Mathematische Stochastik - Übungsblatt #1

Amir Miri Lavasani (7310114, Gruppe 6), Bent Müller (7302332, Gruppe 6),
Johan Kattenhorn (7310602, Gruppe 7)

November 6, 2020

Aufgabe 1. Satz 1.10 - Folgerungen aus den Axiomen

(b) *Behauptung:* $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

Beweis. Setze

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right),$$

wobei $A_i = \emptyset$ für alle $i \in \{n+1, n+2, ...\}$. Die Vereinigung ist nach wie vor disjunkt, da für alle Mengen X (auch $X = \emptyset$) gilt $\emptyset \cap X = \emptyset$. Außerdem gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.
Schließlich folgt mit der **σ-Additivität** und **1.10a)**:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\
&\overset{\sigma-Add.}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(A_j) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(A_j) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{j=1}^{n} P(A_j)
\end{aligned}$$

□

(c) *Behauptung:* $0 \leq P(A) \leq 1$

Beweis. Setze $\Omega = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j$, d.h. zerlege Ω in n disjunkte Teilmengen.

$$1 \overset{(2)}{=} P(\Omega) = P\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j\right) \overset{(b)}{=} \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

Sei $k \in \{1, ..., n\}$ beliebig, dann

$$P(A_k) = 1 - \underbrace{(P(A_1) + ... + P(A_k - 1) + P(A_k + 1) + ... + P(A_n))}_{\geq 0 \text{ nach } (1)} \leq 1$$

$\square$

(d) *Behauptung:* $P(A^c) = 1 - P(A)$

Beweis. Setze $\Omega = A \cup A^c$.

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{(3)}{=} P(A) + P(A^c)$$

Nach Subtraktion von $P(A)$ auf beiden Seiten folgt die Behauptung.

$\square$

(e) *Behauptung:* Aus $A \subseteq B$ folgt $P(A) \leq P(B)$

Beweis. Setze $B = A \cup (B \backslash A)$. Nach (3) ist dann $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$ und

$$P(A) = P(B) - \underbrace{P(B/A)}_{\geq 0 \text{ nach } (1)} \leq P(B)$$

$\square$

(g) *Behauptung:* $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass $P(A \backslash B) \overset{(\star)}{=} P(A) - P(A \cap B)$: Setze $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$, dann ist

$$P(A) = P((A \backslash B) \cup (A \cup B)) \overset{(b)}{=} P(A \backslash B) + P(A \cap B)$$

Die Behauptung folgt direkt nach Umstellen nach $P(A \backslash B)$.
Nun setze $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$. Es folgt:

$$P(A \cup B) = P((A \backslash B) \cup B) \overset{(b)}{=} P(A \backslash B) + P(B) \overset{(\star)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

$\square$