PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK, MICHAEL PRÄHOFER

Höhere Mathematik für Informatiker I (Wintersemester 2003/2004)
— Aufgabenblatt 11 (16. Januar 2004) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 63. Basiswechsel konkret.
Gegeben seien die 3 Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie drei weitere Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

1.) Die Standardbasis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$ besteht aus den drei Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

2.) Gegeben seien nun die beiden Vektoren $p = \begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix}$ und $q = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$. Stellen Sie die beiden Vektoren p und q

a.) als Linearkombination der Vektoren der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ dar und
b.) als Linearkombination der Vektoren der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ dar.

<u>LÖSUNG:</u>

1.) Behauptung: Die drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Beweis: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\iff \quad \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_3 = -\lambda_2$. Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen ergibt das zu obigem äquivalente Gleichungssystem

$$\lambda_1 = 0\ , \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0\ , \quad \lambda_3 = -\lambda_3\ .$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 = \lambda_2$ also insgesamt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig. Da die Dimension von $\mathbb{R}^3$ drei ist, bilden sie eine Basis von diesem Vektorraum.

2.) a.) Die Punkte p und q lassen sich wie folgt als Linearkombination der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 darstellen:

$$p = 6 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3\ , \quad q = 3 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3\ .$$

b.) Um die Punkte p und q (und jeden beliebigen anderen Punkt) als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 darzustellen, bestimmen wir die Linearkombination der Einheitsvektoren in v_1, v_2, v_3: Wir suchen also jeweils $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = e_i$ für $i = 1, 2, 3$.
Für e_1 müssen dazu wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Analoges Vorgehen wie in Aufgabenteil 1.) liefert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Damit ist

$$e_1 = v_1 + v_2 - v_3\ .$$

Der Vektor e_2 führt analog auf das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

mit der Lösung $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 0$. e_2 hat also die Darstellung

$$e_2 = -v_1 + v_2 \; .$$

Auf gleichem Wege erhält man

$$e_3 = -\, v_2 + v_3 \; .$$

Damit gilt für die Punkte p und q

$$\begin{aligned} p &= 6 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3 \;=\; 6 \cdot (v_1 + v_2 - v_3) + 3 \cdot (-v_1 + v_2) + 9 \cdot (-v_2 + v_3) \\ &= 3v_1 + 3v_3 \; , \\ q &= 3 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3 \;=\; 3 \cdot (v_1 + v_2 - v_3) + 2 \cdot (-v_1 + v_2) + 9 \cdot (-v_2 + v_3) \\ &= v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3 \; . \end{aligned}$$

Aufgabe 64. Strecklein schneid' dich.
Gegeben seien zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$. Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, die auf der Geraden g durch diese beiden Punkte p und q liegen, ist durch die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda \cdot p + \mu \cdot q \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; ; \; \lambda + \mu = 1\}$ gegeben.
Sei nun $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

a.) Zeichnen Sie die Punkte p und q und die Gerade g durch diese beiden Punkte in ein Koordinatensystem.

b.) Geben Sie g in Parameterform an, d.h. bestimmen Sie Vektoren v, w, so dass
$g = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = v + \lambda \cdot w \in \mathbb{R}^2 ; \; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

c.) Auf welchem Teil der Geraden befindet sich $x \in \mathbb{R}^2$, wenn

(i)	$\lambda > 0$	und	$\mu > 0$		(iii)	$\lambda < 0$	und	$\mu > 0$
(ii)	$\lambda > 0$	und	$\mu < 0$		(iv)	$\lambda < 0$	und	$\mu < 0$

Hinweis: Wählen Sie jeweils einige Beispielwerte für λ und μ . Markieren Sie die Teile der Geraden farbig.

