioner

Definition 6.4.19

En matrix $Q \in \mathsf{Mat}(\mathbb{R})$ er ortogonal hvis søjlerne i Q udgør en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$.

12.2 Ækvivalenser for Ortogonale Matricer

Sætning 6.4.21

Lad $Q \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Følgende udsagn er ækvivalente:

(a) Q er ortogonal

(b) $Q^T Q = I$

(c) Q er invertibel og $Q^{-1} = Q^T$

(d) $(Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

(e) $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Bevis

$(a) \Rightarrow (b)$ følger fra Lemma 6.4.18, da søjlerne da må være en ortonormal mængde.

$(b) \Rightarrow (d)$ $(Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Vi kan opskrive $Q = [\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_n}]$ i søjleform. Der gælder at:

$$\mathbf{q_i}^T\mathbf{q_j} = (Q\mathbf{e_i})^T(Q\mathbf{e_j}) = \mathbf{e_i}^T\mathbf{e_j} = \delta_{ij}$$

hvor det gælder for δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

hvilket per definition gør at $\{q_1, \ldots, q_n\}$ er ortonomal.

$(b) \Rightarrow (c)$ følger af Lemma 1.4.10, som siger at $AB = I$ så må A og B være invertible.

$(c) \Rightarrow (b)$ følger af at være invers.

$(d) \Rightarrow (e)$ $\|Q\mathbf{x}\|^2 = (Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$.

$(e) \Rightarrow (d)$ følger af propertition 6.3.5, hvor $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ og $(Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{y})$ kan omskrives således at det passer.

12.3 Schurs Sætning

Definition 11.1.1

Den konjugerede transponerede C^H af C er givet ved $C^H = (\overline{C})^T$.

Definition 11.1.3

En matrix $U \in \mathsf{Mat}(\mathbb{C})$ er unitær, hvis søjlerne i U udgør en ortonormalbasis for $\mathbb{C}^n$.

Sætning 11.1.9 (Schurs Sætning)

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$. Der findes en unitær matrix $U \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, så $U^H AU$ er en øvretriangulær matrix.

Bevis

Beviset foregår ved induktion over n. I basen $n = 1$ er det trivielt opfyldt, da alle matricer $\in \mathsf{Mat}_{1,1}$ er øvre triangulære.
Antag nu at det gælder for en matrix $B \in \mathsf{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$.
Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{B})$ med en egenværdi $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, og en tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$.
Vi kan arrangere at $\|\mathbf{v}_1\| = 1$. Og vi kan udvide $\{\mathbf{v}_1\}$ til en basis for $\mathbb{C}^n$, og ved at anvende Gram-Schmidt på denne basis, får vi en ortonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for $\mathbb{C}^n$.
Vi lader $U_1 = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, hvilket gør U_1 unitær.
Vi vil nu forsøge at afgøre opbygningen af den første søjle i $U_1^H AU_1$. Dette kan vi gøre ved at gange med $\mathbf{e}_1$:

$$U_1^H AU_1\mathbf{e}_1 = U_1^H A\mathbf{v}_1 = U_1^H \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1^H U_1 \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$$

Vi ved derfor at første i $U_1^H AU_1$ er på formen $(\lambda_1, 0, \ldots, 0)^T$, og kan derfor skrive $U_1^H AU_1$ som

$$U_1^H AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}$$

Her er $\mathbf{r}$ en rækkevektor og $\mathbf{0}$ en søjlevektor, begge med $n-1$ indgange, og A_1 er defineret som minoren $M(A)_{1,1}$.
Per induktionshypotesen findes der en unitær matrix $C \in \mathsf{Mat}_{n-1,n-1}$ der opfylder $C^H A_1 C = B$, så B er en øvre triangulær matrix $\in \mathsf{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$.
Vi definerer

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$$

hvor 0 igen er en søjlevektor med $n-1$ indgange.
U_2 er unitær, da de sidste $n-1$ søjler udgør en ortonormal mængde, per definition, og hver for sig er ortogonale på $(U_2)_{:1}$, som er lig enhedsvektoren e_1.
Ifølge lemma 11.1.16 er $U = U_1 U_2$ også unitær.

Da $U_1^H A U_1$ og U_2 har samme former ($n \times n$), kan vi udregne $U_2^H (U_1^H A U_1) U_2$ ved direkte brug af matrix-regler

$$
\begin{aligned}
U^H A U &= U_2^H (U_1^H A U_1) U_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & C^H A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r}C \\ \mathbf{0} & C^H A_1 C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r}C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Som er øvre triangulær fordi B er det.
Induktionsskridtet er derfor taget, og sætningen er bevist.

