

First Order Logic



10S3001 - Artificial Intelligence

Samuel I. G. Situmeang

Faculty of Informatics and Electrical Engineering



Objectives

Students are able:

- to explain the concept of first-order logic clearly.
- to apply inference to first-order logic propositions by using first-order logic inference rules.
- to apply unification to first-order logic propositions correctly.



1053001-AI | Institut Teknologi Del

2

Siswa mampu:

- untuk menjabarkan konsep *first-order logic* dengan jelas.
- untuk menerapkan inferensi pada proposisi *first-order logic* dengan menggunakan aturan inferensi logika *first-order logic*.
- untuk menerapkan unifikasi pada proposisi *first-order logic* dengan tepat.

First Order Logic

Representation Of Language

- Whorf (1956) suggest that communities determine lang. categories
- Wanner (1975) subject remember the **content** of what they read better than the actual words.
- Mitchell *et al.* (2008) could predict -with above chance accuracy- the areas of the brain that would activate with certain words(fMRI)

- Relativitas bahasa (*linguistic relativity*) merupakan konsep hipotesa bahasa yang dikemukakan oleh Benjamin Lee Whorf (1956) yang mengatakan “*A person’s native language defines the way he perceives and interprets his world*”. Dengan kata lain, bahasa yang berbeda akan menghasilkan cara berpikir yang berbeda.
 - Bahasa adalah produk budaya, dan budaya membentuk bahasa. Oleh karena itu, komunitas yang berbeda akan memiliki kategori dan konsep yang berbeda pula dalam bahasa mereka.
 - Struktur bahasa dapat memengaruhi cara kita mengategorikan warna, ruang, waktu, dan konsep abstrak lainnya.
 - **Contoh:** Orang Eskimo memiliki banyak kata untuk salju, sementara orang yang tinggal di daerah tropis mungkin hanya memiliki satu kata. Hal ini mencerminkan pentingnya salju dalam kehidupan sehari-hari orang Eskimo dan bagaimana bahasa mereka telah berkembang untuk menggambarkan nuansa yang berbeda dari fenomena ini.
- Wanner (1975) menyoroti perbedaan antara mengingat makna (semantik) dari suatu teks dan mengingat kata-kata spesifik (*episodic*).
 - Kita cenderung mengingat ide utama dan hubungan antara ide-ide dalam suatu teks, daripada kata-kata yang digunakan secara harfiah.
 - Proses pembelajaran yang efektif melibatkan pemahaman mendalam

- terhadap konsep, bukan hanya menghafal kata-kata.
- **Contoh:** Ketika membaca sebuah cerita, kita akan lebih mudah mengingat plot dan karakter daripada kalimat-kalimat yang tepat.
 - Tom M Mitchell, Svetlana V Shinkareva, Andrew Carlson, Kai-Min Chang, Vicente L Malave, Robert A Mason, Marcel Adam Just (2008) menggunakan fMRI (*functional Magnetic Resonance Imaging*) untuk mengamati aktivitas otak saat seseorang memproses bahasa.
 - Ada area-area spesifik di otak yang bertanggung jawab untuk berbagai aspek bahasa, seperti produksi ucapan, pemahaman, dan pemrosesan sintaksis.
 - fMRI dapat digunakan untuk mempelajari gangguan bahasa, seperti disleksia atau afasia, dan untuk mengembangkan terapi yang lebih efektif.
 - **Contoh:** Kata-kata yang bermuatan emosi, seperti "cinta" atau "benci", akan mengaktifkan area otak yang berbeda dibandingkan dengan kata-kata netral.
 - Ketiga pernyataan di atas saling melengkapi dan memberikan gambaran yang lebih komprehensif tentang hubungan antara bahasa, kognisi, dan otak. Mereka menunjukkan bahwa:
 - **Bahasa tidak hanya alat komunikasi**, tetapi juga membentuk cara kita berpikir dan memandang dunia.
 - **Memori dan pemahaman** lebih berfokus pada makna daripada pada bentuk fisik kata-kata.
 - **Otak memiliki mekanisme khusus** untuk memproses bahasa, dan aktivitas otak dapat diukur dan diprediksi.
 - *First-order logic* (FOL) menyediakan kerangka kerja untuk merepresentasikan dan memanipulasi pengetahuan yang terkandung dalam bahasa. Dengan menggunakan FOL, kita dapat menganalisis struktur bahasa, memahami proses kognitif yang mendasari pemahaman bahasa, dan membangun sistem kecerdasan buatan yang lebih canggih.