<u>LÖSUNG:</u>

a.) Zeichnung siehe Aufgabenteil c.)

b.) $x = \lambda \cdot p + \mu \cdot q = \lambda \cdot p + (1 - \lambda) \cdot q = q + \lambda \cdot (p - q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

oder

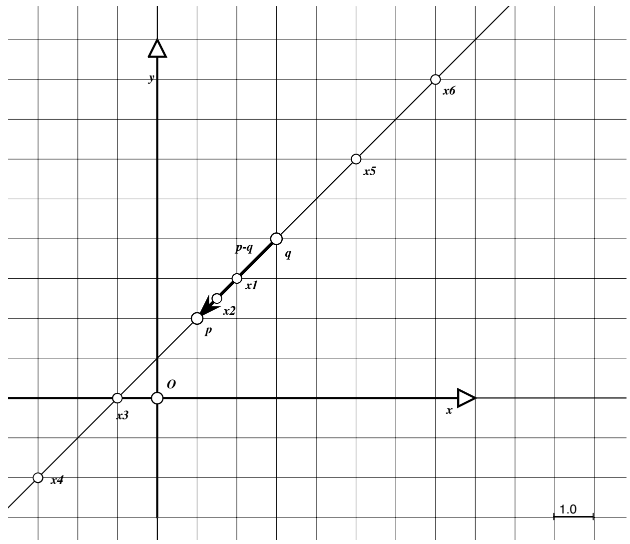
$x = \lambda \cdot p + \mu \cdot q = (1 - \mu) \cdot p + \mu \cdot q = p + \mu \cdot (q - p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

c.) (i) $\lambda > 0$ und $\mu > 0$:
$\lambda = \frac{1}{2}$ und $\mu = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in g \quad , \quad \lambda = \frac{3}{4}$ und $\mu = \frac{1}{4} \Longrightarrow x_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \in g$

(ii) $\lambda > 0$ und $\mu < 0$:
$\lambda = 2$ und $\mu = -1 \Longrightarrow x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in g \quad , \quad \lambda = 3$ und $\mu = -2 \Longrightarrow x_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \in g$

(iii) $\lambda < 0$ und $\mu > 0$:
$\lambda = -1$ und $\mu = 2 \Longrightarrow x_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in g \quad , \quad \lambda = -2$ und $\mu = 3 \Longrightarrow x_6 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \in g$

(iv) $\lambda < 0$ und $\mu < 0$:
Es existieren keine $\lambda < 0$ und $\mu < 0$ mit $\lambda + \mu = 1$.



Somit können wir die *Strecke* $[pq]$ zwischen p und q definieren als die Menge

$$\begin{aligned}[pq] &= \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \lambda \cdot p + \mu \cdot q; \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \lambda + \mu = 1; \lambda > 0 \text{ und } \mu > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 | x = p + \mu(q - p); \mu \in [0, 1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 | x = q + \lambda(p - q); \lambda \in [0, 1]\}\end{aligned}$$

Aufgabe 65. Lineare Abbildungen.
Es seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume. Desweiteren sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, daß f genau dann injektiv ist, wenn Kern$(f) = \{0\}$ ist.

LÖSUNG:

Gegeben ist die (beliebige) *lineare* Abbildung $f : V \to W, x \mapsto f(x)$. Hierbei bezeichne 0_V den *Nullvektor* von V und 0_W den *Nullvektor* von W. Der *Kern* von f ist dann die Menge

$$\text{Kern} f := \left\{ x \in V \;\middle|\; f(x) = 0_W \right\} \subseteq V \; .$$

Da gemäß Vorlesung stets $f(0_V) = 0_W$ ist, gilt zumindest $\{0_V\} \subseteq \text{Kern} f$.
Wir setzen voraus, daß f *injektiv* ist. Da f schon 0_V auf 0_W abbildet, wird aufgrund der *Injektivität* von f kein weiterer Vektor $x \in V \backslash \{0_V\}$ auf 0_W abbgebildet. Es ist also Kern$f = \{0_V\}$.
Sei nun Kern$f = \{0_V\}$. Wir betrachten zwei Vektoren $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$ also $f(x) - f(y) = 0_W$. Aufgrund der Linearität von f folgt daraus $f(x - y) = 0_W$, also $x - y \in \text{Kern} f$. Da ja Kern$f = \{0_V\}$ bleibt nur der Fall $x - y = 0_V$, und damit $x = y$. f ist also injektiv.

