逻辑斯蒂方程及其应用

徐荣辉

(山西生物应用职业技术学院,山西 太原 030031)

[摘　要] 逻辑斯蒂方程是Verhulst提出的世界人口增长模型,为马尔萨斯人口模型的修正和改进,从其问世以来,它的应用从人口增长的生物种群模型拓展到很多领域,广泛应用于生物学、医学、经济学和管理学等方面。通过两个案例的描述阐述了逻辑斯蒂方程在这些领域的实际应用。

[关键词] 逻辑斯蒂方程;微分方程;模型;应用

一、引言

逻辑斯蒂方程(Logistic Equation)是由数学生物学家Pierre－Francois Verhulst在1838年提出的世界人口增长模型,从该模型问世以来,它的应用从人口增长的生物种群模型拓展到很多领域,广泛应用于生物学、医学、经济学和管理学等方面。

逻辑斯蒂方程:

$$\frac{dy}{dt}=ky\left(1-\frac{y}{K}\right)——①$$

其实是马尔萨斯(Malthus)人口模型方程:

$$\frac{dy}{dt}=ky——②$$

的修正和改进,$y(t)$为种群中的个体数量,是时间t的函数,k为比例常数(也称内禀增长率),K为环境容纳量(即承载能力)。马尔萨斯人口模型是种群增长的第一个模型,它建立在种群增长率$\frac{dy}{dt}$和种群数量成正比,并且处于理想状态(无局限的环境,充足的养分,没有天敌,免于疾病)下,但事实上,更有实际意义的模型应该能反映限定资源的局限环境下的情况,这是因为很多种群开始时是呈指数增长的,但数量接近K时增长率开始下降。显然方程②只能反映第一种趋势,而方程①则考虑了上述两个趋势,因此逻辑斯蒂方程的应用就更加广泛。一般而言,如果问题的基本数量特征是:在时间t很小时,呈指数型增长,而当t增大时,增长速度就下降,且越来越接近于一个确定的值(也就是承载能力K),这类问题可以用逻辑斯蒂方程加以解决。

二、逻辑斯蒂方程的求解

逻辑斯蒂方程①是可分离变量的常微分方程,利用可分离变量微分方程的一般求解方法可求其解。

对方程①作如下变换:

$$\frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)}=kdt,$$

即:

$$\frac{K}{y(K-y)}dy=kdt。$$

两边同时积分可得:

$$\int\frac{K}{y(K-y)}dy=k\int dt,$$

变形后为:

$$\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{K-y}\right)dy=k\int dt。$$

求解得到:

$$\ln\left|\frac{K-y}{y}\right|=-kt+c,$$

于是$\frac{K-y}{y}=\pm e^{c}\cdot e^{-kt}$。令$m=\pm e^{c}$,由上式可解得:

$$y=\frac{K}{1+me^{-kt}}——③$$

假设$t=0$时,$y=y_0$(即初始种群数量),代入③式可得:

$$y_0=\frac{K}{1+m},\ 从而\ m=\frac{K-y_0}{y_0},$$

将m代入③式得到逻辑斯蒂方程的解为:

$$y(t)=\frac{K}{1+\frac{K-y_0}{y_0}e^{-kt}}——④$$

在实际应用中,建立了逻辑斯蒂模型后,可直接利用④式求解。

三、逻辑斯蒂方程的应用

逻辑斯蒂方程建立时是Verhulst提出的世界人口增长模型,为Malthus人口模型的修正和改进,因此该方程在人口等种群增长和预测方面应用较多,但它其它方面的应用也很广泛。接下来通过两个案例的描述来阐述逻辑斯蒂方程在一些领域的实际应用。

(一)信息传播问题

在信息传播初期,知道信息的人很少,但随着时间的推移,知道的人越来越多,到一定时间,社会上大部分人都知道了这一信息,此时信息传播速度及传播过程中的数量关系可用逻辑斯蒂方程来描述。

案例1　以下是对流言传播过程建立的模型:已经听说过流言的人所占比率$y(t)$与没有听到流言的人所占比率$1-y(t)$的乘积和传播速度$\frac{dy}{dt}$成正比。

(1)写出函数y满足的微分方程。

(2)解此微分方程。

(3)一小镇有1000个居民。上午8点时有80人听到了流言,到中午12点时小镇有一半人听说了流言。什么时候将有90%的居民知道流言?

