Langzeitverhalten von Markowketten

Nogarbek Sharykpayev, Bent Müller

Universität Hamburg

15.06.2021

Struktur der Präsentation

Wiederholung

Wir nennen eine Markowkette *homolog* , wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten *unabhängig* vom Zeitpunkt sind.

Wiederholung - Übergangsmatrix

In diesem Fall können wir eine Übergangsmatrix wie folgt bilden:

$$\mathbb{P} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Wiederholung - Übergangsmatrix

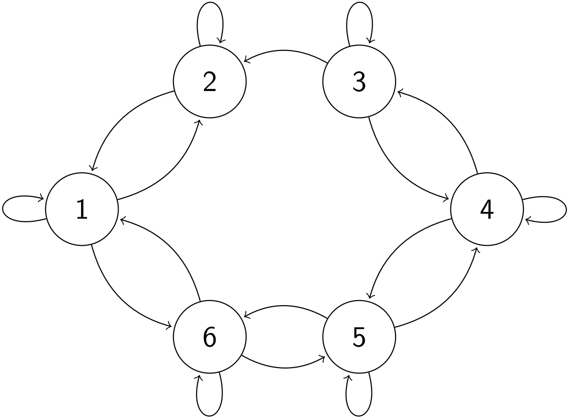
In diesem Fall können wir eine Übergangsmatrix wie folgt bilden:

$$\mathbb{P} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Wobei hier der Zustandsraum n Elemente enthält, und jeweils p_{ij} die Wahrscheinlichkeit ist in einem *beliebigen* Zeitpunkt von Zustand i in Zustand j zu gelangen.

Invariante Verteilung

Wir betrachten eine Markowkette mit Übergangsgraphen:



Invariante Verteilung

Die Übergangsmatrix sei Folgende:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.15 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.40 & 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.35 & 0.60 & 0.05 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}$$

Invariante Verteilung

Die Übergangsmatrix sei Folgende:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.15 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.40 & 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.35 & 0.60 & 0.05 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}$$

Wir behaupten, es gibt ein $L \in \mathbb{N}$, sodass alle Einträge von $\mathbb{P}^{(L)}$ strikt positiv sind.

Invariante Verteilung

Die Übergangsmatrix sei Folgende:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.15 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.40 & 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.35 & 0.60 & 0.05 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}$$

Wir behaupten, es gibt ein $L \in \mathbb{N}$, sodass alle Einträge von $\mathbb{P}^{(L)}$ strikt positiv sind.

Wir schauen uns jetzt ein paar Potenzen dieser Matrix an.

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.4600 & 0.2025 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0625 & 0.2750 \\ 0.3375 & 0.6000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0625 \\ 0.1000 & 0.5000 & 0.2850 & 0.1100 & 0.0050 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.1400 & 0.3850 & 0.4075 & 0.0550 & 0.0125 \\ 0.0625 & 0.0000 & 0.0875 & 0.2750 & 0.3250 & 0.2500 \\ 0.2750 & 0.0375 & 0.0000 & 0.0625 & 0.2500 & 0.3750 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.3954 & 0.2209 & 0.0000 & 0.0156 & 0.1000 & 0.2681 \\ 0.3681 & 0.5006 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0156 & 0.1156 \\ 0.1850 & 0.5040 & 0.1810 & 0.0958 & 0.0080 & 0.0263 \\ 0.0381 & 0.2590 & 0.3351 & 0.2967 & 0.0510 & 0.0200 \\ 0.1000 & 0.0444 & 0.1400 & 0.2550 & 0.2388 & 0.2219 \\ 0.2681 & 0.0694 & 0.0219 & 0.1000 & 0.2219 & 0.3187 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.3595 & 0.2250 & 0.0055 & 0.0344 & 0.1178 & 0.2579 \\ 0.3749 & 0.4307 & 0.0000 & 0.0039 & 0.0367 & 0.1538 \\ 0.2436 & 0.4781 & 0.1240 & 0.0775 & 0.0153 & 0.0614 \\ 0.0926 & 0.3340 & 0.2714 & 0.2243 & 0.0453 & 0.0323 \\ 0.1266 & 0.1043 & 0.1593 & 0.2267 & 0.1876 & 0.1956 \\ 0.2579 & 0.1010 & 0.0459 & 0.1177 & 0.1956 & 0.2819 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.3364 & 0.2248 & 0.0148 & 0.0506 & 0.1251 & 0.2483 \\ 0.3711 & 0.3793 & 0.0014 & 0.0115 & 0.0570 & 0.1798 \\ 0.2810 & 0.4448 & 0.0891 & 0.0628 & 0.0269 & 0.0954 \\ 0.1472 & 0.3730 & 0.2142 & 0.1731 & 0.0420 & 0.0506 \\ 0.1509 & 0.1609 & 0.1590 & 0.1988 & 0.1540 & 0.1764 \\ 0.2505 & 0.1328 & 0.0641 & 0.1241 & 0.1742 & 0.2543 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.3364 & 0.2248 & 0.0148 & 0.0506 & 0.1251 & 0.2483 \\ 0.3711 & 0.3793 & 0.0014 & 0.0115 & 0.0570 & 0.1798 \\ 0.2810 & 0.4448 & 0.0891 & 0.0628 & 0.0269 & 0.0954 \\ 0.1472 & 0.3730 & 0.2142 & 0.1731 & 0.0420 & 0.0506 \\ 0.1509 & 0.1609 & 0.1590 & 0.1988 & 0.1540 & 0.1764 \\ 0.2505 & 0.1328 & 0.0641 & 0.1241 & 0.1742 & 0.2543 \end{pmatrix}$$

Also sehen wir, dass unsere Behauptung für $L = 5$ stimmt.

