



CentraleSupélec

Modélisation pour l'aide à la décision

Affectation des régions aux représentants commerciaux de Pfizer

Auteurs :

M. Ahmed EL AAMRANI

M. Wassim LHOURLI

M. Régis TROISSANT

Encadrants :

M. Vincent MOUSSEAU

M. Khaled BELAHCENE

6 mars 2018

Table des matières

Introduction	1
1 Modélisation du problème avec briques centrales fixes	5
2 Résultats et interprétations du premier modèle	9
3 Modélisation du problème avec briques centrales variables	21
4 Résultats et interprétations du deuxième modèle	27

Introduction

Environnement du problème :

Nous sommes dans le contexte de la vente de produits pharmaceutiques par la société Pfizer. Celle-ci distribue des produits aux médecins particuliers par l'intermédiaire de commerciaux (SR, pour « Sales representatives »). Les commerciaux doivent donc démarcher chaque agent médical, et entretenir avec lui des relations de confiance pour une bonne efficacité de vente.

Pfizer est présente dans le monde entier, mais nous nous intéresserons à son implantation en Turquie. Un certain nombre d'agents médicaux sont répandus sur le territoire, découpé en briques élémentaires, et Pfizer cherche à répartir la charge totale de travail entre ses différents commerciaux, de sorte à minimiser la distance parcourue par chacun (et ainsi les frais de déplacement).

Formalisme et données du problème

Données

- Territoire décomposé en 22 briques élémentaires.
- Travail réparti entre 4 commerciaux SR_1 , SR_2 , SR_3 et SR_4
- Chaque représentant commercial séjourne dans un bureau situé dans une 'brique centrale' parmi les briques élémentaires.
- Une fonction "Index Value", qui indique la charge de travail que demande chaque brique :
 - chaque brique a une *index value* comprise entre 0 (rien à faire) et 1 (demande un commercial à temps plein). On notera v_i l'*index value* de la i-ème brique.
 - La somme des *index value* est

$$\sum_{i=1}^{22} v_i = 4 \tag{1}$$

Objectifs et contraintes

Suite à l'échange avec les dirigeants de Pfizer, on a pu relever les conditions suivantes :

Objectifs :

- Il s'agit de répartir les 22 briques entre les 4 commerciaux, de sorte de minimiser la distance totale (c'est à dire la somme de leurs déplacements respectifs).
- Mais cette optimisation des distances induira des changements par rapport à la répartition actuelle, et ceux-ci ne sont pas sans effets négatifs (plus un SR change ses clients, plus il perd ses repères, et moins il est efficace). Ainsi, à chaque changement de SR pour une brique, on attribut une valeur de "disruption", symbolisant les inconvénients du changement. L'objectif est donc de minimiser la disruption totale (somme des disruptions associées à chaque brique).
- Dans un second temps, on pourra chercher à aller plus loin, en réfléchissant sur d'autres aspects du problème. En particulier, nous avons réfléchi pour savoir s'il était possible de trouver les positions optimales des quatre bureaux (qui nous sont d'abord imposées).

Contraintes :

- La répartition du travail doit être équilibrée, de sorte qu'un commercial doit effectuer une charge de travail comprise entre 80% et 120% de la charge de travail moyenne.
- Dans la mesure du possible, les trajets doivent également être équilibrés (outre la somme globale des trajets, on cherchera à éviter qu'un SR parcoure dix fois la distance d'un autre, par exemple).

Choix d'outils pour la résolution du problème :

Méthodes de résolution

Dans la mesure du possible, nous avons utilisé de la programmation linéaire pour résoudre le problème (d'où l'importance de poser les bonnes variables et les équations associées). C'est à dire que nous avons résolu linéairement, sous forme matricielle, tout ce qui pouvait l'être. Malheureusement, certaines contraintes ne sont pas linéaires. Certaines de ces contraintes ont pu être exprimées sous forme linéaire ; comme la valeur absolue en utilisant le fait que les variables sont binaires. D'autres ont été plus compliquées, et nous avons donc traité ces contraintes avec d'autres méthodes substitutives.

Notre première idée fut de réunir en une seule équation les deux objectifs et les deux contraintes, en introduisant des coefficients pondérateurs pour marquer l'importance relative de chaque objectif et chaque contrainte. Mais, cette méthode ne permet pas d'atteindre toutes les solutions optimales. Nous nous sommes donc rabattus sur des techniques plus classiques d'optimisation linéaire, comme la méthode d'épsilon contrainte.

Outils pour la résolution

Pour les calculs, nous aurions pu utiliser Excel ou d'autres solveurs, mais nous avons plutôt opté pour Matlab, dont les performances de calcul et de précision sont bien meilleurs. Cela nous a permis d'obtenir un bon nombre des graphiques et figures présentés par la suite. Notons qu'il est aussi très adapté aux problèmes linéaires, puisque c'est un langage facilitant les calculs matriciels. Et les relations linéaires peuvent facilement être exprimées sous forme de produits matriciels.

Concrètement, sur Matlab, c'est l'algorithme *intlinprog* que nous avons utilisé. Celui-ci se présente sous la forme d'une fonction qui, à partir d'arguments saisis par l'utilisateur, renvoie le vecteur solution x . Nous avons utilisé cette fonction sous la forme suivante :

$$x = \text{intlinprog}(f, \text{intcon}, A, b, A_{eq}, b_{eq}) \text{ avec :}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ est la solution du problème où p est le nombre d'inconnues.
- $f \in \mathbb{R}^n$ est la matrice de coût. Plus précisément, $f^T x$ est la fonction objective
- intcon est l'ensemble des valeurs entières
- A, b_{eq}, A_{eq} et b sont telles que :
 - $A \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^p$ et $Ax \leq b$ avec p le nombre de contraintes d'inégalités
 - $A_{eq} \in \mathbb{M}_{q,n}(\mathbb{R})$, $b_{eq} \in \mathbb{R}^q$ et $A_{eq}x = b_{eq}$ avec q le nombre de contraintes d'égalités

Notons que toutes les contraintes d'inégalités peuvent s'écrire sous la forme $Ax \leq b$. Donc la forme de résolution est en effet générique, et peut être adaptée à n'importe quel problème de programmation linéaire.

Chapitre 1

Modélisation du problème avec briques centrales fixes

Dans notre problème, on souhaite donc assigner chaque brique territoriale à un représentant commercial. Chaque brique est la plus petite région géographique pour laquelle des informations pertinentes comme les données de ventes ou le nombre de médecins référents sont disponibles. Dans notre problème, on a 22 briques à assigner à 4 représentants commerciaux. On a donc choisi de les représenter par une variable binaire $x_{i,j}$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad (1.1)$$

La variable $x_{i,j}$ est égale à 1 dans le cas où on assigne le territoire i au représentant j , et elle est égale à 0 sinon.

De plus, dans un premier temps, on suppose que chaque représentant commercial a un bureau localisé dans une brique centrale considérée comme le centre de son territoire. Dans un premier temps, on suppose que les briques centrales des 4 commerciaux ne sont pas modifiées, et sont données par la situation actuelle des territoires, Dans ce cas, on a :

$$x_{4,1} = 1 \quad x_{14,2} = 1 \quad x_{16,3} = 1 \quad x_{22,4} = 1 \quad (1.2)$$

Cela signifie que la brique centrale du 1er commercial est la brique 4, celle du 2nd commercial est la brique 14, celle du 3ème est la brique 16 et celle du dernier est la brique 22. Dans un premier temps, (2.2) traduit des contraintes d'affectation aux représentants commerciaux. On verra dans la suite, ce que "central" implique en terme de contraintes.

Ces briques sont élémentaires et donc indivisibles. Spontanément, pour chaque brique, on souhaite affecter un et un seul commercial. Cela se traduit en termes de contraintes par :

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \sum_{j=1}^4 x_{i,j} = 1 \quad (1.3)$$

Dans le but de maintenir une efficacité globale de déplacement, il est nécessaire de minimiser la distance totale. Or, la distance totale parcourue par un SR (sur son territoire) peut être mesurée par la somme des distances entre le bureau (c'est-à-dire la brique centrale) et les (centres des) briques qui lui sont attribuées. Ainsi, le problème s'écrit :

$$\min_{x_{i,j}} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j} \quad (1.4)$$

où $d_{i,j}$ est la distance entre la brique i et la brique centrale du commercial j .

Un autre facteur important du problème est celui des valeurs d'index (*index values*). En effet, Pfizer calcule ces valeurs pour chaque brique traduisant ainsi la charge de travail d'une brique. Ces valeurs sont données, et on les note sous la forme du vecteur v avec :

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad v_i \in [0, 1]$$

Parmi les contraintes imposées par Pfizer, on trouve que pour chaque commercial, sa charge de travail doit être comprise dans un intervalle. Cela peut s'écrire comme :

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad 0.8 \leq \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} v_i \leq 1.2$$

Une autre préoccupation est la minimisation de la perturbation (*'disruption'*) et est définie comme l'inclusion de nouvelles briques dans les territoires des représentants commerciaux. La perturbation n'est pas souhaitable car certaines des relations établies entre les commerciaux et les médecins référents ne peuvent plus être utilisées. Elle est définie, comme le nombre de changements de territoires affectés par les valeurs d'index selon :

$$\text{disruption} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} v_i |b_{i,j} - x_{i,j}|$$

avec $b_{i,j}$ l'état des affectations initiales, sans aucun changement, donc $b_{i,j} \in \{0, 1\}$

Or, la présence d'une valeur absolue dans l'expression précédent pose problème puisqu'on ne peut pas la traiter dans le cadre d'une programmation linéaire. Néanmoins, puisque les variables ici sont binaires, on peut réécrire la disruption de manière équivalente selon :

$$\text{disruption} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} v_i (x_{i,j} + b_{i,j} - 2x_{i,j}b_{i,j})$$

Ainsi, notre problème de minimisation possède deux fonctions objectives. Pour repasser à une modélisation mono-objectif d'un point de vue formel, on peut minimiser la quantité suivante :

$$\min_{x_{i,j}} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j} + \frac{\delta}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} v_i (x_{i,j} + b_{i,j} - 2x_{i,j}b_{i,j}) \quad (1.5)$$

qui est la somme pondérée des deux fonctions objectives précédentes. La constante δ est à fixer et dépend de notre volonté de donner plus de poids à un terme qu'à un autre. Cette astuce permet de discerner parmi les solutions ayant une distance totale à peu près égales, celles représentant la disruption la plus faible.