分析:由题中所建模型$y(t)$是已听说过流言的人所占比率,它是时间t的函数,传播速度为$\frac{dy}{dt}$,设比例系数为k,结合题设可得:$\frac{dy}{dt}=ky(1-y)$——⑤。显然,听说过流言的人的所占比率最大为1,即容纳量为1,则⑤式可变形为:$\frac{dy}{dt}=ky\left(1-\frac{y}{1}\right)$,为$K=1$时的逻辑斯蒂方程,可按照逻辑斯蒂方程的求解公式对题中问题进行讨论。

解:(1)根据所建模型,设已听说过流言的人所占比率为$y(t)$,t为时间,则没有听到流言的人所占比率为$1-y(t)$,传播速度为$\frac{dy}{dt}$,比例系数为k,则$y(t)$满足的微分方程为:$\frac{dy}{dt}=ky(1-y)$。

(2)听说过流言的人所占比率最大为1,也就是容纳量为$K=1$,因此⑤式可变形为:$\frac{dy}{dt}=ky\left(1-\frac{y}{1}\right)$,

上式为$K=1$时的逻辑斯蒂方程。由④式直接可得所求解为:

$$y(t)=\frac{K}{1+\frac{K-y_0}{y_0}e^{-kt}}=\frac{y_0}{y_0+(1-y_0)e^{-kt}}——⑥式。$$

(3)将上午8点看成$t=0$的时刻,则$y_0=\frac{80}{1000}=0.08$,中午12点即$r=4$时,$y(4)=0.5$,于是:

$$0.5=\frac{0.08}{0.08+(1-0.08)\cdot e^{-4k}},\ e^{4k}=11.5,$$

从而:　$k=\frac{\ln 11.5}{4}\approx 0.61$。

假设t时刻将有90%的居民知道流言,由⑥式可得:

$$0.9=\frac{0.08}{0.08+0.92\cdot e^{-0.61t}},$$

变形为:　$e^{0.61t}=\frac{0.92}{0.0089}\approx 103.4$。

因此:　$t=\frac{\ln 103.4}{0.61}\approx 7.6$(小时),

也就是大约在下午15时36分左右将有90%的居民知道流言。

(二)商品销售预测问题

某种商品开始销售时,知道的人很少,销售量也就很小,

但随着该商品的信息通过各种渠道传播出去后,销售量大量增加,市场接近饱和时销售量增加又变得极为缓慢。此类问题也可用逻辑斯蒂方程解决,用以预测某段时间后的销售量,便于厂家组织生产,商家安排进货。

案例2 以下是对某种新产品的销售状况建立的模型:社会对产品的需求量 $y(t)$ 是时间 t 的函数,该产品的需求增长速度 $\frac{dy}{dt}$ 和需求量 $y(t)$ 与需求接近饱和水平的程度 $K-y(t)$ 的乘积成正比,K为饱和水平。假设该产品刚投放市场即销售了20万件,第一年销售了100万件,市场饱和水平估计为500万件,预测一下第3年末和第5年末销售量是多少?

分析:由题中所给描述可建立微分方程如下:$\frac{dy}{dt}=k_1y(K-y)$,k_1 为比例系数,上述方程可变形为:$\frac{dy}{dt}=\frac{k_1}{K}y(1-\frac{y}{K})$,令 $\frac{k_1}{K}=k$,则上述方程可变为:$\frac{dy}{dt}=ky(1-\frac{y}{K})$,此为逻辑斯蒂方程。

解 按照题中假设建立如下微分方程:

$$\frac{dy}{dt}=k_1y(K-y),$$

其中 k_1 为比例系数。对上述方程进行变形:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k_1}{K}y(1-\frac{y}{K}),$$

令 $\frac{k_1}{K}=k$,则上式变为:

$$\frac{dy}{dt}=ky(1-\frac{y}{K}),\text{为逻辑斯蒂方程。}$$

利用④式其解为:

$$y(t)=\frac{K}{1+\frac{K-y_0}{y_0}e^{-kt}}=\frac{500}{1+24\cdot e^{-kt}}。$$

另一方面:$y(1)=100$,于是 $100=\frac{500}{1+24\cdot e^{-k}}$,求得 $k=\ln 6$,从而该方程的解为:

$$y=\frac{500}{1+24\cdot e^{-\ln 6\cdot t}}\text{——⑦式。}$$

将 $t=3$ 和 $t=5$ 分别代入⑦式可得:

$$y(3)=\frac{500}{1+\frac{24}{e^{3\ln 6}}}\approx 450(\text{万件}),$$

$$y(5)=\frac{500}{1+\frac{24}{e^{5\ln 6}}}\approx 498.5(\text{万件})。$$

第3年末的销售量约为450万件,第5年末销售量约为498.5万件。由上述数据可推测前三年产品的销售量增长速度较快,第四年和第五年增长速度相对较慢,到第五年末该产品的市场将接近饱和水平。因此在安排该产品生产时,可根据由逻辑斯蒂方程所计算的数值适当组织生产。