First Order Logic

Formal/Natural Languages

- Objects (cat, dog, house, John, etc.)
- Relations (has color, bigger than, comes between, etc.)
- Facts: (One value for a given input: has father, has head, can swim)

Facts have a truth value. *true* or *false*

- **Logika Orde Pertama (FOL)** adalah sebuah sistem formal yang memungkinkan kita untuk merepresentasikan pengetahuan secara logis dan melakukan penalaran atas pengetahuan tersebut.

Formal Languages

Ontological and Epistemological Commitments

Language	Ontological Commitment ¹	Epistemological Commitment ²
Propositional Logic	facts	true/false/unknown
First-Order Logic	facts, objects, relations	true/false/unknown
Temporal Logic	facts, objects, relations, time	true/false/unknown
Probability Theory	facts	degree of belief ² [0, 1]
Fuzzy Logic	facts with degree of truth	known interval value

¹What exists in the world

²Agent's beliefs about facts

1053001-AI | Institut Teknologi Del

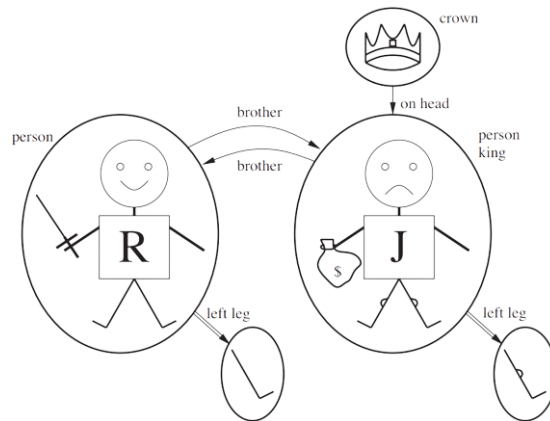


- **Ontological commitment** mengacu pada **apa yang kita yakini ada di dunia**. Ini adalah tentang keberadaan entitas, sifat, dan hubungan antara entitas-entitas tersebut. Dengan kata lain, ontologi adalah tentang "apa yang ada". Contoh *ontological commitment* adalah keyakinan bahwa ada benda fisik, pikiran, atau Tuhan.
- **Epistemological commitment** di sisi lain, berkaitan dengan **bagaimana kita tahu apa yang kita ketahui**. Ini adalah tentang sifat pengetahuan, sumber pengetahuan, dan batasan-batasan pengetahuan kita. Epistemologi adalah tentang "bagaimana kita tahu". Contoh *epistemological commitment* adalah keyakinan bahwa pengetahuan diperoleh melalui pengalaman indra, penalaran, atau otoritas.
- Dalam konteks **Logic**, *epistemological commitment* mungkin terdengar agak abstrak, namun sebenarnya sangat berkaitan dengan cara kita memahami dan menggunakan logika dalam kehidupan sehari-hari di mana *epistemological commitment* mengacu pada keyakinan kita tentang kebenaran suatu proposisi.
- Sebagai contoh, dalam konteks logika proposisional, *epistemological commitment* dapat dibagi menjadi tiga kategori:
 - **Benar (True):** Kita yakin sepenuhnya bahwa proposisi tersebut benar berdasarkan bukti yang ada atau karena kita menganggapnya sebagai aksioma (pernyataan yang dianggap benar tanpa perlu bukti).