— Hausaufgaben —

Aufgabe 66. Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$.
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Für $v \in V \backslash \{0\}$ sei die Menge G_v durch $G_v := \{\lambda \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ definiert. Zeigen Sie

1.) G_v ist ein Untervektorraum von $V = \mathbb{R}^2$.

2.) Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in V$ gilt $G_v = G_w$, genau dann wenn $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = 0$.

3.) *Die* Untervektorräume von V sind $\{0\}$, V , G_v mit $v \in V \backslash \{0\}$.

LÖSUNG:

1.) Zu zeigen ist, daß $G_v := \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ eine *nichtleere* Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist, die bezüglich der Vektoraddition und bezüglich der skalaren Multiplikation abgeschlossen ist.

Für $\lambda = 0$ ist $0 \cdot v = 0 \in G_v$ und somit $G_v \neq \{\}$.
(Auch wenn nach Voraussetzung $v \in V \backslash \{0\}$, ist der Nullvektor immer ein Element von G_v für alle $v \in V \backslash \{0\}$.)

Für zwei beliebige Elemente $\lambda \cdot v, \mu \cdot v \in G_v$ (für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) ist ihre Summe $\lambda \cdot v + \mu \cdot v = (\lambda + \mu) \cdot v$ wieder ein Element in G_v (denn $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$).

Für ein beliebiges Element $\lambda \cdot v \in G_v$ (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) ist auch für alle $\mu \in \mathbb{R}$ der Vektor $\mu \cdot (\lambda \cdot v) = (\mu \cdot \lambda) \cdot v$ wieder ein Element in G_v (denn $\mu \cdot \lambda \in \mathbb{R}$).

Somit ist G_v für alle $v \in V \backslash \{0\}$ ein Untervektorraum von $V = \mathbb{R}^2$.

2.) Die Behauptung, daß Aussage A genau dann gilt, wenn Aussage B zutrifft, ist allgemein in zwei Schritten zu beweisen: Man zeigt, daß aus Aussage A die Aussage B folgt und umgekehrt, daß aus Aussage B widerum Aussage A folgt.

Wir zeigen zunächst die eine Richtung der nachzuweisenden Äquivalenz:
„Für zwei Vektoren $v, w \in V \backslash \{0\}$ gilt $G_v = G_w$, genau dann wenn $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = 0$ erfüllt ist.“

Für zwei Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in V \backslash \{0\}$ sei $G_v = G_w$.

Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $w = \lambda \cdot v$ ist, was wiederum bedeutet, daß die beiden Gleichungen $w_1 = \lambda \cdot v_1$ und $w_2 = \lambda \cdot v_2$ erfüllt sind.

Nun gilt $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = v_1 \cdot \lambda \cdot v_2 - v_2 \cdot \lambda \cdot v_1 = 0$ und somit $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = 0$.

Nun zeigen wir die andere Richtung:
Für die Koordinaten der beiden Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ gelte die Gleichung

$$v_1 w_2 - v_2 w_1 \; = \; 0 \, . \tag{1}$$

Wir zeigen zunächst die Inklusion $G_v \subseteq G_w$: Ein beliebiges Element $\lambda \cdot v \in G_v$ (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) ist genau dann auch in G_w, wenn ein $\mu \in \mathbb{R}$ existiert mit $\lambda \cdot v = \mu \cdot w \in G_w$, das heißt wenn zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ ein $\mu \in \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \cdot v_1 = \mu \cdot w_1 \quad \text{und} \quad \lambda \cdot v_2 = \mu \cdot w_2 \, . \tag{2}$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- Aus dem Fall $v_1 = 0$ und $v_2 \neq 0$ ($v \neq 0$) folgt wegen (1) notwendig $w_1 = 0$, und wegen $w \neq 0$ auch noch $w_2 \neq 0$. Somit bleibt in (2) nur die eine Gleichung