Ensuite, on peut aussi poser des contraintes favorisant l'équilibre entre les différents commerciaux, pour améliorer l'atmosphère sociale de l'entreprise. On peut donc chercher à ce que le rapport de la distance parcourue par un commercial sur la somme des distances parcourus par tous les commerciaux soit compris dans un intervalle autour de 0.25. Cela peut s'écrire par :

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad a \leq \frac{\sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}}{\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}} \leq b$$

où $a, b \in [0, 1]^2$ sont des constantes à définir.

Résumé du modèle

$x_{i,j}$ sont les affectations issues du modèle

$b_{i,j}$ sont les affectations initiales

v_i : valeur d'index de la brique i

$d_{i,j}$: distance de la brique i à la brique centrale du commercial j

a, b sont des constantes à fixer dans $[0, 1]^2$

$$\min_{x_{i,j}} \quad \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^4 x_{i,j} d_{i,j} + \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^4 v_i (x_{i,j} + b_{i,j} - 2x_{i,j} b_{i,j}) \quad (1.6)$$

respectant les contraintes :

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad (1.7)$$

$$x_{4,1} = 1 \quad x_{14,2} = 1 \quad x_{16,3} = 1 \quad x_{22,4} = 1 \quad (1.8)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \sum_{j=1}^4 x_{i,j} = 1 \quad (1.9)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad 0.8 \leq \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} v_i \leq 1.2 \quad (1.10)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad a \leq \frac{\sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}}{\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}} \leq b \quad (1.11)$$

Chapitre 2

Résultats et interprétations du premier modèle

Au vu du premier modèle mathématique choisi pour conduire cette étude, deux premiers critères globaux permettront de comparer dans un premier temps les solutions obtenues :

- La distance totale parcourue par les SR
- La disruption par rapport à la répartition initiale

Ensuite, chaque solution peut également être jugée sur son aspect "égalitaire", c'est-à-dire sur sa possibilité à distribuer aux différents SR des tâches comparables. Ainsi, il sera nécessaire d'étudier pour chaque solution :

- Le pourcentage de la distance totale parcourue par chaque SR
- Le pourcentage de la charge totale effectué par chaque SR

Caractéristiques de la répartition initiale

Cette étude nous conduit naturellement à nous poser une question initiale : pourquoi les dirigeants de Pfizer veulent modifier l'affectation des briques aux différents SR à Istanbul ? Il est donc important d'étudier dans un premier temps les différentes caractéristiques de l'affectation actuelle du travail des SR dans l'exemple étudié. Celles-ci sont résumées dans la figure 2.1.

Plusieurs remarques liées à cette configuration initiale nous poussent ainsi à mener notre étude :

- La distance totale parcourue peut (éventuellement) être réduite
- Il existe un déséquilibre important dans la répartition de la distance parcourue par chaque SR, puisque les pourcentages vont de 5,4% à 66,5%
- Il existe de même un déséquilibre dans la répartition de la charge de travail : de 17,6% à 33,4%

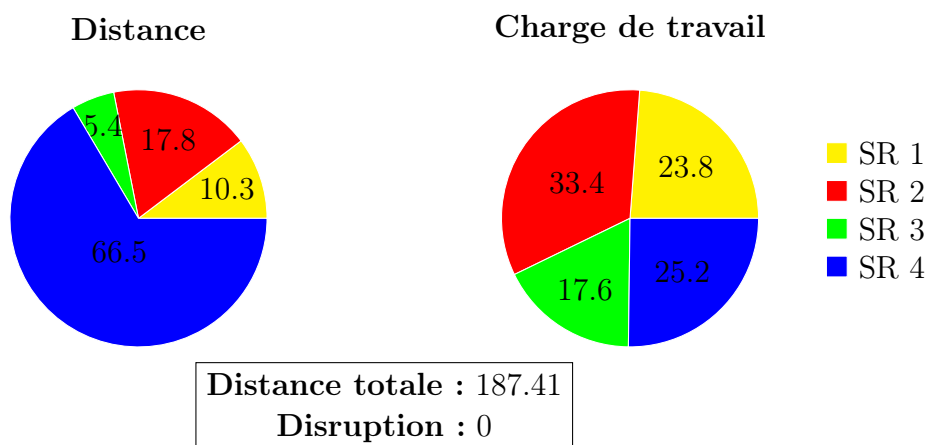


FIGURE 2.1 – Caractéristiques de la configuration initiale

Ainsi, le SR 3 dans la configuration initiale est largement avantage par rapport à ses collègues, puisqu'il parcourt la plus courte distance et a la charge de travail la plus faible. Il n'est donc pas surprenant d'avoir des "mouvements sociaux" avec une telle configuration, puisque le SR 2 par exemple parcourt une distance 3 fois plus grande que le SR 3 avec une charge de travail 2 fois plus importante que ce dernier.

La répartition géographique des briques dans l'état initial est représentée graphiquement dans la figure 2.2. Dans ce type de représentations que nous utiliserons dans toute la suite, la brique centrale pour chaque SR correspond à un disque.

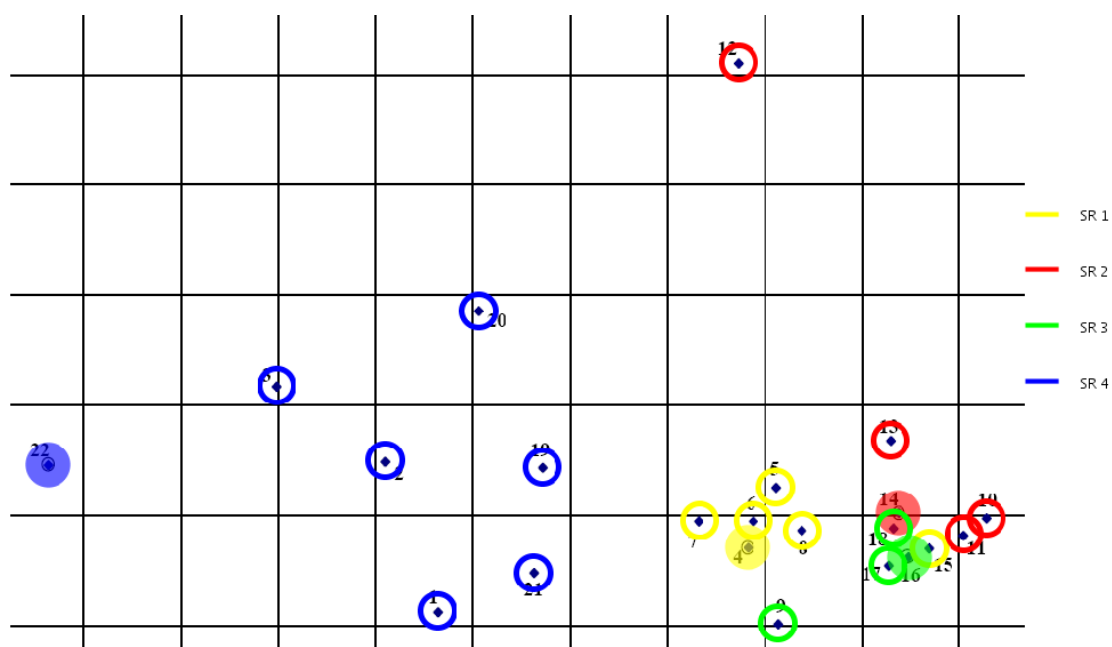


FIGURE 2.2 – Représentation graphique de la configuration initiale

Un dernier point consiste à avoir une **échelle pour la disruption**. En effet, on sait que la disruption minimale vaut 0 et que toute configuration différente de la répartition initiale mènera à une disruption strictement positive. Mais comment peut-on avoir une idée de la disruption maximale dans le cadre de notre premier modèle mathématique ? Pour cela, nous avons formalisé un programme linéaire dont le but est de maximiser la disruption, sans aucune contrainte sur la distance parcourue ou sur la répartition équitable du travail entre les SR. On obtient ainsi que :

$$disruption_{max} = 2,3981 \quad (2.1)$$

Résolution monocritère avec des contraintes relâchées

Commençons par résoudre notre programme linéaire en nous intéressant **uniquement à minimiser la distance totale parcourue**, sans aucune contrainte sur la répartition du travail ou sur la distance parcourue. Au regard de notre programme linéaire, cela correspond à poser :

$$\delta = 0 \quad (2.2)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad 0 \leq \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} v_i \leq 4 \quad (2.3)$$

$$a = 0 \quad b = 1 \quad (2.4)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 2.3 et 2.4.

