Linearkombinationen, lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

1. Linearkombinationen, lineares Erzeugnis

In einem Vektorraum V über einem Körper K heißt jeder Ausdruck der Form

$$a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{x_n} \quad (\text{mit } a_1, a_2, \ldots, a_n \in K \text{ und } \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n} \in V)$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$.
(Dabei ist n eine natürliche Zahl ≥ 1.)

Ist eine Menge $M = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\}$ von Vektoren fest vorgegeben, so heißt die Menge **aller** damit gebildeten Linearkombinationen das *lineare Erzeugnis* von M (engl. "*span*"):

$$span\,(M) = \{a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{x_n} \;:\; a_1, a_2, \ldots, a_n \in K\}.$$

Hinweis: Eine solche Menge ist offenbar gegenüber den Vektorraum-Operationen abgeschlossen, bildet also selbst wieder einen Vektorraum. Daher wird $span\,(M)$ oft auch als der von M erzeugte (oder "aufgespannte") *Unterraum* bezeichnet.

Beispiele für Linearkombinationen im $\mathbb{R}^2$ sind etwa

$$3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + (-2,5)\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},$$

aber auch

$$5\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \qquad (n = 1 \text{ ist erlaubt!}).$$

Beispiel für das Erzeugnis einer einelementigen Menge (d. h. eines einzelnen Vektors) ist etwa

$$span\,(\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}) = \{a\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \;:\; a \in \mathbb{R}\},$$ d. h. alle Vielfachen des gegebenen Vektors.

Für $M = \{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}\}$ hat man

$$span\,(M) = span\,(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}) = \{a\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Beachte: Da der zweite erzeugende Vektor ein Vielfaches des ersten ist, würde jeder der beiden Vektoren auch bereits alleine denselben Unterraum aufspannen! Dagegen ist etwa

$$span\,(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) = \{a\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

(Das sieht man vielleicht nicht auf Anhieb, aber weiter unten wird klar, warum sich das ohne weitere Rechnung sofort sagen lässt.)

Ein Beispiel im $\mathbb{R}^3$:

$$span\ (\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \ldots ?$$

2. **Lineare Unabhängigkeit**

An den obigen Beispielen sieht man, dass es wünschenswert ist, die erzeugende Menge eines Spans so zu "optimieren", dass sie nicht unnötig viele Vektoren enthält. Dazu dient die folgende Begriffsbildung.

> Eine Menge $M = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}\}$ von Vektoren heißt *linear unabhängig*, wenn sich kein $\overrightarrow{x_i}$ als Linearkombination der übrigen darstellen lässt.

Äquivalente Formulierungen hierfür sind:

® Man kann keinen Vektor aus M weglassen, ohne dass dadurch der Span verkleinert wird.

® Aus $a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{0}$ folgt immer $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.
(*in Worten*: Der Nullvektor lässt sich nicht als "echte" Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ darstellen.)

Die letztgenannte Eigenschaft liefert auch ein praktisches Verfahren, mit dem man im konkreten Fall die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren explizit nachprüfen kann.

Spezialfälle:

® Im Falle einer einelementigen Menge M hat man sich auf folgende Konvention geeinigt: ein einzelner Vektor $\overrightarrow{x}$! $\overrightarrow{0}$ gilt immer als *linear unabhängig*, der Nullvektor selbst dagegen ist *linear abhängig*. (Das wirkt zunächst etwas gequält, aber damit bleibt das obige Prüf-Kriterium formal immer gültig!)

® Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind.

Wirklich Rechnen und/oder Denken muss man also erst ab drei Vektoren!

Beispiele im ʻ^3:

(1) Die drei Vektoren $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

Begründung: $\overrightarrow{x_2}$ ist Linearkombination der beiden anderen, nämlich $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_3}$.
(Das heißt auch, dass man $\overrightarrow{x_2}$ weglassen kann, ohne den Span zu verkleinern.
Außerdem liefert $\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{0}$ eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors.)

(2) Die drei Vektoren $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind offenbar linear unabhängig.

(3) Ein etwa schwierigeres Beispiel liefern $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es gibt zwar keine "offensichtlichen" Abhängigkeiten, zum tatsächlichen Nachweis der Unabhängigkeit kommt man aber um das explizite Nachrechnen des obigen Kriteriums nicht herum. Man macht also den Ansatz $a\vec{x_1} + b\vec{x_2} + c\vec{x_3} = \vec{0}$ und erhält daraus für *a, b, c* das *lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= 0, \\ 2a + 3b + c &= 0, \\ 3a + b + 2c &= 0, \end{aligned}$$

aus dem man mit etwas Mühe tatsächlich herausbekommt, dass nur $a = b = c = 0$ möglich ist.

3. **Basis und Dimension**

Jeder Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich offenbar schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d. h. die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen den gesamten $\mathbb{R}^2$ auf. Das gilt auch für viele andere Paare von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$, während der Span eines einzelnen Vektors offenbar nie den gesamten Raum ergeben kann. Andererseits findet man unter drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ garantiert immer mindestens einen, der sich als Linearkombination der beiden anderen schreiben lässt, d. h. drei (oder mehr) Vektoren im $\mathbb{R}^2$ können nie linear unabhängig sein.

Diese Erkenntnis ist die Motivation für folgende Definition:

> Es seien $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ Vektoren eines Vektorraums *V*. Die Menge $\left\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\right\}$ heißt *Basis* von V, wenn die folgenden beiden Aussagen gelten:
>
> (i) $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ linear unabhängig
>
> (ii) $span(\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}) = V$

Beachte: Wegen (i) kann man keinen Vektor *weglassen*, ohne (ii) zu verletzen; wegen (ii) kann man keinen Vektor *hinzufügen*, ohne (i) zu verletzen. Man sagt auch: Eine Basis ist sowohl ein "minimales Erzeugendensystem" als auch eine "maximale linear unabhängige Menge".

Aus der Tatsache, dass man bei einer Basis weder Vektoren weglassen noch hinzufügen kann, folgt nicht etwa, dass die Basis eines Vektorraums eindeutig ist. Man kann nämlich durchaus einzelne Vektoren gegen geeignete andere austauschen, ohne dass die Basis-Eigenschaft verloren geht. Ein Vektorraum hat daher viele verschiedene Basen. Es gilt aber:

> Alle Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente. Diese Anzahl heißt die *Dimension* des Vektorraums.

In den reellen Standardvektorräumen benutzt man gerne die folgenden "Standardbasen":

$\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Die üblichen "Komponenten" eines Vektors sind in diesem Sinne also nichts anderes als die Koeffizienten, die man für die Darstellung des Vektors als Linearkombination dieser speziellen Basisvektoren benötigt.

An diesen Standardbasen sieht man auch, dass tatsächlich $dim\ \mathbb{R}^n = n$ gilt, d. h. unsere neue Definition stimmt mit dem "naiven" Dimensionsbegriff überein.

(Spätestens jetzt ist auch klar, warum beim letzten Beispiel auf Seite 1 der ganze $\mathbb{R}^2$ herauskommen muss: Die beiden Vektoren sind offensichtlich nicht Vielfache voneinander, also linear unabhängig. Im $\mathbb{R}^2$ sind zwei linear unabhängige Vektoren aber bereits notwendigerweise eine Basis.)