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.3364 & 0.2248 & 0.0148 & 0.0506 & 0.1251 & 0.2483 \\ 0.3711 & 0.3793 & 0.0014 & 0.0115 & 0.0570 & 0.1798 \\ 0.2810 & 0.4448 & 0.0891 & 0.0628 & 0.0269 & 0.0954 \\ 0.1472 & 0.3730 & 0.2142 & 0.1731 & 0.0420 & 0.0506 \\ 0.1509 & 0.1609 & 0.1590 & 0.1988 & 0.1540 & 0.1764 \\ 0.2505 & 0.1328 & 0.0641 & 0.1241 & 0.1742 & 0.2543 \end{pmatrix}$$

Also sehen wir, dass unsere Behauptung für $L = 5$ stimmt.

Nach 5 Schritten ist es also möglich von jedem Zustand in jeden anderen Zustand zu gelangen.

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.3364 & 0.2248 & 0.0148 & 0.0506 & 0.1251 & 0.2483 \\ 0.3711 & 0.3793 & 0.0014 & 0.0115 & 0.0570 & 0.1798 \\ 0.2810 & 0.4448 & 0.0891 & 0.0628 & 0.0269 & 0.0954 \\ 0.1472 & 0.3730 & 0.2142 & 0.1731 & 0.0420 & 0.0506 \\ 0.1509 & 0.1609 & 0.1590 & 0.1988 & 0.1540 & 0.1764 \\ 0.2505 & 0.1328 & 0.0641 & 0.1241 & 0.1742 & 0.2543 \end{pmatrix}$$

Weiter behaupten wir, dass die Übergangsmatrix jetzt konvergiert wenn wir die Potenz gegen ∞ laufen lassen.

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.2893 & 0.2395 & 0.0532 & 0.0850 & 0.1199 & 0.2131 \\ 0.3213 & 0.2652 & 0.0292 & 0.0589 & 0.1086 & 0.2168 \\ 0.3218 & 0.3119 & 0.0365 & 0.0530 & 0.0863 & 0.1904 \\ 0.2926 & 0.3478 & 0.0688 & 0.0698 & 0.0680 & 0.1531 \\ 0.2518 & 0.2880 & 0.0950 & 0.1064 & 0.0951 & 0.1636 \\ 0.2598 & 0.2433 & 0.0802 & 0.1059 & 0.1170 & 0.1939 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(20)} = \begin{pmatrix} 0.2882 & 0.2653 & 0.0587 & 0.0828 & 0.1074 & 0.1977 \\ 0.2884 & 0.2609 & 0.0577 & 0.0831 & 0.1096 & 0.2003 \\ 0.2918 & 0.2608 & 0.0547 & 0.0807 & 0.1097 & 0.2023 \\ 0.2958 & 0.2648 & 0.0518 & 0.0773 & 0.1079 & 0.2023 \\ 0.2935 & 0.2705 & 0.0548 & 0.0783 & 0.1051 & 0.1978 \\ 0.2899 & 0.2694 & 0.0578 & 0.0810 & 0.1055 & 0.1963 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}^{(200)} = \begin{pmatrix} 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix - Invariante Verteilung

Wir nennen den Zeilenvektor gegen welche die Übergangsmatrix konvergiert **invariante Verteilung**, beziehungsweise ρ.

Potenzen der Übergangsmatrix - Invariante Verteilung

Wir nennen den Zeilenvektor gegen welche die Übergangsmatrix konvergiert **invariante Verteilung**, beziehungsweise ρ.

$$\mathbb{P}^{(200)} = \begin{pmatrix} 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \end{pmatrix}$$

Potenzen der Übergangsmatrix - Invariante Verteilung

Wir nennen den Zeilenvektor gegen welche die Übergangsmatrix konvergiert **invariante Verteilung**, beziehungsweise ρ.

$$\mathbb{P}^{(200)} = \begin{pmatrix} 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \\ 0.2900 & 0.2652 & 0.0570 & 0.0815 & 0.1075 & 0.1988 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho = (0.29, 0.2652, 0.057, 0.0815, 0.1075, 0.1988)$$

