5.7 Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension

Seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren aus einem Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$. Die Menge aller *Linearkombinationen* von $v_1, \dots, v_n$, nämlich

$$\operatorname{lin}(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \,\middle|\, \alpha_k \in \mathbb{K} \right\}$$

bildet einen linearen Unterraum von V. Und zwar ist es der kleinste Unterraum von V, der die vorgegebenen Vektoren enthält. Man nennt ihn den von $v_1, \dots, v_n$ *erzeugten* Unterraum oder auch die *lineare Hülle* oder den *Spann* dieser Vektoren.

Denn sind $u, v \in \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_n)$ der Form $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ und $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$, so folgt $u + v = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$ und $\lambda \cdot u = (\lambda\alpha_1)v_1 + \dots + (\lambda\alpha_n)v_n$. Also sind auch $u + v$ und $\lambda \cdot u$ (für alle $\lambda \in \mathbb{K}$) wieder von der behaupteten Form.

5.7.1 Beispiele (a) Die eben diskutierte Gerade $g_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ wird von dem fest gewählten Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ erzeugt.

(b) Die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugen die x-y-Ebene in $\mathbb{R}^3$.

(c) Hier ist ein Beispiel einer weiteren Ebene in $\mathbb{R}^3$ erzeugt von zwei Vektoren:

$$E = \operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also ist

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.7.2 Definition Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ $(n \in \mathbb{N})$ heisst *linear abhängig*, falls es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gibt, die nicht alle gleichzeitig Null sind, so dass gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0\,.$$

Andernfalls heisst die Menge von Vektoren *linear unabhängig*.

Eine andere Möglichkeit, den Begriff zu formulieren ist folgende:

5.7.3 Bemerkung *Eine Menge, die nur aus einem Vektor v besteht, ist genau dann linear abhängig, wenn v der Nullvektor ist. Eine Menge $\{v, w\}$ aus zwei Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn $w = \alpha v$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ oder wenn $v = 0$ ist. Und für $n > 2$ schliesslich gilt: die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn sich einer der v_j als Linearkombination der anderen v_i $(i \neq j)$ schreiben lässt.*

5.7.4 Beispiel Zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie auf einer Gerade liegen. Drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^2$ sind die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig, denn $w = i \cdot v$.

5.7.5 Definition Eine (endliche oder unendliche) Teilmenge M eines Vektorraums V wird als *Erzeugendensystem* von V bezeichnet, falls sich jedes Element von V als Linearkombination einer passenden Auswahl endlich vieler Vektoren aus M schreiben lässt, das heisst

$$V = \operatorname{lin}(M) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \mid \alpha_k \in \mathbb{K}, v_k \in M, n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Unter einer *Basis* von V versteht man eine geordnete Menge $\mathcal{B}$ von Elementen von V, die ein Erzeugendensystem von V bilden und zusätzlich linear unabhängig sind. (Falls $\mathcal{B}$ aus unendlich vielen Elementen besteht, soll das heissen, dass jede endliche Teilmenge von $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.) Eine Basis ist also ein minimal gewähltes Erzeugendensystem.

5.7.6 Beispiele (a) Die Vektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Denn sie sind linear unabhängig und spannen den ganzen Raum auf:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 \in \operatorname{lin}(e_1, e_2) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Allgemeiner bezeichnet man mit e_j (für $1 \leq j \leq n$) den Vektor in $\mathbb{R}^n$, der an der j-ten Stelle den Eintrag 1 und sonst nur Einträge Null hat. Diese Vektoren sind die sogenannten kanonischen Basisvektoren und $(e_1, \ldots, e_n)$ ist die *Standardbasis* des $\mathbb{R}^n$.

(b) Die eben definierten Vektoren e_j können wir auch als Elemente des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$ auffassen. Darin bilden sie wiederum eine Basis.

