

Mathematische Stochastik - Übungsblatt #1

Amir Miri Lavasani (7310114, Gruppe 6), Bent Müller (7302332, Gruppe 6),
Johan Kattenhorn (7310602, Gruppe 7)

November 5, 2020

Aufgabe 1. Satz 1.10 - Folgerungen aus den Axiomen

(b) *Behauptung:* $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$

Beweis. Setze

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right),$$

wobei $A_i = \emptyset$ für alle $i \in \{n+1, n+2, \dots\}$. Die Vereinigung ist nach wie vor disjunkt, da für alle Mengen X (auch $X = \emptyset$) gilt $\emptyset \cap X = \emptyset$. Außerdem gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$.

Schließlich folgt mit der σ -**Additivität** und **1.10a**):

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n P(A_j) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) \\ &= \sum_{j=1}^n P(A_j) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{j=1}^n P(A_j) \end{aligned}$$

□

(c) *Behauptung:* $0 \leq P(A) \leq 1$

Beweis. Setze $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$, d.h. zerlege Ω in n disjunkte Teilmengen.

$$1 \stackrel{(2)}{=} P(\Omega) = P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \stackrel{(b)}{=} \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig, dann

$$P(A_k) = 1 - \underbrace{(P(A_1) + \dots + P(A_k - 1) + P(A_k + 1) + \dots + P(A_n))}_{\geq 0 \text{ nach (1)}} \leq 1$$

□

(d) *Behauptung:* $P(A^c) = 1 - P(A)$

Beweis. Setze $\Omega = A \cup A^c$.

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) \stackrel{(3)}{=} P(A) + P(A^c)$$

Nach Subtraktion von $P(A)$ auf beiden Seiten folgt die Behauptung.

□

(e) *Behauptung:* Aus $A \subseteq B$ folgt $P(A) \leq P(B)$

Beweis. Setze $B = A \cup (B \setminus A)$. Nach (3) ist dann $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ und

$$P(A) = P(B) - \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0 \text{ nach (1)}} \leq P(B)$$

□

(g) *Behauptung:* $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass $P(A \setminus B) \stackrel{(*)}{=} P(A) - P(A \cap B)$: Setze $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, dann ist

$$P(A) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \stackrel{(b)}{=} P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

Die Behauptung folgt direkt nach Umstellen nach $P(A \setminus B)$.

Nun setze $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. Es folgt:

$$P(A \cup B) = P((A \setminus B) \cup B) \stackrel{(b)}{=} P(A \setminus B) + P(B) \stackrel{(*)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

□