Dr. O. Wittich
S. Bleß, M. Sc.

Aachen, 12. September 2017

# Analysis

# Übungsaufgaben mit Lösungen

im Vorkurs Mathematik 2017, RWTH Aachen University

## — Intervalle, Beschränktheit, Maxima, Minima —

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils, ob es sich bei den angegebenen Mengen um Intervalle handelt. Geben Sie in diesem Fall bitte die Intervallschreibweise an.

a) $[0,1] \cup (1,2]$, b) $[-1,0] \cup [2,3]$ c) $[-2,3] \cap (-2,4)$, d) $(2,5] \setminus (4,5]$,

e) $(-\infty,5] \cap (1,6)$, f) $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$, g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, h) $\{-1,7\}$,

i) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, j) $(0,2) \cap \mathbb{Q}$, k) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$, l) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 7\}$.

**Lösung:**

a) $[0,2]$, b) kein Intervall, c) $(-2,3]$, d) $(2,4]$,

e) $(1,5]$, f) $[0,\infty)$, g) kein Intervall, h) kein Intervall,

i) $(-\infty,0)$, j) kein Intervall, k) $(-1,1)$, l) kein Intervall.

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils, ob die angegebenen Mengen beschränkt sind. Geben Sie – falls diese existieren – auch die Maxima und Minima der Mengen an.

a) $[0,1]$, b) $(0,1)$, c) $\{2,7\}$, d) $\{\pi, e\}$

e) $\left\{1+\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, f) $\{0\}$, g) $[0,1] \cup [2,3]$, h) $\{r \in \mathbb{Q} : r < 2\}$

i) $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 4\}$, j) $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$, k) $\left\{1, \frac{\pi}{3}, \pi^2, 10\right\}$ l) $\{p : p \text{ Primzahl}\}$,

m) $\{(-1)^n n : n \in \mathbb{N}\}$, n) $\{x^2+1 : x \in \mathbb{R}\}$, o) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -2x\}$, p) $\{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.



**Lösung:**

a) beschränkt, $0$ (min), $1$ (max), b) beschränkt,

c) beschränkt, $2$ (min), $7$ (max), d) beschränkt, $e$ (min), $\pi$ (max),

e) beschränkt, $2$ (max), f) beschränkt, $0$ (min), $0$ (max),

g) beschränkt, $0$ (min), $3$ (max), h) unbeschränkt,

i) beschränkt, j) beschränkt,

k) beschränkt, $1$ (min), $10$ (max), l) unbeschränkt, $2$ (min),

m) unbeschränkt, n) unbeschränkt, $1$ (min),

o) beschränkt, $-2$ (min), $0$ (max), p) beschränkt, $\frac{1}{3}$ (max).

## — Folgen, Häufungspunkte, Konvergenz —

### Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, b) $a_n = \dfrac{n+1}{5n}$, c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$,

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+3}$, e) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n}$, f) $a_n = \dfrac{3n-2n^2}{n^2+1}$,

g) $a_n = \dfrac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}}$, h) $a_n = \dfrac{n\sqrt{n}+10}{n^2}$, i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

**Lösung:**

a) Es gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-(n+1)^2}{n^2\cdot(n+1)^2} = -\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(a_n)_n$ streng monoton fallend. (Alternativ: Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ist streng monoton fallend auf $(0,\infty)$.) Weiter ist $0 < a_n \leqslant a_1 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $(a_n)_n$ nach oben und unten beschränkt.

b) Es gilt $a_n = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5}(1+\frac{1}{n})$. Mit $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ist auch $(a_n)_n$ streng monoton fallend. Insbesondere ist damit $a_1 > a_n > 0$ für alle $n$, das heißt die Folge ist nach oben und unten beschränkt.

c) Wir betrachten wieder $a_{n+1} - a_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} &= \frac{(n+1)(n^2+1) - n((n+1)^2+1)}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 - n(n^2+2n+2) < 0 \\ &\Leftrightarrow -(n^2+n-1) < 0. \end{aligned}$$

Wegen $n^2 + n - 1 \geqslant 1^2 + 1 - 1 = 1 > 0$ ist dies für alle $n$ eine wahre Aussage. Also ist $(a_n)_n$ streng monoton fallend. Wegen $a_1 > a_n > 0$ für alle $n$ ist damit $(a_n)_n$ nach oben und unten beschränkt.

d) Es gilt $|a_n| = \frac{1}{n+3} < 1$ für alle $n$. Damit ist $(a_n)_n$ nach oben und nach unten beschränkt. Wegen

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+4} - \frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{(-1)^{n+1}(n+3) - (-1)^n(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}}_{>0}. \end{aligned}$$

ist damit $a_{n+1} - a_n > 0$ für $n$ ungerade und $a_{n+1} - a_n < 0$ für $n$ gerade. Also ist die Folge $(a_n)_n$ nicht monoton.

e) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n} = \frac{n((n+1)^2-1) - (n+1)(n^2-1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^3+2n^2-n^3+n-n^2+1}{n(n+1)} = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n)_n$ streng monoton wachsend. (Alternativ: Man schreibt $a_n = n - \frac{1}{n}$ als Summe zweier streng monoton wachsender Funktionen.) Weiter hat man $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $(a_n)_n$ ist nach unten beschränkt. Wegen

$$\frac{n^2-1}{n} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{>1} \cdot (n-1) > n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ist $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt.

f) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1) - 2(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{3n-2n^2}{n^2+1} \\ &= \frac{(3(n+1) - 2(n+1)^2)(n^2+1) - (3n-2n^2)((n+1)^2+1)}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow -3n^2 - 7n + 1 < 0. \end{aligned}$$



Wegen $3n^2 + 7n - 1 \geqslant 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 1 = 9 > 0$ ist die letzte Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Damit ist $(a_n)_n$ streng monoton fallend. Also ist $(a_n)_n$ nach oben beschränkt durch $a_1$. Schließlich folgt aus

$$\frac{3n-2n^2}{n^2+1} = 3 \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{>0} - 2\frac{n^2}{n^2+1} > -2 \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{<1} > -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

die Beschränktheit nach unten.

g) Es gilt zunächst

$$a_n = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

Die Folge $b_n := 5\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), n \in \mathbb{N}$ ist streng monoton wachsend. Da $x \mapsto \sqrt{x}$ auch streng monoton wächst, ist damit auch $(a_n)_n = (\sqrt{b_n})_n$ streng monoton wachsend. Desweiteren gilt $0 \leqslant a_n \leqslant \sqrt{5}$ für alle $n$, woraus die Beschränktheit folgt.

h) Es gilt

$$a_n = \frac{n\sqrt{n} + 10}{n^2} = \frac{n\sqrt{n}}{n^2} + \frac{10}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{10}{n^2}.$$

Die Folgen $(b_n)_n = (\frac{1}{\sqrt{n}})_n$ und $(c_n)_n = (\frac{10}{n^2})_n$ sind streng monoton fallend. Damit ist auch $(a_n)_n$ streng monoton fallend mit $0 \leqslant a_n \leqslant a_1$ für alle $n$.

i) Mit der 3. binomischen Formel gilt zunächst

$$a_n \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = n + 1 - n = 1,$$

also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionen $n \mapsto \sqrt{n}$ bzw. $n \mapsto \sqrt{n+1}$ sind streng monoton wachsend. Es folgt, dass $(a_n)_n$ streng monoton fällt. Desweiteren gilt $0 \leqslant a_n \leqslant a_1$ für alle $n$, woraus die Beschränktheit folgt.

## Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Grenzwert $a$ der Folgen $(a_n)_n, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie Ihre Vermutung, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ bestimmen mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0(\varepsilon)$.

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, b) $a_n = \dfrac{3}{n^2}$, c) $a_n = 5 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

d) $a_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$, e) $a_n = e^{-n}$, f) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

**Lösung:**

a) Es gilt $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Für $n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ gilt damit $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

b) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\left|\frac{3}{n^2} - 0\right| = \frac{3}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{3}{\varepsilon} \overset{n>0}{\Longleftrightarrow} n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Für $n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$ gilt damit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

c) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} = 5$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|a_n - 5| = \left|5 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 5\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Für $n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$ gilt damit $|a_n - 5| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

d) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und betrachten den Ausdruck $a_n - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$. Nach der 3. binomischen Formel gilt

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right) = \sqrt{1+\frac{1}{n}}^2 - 1 = \frac{1}{n},$$

also

$$a_n - 1 = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}}_{<1} < \frac{1}{n}.$$

Also ist $|a_n - 1| < \varepsilon$, sobald nur $\frac{1}{n} < \varepsilon$, das heißt $n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0(\varepsilon)$ ist.

e) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|e^{-n} - 0| = e^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow \ln e^{-n} = -n < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > -\ln \varepsilon.$$

Für $n_0(\varepsilon) = -\ln \varepsilon$ gilt dann $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

f) Zunächst gilt $|\sin(n)| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Damit ist $|a_n - 0| < \varepsilon$, sobald $\frac{1}{n} < \varepsilon$, das heißt $n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0(\varepsilon)$ ist.

Sie dürfen in der nächsten Aufgabe die folgenden Grenzwertsätze ohne Beweis verwenden:



**Satz:**

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Weiter sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Folgen $(c \cdot a_n)_n, (a_n + b_n)_n, (a_n \cdot b_n)_n$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = ca, \quad \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = a \cdot b.$$

Gilt zusätzlich $b_n, b \neq 0$ für alle $n$, dann ist auch $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

## Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Grenzwert $a$ (falls er existiert) der angegebenen Folgen $(a_n)_n$.

| | | |
|---|---|---|
| a) $a_n = \frac{n+1}{2n}$, | b) $a_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3}$, | c) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n+3}$, |
| d) $a_n = \frac{2n^3 - n + 1}{n^3 + 3n^2}$, | e) $a_n = n \cdot \frac{1 - 4^{-n}}{3n+5}$, | f) $a_n = \sqrt[2n]{5^{n+1}}$, |
| g) $a_n = \frac{\binom{n}{3}}{n^3}$, | h) $a_n = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n$, | i) $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, |
| j) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, | k) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$, | l) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$. |

**Lösung:**

Wir benutzen die Grenzwertsätze.

a)

$$a_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$a_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{n}\right)^3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0^2 \cdot \sqrt{0} + 0^3 = 0$$

c) Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{n+3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

das heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

d)

$$a_n = \frac{2n^3 - n + 1}{n^3 + 3n^2} = \frac{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0} = 2$$

e) Es gilt $\lim_{n\to\infty} 4^{-n} = 0$ (vgl. A 4 (e)). Es folgt

$$a_n = n \cdot \frac{1 - 4^{-n}}{3n+5} = (1 - 4^{-n}) \cdot \frac{n}{3n+5} = (1 - 4^{-n}) \cdot \frac{1}{3 + \frac{5}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1 - 0) \cdot \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

f)

$$a_n = \sqrt[2n]{5^{n+1}} = 5^{\frac{n+1}{2n}} = 5^{b_n} \text{ mit } b_n = \frac{n+1}{2n}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$. (Streng genommen benutzt man hier schon die Stetigkeit der Exponentialfunktion).

g)

$$a_n = \frac{\binom{n}{3}}{n^3} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

h) Es gilt $a_n = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - n = \sqrt{n^2+1} - n$. Mit der 3. binomischen Formel erhält man dann

$$(\sqrt{n^2+1} - n) \cdot (\sqrt{n^2+1} + n) = n^2 + 1 - n^2 = 1.$$

Es folgt $0 \leqslant a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leqslant \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, das heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

i) Wegen $\lim_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$ gilt

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

j) Nach der allgemeinen binomischen Formel gilt $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} > \binom{n}{3}$. Es folgt

$$0 \leqslant a_n = \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = 3! \cdot \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = 3! \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3! \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

k) Es gilt

$$(\sqrt{n^2+n} - n) \cdot (\sqrt{n^2+n} + n) = n^2 + n - n^2 = n,$$

also

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

l) Es gilt $n! \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|a_n| = \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.





## Aufgabe 6

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich von $f/g$. Untersuchen Sie, ob sich $f/g$ in den Definitionslücken noch sinnvoll erklären lässt. Falls ja, mit welchem Funktionswert?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 7x + 12$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 3, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 10x + 21$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x| - 5$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 1$

**Lösung:**

a) Es gilt $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$. Also ist $D = \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$. Da die Nennerfunktion die Nullstellen $x_0 = 3$ und $x_0 = 4$ besitzt, die Zählerfunktion allerdings nicht, kann die Funktion dort nicht sinnvoll fortgesetzt werden.

b) Es gilt $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$. Also ist $\frac{f}{g}$ zunächst auf $D = \mathbb{R} \setminus \{3, 7\}$ definiert. Allerdings gilt nach Kürzung $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x-7}$ für alle $x \in D$. Damit kann $f$ im Punkt $x_0 = 3$ noch sinnvoll erklärt werden mit $\frac{f}{g}(3) := -\frac{1}{4}$.

c) Es gilt $|x| - 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5, 5\}$. Damit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$.

d) Es gilt $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Das Polynom $x^2 + x + 1$ ist auf $\mathbb{R}$ nullstellenfrei. Damit ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nach Kürzung erhält man

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x^2+x+1} \quad \text{für alle } x \in D.$$

Dieser Ausdruck ist auch noch für $x = 1$ definiert. Eine sinnvolle Fortsetzung ist damit $\frac{f}{g}(1) := \frac{1}{3}$.

## Aufgabe 7

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2$ und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche $D(f \circ g)$ und $D(g \circ f)$ und geben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ explizit an.

