§1 Vollständige Induktion; Grundbegriffe der Logik und Mengenlehre

Wir setzen hier das System $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ der *ganzen Zahlen* und das Rechnen mit diesen Zahlen als bekannt voraus. Es sei $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der nicht-negative ganzen Zahlen. Die Elemente dieser Menge heißen *natürliche Zahlen*.

Im folgenden bezeichen wir mit den Buchstaben i, j, k, l, m, n stets natürliche Zahlen.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Um die Aussage *"Für all $n \geq n_0$ gilt $\mathcal{A}(n)$"* (kurz, $\forall n \geq n_0 \mathcal{A}(n)$) zu beweisen, genügt es, zu zeigen:

(I) $\mathcal{A}(n_0)$ gilt. (*Induktionsanfang*)

(II) Für beliebiges $n \geq n_0$ kann aus der Gültigkeit von $\mathcal{A}(n)$ die Gültigkeit von $\mathcal{A}(n{+}1)$ gefolgert werden (kurz, $\forall n \geq n_0 (\, \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n{+}1)\,)$. (*Induktionsschritt* oder *Schluß von n auf $n{+}1$*)

Zur Begründung:

Durch wiederholte Anwendung von (II) erhält man ausgehend von (I) nacheinander die Gültigkeit von $\mathcal{A}(n_0), \mathcal{A}(n_0{+}1), \mathcal{A}(n_0{+}2)$, usw. $[\ \mathcal{A}(n_0) \Rightarrow \mathcal{A}(n_0{+}1) \Rightarrow \mathcal{A}(n_0{+}2) \Rightarrow \mathcal{A}(n_0{+}3) \Rightarrow$ ....]

Die Annahme "$\mathcal{A}(n)$" im Induktionsschritt (II) nennt man *Induktionsvoraussetzung* (kurz I.V.).

1.1 Lemma.

(a) Für alle $n \geq 5$ gilt $n^2 < 2^n$.

(b) Sind $a_0, ..., a_n$ natürliche Zahlen mit $a_i < a_{i+1}$ für alle $i < n$, so gilt $n \leq a_n$.

Beweis durch (vollständige) Induktion nach n:

(a) (I) $n = 5$: $n^2 = 25 < 32 = 2^n$. (II) $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{3 \leq n}{<} n^2 + n^2 \overset{\text{I.V.}}{<} 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

(b) (I) $n = 0$: trivial, denn es gib keine natürliche Zahl < 0.

(II) $a_0 < ... < a_n < a_{n+1} \overset{\text{IV}}{\Rightarrow} n \leq a_n < a_{n+1} \Rightarrow n{+}1 \leq a_{n+1}$.

Folgerung. Sind $a_0, ..., a_n$ natürliche Zahlen $< n$, so gibt es i, j mit $i < j < n$ und $a_i = a_j$. Denn wären die a_i paarweise verschieden, so könnte man sie der Größe nach ordnen, so daß *ohne Einschränkung der Allgemeinheit* (kurz, o.E.d.A.) $a_0 < ... < a_n$ wäre, woraus mit L.1.1b $n \leq a_n$ folgen würde. Widerspruch.

Definition.

Für jede Menge A sei $\mathcal{P}(A)$ die *Potenzmenge* von A, i.e. die Menge aller Teilmengen von A.

Für jede endliche Menge A sei $card(A)$ die Anzahl ihrer Elemente.

1.2 Lemma.

Für jede endliche Menge A gilt: $card(\mathcal{P}(A)) = 2^{card(A)}$.

Beweis durch Induktion nach $card(A)$:

(I) $card(A) = 0$: Dann ist $A = \emptyset$ und $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$, also $card(\mathcal{P}(A)) = 1 = 2^0$.

(II) $card(A) = n + 1$: Wir wählen ein $a \in A$ und setzen $B := A \setminus \{a\}$ und $C := \{X \cup \{a\} : X \in \mathcal{P}(B)\}$.

Offenbar gilt: $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup C$, $\mathcal{P}(B) \cap C = \emptyset$ und $card(C) = card(\mathcal{P}(B))$.

Nach I.V. ist aber $card(\mathcal{P}(B)) = 2^n$.

Damit folgt: $card(\mathcal{P}(A)) = card(\mathcal{P}(B)) + card(C) = 2 \cdot card(\mathcal{P}(B)) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Das Definitionsprinzip der Rekursion (*Definition durch Rekursion*)

Eine (unendliche) Folge $(s_n)_{n\geq n_0}$ von Elementen s_n läßt sich definieren durch

(I) die Angabe von s_{n_0} und

(II) eine *Rekursionsgleichung* $s_{n+1} := F(s_n, n)$ $(n \geq n_0)$, d.h.
eine Vorschrift F, die für jedes $n \geq n_0$ das Element s_{n+1} in Abhängigkeit von s_n und n bestimmt.

1.3 Definition (Rekursive Definition von a^n (für $a \in \mathbb{Z}$) und von $n!$)

$a^0 := 1$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ $(n \geq 0)$.

$0! := 1$ und $(n{+}1)! := n! \cdot (n{+}1)$ $(n \geq 0)$.

1.4 Lemma. Für alle $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$,

Beweis durch Induktion nach n: (I) $2^4 = 16 < 24 = 4!$. (II) $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.V.}}{<} n! \cdot 2 < n! \cdot (n+1) = (n+1)!$.

Summen- und Produktzeichen

1.5 Definition.

Sei $a_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i \geq n_0$. Durch Rekursion nach n definieren wir für jedes $n \geq n_0$ die *Summe* $\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i$ und das *Produkt* $\prod\limits_{i=n_0}^{n} a_i$ der a_i $(n_0 \leq i \leq n)$ wie folgt:

$$\sum_{i=n_0}^{n_0} a_i := a_{n_0}\ ,\quad \sum_{i=n_0}^{n+1} a_i := \Big(\sum_{i=n_0}^{n} a_i\Big) + a_{n+1}; \qquad \prod_{i=n_0}^{n_0} a_i := a_{n_0}\ ,\quad \prod_{i=n_0}^{n+1} a_i = \Big(\prod_{i=n_0}^{n} a_i\Big) \cdot a_{n+1}.$$

Ferner setzen wir noch: $\sum\limits_{i=n_0}^{n_0-1} a_i := 0$ (leere Summe), $\prod\limits_{i=n_0}^{n_0-1} a_i := 1$ (leeres Produkt).

Bemerkung.

(1) $\sum\limits_{i=n_0}^{n} a = a \cdot (n{+}1{-}n_0)$ und $\prod\limits_{i=n_0}^{n} a = a^{n+1-n_0}$;

(2) $n! = \prod\limits_{i=1}^{n} i$.

1.6 Lemma. (Rechenregeln für Summen- und Produktzeichen)

($\sum$1) $\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i = \sum\limits_{j=n_0}^{n} a_j$;

($\sum$2) $\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i = \sum\limits_{i=n_0+k}^{n+k} a_{i-k} = \sum\limits_{i=n_0-k}^{n-k} a_{i+k}$;

($\sum$3) $\sum\limits_{i=n_0}^{n}\sum\limits_{j=m_0}^{m} a_{ij} = \sum\limits_{j=m_0}^{m}\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_{ij}$;

($\sum$4) $\sum\limits_{i=n_0}^{m} a_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i$ $(n_0 \leq m \leq n)$;

($\sum$5) $\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i \pm \sum\limits_{i=n_0}^{n} b_i = \sum\limits_{i=n_0}^{n} (a_i \pm b_i)$;

($\sum$6) $(\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot b = \sum\limits_{i=n_0}^{n} (a_i b)$;

($\sum$7) $(\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot (\sum\limits_{j=m_0}^{m} b_j) = \sum\limits_{i=n_0}^{n}\sum\limits_{j=m_0}^{m} (a_i b_j)$;

($\sum$8) $\sum\limits_{i=n_0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_{n_0}$.

($\prod$1) $\prod\limits_{i=n_0}^{n} a_i = \prod\limits_{j=n_0}^{n} a_j$;

($\prod$2) $\prod\limits_{i=n_0}^{n} a_i = \prod\limits_{i=n_0+k}^{n+k} a_{i-k} = \prod\limits_{i=n_0-k}^{n-k} a_{i+k}$;

($\prod$3) $\prod\limits_{i=n_0}^{n}\prod\limits_{j=m_0}^{m} a_{ij} = \prod\limits_{j=m_0}^{m}\prod\limits_{i=n_0}^{n} a_{ij}$;

($\prod$4) $\prod\limits_{i=n_0}^{m} a_i \cdot \prod\limits_{i=m+1}^{n} a_i = \prod\limits_{i=n_0}^{n} a_i$ $(n_0 \leq m \leq n)$;

($\prod$5) $\prod\limits_{i=n_0}^{n} a_i \cdot \prod\limits_{i=n_0}^{n} b_i = \prod\limits_{i=n_0}^{n} (a_i \cdot b_i)$;

Zur Schreibweise: $\sum$ bindet stärker als $+$, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + b = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\big) + b$. Entsprechendes gilt für $\prod$.

Beweise:

$(\sum 4)$ $\sum\limits_{i=n_0}^{m} a_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n+1} a_i = \sum\limits_{i=n_0}^{m} a_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i \ + a_{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} \sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i \ + a_{n+1} = \sum\limits_{i=n_0}^{n+1} a_i.$

$(\sum 7)$: I. $(\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot (\sum\limits_{j=m_0}^{m_0} b_j) = (\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot b_{m_0} \Sigma 6 = \sum\limits_{i=n_0}^{n} (a_i b_{m_0}) = \sum\limits_{i=n_0}^{n} \sum\limits_{j=m_0}^{m_0} (a_i b_j).$

II. $(\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot (\sum\limits_{j=m_0}^{m+1} b_j) = (\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot (\sum\limits_{j=m_0}^{m} b_j + b_{m+1}) = (\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot (\sum\limits_{j=m_0}^{m} b_j) + (\sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i) \cdot b_{m+1} \overset{\text{I.V.}}{=}$

$= \sum\limits_{i=n_0}^{n} \sum\limits_{j=m_0}^{m} (a_i b_j) + \sum\limits_{i=n_0}^{n} a_i b_{m+1} \overset{\Sigma 5}{=} \sum\limits_{i=n_0}^{n} (\sum\limits_{j=m_0}^{m} (a_i b_j) + a_i b_{m+1}) = \sum\limits_{i=n_0}^{n} \sum\limits_{j=m_0}^{m+1} (a_i b_j).$

$(\sum 8)$: I. $n = n_0$: $\sum\limits_{i=n_0}^{n_0} (a_{i+1} - a_i) = a_{n_0+1} - a_{n_0}.$

II. $\sum\limits_{i=n_0}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) = \sum\limits_{i=n_0}^{n} (a_{i+1} - a_i) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \overset{\text{I.V.}}{=} (a_{n+1} - a_{n_0}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_{n_0}.$

Aussagen, logische Verknüpfungen

Eine *Aussage* ist ein "sprachliches Gebilde",das entweder wahr oder falsch ist.

Ist die Aussage $\mathcal{A}$ wahr (bzw. falsch), so sagt man $\mathcal{A}$ habe den *Wahrheitswert* 1 (bzw. 0).

Statt "$\mathcal{A}$ ist wahr" sagt man auch "$\mathcal{A}$ gilt".

Zur Bildung zusammengesetzter Aussagen verwendet man in der Mathematik gewisse Abkürzungen:

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$: "$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$" (Statt "$\wedge$" schreiben wir oft auch "&".)

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$: "$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$"

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$: "$\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$", "wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$", "aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$", "$\mathcal{B}$ folgt aus $\mathcal{A}$"

$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$: "$\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$"

$\neg\mathcal{A}$: "nicht $\mathcal{A}$"

Erläuterungen:

1. Mit $\vee$ (oder) ist stets das "nicht ausschließende oder" gemeint,
   d.h. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist auch dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beide wahr sind.
2. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{B}$ wahr oder (nicht ausschließend!) $\mathcal{A}$ falsch ist.
   (Die Aussage "4 ist Primzahl $\Rightarrow$ $1 < 0$" ist z.B. wahr).
3. $\neg\mathcal{A}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist.
4. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ denselben Wahrheitswert haben. In diesem Fall nennt man die Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *äquivalent (zueinander).*
5. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ist äquivalent zu $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist äquivalent zu $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

Die Bedeutung der Symbole $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ läßt sich durch folgende "Wahrheitstafel" beschreiben:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Ist $\mathcal{A}(\star)$ ein Ausdruck, der eine Aussage darstellt, wenn für $\star$ ein beliebiges Objekt x (einer vorgegebenen Gesamtheit von Objekten) eingesetzt wird, so nennen wir $\mathcal{A}(\star)$ eine *Eigenschaft* und sagen "x hat die Eigenschaft $\mathcal{A}(\star)$" für "$\mathcal{A}(x)$ ist wahr".

Abkürzung:

$\forall x \mathcal{A}(x)$: "für alle x gilt $\mathcal{A}(x)$"

$\exists x \mathcal{A}(x)$: "es gibt ein x, so daß $\mathcal{A}(x)$", "für mindestens ein x gilt $\mathcal{A}(x)$.

Das Symbol $\forall$ ($\exists$) heißt "Allquantor" ("Existenzquantor").

Für beliebige Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bzw. Eigenschaften $\mathcal{A}(\star)$ gilt:

$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$, $\qquad \neg\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$,

$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$, $\qquad \neg\forall x \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \exists x \neg\mathcal{A}(x)$,

$\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$, $\qquad \neg\exists x \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \forall x \neg\mathcal{A}(x)$.

Einige Sprechweisen:

$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ heißt die *Umkehrung* von $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$;

$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ heißt die *Kontraposition* von $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$;

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$: $\mathcal{A}$ ist hinreichend für $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ ist notwendig für $\mathcal{A}$;

$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$: $\mathcal{A}$ ist notwendig und hinreichend für $\mathcal{B}$;

$\mathcal{A} :\Leftrightarrow \mathcal{B}$: $\mathcal{A}$ ist per Definition äquivalent zu $\mathcal{B}$.

Eine wahre Aussage nennt man in der Mathematik einen "Satz" oder ein "Theorem" oder ein "Lemma".

Man beachte:
Die Kontraposition von $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist äquivalent zu $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Den Beweis einer Behauptung $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ kann deshalb auch durch Nachweis ihrer Kontraposition $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ erbringen (was gelegentlich leichter ist).

Eine andere Beweismethode ist der *indirekte Beweis* (oder *Beweis durch Widerspruch*) Beim indirekten Beweis von $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ nimmtman an, die Behauptung $\mathcal{B}$ sei falsch, d.h., es gelte $\neg\mathcal{B}$. Dann leitet man — unter der Voraussetzung $\mathcal{A}$ und der zusätzlichen Annahme $\neg\mathcal{B}$ — die Wahrheit einer Aussage $\mathcal{C}$ ab, von der man bereits weiß, daß sie falsch ist. Aus diesem *Widerspruch* folgt, daß $\neg\mathcal{B}$ nicht richtig sein kann. Also ist $\mathcal{B}$ wahr. — Bei der widersprechenden Aussage $\mathcal{C}$ kann es sich insbesondere um $\neg\mathcal{A}$ oder um auch $\mathcal{B}$ handeln. Dies mag zunächst etwas irritierend erscheinen. Man macht sich aber leicht klar (z.B. anhand der obigen Wahrheitstafel), daß tatsächlich gilt: $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, und auch $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$.

Weitere Abkürzungen:

$\forall x < a\mathcal{A}(x) \ :\Longleftrightarrow \ \forall x(x < a \Rightarrow \mathcal{A}(x))$, $\exists x < a\mathcal{A}(x) \ :\Longleftrightarrow \ \exists x(x < a \wedge \mathcal{A}(x))$.

$\exists! x\mathcal{A}(x) \ :\Leftrightarrow \exists x(\mathcal{A}(x) \wedge \forall y(\mathcal{A}(y) \Rightarrow x = y)$.

Es gilt:

$\neg\forall x < a\mathcal{A}(x) \iff \exists x < a\neg\mathcal{A}(x)$ und $\neg\exists x < a\mathcal{A}(x) \iff \forall x < a\neg\mathcal{A}(x)$.

$\exists! x\mathcal{A}(x) \iff \exists x\forall y(\mathcal{A}(y) \Leftrightarrow x = y)$.

Naiver Mengenbegriff nach Cantor (1895):

Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

"a ist Element von M" bedeutet also dasselbe wie "a gehört zu M".

Abkürzungen:

$a \in M \;:\Longleftrightarrow\;$ a ist Element von M [a gehört zu M]

$a \notin M \;:\Longleftrightarrow\; \neg(a \in M)$ [a ist nicht Element von M]

$a \neq b \;:\Longleftrightarrow\; \neg(a = b)$ [a ungleich b, a verschieden von b]

Für endlich viele Objekte $a_1, ..., a_n$ bezeichnet $\{a_1, ..., a_n\}$ diejenige Menge M, die genau die Elemente $a_1, ..., a_n$ hat.

Erläuterungen

Jede Menge ist ein Objekt unseres Denkens, kann also selbst wieder Element einer anderen Menge sein.

Bei der Zusammenfassung von Objekten zu einer Menge kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an, und auch nicht darauf, ob ein Element nur einmal oder mehrmals vorkommt. Anders gesagt, eine Menge M ist eindeutig bestimmt, wenn festgelegt ist, welche Objekte a Element von M sind und welche nicht.

Für Mengen M, N gilt also: $M = N \iff \forall x(x \in M \Leftrightarrow x \in N)$ (Extensionalität).

Beispiele:

1. $M := \{1, 0, \{3, \{0\}\}, 4\}$ ist eine Menge. Die vier Elemente von M sind $1, 0, \{3, \{0\}\}, 4$.
2. Es gilt $\{3, 6, 9, 12\} = \{12, 3, 3, 6, 9, 12\} \neq \{3, 3, 9, 12\}$.

Definition.

Ist M eine Menge und $\mathcal{A}(\star)$ eine Eigenschaft, so bezeichnet $\{x \in M : \mathcal{A}(x)\}$ die Menge aller Elemente x von M, für die die Aussage $\mathcal{A}(x)$ wahr ist (gilt). Wenn M aus dem Zusammenhang hervorgeht, so schreiben manchmal auch nur $\{x : \mathcal{A}(x)\}$ statt $\{x \in M : \mathcal{A}(x)\}$.

Für jedes Objekt a gilt also: $a \in \{x \in M : \mathcal{A}(x)\} \Leftrightarrow a \in M \;\&\; \mathcal{A}(a)$.

Bezeichnet, für jedes $x \in M$, $t(x)$ ein Objekt, so sei $\{t(x) : x \in M\} := \{y : \exists x \in M(y = t(x))\}$ (*die Menge aller $t(x)$ mit $x \in M$*). Zum Beispiel ist $\{2n{+}1 : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen. Analog definiert man $\{t(x) : \mathcal{A}(x)\}$ bzw. $\{t(x_1, ..., x_n) : \mathcal{A}(x_1, ..., x_n)\}$. Beispiel: $\{2^n \cdot 3^x : n \in \mathbb{N} \;\&\; x \in \mathbb{Z}\}$.