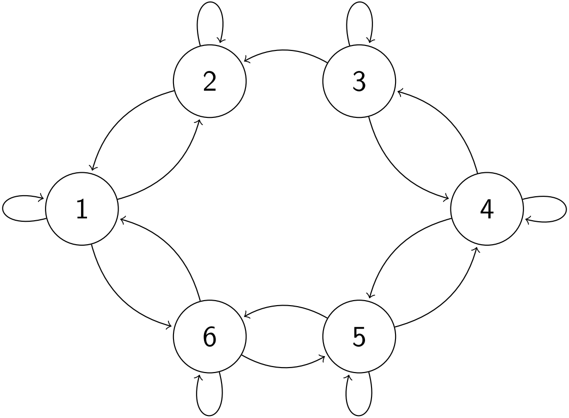
Potenzen der Übergangsmatrix - Invariante Verteilung

Wir nennen den Zeilenvektor gegen welche die Übergangsmatrix konvergiert **invariante Verteilung**, beziehungsweise ρ.

$$\Rightarrow \rho = (0.29, 0.2652, 0.057, 0.0815, 0.1075, 0.1988)$$

Dieser sagt uns, unabhängig vom Startpunkt, wie wahrscheinlich es ist zu einem beliebigen Zeitpunkt in einem bestimmten Zustand zu sein.

Invariante Verteilung der Markowkette



$$\rho = (0.29, 0.2652, 0.057, 0.0815, 0.1075, 0.1988)$$

Invariante Verteilung - Intuition

$$\rho = (0.29, 0.2652, 0.057, 0.0815, 0.1075, 0.1988)$$

Lassen wir die Markowkette unendlich lange 'laufen', so halten wir uns 29% der Zeit in Zustand 1 auf.

Invariante Verteilung - Eigenschaft

ρ als Zeilenvektor ist **linker** Eigenvektor der Übergangsmatrix $\mathbb{P}$:

$$\rho = \rho\mathbb{P}$$

Invariante Verteilung - Eigenschaft

ρ als Zeilenvektor ist **linker** Eigenvektor der Übergangsmatrix $\mathbb{P}$:

$$\rho = \rho\mathbb{P}$$

Das heißt aber einfach:

$$\rho = \mathbb{P}^T \rho$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: Gibt es für eine Markowkette mit endlich vielen Zuständen ein $L \in \mathbb{N}$, sodass die L-Schritt-Übergangsmatrix $\mathbb{P}^{(L)}$ nur strikt positive Elemente enthält, dann konvergieren die p_{ij} gegen die von i unabhängige Verteilung ρ.

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir setzen

$$m_j^{(n)} = \min_i p_{ij}^{(n)} \quad \text{und} \quad M_j^{(n)} = \max_i p_{ij}^{(n)}.$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir setzen

$$m_j^{(n)} = \min_i p_{ij}^{(n)} \quad \text{und} \quad M_j^{(n)} = \max_i p_{ij}^{(n)}.$$

Dann gilt

$$m_j^{(n+1)} = \min_i \sum_{h\in I} p_{ih} p_{hj}^{(n)} \geq \min_i \sum_{h\in I} p_{ih} m_j^{(n)} = m_j^{(n)},$$

und analog $M_j^{(n+1)} \leq M_j^{(n)}$.

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir setzen außerdem

$$\delta = \min_{(i,j)\in I^2} p_{ij}^{(L)} \geq 0.$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir setzen außerdem

$$\delta = \min_{(i,j)\in I^2} p_{ij}^{(L)} \geq 0.$$

Weiter setzen wir für feste $h, i \in I$, die Summe über alle Indize k für welche $p_{hk}^{(L)} \geq p_{ik}^{(L)}$ gilt als $\sum_{k+}$ und $\sum_{k-}$ für die übrigen Indize k.

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir veranschaulichen dies an der Übergangsmatrix $\mathbb{P}$ von vorhin:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0.60 & 0.15 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0.00 & 0.40 & 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{h} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir veranschaulichen dies an der Übergangsmatrix $\mathbb{P}$ von vorhin:

$$\begin{pmatrix} 0.60 & 0.15 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0.00 & 0.40 & 0.50 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{h} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Somit wären hier die beiden Indexmengen $k+$ und $k-$

$$k+ = \{1, 5, 6\}, \quad k- = \{2, 3, 4\}.$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir beobachten:

$$\sum_{k+} \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)} \right) + \sum_{k-} \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)} \right) = 1 - 1 = 0$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Wir beobachten:

$$\sum_{k+} \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)} \right) + \sum_{k-} \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)} \right) = 1 - 1 = 0$$

Sei nun für festes n, h ein Zustand, sodass $p_{hj}^{(n+L)}$ maximal ist und i ein Zustand, sodass $p_{ij}^{(n+L)}$ minimal ist.

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Sei nun für festes n, h ein Zustand, sodass $p_{hj}^{(n+L)}$ maximal ist und i ein Zustand, sodass $p_{ij}^{(n+L)}$ minimal ist.

Dann gilt:

$$M_j^{(n+L)} - m_j^{(n+L)} = p_{hj}^{(n+L)} - p_{ij}^{(n+L)}$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L \to \infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Sei nun für festes n, h ein Zustand, sodass $p_{hj}^{(n+L)}$ maximal ist und i ein Zustand, sodass $p_{ij}^{(n+L)}$ minimal ist.