**Lösung:**
Es gilt

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \{x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}^2 = 1 - x$. Offensichtlich kann $x \mapsto 1 - x$ auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt werden. Der Definitionsbereich von $g \circ f$ bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in \mathbb{R}_+\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1\} = [-1, 1]. \end{aligned}$$

Für $x \in [-1, 1]$ gilt $(g \circ f)(x) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$. Im Allgemeinen müssen $f \circ g$ und $g \circ f$ also nicht übereinstimmen.

## Aufgabe 8

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich auf (strenge) Monotonie. Bestimmen Sie die maximalen Monotoniebereiche **ohne** Zuhilfenahme von Methoden der Differentialrechnung. Versuchen Sie dabei möglichst die jeweils voranstehenden Aufgabenteile zu benutzen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$,
b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$,
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$,
d) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$,
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$,
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 2$,
g) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,
h) $f : \mathbb{R} \setminus \{3, 4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{-1}$.

*Hinweis:* Benutzen Sie in Teil a) den Binomischen Lehrsatz und in Teil d) die 3. Binomische Formel.

**Lösung:**

a) Diese Funktion ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Wir machen zunächst eine Fallunterscheidung:

- 1. Fall: $x \geqslant 0$
  Wegen $y > x$ können wir $y$ als $y = x + h$ mit $h > 0$ schreiben. Dann gilt

  $$y^3 - x^3 = (x + h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = \underbrace{3x^2h}_{\geqslant 0} + \underbrace{3xh^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{h^3}_{> 0} > 0.$$

- 2. Fall: $x < 0$
  - Fall 2a) $y < 0$
    Nach Fall 1 ist wegen $-y < -x$ wiederum $(-x)^3 - (-y)^3 > 0$ und wegen $(-x)^3 = -x^3$ gilt

    $$-x^3 - (-y^3) > 0 \Leftrightarrow y^3 - x^3 > 0.$$

  - Fall 2b) $y \geqslant 0$

    $$y^3 - x^3 = \underbrace{y^3}_{\geqslant 0} + \underbrace{(-x)^3}_{> 0} > 0.$$



b) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$, das heißt $f$ ist nicht monoton fallend. Weiter ist $f(-1) = -1 < -\frac{1}{2} = f(-2)$, das heißt $f$ ist auch nicht monoton wachsend. Damit ist $f$ nicht (streng) monoton auf seinem Definitionsbereich. Für $0 < x < y$ gilt hingegen $f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{y} = f(y)$. Damit ist $f$ streng monoton fallend auf $(0, \infty)$. Für $x < y < 0$ hat man $f(x) = \frac{1}{x} = -\frac{1}{-x} > -\frac{1}{-y} = f(y)$. Damit ist $f$ streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$.

c) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R}$. Es gilt $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$, das heißt $f$ ist nicht monoton wachsend. Weiter ist $f(0) = 0 < 1 = f(1)$, das heißt $f$ ist auch nicht monoton fallend. Für $0 \leqslant x < y$ gilt $x^2 < y^2$ und für $x < y \leqslant 0$ hat man $x^2 > y^2$. Damit ist $f$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$.

d) Diese Funktion ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}_+$: Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $x < y$. Es gilt zunächst $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$, da $\sqrt{y} > 0$. Mit der 3. binomischen Formel erhalten wir $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x > 0$ nach Voraussetzung an $x$ und $y$. Also gilt $\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} > 0$, das heißt $f(x) = \sqrt{x} < \sqrt{y} = f(y)$.

e) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R}$. Es gilt $f(0) = |0| = 0 < 1 = |1| = f(1)$, das heißt $f$ ist nicht monoton fallend. Umgekehrt ist $f(-1) = |-1| = 1 > 0 = |0| = f(0)$, das heißt $f$ ist nicht monoton wachsend. Für $x \geqslant 0$ gilt $f(x) = x$. Also ist $f$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$. Für $x \leqslant 0$ hat man $f(x) = -x$, also ist $f$ streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$.

f) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R}$. Wir schreiben $f$ in Scheitelpunktform, also

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1.$$

Für $-1 \leqslant x < y$ gilt $0 \leqslant x + 1 < y + 1$. Weil $x \mapsto x^2$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, folgt $f(x) = (x + 1)^2 + 1 < (y + 1)^2 + 1 = f(y)$. Damit ist $f$ streng monoton wachsend auf $[-1, \infty)$. Für $x < y \leqslant -1$ gilt $x + 1 < y + 1 \leqslant 0$, also auch $f(x) = (x + 1)^2 + 1 > (y + 1)^2 + 1 = f(y)$. Damit ist $f$ streng monoton fallend auf $(-\infty, -1]$.

g) Diese Funktion ist nicht monoton auf $[-1, 1]$. Es gilt $f(0) = \sqrt{1} = 1 > 0 = \sqrt{0} = f(1)$, das heißt $f$ ist nicht monoton wachsend. Umgekehrt hat man $f(-1) = 0 < 1 = f(0)$, das heißt $f$ ist auch nicht monoton fallend. Für $x, y \in [0, 1]$ mit $x < y$ hat man $1 - x^2, 1 - y^2 \in \mathbb{R}_+$ sowie $1 - x^2 > 1 - y^2$, da die Funktion $x \mapsto -x^2$ auf $[0, 1] \subset \mathbb{R}_+$ streng monoton fällt. Es folgt $f(x) = \sqrt{1 - x^2} > \sqrt{1 - y^2} = f(y)$, da $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wächst. Damit ist $f$ auf $[0, 1]$ streng monoton fallend. Genauso zeigt man, dass $f$ auf $[-1, 0]$ streng monoton wächst.

h) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$. Wir bestimmen die Monotoniebereiche. Sei dazu zunächst $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 7x + 12$. Mit quadratischer Ergänzung erhält man

$$g(x) = x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Wie in Aufgabe f) sieht man, dass $g$ auf $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$ streng monoton fallend, sowie auf $\left[\frac{7}{2}, \infty\right)$ streng monoton wachsend ist. Weiter gilt $g(x) < 0$ genau dann, wenn $x \in (3, 4)$. Für

$x \in \mathbb{R} \setminus (3,4)$ gilt $g(x) > 0$. Seien jetzt also $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{3,4\}$ mit $x < y$. Für $x, y \in (-\infty, 3)$ erhält man $g(x) > g(y) > 0$, also

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{g(y)} = f(y),$$

das heißt $f$ ist streng monoton wachsend auf $(-\infty, 3)$. Für $x, y \in \left(3, \frac{7}{2}\right]$ ist $0 > g(x) > g(y)$ und damit $f(x) = \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{g(y)} = f(y)$, also ist $f$ streng monoton wachsend auf $\left(3, \frac{7}{2}\right]$. Für $x, y \in \left[\frac{7}{2}, 4\right)$ gilt $g(x) < g(y) < 0$, also $f(x) = \frac{1}{g(x)} > \frac{1}{g(y)} = f(y)$. Damit ist $f$ streng monoton fallend auf $\left[\frac{7}{2}, 4\right)$. Schließlich folgt für $x, y \in (4, \infty)$ sofort $0 < g(x) < g(y)$ und damit $f(x) = \frac{1}{g(x)} > \frac{1}{g(y)} = f(y)$, das heißt $f$ ist streng monoton fallend auf $(4, \infty)$.