  $$\lambda \cdot v_2 = \mu \cdot w_2 \quad \text{wobei} \quad v_2, w_2 \neq 0$$

  zu überprüfen. Zu gegebenem λ erfüllt offenbar $\mu = \lambda \cdot \dfrac{w_2}{v_2}$ obige Gleichung.
- Der Fall $v_1 \neq 0$ und $v_2 = 0$ liefert nach gleichem Vorgehen $w_1 \neq 0$ und $w_2 = 0$, und es ergibt sich $\mu = \lambda \cdot \dfrac{w_1}{v_1}$.
- Für den Fall $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ existiert das gesuchte $\mu \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\mu = \lambda \cdot \dfrac{w_2}{v_2} = \lambda \cdot \dfrac{w_1}{v_1}$. Dies ist aber äquivalent dazu, daß gilt $v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = 0$, und das wiederum gilt nach Voraussetzung.

Ganz analog zeigt man die Inklusion $G_w \subseteq G_v$, woraus dann insgesamt $G_v = G_w$ folgt.

3.) Es sind zwei Dinge zu zeigen:a.) Die Mengen $\{0\}$, V und G_v für $v \in V\backslash\{0\}$ *sind* Untervektorräume von $V = \mathbb{R}^2$. b.) Dies sind *alle* Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$.

Trivialerweise sind $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ selbst Untervektorräume von $V = \mathbb{R}^2$, in Teilaufgabe 1.) wurde gezeigt, daß auch die Mengen $G_v := \big\{\lambda \cdot v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ sind. Somit ist Teil a.) bewiesen.

Zu zeigen ist nun, daß *jeder* Untervektorräum des $\mathbb{R}^2$ von der Gestalt $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ oder G_v ist. Dazu konstruieren wir uns alle möglichen Untervektorräume U des $\mathbb{R}^2$ wie folgt:

Notwendig muß U den Nullvektor 0 enthalten, ist also mindestens der *Nullraum* $\{0\}$.

Sei nun zusätzlich $v \neq 0$ in U enthalten, dann muß wegen der notwendigen Abgeschlossenheit von U bezüglich der skalaren Multiplikation auch für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ der Vektor $\lambda \cdot u$ in U enthalten sein. Damit ist U von der Form G_v.

Sei nun noch ein weiterer Vektor $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $w \neq 0$ und $w \neq v$ in U enthalten, also $\big\{0, w\big\} \cup G_v \subset U$.

Gilt für diesen Vektor w, daß $w = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $w \in G_v$ und U unverändert G_v.

Sei also $w \neq \lambda \cdot v$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach Aufgabenteil 2, daß $v_1 w_2 - v_2 w_1 \neq 0$ ist.

Aufgrund der notwendigen Abgeschlossenheit von U bezüglich der skalaren Multiplikation muss dann auch für alle $\mu \in \mathbb{R}$ der Vektor $\mu \cdot w$ in U enthalten sein. Wegen der notwendigen Abgeschlossenheit von U bezüglich der Vektoraddition muss auch für jedes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ der Vektor $\lambda \cdot v + \mu \cdot w$ in U enthalten sein.

Die Behauptung ist nun, daß für U dann bereits $U = \mathbb{R}^2$ gilt. Dazu ist zu zeigen, daß sich jedes Element $x \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination $x = \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ schreiben läßt.

Für jeden Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ existieren in der Tat Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so daß

$$x \;=\; \lambda \cdot v + \mu \cdot w \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;=\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

nämlich

$$\lambda = \frac{x_1 w_2 - x_2 w_1}{v_1 w_2 - v_2 w_1} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{v_1 w_2 - v_2 w_1}\,.$$

Aufgabe 67. Basen von Untervektorräumen.
Bestimmen Sie Basen von den folgenden Untervektorräumen U_K des K^3:

1.) $K = \mathbb{R}$ und $U_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2.) $K = \mathbb{C}$ und $U_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2i+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

3.) $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $U_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] \\ [3] \\ [5] \end{pmatrix}\right)$.

