V. I. Arnol'd, On functions of three variables, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1957, Volume 114, Number 4, 679–681

Доклады Академии наук СССР
1957. Том 114, № 4

МАТЕМАТИКА

В. И. АРНОЛЬД

О ФУНКЦИЯХ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 IV 1957)

Далее вкратце указывается способ доказательства теоремы, которая доставляет полное решение 13-й проблемы Гильберта (в смысле опровержения высказанной Гильбертом гипотезы).

Теорема 1. *Любая заданная на единичном кубе E^3 действительная непрерывная функция $f(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных может быть представлена в виде*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_{ij} [\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3], \tag{1}$$

где функции двух переменных h_{ij} и φ_{ij} действительны и непрерывны.

А. Н. Колмогоровым недавно ([1]) было получено представление

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} h_i [\varphi_i(x_1, x_2), x_3], \tag{2}$$

где функции h_i и φ_i непрерывны, причем функции h_i действительны, а функции φ_i принимают значения, принадлежащие некоторому дереву Ξ. Дерево Ξ в конструкции А. Н. Колмогорова (для случая функции трех переменных) может быть взято не универсальным, а таким, что все его точки имеют индекс ветвления не превосходящий 3. Для этого функции u^r_{km} основной леммы ([1]) (для $n = 2$) следует выбрать так, чтобы они, кроме указанных там пяти свойств, обладали еще свойствами:

6) *Граница каждого множества уровня каждой функции u^r_{km} делит плоскость не более чем на 3 части.*

7) *При любом r $G^r_{11} \supseteq E^2$.*

В силу этого замечания теорема 1 является следствием существования представления (2) и следующей теоремы:

Теорема 2. *Каково бы ни было семейство F действительных равностепенно непрерывных функций $f(\xi)$, заданных на дереве Ξ, все точки которого имеют индекс ветвления $\leqslant 3$, можно так реализовать дерево в виде подмножества X трехмерного куба E^3, что любая функция семейства F может быть представлена в виде*

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{3} f_k(x_k),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ есть образ $\xi \in \Xi$ в дереве X; $f_k(x_k)$ — непрерывные действительные функции одного переменного, причем f_k непрерывно зависят от f (в смысле равномерной сходимости).

Введем некоторые вспомогательные понятия. Пусть K — конечный отрезочный комплекс, расположенный в E^3 и состоящий из отрезков, не параллельных ни одной из координатных плоскостей.

Определение 1. Система принадлежащих K точек

$$a_0 \neq a_1 \neq \ldots \neq a_{n-1} \neq a_n$$

называется молнией, если отрезки $\overline{a_{i-1}a_i}$ перпендикулярны, соответственно, осям X_{α_i} и

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_{n-1} \neq \alpha_n.$$

Конечная система попарно различных точек $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, занумерованных кортежами индексов $i_1 i_2 \ldots i_n$, называется ветвящейся схемой, если: 1) существует только одна точка a_0, занумерованная одним индексом; 2) вместе с $a_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$ в систему входит $a_{i_1 \ldots i_{n-1}}$.

Определение 2. Ветвящаяся система точек $a_{i_1 \ldots i_n}$, расположенных на K, называется выводящей схемой, если при фиксированном кортеже $i_1 \ldots i_n$ совокупность точек вида $a_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}$ лежит на плоскости, проходящей через $a_{i_1 \ldots i_n}$, перпендикулярной некоторой оси координат $x_{\alpha_{i_1 \ldots i_n}}$, и исчерпывает собою все точки пересечения этой плоскости с K, отличные от $a_{i_1 \ldots i_n}$.

Дерево Ξ может быть представлено в виде

$$\Xi = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}, \quad D_n \subset D_{n+1},$$

где D_n — конечные деревья, D_1 — простая дуга и D_{n+1} получается из D_n приклеиванием в некоторой точке p_n, не являющейся для D_n ни точкой ветвления, ни концевой точкой, отрезка S_n ([2]).

Обозначим через ω_n верхнюю грань колебаний функций $f \in F$ на компонентах разности $\Xi \setminus D_n$. Легко видеть, что

$$\omega_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Поэтому можно выбрать такую последовательность

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_r < \ldots,$$

что

$$\omega_n \leqslant \frac{1}{r^2} \quad \text{при } n \geqslant n_r.$$

Реализация X дерева Ξ в E^3 строится в виде:

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n},$$

где D'_n — отрезочные комплексы, реализующие D_n так, что образы S'_n дуг S_n являются отрезками, не перпендикулярными осям координат.

Индуктивное построение D'_n производится так, чтобы $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n}$ было деревом ([2]) и с соблюдением следующих условий:

1) Любая функция $f \in F$ представляется на D_n в виде

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{3} f_k^n(x_k), \tag{3}$$

где $f_k^n(x_k)$ непрерывно зависят от f.

2) Дерево D_n' из любой точки a_0 имеет выводящую схему, в которой первое направление α_0 может быть выбрано произвольно.

3) Пусть A_n — множество точек D_n', являющихся образами точек ветвления Ξ. Существует такое счетное множество $B_n \subseteq D_n'$, $B_n \cap A_n = 0$, что молнии $a_0 \ldots a_m$, начинающиеся в $a_0 \in D_n' \setminus B_n$, не имеют общих точек с A_n и совпадающих точек $a_i = a_j$, $i \neq j$.

4) Если $n_r < n \leqslant n_{r+1}$, то

$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| \leqslant \left(3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}\right)\frac{1}{r^2}. \tag{4}$$

Доказательство возможности индуктивного построения деревьев D_n' и функций f_k^n с сохранением свойств 1)—4) слишком сложно, чтобы быть здесь изложенным. Грубо говоря, на каждом шагу приклеиваемый отрезок S_{n+1}' выбирается очень коротким, его направление и способ отображения S_{n+1} на S_{n+1}' выбираются так, чтобы обеспечить выполнение свойств 2) и 3) у D_{n+1}'. Сохранение равенства (3) при переходе от n к $n+1$ на вновь приклеенном отрезке S_{n+1} требует введения поправки $f_k^{n+1} - f_k^n$ к хотя бы одной из функций f_k^n на проекции S_{n+1}' на ось x_k. Для сохранения же равенства (3) на ранее построенном дереве D_n' приходится эту поправку компенсировать новыми поправками к функциям f_k^n на ряде других отрезков. Точный способ введения этих поправок мы здесь не излагаем. Заметим только следующее: поправки эти должны быть таковы, чтобы при $n' = n + 1$ сохранилось неравенство (4); при достаточной малости и надлежащем расположении S_{n+1}' их удается произвести для каждой функции f_k^n на конечной системе попарно не пересекающихся отрезков оси x_k; в доказательстве такой возможности существенно используется то обстоятельство, что дерево D_n' обладает свойствами 2) и 3).

Доказательство существования непрерывной функции

$$f_k(x_k) = \lim_{n \to \infty} f_k^n(x_k)$$

и соблюдения равенства

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{3} f_k(x_k)$$

на всем X несложно.

Я очень благодарен А. Н. Колмогорову за помощь и советы при выполнении этой работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 IV 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, ДАН, 108, № 2, 179 (1956). [2] K. Menger, Kurventheorie, X, Berlin — Leipzig, 1932.