Dann gilt:

$$M_j^{(n+L)} - m_j^{(n+L)} = p_{hj}^{(n+L)} - p_{ij}^{(n+L)} = \sum_k \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)} \right) p_{kj}^{(n)}$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k} \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)} \right) p_{kj}^{(n)} \\
&\leq \sum_{k+} \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)} \right) \left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \right)
\end{aligned}
$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

$$= \sum_k \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)}\right) p_{kj}^{(n)}$$

$$\leq \sum_{k+} \left(p_{hk}^{(L)} - p_{ik}^{(L)}\right) \left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right)$$

$$\leq (1-\delta) \left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right)$$

Nun folgt induktiv für ein $a \geq 0$:

$$M_j^{(aL)} - m_j^{(aL)} \leq (1-\delta)^a$$

Beweis der Konvergenz

Aussage: $\exists L \in \mathbb{N} : \mathbb{P}^{(L)} > 0 \Rightarrow \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}^{(L)}$ konvergiert.
Beweis:

Nun folgt induktiv für ein $a \geq 0$:

$$M_j^{(aL)} - m_j^{(aL)} \leq (1-\delta)^a$$

Da aber die Folge (über n) $M_j^{(n)}$ fallend und $m_j^{(n)}$ wachsend ist, konvergieren die Einträge der Matrix. □

Begriffe

$i, j \in I$ seien Zustände

$$i \rightsquigarrow j[n] \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad \Leftrightarrow \text{ i führt in n Schritten zu j}$$

Begriffe

$i, j \in I$ seien Zustände

$$i \rightsquigarrow j[n] \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad \Leftrightarrow \text{ i führt in n Schritten zu j}$$

$$i \rightsquigarrow j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : i \rightsquigarrow j[n]$$

Begriffe

$i, j \in I$ seien Zustände

$$i \rightsquigarrow j[n] \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad \Leftrightarrow \text{ i führt in n Schritten zu j}$$

$$i \rightsquigarrow j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : i \rightsquigarrow j[n]$$

$$i \leftrightsquigarrow j \Leftrightarrow i \rightsquigarrow j \text{ und } j \rightsquigarrow i \qquad \Leftrightarrow \text{ i \textit{kommuniziert} mit j}$$

Begriffe

$i, j \in I$ seien Zustände

$i \rightsquigarrow j[n] \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} > 0$ $\Leftrightarrow$ i führt in n Schritten zu j

$i \rightsquigarrow j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : i \rightsquigarrow j[n]$

$i \leftrightsquigarrow j \Leftrightarrow i \rightsquigarrow j$ und $j \rightsquigarrow i$ $\Leftrightarrow$ i *kommuniziert* mit j

$\forall h \in I$ mit $i \rightsquigarrow h \Rightarrow h \rightsquigarrow i$ $\Leftrightarrow$ i ist *wesentlich*

Wichtige Folgerungen

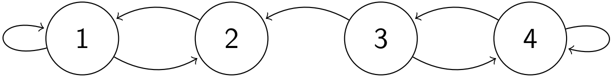
Kommunizieren ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Teilmenge der wesentlichen Zustände.

Wichtige Folgerungen

Kommunizieren ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Teilmenge der wesentlichen Zustände.
Es gilt für i, j, k wesentliche Zustände in I:

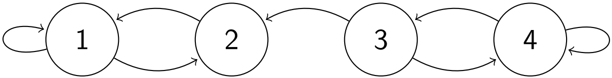
- $i \leftrightsquigarrow i$ (reflexiv)
- $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow j \leftrightsquigarrow i$ (symmetrisch)
- $i \leftrightsquigarrow j$ und $j \leftrightsquigarrow k \Rightarrow i \leftrightsquigarrow k$ (transitiv)

Wieso interessiert uns das?



Zustände 1 und 2 sind wesentlich, 3 und 4 aber nicht.

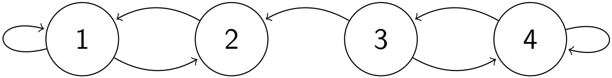
Wieso interessiert uns das?



Zustände 1 und 2 sind wesentlich, 3 und 4 aber nicht.

Was heißt das für das Langzeitverhalten der Kette?

Wieso interessiert uns das?



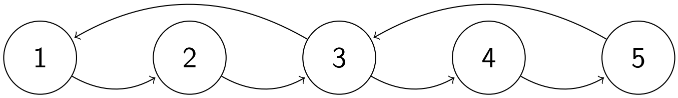
Zustände 1 und 2 sind wesentlich, 3 und 4 aber nicht.

Was heißt das für das Langzeitverhalten der Kette?

Eine invariante Verteilung würde den Zuständen 3 und 4 also Wahrscheinlichkeit 0 zuweisen.