Abkürzungen:

$\forall x \in M\, \mathcal{A}(x) \;:\Longleftrightarrow\; \forall x(x \in M \Rightarrow \mathcal{A}(x))$

$\exists x \in M\, \mathcal{A}(x) \;:\Longleftrightarrow\; \exists x(x \in M \wedge \mathcal{A}(x))$

$\emptyset := \{x : x \neq x\}$ (die *leere Menge*)

Es gilt: $\neg\forall x \in M \mathcal{A}(x) \iff \exists x \in M \neg\mathcal{A}(x)$, $\neg\exists x \in M \mathcal{A}(x) \iff \forall x \in M \neg\mathcal{A}(x)$.

Bemerkungen.

Die leere Menge $\emptyset$ besitzt überhaupt keine Elemente.

Jede Aussage der Form $\forall x \in M\, \mathcal{A}(x)$ mit $M = \emptyset$ ist wahr.

Es gilt $\{a_1, ..., a_n\} = \{x : x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n\}$.

Man beachte:

Die Menge $\{a\}$ ist nicht dasselbe wie das Objekt a; auch nicht, wenn a ebenfalls eine Menge ist.

Definition
Seien A, B Mengen.
A heißt *Teilmenge von* B (in Zeichen $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch Element von B ist:
$A \subseteq B \ :\Longleftrightarrow \ \forall x \in A(x \in B)$.

Für $A \subseteq B$ sagt man auch "A ist in B enthalten" oder "B umfaßt A".

Abkürzung: $A \not\subseteq B \ :\Longleftrightarrow \ A$ ist nicht Teilmenge von B.

Offenbar gilt:
(a) $A = B \ \Leftrightarrow \ A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
(b) $A \not\subseteq B \ \Leftrightarrow \ \exists x \in A(x \notin B)$.
(c) $A \neq B \ \Leftrightarrow \ A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A \ \ [\ \exists x \in A(x \notin B) \vee \exists x \in B(x \notin A)\ ]$.

Definition. (Binomialkoeffizienten)
Für jede endliche Menge A sei $card(A)$ die Anzahl ihrer Elemente.

Für jede Menge A sei $\mathcal{P}(A)$ die *Potenzmenge* von A, i.e. $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$.
Ferner sei $\mathcal{P}_k(A) := \{X \in \mathcal{P}(A) : card(X) = k\}$ und $\dbinom{n}{k} := card(\mathcal{P}_k(\{0, ..., n{-}1\}))$ $(k, n \in \mathbb{N})$

Die Werte $\dbinom{n}{k}$ heißen *Binomialkoeffizienten*.
Aus der Definition folgt unmittelbar

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, für $k \leq n$; (2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; (3) $\binom{n}{k} = 0$, für $k > n$.

Aus Lemma 1.2 folgt
(4) $2^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}$

1.7 Lemma. $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.

Beweis:
1. $k > n$: $\binom{n+1}{k+1} = 0 = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
2. $k \leq n$: Sei $A := \{0, ..., n{-}1\}$ und $\mathbf{B} := \{X \cup \{n\} : X \in \mathcal{P}_k(A)\}$.
Dann gilt offenbar: $\mathcal{P}_{k+1}(A \cup \{n\}) = \mathcal{P}_{k+1}(A) \cup \mathbf{B}$, $\mathcal{P}_{k+1}(A) \cap \mathbf{B} = \emptyset$ und $card(\mathbf{B}) = card(\mathcal{P}_k(A))$.
Folglich $\binom{n+1}{k+1} = card(\mathcal{P}_{k+1}(A \cup \{n\})) = card(\mathcal{P}_{k+1}(A)) + card(\mathcal{P}_k(A)) = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

1.8 Lemma. Für $k \leq n$ gilt $\dbinom{n}{k} = \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}(n{-}i)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n{-}k)!} = \dfrac{n{\cdot}(n{-}1){\cdot}(n{-}2)\cdots(n{-}(k{-}1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$

Beweis durch Induktion nach n:
1. $n = 0$ oder $k = 0$: klar.
2. $0 < k \leq n$: $\binom{n}{k} \overset{\text{L.1.7}}{=} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\cdot(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!}$.

Die Rekursionsgleichung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ führt zu dem *Pascalschen Dreieck*, in dessen n-ter Zeile ($n \geq 0$) die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \dots\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}$ stehen:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Mengenoperationen

Definition

Für Mengen A, B definieren wir:

$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ (Durchschnitt von A und B)

$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (Vereinigung von A und B)

$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}$ (Differenz von A und B, A ohne B)

Man beachte: Im allgemeinen gilt *nicht* $A \setminus B = B \setminus A$!

Beispiele:

$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 13, 14\} = \{2, 3\}$,

$\{0, 1\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$,

$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 13, 14\} = \{1, 2, 3, 13, 14\}$

$\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 13, 14\} = \{1\}$

$\{2, 3, 13, 14\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{13, 14\}$

$\{0, 1\} \setminus \{2, 3\} = \{0, 1\}$

$\{0, 1, 1, 0\} \setminus \{2, 0, 3, 1\} = \emptyset$.

1.9 Lemma.

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(c) $M \setminus (M \setminus A) = M \cap A$.

(d) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B) = (M \setminus A) \setminus B$.

(e) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

Beweis:

(a) Für beliebiges x ist die Äquivalenz der Aussagen "$x \in A \cap (B \cup C)$" und "$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$" zu beweisen. Sei also x gegeben.

Fall 1: $x \in A$. Dann $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Fall 2: $x \notin A$. Dann $x \notin A \cap (B \cup C)$ und $x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) Fall 1: $x \in M$. Dann $x \in M \setminus (M \setminus A) \Leftrightarrow x \notin M \setminus A \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in M \cap A$.

Fall 2: $x \notin M$. Dann $x \notin M \setminus (M \setminus A)$ und $x \notin M \cap A$.

(d) $x \in M \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in M \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in M \wedge x \notin A) \wedge (x \in M \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in M \setminus A \wedge x \in M \setminus B \Leftrightarrow x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

$x \in (M \setminus A) \setminus B \Leftrightarrow x \in M \setminus A \wedge x \notin B \Leftrightarrow (x \in M \wedge x \notin A) \wedge x \notin B$.

§1 wird später fortgesetzt.

§2 Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

Wir diskutieren (bzw. beantworten) hier nicht die Frage *was* die reellen Zahlen sind, sondern sagen lediglich *wie* man mit Ihnen operiert (rechnet), d.h. welche Rechenregeln für die reellen Zahlen gelten. Anders gesagt, wir führen die reellen Zahlen *axiomatisch* ein.

Gegeben sei eine Menge $\mathbb{R}$ (deren Elemente wir reelle Zahlen nennen) zusammen mit zwei Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) und einer Relation $<$. $\mathbb{R}$ enthalte außerdem zwei ausgezeichnete Elemente 0 (Null) und 1 (Eins), wobei $0 \neq 1$.

Die "Struktur" $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ erfülle die folgenden Axiome, wobei a, b, c über alle Elemente von $\mathbb{R}$ laufen.

(I) Die Körperaxiome

(I.1) $a + b = b + a \;\&\; a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)

(I.2) $a + (b + c) = (a + b) + c \;\&\; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz)

(I.3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

(I.4) $a + 0 = a \;\&\; a \cdot 1 = a$

(I.5) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert genau eine relle Zahl $-a$ mit $a + (-a) = 0$.
Zu jedem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert genau eine reelle Zahl a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

(II) Die Ordnungsaxiome

(II.1) $\neg(a < a)$ (Irreflexivität)

(II.2) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)

(II.3) $a < b \vee a = b \vee b < a$ (Totalität oder Trichotomie)

(II.4) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (Monotonie der Addition)

(II.5) $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonie der Multiplikation)

Abkürzungen:
$a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; a < b$ oder $a = b$; $\quad a > b \;:\Leftrightarrow b < a$; $\quad a \geq b \;:\Leftrightarrow b \leq a$; $\quad ab := a \cdot b$.

Definition. Eine Menge D reeller Zahlen heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\forall x \in D(x \leq a)$. Jedes solche a heißt eine *obere Schranke* von D. Besitzt die Menge D eine *kleinste obere Schranke*, so wird diese das *Supremum von D* genannt und mit $\sup(D)$ bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
a = \sup(D) \;:& \Longleftrightarrow \forall x \in D(x \leq a) \;\&\; \forall s \in \mathbb{R}(\forall x \in D(x \leq s) \Rightarrow a \leq s) \\
& \Longleftrightarrow \forall x \in D(x \leq a) \;\&\; \forall y < a \exists x \in D(y < x).
\end{aligned}
$$

(III) Das Vollständigkeitsaxiom

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Definition

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a - b := a + (-b)$ und (falls $b \neq 0$) $\dfrac{a}{b} := a/b := a \cdot b^{-1}$.

Bemerkung.

Aus den Körperaxiomen lassen sich alle von der Schule her bekannten Regeln für die vier Grundrechnungsarten ableiten. Diese Regeln werden hier als bekannt vorausgesetzt; ebenso die üblichen Regeln zur Klammerersparnis ("Punkt vor Strich").

z.B.:

Vorzeichenregeln: $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b),\ (-a)\cdot(-b) = a\cdot b,\ -(a-b) = -a+b,\ -(-a) = a,\ -0 = 0.$

Regeln der Bruchrechnung: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}\ ,\quad \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}\ ,\quad \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}.$

Wir identifizieren die ganzen Zahlen $\ldots -2,-1,0,1,2,3,\ldots$ mit den Elementen $\ldots,-(1{+}1),-1,0,1,1{+}1,1{+}1{+}1,\ldots$ von $\mathbb{R}$.

Somit gilt also $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$.

Andere wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind:

$\mathbb{Q} := \{\frac{x}{y} : x,y\in\mathbb{Z}\ \&\ y\neq 0\}$ (rationale Zahlen)
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \{x\in\mathbb{R} : x\notin\mathbb{Q}\}$ (irrationale Zahlen)
$\mathbb{R}_+ := \{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$, $\quad\mathbb{R}^* := \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$, $\quad\mathbb{R}^*_+ := \{x\in\mathbb{R} : x>0\}$

Bemerkung

(a) $a,b\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ a+b, ab\in\mathbb{N}$

(b) $a,b\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ a+b, ab, a-b\in\mathbb{Z}$

(c) $a,b\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ a+b, ab, a-b\in\mathbb{Q}\ \&\ (b\neq 0\Rightarrow \dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q})$

2.1 Lemma (Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen)

Für alle reellen Zahlen a,b,c gilt

(<1) $a\neq b \implies$ *entweder* $a<b$ oder $b<a$.

(<2) $(0<a\wedge 0<b)\vee(a<0\wedge b<0) \iff 0<ab.$

(<3) $a\neq 0\ \Rightarrow\ 0<a^2$. Insbesondere $0<1$.

(<4) $0<a \Leftrightarrow 0<a^{-1}$, falls $a\neq 0$

(<5) $a<b \Leftrightarrow -b<-a$

(<6) $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$

(<7) $0<c\ \Rightarrow\ (a<b \Leftrightarrow ac<bc)$

(<8) $c<0\ \Rightarrow\ (a<b \Leftrightarrow bc<ac)$

(<9) $0<ab\ \Rightarrow\ (a<b \Leftrightarrow b^{-1}<a^{-1})$

(<10) $a<b\ \Rightarrow\ a<\dfrac{1}{2}(a{+}b)<b$

Beweis:

1. Aus $a<b$ und $b<a$ würde $a<a$ folgen.

2. Beweis durch Fallunterscheidung:

$0<a\wedge 0<b \quad\Rightarrow\ 0=0\cdot b<ab.$

$a<0\wedge b<0 \quad\Rightarrow\ 0<-a\wedge 0<-b\ \Rightarrow\ 0<(-a)(-b)=ab.$

$a<0\wedge 0<b \quad\Rightarrow\ ab<0b=0.$

$0<a\wedge b<0 \quad\Rightarrow\ ab<a0=0.$

$a=0\vee b=0 \quad\Rightarrow\ ab=0.$

Da es sich hier um eine vollständige Fallunterscheidung handelt (d.h. für beliebige Zahlen $a,b\in\mathbb{R}$ muß jeweils genau einer der Fälle 1–5 vorliegen), folgt sofort die Behauptung. (Die Betrachtung der Fälle 3–4 ist erforderlich um die Richtung "$\Leftarrow$" der Behauptung zu erhalten.)

3. $a \neq 0 \Rightarrow 0 < a \vee a < 0 \Rightarrow 0 < aa = a^2$. $1 \neq 0 \Rightarrow 0 < 1^2 = 1$.

4. $0 < 1 = aa^{-1} \Rightarrow (0 < a \wedge 0 < a^{-1}) \vee (a < 0 \wedge a^{-1} < 0)$.

5. $a < b \Rightarrow -b = a + (-a - b) < b + (-a - b) = -a$. $-b < -a \Rightarrow a = -(-a) < -(-b) = b$.

6. $a + c < b + c \Rightarrow a = a + c + (-c) < b + c + (-c) = b$.

7. $0 < c \wedge ac < bc \Rightarrow 0 < c^{-1} \wedge ac < bc \Rightarrow a = acc^{-1} < bcc^{-1} = b$.

8. Sei $c < 0$. Dann $0 < -c$ und folglich $(a < b \Leftrightarrow -ac = a(-c) < b(-c) = -bc \Leftrightarrow bc < ac)$.

9. Aus $0 < ab$ folgt $0 < (ab)^{-1}$, und weiter: $a < b \Leftrightarrow a(ab)^{-1} < b(ab)^{-1} \Leftrightarrow b^{-1} < a^{-1}$.

10. $a < b \Rightarrow 2a = a + a < a + b \wedge a + b < b + b = 2b \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a + b) < b$

Definition von a^p für $a \in \mathbb{R}^*$ und $p \in \mathbb{Z}$

Zunächst definieren wir a^n rekursiv für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1, \qquad a^{n+1} := a^n \cdot a$.

Dann setzen wir noch $a^{-n} := (a^n)^{-1}$, falls $n \geq 2$ und $a \neq 0$.

Es gelten die folgenden Rechenregeln (für alle $a, b \in \mathbb{R}^*$, $p, q \in \mathbb{Z}$):

(1) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$, (2) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, (3) $(a^p)^q = a^{pq}$, (4) $0 \leq a, b \;\&\; 1 \leq n \Rightarrow (a < b \Leftrightarrow a^n < b^n)$.

2.2 Lemma (Bernoullische Ungleichung).

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$, für alle reellen Zahlen $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion nach n:

1. $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

2. Wegen $x > -1$ gilt $1 + x > 0$. Nach I.V. gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Folglich $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$.

2.3 Satz (Binomischer Satz). $(x + y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion nach n:

I. $n = 0$: $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = \sum\limits_{i=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k$.

II.
$$\begin{aligned}
(x + y)^{n+1} &= (x + y) \cdot (x + y)^n \overset{\text{IV}}{=} (x + y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$
.

Bemerkung. Mittels 2.3 kann man Lemma 1.2 auch folgendermaßen beweisen: Sei $card(A) = n$. Dann gilt $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}_0(A) \cup \mathcal{P}_1(A) \cup \ldots \cup \mathcal{P}_n(A)$ (wobei die Mengen $\mathcal{P}_0(A), \ldots, \mathcal{P}_n(A)$ paarweise disjunkt sind) und folglich $card(\mathcal{P}(A)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n$.

Definition. Eine Menge D reeller Zahlen heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\forall x \in D(s \leq x)$. Jedes solche s heißt eine *untere Schranke* von D. Besitzt die Menge D eine *größte untere Schranke*, so wird diese das *Infimum von D* genannt und mit $\inf(D)$ bezeichnet:

$$s_0 = \inf(D) \ : \iff \forall x \in D(s_0 \leq x) \ \& \ \forall s \in \mathbb{R}(\forall x \in D(s \leq x) \Rightarrow s \leq s_0)$$
$$\iff \forall x \in D(s_0 \leq x) \ \& \ \forall y > s_0 \exists x \in D(x < y).$$

2.4 Satz. Jede nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum.

Beweis: Übungsaufgabe.

Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $s_0 \in \mathbb{R}$. Man nennt s_0 das *Maximum* bzw. *Minimum* von D (und schreibt $s_0 = \max(D)$ bzw. $s_0 = \min(D)$), falls s_0 das größte bzw. kleinste Element von D ist, d.h., falls
$s_0 \in D \ \& \ \forall x \in D(x \leq s_0)$ bzw. $s_0 \in D \ \& \ \forall x \in D(x \geq s_0)$ gilt.

Offenbar gilt:

(1) $s_0 = \max(D) \iff s_0 = \sup(D)$ und $s_0 \in D$;

(2) $s_0 = \min(D) \iff s_0 = \inf(D)$ und $s_0 \in D$;

(3) Jede endliche Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Beispiel: Sei $D := \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $D' := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$. Es ist $\sup(D) = \sup(D') = \max(D') = 1$, aber die Menge D besitzt kein Maximum.

2.5 Lemma.

Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt ein Maximum (bzw. Minimum).

Beweis:

Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert $a := \sup(M)$. Aus $a - \frac{1}{2} < a = \sup(M)$ folgt die Existenz eines $p \in M$ mit $a - \frac{1}{2} < p$. Offenbar ist $p = \max(M)$, denn: $q \in M \ \Rightarrow \ q \leq a < p + \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ q \leq p$.

2.6 Lemma.

(a) Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine natürliche Zahl n mit $a < n$. (Archimedisches Axiom) $[\forall x \exists n(x < n)]$

(b) Zu jeder reellen Zahl $a > 0$ gibt es $n \geq 1$ mit $\frac{1}{n} < a$. $[\ \forall x > 0 \exists n \geq 1(\frac{1}{n} < x)\ ]$

(c) Ist $0 < a \in \mathbb{R}$, so gibt es zu jedem $b \in \mathbb{R}$ ein n mit $b < a \cdot n$. $[\ \forall x > 0 \forall y \exists n(y < x \cdot n)\ ]$

(d) Ist $1 < a \in \mathbb{R}$, so gibt es zu jedem $b \in \mathbb{R}$ ein n mit $b < a^n$.

(e) Ist $0 < a < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n mit $a^n < \varepsilon$.

Beweis:

(a) Da $\mathbb{N}$ kein Maximum besitzt, ist $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt (L.2.5), d.h. $\forall x \exists n(x < n)$.

(b) $0 < a \overset{(a)}{\Rightarrow} \exists n(0 < \dfrac{1}{a} < n) \ \Rightarrow \ \exists n \geq 1(\dfrac{1}{n} < a)$.

(c) $0 < a \overset{(a)}{\Rightarrow} 0 < a \ \& \ \dfrac{b}{a} < n$ für ein $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ b < a \cdot n$.

(d) $1 < a \ \Rightarrow \ a-1 > 0 \ \& \ \dfrac{b}{a-1} < n$ für ein $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ b < 1 + n(a-1) \overset{2.2}{\leq} (1 + (a-1))^n = a^n$.

(e) $0 < a < 1 \ \Rightarrow \ 1 < \dfrac{1}{a} \overset{(c)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{\varepsilon} < \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ a^n < \varepsilon$.

2.7 Lemma. Ist $a > 0$, so existiert zu jedem $b \in \mathbb{R}$ genau ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \cdot a \leq b < (p+1) \cdot a$.