LÖSUNG:

1.) Gesucht ist eine Basis des Untervektorraums

$$U_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^3$.

Ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ kann höchstens die Dimension 3 besitzen. Können wir also drei linear unabhängige Vektoren aus $U_{\mathbb{R}}$ angeben, bilden diese bereits eine Basis von $U_{\mathbb{R}}$ (und damit natürlich auch eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und es gilt $U_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$).

Bei genauer Betrachtung der Vektoren, kann man vermuten, dass die ersten drei Vektoren linear unabhängig sind. Das müssen wir aber noch beweisen, d. h. wir müssen zeigen, dass für die Gleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als einzige Lösung nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ existiert.

Dazu müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\,\lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

lösen. Die mittlere Gleichung lässt sich zu $\lambda_3 = -2\lambda_1 - 3\lambda 2$ umformen. Einsetzen dieses Ergebnisses in die beiden anderen Gleichungen ergibt $-3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$ und $-3\lambda_1 - 7\lambda_2 = 0$. Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen ergibt wiederum $-5\lambda_2 = -7\lambda_2$, woraus sofort $\lambda_2 = 0$ folgt. Einsetzen ergibt wiederum $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$.

Somit ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystem, und somit sind die drei Vektoren linear unabhängig und bilden eine Basis von $U_{\mathbb{R}}$.

2.) Durch scharfes Hinsehen erkennt man, daß die drei Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2i+1 \end{pmatrix} = (2-i) \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Demnach ist

$$U_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

Die beiden Vekoren sind linear unabhängig, weil für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

zuerst (wegen der 3. Komponente) $\alpha = 0$ sein muß, und dann (z.B. wegen der 2. Komponente) $\beta = 0$ sein muß.

3.) Wir überprüfen die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren. Für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gelte

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} [0] \\ [3] \\ [5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} .$$

Ausgeschrieben in drei Gleichungen lautet dies

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & [2]\alpha_1 + [3]\alpha_2 + [0]\alpha_3 = [0]\ , \\ \text{(II)} & [3]\alpha_1 + [5]\alpha_2 + [3]\alpha_3 = [0]\ , \\ \text{(III)} & [0]\alpha_1 + [2]\alpha_2 + [5]\alpha_3 = [0]\ . \end{array}$$

Wir lösen durch äquivalente Zeilenumformungen. Zunächst wird (II) durch (II') $= 2 \cdot$ (II) $- 3 \cdot$ (III) ersetzt,

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & [2]\alpha_1 + [3]\alpha_2 + [0]\alpha_3 = [0]\ , \\ \text{(II')} & [0]\alpha_1 + [1]\alpha_2 + [6]\alpha_3 = [0]\ , \\ \text{(III)} & [0]\alpha_1 + [2]\alpha_2 + [5]\alpha_3 = [0]\ . \end{array}$$

Nun ersetzen wir noch (III) durch (III') $=$ (III) $- 2 \cdot$ (II'), wodurch sich

