

# Mathematische Stochastik - Übungsblatt #1

Amir Miri Lavasani (7310114, Gruppe 6), Bent Müller (7302332, Gruppe 6),  
Johan Kattenhorn (Mart. Nummer, Gruppe 7)

November 4, 2020

**Aufgabe 1.** Satz 1.10 - Folgerungen aus den Axiomen

(b) *Behauptung:*  $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$

*Beweis.* Setze

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right),$$

wobei  $A_i = \emptyset$  für alle  $i \in \{n+1, n+2, \dots\}$ . Die Vereinigung ist nach wie vor disjunkt, da für alle Mengen  $X$  (auch  $X = \emptyset$ ) gilt  $\emptyset \cap X = \emptyset$ . Außerdem gilt  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$ .

Schließlich folgt mit der  $\sigma$ -**Additivität** und **1.10a**):

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n P(A_j) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) \\ &= \sum_{j=1}^n P(A_j) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{j=1}^n P(A_j) \end{aligned}$$

□

(c) *Behauptung:*  $0 \leq P(A) \leq 1$

*Beweis.* Setze  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$ , d.h. zerlege  $\Omega$  in disjunkte Teilmengen.

$$1 \stackrel{(2)}{=} P(\Omega) = P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \stackrel{(b)}{=} \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

Sei  $k \in \{1, \dots, n\}$  beliebig, dann

$$P(A_k) = 1 - \underbrace{(P(A_1) + \dots + P(A_k - 1) + P(A_k + 1) + \dots + P(A_n))}_{\geq 0 \text{ nach (1)}} \leq 1$$

□

(d) *Behauptung:*  $P(A^c) = 1 - P(A)$

*Beweis.* Setze  $\Omega = A \cup A^c$ .

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) \stackrel{(3)}{=} P(A) + P(A^c)$$

Nach Subtraktion von  $P(A)$  auf beiden Seiten folgt die Behauptung.

□

(e) *Behauptung:* Aus  $A \subseteq B$  folgt  $P(A) \leq P(B)$

*Beweis.* Setze  $B = A \cup (B \setminus A)$ . Nach (3) ist dann  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$  und

$$P(A) = P(B) - \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0 \text{ nach (1)}} \leq P(B)$$

□

(g) *Behauptung:*  $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

*Beweis.* Zunächst wird gezeigt, dass  $P(A \setminus B) \stackrel{(*)}{=} P(A) - P(A \cap B)$ : Setze  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

$$P(A) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \stackrel{(3)}{=} P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

Die Behauptung folgt direkt nach Umstellen nach  $P(A \setminus B)$ .

Nun setze  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ . Es folgt:

$$P(A \cup B) = P((A \setminus B) \cup B) \stackrel{(3)}{=} P(A \setminus B) + P(B) \stackrel{(*)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

□