- **Salah (False):** Kita yakin sepenuhnya bahwa proposisi tersebut salah berdasarkan bukti yang ada atau karena kita telah membuktikan kontradiksinya.
- **Tidak Diketahui (Unknown):** Kita tidak memiliki cukup informasi untuk menentukan apakah proposisi tersebut benar atau salah.
- Dalam teori probabilitas, *epistemological commitment* kita terhadap suatu kejadian seringkali dinyatakan dalam bentuk **derajat kepercayaan** atau **probabilitas**, yang nilainya berada dalam rentang 0 hingga 1.
 - **0:** Menunjukkan ketidakmungkinan suatu peristiwa terjadi.
 - **1:** Menunjukkan kepastian bahwa suatu peristiwa akan terjadi.
 - **Nilai di antara 0 dan 1:** Menunjukkan tingkat ketidakpastian.
- Dalam logika fuzzy, *epistemological commitment* kita terhadap suatu proposisi tidak lagi terbatas pada nilai benar atau salah (seperti dalam logika klasik), melainkan dinyatakan dalam bentuk **nilai keanggotaan** yang berada dalam rentang antara 0 hingga 1. Nilai ini sering disebut sebagai **nilai fuzzy** atau **derajat kebenaran**.
- Logika fuzzy dirancang untuk menangani situasi yang tidak pasti dan ambigu. Banyak konsep dalam kehidupan sehari-hari tidak memiliki batasan yang tegas, seperti "tinggi", "panas", atau "cepat". Nilai fuzzy memungkinkan kita untuk merepresentasikan tingkat keanggotaan suatu elemen dalam suatu himpunan fuzzy dengan lebih fleksibel.
- Nilai fuzzy memungkinkan kita untuk menyatakan tingkat kebenaran suatu proposisi secara gradual. Misalnya, kita bisa mengatakan bahwa "hari ini agak panas" dengan nilai fuzzy 0.7, yang menunjukkan bahwa hari ini memang panas, tetapi tidak terlalu panas.

Relationships

Models for first order logic



First Order Logic

Syntax

<i>Sentence</i>	→	<i>AtomicSentence</i> <i>ComplexSentence</i>
<i>AtomicSentence</i>	→	<i>Predicate</i> <i>Predicate</i> (<i>Term</i> , ...) <i>Term</i> = <i>Term</i>
<i>ComplexSentence</i>	→	(<i>Sentence</i>) [<i>Sentence</i>]
		\neg <i>Sentence</i>
		<i>Sentence</i> \wedge <i>Sentence</i>
		<i>Sentence</i> \vee <i>Sentence</i>
		<i>Sentence</i> \Rightarrow <i>Sentence</i>
		<i>Sentence</i> \Leftrightarrow <i>Sentence</i>
		<i>Quantifier</i> <i>Variable</i> , ... <i>Sentence</i>
<i>Term</i>	→	<i>Function</i> (<i>Term</i> , ...)
		Constant
		Variable
<i>Quantifier</i>	→	\forall \exists
<i>Constant</i>	→	<i>A</i> <i>X_i</i> <i>John</i> ...
<i>Variable</i>	→	<i>a</i> <i>x</i> <i>s</i> ...
<i>Predicate</i>	→	<i>True</i> <i>False</i> <i>After</i> <i>Loves</i> <i>Raining</i> ...
<i>Function</i>	→	<i>Mother</i> <i>Left leg</i> ...
Operator Precedence ³	:	$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

First Order Logic

Syntax

- Three kinds of symbols
 - Constant: objects
 - Predicate: relations
 - Function: functions (i.e. can return values other than truth vals.)
- Predicate and Function have arity
- Symbols have an interpretation
- **Terms:** $\text{LeftLeg}(\text{John})$
- **Atomic Sentences state facts:** $\text{Brother}(\text{Richard}, \text{John})$
- **Complex Sentence:** $\text{Brother}(R, J) \wedge \text{Brother}(J, R) \text{ or } \neg \text{King}(\text{Richard}) \Rightarrow \text{King}(\text{John})$
- **Universal Quantifiers:** $\forall \text{King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x)$
- **Existential Quantifiers:** $\exists \text{Crown}(x) \wedge \text{OnHead}(x, \text{John})$

