Mathematische Stochastik - Übungsblatt #1

Amir Miri Lavasani (7310114, Gruppe 6), Bent Müller (7302332, Gruppe 6),
Johan Kattenhorn (7310602, Gruppe 7)

November 8, 2020

Aufgabe 3.

(a) *Seien A, B und C drei Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum, für die gelte: $P(A \cap (B \cup C)) = 0$. So ist zu zeigen, dass dann immer gilt: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$*

Beweis. Wir verwenden ganz einfach die Siebformel für zwei Mengen, indem wir die Menge $(B \cup C)$ als eine Menge betrachten, wie folgt:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) &= P(A) + P(B \cup C) - \underbrace{P(A \cap (B \cup C))}_{= 0 \text{ nach Vorraussetzung}} \\ &= P(A) + \underbrace{(P(B) + P(C) - (B \cap C)}_{= P(B \cup C) \text{ (Siebformel)}} \end{aligned}$$

□

(b) *Es war aus einer Stichprobe von 230 Personen mit folgenden Angaben auszurechnen wie viele der Befragten sowohl Wein als auch Bier trinken.*

- 108 trinken Wein,
- 167 trinken Bier,
- 55 trinken nichts von beiden

Behauptung: 100 der 230 Befragten trinken sowohl Bier als auch Wein.

Beweis. Wir setzen $\Omega = \{\text{Biertrinker, Weintrinker, Nicht-trinker}\}$ und definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Nicht-trinker}\} \\ B &= \{\text{Biertrinker}\} \\ C &= \{\text{Weintrinker}\} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $A \cap (B \cup C) = \emptyset$, da es nicht möglich ist Wein/Bier zu trinken und gleichzeitig ein Nicht-trinker zu sein. Aus der Aufgabenstellung wissen wir außerdem:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{55}{230} \\ P(B) &= \frac{167}{230} \\ P(C) &= \frac{55}{230} \end{aligned}$$

Wir suchen nun $P(B \cap C)$, den Anteil aller Bier- und Weintrinker. Mit der Formel aus Aufgabenteil (a) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 1 \quad (\text{da } A \cup B \cup C = \Omega) \\
\Leftrightarrow P(B \cap C) &= P(A) + P(B) + P(C) - 1 \\
&= \frac{55}{230} + \frac{167}{230} + \frac{108}{230} - 1 \\
&= \frac{330}{230} + \frac{230}{330} \\
&= \frac{100}{230}
\end{aligned}$$

Es wird also erwartet, dass 100 der Befragten sowohl Wein als auch Bier trinken.

$\square$