四、结语

上述通过两个案例讨论了逻辑斯蒂方程在经济学和管理学中的简单应用,在医学中,逻辑斯蒂方程主要应用于传染病的传播和控制治疗方面,但它们的建立都是在相对比较理想的条件下。事实上,事物通常的变化规律受很多因素的影响,因此,要考虑更多因素就应用更复杂的模型来描述,比如微分方程 $\frac{dy}{dt}=ky(1-\frac{y}{K})-c$ 和 $\frac{dy}{dt}=ky(1-\frac{y}{K})(1-\frac{m}{y})$ 就是考虑了受到外界影响的模型推广。但经典的逻辑斯蒂方程作为经验方程,在不要求严密解释和推理的前提下,还是有其简便和实用的价值。

[参 考 文 献]

[1] 宋 波,玄玉仁等.浅评逻辑斯蒂方程[J].生态学杂志,1986,(5).

[2] 吉 蕴,李祖平.逻辑斯蒂模型及其应用[J].潍坊学院学报,2009,(10).

[3] James Stewart.微积分.白峰杉译[M].北京:高等教育出版社,2004.

[责任编辑:李志清]

(上接第308页)

另一方面,“ERP生产管理”根据企业的生产业务(如生产计划下达、备品备料准备、原材料采购、质量检验、车间领料、库房发货的执行等),来定义与其相关的会计核算科目与核算方式,在事务处理发生的同时自动生成会计核算分录,保证了资金流与物流的同步记录和数据的一致性,从而根据财务资金现状、追溯资金的来龙去脉,并由此追溯所发生的相关业务活动,从而强化高职管理类学生事前计划、事中控制、事后反馈分析的计划与执行的职业能力。

(三)开设“ERP供应链管理系统”课程,强化高职管理类学生信息采集与分析的职业能力

高职管理类学生通过“ERP供应链管理系统”课程的学习,使学生能够及时了解供应商、制造商、物流商、客户之间数据处理和交换的过程,并了解各企业如何避免了各部门人员因单向传输数据而产生的“隧道视野”。“ERP供应链管理系统”可以一次性采集到采购、库存、生产、经营、供应商、客户、产品质量、设备状态等多方面的共享信息。企业实施ERP供应链管理,促进企业根据现代信息管理系统的要求,对业务流程进行重组,改变各部门各自为政加工处理信息状态、保证数据入口的单一性,实现信息和数据的共享。数据和信息的共享在实际工作中会带来莫大的便利,使用ERP供应链管理,对数据的分析和总结的准确性也远远高于手工活或简单的EXCEL功能。对于总体部门的管理人员来说,信息进行更新和发布,不再逐个部门进行通知和等待回复,各部门对应管理人员完全可以通过ERP供应链管理进行信息的获悉和回复。ERP供应链管理强大的信息采集和总结功能,对高职管理类学生今后在企业里从事信息采集和分析工作的职业能力来说是一个大大的提高。

(四)开设“ERP财务管理课程”课程,强化高职管理类学生财务预算控制的职业能力

高职管理类学生通过学习“ERP财务管理”可以了解企业提供从财会信息的反馈、到财务管理信息处理,再到多层次、一体化的财务管理支持的过程。依靠ERP财务管理,首先高职管理类学生可以很好的对财务预算进行实时的控制和多角度分析;其次,ERP财务管理对费用的管理还可以实现同时按照部门和项目进行统计,这就大大方便了对研发项目成本管理或者某个阶段性产品项目成本管理的需求,同时ERP财务管理可以为企业管理人员提供强大的获利能力分析功能;再次,ERP财务管理能使企业的资产管理水平大大提高,ERP财务管理可以详细记载资产购进、转移、组建以至于到最后处理的所有业务细节和过程。通过ERP财务管理课程的模拟大大强化了高职管理类学生财务预算控制的职业能力。

总之,通过基于“ERP平台”下的系列课程教学,能有效强化高职管理类学生职业能力。实践证明,该模式是培养和帮助高职管理类学生顺利完成“从学校到工作的过渡”,是对现代社会经济生活要求提高劳动者职业能力的一种反应,顺应了现代社会能力本位的文化理念。

[参 考 文 献]

[1] 陈 庄,毛华扬.ERP原理与应用教程[M].北京:电子工业出版社,2008.

[2] 崔晓阳.ERP123——企业应用ERP成功之路[M].北京:清华大学出版社,2009.

[责任编辑:李志清]