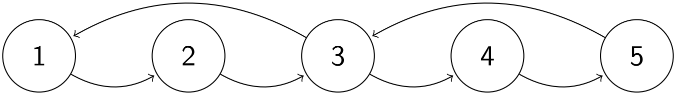
Periodische Markowketten

Wir betrachten folgende Markowkette:



Periodische Markowketten

Wir betrachten folgende Markowkette:



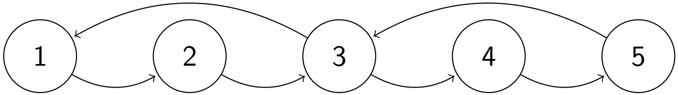
Mögliche Rückkehrzeiten für Zustand 1 sind

$$\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

$\Rightarrow$ Zustand 1 ist periodisch mit Periode 3.

Periodische Markowketten

Wir betrachten folgende Markowkette:



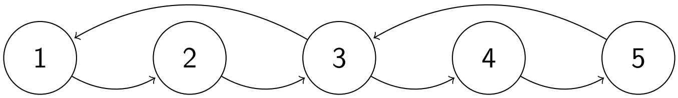
Mögliche Rückkehrzeiten für Zustand 1 sind

$$\{3, 6, 9, 12, ...\} = \{n \in \mathbb{N} \mid i \rightsquigarrow i[n]\}$$

$\Rightarrow$ Zustand 1 ist periodisch mit Periode 3.

Periodische Markowketten

Wir betrachten folgende Markowkette:



Dies gilt sogar für alle Zustände.

$\Rightarrow$ Die Markowkette ist periodisch mit Periode 3.

Definition Periode

Wir definieren den Begriff der Periode:

$$d_i = \mathrm{ggT}\{n \in \mathbb{N} \mid i \rightsquigarrow i[n]\}$$

$d_i \Rightarrow$ Periode für Zustand i

Definition Periode

Wir definieren den Begriff der Periode:

$$d_i = \text{ggT}\{n \in \mathbb{N} \mid i \rightsquigarrow i[n]\}$$

$d \Rightarrow$ Periode für gesamte Markowkette

Wenn alle Zustände die selbe Periode haben.

Definition Periode

Wir definieren den Begriff der Periode:

$$d_i = \text{ggT}\{n \in \mathbb{N} \mid i \rightsquigarrow i[n]\}$$

$d \Rightarrow$ Periode für gesamte Markowkette

Wenn alle Zustände die selbe Periode haben.
Also wenn

$$\forall i \in I : d = d_i \geq 2.$$

Definition Periode

Wir definieren den Begriff der Periode:

$$d_i = \mathrm{ggT}\{n \in \mathbb{N} \mid i \rightsquigarrow i[n]\}$$

Falls $d = 1$, so nennen wir die Markowkette **aperiodisch** .

Kommunizierende Zustände haben die selbe Periode

Aussage: $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow d_i = d_j$

Kommunizierende Zustände haben die selbe Periode

Aussage: $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow d_i = d_j$
Beweis:

Es gelte $j \rightsquigarrow j[n]$,
und seien k, m Zeitpunkte, sodass $i \rightsquigarrow j[k]$ und $j \rightsquigarrow i[m]$.

Kommunizierende Zustände haben die selbe Periode

Aussage: $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow d_i = d_j$
Beweis:

Es gelte $j \rightsquigarrow j[n]$,
und seien k, m Zeitpunkte, sodass $i \rightsquigarrow j[k]$ und $j \rightsquigarrow i[m]$.

Dann gilt:

$$i \rightsquigarrow i[k+m] \text{ und } i \rightsquigarrow i[k+m+n]$$

Kommunizierende Zustände haben die selbe Periode

Aussage: $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow d_i = d_j$
Beweis:

Es gelte $j \rightsquigarrow j[n]$,
und seien k, m Zeitpunkte, sodass $i \rightsquigarrow j[k]$ und $j \rightsquigarrow i[m]$.

Dann gilt:

$$i \rightsquigarrow i[k+m] \text{ und } i \rightsquigarrow i[k+m+n]$$

Somit teilt d_i dann $k+m$ und $k+m+n$, dann teilt d_i auch n.

Kommunizierende Zustände haben die selbe Periode

Aussage: $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow d_i = d_j$
Beweis:

Es gelte $j \rightsquigarrow j[n]$,
und seien k, m Zeitpunkte, sodass $i \rightsquigarrow j[k]$ und $j \rightsquigarrow i[m]$.

Dann gilt:

$$i \rightsquigarrow i[k+m] \text{ und } i \rightsquigarrow i[k+m+n]$$

Somit teilt d_i dann $k+m$ und $k+m+n$, dann teilt d_i auch n.

Damit ist d_i gemeinsamer Teiler aller n mit $j \rightsquigarrow j[n]$.

$$\Rightarrow d_i \leq d_j$$

Kommunizierende Zustände haben die selbe Periode

Aussage: $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow d_i = d_j$

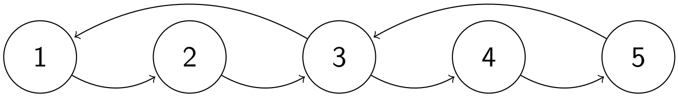
Nun folgt aus Symmetriegründen auch $d_j \leq d_i$.