## Aufgabe 9

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen. Zeigen Sie:

a) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine (streng) monoton wachsende Funktion, so ist $-f : D \to \mathbb{R}$ mit $(-f)(x) := -f(x)$ (streng) monoton fallend.

b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen mit $f, g \geqslant 0$ auf $D$, so ist auch $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ monoton wachsend.

c) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ monoton mit $g(E) \subseteq D$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g : E \to \mathbb{R}$ monoton ist. Welche Art von Monotonie liegt jeweils vor?

d) Sei $f : D \to W$ streng monoton und bijektiv. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1} : W \to D$ streng monoton ist.

**Lösung:**

a) Sei $f$ monoton wachsend. Seien $x, y \in D$ mit $x < y$. Dann gilt $f(x) \leqslant f(y)$, also $-f(x) \geqslant -f(y)$. Damit ist $-f$ monoton fallend. Analog zeigt man die Behauptung für streng monoton wachsendes $f$.

b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien $x, y \in D$ mit $x < y$. Dann gilt

$$f(x) \cdot g(x) \overset{g \text{ mon. } \nearrow, f \geqslant 0}{\leqslant} f(x) \cdot g(y) \overset{f \text{ mon. } \nearrow, g \geqslant 0}{\leqslant} f(y) \cdot g(y).$$

c) Wir zeigen exemplarisch die Aussage

"$f$ mon. fallend, $g$ mon. wachsend $\Rightarrow f \circ g$ mon. fallend ".

Seien dazu $x, y \in E$ mit $x < y$. Dann gilt $g(x) \leqslant g(y)$, da $g$ monoton steigt. Da $f$ monoton fällt, folgt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \geqslant f(g(y)) = (f \circ g)(y).$$

Analog formuliert und beweist man die übrigen Fälle

- "$f$ mon. fallend, $g$ mon. fallend $\Rightarrow f \circ g$ mon. wachsend ",
- "$f$ mon. wachsend, $g$ mon. wachsend $\Rightarrow f \circ g$ mon. wachsend ",
- "$f$ mon. wachsend, $g$ mon. fallend $\Rightarrow f \circ g$ mon. fallend ".

d) Sei $f$ zunächst streng monoton wachsend. Seien $y, y' \in W$ mit $y < y'$. Seien $x = f^{-1}(y)$ und $x' = f^{-1}(y')$. Angenommen $x \geqslant x'$. Dann wäre auch $y = f(x) \geqslant f(x') = y'$ im Widerspruch zur Annahme. Es folgt $f^{-1}(y) = x < x' = f^{-1}(y')$. Ist $f$ streng monoton fallend, so wendet man das eben Bewiesene auf $(-f)^{-1} = -f^{-1}$ an.



## Aufgabe 10

Bestimmen Sie den Wertebereich der folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$,

b) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

c) $f : (-4, -1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 2$,

d) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$,

f) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

g) $f : (4, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{-1}$.

**Lösung:**

a) Sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x \neq 0$ gilt zunächst $\frac{1}{x} \neq 0$ und damit $f(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbb{R}^*$. Zu $y \in \mathbb{R}^*$ wählen wir $x = \frac{1}{y}$. Dann gilt $f(x) = \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{y}\right)^{-1} = y$. Es folgt $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$.
*Bemerkung:* Schränken wir den Zielbereich von $f$ auf $\mathbb{R}^*$ ein, so folgt $f \circ f = id_{\mathbb{R}^*}$, das heißt, $f$ ist bijektiv mit $f^{-1} = f$.

b) Für $x \in [-1, 2]$ gilt $x - 3 \in [-4, -1]$. Mit Aufgabe 8 b) sieht man damit, dass $f$ auf $D = [-1, 2]$ streng monoton fällt, also

$$-\frac{1}{4} = f(-1) \geqslant f(x) \geqslant f(2) = -1$$

für alle $x \in D$. Damit haben wir $f([-1, 2]) \subseteq [-1, -\frac{1}{4}]$. Sei umgekehrt $y \in [-1, -\frac{1}{4}]$. Es gilt $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 3$. Da $y \to \frac{1}{y} + 3$ auf $(-\infty, 0)$ monoton fällt, folgt

$$-1 = \frac{1}{-\frac{1}{4}} + 3 \leqslant \frac{1}{y} + 3 \leqslant \frac{1}{-1} + 3 = 2,$$

also $x \in [-1, 2]$. Damit ist $f(x) = y$ und somit $f([-1, 2]) = [-1, -\frac{1}{4}]$.

c) Die Funktion $f$ ist auf $(-4, -1]$ streng monoton fallend, das heißt es gilt $10 = f(-4) > f(x) \geqslant f(-1) = 1$. Es folgt $f((-4, 1]) \subseteq [1, 10)$. Sei umgekehrt $y \in [1, 10)$. Für $y = 1$ hat man $f(-1) = 1 = y$. Sei also $y \in (1, 10)$. Wir machen den Ansatz

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

Wegen $y \geqslant 1$ hat die obige quadratische Gleichung in $x$ über $\mathbb{R}$ die beiden Lösungen $x_1 = -1 - \sqrt{y - 1}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{y - 1}$. Wegen $0 < y - 1 < 9$ hat man aufgrund der strengen Monotonie von $x \mapsto \sqrt{x}$ dann $-4 = -1 - \sqrt{10-1} < x_1 < -1 - \sqrt{1-1} = -1$, also $x_1 \in (-4,-1]$. Es gilt $f(x_1) = y$. Im Übrigen gilt $x_2 \notin (-4,-1]$. Insgesamt haben wir damit $f((-4,1]) = [1,10)$ gezeigt.

d) Die Funktion ist auf dem Bereich $[-1,0]$ streng monoton wachsend und auf $[0,1]$ streng monoton fallend mit $f(-1) = f(1) = 0$ und $f(0) = 1$. Es folgt $f([-1,1]) \subseteq [0,1]$. Sei $y \in [0,1]$. Der Ansatz $y = \sqrt{1-x^2}$ liefert die notwendige Bedingung $y^2 = 1 - x^2$. Dies ist eine quadratische Gleichung in $x$, welche wegen $0 \leqslant y \leqslant 1$ die beiden Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{1-y^2} \in [-1,1]$ hat. Eine Probe zeigt

$$f(x_{1,2}) = \sqrt{1 - \sqrt{1-y^2}^2} = \sqrt{y^2} = |y| = y,$$

da $y \geqslant 0$. Ingesamt haben wir damit $f([-1,1]) = [0,1]$ gezeigt.

