Dr. V. Gradinaru
D. Devaud
A. Hiltebrand

Herbstsemester 2014

Lineare Algebra für D-ITET, D-MATL, RW

ETH Zürich
D-MATH

Beispiellösung für Serie 6

Aufgabe 6.1

6.1a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (i) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 a^{(1)} + ... + \lambda_n a^{(n)} = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Richtig. Denn die Definition von linear abhängig war gerade, dass eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren den Nullvektor ergibt. Die Koeffizienten λ_1,..., λ_n dieser Linearkombination lösen dann das obige Gleichungssystem.

√ (ii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

Richtig. Denn die Dimension eines Vektorraums ist die Anzahl Basisvektoren und damit auch die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Da $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, können höchstens n Vektoren linear unabhängig sein, und damit also $k \leq n$ (Satz 4.3).

(iii) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

Falsch. Ein Erzeugendensystem ist nicht notwendigerweise linear unabhängig, es kann mehr Vektoren als nötig haben, um den Vektorraum aufzuspannen. Die minimale Anzahl Vektoren in einem Erzeugendensystem, so dass dieses eben noch erzeugend ist, ist gerade die Dimension des Vektorraums, hier also n (Satz 4.3). Es kann aber durchaus auch $k > n$ sein.

√ (iv) Seien $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann muss gelten $k \leq n$.

Richtig. Eine Basis ist ein linear unahängiges Erzeugendensystem, in anderen Worten ein minimales Erzeugendensystem. Die minimale Anzahl Vektoren in einem Erzeugendensystem, so dass dieses eben noch erzeugend ist, ist gerade die Dimension des Vektorraums, hier n. Somit muss sogar gelten $k = n$ (Satz 4.3), insbesondere also $k \leq n$.

√ (v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

Richtig. Denn ein Erzeugendensystem ist nicht notwendigerweise ein minimales Erzeugendensystem (= Basis).

(vi) Falls die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

Falsch. Für $k < n$ können die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)}$ linear unabhängig sein, ohne eine Basis für $\mathbb{R}^n$ zu sein.

6.1b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

$\surd$ (i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\surd$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

Lösung: Für ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ brauchen wir nach Satz 4.3 mindestens 3 Vektoren. Genau dann wenn wir 3 linear unabhängige Vektoren auswählen können, bilden alle Vektoren zusammen ein Erzeugendensystem.
Dies lässt sich wie folgt einsehen:

- " $\Rightarrow$ ": Die 3 ausgewählten Vektoren bilden nach Satz 4.3 eine Basis und sind also insbesondere erzeugend. Damit sind aber alle Vektoren zusammen erzeugend. (Durch die Hinzunahme von weiteren Vektoren können wir noch immer den ganzen Raum erzeugen; wähle z. B. 0 als Koeffizienten für die weiteren Vektoren in der Linearkombination.)
- " $\Leftarrow$ ": Durch Anwenden des Gaussverfahren (siehe Seite 82 im Buch) können wir r linear unabhängige Vektoren auswählen, wobei r der Rang der dabei auftretenden Matrix ist. Da alle Vektoren zusammen ein Erzeugendensystem bilden, gilt $r = n$ (ebenfalls Seite 82). Dabei ist n die Dimension des Vektorraums, hier also gilt $n = 3$. Also können wir 3 linear unabhängige Vektoren auswählen.

(i) Die ersten drei Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig. Deshalb handelt es sich hier um ein Erzeugendensystem.

(ii) Durch Anwenden des Gaussverfahren

$$\begin{array}{c|ccc|}\hline & 1 & 1 & 2\\ & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\\hline\end{array} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\\hline\end{array}$$

sehen wir, dass die Matrix den Rang 3 hat. Deshalb handelt es sich auch hier um ein Erzeugendensystem.

(iii) Der dritte Vektor ist 2-mal der erste, somit sind die drei Vektoren linear abhängig und können somit kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ sein.
Die lineare Abhängigkeit sieht man formal aus der Tatsache, dass

$$2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix} = 0.$$

6.1c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(i) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\surd$ (ii) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

Lösung: Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Nach Satz 4.3 besteht eine Basis im $\mathbb{R}^3$ aus genau 3 Vektoren.