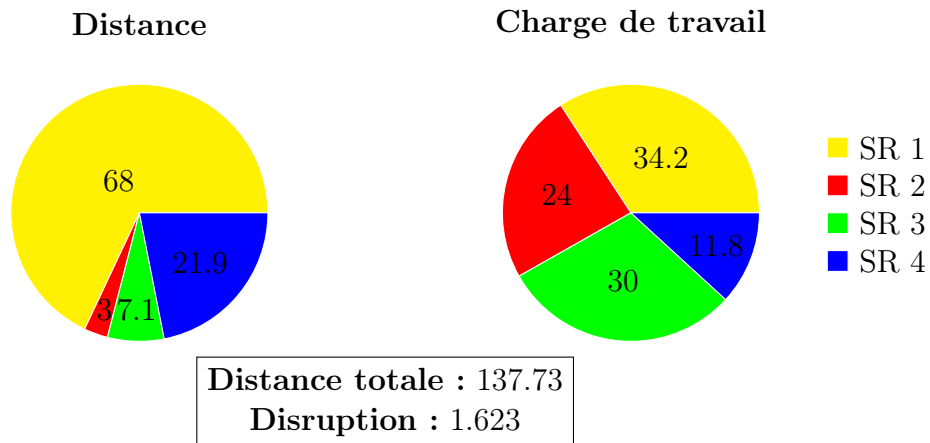


FIGURE 2.3 – Caractéristiques pour la recherche de distance minimale sans contraintes

Cette solution est loin d'être efficace puisqu'elle conduit à de forts déséquilibres dans les répartitions des tâches et des distances à parcourir entre les différents SR. Néanmoins, elle

permet de donner une idée sur la distance minimale qu'il faut parcourir pour couvrir les 22 briques avec nos 4 SR depuis leurs briques centrales. Cette solution serait par exemple convenable si Pfizer ne faisait guère attention à l'équité dans le travail de ses employés. Or, ceci n'étant pas le cas dans notre étude, on doit maintenant prendre en compte d'autres critères et contraintes.

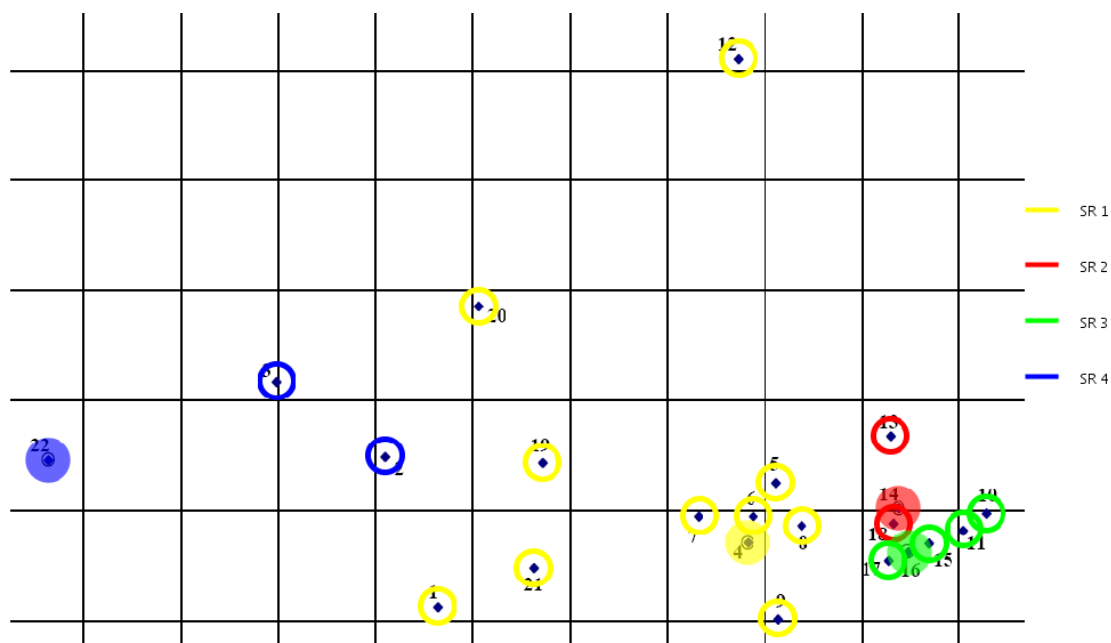


FIGURE 2.4 – Représentation graphique en minimisant la distance uniquement, sans contraintes

Résolution monocritère avec des contraintes sur la répartition des distances et du travail

Il est donc intéressant dans un second temps de chercher à minimiser un seul critère, la distance totale parcourue par les SR, tout en faisant attention à ce que la répartition du travail soit à peu près équitable. On encadre alors les pourcentages des distances parcourues par chaque SR ainsi que la charge de travail individuelle en les restreignant à un intervalle autour de 0,25.

L'idée est d'étudier la sensibilité des différents critères de choix de la solution en fonction de la largeur de cet intervalle. Pour simplifier l'analyse, on commencera par étudier des programmes dans lesquels les deux intervalles sont de même largeur, c'est-à-dire :

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad a \leq \frac{\sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}}{\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}} \leq b \quad (\text{distance})$$

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad a \leq \frac{\sum_{i=1}^{22} x_{i,j} v_i}{4} \leq b \quad (\text{charge de travail})$$

avec $b - a$ la largeur de l'intervalle.

On a ainsi écrit un programme sur `Matlab` permettant de résoudre le programme linéaire pour :

$$b - a \in [0.05; 0.3] \quad \text{avec un pas de } 0.025$$

On obtient par conséquent 10 solutions que nous traçons dans la figure 2.5 dans l'espace correspondant aux deux critères (Distance totale , Disruption) :

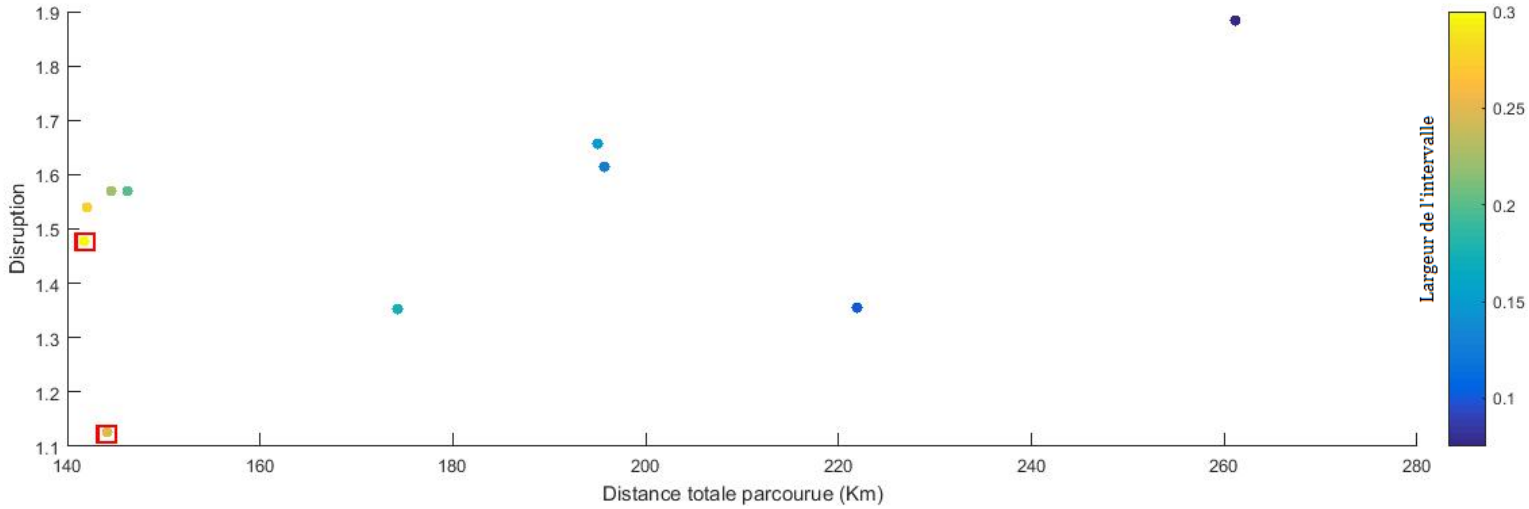


FIGURE 2.5 – Solutions en fonction des contraintes d'équité entre les SR

Sur cette figure, les solutions les moins contraignantes sont en jaune (grand intervalle) tandis que les plus contraignantes sont en violet (petit intervalle). On observe que l'on a deux solutions efficaces qui dominent l'ensemble des autres solutions (encadrées en rouge sur la figure). Nous allons les détailler ci-dessous :

Solution efficace 1 :

Cette solution est obtenue pour $a = 0.125$ et $b = 0.375$. Ses caractéristiques sont données dans la figures 2.6.