Beweis: Die Menge $M := \{p \in \mathbb{Z} : p \cdot a \leq b\}$ ist nach oben beschränkt (durch b/a). Ferner ist $M \neq \emptyset$, denn nach L.2.6c existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $-b < n \cdot a$, also $(-n) \cdot a < b$. Nach 2.5 existiert also $p := \max(M)$. Es folgt $p \cdot a \leq b < (p+1) \cdot a$. Ist umgekehrt $q \in \mathbb{Z}$ mit $q \cdot a \leq b < (q+1) \cdot a$, so muß $q = \max(M)$ sein.

2.8 Lemma. Zu je zwei reellen Zahlen $a < b$ existieren unendlich viele rationale Zahl r mit $a < r < b$.

Beweis: Offenbar reicht es, die Existenz wenigstens eines $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$ zu zeigen. Nach 2.6b gibt es ein $n \geq 1$ mit $\dfrac{1}{n} < b - a$. Nach 2.7 existiert $p \in \mathbb{Z}$ mit $\dfrac{p}{n} \leq a < \dfrac{p+1}{n}$. Es folgt $a < \dfrac{p}{n} + \dfrac{1}{n} < a + (b-a) = b$.

Definition (Intervalle in $\mathbb{R}$)

Für reelle Zahlen $a \leq b$ sei:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \wedge x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \wedge x < b\} = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)
$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ (ausgeartetes Intervall)

Analog definiert man $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$.

Allgemein nennt man eine Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ ein *Intervall*, wenn gilt $\forall x, y \in I (x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq I)$.

Lemma. $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn I eine Menge von einer der folgenden Arten ist:
$\mathbb{R}$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, \infty[$, $]a, \infty[$, $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ (mit $a \leq b$).

Beweis: Die eine Richtung ist trivial. Die andere Richtung beweisen wir nur für den Fall, daß $I \neq \emptyset$ nach oben und unten beschränkt ist. Sei $a := \inf(I)$, $b := \sup(I)$ und $I_0 := I \setminus \{a, b\}$. Dann gilt $I_0 =]a, b[$ $(z \in]a, b[\Rightarrow \exists x, y \in I (x < z < y) \Rightarrow z \in I_0)$ und folglich ist I eine der Mengen $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$.

Bemerkung. Lemma 2.8 kann nun auch folgendermaßen formuliert werden: $a < b \Rightarrow \mathit{card}(]a, b[\cap \mathbb{Q}) = \infty$.

Offenbar gelten die Körper- und Ordnungsaxiome alle auch in $\mathbb{Q}$. Die folgenden beiden Sätze zeigen jedoch, daß das Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{Q}$ nicht gilt, d.h., es gibt nichtleere nach oben beschränkte Mengen $M \subseteq \mathbb{Q}$, die kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzen.

2.9 Satz ($\sqrt{2}$ ist nicht rational).
Es gibt keine rationale Zahl a mit $a^2 = 2$.

Beweis indirekt:
Annahme: $a \in \mathbb{Q}$ und $a^2 = 2$.
Dann existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ $(q \neq 0)$ mit:
(1) $(p/q)^2 = 2$,
(2) p, q sind teilerfremd (d.h., der Bruch p/q kann nicht mehr weiter gekürzt werden).

Nun schließt man wie folgt:
(1) $\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2z$ für ein $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4z^2 = p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2z^2 = q^2 \Rightarrow q$ gerade. Widerspr. zu (2).

2.10 Satz.
Zu jedem $c \in \mathbb{R}_+$ existiert genau ein $a \in \mathbb{R}_+$ mit $a^2 = c$. Diese Zahl a bezeichnet man mit $\sqrt{c}$.

Beweis:
Die Eindeutigkeit folgt aus $(*)\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$.
Zur Existenz von $\sqrt{c}$: Für $c = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $c > 0$ und $D := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < c\}$.
$D \neq \emptyset$, denn $0 \in D$. D ist nach oben beschränkt, denn aus $x \in D$ folgt $x \leq 1$ oder $x < x^2 < c$, d.h. $\max\{1, c\}$ ist eine obere Schranke von D. Sei $a := \sup(D)$. Dann $a \geq 0$, da $0 \in D$.
Wir beweisen nun $a^2 = c$, indem wir die Annahmen $a^2 < c$ und $c < a^2$ jeweils zum Widerspruch führen.
Annahme: $a^2 < c$. Wir wollen zeigen: $\exists \varepsilon > 0[(a + \varepsilon)^2 < c]$. Für $0 < \varepsilon \leq 1$ gilt offenbar:
$(a + \varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 \leq a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon$ und $(a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon < c \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{c-a^2}{2a+1})$.
Für $\varepsilon := \min\{1, \frac{1}{2} \cdot \frac{c-a^2}{2a+1}\}$ haben wir deshalb $a < a + \varepsilon \in D$, d.h. a ist keine obere Schranke von D. *Widerspruch* zu $a = \sup(D)$.

Annahme: $c < a^2$. Analog wie im ersten Fall erhält man ein $\varepsilon > 0$, so daß $c < (a - \varepsilon)^2$ & $0 \leq a - \varepsilon$.
Mit $(*)$ folgt daraus $\forall x(a - \varepsilon < x \Rightarrow x \notin D)$, d.h. $a - \varepsilon$ ist eine obere Schranke von D, und somit a nicht die *kleinste* obere Schranke von D. *Widerspruch zu* $a = \sup(D)$.

2.11 Lemma. Die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.
Beweis: Trivialerweise ist $\sqrt{2}$ eine obere Schranke von M. Mit 2.8 folgt außerdem $\forall y < \sqrt{2} \exists x \in M(y < x)$. Also gilt sogar $\sqrt{2} = \sup(M)$. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ folgt daraus die Behauptung.

Definition (Absolutbetrag).
Für $a \in \mathbb{R}$ sei $|a| := \begin{cases} a & \text{, falls } a \geq 0 \\ -a & \text{, falls } a < 0 \end{cases}$
Erläuterung: $|a|$ ist der Abstand des Punktes a vom Nullpunkt. $|a - b|$ ist der Abstand der Punkte a, b.

Folgerungen.

(A1) $0 \leq |a| = \max\{a, -a\}$ und $(\,|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0\,)$
(A2) $|-a| = |a|$ und $|a - b| = |b - a|$
(A3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
(A4) $|a/b| = |a|/|b|$
(A5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
(A6) $|\sum_{i=n_0}^{n} a_i| \leq \sum_{i=n_0}^{n} |a_i|$
(A7) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ und $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$
(A8) Für $\varepsilon \geq 0$ gilt: $\{x : |x - a| \leq \varepsilon\} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ und $\{x : |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Beweise:
(A3) Fall 1: $a \geq 0 \wedge b \geq 0$. Dann $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.
Fall 2: $a < 0 \wedge b < 0$. Dann $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a| \cdot |b|$.
Fall 3: $a < 0 \wedge b \geq 0$. Dann $|ab| = -(ab) = (-a)b = |a| \cdot |b|$. Fall 4: $a \geq 0 \wedge b < 0$. Analog zu Fall 3.
(A4) $a = \frac{a}{b} \cdot b \Rightarrow |a| = |\frac{a}{b}| \cdot |b| \Rightarrow$ Beh.
(A5) Fall 1: $a + b \geq 0$. Dann $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$.
Fall 2: $a + b < 0$. Dann $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$.
(A6), (A7) Übungsaufgabe.
(A8) $|x - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \max\{x - a, a - x\} \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - x \leq \varepsilon \wedge x - a \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq x \wedge x \leq a + \varepsilon$.

§3 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Definition. Eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, nennt man eine *Folge (reeller Zahlen)* und bezeichnet sie mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, .a_2, \ldots)$.
Die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißen *Werte* oder *Glieder* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ heißt *Wertemenge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung. Verschiedene Folgen können dieselbe Wertemenge haben; z.B. haben die Folgen $(0, 1, 1, 1, \ldots)$ und $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ beide die Wertemenge $\{0, 1\}$.

Definition (Monotone Folgen). Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt
(i) *[streng] monoton wachsend*, falls $a_n \le a_{n+1}$ $[a_n < a_{n+1}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(ii) *[streng] monoton fallend*, falls $a_n \ge a_{n+1}$ $[a_n > a_{n+1}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $K \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß $|a_n| \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$ (in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *mit* $|a - a_n| < \varepsilon$ *für alle* $n \ge n_\varepsilon$.

Kurz: $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \ge n_\varepsilon (|a - a_n| < \varepsilon)$.

Man nennt a dann den *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *divergent*, falls sie nicht konvergent ist,
d.h. wenn es kein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt.

3.1 Lemma. (Eindeutigkeit des Grenzwerts)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ & $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a' \implies a = a'$.
Beweis:
Wir zeigen $|a - a'| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$; daraus folgt dann $a = a'$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Wegen $\lim_n a_n = a$ existiert ein n_1 mit $\forall n \ge n_1 (|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2})$. Wegen $\lim_n a_n = a'$ existiert ein n_2 mit $\forall n \ge n_2 (|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2})$. Für $n \ge \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann $|a - a'| \le |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

3.2 Lemma. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < 1$ für alle $n \ge n_1$. Es folgt $|a_n| = |a + (a_n - a)| \le |a| + |a_n - a| < |a| + 1$ für alle $n \ge n_1$ und weiter $|a_n| \le \max\{|a_0|, ..., |a_{n_1}|, |a| + 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele.
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Nach 2.6b existiert ein n_ε mit $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Es folgt $|1 - \frac{n}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ für alle $n \ge n_\varepsilon$.

(2) Ist $a_n = a$ für alle $n \geq n_0$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. [Bew.: $\forall\varepsilon > 0 \forall n \geq n_0(|a - a_n| = 0 < \varepsilon)$.]

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Bew.:

Für $n \geq 4$ gilt $n^2 \leq 2^n$ (siehe Übungen) und folglich $\dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach 2.6 existiert dann ein $n_\varepsilon \geq 4$ mit $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Es folgt $|0 - \dfrac{n}{2^n}| = \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, falls $|a| < 1$. [siehe 2.6e]

(5) Für $|a| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=0}^{n} a^k\big) = \dfrac{1}{1-a}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=m}^{n} a^k\big) = \dfrac{a^m}{1-a}$.

Bew.:

Sei $s_n := \sum_{k=0}^n a^k$. Nach Aufgabe 3c gilt $s_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ und somit $\big|\dfrac{1}{1-a} - s_n\big| = \dfrac{1}{1-a} \cdot |a^{n+1}|$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann auch $(1 - a)\varepsilon > 0$, und nach (4) existiert ein n_ε mit $|a^{n+1}| < (1 - a)\varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Es folgt $\left|\dfrac{1}{1-a} - s_n\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

Wegen $\sum\limits_{k=m}^{n} a^k = a^m \sum\limits_{k=0}^{n-m} a^k$ (für $n \geq m$) folgt mit L.3.4a $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=m}^{n} a^k\big) = a^m \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=0}^{n-m} a^k\big) = \dfrac{a^m}{1-a}$.

Abkürzung. $\underset{\mathsf{fast}}{\forall} n\, \mathcal{A}(n) \;:\Leftrightarrow\; \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mathcal{A}(n)$ ($\mathcal{A}(n)$ *gilt für fast alle* n) .

Bemerkungen.

(a) $\underset{\mathsf{fast}}{\forall} n\, \mathcal{A}(n)$ & $\underset{\mathsf{fast}}{\forall} n\, \mathcal{B}(n) \implies \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(\mathcal{A}(n)$ & $\mathcal{B}(n))$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|a - a_n| < \varepsilon)$.

Definition.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *Nullfolge* (in Zeichen: $\mathsf{NF}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) $:\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bemerkungen.

(a) $\mathsf{NF}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \mathsf{NF}\big(|a_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \mathsf{NF}\big(a-a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) $K > 0$ & $\forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|a_n| < K \cdot \varepsilon) \Rightarrow \mathsf{NF}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3 Lemma (Eigenschaften von Nullfolgen).

(a) $\mathsf{NF}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ & $\underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|b_n| \leq a_n) \implies \mathsf{NF}(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $\mathsf{NF}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ & $\mathsf{NF}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \implies \mathsf{NF}(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt & $\mathsf{NF}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \implies \mathsf{NF}(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis:

(a) $\forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|a_n| < \varepsilon)$ & $\underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|b_n| \leq a_n \leq |a_n|) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|b_n| \leq |a_n| < \varepsilon)$.

(b) $\forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|a_n| < \varepsilon)$ & $\forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|b_n| < \varepsilon) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < 2\varepsilon)$.

(c) $\forall n(|a_n| < K)$ & $\forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|b_n| < \varepsilon) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \underset{\mathsf{fast}}{\forall} n(|a_n b_n| < K\varepsilon)$.

3.4 Lemma (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, so konvergieren auch die Folgen $\big(a_n+b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(a_n-b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(a_n\cdot b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(|a_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\diamond b_n)=\big(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\big)\diamond\big(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\big)$ für $\diamond\in\{+,-,\cdot\}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\big|\lim\limits_{n\to\infty}a_n\big|$.

Beweis:

Sei $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ und $\lim_{n\to\infty}b_n=b$. Dann $\mathsf{NF}(a-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathsf{NF}(b-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(*)$.

(a) 1. $(a\pm b)-(a_n\pm b_n)=(a-a_n)\pm(b-b_n)$. Mit $(*)$ und Lemma 3.3b folgt daraus $\mathsf{NF}\big((a\pm b)-(a_n\pm b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$.

2. Es ist $ab-a_nb_n=ab-a_nb+a_nb-a_nb_n=b(a-a_n)+a_n(b-b_n)$. Nach Lemma 3.1 ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Mit $(*)$ und Lemma 3.3b,c folgt nun $\mathsf{NF}(ab-a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab$.

(b) Nach §2, (A7) gilt $\big||a|-|a_n|\big|\le|a-a_n|$. Mit $(*)$ und 3.3a folgt daraus $\mathsf{NF}\big(|a|-|a_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Korollar.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ \&\ \diamond\in\{+,-,\cdot\}\implies\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\diamond b)=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)\diamond b$ und $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^k=a^k$.

Beispiel: Aus $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(5-\dfrac{3n}{n+1}+\dfrac{n}{2^n})=5-3\cdot1+0=2$.

Kleine Verallgemeinerung: Sei $n_0\in\mathbb{N}$. Dann nennt man eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n\ge n_0$ eine reelle Zahl a_n zuordnet, ebenfalls eine *Folge (reeller Zahlen)* und bezeichnet sie mit $(a_n)_{n\ge n_0}$.

Bemerkung. Das Konvergenzverhalten einer Folge ist unabhängig von ihren Anfangswerten: Gilt $a_n=b_n$ für fast alle n, so sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder beide divergent oder konvergieren beide gegen denselben Grenzwert. — Die Grenzwertdefinition und alle bisher bewiesenen Aussagen über Konvergenz von Folgen gelten deshalb auch für Folgen der Art $(a_n)_{n\ge n_0}$.

3.4 Lemma (Fortsetzung)

(c) Konvergieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ist $b:=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$,

so gilt $b_n\neq0$ für fast alle n und es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

Beweis:

Wegen $\lim_{n\to\infty}b_n=b\neq0$ gilt $\underset{\mathsf{fast}}{\forall}n(|b-b_n|<\frac12|b|)$. Daraus folgt $\frac12|b|<|b_n|$ und weiter $\left|\dfrac{1}{b_nb}\right|<\dfrac{2}{b^2}$ für fast alle n. Ferner gilt $\dfrac1b-\dfrac1{b_n}=\dfrac{1}{b_nb}(b_n-b)$, falls $b_n\neq0$. Mit 3.3c folgt nun $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac1b$ und weiter mit 3.4a die Behauptung.

Beispiel: Bestimmung von $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ mit $a_n:=\dfrac{3n^2+7n}{n^2-2}$. Für $n\ge1$ gilt $a_n=\dfrac{3+7/n}{1-2/n^2}$.

Aus $\lim\limits_{n\to\infty}\frac1n=0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac7n)=3+7\cdot0=3$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})=1-2\cdot0\cdot0=1$; also $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac31=3$.

Schreibweise: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

3.5 Lemma.

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (bzw. fallend) und beschränkt,

so konvergiert sie gegen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (bzw. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$).

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Dann existiert $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon < a$ und es existiert ein n_ε mit $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, folgt $\forall n \geq n_\varepsilon (a_{n_\varepsilon} \leq a_n)$. Also ist $a - \varepsilon < a_n \leq a$ und somit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

3.6 Lemma. Sei $0 < a \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$, $x_0 > 0$ und $x_{n+1} = x_n \cdot \Big(1 + \dfrac{a - x_n^k}{k \cdot x_n^k}\Big)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^k = a$.

Beweis:

Offenbar ist $x_n > 0$ für alle n (Induktion nach n). Es gilt $\dfrac{a - x_n^k}{kx_n^k} > -\dfrac{1}{k} > -1$ und deshalb, nach L.2.2, $x_{n+1}^k \geq x_n^k \Big(1 + k\dfrac{a - x_n^k}{kx_n^k}\Big) = a$. Daraus folgt weiter $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \geq 1$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist also monoton fallend und beschränkt; somit existiert $x := \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Aus $0 < a \leq x_{n+1}^k$ folgt $0 < \min\{1, a\} \leq x_{n+1}$ (für alle n) und somit $0 < x$. Aus $x_{n+1} = x_n \cdot \Big(1 + \dfrac{a - x_n^k}{k \cdot x_n^k}\Big)$ und $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$ folgt nun mit L.3.4 $x = x \cdot \big(1 + \dfrac{a - x^k}{k \cdot x^k}\big)$; also $a - x^k = 0$.

Definition. Sei $k \geq 1$. Nach Lemma 3.6 existiert zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ genau ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^k = a$; dieses x wird mit $\sqrt[k]{a}$ (k*-te Wurzel aus* a) bezeichnet.

Definition von a^r für $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$

Ist $r = \dfrac{z}{k}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $2 \leq k \in \mathbb{N}$ und z, k teilerfremd, so sei $a^r := \sqrt[k]{a^z}$.

Folgerung. $a > 0 \;\&\; x \in \mathbb{Z} \;\&\; 1 \leq m \in \mathbb{N} \implies a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{a^x}$.

Beweis: Sei $b := a^{\frac{x}{m}}$ und $\frac{x}{m} = \frac{z}{k}$ mit z, k teilerfremd. Dann $b = \sqrt[k]{a^z}$, und es existiert ein n, so daß $m = n \cdot k$ und $x = n \cdot z$. Es folgt $b^k = a^z$ und weiter $b^m = (a^z)^n = a^x$, d.h. $b = \sqrt[m]{a^x}$.

Rechenregeln. Für $x, y \in \mathbb{Q}$ und $0 < a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, (2) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$, (3) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$, (4) $0 < x \implies (a < b \Leftrightarrow a^x < b^x)$.

Zu Lemma 3.6:

Fehlerabschätzung im Fall $k = 2$: $\sqrt{a} \leq x_{n+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{x_{n+1}} = \sqrt{a} \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{x_{n+1}} \leq \sqrt{a} \leq x_{n+1}$

Sei $d_n := x_n - \dfrac{a}{x_n}$. Dann $d_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + a}{2x_n} - \dfrac{2ax_n}{x_n^2 + a} = \dfrac{x_n}{2(x_n^2 + a)} \cdot d_n^2 \leq \dfrac{1}{2x_n} d_n^2$.