(i) Die Vektoren können keine Basis sein, da es vier Vektoren sind.

(ii) Die Vektoren bilden eine Basis, da sie gem. Aufgabe 6.1b) ein Erzeugendensystem sind und es genau drei Vektoren sind. Aus Satz 4.3 folgt damit, dass sie zusätzlich erzeugend und damit eine Basis sind.

(iii) Die Vektoren sind keine Basis, da sie gem. Aufgabe 6.1b) kein Erzeugendensystem sind.

Aufgabe 6.2

6.2a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ (Begründung).

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}.$$

Lösung: Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten: $r = k = n = 3$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr|} -2 & -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{array} \overset{(E)_1}{\to} \begin{array}{r|rrrrrr|} & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{array}$$

$$\overset{(E)_2}{\to} \begin{array}{|rrrrrr|} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 8 \end{array}$$

Wir können also z. B. die Pivot-Vektoren als Basis wählen:

$$\left\{ \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix} \right\}.$$

Wir können aber statt des 4. Vektors $\begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}$ auch den 6. Vektor $\begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$ nehmen, wie man durch Vertauschen der entsprechenden Spalten im Gaussschema leicht sieht. Ebenso können wir statt des 2. Vektors $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ den 5. Vektor $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ oder statt des 1. Vektors $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ den 3. Vektor $\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$ nehmen.

Als Basis könnte man auch eine andere Kombination wie z. B.

$$\left\{ \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix} \right\}$$

wählen, aber die Tatsache, dass diese Auswahl eine Basis bildet, sieht man anhand vom Schema nicht.

6.2b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c \\ b+c \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Lösung: Sei U der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Dimension von U ist gleich der Anzahl Vektoren, die in U eine Basis bilden. Schreibe nun

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{bmatrix}.$$

Aus der Vorlesung (im Buch auf Seite 83) wissen wir, dass gilt:
Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A ist gleich $r = \text{Rang}\, A$.
Eine Basis von U kann also höchstens aus r Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also $d := \dim U \leq r$.
Wegen Satz 4.3 i) aus dem Buch wissen wir zudem, dass mehr als d Vektoren linear abhängig in U sind. Es folgt also, dass $\dim U = \text{Rang}\, A$, somit können wir die Dimension von U mit dem Gaussverfahren berechnen.

$$\begin{array}{|ccc|} \hline a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \\ \hline \end{array}$$

<u>Fall $a = b = 0$:</u>

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \\ \hline \end{array} \overset{(c\neq 0)}{\to} \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- falls $c = 0$, gilt $d = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $d = r = 2$.

<u>Fall $a = 0, b \neq 0$:</u>

- für $\underline{c = 0}$ gilt

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \text{ also } d = r = 2,$$

- für $\underline{c \neq 0}$ gilt

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & b+c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \\ \hline \end{array} \text{ also } d = r = 3.$$

Fall $a \neq 0$:

$$\begin{array}{|ccc|} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{array} \overset{(E)_1}{\to} \begin{array}{|ccc|} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \end{array} \overset{(E)_2}{\to} \begin{array}{|ccc|} a & 0 & -c \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & \frac{b(c-ab)}{2a} \end{array}$$

- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} = 0$ (also falls $b = 0$ oder $c = ab$): $d = r = 2$,
- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} \neq 0 : d = r = 3$.

Aufgabe 6.3

Sei $\mathcal{P}_4$ der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_4$, aber dies ist nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^i \text{ fü } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Lösung: Wichtig für uns ist folgende Tatsache, die aufgrund der Isomorphie jedes reellen, n-dimensionalen Vektorraums zum $\mathbb{R}^n$ gilt (siehe Seite 82 im Buch):
Sei V ein reeller, n-dimensionaler Vektorraum. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann gilt: Eine Liste von Vektoren aus V ist genau dann eine Basis von V, wenn die entsprechenden Koordinatenvektoren bezüglich $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Wir bestimmen die Koordinatenvektoren der Legendre-Polynome bezüglich der Monombasis und überprüfen, dass diese eine Basis bilden. Wir beginnen mit dem Ausführen der Differentiation:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Jetzt bestimmen wir die Koordinaten $p^{(i)} \in \mathbb{R}^4$ des Vektors P_i für $i = 0, \ldots, 3$ bezüglich der Monombasis $a^{(0)} = 1$, $a^{(1)} = x$, $a^{(2)} = x^2$, $a^{(3)} = x^3$.

Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
P_0 = 1 \quad &= \quad 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
P_1 = x \quad &= \quad 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x &= \quad 0 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x^3
\end{aligned}$$

Damit haben wir die folgenden Koordinatenvektoren

$$p^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Anwenden des Gaussverfahrens ist hier trivial: Wir landen direkt beim Endschema

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}}$$

Damit ist der Rang gleich 4. Wir können somit folgern, dass die Koordinatenvektoren $p^{(0)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und damit die Legendre-Polynome P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Aufgabe 6.4

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

6.4a) Geben Sie das Bild der Matrizen an und bestimmen Sie insbesondere jeweils eine Basis des Bildes.

Lösung: Nach Satz 6.1 im Buch gilt für eine allgemeine $m \times n$ Matrix A, dass

$$\mathrm{Bild}\, A = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\},$$

wobei $a^{(i)}$ die i-te Spalte von A bezeichnet.

Damit haben wir für die gegebenen Matrizen

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}\, A &= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathrm{Bild}\, B &= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathrm{Bild}\, C &= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Aus diesen Vektoren können wir wie in Aufgabe 6.2 eine Basis bestimmen, indem wir den Gauss-Algorithmus anwenden und dann die Pivotvektoren auswählen.

Der Gauss-Algorithmus führt zu

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}}$$

Also sind bei allen gegebenen Matrizen die ersten zwei Spalten Pivotspalten. Daher sind $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ eine Basis für $\mathrm{Bild}\, A$, $\mathrm{Bild}\, B$ sowie $\mathrm{Bild}\, C$ und weiter gilt

$$\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{Bild}\, B = \mathrm{Bild}\, C = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da wir hier jeweils 2 linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ haben, bilden diese gemäss Satz 4.3iii) eine Basis vom $\mathbb{R}^2$ und wir haben daher

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{Bild} B = \operatorname{Bild} C = \mathbb{R}^2.$$

6.4b) Geben Sie die Dimension des Bildes und des Kerns an (vergleiche dazu auch Serie 5 Aufgabe 5.5). Überprüfen Sie dann, dass Satz 6.1iii) für die gegebenen Matrizen erfüllt ist, d. h. dass für jede Matrix $M \in \{A, B, C\}$

$$\dim(\operatorname{Kern} M) + \dim(\operatorname{Bild} M) = n$$

gilt, wobei n die Anzahl Spalten von M bezeichnet.

Lösung: Die Dimension eines Vektorraums ist definiert als die Anzahl Vektoren in einer Basis dieses Vektorraums. Gemäss Teilaufgabe 6.4a) besteht die Basis von $\operatorname{Bild} A$, $\operatorname{Bild} B$ sowie $\operatorname{Bild} C$ jeweils aus 2 Vektoren. Daher gilt

$$\dim(\operatorname{Bild} A) = \dim(\operatorname{Bild} B) = \dim(\operatorname{Bild} C) = 2.$$

Gemäss Aufgabe 5.5 der Serie 5 besteht eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ aus einem Vektor und eine Basis von $\operatorname{Kern} C$ aus 2 Vektoren. Das führt auf

$$\dim(\operatorname{Kern} A) = 1$$
$$\dim(\operatorname{Kern} C) = 2.$$

$\operatorname{Kern} B$ besteht nur aus dem Nullvektor und damit gilt per Definition (siehe S. 80)

$$\dim(\operatorname{Kern} B) = 0.$$

Die Anzahl Spalten n der Matrix ist 3 für A, 2 für B und 4 für C.

Zusammengefasst haben wir folgendes:

M	$\dim(\operatorname{Kern} M)$	$\dim(\operatorname{Bild} M)$	n
A	1	2	3
B	0	2	2
C	2	2	4

Wir sehen also, dass für alle gegebenen Matrizen

$$\dim(\operatorname{Kern} M) + \dim(\operatorname{Bild} M) = n$$

gilt.