First Order Logic

Try this

What is the interpretation for:

- $King(Richard) \vee King(John)$
- $\neg Brother(LeftLeg(Richard), John)$
- $\forall x \forall y Brother(x, y) \Rightarrow Sibling(x, y)$
- $In(Paris, France) \wedge In(Marseilles, France)$
- $\forall c Country(c) \wedge Border(c, Ecuador) \Rightarrow In(c, SouthAmerica)$
- $\exists Country(c) \wedge Border(c, Spain) \wedge Border(c, Italy)$

First Order Logic

More Facts

- Richard has only two brothers, John and Geoffrey

$Brother(John, Richard) \wedge Brother(Geoffrey, Richard) \wedge John \neq \forall x Brother(x, Richard) \Rightarrow (x = John \vee x = Geoffrey)$

- No Region in South America borders any region in Europe

$\forall c, d In(c, SouthAmerica) \wedge In(d, Europe) \Rightarrow \neg Border(c, d)$

- No two adjacent countries have the same map color

$\forall x, y Country(x) \wedge Country(y) \wedge Border(x, y) \Rightarrow \neg (Color(x) = Color(y)) \wedge \neg (x = y)$

Assertions and Queries in FOL

ASK and TELL

- $TELL(KB, King(John))$
- $TELL(KB, \forall x King(x) \Rightarrow Person(x))$
- $ASK(KB, King(John))$ return True
- $ASK(KB, \exists x Person(x))$ return True
- $ASKVARS(KB, Person(x))$ yields $\{x/John, x/Richard\}$, a binding list

First Order Logic

Kinship

"The son of my father is my brother",

"One's grandmother is the mother of one's parent",

etc.

- Domain: People
- Unary predicates: *Male, Female*
- Relations:
Parent, Sibling, Brother, Sister, Child, Daughter, Son, Spouse, Wife, Husband, Grandparent, Grandchild, Cousin, Aunt, Uncle
- Functions: *Mother, Father*

First Order Logic

Kinship

"One's mother is one's female parent"

$$\forall m, c \text{ Mother}(c) = m \Leftrightarrow \text{Female}(m) \wedge \text{Parent}(m, c)$$

"A sibling is another female parent"

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow x \neq y \wedge \exists p \text{ Parent}(p, x) \wedge \text{Parent}(p, y)$$

"Wendy is female"

$$\text{Female}(\text{wendy})$$

These are **axioms**

First Order Logic

Wumpus: Time domain included

Can be represented more concisely

- at time step
 $3: \text{Percept}([\text{Stench}, \text{Breeze}, \text{Glitter}, \text{None}, \text{None}], 3)$
- at time step
 $6: \text{Percept}([\text{None}, \text{Breeze}, \text{None}, \text{None}, \text{Scream}], 6)$
- Actions can be:
 $\text{Turn}(\text{Right}), \text{Turn}(\text{Left}), \text{Forward}, \text{Shoot}, \text{Grab}, \text{Climb}$

And we can **ASK** the best action at time step 5

$\text{ASKVARS}(\exists a \text{ BestAction}(a, 5))$

FOL: Wumpus

Encoding complex rules

Can encode

- Raw percepts:

$$\forall t, s, g, m, c, \text{Percept}([s, b, \text{Glitter}, m, c], t) \Rightarrow \text{Glitter}(t)$$

- Reflex actions:

$$\forall t \text{ Glitter}(t) \Rightarrow \text{BestAction}(\text{Grab}, t)$$

Instead of encoding stuff like:

$$\begin{aligned} &\text{Adjacent}(\text{Square}_{1,2}, \text{Square}_{1,1}) \\ &\text{Adjacent}(\text{Square}_{3,4}, \text{Square}_{4,4}) \end{aligned}$$