Berechnung von $\sqrt{2}$: $x_0 := 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 2x_n^{-1})$.

$x_1 = 0.5(1 + 2) = 1.5$, $x_2 = 0.5(1.5 + 2 \cdot \frac{2}{3}) = \dfrac{17}{12} = 1.41\overline{6}$, $x_3 = 0.5(\dfrac{17}{12} + 2 \cdot \dfrac{12}{17}) = \dfrac{577}{408} = 1.414215....$

$x_3 = \dfrac{577}{408} \;\Rightarrow\; \dfrac{2 \cdot 408}{577} \leq \sqrt{2} \leq \dfrac{577}{408} \;\Rightarrow\; 1.414211 \leq \sqrt{2} \leq 1.414216.$

3.7 Lemma. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
(a) $c < a$ [bzw. $a < c$] $\Longrightarrow$ $c < a_n$ [bzw. $a_n < a$] für fast alle n.
(b) $a_n \leq b_n$ für unendlich viele n $\Longrightarrow$ $a \leq b$.

Beweis:

(a) Sei $c < a$. Dann ist $\varepsilon := a - c > 0$, und es gilt $a_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, also $c = a - \varepsilon < a_n$ für fast alle n.
(b) $b < a$ & $c := \frac{1}{2}(a+b) \overset{(a)}{\Rightarrow} \underset{\text{fast}}{\forall} n(b_n < c)$ & $\underset{\text{fast}}{\forall} n(c < a_n) \Rightarrow \underset{\text{fast}}{\forall} n(b_n < a_n)$. *Widerspruch.*

Definition (Teilfolgen, Häufungspunkte).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann nennt man die Folge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$a \in \mathbb{R}$ heißt ein *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Bemerkungen.
1. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, d.h. für eine konvergente Folge ist der Grenzwert ihr einziger Häufungspunkt.

2. a ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{n : |a - a_n| < \varepsilon\}$ unendlich ist.

Beispiele.
1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ (oder $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$) hat die Häufungspunkte 1 und -1, denn $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$.
2. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt, denn jede ihrer Teilfolgen ist unbeschränkt.
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2k} = k$ und $a_{2k+1} = \dfrac{1}{k+1}$ ist unbeschränkt und hat den Häufungspunkt 0.

3.8 Lemma. Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Ein $n \in \mathbb{N}$ heiße *Gipfelpunkt*, wenn $\forall m > n(a_n > a_m)$.

Fall 1: Es gibt unendliche viele Gipfelpunkte. Seien $n(0) < n(1) < n(2) < \ldots$ sämtliche Gipfelpunkte.
Dann gilt $a_{n(0)} > a_{n(1)} > a_{n(2)} > \ldots$, d.h. $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monotone Teilfolge.

Fall 2: Es gibt nur endlich viele Gipfelpunkte.
Dann definieren wir rekursiv $n(0) < n(1) < n(2) < \ldots$ mit $a_{n(0)} \leq a_{n(1)} \leq a_{n(2)} \leq \ldots$:

(i) $n(0) := \min\{m : \forall k(k \text{ Gipfelpunkt} \Rightarrow k < m)\}$;
(ii) $n(k{+}1) := \min\{m > n(k) : a_{n(k)} \leq a_m\}$. [Beachte: $n(0) \leq n(k) \Rightarrow n(k)$ kein Gipfelpunkt.]

3.9 Satz (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach 3.8 existiert eine monotone Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
Diese ist natürlich auch beschränkt, also konvergent.

Definition.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt: $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_\varepsilon (|a_n - a_m| < \varepsilon)$.

3.10 Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis:
I. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein n_ε mit $a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.
Daraus folgt $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_\varepsilon$.

II. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall m, n \geq m_1(|a_n - a_m| < 1)$. Es folgt $|a_n| - |a_{m_1}| < 1$, also $|a_n| < 1 + |a_{m_1}|$ für alle $n \geq m_1$; d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach 3.9 besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n(k)}$. Wir zeigen nun $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert n_ε mit $\forall m, n \geq n_\varepsilon(|a_m - a_n| < \varepsilon)$. Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n(k)} = a$ gibt es ein $k \geq n_\varepsilon$ mit $|a - a_{n(k)}| < \varepsilon$. Dann auch $n(k) \geq n_\varepsilon$ und folglich $|a - a_n| \leq |a - a_{n(k)}| + |a_{n(k)} - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$.

3.11 Lemma.
Ist $0 < q < 1$ und gilt $\forall n(\,|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q \cdot |a_{n+1} - a_n|\,)$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Beweis:
Durch Induktion nach n zeigt man: (1) $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$, (2) $a_{m+n} - a_m = \sum\limits_{k=m}^{m+n-1} (a_{k+1} - a_k)$.
Daraus folgt: (3) $|a_{m+n} - a_m| \leq \sum\limits_{k=m}^{m+n-1} q^k \cdot |a_1 - a_0| \leq |a_1 - a_0| \cdot \dfrac{q^m}{1-q}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein m_ε mit $|a_1 - a_0| \cdot \dfrac{q^m}{1-q} < \varepsilon$ für alle $m \geq m_\varepsilon$.
Mit (3) folgt daraus $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq m_\varepsilon$.

Beispiel.
Sei $a_0 := 2$, $a_{n+1} := 1 + \dfrac{1}{a_n}$. Durch Induktion nach n folgt $\forall n(\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2)$ und weiter
$|a_{n+2} - a_{n+1}| = |(1 + \dfrac{1}{a_{n+1}}) - (1 + \dfrac{1}{a_n})| = \dfrac{|a_n - a_{n+1}|}{a_n \cdot a_{n+1}} \leq \dfrac{4}{9} \cdot |a_{n+1} - a_n|$.

Nach 3.10, 3.11 und 3.7b existiert also $a := \lim_{n\to\infty} a_n \geq \frac{3}{2}$.

Es folgt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{a_n}) = 1 + \dfrac{1}{a}$ und somit $a^2 - a - 1 = 0$, $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$, $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen ∞ [bzw. $-\infty$],
wenn gilt $\forall K > 0 \underset{\text{fast}}{\forall} n(K < a_n)$ [bzw. $\forall K > 0 \underset{\text{fast}}{\forall} n(a_n < -K)$].
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ [bzw. $\lim_{n\to\infty} = -\infty$].
Statt bestimmt divergent sagt man auch *uneigentlich konvergent.*

Beispiele:

(1) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞.

(2) Die Folge $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.

(3) Die Folge $((-1)^n \cdot n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Sie ist aber nicht bestimmt divergent.

3.12 Lemma.

(a) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, so $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

(b) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, so $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(a_n \neq 0)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(a_n > 0)$ [bzw. $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(a_n < 0)$], so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ [bzw. $-\infty$].

Beweis:

(a) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ und $K > 0$. Für fast alle n gilt dann $a_n < -K$ und somit $K < -a_n = |a_n|$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(|a_n| > \dfrac{1}{\varepsilon})$ und folglich $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(|\dfrac{1}{a_n}| < \varepsilon)$.

(c) Gelte $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(a_n < 0)$ und sei $K > 0$. Dann $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(0 < -a_n = |a_n| < \dfrac{1}{K})$ und folglich $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(\dfrac{1}{a_n} < -K)$.

§4 Unendliche Reihen

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.
Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen* $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$,
heißt eine *(unendliche) Reihe* und wird mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.
Man nennt diesen Grenzwert auch die *Summe* der Reihe.
Es gilt also: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\big) = a$.

Analog definiert man $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Beispiele:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, denn $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, falls $|x| < 1$ (Geometrische Reihe)
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergiert, falls $2 \le p \in \mathbb{N}$.

   Beweis: Aus $\forall k \ge 1 (k^2 \ge \frac{k(k+1)}{2})$ folgt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2\frac{n}{n+1} < 2$.

   Die Folge $\big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt und monoton wachsend.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (Harmonische Reihe)

   Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \sum\limits_{m=1}^{n} \sum\limits_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k} > \sum\limits_{m=1}^{n} 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

4.1 Lemma. Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$, und es gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
Beweis:
Sei $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $d_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ und $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$. Nach Voraussetzung konvergieren die Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mit Lemma 3.4a folgt daraus die Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Ebenso erhält man die übrigen Behauptungen.

4.2 Lemma.
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert.
(b) Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, und folglich $\lim\limits_{n_0\to\infty} \big(\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n\big) = 0$.
Beweis:
Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $t_{n_0,n} := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$. Für $n \ge n_0$ gilt dann $s_n = s_{n_0-1} + t_{n_0,n}$. Mit Lemma 3.4 folgt daraus: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\iff$ $(t_{n_0,n})_{n\ge n_0}$ konvergent; und im Fall der Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s_{n_0-1} + \lim_{n\to\infty} t_{n_0,n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Korollar. Ist $a_n = b_n$ für fast alle n, so gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent.

Beweis:

Ist $a_n = b_n$ für alle $n \geq n_0$, so gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konv.

4.3 Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen).

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall m \geq n_\varepsilon \forall n \geq m(\big| \sum\limits_{k=m}^{n} a_k \big| < \varepsilon)$ (CK).

Beweis:

Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Dann gilt $\big| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \big| = |s_n - s_m|$ (für $n \geq m$), und folglich:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\overset{3.10}{\iff}$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\iff$ (CK).

Korollar. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis: Nach 4.3 gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall m \geq n_\varepsilon (|a_m| = |\sum_{k=m}^{m} a_k| < \varepsilon)$.

Bemerkung: Es gibt Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert (z.B. $a_n = \frac{1}{n+1}$).

4.4 Lemma. Gilt $\forall n(a_n \geq 0)$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist. Im Fall der Konvergenz gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Beweis:

Wegen $\forall n(a_n \geq 0)$ ist die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Mit 3.2 und 3.5 folgt daraus die Behauptung.

Abkürzung: Gelte $\forall n(a_n \geq 0)$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ $:\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Definition (Intervallschachtelung)

Eine Folge von Intervallen $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Intervallschachtelung*, wenn gilt:

(i) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle n;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

4.5 Satz.

Ist $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, so konvergieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert x. Ferner ist $a_n \leq x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(b_0, a_0, b_1, a_1, b_2, \ldots)$ konvergiert ebenfalls gegen x.

Beweis:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt (durch b_0); also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und es gilt $\forall n(a_n \leq x)$. Ebenso erhält man $\lim_n b_n = y$ mit $\forall n(y \leq b_n)$. Ferner gilt $0 = \lim_n(b_n - a_n) = y - x$, also $x = y$. Bleibt zu zeigen $\lim_k x_k = x$ für $x_{2n} := b_n$, $x_{2n+1} := a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_n a_n = x = \lim_n b_n$ existiert ein n_ε mit $|x - a_n| < \varepsilon$ & $|x - b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Es folgt $|x - x_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq 2n_\varepsilon + 1$.

4.6 Satz (Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ gegen ein x mit $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k \le x \le \sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis:
Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, $c_n := s_{2n+1}$, $d_n := s_{2n}$. Dann gilt:
$c_n \le c_n + a_{2n+2} - a_{2n+3} = c_{n+1} \le c_n + a_{2n+2} = d_{n+1} = d_n - a_{2n+1} + a_{2n+2} \le d_n$ und $d_n - c_n = a_{2n+1}$.
Also ist $\big([c_n, d_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.
Nach 4.5 konvergiert die Folge $(d_0, c_0, d_1, c_1, \ldots) = (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots)$ gegen ein x mit $c_n \le x \le d_n$.
Beispiel: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} \ldots$ konvergiert gegen ein $x \in [1 - \frac{1}{2}, 1]$.

Definition (Absolute Konvergenz)
Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

4.7. Satz
Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinn,
und es gilt $\big|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\big| \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.
Beweis:
I. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konv. $\overset{4.3}{\Longrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall m \ge n_\varepsilon \forall n \ge m(|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| \le \sum\limits_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon)$ $\overset{4.3}{\Longrightarrow}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.
II. Aus $\forall n(-a_n, a_n \le |a_n|)$ folgt mit 3.7b $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $-\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, und daraus die Behauptung.

4.8 Satz (Konvergenzkriterien).

(a) *Majorantenkriterium.* Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ und gilt $\underset{\text{fast}}{\forall} n(|a_n| \le c_n)$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Man nennt dann $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ eine *Majorante* von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) *Quotientenkriterium.*
Ist $0 < q < 1$ und gilt $\underset{\text{fast}}{\forall} n\big(a_n \ne 0 \;\&\; \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q\big)$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

(c) *Wurzelkriterium.* Ist $0 < q < 1$ und gilt $\underset{\text{fast}}{\forall} n\big(\sqrt[n]{|a_n|} \le q\big)$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis:
(a) Vorauss. $\overset{4.3}{\Rightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall m \ge n_\varepsilon \forall m \ge n(\sum\limits_{k=m}^{n} |a_k| \le \sum\limits_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon)$ $\overset{4.3}{\Rightarrow}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.
(b) Gelte $a_n \ne 0$ und $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q$ für alle $n \ge n_0$. Daraus folgt $\forall n \ge n_0(\,|a_n| \le \lambda \cdot q^n\,)$, wobei $\lambda := |a_{n_0}| \cdot q^{-n_0}$.
Die konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda q^n$ ist also eine Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
(c) Vorauss. $\Rightarrow$ $\underset{\text{fast}}{\forall} n(|a_n| \le q^n)$ $\overset{\text{wie bei (b)}}{\Longrightarrow}$ Beh.

Korollar. Konvergiert die Folge $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\theta \in \mathbb{R}_+$, so gilt:
(i) $\theta < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut; (ii) $\theta > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

(Im Fall $\theta = 1$, kann die Reihe konvergent oder divergent sein.)

Beweis:

(i) Wir wählen ein q mit $\theta < q < 1$. Dann gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ bzw. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n.

(ii) In diesem Fall gilt $1 \leq \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ bzw. $1 \leq \sqrt[n]{|a_n|}$ für fast alle n. Es folgt $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}|$ bzw. $1 \leq |a_n|$ für fast alle n. Folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und somit $\sum_n a_n$ divergent.

Beispiele.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, denn (für $x \neq 0$) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert, denn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2}$.
3. Sei $a_n := \frac{1}{n}$, $b_n := \frac{1}{n^2}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^2 = 1$.
   Aber die Reihe $\sum a_n$ divergiert, während $\sum b_n$ konvergiert.
   Es ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$.
4. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \begin{cases} a^{n-1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ a^{n+1} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$ $(0 < a < 1)$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, während das Quotientenkriterium keine Entscheidung liefert: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, aber $|a_{n+1}/a_n|$ ist abwechselnd a^3 und $a^{-1} > 1$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \ln 2$
7. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots = \frac{\pi}{4}$

Bemerkungen.

(a) Aus $\underset{\text{fast}}{\forall} n(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1)$ bzw. $\underset{\text{fast}}{\forall} n(\sqrt[n]{|a_n|} < 1)$ kann man nicht auf Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ schließen (z.B.: Harmonische Reihe).

(b) Das Quotienten- bzw. Wurzelkriterium ist eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe (z.B.: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

(c) Liefert das Quotientenkriterium Konvergenz, so auch das Wurzelkriterium. Die Umkehrung dieser Aussage ist i.a. falsch (siehe obiges Beispiel 4).

Definition.

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt, so sei $\sup(D) := \infty$ (bzw. $\inf(D) := -\infty$).

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gelte $-\infty < x$ und $x < \infty$.

Definition (Limes superior, Limes inferior)

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$, $\qquad \liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$.

4.9 Lemma.

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ der größte Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n < c \;\Rightarrow\; a_n < c$ für fast alle n.

(c) $c < \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \;\Rightarrow\; c < a_n$ für unendlich viele n.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \;\Rightarrow\; \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Analoge Aussagen gelten für $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: siehe Übungen.

Definition. Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ nennt man eine *Potenzreihe* (mit dem *Mittelpunkt* 0),

und $r := \sup\{|x| : \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ heißt ihr *Konvergenzradius*.

4.10 Satz.

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe und r ihr Konvergenzradius. Sei ferner $s := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) $|x| < r \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |n a_n x^n|$ konvergieren.

(b) $r < |x| \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergiert.

(c) $r = \dfrac{1}{s}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \alpha$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$ (wobei $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$) $\implies r = \dfrac{1}{\alpha}$.

In diesem Zusammenhang sei $\dfrac{1}{\infty} := 0$ und $\dfrac{1}{0} := \infty$.

Beweis:

Wir beweisen zunächst (a)' und (b)', i.e. (a) und (b) mit $1/s$ an Stelle von r.

Daraus folgt dann $r = 1/s$ und somit (a),(b),(c).

(a)' $0 < |x| < 1/s \;\Rightarrow\; s < q/|x|$ für ein $q < 1 \overset{4.9b}{\Rightarrow} \underset{\text{fast}}{\forall} n(\sqrt[n]{|a_n|} < q/|x|) \;\Rightarrow\; \underset{\text{fast}}{\forall} n(\sqrt[n]{|a_n x^n|} < q)$ $(*)$.

$p := \frac{1}{2}(q+1) \;\Rightarrow\; q/p < 1 < 1/p \;\Rightarrow\; \underset{\text{fast}}{\forall} n(\sqrt[n]{n} < 1/p) \overset{(*)}{\Rightarrow} \underset{\text{fast}}{\forall} n(\sqrt[n]{|n a_n x^n|} < q/p < 1)$.

(b)' $\dfrac{1}{s} < |x| \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{|x|} < s \overset{4.9c}{\Rightarrow} \{n : \dfrac{1}{|x|} < \sqrt[n]{|a_n|}\} = \{n : 1 < \sqrt[n]{|a_n x^n|}\} = \{n : 1 < |a_n x^n|\}$ ist unendlich.

(d) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \alpha \in \mathbb{R}_+$ und $|x| > 0$. Dann $\lim_n \dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \alpha\cdot|x|$, und mit dem Korollar zu 4.7 folgt:

$\sum a_n x^n$ konvergiert absolut für $\alpha\cdot|x| < 1$, und divergiert für $\alpha\cdot|x| > 1$. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$ und $|x| > 0$,

so $0 < |a_n x^n| \le |a_{n+1} x^{n+1}|$ für fast alle n; also divergiert $\sum a_n x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \overset{4.9d+4.10c}{\Rightarrow} r = 1/\alpha$.

4.11 Satz (Cauchy-Produkt von Reihen).

Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent, und es sei $c_n := \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\big)\cdot\big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\big)$.

Beweis:

$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$, $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\overline{A}_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $\overline{A} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$; analog seien $B_n, B, \overline{B}_n, \overline{B}$ definiert.

Dann gilt: $A\cdot B = \lim_{n\to\infty}(A_n\cdot B_n)$ und $\overline{A}\cdot\overline{B} = \lim_{n\to\infty}(\overline{A}_n\cdot\overline{B}_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\overline{A}_n\cdot\overline{B}_n)$.

Ferner gilt: $\sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i+j\le n} a_i b_j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j$.