e) Es gilt zunächst

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei Gleichheit genau für $x = 0$ besteht. Es folgt damit zunächst $f(\mathbb{R}) \subseteq (0,1]$. Sei nun umgekehrt $y \in (0,1)$. Der Ansatz $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist äquivalent zu $x^2 = \frac{1}{y} - 1$. Aus $y \in (0,1)$ folgt $\frac{1}{y} > 1$, das heißt die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ und es gilt $f(x_{1,2}) = y$. Damit haben wir $f(\mathbb{R}) = (0,1]$ gezeigt.

f) Wir betrachten zunächst $h : (-1,1) \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Es gilt $h(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$. Mit d) erhält man also $h((-1,1)) = (0,1]$. Wir betrachten jetzt $g : (0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$. Wie in Teil a) schließt man $g((0,1]) = [1,\infty)$. Nun ist aber $f = g \circ h$, also $f((-1,1)) = g(h((-1,1))) = g((0,1]) = [1,\infty)$.

g) Wir betrachten zunächst wieder $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 7x + 12$ und bestimmen $g((4,5])$. Nach Aufgabe 8 h) ist $g$ streng monoton wachsend auf $(4,5]$, das heißt

$$0 = g(4) < g(x) \leqslant g(5) = 2 \text{ für alle } x \in (4,5]$$

und damit $g((4,5]) \subseteq (0,2]$. Sei nun also umgekehrt $y \in (0,2]$. Der Ansatz $y = g(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ liefert eine quadratische Gleichung in $x$ mit den beiden Lösungen $x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$. Wegen der strengen Monotonie von $y \mapsto \sqrt{y}$ folgt

$$4 = \frac{7}{2} + \sqrt{0 + \frac{1}{4}} < x_1 = \frac{7}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}} \leqslant \frac{7}{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = 5$$

und damit $x_1 \in (4,5]$. Wegen $g(x_1) = y$ folgt insgesamt $g((4,5]) = (0,2]$. Abschließend betrachten wir nun $h : (0,2] \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{x}$. Man zeigt leicht, dass $h((0,2]) = [\frac{1}{2},\infty)$. Für $f = h \circ g$ gilt folglich $f((4,5]) = h((0,2]) = [\frac{1}{2},\infty)$.



## Aufgabe 11

Betrachten Sie die Funktion $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \leqslant -1 \\ x^2, & \text{falls } -1 < x < 1 \\ x-1, & \text{falls } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

**Lösung:**

Wir bestimmen zunächst die Monotoniebereiche von $f$. Für $x \in [-2,-1]$ gilt $f(x) = x+1$, das heißt $f$ ist streng monoton wachsend. Für $x \in (-1,1)$ ist $f(x) = x^2$, also ist $f$ streng monoton fallend auf $(-1,0]$ und streng monoton wachsend auf $[0,1)$. Für $x \in [1,2]$ gilt $f(x) = x-1$, das heißt $f$ ist streng monoton wachsend auf $[1,2]$. Da sich in lokalen Extrempunkten das Monotonieverhalten ändert, können lokale Extrema höchstens in den Randpunkten der Monotoniebereiche vorliegen, das heißt in $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Es genügt also diese Punkte zu untersuchen:

- Für $x \in (-1,2]$ gilt $f(x) \geqslant 0 \geqslant -1 = f(-2)$ und für $x \in [-2,-1]$ gilt $f(x) \geqslant f(-2)$, da $f$ dort streng monoton steigt. Damit liegt in $x = -2$ ein globales Minimum vor.
- Für $x \in [-2,-1]$ gilt $f(x) \leqslant f(-1) = 0 < 1 = f(2)$ und für $x \in (-1,2]$ gilt $f(x) \leqslant 1 = f(2)$. Damit liegt in $x = 2$ ein globales Maximum vor.
- Für $x \in [-1,2]$ gilt $f(x) \geqslant 0 = f(1) = f(0)$. Also liegen in $x = 0$ und $x = 1$ lokale Minima vor, welche nicht global sind.
- Für $x \in (-1,0)$ gilt $f(x) = x^2 > 0 = f(-1)$ und für $x \in [-2,-1)$ hat man $f(x) = x+1 < 0$. Damit kann in $x = -1$ kein lokales Extremum vorliegen.

## Aufgabe 12

Betrachten Sie die Funktion $f : (-2,2] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{falls } x < -1 \\ x^2, & \text{falls } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

**Lösung:**

Man verfährt analog zu Aufgabe 11. In $x \in \{-1,1,2\}$ besitzt $f$ ein globales Maximum. In $x = 0$ besitzt $f$ ein lokales Minimum, welches nicht global ist. Die Funktion $f$ hat kein globales Minimum.

## Aufgabe 13

Betrachten Sie die Funktion $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{falls } x<-1 \\ x^2 & \text{falls } -1\leqslant x\leqslant 1 \\ x-1 & \text{falls } x>1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

**Lösung:**
Man verfährt wieder analog zu Aufgabe 11. In $x\in\{-1,1\}$ besitzt $f$ ein globales Maximum. In $x=0$ besitzt $f$ ein lokales Minimum, welches nicht global ist. Die Funktion $f$ hat kein globales Minimum.

# — Elementare Funktionen —

## — A. Exponentialabbildung und Logarithmus —

## Aufgabe 14

Es seien $a,u,v>0$ und $r\in\mathbb{R}$. Beweisen Sie :

$$\log_a(u^r) = r\log_a(u).$$

**Lösung:**
Sei $x=\log_a(u)$. Nach Definition ist dann $a^x=u$. Mit den Potenzgesetzen folgt $u^r=(a^x)^r=a^{xr}$, also

$$\log_a(u^r) = rx = r\log_a(u).$$

## Aufgabe 15

Bestimmen Sie die folgende Logarithmen.

a) $\log_2(4)$, b) $\log_4(64)$, c) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$, d) $\log_4(2)$, e) $\log_7(7^x)$, $x\in\mathbb{R}$.

**Lösung:**
a) $2$, b) $3$, c) $-3$, d) $\frac{1}{2}$, e) $x$.

## Aufgabe 16

a) Drücken Sie $2-\log_3(4)$ als Logarithmus einer einzigen Zahl aus.



b) Vereinfachen Sie

$$\log_2\left(\frac{75}{16}\right) - 2\log_2\left(\frac{5}{9}\right) + \log_2\left(\frac{32}{243}\right).$$

c) Vereinfachen Sie für $a>0$ den Ausdruck $\dfrac{\log_a(\sqrt{3})}{\log_a(27)}$.