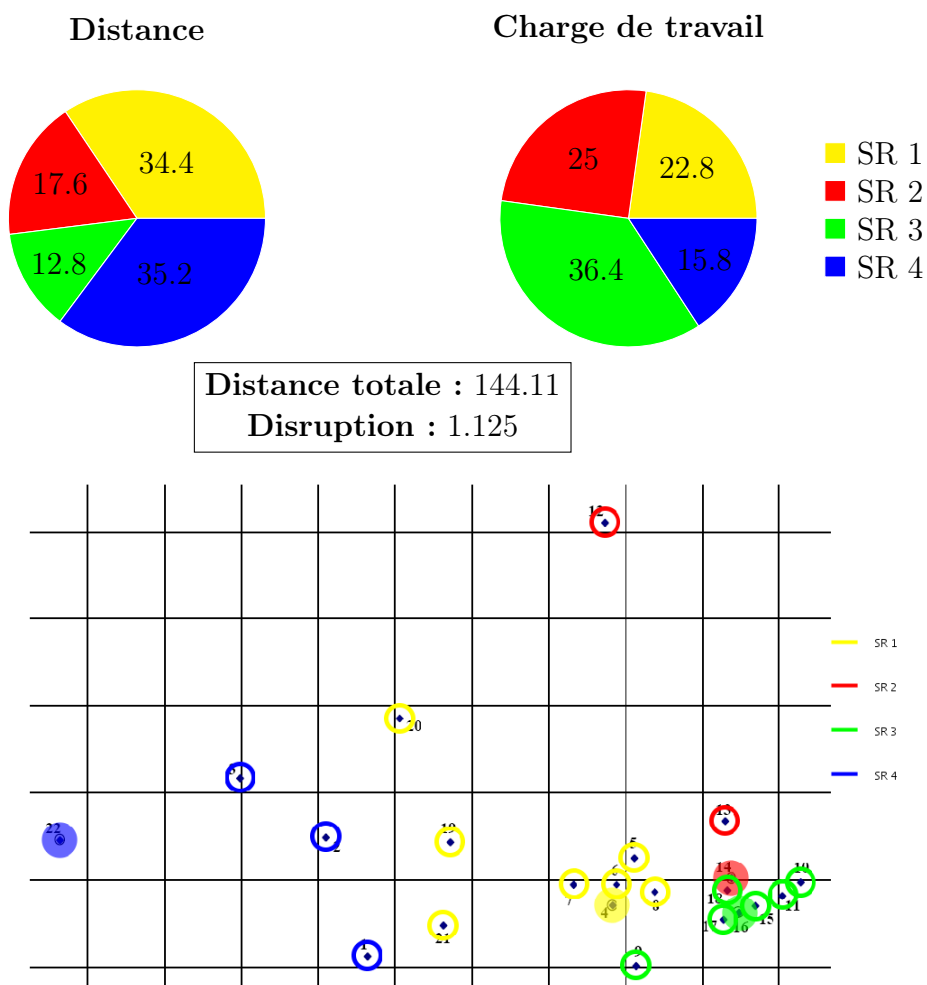


FIGURE 2.6 – Caractéristiques de la solution efficace 1
Solution efficace 2

Cette solution est obtenue pour $a = 0.1$ et $b = 0.3$ (voir figures 2.7 et 2.8).

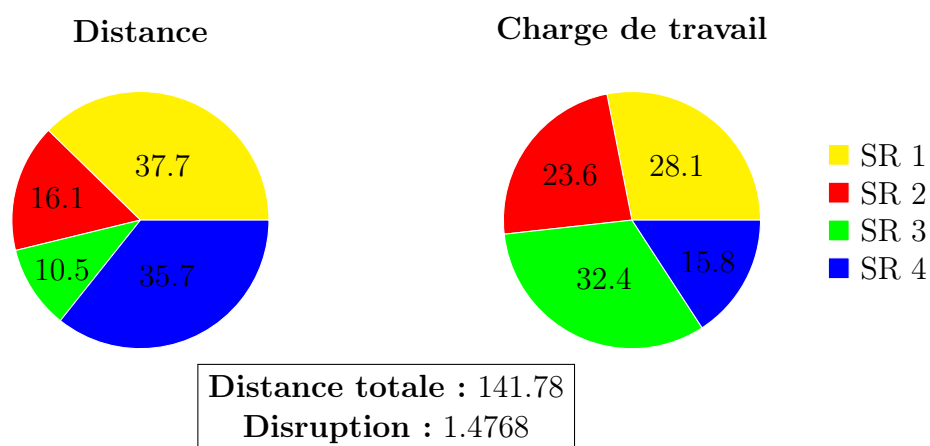


FIGURE 2.7 – Caractéristiques pour la solution efficace 2

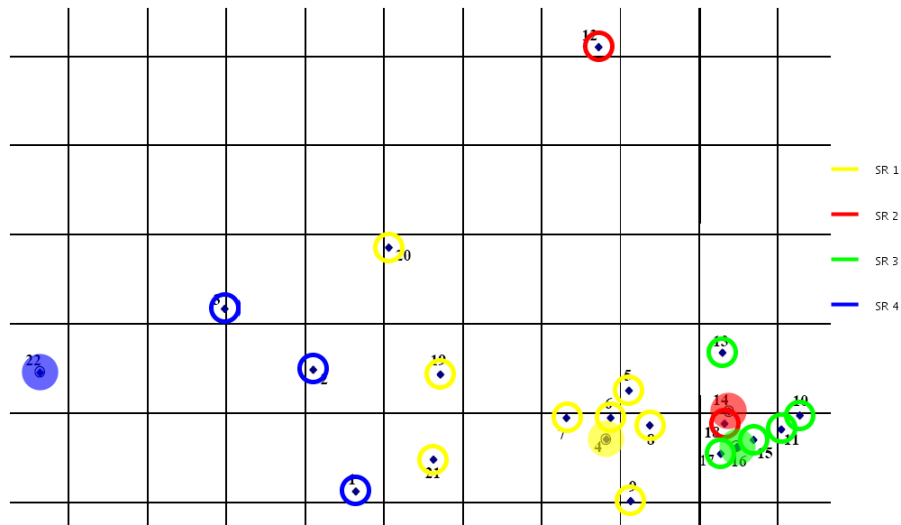


FIGURE 2.8 – Représentation graphique pour la solution efficace 2

Ces deux solutions, bien qu'elles minimisent la distance totale de près de 25% par rapport à la configuration initiale, conduisent à de très fortes inégalités entre les SR et ne sont donc pas satisfaisantes sur ce point de vue.

Nous devons ainsi analyser la solution pour laquelle l'écart est égal à 0.1 puisque celle-ci correspond à la situation préconisée par les analystes de Pfizer où :

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad 0.8 \leq \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} v_i \leq 1.2 \quad (2.5)$$

Solution avec un écart de 0.1

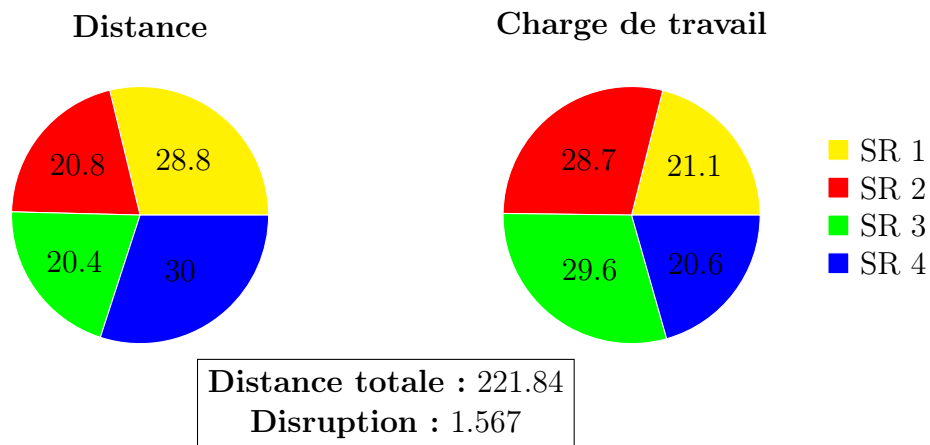


FIGURE 2.9 – Caractéristiques pour la solution avec un intervalle de 0.1

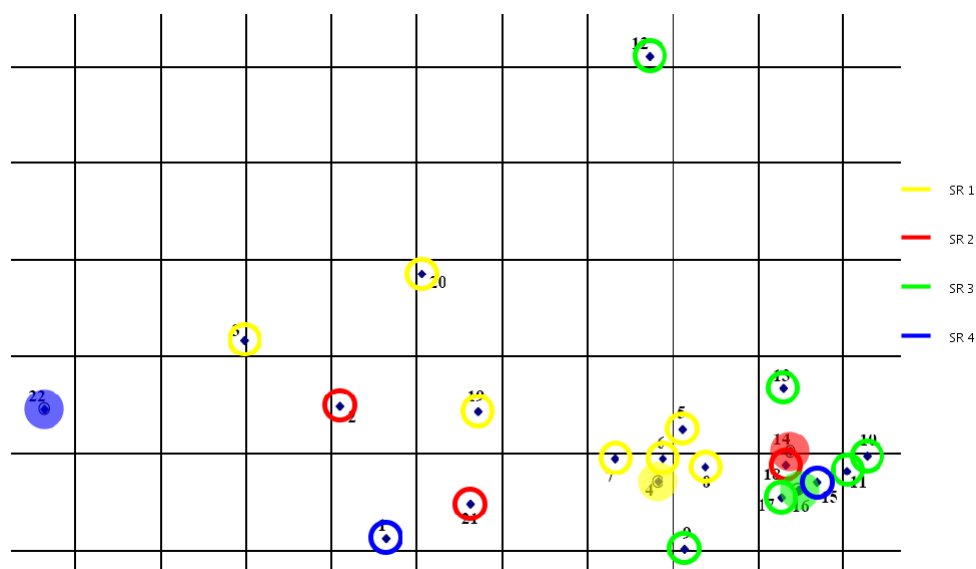


FIGURE 2.10 – Représentation graphique en minimisant la distance uniquement, avec un intervalle de 0.1

Cette solution-là est bien plus égalitaire entre les différents SR, puisqu'elle réduit fortement les écarts entre eux (écarts maximaux de 9,8% pour la distance et 9% pour la charge de travail). Néanmoins, elle augmente fortement la distance totale parcourue (+18% par rapport à la configuration initiale).