Und damit insbesondere

$$d_i = d_j.$$

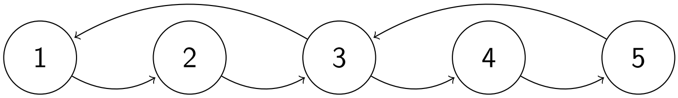
Zerlegung in Teilgruppen

Wir betrachten wieder unsere periodische Markowkette von vorhin:



Zerlegung in Teilgruppen

Wir betrachten wieder unsere periodische Markowkette von vorhin:

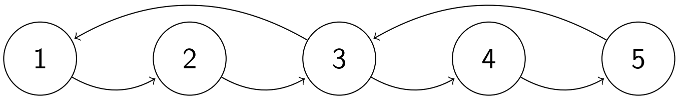


Wir definieren

$$C(i) = \{\, j \in I \mid j \leftrightsquigarrow i \,\}$$

Zerlegung in Teilgruppen

Wir betrachten wieder unsere periodische Markowkette von vorhin:

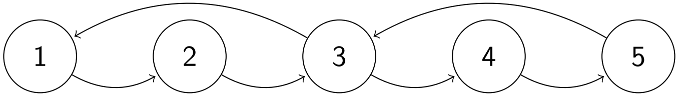


In unserem Fall sind das aber alle Zustände:

$$\forall i \in I : C(i) = I$$

Zerlegung in Teilgruppen

Wir betrachten wieder unsere periodische Markowkette von vorhin:



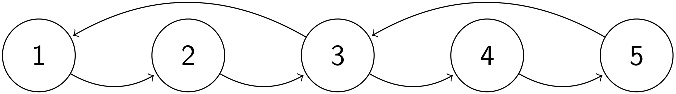
In unserem Fall sind das aber alle Zustände:

$$\forall i \in I : C(i) = I$$

Jetzt sehen wir: Wenn einer dieser Zustände periodisch ist, so sind es die anderen direkt auch alle.

Zerlegung in Teilgruppen

Wir betrachten wieder unsere periodische Markowkette von vorhin:

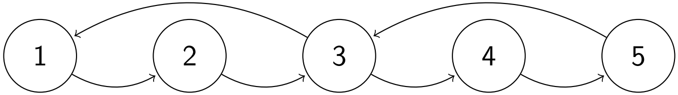


Wir können die Menge $C(i)$ in Teilgruppen wie folgt zerlegen:

$$C_r(i) = \{\, j \in C(i) \mid r \equiv n \pmod{d_i} \text{ mit } i \rightsquigarrow j[n] \,\}$$

Zerlegung in Teilgruppen

Wir betrachten wieder unsere periodische Markowkette von vorhin:



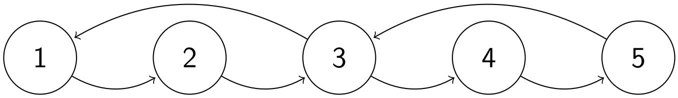
Wir können die Menge $C(i)$ in Teilgruppen wie folgt zerlegen:

$$C_r(i) = \{\, j \in C(i) \mid r \equiv n \pmod{d_i} \text{ mit } i \rightsquigarrow j[n] \,\}$$

Also die Menge an Zuständen, die mit i kommunizieren, welche wir von i aus in $n = r + k \cdot d_i$ Schritten erreichen können (für alle $k \in \mathbb{N}$).

Zerlegung in Teilgruppen

Wir betrachten wieder unsere periodische Markowkette von vorhin:



Für unsere Markowkette heißt das:

$$C_0(1) = \{1, 4\}, C_1(1) = \{2, 5\}, C_2(1) = \{3\}$$

Rekurrenz

Rekurrenz beschreibt das Rückkehrverhalten einer Markowkette.

Rekurrenz

Rekurrenz beschreibt das Rückkehrverhalten einer Markowkette.

Wie oft 'besucht' eine Markowkette einen bestimmten Zustand i?

Rekurrenz

Definiere folgende zwei Begriffe für Zustände:

Rekurrenz

Definiere folgende zwei Begriffe für Zustände:

- 'rekurrent' heißt, dass eine Markowkette einen Zustand unendlich oft besucht.

Rekurrenz

Definiere folgende zwei Begriffe für Zustände:

- 'rekurrent' heißt, dass eine Markowkette einen Zustand unendlich oft besucht.
- 'transient' meint genau das Gegenteil.

Kriterium für Rekurrenz

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{ij}^{(n)} = P_i\left(X_n = j, X_{n-1} \neq j, ..., X_1 \neq j\right)$$

Kriterium für Rekurrenz

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{ij}^{(n)} = P_i \left(X_n = j, X_{n-1} \neq j, ..., X_1 \neq j \right)$$

Die Wahrscheinlichkeit bei Start in i zum ersten mal nach n Schritten den Zustand j zu besuchen.