13 Unitær diagonalisering

([P] 11.1)

Disposition

1. Definitioner
2. Schurs Sætning
3. Unitær Diagonalisering

13.1 Definitioner

Definition 11.1.1

Den konjugerede transponerede C^H af C er givet ved $C^H = (\overline{C})^T$.

Definition 11.1.3

En matrix $U \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C})$ er unitær, hvis søjlerne i U udgør en ortonormalbasis for $\mathbb{C}^n$.

13.2 Schurs Sætning

Sætning 11.1.9 (Schurs Sætning)

Lad $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$. Der findes en unitær matrix $U \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, så $U^H AU$ er en øvretriangulær matrix.

Bevis

Beviset foregår ved induktion over n. I basen $n = 1$ er det trivielt opfyldt, da alle matricer $\in \mathrm{Mat}_{1,1}$ er øvre triangulære.
Antag nu at det gælder for en matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$.
Lad $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{B})$ med en egenværdi $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, og en tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$.
Vi kan arrangere at $\|\mathbf{v}_1\| = 1$. Og vi kan udvide $\{\mathbf{v}_1\}$ til en basis for $\mathbb{C}^n$, og ved at anvende Gram-Schmidt på denne basis, får vi en ortonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for $\mathbb{C}^n$.
Vi lader $U_1 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$, hvilket gør U_1 unitær.
Vi vil nu forsøge at afgøre opbygningen af den første søjle i $U_1^H AU_1$. Dette kan vi gøre ved at gange med $\mathbf{e}_1$:

$$U_1^H AU_1\mathbf{e}_1 = U_1^H A\mathbf{v}_1 = U_1^H \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 U_1^H U_1 \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$$

Vi ved derfor at første i $U_1^H AU_1$ er på formen $(\lambda_1, 0, \dots, 0)^T$, og kan derfor skrive $U_1^H AU_1$ som

$$U_1^H AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}$$

Her er $\mathbf{r}$ en rækkevektor og $\mathbf{0}$ en søjlevektor, begge med $n-1$ indgange, og A_1 er defineret som minoren $M(A)_{1,1}$.

Per induktionshypotesen findes der en unitær matrix $C \in \text{Mat}_{n-1,n-1}$ der opfylder $C^H A_1 C = B$, så B er en øvre triangulær matrix $\in \text{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$.
Vi definerer

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$$

hvor 0 igen er en søjlevektor med $n-1$ indgange.
U_2 er unitær, da de sidste $n-1$ søjler udgør en ortonormal mængde, per definition, og hver for sig er ortogonale på $(U_2)_{:1}$, som er lig enhedsvektoren e_1.
Ifølge lemma 11.1.16 er $U = U_1 U_2$ ogås unitær.
Da $U_1^H A U_1$ og U_2 har samme former ($n \times n$), kan vi udregne $U_2^H (U_1^H A U_1) U_2$ ved direkte brug af matrix-regler

$$\begin{aligned} U^H A U &= U_2^H (U_1^H A U_1) U_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & C^H A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r}C \\ \mathbf{0} & C^H A_1 C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{r}C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Som er øvre triangulær fordi B er det.
Induktionsskridtet er derfor taget, og sætningen er bevist.

13.3 Unitær Diagonalisering

Sætning 11.1.10

Lad $A \in \text{Mat}(\mathbb{C})$ være hermite'sk. Så kan A diagonaliseres unitært, det vil sige der findes en unitær matrix $U \in \text{Mat}(\mathbb{C})$ så

$$U^{-1} A U = U^H A U$$

er diagonal, med reelle diagonalindgange.

Bevis

Ifølge Schurs sætning findes der en unitær matrix $U \in \text{Mat}(\mathbb{C})$ så $U^H A U = T$ er en øvretrekantsmatrix. T er hermite'sk da

$$T^H = (U^H A U)^H = U^H A^H (U^H)^H = U^H A U = T \tag{1}$$

Da T er øvretriangulær må T^H være nedretriangulær

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{bmatrix}, \; T^H = \begin{bmatrix} \overline{t_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{t_{1n}} & \dots & \overline{t_{nn}} \end{bmatrix}$$

men (1) siger også at $T^H = T$, så for $i \neq j$ er $t_{ij} = 0$ og $t_{ii} = \overline{t_{ii}}$ for $i = 1, \ldots, n$, hvilket betyder at T er diagonal med reelle indgange.