Encode:

$$\begin{aligned} &\forall x, y, a, b \text{ Adjacent}([x, y], [a, b]) \Leftrightarrow \\ &(x = a \wedge (y = b - 1 \vee y = b + 1)) \vee (y = b \wedge (x = a - 1 \vee x = a + 1)) \end{aligned}$$

First Order Logic

Legos

- Define pieces:

Long(p), Short(p), etc.

- and restriction:

$$\forall p \text{ Long}(p) \Leftrightarrow \neg(\text{Long}(p) \wedge \text{Short}(p))$$

- Define rules:

- $\forall x, y, z \text{ CanConnectWithOverlap}(x, y, z) \Leftrightarrow x \neq y \wedge \text{Piece}(x) \wedge \text{Piece}(y) \wedge \text{Number}(z) \wedge \text{Value}(z) \leq \text{Overlap}(x, y) \dots$

- $\forall x, y \text{ Short}(x) \wedge \text{Short}(y) \wedge \text{Overlap}(x, y) < 1 \Rightarrow \text{WeakLink}(x, y)$

Creating a Knowledge Base

- Identify the Task
- Assemble the relevant knowledge
- Decide on a vocabulary of predicates, functions, and constants
- Encode general knowledge about the domain (rules)
- Encode a description of the problem
- Pose queries to the inference procedure and get answers
- Debug the KB

Inference

in First Order Logic

Given $\forall x \text{ King}(x) \wedge \text{Greedy}(x) \Rightarrow \text{Evil}(x)$

We can infer:

- $\text{King}(\text{John}) \wedge \text{Greedy}(\text{John}) \Rightarrow \text{Evil}(\text{John})$
- $\text{King}(\text{Richard}) \wedge \text{Greedy}(\text{Richard}) \Rightarrow \text{Evil}(\text{Richard})$
- $\text{King}(\text{Father}(\text{John})) \wedge \text{Greedy}(\text{Father}(\text{John})) \Rightarrow \text{Evil}(\text{Father}(\text{John}))$

Inference

in First Order Logic

- Universal Instantiation (in a \forall rule, substitute all symbols)
- Existential Instantiation (in a \exists rule, substitute one symbol, use the rule and discard)
- Skolem Constants is a new variable that represents a new inference.

Inference in First Order Logic

Suppose KB:

- $\forall x \text{ King}(x) \wedge \text{Greedy}(x) \Rightarrow \text{Evil}(x)$
- $\text{King}(\text{John})$
- $\text{Greedy}(x)$
- $\text{Brother}(\text{Richard}, \text{John})$

Apply Universal Instantiation using $\{x/\text{John}\}$ and $\{x/\text{Richard}\}$

- $\text{King}(\text{John}) \wedge \text{Greedy}(\text{John}) \Rightarrow \text{Evil}(\text{John})$
- $\text{King}(\text{Richard}) \wedge \text{Greedy}(\text{Richard}) \Rightarrow \text{Evil}(\text{Richard})$

And discard the Universally quantified sentence. We can get the KB to be propositions.

Inference in First Order Logic

Suppose KB:

- $\forall x \text{ King}(x) \wedge \text{Greedy}(x) \Rightarrow \text{Evil}(x)$
- $\text{King}(\text{John})$
- $\forall y \text{ Greedy}(y)$

Apply Universal Instantiation using $\{x/\text{John}\}$ and $\{y/\text{John}\}$

?