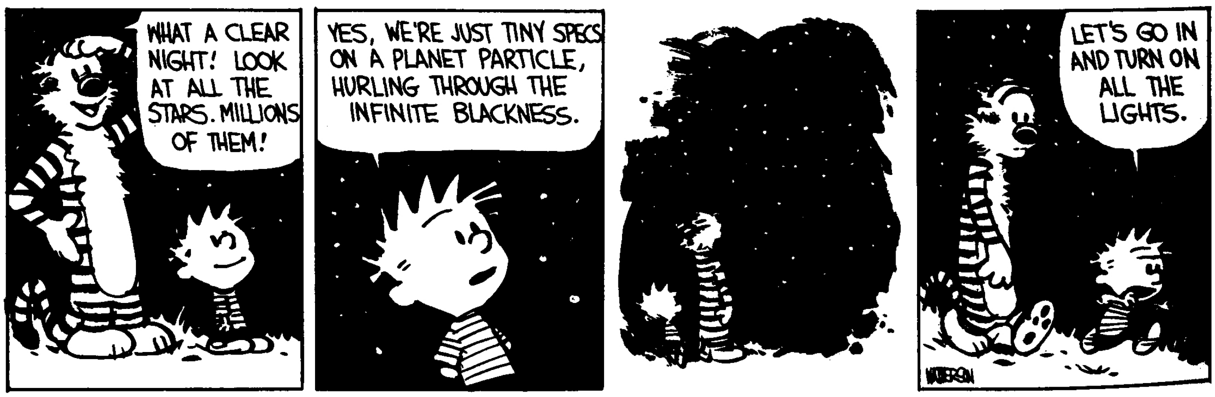
$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & [2]\alpha_1 + [3]\alpha_2 + [0]\alpha_3 = [0]\ , \\ \text{(II')} & [0]\alpha_1 + [1]\alpha_2 + [6]\alpha_3 = [0]\ , \\ \text{(III')} & [0]\alpha_1 + [0]\alpha_2 + [-7]\alpha_3 = [0] \end{array}$$

ergibt. Da $[-7] = [0]$ ist, kann $\alpha_3 \neq [0]$, also zum Beispiel $\alpha_3 = [1]$ gewählt werden. Aus (II') folgt $\alpha_2 = \alpha_3$ und aus (I) ergibt sich $\alpha_1 = -\frac{[3]}{[2]}\alpha_2$. Wegen $[2] \cdot [4] = [1]$ also $\alpha_1 = [2]\alpha_2$. Die drei Vektoren sind also linear abhängig. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} [0] \\ [3] \\ [5] \end{pmatrix} = [5] \cdot \begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix} + [6] \cdot \begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix} .$$

Somit bilden die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix}$ eine Basis von $U_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}$, da sie offensichtlich linear unabhängig sind.

Aufgabe 68. Sphere packings, Calvin and Hobbes.



Wie Calvin schon erahnt, gibt es in Räumen höherer Dimension viel Raum...
Dies führt auch zu scheinbaren Paradoxien:

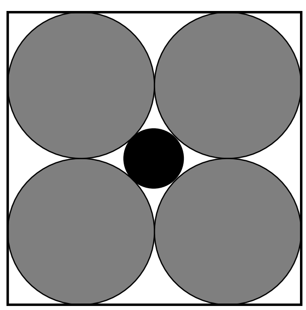
Es sei

$$C_d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid -2 \le x_i \le 2, i = 1, \dots, d\}$$

ein regelmäßiger d-dimensionaler Würfel mit Kantenlänge 4.
Die d-dimensionale Kugel mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^d$ und Radius $r > 0$ ist die Menge

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - a\| \le r\}, \quad \text{wobei } \|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_d^2}, \;\; (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Der Würfel C_d enthält die 2^d Kugeln $B((\pm 1, \dots, \pm 1), 1)$. Wir betrachten die Kugel, deren Mittelpunkt $(0, \dots, 0)$ ist, und die die 2^d Kugeln berührt. In welcher Dimension d passt diese Kugel nicht mehr in den Würfel C_d?



LÖSUNG:

Die innere Kugel $B(0, r)$ passt genau dann nicht mehr in den d-dimensionalen Würfel, wenn ihr Radius r die Zahl 2 überschreitet. Ihr Radius r ist gleich Abstand des Ursprung zu einem der anderen 2^d Kugelmittelpunkte minus 1, d.h. es ist $r = \|(\pm 1, \dots, \pm 1) - (0, \dots, 0)\| - 1 = \sqrt{(\pm 1)^2 + \cdots + (\pm 1)^2} - 1 = \sqrt{d} - 1$. Nun gilt genau für alle Zahlen $d > 10$ die Ungleichung $\sqrt{10} - 1 > 2$. Somit tritt das in der Aufgabe beschriebene Phänomen in allen Dimensionen größer als 9 auf. Weird!