I. Absolute Konvergenz: $\sum_{k=0}^n |c_k| \le \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} |a_i b_j| \le \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_i b_j| = \overline{A}_n \cdot \overline{B_n} \le \overline{A} \cdot \overline{B}$.

II. $\sum_{n=0}^\infty c_n = A \cdot B$:

HS: Für $n \ge 2m$ gilt $|\sum_{k=0}^n c_k - A_m \cdot B_m| \le \overline{A}_n \cdot \overline{B}_n - \overline{A}_m \cdot \overline{B}_m$.

Beweis: $|\sum\limits_{k=0}^n c_k - A_m \cdot B_m| = |\sum\limits_{i=0}^n \sum\limits_{j=0}^{n-i} a_i b_j - \sum\limits_{i=0}^m \sum\limits_{j=0}^m a_i b_j| = |\sum\limits_{i=0}^m \sum\limits_{j=m+1}^{n-i} a_i b_j + \sum\limits_{i=m+1}^n \sum\limits_{j=0}^{n-i} a_i b_j| \le$

$\le \sum\limits_{i=0}^m \sum\limits_{j=m+1}^n |a_i b_j| + \sum\limits_{i=m+1}^n \sum\limits_{j=0}^n |a_i b_j| = \sum\limits_{i=0}^n \sum\limits_{j=0}^n |a_i b_j| - \sum\limits_{i=0}^m \sum\limits_{j=0}^m |a_i b_j| = \overline{A}_n \cdot \overline{B}_n - \overline{A}_m \cdot \overline{B}_m$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein m mit $|A \cdot B - A_m \cdot B_m| < \varepsilon$ und $|\overline{A}_n \cdot \overline{B}_n - \overline{A}_m \cdot \overline{B}_m| < \varepsilon$ für $n \ge m$.

Mit HS folgt daraus $|\sum_{k=0}^n c_k - A \cdot B| < 2\varepsilon$ für $n \ge 2m$.

Beispiel. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Voraussetzung der *absoluten* Konvergenz von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ in Satz 4.11 notwendig ist.

Sei $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Ferner gilt $c_n = \sum\limits_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum\limits_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}$.

Wir zeigen nun, daß $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist und folglich $\sum\limits_{n=0}^\infty c_n$ nicht konvergiert.

$(n+2)^2 = (n+2 - (k+1) + k + 1)^2 \ge 2(n + 2 - (k+1))(k+1) = 2(n - k + 1)(k + 1) \Rightarrow$
$\frac{2}{(n+1)^2} \le \frac{1}{(n-k+1)(k+1)} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n+2} \le \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}$ $(k \le n) \Rightarrow (n+1)\frac{\sqrt{2}}{n+2} \le |c_n|$.

Definition (Umordnung).

Ist $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv[†], so heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^\infty a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n$.

4.12 Satz. Ist $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit dem Grenzwert a, so konvergiert jede Umordnung dieser Reihe ebenfalls gegen a.

Beweis:

Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $\varepsilon > 0$. Da $\sum\limits_{n=0}^\infty |a_n|$ konvergiert, existiert ein n_ε mit $\forall m \ge n_\varepsilon \forall n {\ge} m (\sum\limits_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon)$.

Wegen $\sum_{n=0}^\infty a_n = a$ existiert ein $m_0 \ge n_\varepsilon$ mit $\left|a - \sum_{k=0}^{m_0} a_k\right| < \varepsilon$. Nun wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\{0, ..., m_0\} \subseteq \{\tau(0), ..., \tau(n_0)\}$. Für $n \ge n_0$ gilt dann $\{\tau(0), ..., \tau(n)\} = \{0, 1, ..., m_0, m_1, ..., m_l\}$ mit $m_0 < m_1 < \ldots < m_l$. Es folgt $\left|\sum_{i=0}^n a_{\tau(i)} - \sum_{k=0}^{m_0} a_k\right| = \left|\sum_{i=1}^l a_{m_i}\right| \le \sum_{i=1}^l |a_{m_i}| \le \sum_{k=m_1}^{m_l} |a_k| < \varepsilon$.

Somit gilt für alle $n \ge n_0$: $\left|a - \sum_{i=0}^n a_{\tau(i)}\right| \le \left|a - \sum_{k=0}^{m_0} a_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{m_0} a_k - \sum_{i=0}^n a_{\tau(i)}\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Satz. Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so gibt es zu jedem $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Umordnung mit $\sum\limits_{n=0}^\infty a_{\tau(n)} = \alpha$. Beweis: siehe Walter, Analysis I, S.105.

Beispiel: In Forster, Analysis 1, S.44 wird eine Umordnung der konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$ angegeben, welche gegen ∞ divergiert.

† d.h. $\{\tau(n) : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ & $\forall m, n (m \ne n \Rightarrow \tau(m) \ne \tau(n))$

Die Exponentialreihe

Definition

Nach 4.8b konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut.

$\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $e := \exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ *(Eulersche Zahl)*

Bemerkung. $e = 2.71828182828459 \pm 2 \cdot 10^{-12}$

4.13 Lemma.

(a) $\exp(x) \geq 1 + x$ für $x \geq 0$;

(b) $\exp(x) = 1 + x + x^2 \cdot r(x)$ mit $|r(x)| \leq 1$ für $|x| \leq 1$;

(c) Für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n) = 1$;

(d) Für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n(x_n \neq 0)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\exp(x_n)-1}{x_n} = 1$.

Beweis:

(a),(b) Nach 4.2 gilt $\exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-2}}{n!}$.

$r(x) := \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-2}}{n!}$ konvergiert absolut (z.B. Quotientenkriterium); für $|x| \leq 1$ gilt also:

$|r(x)| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{|x|^{n-2}}{n!} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n!} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-2}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

(c), (d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge. Nach (b) gilt dann $|r(x_n)| \leq 1$ für fast alle n; also ist $\big(r(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es folgt $\lim_{n\to\infty}\exp(x_n) \overset{(b)}{=} \lim_{n\to\infty}(1+x_n+x_n^2\cdot r(x_n)) = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\exp(x_n)-1}{x_n} \overset{(b)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n\cdot r(x_n)) = 1$.

4.14 Satz (Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion).

$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Nach Satz 4.11 gilt $\exp(x)\cdot\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\dfrac{y^k}{k!} = \dfrac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \dfrac{1}{n!}(x+y)^n$, also $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$.

4.15 Lemma. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(b) $\exp(x) > 0$

(c) $\exp(q\cdot x) = \exp(x)^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$

(d) $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n) = \exp(x)$

Beweis:

(a) $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\cdot\exp(-x)$.

(b) Ist $x \geq 0$, so $\exp(x) \geq 1 + x > 0$ nach 4.13a. Ist $x < 0$, so $0 < -x < \exp(-x) \overset{(a)}{=} \exp(x)^{-1}$.

(c) 1. $\exp(0\cdot x) = \exp(0) = 1 = \exp(x)^0$.

2. Für $0 \neq n \in \mathbb{N}$ folgt aus 4.14 $\exp(n\cdot x) = \exp(x + ... + x) = \exp(x)\cdot\ldots\cdot\exp(x) = \exp(x)^n$ und weiter $\exp((-n)\cdot x) = \exp(-(nx)) = 1/\exp(nx) = 1/\exp(x)^n = \exp(x)^{-n}$.

3. Für $q = z/n$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp(q \cdot x)^n \overset{2.}{=} \exp(q \cdot n \cdot x) = \exp(z \cdot x) \overset{1.,2.}{=} \exp(x)^z$ und folglich $\exp(q \cdot x) = \sqrt[n]{\exp(x)^z} = \exp(x)^q$.

(d) $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow 1 < \exp(y-x) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(x)} \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$.

(e) $\lim_n x_n = x \Rightarrow \lim_n (x - x_n) = 0 \Rightarrow \lim_n \exp(x - x_n) = 1 \Rightarrow \lim_n \exp(x_n) = \lim_n(\exp(x) \cdot \exp(x - x_n)) = \exp(x) \cdot \lim_n \exp(x - x_n) = \exp(x)$.

4.16 Lemma.
Zu jedem $y > 0$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$.

Beweis:

Nach 4.13a und 4.15a,b existieren $a < b$ mit $\exp(a) < y < \exp(b)$.

Definition einer Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\exp(a_n) \leq y \leq \exp(b_n)$ für alle n:

$a_0 := a,\ b_0 := b,\quad [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, c_n] & \text{falls } y \leq \exp(c_n) \\ [c_n, b_n] & \text{falls } \exp(c_n) < y \end{cases}$, wobei $c_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

Nach 4.5 existiert ein x mit $\lim_n a_n = x = \lim_n b_n$. Mit 4.15e und $\forall n(\exp(a_n) \leq y \leq \exp(b_n))$ folgt nun $\exp(x) = \lim_n \exp(a_n) \leq y \leq \lim_n \exp(b_n) = \exp(x)$, also $\exp(x) = y$. Die Eindeutigkeit folgt aus 4.15d.

Definition. Für $x > 0$ sei $\ln(x) :=$ das eindeutig bestimmte $y \in \mathbb{R}$ mit $\exp(y) = x$.

Definition a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Nach 4.15c gilt $\exp(q \cdot \ln(a)) = \exp(\ln(x))^q = a^q$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$. Wir definieren deshalb

$a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

Folgerung. Für alle $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \exp(x)$, $e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$, $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

4.17 Lemma (Rechenregeln). Für $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

(b) $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

(c) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(d) $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

(e) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

(f) $a < b \Rightarrow \ln(a) < \ln(b)$ und $a^x < b^x$ für $x > 0$

(g) $x < y \;\&\; 1 < a \Rightarrow a^x < a^y$

Beweis:

(a) $\exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(a)) \cdot \exp(\ln(b)) = a \cdot b \Rightarrow \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$.

(b) $a^x = \exp(x \ln(a)) \Rightarrow \ln(a^x) = x \ln(a)$.

(c) $a^{x+y} = \exp((x+y)\ln(a)) = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(y \ln(a)) = a^x \cdot a^y$.

(d) $a^{xy} = \exp(xy \ln(a)) = \exp(y(\ln(a^x)) = (a^x)^y$.

(e) $a^x \cdot b^x = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(x \ln(b)) = \exp(x(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(x \ln(ab)) = (ab)^x$.

(f) Sei $a < b$. Wäre $\ln(b) \leq \ln(a)$, so $b = \exp(\ln(b)) \leq \exp(\ln(a)) = a$; also $\ln(a) < \ln(b)$. Für $x > 0$ folgt daraus $x \ln(a) < x \ln(b)$ und weiter $a^x = \exp(x \ln(a)) < \exp(x \ln(b)) = b^x$.

(g) $1 < a \Rightarrow 0 = \ln(1) < \ln(a) \overset{x \leq y}{\Rightarrow} x \ln(a) < y \ln(a) \overset{4.15\text{d}}{\Rightarrow} a^x < a^y$.

4.18 Satz. $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1+\frac{x}{n}\big)^n$, insbesondere $e = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$.

Beweis:

Sei $\lim_n x_n = 0$ mit $\forall n(x_n \neq 0)$. Dann gilt (1) $\lim_n \ln(1+x_n) = 0$, denn aus $\varepsilon > 0$ folgt $e^{-\varepsilon} < 1 < e^{\varepsilon}$, also $\underset{\text{fast}}{\forall} n(e^{-\varepsilon} < 1 + x_n < e^{\varepsilon})$, und somit $\underset{\text{fast}}{\forall} n(-\varepsilon < \ln(1+x_n) < \varepsilon)$. Es gilt sogar (2) $\lim_n x_n^{-1} \ln(1+x_n) = 1$, denn für $y_n := \ln(1+x_n)$ haben wir $y_n(\exp(y_n)-1)^{-1} = x_n^{-1}\ln(1+x_n)$ und (wg. (1)) $\lim_n y_n = 0$. Mit 4.13d folgt daraus $\lim_n y_n^{-1}(\exp(y_n)-1) = 1$ und weiter $\lim_n x_n^{-1}\ln(1+x_n) = 1$.

Sei jetzt $x_n := x/n$. Für $n > -x$ gilt dann $0 < 1+x_n$ und somit $(1+\frac{x}{n})^n = (1+x_n)^n = \exp(n\cdot\ln(1+x_n)) = \exp(x \cdot x_n^{-1}\ln(1+x_n))$. Mit (2) und 4.15e folgt daraus $\lim_n(1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$.

Veränderungsprozesse und die Exponentialfunktion

$u(t)$ sei eine im Laufe der Zeit t wachsende oder abnehmende physikalische Größe (z.B. die Anzahl der Bakterien in einer Kultur oder die Menge einer radioaktiven Substanz).

Abk.: $x \approx y \;:\Leftrightarrow x$ ist "näherungsweise" gleich y.

Für hinreichend kleine Zeitintervalle $h \neq 0$ gelte:

(1) $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} \approx \alpha u(x)$ (α eine Konstante) .

Zu gegebenen t wähle man $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $h := \dfrac{t}{n}$ hinreichend klein, und setze $t_k := k \cdot \dfrac{t}{n}$

Aus (1) folgt dann: (2) $u(t_{k+1}) \approx u(t_k) + \alpha u(t_k)\dfrac{t}{n} = u(t_k)(1+\dfrac{\alpha t}{n})$.

Aus (2) folgt durch Induktion: (3) $u(t_k) \approx u(0)\cdot\big(1+\dfrac{\alpha t}{n}\big)^k$.

Insbesondere für $k = n$ gilt: (4) $u(t) \approx u(0)\big(1+\dfrac{\alpha t}{n}\big)^n$.

Nimmt man nun an, daß $\approx$ in (4) mit wachsendem n beliebig genau wird, so erhält man mit Satz 4.18:

$$u(t) = u(0)\cdot e^{\alpha t} \;.$$

Unter der Halbwertzeit T eines Abnahmeprozesses (z.B. radioaktiver Zerfall) versteht man die Zeitspanne, in der die vorhandene Substanz um die Hälfte abnimmt: $u(t+T) = \dfrac{1}{2}\cdot u(t)$. Es gilt $T = \dfrac{\ln(2)}{-\alpha}$.

$[u(0)e^{\alpha(t+T)} = u(t+T) = \dfrac{1}{2}u(t) = \dfrac{1}{2}u(0)e^{\alpha t} \;\Rightarrow\; 2e^{\alpha(t+T)} = e^{\alpha t} \;\Rightarrow\; \ln(2)+\alpha(t+T) = \alpha t \;\Rightarrow\; T = \dfrac{\ln(2)}{-\alpha}]$

b-adische Brüche

Definition. Sei $2 \le b \in \mathbb{N}$. Unter einem *b-adischen Bruch* verstehen wir hier eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ mit $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Im Fall $b = 10$ spricht man von Dezimalbrüchen.

4.19 Lemma.
Jeder b-adische Bruch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ konvergiert gegen ein $x \in [0, 1]$, und für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n b^{n} \le b^{-m}$

Beweis: $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n b^{-n} \le (b-1) \cdot \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} b^{-n} = b^{-m}(b-1) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} (b^{-1})^n = b^{-m}(b-1)\dfrac{b^{-1}}{1 - b^{-1}} = b^{-m}$.

Definition. Ein b-adischer Bruch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ heißt *normiert*, falls $a_n \ne 0$ für unendlich viele n.

4.20 Satz. Jede reelle Zahl $x \in]0, 1]$ läßt sich durch genau einen normierten b-adischen Bruch darstellen.

Beweis:
Eindeutigkeit: Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n b^{-n}$ normierte b-adische Brüche, und sei
$m := \min\{n \ge 1 : a_n \ne a'_n\}$. Dann gilt $(*)$ $\sum\limits_{n=1}^{m} a'_n b^{-n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n b^{-n}$ und o.E.d.A. $a_m < a'_m$. Daraus folgt
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n} = \sum\limits_{n=1}^{m-1} a'_n b^{-n} + a_m b^{-m} + \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n b^{-n} \le \sum\limits_{n=1}^{m-1} a'_n b^{-n} + (a_m + 1) b^{-m} \le \sum\limits_{n=1}^{m} a'_n b^{-n} \overset{(*)}{<} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n b^{-n}$.

Existenz: Wir definieren rekursiv $a_n \in \{0, ..., b-1\}$ mit $s_n < x \le s_n + b^{-n}$, wobei $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b^{-k}$:
$a_0 := 0$, $a_{n+1} := \min\{l : x \le s_n + (l+1) b^{-(n+1)}\}$.
Aus $x \le s_n + b^{-n} = s_n + b \cdot b^{-(n+1)}$ folgt $a_{n+1} < b$. Aus $s_n < x$ folgt (nach Def. von a_{n+1})
$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} b^{-(n+1)} < x \le s_n + (a_{n+1}+1) b^{-(n+1)} = s_{n+1} + b^{-(n+1)}$.
Aus $|x - s_n| < b^{-n}$ folgt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$.

Bleibt zu zeigen, daß der Bruch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ normiert ist: $s_m < x = s_m + \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n b^{-n} \Rightarrow \exists n > m (a_n > 0)$.

Korollar. Jede reelle Zahl x läßt sich als Grenzwert einer monoton wachsenden (fallenden) Folge rationaler Zahlen darstellen.

Beweis:
Sei o.E.d.A. $x \in (0, 1]$. Dann $x = \lim_n s_n$ mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b^{-k} \in \mathbb{Q}$. Außerdem ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
Es gilt aber auch $x = \lim_n (s_n + b^{-n})$ und $s_{n+1} + b^{-(n+1)} = s_n + a_{n+1} b^{-(n+1)} + b^{-(n+1)} \le s_n + b^{-n}$.

Definition. Ein b-adischer Bruch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ heißt *periodisch*, wenn es $m, p \in \mathbb{N}$ mit $p \ge 1$ gibt, so daß $\forall n > m (a_n = a_{n+p})$.

4.21 Satz.
Für jeden b-adischen Bruch $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ gilt: $x \in \mathbb{Q} \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$ ist periodisch.

Beweis:
"$\Rightarrow$": Sei $x = r/q$ mit $1 \le r, q \in \mathbb{N}$. Sei ferner $a_n \ne 0$ für unendlich viele n (sonst ist die Beh. trivial).
Aus $0 \le x - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b^{-k} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k b^{-k} \le b^{-n}$ folgt $0 \le b^n r - q \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b^{n-k} = q b^n \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k b^{-k} \le q$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also $r_n := q \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k} b^{-k} = q b^n \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k b^{-k} \in \{0, ..., q\}$.

Folglich existieren $m, p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 1$ und $r_m = r_{m+p}$.

$r_m = r_{m+p} \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m+k} \cdot b^{-k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m+p+k} \cdot b^{-k} \overset{4.20}{\Longrightarrow} \forall k \geq 1 (a_{m+k} = a_{m+p+k}) \Longrightarrow \forall n > m (a_n = a_{n+p})$.

"$\Leftarrow$": Seien $m, p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 1$ und $\forall n > m (a_n = a_{n+p})$. Sei ferner $a'_j := a_{m+j}$ für $j = 1, ..., p$.