**Lösung:**
a)

$$2-\log_3(4) = 2\log_3(3)-\log_3(4) = \log_3(9)-\log_3(4) = \log_3\left(\frac{9}{4}\right)$$

b)

$$\begin{aligned}\log_2\left(\frac{75}{16}\right) - 2\log_2\left(\frac{5}{9}\right) + \log_2\left(\frac{32}{243}\right) &= \log_2\left(\frac{75\cdot 81\cdot 32}{16\cdot 25\cdot 243}\right) \\ &= \log_2(2) = 1\end{aligned}$$

c)

$$\frac{\log_a(\sqrt{3})}{\log_a(27)} = \frac{\frac{1}{2}\log_a(3)}{3\log_a(3)} = \frac{1}{6}$$

## Aufgabe 17

Bestimmen Sie jeweils Definitionsbereich und Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichungen.

a) $\log_2(x)=\log_2(10)$, b) $\log_{10}(x)=2\log_{10}(5)-\log_{10}(4)$, c) $\log_3(x-1)=2$,
d) $2\ln(3x-3)=1$, e) $-\log_4(2x)=\log_4(6)$, f) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-1)=0$,
g) $\log_{10}(x+1)-\log_{10}(2)=2$, h) $\log_2(x)=\log_3(x)$, i) $\log_{10}(x^2+1)=1$.

**Lösung:**
a) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D=\mathbb{R}_{>0}$. Es gilt

$$\log_2(x)=\log_2(10) \Leftrightarrow x=10.$$

b) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D=\mathbb{R}_{>0}$. Es gilt

$$\log_{10}(x) = 2\log_{10}(5)-\log_{10}(4) \Leftrightarrow \log_{10}(x) = \log_{10}\left(\frac{5^2}{4}\right) \Leftrightarrow x=\frac{25}{4}.$$

c) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D=(1,\infty)$. Es gilt

$$\log_3(x-1)=2 \Leftrightarrow 3^{\log_3(x-1)} = 3^2 \Leftrightarrow x-1=9 \Leftrightarrow x=10.$$

d) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D = (1, \infty)$. Es gilt

$$2\ln(3x-3) = 1 \Leftrightarrow \ln(3x-3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-3 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{e}.$$

e) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $(0, \infty)$. Es gilt

$$-\log_4(2x) = \log_4(6) \Leftrightarrow \log_4\left(\frac{1}{2x}\right) = \log_4(6) \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = 6 \Leftrightarrow 1 = 12x \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}.$$

f) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Es gilt

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(x^2-1) = \log_{\sqrt{2}}(1) \Leftrightarrow x^2-1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

g) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $(-1, \infty)$. Es gilt

$$\log_{10}(x+1) - \log_{10}(2) = 2 \Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = 10^2 \Leftrightarrow x = 199.$$

h) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $(0, \infty)$. Es gilt

$$\log_2(x) = \log_3(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(3)} \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(x)\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \Leftrightarrow \ln(x) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right)}_{\neq 0} = 0,$$

also genau dann, wenn $\ln(x) = 0$, das heißt $x = 1$.

i) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\log_{10}(x^2+1) = 1 \Leftrightarrow x^2+1 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

## Aufgabe 18

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der folgenden Terme. Drücken Sie im Anschluss die Terme durch einen Logarithmus aus.

a) $\log_a(x+1) - 3\log_a(1-x) + 2\log_a(x)$,

b) $\log_a\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

**Lösung:**

a) Der Definitionsbereich des Ausdrucks ist $(0, 1)$. Es gilt

$$\log_a(x+1) - 3\log_a(1-x) + 2\log_a(x) = \log_a\left(\frac{(x+1)x^2}{(1-x)^3}\right).$$



b) Der Definitionsbereich des Ausdrucks ist $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \log_a\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\log_a(x^2-1) + \log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(\log_a|x-1| + \log_a|x+1| + \log_a|x+1| - \log_a|x-1|\big) \\ &= \log_a|x+1|. \end{aligned}$$

## Aufgabe 19

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme.

a)

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y = 1 \\ 2^x \cdot 3^y = 432 \end{array} \right\},$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{c} \log_{10}(x) + \log_{10}(y) = 1 \\ \log_{10}(x) - \log_{10}(y) = \log_{10}\left(\frac{5}{2}\right) \end{array} \right\}, \quad x, y > 0$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{c} 4^x = 5^y \\ 2 \cdot 4^x = 7^y \end{array} \right\}.$$

**Lösung:**

a) Es ist $x = y + 1$ und damit

$$2^x \cdot 3^y = 432 \Leftrightarrow 2^{y+1}3^y = 432 \Leftrightarrow 2 \cdot 6^y = 432 \Leftrightarrow y = \log_6(216) = \log_6(6^3) = 3.$$

Es folgt $x = y + 1 = 4$.

b) Es gilt

$$1 = \log_{10}(x) + \log_{10}(y) = \log_{10}(xy) \Leftrightarrow xy = 10,$$
$$\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right) = \log_{10}(x) - \log_{10}(y) = \log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}y.$$

Damit ist das Gleichungssystem äquivalent zu $xy = 10$ und $2x = 5y$. Einsetzen von $x = \frac{10}{y}$ in die zweite Gleichung liefert $20 = 5y^2$, also $y = \pm 2$. Es folgt $x = \pm 5$. Mit Hinblick auf den Definitionsbereich des Gleichungssystems ist damit $(x, y) = (5, 2)$ die einzige Lösung.

c) Es gilt

$$7^y = 2 \cdot 4^x = 2 \cdot 2^{2x} = 2^{2x+1} \Longleftrightarrow 2x + 1 = \log_2(7^y) = y \log_2(7),$$
$$5^y = 4^x = 2^{2x} \Longleftrightarrow 2x = \log_2(5^y) = y \log_2(5).$$

Dies impliziert $y \log_2(7) - 1 = y \log_2(5)$. Wir erhalten daher die Lösung

$$y = \frac{1}{\log_2(7) - \log_2(5)}, \quad x = \frac{\log_2(5)}{2(\log_2(7) - \log_2(5))}.$$

## Aufgabe 20

Wieviele Dezimalstellen besitzt die Primzahl $p = 2^{13466917} - 1$ ?

**Lösung:**

Da $p$ eine Primzahl ist, ist $p \neq 10^N$ für irgendein $N \in \mathbb{N}$ und wir können annehmen, dass $p$ und $p+1$ dieselbe Anzahl Dezimalstellen haben. Nach den Logarithmusgesetzen haben wir

$$\log_{10}(p+1) = \frac{\log_2(p+1)}{\log_2(10)} = \frac{13466917}{\log_2(2 \cdot 5)} = \frac{13466917}{\log_2(2) + \log_2(5)} = \frac{13466917}{1 + \frac{\ln 5}{\ln 2}} \cong 4053945.97.$$

($\ln 5$ mit Taschenrechner). Wir haben also $p + 1 = a \cdot 10^M$ mit $1 < a < 10$ und $M = 4053945$. Damit hat $p + 1$ 4053946 Dezimalstellen.