(c) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Da v_1 und v_2 nicht dieselbe Gerade aufspannen, sind sie linear unabhängig. Ausserdem spannen sie den gesamten Vektorraum auf. Denn ist $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, so führt der Ansatz $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ auf das folgende lineare Gleichungssystem für α_1 und α_2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} .$$

Dies System hat die eindeutige Lösung $\alpha_1 = \frac{x+y}{3}$, $\alpha_2 = \frac{2y-x}{3}$. Also lässt sich jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von v_1 und v_2 schreiben.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Die Menge der reellen Polynome von Höchstgrad n, nämlich $P_n := \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_k \in \mathbb{R}\}$ ist ein linearer Unterraum des Vektorraums aller reellen Polynome, und $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ ist eine Basis für P_n.

(e) Wir können die Menge der komplexen Zahlen als reellen Vektorraum auffassen, indem wir bei der Skalarmultiplikation nur die Multiplikation mit reellen Zahlen zulassen. In diesem reellen Vektorraum sind die Zahlen 1 und i linear unabhängig und bilden eine Basis für $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

5.7.7 Hauptsatz *Wir bezeichnen den Grundkörper der Skalare, also entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ wieder mit $\mathbb{K}$. Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, das heisst, es gebe eine endliche Teilmenge von Vektoren, die ganz V erzeugen. Dann hat V eine Basis und jede der Basen von V besteht aus gleichvielen Elementen. Diese Anzahl an Elementen einer jeden Basis nennen wir die Dimension von V über $\mathbb{K}$.*

Man kann zeigen, dass auch Vektorräume, die nicht endlich erzeugt sind, immer eine Basis haben. Allerdings besteht diese Basis dann aus unendlich vielen Elementen. Der Raum der Polynome hat eine abzählbare, unendliche Basis, nämlich $(x^n \mid n \in \mathbb{N}_0)$. Jede Basis des Funktionenraums $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$ besteht sogar immer aus überabzählbar vielen Elementen. Deshalb ist es schwierig, eine Basis explizit anzugeben. Der Begriff der Basis ist für solche überabzählbar-dimensionalen Räume nicht besonders praktisch. Wir werden uns jetzt im folgenden stets auf endlichdimensionale Vektorräume beschränken.

5.7.8 Beispiele Für einige Vektorräume haben wir bereits Basen angegeben. Also können wir die Dimensionen ablesen, nämlich: $\dim(\{0\}) = 0$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{R}}(P_n) = n+1$, (für alle $n \in \mathbb{N}$). Der Vektorraum der reellen $m \times n$-Matrizen hat die Dimension $m \cdot n$ über $\mathbb{R}$. Weiter gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$. Ausserdem ist die Dimension jeder Ebene im $\mathbb{R}^3$ gleich 2, wie es der Anschauung entspricht.

Die Dimension kann davon abhängen, über welchem Grundkörper wir den Vektorraum betrachten. Zum Beispiel ist die Dimension von $\mathbb{C}$, aufgefasst als komplexer Vektorraum, gleich 1. Dagegen ist Dimension von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ gleich 2, denn wie eben bemerkt haben, bilden die Zahlen 1 und i eine Basis über $\mathbb{R}$.

Zum Beweis des Hauptsatzes: Die Existenz einer Basis ist nicht schwierig einzusehen. Ist nämlich $M = (v_1, \ldots, v_n)$ irgendein endliches Erzeugendensystem für V, so können wir schrittweise linear abhängige Vektoren darin streichen, bis eine Basis übrigbleibt. Genauer gehen wir so vor: Ist die Menge M linear abhängig, so gibt es darin einen Vektor, etwa v_j, der bereits in der linearen Hülle der anderen Vektoren aus M enthalten ist. Also ändert sich die lineare Hülle nicht, wenn wir v_j aus M streichen. Sind die verbliebenen Vektoren linear unabhängig, so sind wir fertig. Ist das noch nicht der Fall, dann wiederholen wir das Streichen von Vektoren, bis wir schliesslich bei einer Basis angelangt sind. Damit haben wir eigentlich gezeigt, dass jedes Erzeugendensystem eine Basis von V enthält.

Der schwierige Teil des Hauptsatzes ist die Aussage, dass alle Basen gleich viele Elemente haben. Wir wollen dies durch einen Widerspruchsbeweis zeigen. Nehmen wir also an, es gebe zwei Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ und es sei $n < m$.