Kriterium für Rekurrenz

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{ij}^{(n)} = P_i\left(X_n = j, X_{n-1} \neq j, ..., X_1 \neq j\right)$$

Wir erkennen $f_{ij}^{(0)} = 0$ uns setzen weiter:

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad \text{und} \quad p_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

Kriterium für Rekurrenz

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{ij}^{(n)} = P_i\left(X_n = j, X_{n-1} \neq j, ..., X_1 \neq j\right)$$

Wir erkennen $f_{ij}^{(0)} = 0$ uns setzen weiter:

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad \text{und} \quad p_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

- f_{ij}^* ist die Wahrscheinlichkeit je von i nach j zu gelangen.

Kriterium für Rekurrenz

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{ij}^{(n)} = P_i\left(X_n = j, X_{n-1} \neq j, ..., X_1 \neq j\right)$$

Wir erkennen $f_{ij}^{(0)} = 0$ uns setzen weiter:

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad \text{und} \quad p_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

- f_{ij}^* ist die Wahrscheinlichkeit je von i nach j zu gelangen.
- p_{ij}^* ist die erwartete Anzahl an Besuchen in j bei Start in i.

Kriterium für Rekurrenz

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{ij}^{(n)} = P_i \left(X_n = j, X_{n-1} \neq j, ..., X_1 \neq j \right)$$

Wir erkennen $f_{ij}^{(0)} = 0$ uns setzen weiter:

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad \text{und} \quad p_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{*} &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} E_i \left(1_{\{X_n = j\}} \right) = E_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}} \right) \\ &= E_i \left(\text{Anzahl der Besuche in } j \right) \end{aligned}$$

Kriterium für Rekurrenz

Wir nennen eine ZV

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$$

Kriterium für Rekurrenz

Wir nennen eine ZV

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$$

Stoppzeit , wenn für alle $n \geq 0$ das Ereignis

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\}$$

nur von $X_0, ..., X_n$ abhängt.

Kriterium für Rekurrenz

Wir nennen eine ZV

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$$

Stoppzeit , wenn für alle $n \geq 0$ das Ereignis

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\}$$

nur von $X_0, ..., X_n$ abhängt.

Dies bedeutet für ein geeignetes $A \subset I^{n+1}$:

$$\{\tau = n\} = \{(X_0, ..., X_n) \in A\}$$

Kriterium für Rekurrenz

Wir nennen eine ZV

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$$

Stoppzeit , wenn für alle $n \geq 0$ das Ereignis

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\}$$

nur von $X_0, ..., X_n$ abhängt.

Dies bedeutet für ein geeignetes $A \subset I^{n+1}$:

$$\{\tau = n\} = \{(X_0, ..., X_n) \in A\}$$

Im Folgenden schreiben wir B_i für die Anzahl der Besuche in i.

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m, m \in \mathbb{N}$

Beweis:

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

Seien:

$$\tau_1(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) = i\}$$
$$\tau_{m+1}(\omega) = \inf\{n > \tau_m(\omega) : X_n(\omega) = i\}$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m, m \in \mathbb{N}$
Beweis:

Seien:

$$\tau_1(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) = i\}$$
$$\tau_{m+1}(\omega) = \inf\{n > \tau_m(\omega) : X_n(\omega) = i\}$$

Es ist $\tau_m(\omega)$ der Zeitpunkt des m-ten Besuches in i.

Und wenn dieser nicht existiert, dann ist $\tau_m(\omega) = \infty$.

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

Bemerkung: Die τ_m sind Stoppzeiten.

Setzen wir nämlich A_{mn} als die Menge der Folgen von Realisationen $(j_0, ..., j_{n-1}) \in I^n$ mit $j_0 = i$, welche i noch $m-1$ weitere Male besucht haben.

Dann ist

$$\{X_0 = i, \tau_m = n\} = \{(X_0, ..., X_{n-1}) \in A_{mn}, X_n = i\}.$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

Jetzt sehen wir

$$\{\tau_m < \infty\} = \{B_i \geq m\}.$$

Die Behauptung beweisen wir nun nach Induktion:

Für $m = 1$ gilt

$$P_i(\tau_m < \infty) = (f_{ii}^*)^m \, .$$

Die Wahrscheinlichkeit **einmal** zu i zurückzukehren.

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

Jetzt sehen wir

$$\{\tau_m < \infty\} = \{B_i \geq m\}.$$

Die Behauptung beweisen wir nun nach Induktion:

Für $m = 1$ gilt

$$P_i(\tau_m < \infty) = (f_{ii}^*)^m \, .$$

Die Wahrscheinlichkeit **einmal** zu i zurückzukehren.