14 Lineære differentialligninger

([P] 10.1, 12.2)

Disposition

1. Entydighed
2. Putzers Algoritme

14.1 Diff. Systems Entydighed

Lemma 10.1.1

Lad $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Ligningen

$$x' = \lambda x \tag{$\Diamond$}$$

har en en entydig løsning $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med $z(0) = a$ givet ved $z(t) = e^{\lambda t}a$

Bevis

Vi ved at λ er på formen $c + id$. Det kan vi sætte ind i $e^{\lambda t}$ og differentiere:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}e^{(c+id)t} \\
&= \frac{d}{dt}e^{ct+idt} \\
&= \frac{d}{dt}e^{ct}e^{idt} \\
&= \frac{d}{dt}e^{ct}(\cos(dt) + i\sin(dt)) \\
&= ce^{ct}(\cos(dt) + i\sin(dt)) + e^{ct}(-d\sin(dt) + id\cos(dt)) \\
&= ce^{ct}(\cos(dt) + i\sin(dt)) + ide^{ct}(i\sin(dt) + \cos(dt)) \\
&= (c + id)e^{ct}(\cos(dt) + i\sin(dt)) \\
&= (c + id)e^{ct}e^{idt} \\
&= (c + id)e^{ct+idt} \\
&= (c + id)e^{(c+id)t} \\
&= \lambda e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

Altså er $z'(t) = \lambda e^{\lambda t}a = \lambda z(t)$, og $z(t)$ er derfor en løsning til $(\Diamond)$. Og det er klart at $z(0) = a$.
For at vise at alle løsninger er på samme form som $z(t)$ kan vi lade $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en løsning til $x' = \lambda x$, med $y(0) = a$.

Så har vi at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}y(t)) &= -\lambda e^{-\lambda t}y(t) + e^{-\lambda t}y'(t) \\ &= e^{-\lambda t}(y'(t) - \lambda y(t)) \qquad (\star) \\ &= 0\end{aligned}$$

Hvilket giver os at $e^{-\lambda t}y(t)$ er konstant. Som kun kan ske hvis $y(t)$ er invers til $e^{-\lambda t}$, nemlig på formen $e^{\lambda t}$. Bemærk at $(\star)$ følger af $y'(t) = \lambda y(t)$.
Vi er også givet for $t = 0$ at

$$e^{-\lambda t}y(t) = e^{-\lambda 0}y(0) = y(0) = a$$

Derfor

$$y(t) = e^{\lambda t}a = z(t)$$

$z(t)$ er altså den entydige løsning til $(\Diamond)$ med $z(0) = a$.

14.2 Putzers Algoritme

Sætning 12.2.2 (Putzers Algoritme)

Lad $A \in \mathsf{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ og $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være A's egenværdier, talt med multiplicitet.
Vi lader P_k være

$$P_k = \begin{cases} I & \text{hvis } k = 0 \\ \prod_{j=1}^{k}(A - \lambda_j I) & \text{for } k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

og kan nu definere $Q(t)$ som

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k$$

hvor r_k er

$$r_k(t) = \begin{cases} e^{\lambda_1 t} & \text{hvis } k = 1 \\ e^{\lambda_k t} \int\limits_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s)\, ds & \text{for } k = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Så gælder at $Q(0) = I$, og $Q'(t) = AQ(t) = Q(t)A$.

Bevis

Først kan vi sige at $r_1(0) = 1$, og $r_k(0) = 0$ for $k = 2, \ldots, n$, så $Q(0) = P_0 = I$.
Vi kan se at A kommuterer med $(A - \lambda_i I$ for $i = 1, \ldots, n$, derfor kommuterer den også med $P_0, \ldots, P_{n-1}$, og så med $Q(t)$. Altså gælder det at $AQ(t) = Q(t)A$.

For $k > 1$ gælder ddet at

$$
\begin{aligned}
r_k'(t) &= (e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s)\, ds)' \\
&= \lambda_k e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s)\, ds + e^{\lambda_k t} e^{-\lambda_k t} r_{k-1}(t) && \text{kæde reglen} \\
&= \lambda_k r_k(t) + r_{k-1}(t)
\end{aligned}
$$

Ved at definere $r_0(t) = 0$, så gælder dette også for $k = 1$.
Vi har så at

$$
\begin{aligned}
Q'(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}'(t) P_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t)) P_k
\end{aligned}
$$

og derfor

$$
\begin{aligned}
Q'(t) - AQ(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t)) P_k - A \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-r_{k+1}(t)(A - \lambda_{k+1} I) P_k + r_k(t) P_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-r_{k+1}(t) P_{k+1} + r_k(t) P_k) && (\clubsuit) \\
&= -r_n(t) P_n && (\sharp) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

I ($\clubsuit$) udnytter vi at $r_0(t)P_0 = 0$, og at alle andre end $-r_n(t)P_n$ går ud med hinanden.
I ($\sharp$) siger Cayley-Hamilton at $P_n = 0$. Beviset er fuldført.