Dann $a_{m+lp+j} = a'_j$ für $l \in \mathbb{N}$ und $j = 1, ..., p$. Es folgt $x = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k b^{-k} + \lim\limits_{l \to \infty} x_l$ mit

$$x_l = \sum_{k=m+1}^{m+lp} a_k b^{-k} = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{p} a_{m+ip+j} b^{-(m+ip+j)} = \sum_{j=1}^{p} a'_j b^{-(m+j)} \sum_{i=0}^{l-1} (b^{-p})^i = \sum_{j=1}^{p} a'_j b^{-(m+j)} \frac{1-(b^{-p})^l}{1-b^{-p}}.$$

Folglich $x = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k b^{-k} + \lim\limits_{l \to \infty} x_l = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k b^{-k} + \dfrac{1}{1-b^{-p}} \cdot \sum\limits_{j=1}^{p} a'_j b^{-(m+j)} \in \mathbb{Q}$.

Identitätssatz für Potenzreihen

Ist f eine Potenzreihe (mit Konvergenzradius r), so sei $\mathcal{N}(f) := \{x : 0 < |x| < r \;\&\; f(x) = 0\}$.

Satz 4.22.
Ist $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $\exists n (a_n \neq 0)$, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $\mathcal{N}(f) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \emptyset$.

Beweis:
Sei $N := \min\{n : a_n \neq 0\}$, $0 < \rho < r$ und $c := \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^{n-N-1}$. Dann können wir wie folgt schließen:

$x \in \mathcal{N}(f) \;\&\; |x| \leq \rho \;\Rightarrow\; |a_N x^N| = |\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n| \leq \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| = |x|^{N+1} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^{n-N-1}| \leq c|x|^{N+1} \;\Rightarrow$

$\overset{0<|x|}{\Rightarrow}\; 0 < |a_N| \leq c|x| < (c{+}1)|x| \;\Rightarrow\; 0 < \varepsilon' := \dfrac{|a_N|}{c{+}1} < |x|$. — Somit $\forall x \in \mathcal{N}(f)(|x| \leq \rho \;\Rightarrow\; 0 < \varepsilon' < |x|)$.

Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon', \rho\}$ gilt deshalb die Behauptung $\mathcal{N}(f) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \emptyset$.

Satz 4.23. (Identitätssatz für Potenzreihen).
Die Potenzreihen $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mögen beide positiven Konvergenzradius haben. Gibt es eine Nullfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\forall k (x_k \neq 0 \;\&\; f(x_k) = g(x_k))$, so ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Wir betrachten die Potenzreihe $h(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$.
Nach Voraussetzung gilt $\forall \varepsilon > 0 (\mathcal{N}(h) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] \neq \emptyset)$, und mit 4.22 folgt daraus die Behauptung $\forall n (a_n = b_n)$.

Beispiel. (Forster, Analysis 1, S.44: Umordnung einer konvergenten aber nicht absolut konvergenten Reihe)

Es sei $\tau(0) := 0$ und $\tau(l) := \begin{cases} 2^{n+1} + 2k & \text{falls } l = n + 2^n + k \text{ mit } k < 2^n \\ 2n+1 & \text{falls } l = n + 2^n + 2^n \end{cases}$.

Wie man leicht sieht, ist $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Die Reihe $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{\tau(l)}$ ist also eine Umordnung der konvergenten (siehe 4.6) aber nicht absolut konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n{+}1}$. Wir zeigen jetzt: $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{\tau(l)} = \infty$.

Wie man leicht verifiziert, gilt $(*)$ $\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} a_{2^{n+1}+2k} = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \dfrac{1}{2^{n+1}+2k+1} > 2^n \cdot \dfrac{1}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{4}$. Damit erhalten wir

(für $N \geq 2$) $\sum\limits_{l=0}^{N+2^{N+1}} a_{\tau(l)} = a_0 + \sum\limits_{n=0}^{N} \Big(\big(\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} a_{2^{n+1}+2k} \big) + a_{2n+1} \Big) > 1 + \sum\limits_{n=0}^{N} \big(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2n+2}\big) \geq \sum\limits_{n=2}^{N} \big(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6}\big) = \dfrac{N{-}1}{12}$.

§5 Funktionen, Stetigkeit

Definition. Unter dem *(kartesischen) Produkt* $X \times Y$ zweier Mengen X, Y versteht man die Menge aller *geordneten Paare* (x, y) mit $x \in X$, $y \in Y$: $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \;\&\; y \in Y\}$.

Die Gleichheit geordneter Paare ist definiert durch: $(x, y) = (x', y') \;:\Leftrightarrow\; x = x' \;\&\; y = y'$.

Definition. Sei X eine Menge. Unter einer *Abbildung* oder *Funktion* mit *Definitionsbereich* X versteht man eine Vorschrift f, welche jedem $x \in X$ genau ein Objekt $f(x)$ zuordnet.

Sei jetzt f eine Funktion mit Definitionsbereich X.

$\mathrm{D}(f) := X$;

$f(A) := \{f(x) : x \in A \cap X\}$ *(Bild von A unter f)*;

$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ *(Urbild von B unter f)*;

$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times f(X)$ *(Graph von f)*;

f ist *injektiv* $:\Longleftrightarrow\; \forall x, x' \in X (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$.

$f(X)$ heißt die *Wertemenge* von f.

Ist $A \subseteq \mathrm{D}(f)$, so bezeichnet man mit $f|A$ die *Restriktion* oder *Einschränkung* von f auf A,
d.h. $f|A$ ist diejenige Funktion, welche auf A definiert ist und dort mit f übereinstimmt:
$\mathrm{D}(f|A) := A$ und $(f|A)(x) := f(x)$ für alle $x \in A$.

Definition.
$f : X \to Y \;:\Longleftrightarrow\; f$ ist Funktion mit $\mathrm{D}(f) = X$ und $f(X) \subseteq Y$ *(f ist Funktion von X in (*oder *nach) Y)*;
$f : X \to Y$ *surjektiv* $:\Longleftrightarrow\; f : X \to Y$ und $f(X) = Y$ *(f ist Funktion von X auf Y)*;
$f : X \to Y$ *bijektiv* $:\Longleftrightarrow\; f$ ist injektiv und $f : X \to Y$ surjektiv.

Statt “f ist injektiv (surjektiv, bijektiv)” sagt man auch “f ist eine Injektion (Surjektion, Bijektion)”.

Statt “$f : X \to Y$, $f(x) = ...x...$” schreibt man auch “$f : X \to Y$, $x \mapsto ...x...$”.

id_X bezeichnet die *identische Abbildung* auf X, d.h. $\mathrm{id}_X : X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$

Beispiel. Wir beweisen die Bijektivität der am Ende von §4 betrachteten Funktion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\tau(l) := \begin{cases} 0 & \text{falls } l = 0 \\ 2^{n+1} + 2k & \text{falls } l = n + 2^n + k \text{ mit } k < 2^n \\ 2n + 1 & \text{falls } l = n + 2^n + 2^n \end{cases}.$$

τ injektiv: Sei $l \neq l'$. Dann o.E.d.A. $l < l'$. Für $l = 0$ ist $\tau(l) = 0 < \tau(l')$. Sei jetzt $0 < l$.
1. $l = n + 2^{n+1}$ und $l' = n' + 2^{n'+1}$: Dann $n < n'$ und somit $\tau(l) = 2n + 1 < 2n' + 1 = \tau(l')$.
2. $l = n + 2^n + k$ mit $k < 2^n$, und $l' = n' + 2^{n'} + k'$ mit $k' < 2^{n'}$: Wegen $l < l'$ gilt $n \leq n'$.
2.1. $n < n'$: $\tau(l) = 2^{n+1} + 2k < 2^{n+1} + 2^{n+1} \leq 2^{n'+1} \leq \tau(l')$.
2.2. $n = n'$: Dann $k < k'$ und somit $\tau(l) = 2^{n+1} + 2k < 2^{n+1} + 2k' = \tau(l')$.
3. Andernfalls ist einer der Werte $\tau(l), \tau(l')$ ungerade und der andere gerade, also auch $\tau(l) \neq \tau(l')$.

τ surjektiv: Sei $m > 0$ gegeben.
1. $m = 2m_0$ gerade: Dann existieren n, k mit $m_0 = 2^n + k \;\&\; k < 2^n$, also $m = 2^{n+1} + 2k = \tau(n + 2^n + k)$.
2. $m = 2n + 1$: Dann $m = \tau(n + 2^{n+1})$.

Definition (Komposition oder Zusammensetzung von Funktionen). Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ definiert man die *zusammengesetzte Funktion* $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

(Man beachte die Reihenfolge $g \circ f$! g wird nach f ausgeführt.)

Bemerkung. Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gilt: $g \circ f = \mathrm{id}_X \implies f$ injektiv und g surjektiv.

Definition (Umkehrfunktion)
Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein *Urbild* $x \in X$ mit $f(x) = y$. Man nennt die Funktion, welche jedem $y \in Y$ sein Urbild $x \in X$ zuordnet, die *Umkehrfunktion von* f und bezeichnet sie mit f^{-1}. Offenbar gilt:
– $f^{-1} : Y \to X$ bijektiv & $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ & $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$;
– $\mathrm{graph}(f^{-1}) = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in \mathrm{graph}(f)\}$.

Man beachte die zweifache Bedeutung von $f^{-1}(B)$: Einerseits ist $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ das Urbild von B unter f, andererseits ist $f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y) : y \in Y \cap B\}$ das Bild von B unter f^{-1}. Offenbar stimmen aber beide Bedeutungen überein.

Definition. Eine Funktion f' heißt *Fortsetzung* der Funktion f, falls gilt:
$\mathrm{D}(f) \subseteq \mathrm{D}(f')$ & $\forall x \in \mathrm{D}(f)(f'(x) = f(x))$, d.h. $f = f'|\mathrm{D}(f)$.

Konvention.
Wenn aus dem Zusammenhang nichts anderes hervorgeht, bezeichnen f und g im folgenden stets Funktionen, deren Definitions- und Wertebereich Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, d.h. deren Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt
(i) *[streng] monoton wachsend*, falls $f(x) \leq f(x')$ $[f(x) < f(x')]$ für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$;
(ii) *[streng] monoton fallend*, falls $f(x) \geq f(x')$ $[f(x) > f(x')]$ für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$.

Bemerkungen.
1. Jede streng monotone Funktion ist injektiv.
2. Die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden (fallenden) Funktion ist ebenfalls streng monoton wachsend (fallend).

Beispiele von Funktionen.

$\mathsf{const}_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a$ *(Konstante Funktion)*

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ *(Identische Funktion)*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ *(Lineare Funktion)*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *(Polynom)*

$f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei $D := \{x \in \mathbb{R} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\}$ *(Potenzreihe)*

$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $[x] := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$.

Definition. Für $f : D \to \mathbb{R}$ sei $|f| : D \to \mathbb{R}_+$, $|f|(x) := |f(x)|$.

Definition (Rationale Operationen auf Funktionen)

Seien f, g Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$, und sei $D := \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann werden die Funktionen $f{+}g$, $f{-}g$, λf, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ definiert durch

$f{\pm}g : D \to \mathbb{R}$, $(f \pm g)(x) := f(x) + g(x)$;

$\lambda f : \mathrm{D}(f) \to \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$;

$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$;

$\dfrac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$, $\dfrac{f}{g}(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$, wobei $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Definition.

Eine Funktion der Form $\dfrac{f}{g}$, wobei f, g Polynome sind, nennt man eine *rationale Funktion*. Die Menge aller rationalen Funktionen ist offenbar abgeschlossen unter den (oben eingeführten) rationalen Operationen.

Stetigkeit

Abkürzung. $U_\varepsilon(a) :=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

Bemerkung. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \underset{\textsf{fast}}{\forall} n(x_n \in U_\varepsilon(a))$.

Definition (Stetigkeit).

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. Die Funktion f heißt *stetig im Punkt* a, wenn gilt

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$, d.h. wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$.

f heißt *stetig*, falls f in jedem Punkt $a \in \mathrm{D}(f)$ stetig ist.

f heißt *Lipschitz-stetig*, falls gilt $\exists L \in \mathbb{R}_+ \forall x, x' \in \mathrm{D}(f)(\,|f(x) - f(x')| < L \cdot |x - x'|\,)$.

Bemerkung. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

5.1 Lemma. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt $a \in D$,
wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Beweis:

I. Sei f stetig in $a \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$: Sei $\varepsilon > 0$.
Dann $\exists \delta > 0[\,f(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))\,]$ & $\forall \delta > 0 \underset{\textsf{fast}}{\forall} n[\,x_n \in U_\delta(a)\,]$ und folglich $\underset{\textsf{fast}}{\forall} n(f(x_n) \in U_\varepsilon(f(a)))$.

II. Sei $a \in D$ und f nicht stetig in a. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $\forall \delta > 0 \exists x[\,x \in U_\delta(a) \cap D\ \&\ f(x) \notin U_\varepsilon(f(a))\,]$ und folglich $\forall n \exists x_n \in D[\ |x_n - a| < \frac{1}{n+1}\ \&\ f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))\ ]$. Es gibt also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\forall n[\ |x_n - a| < \frac{1}{n+1}\ ]$ und $\forall n[\,f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))\,]$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $\neg(\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a))$.

Bemerkung. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnung $[a, b]$ (bzw. $]a, b[$) für Intervalle auch dann, wenn $b < a$ ist; d.h. wir definieren: Ist $b < a$, so sei $[a, b] := [b, a]$ und $]a, b[:=]b, a[$.

5.2 Satz (Zwischenwertsatz).

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $[a, b] \subseteq D$, so existiert es zu jedem $y \in]f(a), f(b)[$ ein $x \in]a, b[$ mit $f(x) = y$.

Beweis: (Vergl. 4.16.)

Sei o.E.d.A. $f(a) < f(b)$. Wir definieren eine Intervallschacht. $([a_n, b_n])_n$, so daß $\forall n(f(a_n) \leq y \leq f(b_n))$:

$a_0 := a$, $b_0 := b$, $\quad [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, c_n] & \text{falls } y \leq f(c_n) \\ [c_n, b_n] & \text{falls } y > f(c_n) \end{cases}$, wobei $c_n := \frac{1}{2}(a_n+b_n)$.

Nach 4.5 existiert ein $x \in [a, b]$ mit $\lim_n a_n = x = \lim_n b_n$. Mit 5.1 und $\forall n(f(a_n) \leq y \leq f(b_n))$ folgt nun $f(x) = \lim_n f(a_n) \leq y \leq \lim_n f(b_n) = f(x)$, also $f(x) = y$. Mit $f(a) < y < f(b)$ folgt ferner $x \neq a, b$.

5.3 Satz. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) f stetig $\implies$ $f(I)$ ist ein Intervall.

(b) f monoton und $f(I)$ ein Intervall $\implies$ f stetig.

Beweis:

(a) Seien $a', b' \in f(I)$, dann existieren $a, b \in I$ mit $f(a) = a'$ und $f(b) = b'$. Dann $[a, b] \subseteq I$, also f stetig auf $[a, b]$, und mit dem Zwischenwertsatz folgt $[a', b'] = [f(a), f(b)] \subseteq f([a, b]) \subseteq f(I)$.

(b) Sei $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$. Wir führen den Beweis nur für den Fall, daß $f(x_0)$ kein Randpunkt von $f(I)$ ist. Dann können wir o.E.d.A. $f(x_0) \pm \varepsilon \in f(I)$ annehmen. Es gibt also $x_-, x_+ \in I$ mit $f(x_-) = f(x_0)-\varepsilon$ und $f(x_+) = f(x_0)+\varepsilon$. Wegen der Monotonie von f folgt ($x_- < x_0 < x_+$ oder $x_+ < x_0 < x_-$) und $f([x_-, x_+]) \subseteq [f(x_-), f(x_+)] = [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$. Für $\delta := \min\{|x_- - x_0|, |x_+ - x_0|\}$ haben wir dann $\delta > 0$ und $\forall x(|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$.

5.4 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion).

Sei I ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig.

Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ stetig.

Beweis:

$f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ monoton und $f^{-1}(f(I)) = I$ Intervall $\overset{5.3b}{\implies}$ f^{-1} stetig.

5.5 Satz.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$. Dann gilt:

f stetig in $a \in D$ & g stetig in $f(a)$ $\implies$ $g \circ f$ stetig in a.

Beweis mittels 5.1:

$\lim_n x_n = a \in D \Rightarrow \lim_n f(x_n) = f(a) \in E \Rightarrow \lim_n g(f(x_n)) = g(f(a))$.

5.6 Satz.

(a) Die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und alle konstanten Funktionen const_a sind stetig.

(b) Sind die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ stetig und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch die Funktionen $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$ in a stetig. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ in a stetig.

Beweis mittels 5.1 und 3.4: klar.

Korollar.

Die Menge aller stetigen Funktionen ist abgeschlossen unter den rationalen Operationen. Insbesondere ist jede rationale Funktion stetig.

Bemerkung. Die folgenden Funktionen sind stetig:

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$,
2. $\ln : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$,
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, $x \mapsto a^x$ $(0 < a \in \mathbb{R})$,
4. $\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$, $x \mapsto x^a$ $(0 \neq a \in \mathbb{R})$,
5. $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^a$ $(0 < a \in \mathbb{R})$, wobei $0^a := 0$.

Beweis:

1. Nach 5.1 und 4.15e,d ist exp stetig und streng monoton.
2. folgt aus 1. und 5.4, denn ln ist die Umkehrfunktion von exp.

3.,4.,5. folgen aus 1., 2., 5.6 und 5.5, denn $a^x = \exp(x \ln(a))$ und $x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$ für $x > 0$.

Für 5. ist noch die Stetigkeit im Nullpunkt, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < x < \delta \Rightarrow \exp(a \ln(x)) < \varepsilon)$, zu zeigen.

Diese folgt aber aus: $\exp(a \ln(x)) < \varepsilon \Leftrightarrow a \ln(x) < \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow x < \exp(a^{-1} \ln(\varepsilon))$ (für $\varepsilon, x > 0$).

5.7 Satz. Jede Potenzreihe ist im Innern ihres Konvergenzintervalls stetig.

Beweis:

Sei r der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, und sei $0 < \rho < r$ und $L_\rho := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |na_n| \rho^{n-1}$.

HS 1. $x, y \in [-\rho, \rho] \;\Rightarrow\; |x^n - y^n| \leq |x - y| n \rho^{n-1}$.

Beweis: $|x^n - y^n| = |(x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}| \leq |x - y| \sum_{k=0}^{n-1} |x^k y^{n-1-k}| \leq |x - y| n \rho^{n-1}$.

HS 2. $x, y \in [-\rho, \rho] \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \cdot L_\rho$.

Beweis: $|f(x) - f(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x^n - y^n| \overset{\text{HS1}}{\leq} |x - y| \sum_{n=1}^{\infty} |na_n| \rho^{n-1}$.

Aus HS 2 folgt $\forall \rho \in [0, r[\, (\, f$ stetig in $]-\rho, \rho[\,)$ und daraus die Behauptung.

Definition. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$.

X ist *offen* $:\Longleftrightarrow \;\; \forall x \in X \exists \varepsilon > 0 (U_\varepsilon(x) \subseteq X)$; $\qquad X$ ist *abgeschlossen* $:\Longleftrightarrow \;\; \mathbb{R} \setminus X$ ist offen.

Bemerkung.

Die Mengen $]a, b[\,$, $]-\infty, b[\,$, $]a, \infty[$ sind offen.