Jetzt werden wir schrittweise die Vektoren in $\mathcal{A}$ durch Vektoren aus $\mathcal{B}$ ersetzen, ohne dass sich dabei jeweils die lineare Hülle ändert. Nach n Schritten werden noch Vektoren aus $\mathcal{B}$ übrigbleiben, die sich dann als linear abhängig von $(w_1, \ldots, w_n)$ herausstellen, und damit ist der Widerspruch erreicht.

1. Schritt: Wir schreiben w_1 als Linearkombination der v_j in der Form

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\,.$$

Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig und daher $w_1 \neq 0$, gibt es einen Index j mit $\alpha_j \neq 0$. Nach eventueller Umsortierung der v_j können wir annehmen, dass $\alpha_1 \neq 0$. Dann folgt:

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}(w_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n) \in \operatorname{lin}(w_1, v_2, \ldots, v_n)\,.$$

Also erzeugt $\mathcal{A}' := (w_1, v_2, \ldots, v_n)$ den ganzen Vektorraum V.

2. Schritt: Jetzt schreiben wir w_2 als Linearkombination von w_1 und $v_2, \ldots, v_n$ in der Form:

$$w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 \cdots + \beta_n v_n\,.$$

Da w_1 und w_2 linear unabhängig sind, gibt es einen Index $j \geq 2$ mit $\beta_j \neq 0$. Nach eventueller Umnumerierung von $v_2, \ldots, v_n$ können wir annehmen, dass $\beta_2 \neq 0$. Dann folgt:

$$v_2 = \frac{1}{\beta_2}(w_2 - \beta_1 w_1 - \beta_3 v_3 \cdots - \beta_n v_n) \in \operatorname{lin}(w_1, w_2, v_3 \ldots, v_n)\,.$$

Also erzeugt $\mathcal{A}'' := (w_1, w_2, v_3 \ldots, v_n)$ ebenfalls den ganzen Vektorraum V.

Entsprechend fahren wir fort. Nach n Schritten sind alle v_j ausgetauscht, und es folgt, dass die Menge $\mathcal{A}^{(n)} = (w_1, \ldots, w_n)$ wiederum den ganzen Vektorraum V erzeugt. Das bedeutet, dass die noch verbleibenden Vektoren $w_{n+1}, \ldots, w_m$ aus der Basis $\mathcal{B}$ als Linearkombinationen der Vektoren $(w_1, \ldots, w_n)$ geschrieben werden können. Das ist aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$. q.e.d.

5.7.9 FOLGERUNG *(a) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich erzeugten Vektorraums kann zu einer Basis ergänzt werden.*

(b) Ist $\dim V = n$, *so bildet jede Teilmenge aus* n *linear unabhängigen Vektoren eine Basis.*

(c) Ist W *ein linearer Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraums* V, *so ist auch* W *endlich erzeugt und es gilt*

$$\dim W \leq \dim V\,.$$

Gleichheit tritt nur genau dann ein, wenn $W = V$ *ist.*

Beweis. (a) Sei $\mathcal{B}$ die linear unabhängige Teilmenge und $\mathcal{A}$ eine Basis von V. Dann können wir, wie im Beweis des Hauptsatzes gezeigt, in der Basis $\mathcal{A}$ schrittweise Elemente durch Vektoren aus $\mathcal{B}$ ersetzen, ohne dabei die lineare Hülle zu ändern. Sind alle Vektoren aus $\mathcal{B}$ eingefügt, erhalten wir die gewünschte Basis, die $\mathcal{B}$ enthält.

(b) Dies ergibt sich direkt aus (a).

