Erzeugendensysteme

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subset V$. Ist $\operatorname{Span}(S) = V$, so heißt S ein **Erzeugendensystem von** V.
Ist also S ein Erzeugendensystem, dann gibt es zu jedem $v \in V$ ein $m \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $v_1, \ldots, v_m \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$ Wenn V eine endliche Teilmenge $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ als Erzeugendensystem besitzt, so heißt V **endlich erzeugt**. Es ist dann

$$V = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

Zum Beispiel

$$\mathbb{R}^2 = \{\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Seien $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $U_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. Dann sind U_1 und U_2 Teilräume von $\mathbb{R}^2$, aber $U_1 \cup U_2$ ist kein Vektorraum, denn $(1,0) \in U_1$, $(0,1) \in U_2$ aber $(1,0) + (0,1) = (1,1) \neq U_1 \cup U_2$.
Der von $S = U_1 \cup U_2$ aufgespannte Teilraum von $\mathbb{R}^2$ ist die Summe
$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$
Hier gilt zusätzlich noch $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$.
Sei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0, b \neq 0$, dann bilden $v_1 = (a,0), v_2 = (0,b)$ und $v_3 = (3,5)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.
Sei $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann ist $v = (x,y)$ mit $x,y \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} v = (x,y) &= \frac{x}{a}(a,0) + \frac{y}{b}(0,b) + 0(3,5) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \end{aligned}$$

mit $\lambda_1 = \frac{x}{a}$, $\lambda_2 = \frac{y}{b}$ und $\lambda_3 = 0$.
Man sieht insbesondere, dass $v_3 = (3,5)$ entbehrlich ist.
Bilden $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,-1)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$?
Ansatz:

$$\begin{aligned} (x,y) &\overset{!}{=} \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (\lambda_1,\lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - \lambda_2 = y \end{aligned}\right\} \implies \lambda_1 = \frac{x+y}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{x-y}{2}$$

Die Vektoren $(1,1)$ und $(1,-1)$ bilden also ein Erzeugendensystem, da

$$(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$$

mit $\lambda_1 = \frac{x+y}{2}, \lambda_2 = \frac{x-y}{2} \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.
Bilden $v_1 = (-3,3)$, $v_2 = (1,-1)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$?
Ansatz:

$$\begin{aligned} (x,y) &\overset{!}{=} \lambda_1(-3,3) + \lambda_2(1,-1) = (-3\lambda_1, 3\lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2) \\ &= (-3\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} -3\lambda_1 + \lambda_2 &= x \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= y \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist aber nicht für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lösbar, denn setze z.B. $(x,y) = (0,1)$, dann ist das System

$$\begin{aligned} -3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

nicht lösbar. Insbesondere ist $v = (0,1)$ keine Linearkombination von v_1 und v_2 .

Quelle: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/825

Erstellt für: Gast