De plus, la disruption obtenue est également assez important par rapport aux deux solutions efficaces vues précédemment. Il serait donc plus intéressant d'utiliser une méthode d'agrégation permettant de prendre en compte le critère de la disruption également.

Première méthode d'agrégation pour la résolution multi-critère : la combinaison linéaire

Désormais, il est important de prendre garde à minimiser la disruption ainsi que la distance en même temps. Une façon assez simple de minimiser ces deux critères de façon simultanée consiste à poser dans le modèle étudié : $\delta > 0$.

Pour analyser la sensibilité du problème selon la valeur de δ , on utilise un programme Matlab permettant d'afficher les couples (Distance totale, Disruption) pour les solutions optimales obtenues lorsque $\delta \in [0; 1000]$. Pour les contraintes d'équité entre les SR, nous

utiliserons :

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad 0.8 \leq \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} v_i \leq 1.2$$

$$\forall j \in \{1, \dots, 4\} \quad 0.2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}}{\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}} \leq 0.3$$

Le résultat est affiché ci-dessous :

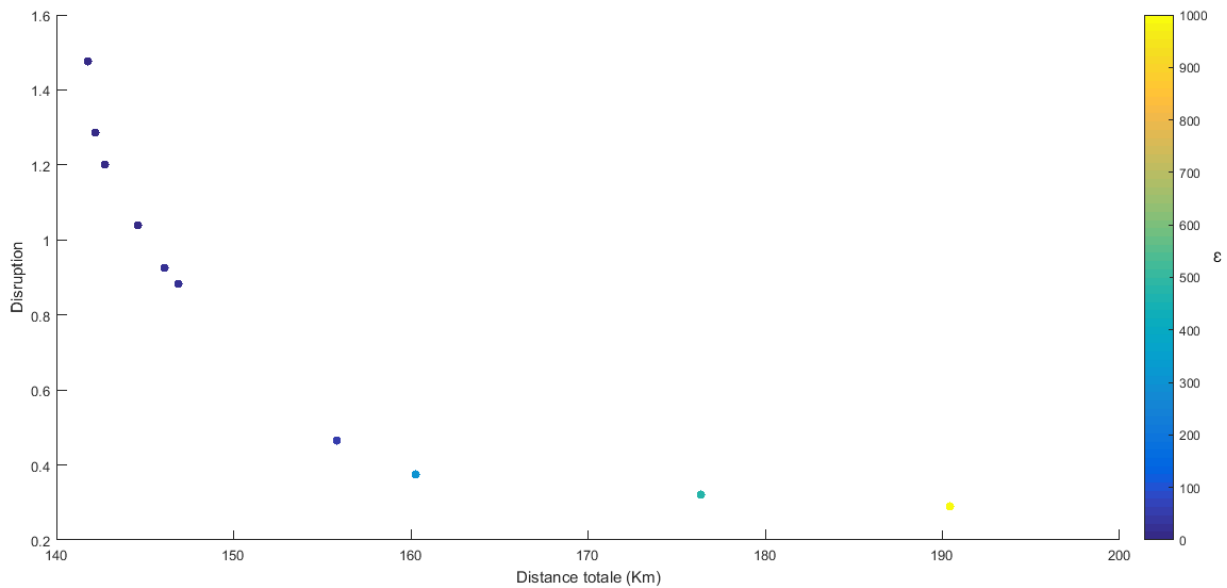


FIGURE 2.11 – Différentes solutions optimales en faisant varier l'importance de la disruption dans la fonction objectif

Il est à noter que pour une optimisation multicritères, deux types de solutions existent :

- **Les solutions supportées** : ce sont celles qui se situent sur l'enveloppe convexe de l'ensemble des solutions non-dominées.
- **Les solutions non supportée** : celles-ci sont plus difficiles à trouver, puisqu'elles ne sont pas sur la fermeture convexe et ne sont pas dominées pour autant.

De plus, l'utilisation de la méthode des combinaisons linéaires ne permet pas d'obtenir les solutions non supportées. Il est donc important d'utiliser une autre méthode d'agrégation permettant d'obtenir les solutions non supportées également.

Deuxième méthode d'agrégation pour la résolution multicritère : la méthode ϵ -contrainte

Dans la méthode ϵ -contrainte, on se ramène à une résolution monocritère tandis que nos autres critères sont utilisées dans le programme linéaire en tant que contraintes, la

solution étant obtenue de façon itérative. On commence en effet en recherchant la solution en minimisant uniquement le critère principal (*la distance dans notre cas*). On note alors la valeur du critère secondaire (*la disruption*) et à la seconde itération, on cherche à minimiser la distance tout en posant comme contrainte que la disruption soit **strictement inférieure** à la valeur notée précédemment.

Le problème qui se pose est que les contraintes d'inégalité d'un programme linéaire ne peuvent pas être strictes. On pose alors comme contrainte que la disruption doit être inférieure ou égale à la valeur trouvée précédemment moins une quantité suffisamment petite, notée ϵ . Dans notre cas, la k -ième itération de la résolution se traduit mathématiquement par le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x_{i,j}} & \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^4 x_{i,j} d_{i,j} & \text{(distance)} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^4 v_i (x_{i,j} + b_{i,j} - 2x_{i,j} b_{i,j}) & \leq dis_{k-1} - \epsilon & \text{(disruption)} \\ & + \text{autres contraintes} \end{array} \right.$$

avec dis_{k-1} la valeur de la disruption obtenue à l'itération $k - 1$

A l'aide de ce programme, nous pouvons tracer les différentes frontières de Pareto de notre problème tout en faisant varier les contraintes sur l'équité du travail des SR, qui portent sur a, b, α et β .

Afin de ne pas restreindre les choix du décideur, nous lui proposons 6 figures explicatives des différentes solutions qu'il peut obtenir dans le cadre du premier modèle :

- **Cas 1** : $b - a \in [0.1; 0.5]$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = 2$
- **Cas 2** : $b - a \in [0.1; 0.5]$ avec $\alpha = 0.2$ et $\beta = 1.8$
- **Cas 3** : $b - a \in [0.1; 0.5]$ avec $\alpha = 0.4$ et $\beta = 1.6$
- **Cas 4** : $b - a \in [0.1; 0.5]$ avec $\alpha = 0.6$ et $\beta = 1.8$
- **Cas 5** : $b - a \in [0.1; 0.5]$ avec $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1.2$
- **Cas 6** : $b - a \in [0.1; 0.5]$ avec $\alpha = 4a$ et $\beta = 4b$ (dans ce cas, $b - a$ et $\beta - \alpha$ varient simultanément et permettent d'avoir le même niveau d'équité pour la distance et pour la charge de travail).

On constate cependant que les cas 1 et 2 sont totalement identiques, tandis que le cas 3 est presque identique à ces deux derniers (avec seulement deux solutions en moins). Ainsi, nous ne représenterons pas les cas 1 et 2 ci-dessous.

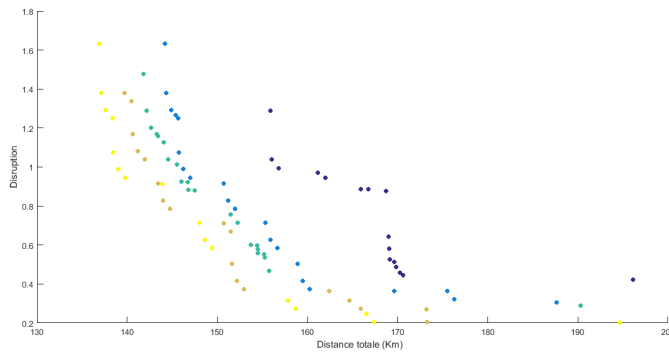


FIGURE 2.12 – Cas 3 avec $\alpha = 0.4$ et $\beta = 1.6$

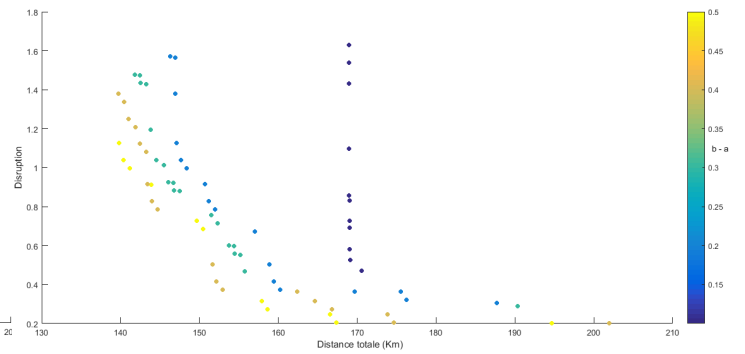


FIGURE 2.13 – Cas 4 avec $\alpha = 0.6$ et $\beta = 1.4$

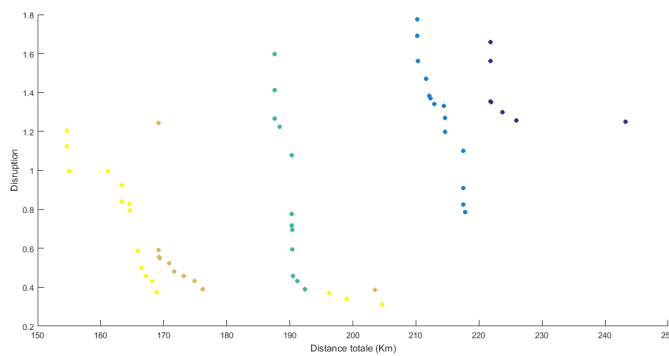


FIGURE 2.14 – Cas 5 avec $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1.2$