# — Trigonometrische Funktionen —

## Aufgabe 21

Beweisen Sie die Additionstheoreme für Tangens und Cotangens. Bestimmen Sie auch den Definitionsbereich der Gleichungen.

a) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$, b) $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}$.

**Lösung:**

a) Die Gleichung ist definiert für $\alpha, \beta, \alpha + \beta \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$. Mit $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ folgt

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\tan(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)}{\cos(\beta) - \tan(\alpha)\sin(\beta)} \\ &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}.\end{aligned}$$



b) Die Rechnung verläuft analog.

## Aufgabe 22

Zeigen Sie mit Hilfe der Addtionstheoreme:

a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$, b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$,

c) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\alpha)$, d) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(\alpha)$.

**Lösung:**

Man verwende $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Für c) und d) verwende man a) und b).

*Bemerkung:* Man beachte, dass Aufgabe 21 für die Aufgabenteile c) und d) nicht anwendbar ist.

## Aufgabe 23

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der folgenden Gleichungen. Bestimmen Sie im Anschluß die Lösungsmenge.

a) $\tan(x) = \sqrt{2}\,\sin(x)$,

b) $\tan(x) = 2\sqrt{3}\cos(x)$,

c) $\sin(2x) = \tan(x)$,

d) $\cos(3x) = 5 - 4\cos^2(x)$.

*Hinweis:* Beweisen Sie für die Aufgabenteile c) bzw. d) zunächst die Identitäten

$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}, \quad \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

**Lösung:**

a) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$. Dort gilt stets $\cos(x) \neq 0$. Es folgt

$$\tan(x) = \sqrt{2}\sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \sqrt{2}\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \sin(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(x)\right) = 0.$$

Letzteres ist wiederum äquivalent zu $\sin(x) = 0$ oder $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also zu $x \in \pi\mathbb{Z}$ bzw. zu $x \in \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$. Dort gilt stets $\cos(x) \neq 0$. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}\tan(x) = 2\sqrt{3}\cos(x) &\Leftrightarrow \sin(x) = 2\sqrt{3}\cos^2(x) = 2\sqrt{3}\left(1 - \sin^2(x)\right) \\ &\Leftrightarrow \sin^2(x) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(x) - 1 = 0.\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $t = \sin(x)$. Wir bestimmen also die Lösungen der Gleichung $t^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}t - 1 = 0$. Diese werden (z.B. mit $p$-$q$-Formel) gegeben durch

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad t_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1.$$

Wegen $\sin(x) \geqslant -1$ sind also alle $x$ zu bestimmen mit $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(x)$. Damit ist die Lösungsmenge durch

$$\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$

gegeben.

c) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$. Es gilt

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)} = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Damit folgt die Äquivalenz

$$\sin(2x) = \tan(x) \Leftrightarrow \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} = \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x)^3 = \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x)(\tan(x)^2 - 1) = 0.$$

Also ist die Gleichung äquivalent zu $\tan(x) = 0$ oder $\tan(x)^2 = 1$. Damit wird die Lösungsmenge gegeben durch

$$\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

d) Es ist $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\ &= \cos^3(x) - 3(1-\cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\cos(3x) = 5 - 4\cos^2(x) \Leftrightarrow 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 5 - 4\cos^2(x).$$

Dies ist eine kubische Gleichung in $t = \cos(x)$. Wegen $\cos(x) \in [-1,1]$ genügt es also die Lösungen der Gleichung $4t^3 + 4t^2 - 3t - 5 = 0$ im Intervall $[-1,1]$ zu bestimmen. Durch Ausprobieren erhält man zunächst die Lösung $t = 1$. Polynomdivision durch $t-1$ liefert

$$4t^3 + 4t^2 - 3t - 5 = (4t^2 + 8t + 5)(t-1) = \left(4(t+1)^2 + 1\right)(t-1)$$

Nun ist $4(t+1)^2 + 1 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $t = 1$ die einzige Nullstelle in $[-1,1]$. Insgesamt ergibt sich damit als Lösungsmenge $2\pi\mathbb{Z}$.



## Aufgabe 24

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Zeigen Sie:

a) $\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma) = \sin(\alpha)$,

b) $\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\cos(\alpha) = \cos(\gamma)$.

**Lösung:**

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma) &= \sin(\beta+\gamma) = \sin(\pi - \alpha) \\ &= \sin(\pi)\cos(\alpha) - \cos(\pi)\sin(\alpha) = \sin(\alpha), \end{aligned}$$

wegen $\sin(\pi) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\cos(\alpha) &= -\cos(\alpha+\beta) = -\cos(\pi - \gamma) \\ &= -(\cos(\pi)\cos(\gamma) + \sin(\pi)\sin(\gamma)) \\ &= \cos(\gamma), \end{aligned}$$

wegen $\sin(\pi) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

## Aufgabe 25

In einiger Entfernung zu einer Antenne wird ein Lichstrahl vom Boden (Meßebene) auf die Spitze der Antenne gerichtet. Der Winkel des Strahls zur Meßebene wird mit $\alpha$ bezeichnet. Nun geht man $a$ Meter auf den Antennenmast zu und wiederholt die Messung. Man erhält nun einen Winkel $\beta$. Es ist insbesondere $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Wie hoch ist der Mast?

**Lösung:**

Bezeichnet man die unbekannte Höhe des Mastes mit $h$ und die Entfernung des zweiten Messpunktes vom Mast mit $b$ so gelten die Beziehungen

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{a+b} \qquad \tan(\beta) = \frac{h}{b}.$$

Dies ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Insbesondere folgt

$$h = a\tan(\beta)\left(\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}\right).$$

# — Stetigkeit —

## Aufgabe 26

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in den angegebenen Punkten.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2|x|$ in $x_0 = 0$.

b)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$

c)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$

d)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$.

**Lösung:**

a) Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} 2|x| = \lim_{x \to 0+} 2x = 0 \text{ und } \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} 2|x| = \lim_{x \to 0-} -2x = 0.$$

Also ist $f$ stetig in $x_0 = 0$.

b) Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Also ist $f$ unstetig in $x_0 = 0$.

c) Es gilt

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Wegen $f(1) = 0 = 1 - 1$ folgt dann $f(x) = x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $f$ stetig in $x_0 = 1$.

d) Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 \text{ und } \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \sqrt{1-x} = \sqrt{1} = 1.$$

Also ist $f$ unstetig in $x_0 = 0$.