Die Mengen $[a, b]$, $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$ sind abgeschlossen.

$\mathbb{R}$ ist offen und abgeschlossen.

5.8 Lemma. Für jede Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

X abgeschlossen $\iff \;\; \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \forall x \in \mathbb{R} [\, \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \;\&\; \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \;\Rightarrow\; x \in X\,]$.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei X abgeschlossen & $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ & $x \notin X$. Zu zeigen ist $\neg(\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x)$.

Da x Element der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus X$ ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus X$.

Wegen $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ folgt daraus $\forall n (x_n \notin U_\varepsilon(x))$ und somit $\neg(\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x)$.

"$\Leftarrow$": Annahme: X nicht abgeschlossen. Dann ist $\mathbb{R} \setminus X$ nicht offen, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{R} \setminus X$ mit $\forall \varepsilon > 0 (U_\varepsilon(x) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus X)$. Es folgt $x \notin X \;\&\; \forall n \exists x_n (x_n \in U_{\frac{1}{n+1}}(x) \;\&\; x_n \notin \mathbb{R} \setminus X)$, und weiter $x \notin X \;\&$ $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \forall n [\, |x - x_n| < \dfrac{1}{n+1} \;\&\; x_n \in X\,]$, d.h. $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} [\, \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \;\&\; \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \;\&\; x \notin X\,]$.

5.9 Lemma. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in A \subseteq D$, so gilt:

(a) f stetig in $a \implies f|A$ stetig in a.

(b) $f|A$ stetig in a & $\exists \delta > 0 \forall x \in D(|x - a| < \delta \Rightarrow x \in A) \implies f$ stetig in a.

Beweis:

(a) ist klar.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist $\exists \delta > 0 \forall x \in D(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Da $f|A$ stetig in a ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $\forall x \in A(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Nach Voraussetzung können wir o.E.d.A. annehmen $\forall x \in D(|x - a| < \delta \Rightarrow x \in A)$.

Es folgt $\forall x \in D(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig auf* A (oder *in* A), wenn $A \subseteq D$ und f in jedem Punkt $a \in A$ stetig ist.

Bemerkung. Für $f : D \to \mathbb{R}$ und $A \subseteq D$ gilt nach 5.9:

(a) f stetig in $A \Rightarrow f|A$ stetig;

(b) $f|A$ stetig und A offen $\implies f$ stetig in A.

(c) Ist A nicht offen, so folgt aus der Stetigkeit von $f|A$ nicht notwendig, daß f stetig in A ist.
Beispiel: $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$; $f|[0, 1]$ ist stetig, aber f ist unstetig im Punkt $1 \in [0, 1]$.

Definition. $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, falls X beschränkt und abgeschlossen ist.

5.10 Lemma.
$X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in X mindestens einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt.

Beweis:

I. Sei X kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt deshalb eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (Bolzano-Weierstraß). Da X abgeschlossen ist, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in X$ (L.5.8).

II. Jede Folge in X besitze einen HP $a \in X$.

(i) X *abgeschlossen:*

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, so ist a der einzige HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und deshalb $a \in X$.

(ii) X *beschränkt:* Wäre X nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$. Diese Folge hätte keinen HP.

5.11 Satz. Jede nichtleere kompakte Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ besitzt Maximum und Minimum.

Beweis:

Da X beschränkt ist, existiert $a := \sup(X) \in \mathbb{R}$ und $b := \inf(X) \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $a \in X$ und damit $a = \max(X)$. (Ebenso erhält man $b = \min(X)$.) Nach Definition des Supremums gilt $\forall n \exists x_n \in X(a - \frac{1}{n+1} < x_n \leq a)$; es gibt also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Da X abgeschlossen ist, gilt $a \in X$.

5.12 Satz. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D kompakt, so ist auch $f(D)$ kompakt, und folglich existierten $p, q \in D$ mit $f(p) = \max f(D)$, $f(q) = \min f(D)$.

Beweis:

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\forall n(f(x_n) = y_n)$. Diese besitzt eine konvergente Teilfolge mit $a := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$. Da f stetig ist, folgt $f(a) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$.

Definition.

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* $:\iff \quad \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x, x' \in D(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

Bemerkung. Man vergleiche obige Definition mit folgender Äquivalenz:

$f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig $\iff \forall x \in D\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x' \in D(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

Daraus folgt insbesondere, daß jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig ist.

5.13 Satz. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D kompakt, so ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis indirekt:

Annahme: f nicht gleichmäßig stetig.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\forall n\exists x_n, x'_n \in D(|x_n - x'_n| < \frac{1}{n+1}\ \&\ |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon)$.

Da D kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $a := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.

$\forall k(|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k+1}) \ \Rightarrow\ \lim\limits_{k\to\infty}(x'_{n_k} - x_{n_k}) = 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = a$.

f stetig $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) \ \Rightarrow\ |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| < \varepsilon$ für fast alle k. Widerspruch.

Grenzwerte von Funktionen

Definition.

$a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt der Menge* $D \subseteq \mathbb{R} :\iff \quad \forall\varepsilon > 0(U_\varepsilon(a) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset)$.

Man beachte: Ein Häufungspunkt von D muß nicht unbedingt zu D gehören.

Offenbar ist a genau dann Häufungspunkt von D, wenn es in $D \setminus \{a\}$ eine gegen a konvergente Folge gibt.

Definition.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ferner gebe es mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \ :\iff$ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$.

Gilt $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so heißt β der *(uneigentliche) Grenzwert von f* an der Stelle α.

Ist $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D_a^+ := D \cap [a, \infty[$ bzw. $D_a^- := D \cap]-\infty, a]$,

so definiert man auch noch den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert von f* an der Stelle a:

$\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \beta \ :\iff \ \lim\limits_{x\to a}(f|D_a^+)(x) = \beta \quad$ bzw. $\quad \lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = \beta \ :\iff \ \lim\limits_{x\to a}(f|D_a^-)(x) = \beta$.

5.14 Lemma.

(a) Ist $a \in D$ ein Häufungspunkt von D, so gilt: $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(b) Ist $a \in D$ sowohl Häufungspunkt von D_a^+ als auch von D_a^-, so gilt:

$f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \iff \lim\limits_{x\searrow a} f(x) = f(a)\ \&\ \lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = f(a)$.

Beweis:

(a) "$\Rightarrow$" folgt aus Lemma 5.1. Die Richtung "$\Leftarrow$" beweisen wir indirekt (vergl. Beweis von L.5.1):

$\forall\delta > 0 \exists x \in D(|x-a| < \delta \,\&\, |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon) \implies \forall n \exists x_n \in D \setminus \{a\}(|x_n-a| < \frac{1}{n+1} \,\&\, |f(x_n)-f(a)| \geq \varepsilon) \implies$

$\implies \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \,\&\, \neg(\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a))) \implies \neg(\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a))$.

(b) Offenbar gilt: f stetig in a $\Leftrightarrow$ $f|D_a^+$ stetig in a und $f|D_a^-$ stetig in a.

Folgerung.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, wobei a Häufungspunkt von D.

Sei ferner $f_b : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, $f_b(x) := \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff f_b \text{ ist stetig im Punkt } a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in D(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

5.15 Lemma.

Für $f : D \to E \setminus \{\beta\}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \,\&\, \lim\limits_{y\to\beta} g(y) = \gamma \implies \lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$.

Beweis:

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{\alpha\}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \gamma$, da $\forall n(f(x_n) \neq \beta)$.

Bemerkung.

Für Grenzwerte von Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie für Grenzwerte von Folgen; z.B.:

Existieren $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, so auch $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ und es ist $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

5.16 Lemma.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = \infty \quad (k \in \mathbb{N})$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty$

(d) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^a = 0 \quad (a > 0)$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^a} = 0 \quad (a > 0)$.

Beweis:

(a) Für $x > 0$ ist $e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, also $\dfrac{e^x}{x^k} > \dfrac{x}{(k+1)!}$.

(b) $x^k e^{-x} = (e^x/x^k)^{-1}$.

(c) folgt aus (a),(b), da $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ ist.

(d) Weiter vorne wurde gezeigt, daß die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^a$ (mit $0^a = 0$) stetig ist.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \,\&\, y_n := a\ln(x_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{x_n^a} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a^{-1} y_n e^{-y_n} \overset{(b)}{=} 0$.

$\quad (*)\ \dfrac{\ln(x)}{x^a} = a^{-1}(a\ln(x))e^{-a\ln(x)}$.

§6 Differentiation

Definition.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $a \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert
$f'(a) := \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$ existiert. (Insbesondere muß a Häufungspunkt von D sein.)

$f'(a)$ heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt a.

f heißt *differenzierbar* [in $A \subseteq D$], falls f in jedem Punkt $a \in D$ [$a \in A$] differenzierbar ist.

Eine andere Darstellung des Differentialquotienten: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Geometrische Interpretation: Der *Differenzenquotient* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ist die Steigung der durch die Punkte $P_0 = (a, f(a))$ und $P_1 = (x, f(x))$ gehende Sekante. Der Differentialquotient $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt P_0.

Beispiele:

(B1) $f(x) = c$ (konstant): $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0.$

(B2) $f(x) = c \cdot x$: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c \cdot (x+h) - c \cdot x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ch}{h} = c.$

(B3) $f(x) = x^2$: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (2x + h) = 2x.$

(B4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \cdot (\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{-h}{(x+h)x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(x+h)x} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(B5) $\exp'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} \overset{4.13\text{d}}{=} e^x.$

(B6) $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar, denn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$

(B7) $\text{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar, denn $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\searrow 0} 1 = 1$ und
$\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\nearrow 0} (-1) = -1$, d.h. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{abs}(x) - \text{abs}(0)}{x - 0}$ existiert nicht.

(B8) $\mathbf{a} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist im Punkt 0 differenzierbar, denn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{a}(x) - \mathbf{a}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = 1.$

6.1 Satz. Sei $a \in D \subseteq \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von D.
$f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $a \in D$ differenzierbar, wenn gilt:

Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und eine im Punkt a stetige Funktion $r : D \to \mathbb{R}$ mit
$r(a) = 0$ und $f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + r(x) \cdot (x-a)$ $(\forall x \in D)$.

In diesem Fall ist $f'(a) = c$.

Beweis:

I. Ist f in a differenzierbar, so leistet $r(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) & \text{für } x \neq a \\ 0 & \text{für } x = a \end{cases}$ das gewünschte.

II. Aus $f(x) = f(a) + c(x-a) + r(x)(x-a)$ und $\lim\limits_{x\to a} r(x) = 0$ folgt $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} (c + r(x)) = c.$

Korollar. f differenzierbar in $a \Longrightarrow f$ stetig in a.

Beweis:
$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + r(x)\cdot(x-a)$ & r stetig in $a \;\Rightarrow\; f$ stetig in a.

Bemerkung.
$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ ist die Gleichung der Tangente an graph(f) im Punkt $(a, f(a))$.
Die Funktion f ist genau dann im Punkt a differenzierbar, wenn sie in der Umgebung von a durch eine lineare Funktion approximiert werden kann.

6.2 Satz (Ableitungsregeln).
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch die Funktionen $f{+}g$, $\lambda{\cdot}f$, $f{\cdot}g$ in a differenzierbar, und es gilt:
$(f{+}g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(\lambda f)'(a) = \lambda\cdot f'(a)$, $(fg)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$.
Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar und es gilt: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}$.

Beweis (für $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$):

1. $$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\big(f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)\big)\\ &= \lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)\Big) + \lim_{x\to a}\Big(f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\Big) \;=\; f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)\,.\end{aligned}$$
2. $$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\Big(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}\Big) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)} = \lim_{x\to a}\Big(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\frac{-1}{g(x)g(a)}\Big) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}\,.$$
3. $$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \Big(f\cdot\frac{1}{g}\Big)'(a) = f'(a)\cdot\Big(\frac{1}{g}\Big)(a) + f(a)\Big(\frac{1}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Beispiele:

(B9) Für $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$ $(n \geq 1)$ gilt $f_n'(x) = n\cdot x^{n-1}$.

Beweis durch Induktion nach n:
1. $f_1'(x) = 1 = 1\cdot x^{1-1}$. 2. $f_{n+1}'(x) = f_n'(x)\cdot x + f_n(x)\cdot 1 \overset{\text{I.V.}}{=} nx^{n-1}\cdot x + x^n = (n{+}1)x^n$.

(B10) Für $f_p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f_p(x) := x^p$ $(p = -n$ mit $1 \leq n \in \mathbb{N})$ gilt (wegen $f_p(x) = 1/x^n$):
$f_p'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1} = px^{p-1}$.

6.3 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion).
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton.
Ist f im Punkt $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ im Punkt $b := f(a)$ differenzierbar und es gilt: $\big(f^{-1}\big)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.
Beweis:
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(I)\setminus\{b\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n - b} = \dfrac{1}{f'(a)}$ $(*)$.
Setze $x_n := f^{-1}(y_n)$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $I\setminus\{a\}$.
5.4 $\Rightarrow$ f^{-1} stetig $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f^{-1}(b) = a \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n - b}{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = f'(a) \;\Rightarrow\; (*)$.

(B11) $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$

Beweis:

ln ist die Umkehrfunktion von exp. Folglich $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(\ln(x))} = \dfrac{1}{\exp(\ln(x))} = \dfrac{1}{x}$.

Schreibweise. Ist f differenzierbar, so $\dfrac{df(x)}{dx} := \dfrac{d}{dx}f(x) := f'(x)$.

6.4 Satz (Kettenregel).

Sei $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$. Ist f in $a \in D$ und g in $f(a) \in E$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ in a differenzierbar und es gilt: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Beweis:

Sei $b := f(a)$. Nach 6.1 gilt

(1) $g(y) - g(b) = g'(b)(y - b) + r(y)(y - b)$ mit $r : E \to \mathbb{R}$ stetig in b und $r(b) = 0$.

Da f stetig in a und r stetig in $f(a)$ ist, ist $r \circ f$ stetig in a, und es gilt:

(2) $\lim\limits_{x \to a} r(f(x)) = r(f(a)) = 0$.

Nun folgt:

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to a} \left(g'(f(a)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + r(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \overset{(2)}{=} g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beispiele.

(B12) Mit $f(x) := \ln(x)$ und $g(x) := x^n$ gilt: $\dfrac{d}{dx}\ln(x)^n = (g \circ f)'(x) = g'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = n \cdot \ln(x)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{x}$.

(B13) $\dfrac{d}{dx}(e^x + x^2)^3 = 3(e^x + x^2)^2 \cdot (e^x + 2x)$

(B14) $\dfrac{d}{dx} e^{(x + \ln x)^2} = e^{(x + \ln x)^2} \cdot \dfrac{d}{dx}(x + \ln x)^2 = e^{(x + \ln x)^2} \cdot 2(x + \ln x) \cdot (1 + \dfrac{1}{x})$.

6.5 Lemma.

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ differenzierbar, und es gilt: $\dfrac{dx^a}{dx} = a \cdot x^{a-1}$.

Beweis: $\dfrac{dx^a}{dx} = \dfrac{d}{dx} e^{a \cdot \ln(x)} = e^{a \cdot \ln(x)} \cdot \dfrac{a}{x} = a x^a x^{-1} = a x^{a-1}$.

Definition.

$a \in \mathbb{R}$ heißt *innerer Punkt* der Menge $D \subseteq \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ gibt.

Die Menge $\overset{\circ}{D}$ aller inneren Punkte von D heißt das *Innere von D*.

Definition. (Maxima und Minima).

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

f hat in x_0 ein

– *globales* Maximum [bzw. Minimum]) $:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in D\big(f(x) \le [\ge] f(x_0)\big)$;

– *lokales* Maximum [bzw. Minimum]) $:\Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)\big(f(x) \le [\ge] f(x_0)\big)$;

– *isoliertes* lokales Max. [bzw. Min.]) $:\Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)\big(x \ne x_0 \Rightarrow f(x) < [>] f(x_0)\big)$.

6.6 Satz.
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \overset{\circ}{D}$. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum (d.h. Maximum oder Minimum) und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis:
f habe in x_0 ein lokales Maximum.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ und $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.
Sei $h_n := \frac{\varepsilon}{n+1}$ und $y_n := \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$, $z_n := \frac{f(x_0 - h_n) - f(x_0)}{-h_n}$.
Dann gilt $f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$ und $\forall n(y_n \leq 0 \leq z_n)$. Daraus folgt $f'(x_0) = 0$.

6.7 Satz (Satz von Rolle).
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b] \subseteq D$ und differenzierbar in $]a, b[$ (wobei $a \neq b$), und gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = 0$.

Beweis:
Nach 5.12 gibt es $p_0, p_1 \in [a, b]$ mit $f(p_0) = \max f([a, b])$ und $f(p_1) = \min f([a, b])$.
Fall 1: $f(p_0) = f(p_1)$. Dann ist f in $[a, b]$ konstant und folglich $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$.
Fall 2: $f(p_i) \neq f(a)$ für $i = 0$ oder $i = 1$.
Dann $p_i \in]a, b[$ und f hat in p_i ein lokales Extremum; nach 6.6 gilt also $f'(p_i) = 0$.

6.8 Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung).
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b] \subseteq D$ und differenzierbar in $]a, b[$ (wobei $a \neq b$), so existiert ein $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Beweis:
Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ ist stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.
Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $x \in]a, b[$ mit $g'(x) = 0$.
Wegen $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ folgt daraus die Behauptung.

Korollar.
Ist f differenzierbar im Intervall I und gilt x_0, $x_0{+}h \in I$, so existiert ein $\theta \in]0, 1[$ mit $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h) \cdot h$.

6.9 Satz.
Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und f differenzierbar in $\overset{\circ}{I}$.
(a) $\forall x \in \overset{\circ}{I}(\, f'(x) = 0\,) \implies f$ konstant in I ;
(b) $\forall x \in \overset{\circ}{I}(\, f'(x) > [<]\, 0\,) \implies f$ streng monoton wachsend [fallend] in I ;
(c) $\forall x \in \overset{\circ}{I}(\, f'(x) \geq [\leq]\, 0\,) \implies f$ monoton wachsend [fallend] in I .

Beweis:
Seien $a, b \in I$, $a < b$. Nach Satz 6.8 gilt dann $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)$ für ein $x \in]a, b[\subseteq \overset{\circ}{I}$. Daraus folgt $f(b) - f(a) = 0$ bzw. > 0, < 0, ≥ 0, ≤ 0.

Definition (Ableitungen höherer Ordnung)

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei im Intervall $I \subseteq D$ differenzierbar. Ist dann die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar, so heißt die Ableitung von f' in a die *zweite Ableitung* von f in a. Man bezeichnet diese mit $f''(a)$ oder $f^{(2)}(a)$ oder $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(a)$.

Allgemein definiert man rekursiv die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f als Ableitung von $f^{(n-1)}$, falls $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Für $f^{(n)}$ schreibt man auch $\dfrac{d^n f}{dx^n}(a)$.

Schließlich setzt man $f^{(0)} := f$ und $f^{(1)} := f'$.

6.10 Satz.

Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar. Ferner sei $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ und $f'(x_0) = 0$.

(a) $\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0)[\, f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x < x_0 \\ < 0 & \text{für } x_0 < x \end{cases}] \implies f$ hat in x_0 ein isoliertes lokales Maximum.