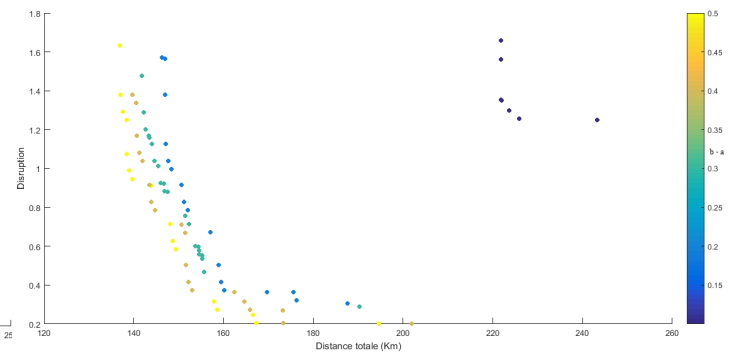


FIGURE 2.15 – Cas 6 avec $\alpha = 4a$ et $\beta = 4b$

Chapitre 3

Modélisation du problème avec briques centrales variables

Nous évoquons ici l'extension de notre modélisation, qui autorise aux 4 représentants commerciaux de changer de brique centrale. On se rend compte toute de suite qu'il ne suffit pas juste de relâcher les contraintes d'initialisation $x_{4,1} = 1, x_{14,2} = 1, x_{16,3} = 1, x_{22,4} = 1$, car toute la première modélisation repose sur le fait que les 4 briques centrales sont fixes, d'où la matrice des inconnues qui est de taille 22×4 .

Pour s'affranchir de ce problème, nous avons décidé de représenter par exemple la matrice des affectations actuelles comme suit :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ligne n°1
											⋮													
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	n°4
											⋮													
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	n°14
											⋮													
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	n°16
											⋮													
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	n°22

On représente les inconnues par une matrice de taille 22×23 dans laquelle on souhaite avoir autant de lignes non nulles qu'il y'a de représentants commerciaux. Une ligne i non nulle signifie qu'on a un représentant commercial dont la brique centrale est la i -ème brique. Les valeurs non nulles de cette ligne représentent les briques assignées à ce représentant.

Notre problème serait donc de déterminer les valeurs $x_{i,j}$ vérifiant :

- $\forall i \in \{1, \dots, 22\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, 23\}$ $x_{i,j} \in \{0, 1\}$.
- L'inconnue $x_{i,j}$ vaut 1 si la brique j est affecté au commercial de brique centrale i . Elle vaut 0 sinon.
- Chaque brique est affecté à un et un seul représentat commercial, ce qui s'écrit :

$$\forall j \in \{1, \dots, 22\} \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} = 1$$

- Il doit y avoir autant de briques centrales affectées que de commerciaux embauchés. Donc si on note $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{22} x_{i,23} = p$$

où dans un premier temps $p = 4$.

- Une contrainte très importante de notre matrice est que seule 4 lignes sur 22 doivent être non nulles. Pour cela on a pensé à écrire :

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad 23 * x_{i,23} \geq \sum_{j=1}^{22} x_{i,j}$$

car chaque représentant se verra attribuer au plus 22 briques.

- La charge total de chaque travailleur doit vérifier :

$$\forall i \quad / \quad x(i, :) \neq \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{1 \times 23}} \quad \alpha \leq \sum_{j=1}^{22} x_{i,j} v_j \leq \beta$$

où $x(i, :)$ la i -ème ligne de x et dans un premier temps $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1.2$.

- La distance totale doit être partagé de manière plus ou moins égale entre les différents commerciaux. Ainsi,

$$\forall i \quad / \quad x(i, :) \neq \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{1 \times 23}} \quad a \leq \frac{\sum_{j=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}}{\sum_{j=1}^{22} \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}} \leq b$$

Pour cela, nous avons donc pensé à exprimer la fraction de distance entre un intervalle autour de 0.25 lorsque $p = 4$.

Ces deux dernières contraintes n'étant pas linéaires, nous avons donc rusé pour que la somme correspondante pour une ligne vide respecte l'intervalle. Pour cela, on a utilisé la dernière colonne qui conserve une précieuse information, et on a rajouté des constantes suivant les intervalles. Les formules correspondantes seront données par la suite.

De plus, notre objectif principal est de minimiser la distance et la disruption. Or, dans cette configuration, le calcul de la disruption en programmation linéaire est délicat sachant qu'on affecte pas dans notre modèle chaque brique centrale à un représentant commercial donnée. On a choisit donc de privilégier la diminution de la distance. Ensuite, on essaie d'attribuer les briques centrales aux SRs en minimisant la disruption. Le problème d'optimisation peut donc se résumer de la manière suivante :

Résumé du modèle (2)

v_i est la valeur d'index de la brique i

p est le nombre de commerciaux disponibles

$d_{i,j}$ est la distance de la brique i à la brique j

$x_{i,j}$ sont les inconnues et $b_{i,j}$ les affectations initiales

a, b sont des constantes à fixer dans $[0, 1]^2$ et ϵ un réel relativement petit.

$$\min_{x_{i,j}} \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j} \quad (3.1)$$

respectant le contraintes :

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \forall j \in \{1, \dots, 23\} \quad x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{22} x_{i,23} = p \quad (3.3)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, 22\} \quad \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} = 1 \quad (3.4)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \sum_{j=1}^{22} x_{i,j} \leq 23 * x_{i,23} \quad (3.5)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \alpha + (x_{i,23} - 1) \leq \sum_{j=1}^{22} x_{i,j} v_j \leq \beta \quad (3.6)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \frac{\sum_{j=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}}{\sum_{j=1}^{22} \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j}} \leq b \quad (3.7)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad \sum_{j=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j} - a \times \sum_{j=1}^{22} \sum_{i=1}^{22} x_{i,j} d_{i,j} \geq d_{max} * (x_{i,23} - 1) \quad (3.8)$$

Comparaison et validation des deux modèles

Dans un premier temps, pour valider la modélisation que l'on a opté pour le problème des briques centrales variables, nous avons cherché à le comparer avec notre premier modèle. Pour y arriver, nous avons ajouté à notre seconde implémentation, les conditions suivantes :

$$x_{4,23} = 1 \quad x_{14,23} = 1 \quad x_{16,23} = 1 \quad x_{22,23} = 1$$

En effet, on peut se convaincre facilement que même en rajoutant ces contraintes, nos 2 modèles ne sont pas encore équivalents. En effet, dans le second modèle, on autorise à affecter un bureau central à un commercial, sans pour autant lui affecter les médecins de cette briques. Cela constitue un degré de liberté supplémentaire au problème du décideur, qui peut s'avérer efficace. Donc pour pouvoir comparer les 2 modèles, on rajoute la contrainte suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, 22\} \quad x_{i,23} = x_{i,i} \quad (3.9)$$

Donc avec le rajout de ces hypothèses, on peut désormais les comparer. Et en prenant des jeu de variables a, b, α, β différents avec $\epsilon = \delta = 0$, $p = 4$ et $d_{max} = 10^4$, on se rend compte que la majorité des résultats optimaux sont similaires. Cependant, ce n'est toujours pas le cas, ce qui est intrigant à première vue !

En effet, en comparant la valeur de la distance totale parcourue dans les 2 modèles, on remarque que la différence est de l'ordre de 10^{-3} . Cela est donc tout à fait normal, vu l'initialisation et la précision de l'algorithme de recherche de l'optimum. Mais on peut toujours s'en affranchir sur Matlab, en fixant la tolérance sur la fonction objective à 10^{-10} .

Enfin, à la suite de ces modifications, on obtient bien les mêmes solutions optimales pour un ensemble large de valeurs de a, b, α, β . Le modèle plus élaboré généralise le premier et est donc bien validé !