(c) Ist $\dim V = n$, so besteht in V und damit auch in W jede linear unabhängige Teilmenge aus höchstens n Elementen. Eine maximale linear unabhängige Teilmenge von W muss aber bereits ein Erzeugendensystem für W sein. Also hat W eine Basis, die wir nach (a) zu einer Basis von V ergänzen können. Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Wenden wir diese Folgerungen nun auf Lösungsmengen homogener Gleichungssysteme an. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen im Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und sei $\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$. Dann ist $\mathbb{L}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{K}^n$ und daher gilt $\dim(\mathbb{L}) \leq n$. Die Dimension von $\mathbb{L}$ gibt an, wieviele freie Parameter in der allgemeinen Lösung auftreten, und ist unabhängig davon, welche Beschreibung der Lösungsmenge man gewählt hat. Das bedeutet auch, dass der Rang der Matrix A wohldefiniert ist. Wir können nämlich festsetzen $\operatorname{Rang}(A) = n - \dim \mathbb{L}$.

5.7.10 Beispiele (1) Das Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ 3x - y & = & 0 \end{array}$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 3\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Diese Menge wird erzeugt von dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Also ist hier $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{L} = 1$ und $\operatorname{Rang}(A) = 2$.

(2) Das Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ -4x - 2y + 2z & = & 0 \end{array}$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$. In diesem Fall gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{L} = 2$ und $\operatorname{Rang}(A) = 1$, die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{L}$.

(3) Hier ein Gleichungssystem mit komplexen Koeffizienten:

$$\begin{array}{rcl} 2x + iy - z & = & 0 \\ ix - y + 2z & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge in $\mathbb{C}^3$ ist $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} (1-2i)\alpha \\ (4+i)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\}$ und wird erzeugt von dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 1-2i \\ 4+i \\ 1 \end{pmatrix}$. Also gilt hier $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{L} = 1$.

Hier ist noch eine andere Art, den Rang einer Matrix zu interpretieren:

5.7.11 Bemerkung *Sei A eine $m \times n$-Matrix, und fassen wir die Zeilen von A als Vektoren in $\mathbb{R}^n$ auf, die darin den Unterraum U erzeugen. Dann ist* $\dim(U) = \mathrm{Rang}(A)$.

Beweis. Bei den elementaren Zeilenumformungen, die man macht, um die Matrix A auf Zeilenstufenform zu bringen, bleibt die lineare Hülle der Zeilen jeweils unverändert. Ist aber A in Zeilenstufenform, dann tragen die Nullzeilen nichts zur linearen Hülle bei, und die insgesamt r Nichtnullzeilen erzeugen offenbar einen linearen Unterraum der Dimension r. q.e.d.

5.7.12 Beispiel Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ hat den Rang 2, denn die entsprechende Zeilenstufenform enthält genau eine Nullzeile. Die Zeilen der Matrix A, aufgefasst als Vektoren $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, erzeugen in $\mathbb{R}^3$ eine Ebene, denn der Vektor $w = 2u + v$ ist von u, v linear abhängig.

Daraus ergibt sich für quadratische Matrizen die folgende Beobachtung:

5.7.13 Folgerung *Eine $n \times n$-Matrix A hat genau dann den Rang n, wenn die Zeilen von A, aufgefasst als Vektoren in $\mathbb{R}^n$, linear unabhängig sind. Dies ist auch äquivalent dazu, dass die Spalten von A, aufgefasst als Vektoren im $\mathbb{R}^n$, linear unabhängig sind.*

Beweis. Wie eben bemerkt, ist der Rang von A genau dann gleich n, wenn die Zeilen bereits den ganzen $\mathbb{R}^n$ aufspannen, also eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Ein Satz aus n Vektoren in $\mathbb{R}^n$ ist aber genau dann eine Basis, wenn die n Vektoren linear unabhängig sind.

Nun haben wir bereits früher gesehen, dass der Rang von A genau dann gleich n ist, wenn die Determinante von A nicht verschwindet. Ausserdem stimmt die Determinante von A mit der Determinante der transponierten Matrix A^t, bei die Zeilen als Spalten geschrieben werden, überein. Deshalb gilt auch die entsprechende Aussage über die Spalten von A. q.e.d.

Man kann also mithilfe der Determinante feststellen, ob ein vorgelegter Satz aus n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist und damit eine Basis bildet.

5.7.14 Beispiel Die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$, denn die Determinante der aus diesen drei Spalten gebildeten Matrix A ist $\det(A) = 18$.