Wir definieren

$$D_n^{n+k} = \{X_{n+1} \neq i, ..., X_{n+k-1} \neq i, X_{n+k} = i\}$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

Nun machen wir den Induktionsschritt:

$$P_i(\tau_m < \infty) = (f_{ii}^*)^m \Rightarrow P_i\left(\tau_{m+1} < \infty\right) = (f_{ii}^*)^{m+1}$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

$$P_i\left(\tau_{m+1} < \infty\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(\tau_{m+1} - \tau_m = k, \tau_m = n\right)$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = \left(f_{ii}^*\right)^m, m \in \mathbb{N}$
Beweis:

$$P_i\left(\tau_{m+1} < \infty\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(\tau_{m+1} - \tau_m = k, \tau_m = n\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(\tau_{m+1} - \tau_m | \tau_m = n\right) P_i\left(\tau_m = n\right)$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = \left(f_{ii}^*\right)^m, m \in \mathbb{N}$
Beweis:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(\tau_{m+1} - \tau_m | \tau_m = n\right) P_i\left(\tau_m = n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(D_n^{n+k} | X_n = i, (X_0, ..., X_{n-1}) \in A_{mn}\right) P_i(\tau_m = n)$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$

Beweis:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i \left(D_n^{n+k} | X_n = i, (X_0, ..., X_{n-1}) \in A_{mn} \right) P_i(\tau_m = n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i \left(D_n^{n+k} | X_n = i \right) P_i(\tau_m = n)$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i \left(D_n^{n+k} | X_n = i \right) P_i(\tau_m = n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i \left(D_0^{k} | X_0 = i \right) P_i(\tau_m = n)$$

Kriterium für Rekurrenz

Aussage: $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \, , m \in \mathbb{N}$
Beweis:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i \left(D_0^k | X_0 = i \right) P_i(\tau_m = n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \underbrace{P_i(\tau_m < \infty)}_{(f_{ii}^*)^m} = (f_{ii}^*)^{m+1}$$

□

Kriterium für Rekurrenz - Rekurrenzsatz

Wir schauen uns noch einmal die Gleichung von eben an:

$$P_i\left(B_i \geq m\right) = \left(f_{ii}^{*}\right)^{m}$$

Kriterium für Rekurrenz - Rekurrenzsatz

Wir schauen uns noch einmal die Gleichung von eben an:

$$P_i\left(B_i \geq m\right) = \left(f_{ii}^*\right)^m$$

Wir überlegen uns, dass ein Zustand rekurrent ist genau dann wenn

$$f_{ii}^* = 1,$$

denn nun klappt die obige Gleichung für alle $m \in \mathbb{N}$.

Kriterium für Rekurrenz - Rekurrenzsatz

Wir schauen uns noch einmal die Gleichung von eben an:

$$P_i\left(B_i \geq m\right) = \left(f_{ii}^*\right)^m$$

Wir überlegen uns, dass ein Zustand rekurrent ist genau dann wenn

$$f_{ii}^* = 1,$$

denn nun klappt die obige Gleichung für alle $m \in \mathbb{N}$.

Dies ist aber äquivalent zu

$$p_{ii}^* = \infty.$$

Dass wir also bei Start in i, den Zustand i unendlich oft wieder besuchen.

Mehrdimensionale Irrfahrt

Sei

$$Y_n = (Y_{n_1}, Y_{n_2}, ..., Y_{nd})$$

eine Folge von unabhängigen d-dimensionalen ZV in $\mathbb{Z}$.

Mehrdimensionale Irrfahrt

Sei

$$Y_n = (Y_{n_1}, Y_{n_2}, \ldots, Y_{nd})$$

eine Folge von unabhängigen d-dimensionalen ZV in $\mathbb{Z}$.

Wir fragen uns ob der Zustand

$$(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$$

rekurrent ist oder transient.

Mehrdimensionale Irrfahrt

Sei

$$Y_n = (Y_{n_1}, Y_{n_2}, ..., Y_{nd})$$

eine Folge von unabhängigen d-dimensionalen ZV in $\mathbb{Z}$.

Wir fragen uns ob der Zustand

$$(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}^d$$

rekurrent ist oder transient.

Wir betrachten

$$p^{(2n)}_{(0,...,0),(0,...,0)} = \left(\binom{2n}{n} 2^{-2n} \right)^d \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^d$$

Mehrdimensionale Irrfahrt

Wir betrachten

$$p^{(2n)}_{(0,\dots,0),(0,\dots,0)} = \left(\binom{2n}{n} 2^{-2n}\right)^d \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d$$

die Wahrscheinlichkeit nach $2n$ Schritten vom Ursprung zum Ursprung zurückzukehren.

Mehrdimensionale Irrfahrt

Wir betrachten

$$p^{(2n)}_{(0,\dots,0),(0,\dots,0)} = \left(\binom{2n}{n} 2^{-2n}\right)^d \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d$$

die Wahrscheinlichkeit nach $2n$ Schritten vom Ursprung zum Ursprung zurückzukehren.

Die Markowkette ist für

$d \leq 2$ rekurrent und

$d \geq 3$ transient.

Warum?

Mit dem Rekurrenzsatz prüfen wir wann $p_{ii}^* < \infty$

$$p_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^d} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{d}{2}}$$

Und diese Summe divergiert nur für $d \leq 2$.