Revenons au degré de liberté supplémentaire ajouté dans la modélisation plus élaborée, et qui autorise à un représentant commercial de ne pas visiter les médecins présents dans sa brique centrale. Essayons de visualiser ce problème pour le jeu de paramètres suivant :

$$\alpha = 0.8 \quad \beta = 1.2 \quad a = 0.24 \quad b = 0.3 \quad p = 4;$$

Si l'on rajoute la contrainte (3.10), et on souhaite minimiser la distance totale sous les contraintes déjà évoquées, et seulement sans tenir en compte de la disruption, les deux implémentations nous donnent la même solution optimale dans laquelle la distance totale parcourue est de 240.2 km. Par contre si l'on relâche la contrainte (3.10), la solution optimale devient :

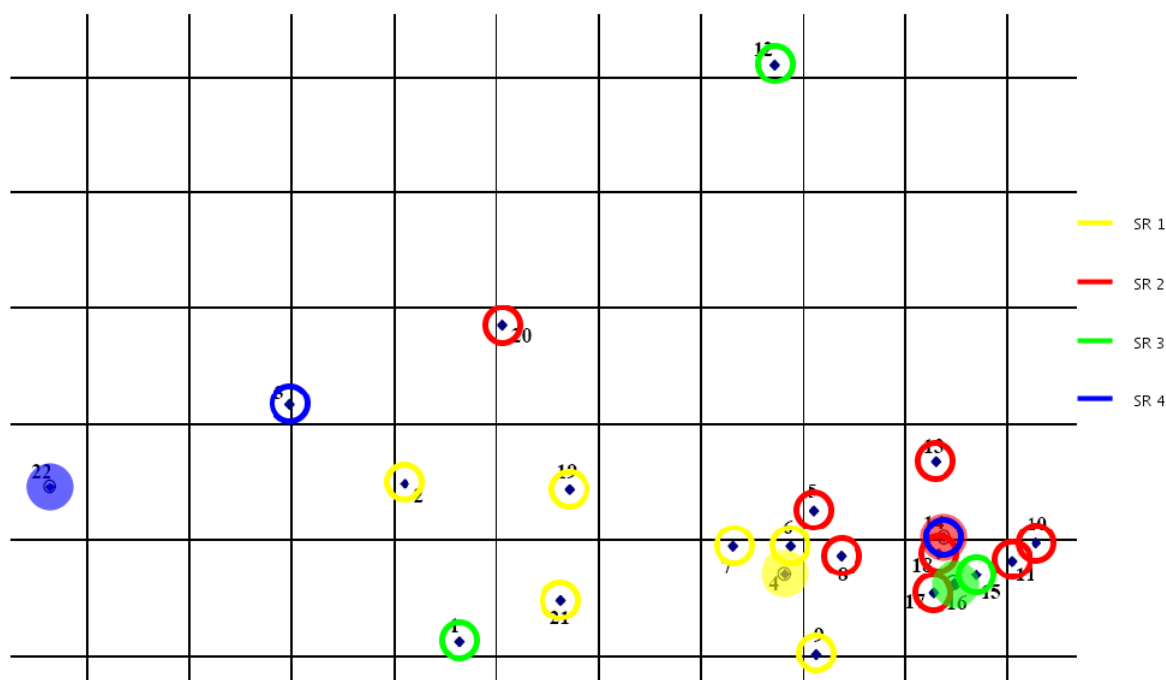


FIGURE 3.1 – Comparaison des deux modèles

La distance totale parcourue est cette fois-ci 203.9 km, ce qui est une amélioration très importante de la performance obtenue ! Remarquons que dans cette solution particulière, le SR4 doit visiter les médecins de la brique 14 au lieu du SR2, qui est installé dans cette brique.

Cette amélioration peut s'expliquer par le fait que l'on ne veut pas uniquement minimiser la distance, mais cette minimisation passe par d'autres contraintes à satisfaire, comme l'équité d'attribution de la distance ou de la charge de travail. Et donc autoriser un nouveau degré de liberté permet d'explorer un nouveau champ de solutions qui elles respectent toujours l'équité entre différents représentants.

Dans le modèle plus élaboré, on autorise à un représentant commercial de ne pas obligatoirement visiter les médecins de sa brique centrale.

Chapitre 4

Résultats et interprétations du deuxième modèle

Une fois que l'on a formalisé ce deuxième modèle, une solution intéressante à voir correspond à celle où toutes les contraintes sont relâchées, l'objectif étant de minimiser autant que possible la distance. On constate ainsi qu'on peut obtenir :

- **Distance totale** : 88.30
- **Disruption** : 1.199

Cette solution particulière nous conduit à une répartition dans laquelle l'un des SR est restreint à une seule brique uniquement ! En effet, l'obtention d'un minimum global de la distance totale passe par de très fortes inégalités entre les SR. Les résultats sont résumés dans les figures 4.1 et 4.2

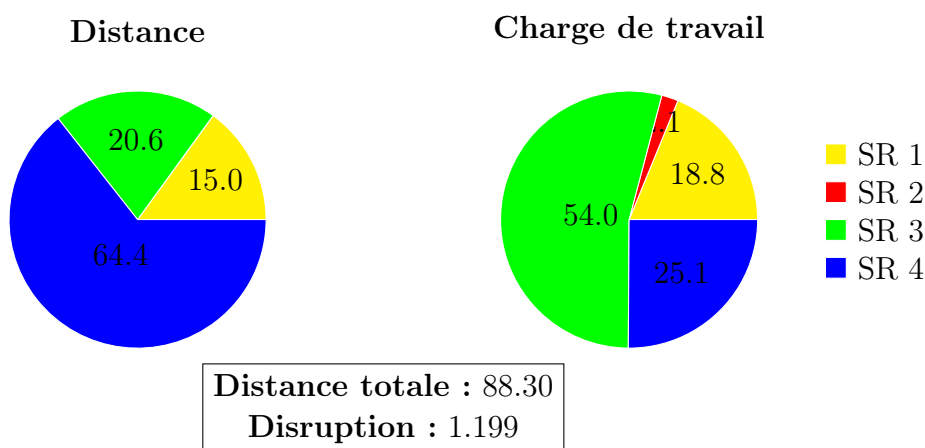
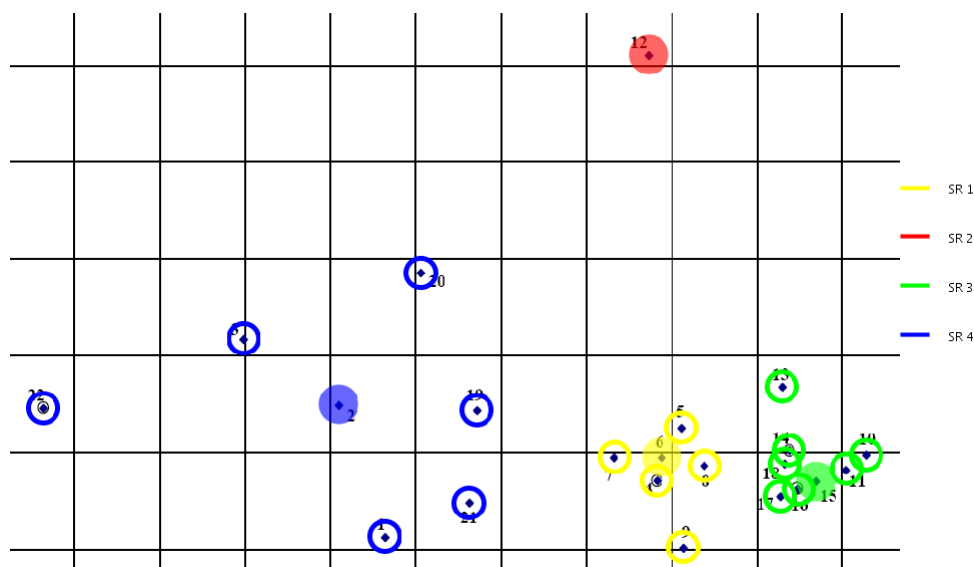
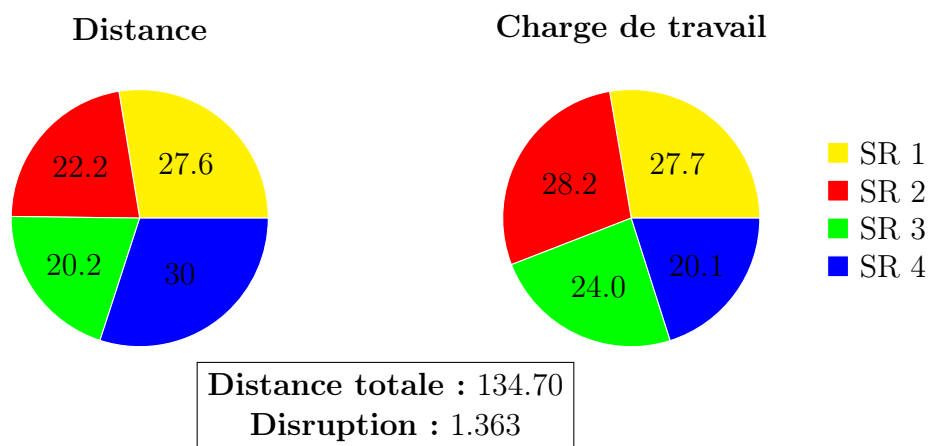


FIGURE 4.1 – Caractéristiques pour la solution avec $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 4$

FIGURE 4.2 – Solution avec $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 4$

Néanmoins, les deux principales solutions qui peuvent être pertinentes pour notre décideur sont celles où les SR sont égaux face à leurs tâches. Ainsi, on représentera ci-dessous deux solutions particulières :

- Pourcentages de distance et de charge de travail individuels entre 20% et 30% (figures 4.3 et 4.4)
- Pourcentage de distance et de charge de travail individuels entre 22.5% et 27.5% (figures 4.5 et 4.6)

FIGURE 4.3 – Caractéristiques pour la solution avec $a = 0.2$, $b = 0.3$, $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1.2$