(b) $\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0)[\, f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < x_0 \\ > 0 & \text{für } x_0 < x \end{cases}] \implies f$ hat in x_0 ein isoliertes lokales Minimum.

(c) Die Voraussetzungen von (a) [bzw. (b)] sind insbesondere dann erfüllt, wenn $f''(x_0)$ existiert und $f''(x_0) < 0$ [bzw. $f''(x_0) > 0$] ist.

Beweis: (a) Aus der Voraussetzung folgt mit 6.9: f streng monoton wachsend in $[x_0{-}\delta, x_0]$ und streng monoton fallend in $[x_0, x_0{+}\delta]$. Daraus folgt dann sofort die Behauptung.

(b) Analog zu (a).

(c) Sei $f''(x_0) < 0$. Wegen $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0}$ existiert dann ein $\delta > 0$, so daß $\forall x (0{<}|x{-}x_0|{<}\delta \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0)$. Folglich gilt $f'(x) > 0$ für $x_0{-}\delta < x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x_0 < x < x_0{+}\delta$.

Definition (Krümmungsverhalten von f)

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.

f heißt $\begin{matrix} \textit{konvex} \\ \textit{konkav} \end{matrix}$ (in I) $:\iff \quad f((1{-}\lambda)x_1 + \lambda x_2) \begin{matrix} \le \\ \ge \end{matrix} (1{-}\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad$ für alle $x_1, x_2 \in I$, $\lambda \in]0,1[$.

Geometrische Bedeutung

Sein $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ und $g(x) := f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$.

Dann ist graph(g) ist die Verbindungsgerade der Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$, und es gilt:

$(*)$ $\forall \lambda \in]0,1[\,\big(f((1{-}\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1{-}\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \big) \iff \forall x \in]x_1, x_2[\,\big(f(x) \le g(x) \big)$.

Beweis von $(*)$:

1. Die Zuordnung $\lambda \mapsto x_\lambda := (1{-}\lambda)x_1 + \lambda x_2 = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ bildet offenbar $]0,1[$ bijektiv auf $]x_1, x_2[$ ab.
2. $(1{-}\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1)) = f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_\lambda - x_1) = g(x_\lambda)$.

6.11 Satz.

Sei I ein Intervall und $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

f konvex [bzw. konkav] $\iff$ f' ist monoton wachsend [bzw. fallend].

Beweis (für "konvex"):

"$\Leftarrow$": Seien $x_1, x_2 \in I$, $\lambda \in]0,1[$ und $x := (1{-}\lambda)x_1 + \lambda x_2$; o.E.d.A. $x_1 < x_2$ und somit $x_1 < x < x_2$.

Nach Satz 6.8 (MWS) gibt es $\xi_1 \in]x_1, x[$, $\xi_2 \in]x, x_2[$ mit $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.
Mit $(1-\lambda)(x-x_1) = \lambda(x_2-x) > 0$ folgt daraus $(1-\lambda)(f(x)-f(x_1)) \le \lambda(f(x_2)-f(x))$ und weiter $f(x) \le (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$.

"$\Rightarrow$": HS: Für alle $a, b \in I$ und $x \in]a, b[$ gilt $f(x) - f(a) \le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$.
Beweis: $\lambda := \dfrac{x-a}{b-a} \Rightarrow \lambda \in]0,1[$ & $x = (1-\lambda)a + \lambda b = a + \lambda(b-a) \Rightarrow f(x) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) - f(a) \le \lambda(f(b)-f(a)) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$.

Sei nun $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Für alle $x \in]x_1, x_2[$ gilt dann $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \overset{\text{HS}}{\le} \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \overset{\text{HS}}{\le} \dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$.
Es folgt $f'(x_1) = \lim\limits_{x \searrow x_1} \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \lim\limits_{x \nearrow x_2} \dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} = f'(x_2)$.

6.12 Satz (Potenzreihen sind differenzierbar).
Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.
Dann hat die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius r,
und f ist in $]-r, r[$ differenzierbar mit $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
Beweis:
Nach 4.10a hat $g(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ den Konvergenzradius r. Sei nun $x \in]-r, r[$.
Wir fixieren ein ρ mit $|x| < \rho < r$. Nach 4.10a (angewandt auf g) ist dann ist $L_\rho := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|(n-1)\rho^{n-1} < \infty$.
Sei $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]-r, r[\setminus\{x\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. O.E.d.A. $|x_k| < \rho$ für alle k.
Nach 6.8 gibt es zu jedem $n \ge 1$ und $k \in \mathbb{N}$ ein $\xi_{n,k}$ mit $|\xi_{n,k} - x| < |x_k - x|$ und $\dfrac{a_n x_k^n - a_n x^n}{x_k - x} = n a_n \xi_{n,k}^{n-1}$.
Wie im Beweis von 5.7 gezeigt, gilt $\forall \xi, \eta \in [-\rho, \rho]\big(|\xi^n - \eta^n| \le |\xi - \eta| n \rho^n\big)$.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein k_ε mit $|x_k - x| < \varepsilon/(L_\rho{+}1)$ für alle $k \ge k_\varepsilon$.
Es folgt: $|\dfrac{f(x_k)-f(x)}{x_k - x} - g(x)| = |\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n x_k^n - a_n x^n}{x_k - x} - g(x)| = |\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n a_n \xi_{n,k}^{n-1} - n a_n x^{n-1})| \le$
$\le \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|(n-1)\rho^{n-1}|\xi_{n,k} - x| \le L_\rho \cdot \varepsilon < \varepsilon$ für $k \ge k_\varepsilon$.

Korollar. Für jede Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$ gilt:
(a) $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar und $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$.
(b) $a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Beweis:
(a) folgt durch Induktion nach k aus 6.12.
(b) Nach (a) gilt $f^{(k)}(0) = k(k-1)\cdots(k-k+1)a_k 0^0 = k! a_k$.

Definition (Stammfunktion). Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.
Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$.

6.13 Lemma.

Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, so gilt:

$G : I \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktione von $f \iff F{-}G$ ist konstant.

Beweis:

$G' = f \overset{F'=f}{\iff} \forall x \in I[\,(F-G)'(x) = 0\,] \overset{6.9a}{\iff} F{-}G$ konstant.

6.14 Bemerkung.

Aus Satz 6.12 folgt: Hat $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius $r > 0$, so ist $F :]{-r}, r[\to \mathbb{R}$, $F(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von f.

Beispiel.

$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \pm \ldots \quad (|x| < 1)$.

Beweis: Geometrische Reihe $\Rightarrow \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1) \implies$

$F(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ ist Stammfunktion von $\dfrac{1}{1+x} \implies$

$F(x) = \ln(1+x)$, denn $\dfrac{d}{dx}\ln(1+x) = \dfrac{1}{1+x} = F'(x)$ und $\ln(1+0) = 0 = F(0)$.

Später werden wir zeigen, daß die Gleichung auch für $x = 1$ gilt, so daß $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$.

§7 Die trigonometrischen Funktionen

Definition .
$\cos(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots ,\qquad \sin(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots .$

Nach dem Quotientenkriterium konvergieren diese Reihen absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Offenbar gilt: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$.

Schreibweise. $\sin x := \sin(x)$, $\sin^n x := \sin^n(x) := (\sin x)^n$; analog für cos .

7.1 Satz.
Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar und es gilt:
$\sin'(x) = \cos x$ und $\cos'(x) = -\sin x$.

Beweis mit Satz 6.12:
$\sin'(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$\cos'(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Korollar. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

7.2 Satz (Additionstheorem).
(a) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$.
(b) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$.

Beweis:
Sei y fest und $f(x) := \sin(x+y) - \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$, $g(x) := \cos(x+y) - \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.

Dann gilt $f'(x) = \cos(x+y) - \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = g(x)$, und
$g'(x) = -\sin(x+y) + \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = -f(x)$.

Sei $\Phi(x) := f(x)^2 + g(x)^2$. Dann $\Phi(0) = 0$ und $\Phi'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$ für alle x, also $\forall x(\Phi(x) = 0)$ und folglich $\forall x(f(x) = g(x) = 0)$.

7.3 Korollar.
(a) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,
(b) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$,
(c) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$,
(d) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Beweis:
(b) Sei $u := \frac{x+y}{2}$, $v := \frac{x-y}{2}$. Dann $\cos x - \cos y = \cos(u+v) - \cos(u-v) =$
$= \cos u \cos v - \sin u \sin v - [\cos u \cos(-v) - \sin u \sin(-v)] = -2\sin u \sin v$.
(d) $1 = \cos 0 = \cos(x-x) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$.

7.4 Lemma. Die Funktion cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle.

Beweis:
$1 + \cos 2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_0 = 2$ und $a_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n)!}$ für $n \geq 1$.
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge,
denn $a_0 = 2 = a_1$ und $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{2^{2n}} = \dfrac{4}{(2n+1)(2n+2)} \leq \dfrac{1}{3}$ für $n \geq 1$.

Mit Satz 4.6 folgt daraus $1 + \cos 2 \leq a_0 - a_1 + a_2 = a_2 = \dfrac{2^4}{4!} = \dfrac{2}{3}$, also $\cos 2 \leq -\dfrac{1}{3}$.

Aus $\cos 0 = 1 > 0 > \cos 2$ folgt mit dem Zwischenwertsatz $M := \{x \in \mathbb{R}_+^* : \cos x = 0\} \neq \emptyset$. Sei $c := \inf(M)$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. Es folgt $\cos(c) = \lim\limits_{n \to \infty} \cos x_n = 0$ und weiter $0 < c$, denn $0 \leq c$ und $\cos 0 \neq 0$.

Definition. $\dfrac{\pi}{2} :=$ *kleinste positive Nullstelle der Funktion* cos .

7.5 Satz.

(a) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$.

(b) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

(c) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

(d) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

(e) cos ist im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend.

(f) sin ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend.

Beweis:

(a)-(d) $\cos 0 > 0 \;\&\; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\, (\cos x \neq 0) \;\Rightarrow\; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\, (\cos x > 0)$

$\overset{7.1}{\Rightarrow}$ sin ist im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend (1)

$\Rightarrow\; \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}] (\sin x > 0)$ [denn $\sin 0 = 0$] (2)

$\overset{7.1}{\Rightarrow}$ cos ist im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend. (3)

(2) $\Rightarrow\; \sin \frac{\pi}{2} > 0 \overset{7.3d}{\Rightarrow} \sin \frac{\pi}{2} = 1 \overset{7.2b}{\Rightarrow} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ (4)

$\Rightarrow\; \cos \pi = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 \overset{7.3d}{\Rightarrow} \sin \pi = 0$

$\overset{7.2b}{\Rightarrow} \cos(x + \pi) = -\cos x \;\Rightarrow\; \cos(x + 2\pi) = -\cos(x + \pi) = \cos x$.

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos x,\;\; \sin(x + \pi) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

(e) Sei $\frac{\pi}{2} \leq x < y \leq \pi$. Setze $u := x - \frac{\pi}{2}$, $v := y - \frac{\pi}{2}$.
$0 \leq u < v \leq \frac{\pi}{2} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \sin u < \sin v \overset{(b)}{\Rightarrow} \cos x = \cos(u + \frac{\pi}{2}) = -\sin u > -\sin v = \cos(v + \frac{\pi}{2}) = \cos y$.

(f) folgt aus (3) und $\sin(-x) = -\sin x$.

Folgerung. $\forall x \in]0, \pi[\, (\sin x > 0) \;\&\; \forall x \in]\pi, 2\pi[\, (\sin x < 0)$.

7.6 Satz.

(a) Durch $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ wird das Intervall $[0, 2\pi[$ bijektiv auf den Einheitskreis $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ abgebildet.

(b) Für $t \in [0, 2\pi]$ ist t die Länge des Kreisbogens $\{(\cos \tau, \sin \tau) : \tau \in [0, t]\}$.

Korollar. 2π ist die Länge des Einheitskreises.

Beweis von 7.6:

(a) 1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

2. Sei $x^2 + y^2 = 1$.

$\cos 0 = \cos(2\pi) = 1$ & $\cos\pi = -1$ & cos stetig $\Longrightarrow$ $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ und es gibt $t_0 \in [0,\pi]$, $t_1 \in [\pi, 2\pi]$ mit $\cos t_0 = \cos t_1 = x$ und $\sin t_0 = \sqrt{1-\cos^2 t_0}$, $\sin t_1 = -\sqrt{1-\cos^2 t_1}$ $\Longrightarrow$ $\exists t \in [0, 2\pi[\,(\cos t = x \ \&\ \sin t = y)$.

3. Für $0 \le t_0 < t_1 < 2\pi$ gilt $\begin{cases} \cos t_0 > \cos t_1 & \text{falls } t_1 \le \pi \\ \cos t_0 < \cos t_1 & \text{falls } \pi \le t_0 \\ \sin t_0 \ge 0 > \sin t_1 & \text{falss } t_0 < \pi < t_1 \end{cases}$.

(b) Für $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ sei $|P_1P_2| := \sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2}$ *(Länge der Strecke P_1P_2)*

Sei $P_k^n := (\cos(\frac{k}{n}t), \sin(\frac{k}{n}t))$ $(n \ge 1)$. Dann gilt:

(1) $\cos(\frac{k+1}{n}t) - \cos(\frac{k}{n}t) = -2\sin(\frac{2k+1}{2n}t)\cdot\sin(\frac{t}{2n})$

(2) $\sin(\frac{k+1}{n}t) - \sin(\frac{k}{n}t) = 2\cos(\frac{2k+1}{2n}t)\cdot\sin(\frac{t}{2n})$

(3) $|P_k^n P_{k+1}^n| = 2\big|\sin(\frac{t}{2n})\big| \cdot \sqrt{\sin^2(\frac{2k+1}{2n}t) + \cos^2(\frac{2k+1}{2n}t)} = 2\big|\sin(\frac{t}{2n})\big|$.

$L_n :=$ Länge des Polygonzugs $P_0^n, P_1^n, \ldots, P_n^n \ = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |P_k^n P_{k+1}^n| = 2n\big|\sin(\frac{t}{2n})\big|$.

Länge des Kreisbogens $\{(\cos\tau, \sin\tau) : \tau \in [0,t]\} \ = \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} t \cdot \left|\frac{\sin(\frac{t}{2n})}{\frac{t}{2n}}\right| = t$.

Definition. $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\})$

7.7 Lemma.

(a) $\tan(x+\pi) = \tan x$ und $\tan(-x) = -\tan x$

(b) $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(c) $\lim\limits_{x\searrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ und $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$.

Beweis von (c):

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $]0, \frac{\pi}{2}[$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos x_n}{\sin x_n} = \dfrac{0}{1} = 0$ und $0 < \dfrac{\cos x_n}{\sin x_n}$ für alle n.

Mit 3.12c folgt daraus $\lim\limits_{n\to\infty} \tan x_n = \infty$.

Somit ist $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ gezeigt. Mit $\tan(-x) = -\tan x$ folgt daraus $\lim\limits_{x\searrow-\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$.

Definition.

$$\left.\begin{array}{l} \arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \\ \arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array}\right\} \text{ sei die Umkehrfunktion von } \left\{\begin{array}{l} \cos : [0,\pi] \to [-1,1] \\ \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] \\ \tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \end{array}\right. .$$

7.8 Lemma.

(a) $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\ (-1 < x < 1)$

(b) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\ (-1 < x < 1)$

(c) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Beweis:

(a) Sei $-1 < x < 1$ und $y := \arccos x$. Dann $y \in]0, \pi[$ und $x = \cos y$, also $0 < \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.
$\arccos'(x) = \dfrac{1}{\cos'(y)} = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y := \arctan x$. Dann $x = \tan y$ und $\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(y)} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Bemerkung (Die arctan-Reihe)
$\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$
Beweis:
$\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ (|x| < 1) \overset{6.14}{\Longrightarrow} \arctan x = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ (|x| < 1)$.
Wegen $\arctan 0 = 0$ gilt $C = 0$.

Später werden wir zeigen, daß die Gleichung auch für $x = 1$ gilt. Damit ergibt sich
$\dfrac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$.

Nachtrag zu §5: **Abzählbare Mengen**

Definition.

Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn $M = \emptyset$ ist oder wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf M gibt, d.h. wenn M sich in der Form $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ darstellen läßt. Andernfalls heißt M *überabzählbar.*

Bemerkungen.

1. Jede endliche Menge $M = \{a_0, ..., a_k\}$ ist abzählbar, denn $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $x_n := \begin{cases} a_n & \text{für } n \leq k \\ a_k & \text{für } n > k \end{cases}$.
2. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $x_{2k} := k$ und $x_{2k+1} := -k$.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.
   Beweis: Sei $c \in A \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $a_n := \begin{cases} x_n & \text{falls } x_n \in A \\ c & \text{sonst} \end{cases}$.

Definition einer bijektiven Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$\sigma(k) := \begin{cases} (i, n) & \text{falls } k = n^2 + i \text{ mit } i < n \\ (n, n-j) & \text{falls } k = n^2 + n + j \text{ mit } j \leq n \end{cases}$.

Der Beweis, daß σ tatsächlich eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist, sei dem Leser überlassen.

Folgerung. Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Lemma 5.17.

(a) Ist M abzählbar und $f : M \to M'$ surjektiv, so ist auch M' abzählbar.

(b) Sind die Mengen M_1, M_2 abzählbar, so ist auch $M_1 \times M_2$ abzählbar.

(c) Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist wieder abzählbar.

Beweis:

(a) ist trivial.

(b) Ist $M_1 = \emptyset$ oder $M_2 = \emptyset$, so auch $M_1 \times M_2 = \emptyset$. Ist $M_i = \{x_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ $(i = 1, 2)$, so gilt $M_1 \times M_2 = f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, wobei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M_1 \times M_2$, $(k, l) \mapsto (x_{1k}, x_{2l})$.

(c) Gilt $M_i = \{x_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ (für jedes $i \in \mathbb{N}$), so ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i = f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, wobei $f(i, j) := x_{ij}$.

Satz 5.18.

(a) Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(b) Das Intervall $]0, 1[= \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ ist überabzählbar.

(c) Jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, das mehr als einen Punkt enthält, ist überabzählbar.

(d) Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind überabzählbar.

Beweis:

(a) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{-q : q \in \mathbb{Q}_+\}$, wobei $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n+1} : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$.

(b) Wir verwenden das *Cantorsche Diagonalverfahren.*

Sei $\{x_n : 1 \leq n \in \mathbb{N}\} \subseteq]0, 1[$, und sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}10^{-k}$ die normierte Dezimalbruchdarstellung von x_n.

Sei $y := \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n}$ mit $c_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_{nn} = 1 \end{cases}$. Dann ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n}$ ein normierter Dezimalbruch und $y \in]0, 1[$. Ferner gilt $\forall n \geq 1 (c_n \neq a_{nn})$, also nach Satz 4.20 $y \notin \{x_n : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Seien $a, b \in I$ $(a \neq b)$ und $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x-a}{b-a}$. Dann gilt $]0, 1[= f(]a, b[)$.

Wäre also I abzählbar, so auch $]0, 1[$.

(d) Wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar, so auch $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Nach (c) ist $\mathbb{R}$ jedoch überabzählbar.