Inference

Generalized Modus Ponens

- For atomic sentences p_i , p'_i , and q , where there is a substitution θ such that $SUBST(\theta, p'_i) = SUBST(\theta, p_i)$, for all i ,

$$\frac{p'_1, p'_2, \dots, p'_n, (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q)}{SUBST(\theta, q)}$$

- There are $n + 1$ premises to this rule: the n atomic sentences p_i and the one implication.
- The conclusion is the result of applying the substitution θ to the consequent q . For our example:

$$\begin{array}{ll} p'_1 = King(John) & p_1 = King(x) \\ p'_2 = Greedy(y) & p_2 = Greedy(x) \\ \theta = \{x/John, y/John\} & q = Evil(x) \\ SUBST(\theta, q) \text{ is } Evil(John) \end{array}$$

- Generalized Modus Ponens is a lifted version of Modus Ponens—it raises Modus Ponens from ground (variable-free) propositional logic to first-order logic.

Inference

Unification

$UNIFY(p, q) = \theta$ where $SUBST(\theta, p) = SUBST(\theta, q)$

For example:

- We ask $ASKVARS(Knows(John, x))$ (whom does John know?)
- $UNIFY(Knows(John, x), Knows(John, Jane)) = \{x/Jane\}$
- $UNIFY(Knows(John, x), (Knows(y, Bill))) = \{y/John, x/Bill\}$
- $UNIFY(Knows(John, x), (Knows(y, Mother(y)))) = \{y/John, x/Mother(John)\}$

Algorithm in the book (goes variable by variable recursively unifying)

Inference

Putting it all together

"The Law says that it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations. The country Nono, and enemy of America, has some missiles , and all of its missiles were sold to it by Colonel West, who is American"

Prove that Colonel Wes is a Criminal

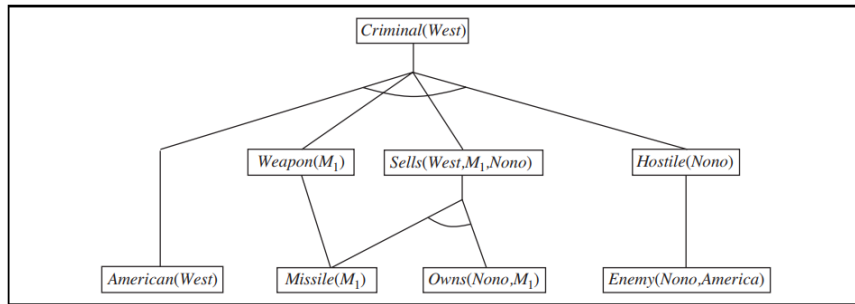
Inference

The KB

"The Law says that it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations. The country Nono, and enemy of America, has some missiles , and all of its missiles were sold to it by Colonel West, who is American"

- R1: $American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x, y, z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$
- R2: $Owns(Nono, M_1)$ Nono has some missiles
- R3: $Missile(M_1)$
- R4: $Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$ A missile is a weapon
- R5: $Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \Rightarrow Sells(West, x, Nono)$ All missiles sold by west
- R6: $Enemy(x, America) \Rightarrow Hostile(x)$ Enemies of America are hostile
- R7: $American(West)$ West is american
- R8: $Enemy(Nono, America)$

Inference Graph



Forward Chaining ASK

Iterations

Iteration 1:

- R5 satisfied with $\{x/M_1\}$ and R9: *Sells*(*West*, M_1 , *Nono*) is added
- R4 satisfied with $\{x/M_1\}$ and R10: *Weapon*(M_1) is added
- R6 satisfied with $\{x/Nono\}$ and R11: *Hostile*(*Nono*) is added

Iteration 2:

- R1 is satisfied with $\{x/West, y/M_1, z/Nono\}$ and *Criminal*(*West*) is added.

Inference in First Order Logic

Discussion

- Once we have facts that evaluate to T (True) or F (False)
- We can apply Forward Chaining, Backwards Chaining and Resolution
- The key is to understand Unification
- Very similar to propositional logic

References

- S. J. Russell and P. Borvig, Artificial Intelligence: A Modern Approach (4th Edition), Prentice Hall International, 2020.

eof

10S3001-AI | Institut Teknologi Del