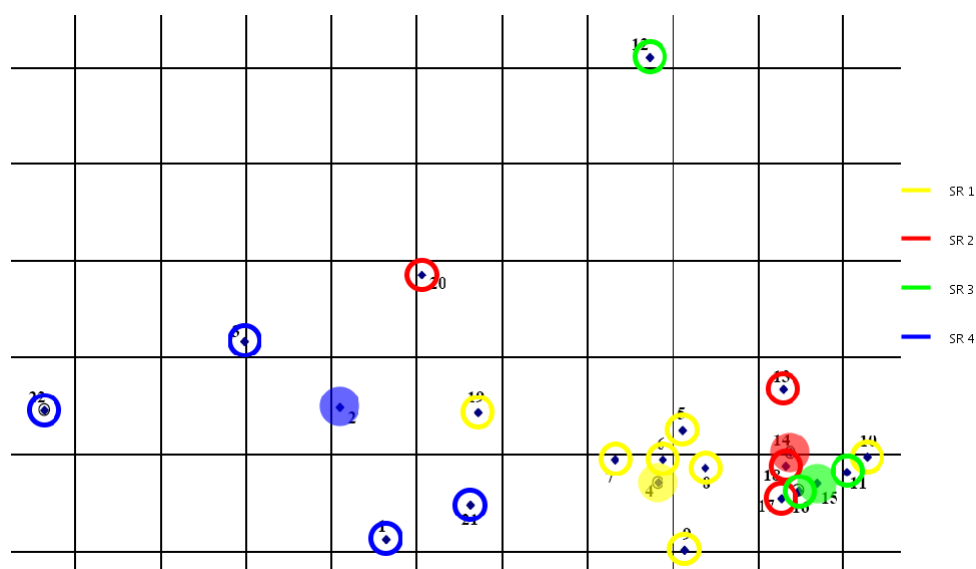


FIGURE 4.4 – Solution avec $a = 0.2$, $b = 0.3$, $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1.2$

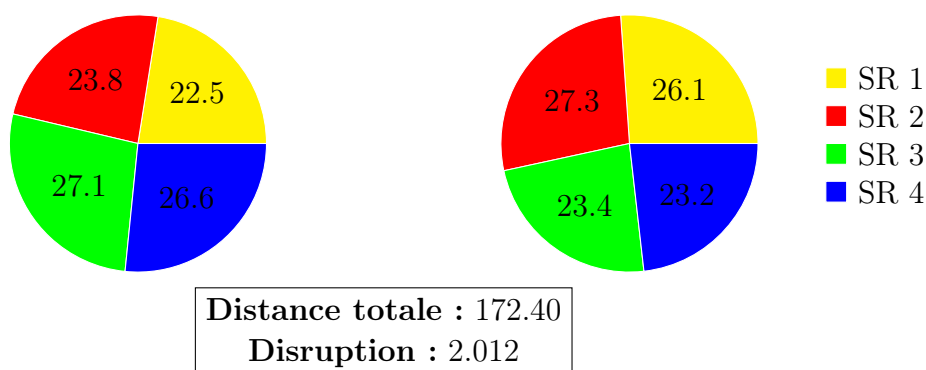
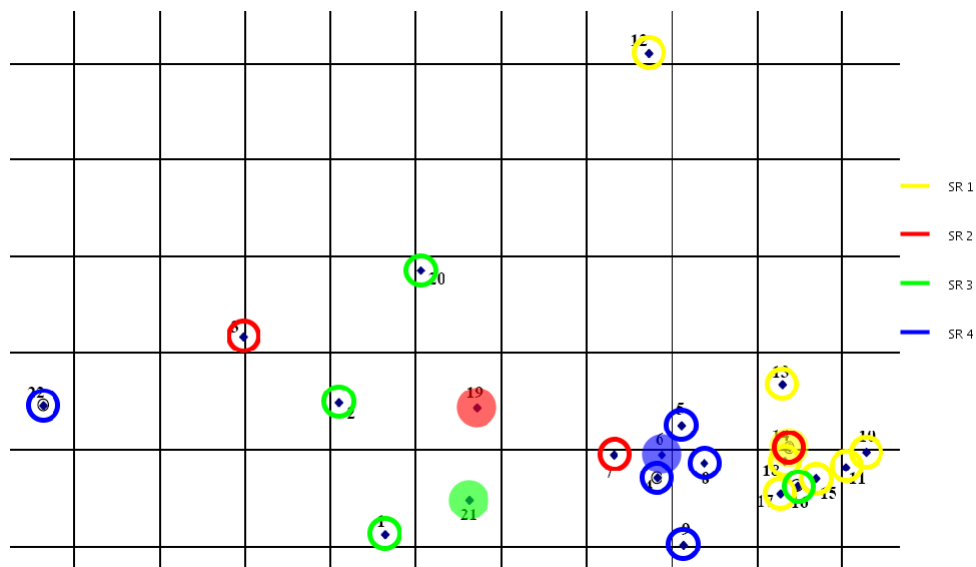
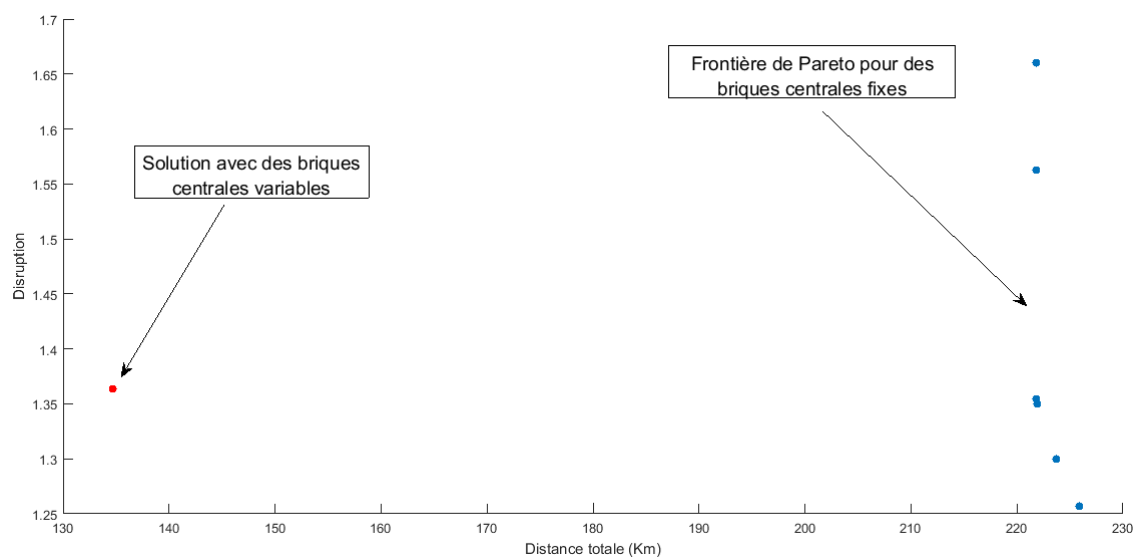


FIGURE 4.5 – Caractéristiques pour la solution avec $a = 0.225$, $b = 0.275$, $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1.1$

Afin d'illustrer les caractéristiques de nos deux modèles, on peut comparer la solution obtenue avec le deuxième modèle à la frontière de Pareto qu'on trouve à l'aide du premier modèle lorsque $a = 0.2$, $b = 0.3$, $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1.2$. La figure 4.7 permet de comparer les performances de nos deux modèles vis-à-vis de nos deux principaux critères.

On constate en effet que le deuxième modèle donne une distance largement inférieure à celles trouvées dans la frontière de Pareto du premier modèle. De plus, la disruption trouvée avec des briques centrales non fixées reste comparable à celles du premier modèle.

FIGURE 4.6 – Solution avec $a = 0.225$, $b = 0.275$, $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1.1$ FIGURE 4.7 – Comparaison des deux modèles avec $a = 0.2$, $b = 0.3$, $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1.2$

Conclusion

Dans notre modélisation, une contrainte essentielle était d'affecter une brique à un et un seul représentant commercial ; on ne permettait pas de **partager le travail d'une brique**. Cependant, on pourrait penser à le faire en considérant des variables continues dans $[0, 1]$. Dans notre second modèle, on pourrait penser à considérer des variables entières uniquement pour la 23^{ème} colonne, sous-entendant qu'une brique centrale est occupée par un et un seul représentant commercial. Mais on n'interdit cependant pas que le travail de cette brique soit divisé entre plusieurs commerciaux. Toutes les autres contraintes sont identiques. Le seul problème que nous allons rencontrer correspond au calcul des distances puisque, même si on n'attribue qu'une partie d'une brique à un commercial, celui-ci doit effectuer la totalité du trajet à partir de sa brique centrale. On pourrait par exemple stocker dans 22 autres colonnes adjacentes des variables binaires pour affirmer si un commercial effectue le trajet i, j ou pas. Il faudra cependant rajouter des contraintes pour que les 22 premières colonnes soient cohérentes avec les 22 autres colonnes adjacentes. On tâchera également à garder une 45^{ème} colonne équivalente à la 23^{ème} colonne dans notre deuxième modèle.

Une autre perspective pour notre étude consiste à prendre en compte **les préférences des SR** selon les différentes briques. L'idée serait ainsi de quantifier les préférences de chaque SR i pour la brique j à l'aide de grandeurs $p_{i,j}$ vérifiant :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, 22\} \times \{1, \dots, 4\} \quad p_{i,j} \in [0, 1]$$

avec

$$\begin{aligned} p_{i,j} = 1 &\Rightarrow \text{Le SR } j \text{ veut absolument la brique } i \\ p_{i,j} = 0 &\Rightarrow \text{Le SR } j \text{ ne veut absolument pas la brique } i \\ p_{i,j} > p_{i',j} &\Rightarrow \text{Le SR } j \text{ préfère strictement la brique } i \text{ à la brique } i' \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant P la matrice des préférences de taille 22×4 , il suffirait de rajouter comme *contrainte* dans notre premier modèle que la préférence totale (qui est la

somme des préférences des 4 SR) soit supérieure à un certain seuil s :

$$\sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^4 x_{i,j} p_{i,j} \geq s$$

avec $s \in [0, 22]$

Pour le deuxième modèle, on pourrait tout simplement minimiser la distance puis choisir la combinaison des 4 SR qui, simultanément, minimise la disruption et maximise la préférence totale.