## Aufgabe 27

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 4$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 4, & -\infty < x \leqslant 4 \\ x + 6, & 4 < x < \infty \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 10, & x = 4 \end{cases}$

**Lösung:**

a) Als lineares Polynom ist $f$ stetig.

b) Als rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich ist $f$ stetig.

c) Als lineare Funktion auf den Bereichen $(-\infty, 4)$ und $(4, \infty)$ ist $f$ dort stetig. Wir betrachten also $x_0 = 4$. Es gilt

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = \lim_{x \to 4+} x + 6 = 4 + 6 = 10 \neq 8 = f(4).$$

Damit ist $f$ unstetig in $x_0 = 4$.

d) Als rationale Funktion ist $f$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Wir betrachten also $x_0 = 4$. Es gilt

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} x + 4 = 8 \neq 10 = f(4).$$

Damit ist $f$ unstetig in $x_0 = 4$.

# — Differentialrechnung —

## Aufgabe 28

Zeigen Sie durch vollständige Induktion und mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass für die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ gilt:

$$f_n'(X) = nx^{n-1}.$$

Hinweis: Produktformel.

**Lösung:**
(1) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt für jede Folge $(x_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dass

$$f_1'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_1(x_n) - f_1(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

also ist $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (2) Induktionsschluss: Sei die Aussage für $n - 1$ bewiesen. Dann ist nach der Produktregel

$$f_n'(x) = (f_1 \cdot f_{n-1})' = f_1' \cdot f_{n-1} + f_1 \cdot f_{n-1}' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

## Aufgabe 29

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung $f'$ der Funktionen $f$, welche auf geeigneten Definitionsbereichen durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind:

a) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 4x + 9$,
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^6 + x + \sqrt{x}$,
c) $f(x) = 4x^4 - \sqrt{4x}$,
d) $f(x) = 8x^2 - x + 2 + 6\sqrt[3]{x^4}$,
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-3} - 3x^{-4}$,
f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$,
g) $f(x) = e^x \cdot x^2 + 3x^5$,
h) $f(x) = 4x^4 \cdot 4^x$,
i) $f(x) = 2x \cdot \ln(x) + \ln(x^3)$,
j) $f(x) = 3x^4 \cdot \sin(x)$,
k) $f(x) = (e^{-x} + 4^x)^2$,
l) $f(x) = \ln(x)^2 \cdot e^x$,
m) $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x}$,
n) $f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x}}$,
o) $f(x) = \frac{7x^2 + 3x + 1}{x^2 + x}$,
p) $f(x) = (5x - 3)^5$
q) $f(x) = \left(3x^4 - \frac{2}{x} + 7\right)^4$,
r) $f(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 3x)^5}$.

**Lösung:**



a) $f'(x) = 15x^2 + 14x - 4$,
b) $f'(x) = 2x^5 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
c) $f'(x) = 16x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$,
d) $f'(x) = 16x - 1 + 8\sqrt[3]{x}$,
e) $f'(x) = -x^{-3} - 6x^{-4} + 12x^{-5}$,
f) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^8}}$,
g) $f'(x) = e^x x(x+2) + 15x^4$,
h) $f'(x) = 4x^3 \cdot 4^x \cdot (4 + x\ln(4))$,
i) $f'(x) = 2\ln(x) + 2 + \frac{3}{x}$,
j) $f'(x) = 3x^3(4\sin(x) + x\cos(x))$,
k) $f'(x) = -2e^{-2x} + 2\ln(4)16^x + 2\left(\frac{4}{e}\right)^x(\ln(4) - 1)$,
l) $f'(x) = e^x \ln(x)\left(\frac{2}{x} + \ln(x)\right)$,
m) $f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{x^2}$,
n) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}$,
o) $f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 1}{(x^2 + x)^2}$,
p) $f'(x) = 25(5x - 3)^4$,
q) $f'(x) = \left(48x^3 + \frac{8}{x^2}\right)\left(3x^4 - \frac{2}{x} + 7\right)^3$,
r) $f'(x) = (10x^2 + 5)\sqrt[3]{(2x^3 + 3x)^2}$.

## Aufgabe 30

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x^2 - 1|$$

auf Differenzierbarkeit.

**Lösung:**
Falls $x^2 > 1$, also $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, so gilt $f(x) = x^2 - 1$. Falls $x^2 < 1$, also $x \in (-1, 1)$, so gilt $f(x) = 1 - x^2$. In beiden Fällen ist $f$ ein Polynom und damit differenzierbar. Es bleiben die Randpunkte $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$ zu untersuchen. Für $x > 1$ gilt

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = x + 1 \xrightarrow{x\to 1+} 2.$$

Sei nun $0 < x < 1$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = -x - 1 \xrightarrow{x\to 1-} = -2.$$

Also ist $f$ in $x_0 = 1$ nicht differenzierbar. Genauso zeigt man, dass $f$ auch in $x_0 = -1$ nicht differenzierbar ist.

## Aufgabe 31

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x|x|$$

auf Differenzierbarkeit im Nullpunkt. Bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

**Lösung:**

Wir bestimmen wieder den Differenzenquotienten. Für $x > 0$ gilt

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x \cdot x - 0}{x-0} = x \xrightarrow{x \to 0+} 0.$$

Für $x < 0$ gilt

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x \cdot (-x) - 0}{x-0} = -x \xrightarrow{x \to 0-} 0.$$

Damit ist $f$ in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

## Aufgabe 32

Bestimmen Sie zunächst die Definitionsbereiche der Funktionen $f$, welche durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben sind. Bestimmen Sie im Anschluss $f'$.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$, b) $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x^2-4)^3}$, c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-4x+3)^2}$.

**Lösung:**

a) Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

b) Es ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ und

$$f'(x) = \frac{-15x^2-12x-12}{(x^2-4)^4}.$$

c) Es ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ und

$$f'(x) = \frac{-2(3x^2-6x+1)}{(x^2-4x+3)^3}.$$

## Aufgabe 33

Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche der Funktionen $f$, welche durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben sind. Bestimmen Sie in jedem Punkt, in welchem $f$ differenzierbar ist, die Ableitung. (Randpunkte des Definitionsbereichs sind dabei zu vernachlässigen.)

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+4x-5}$, b) $\sqrt{x + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}$, c) $f(x) = \cos\left(\tan(1+x^2)\right)$.



**Lösung:**

a) Zunächst gilt $x^3 + 4x - 5 = (x^2 + x + 5)(x-1)$. Die erste Faktor ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv, der zweite genau für $x \geqslant 1$. Also ist $D(f) = [1, \infty)$. Weiter ist $f$ ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $(1, \infty)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3+4x+5\right)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+4).$$

b) Es gilt $D(f) = [0, \infty)$ und $f$ ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right).$$

c) Es gilt $D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$, sowie

$$1 + x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi - 1}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit ist

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \left\{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi - 1}\right\}.$$

Die Ableitung bestimmt sich zu

$$f'(x) = -\sin(\tan(1+x^2))\frac{2x}{\cos^2(1+x^2)}.$$

## Aufgabe 34

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktionen aus Aufgabe 32.

**Lösung:**

a) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte in $D(f) = \mathbb{R}$. Es gilt

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Longleftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Um zu bestimmen, ob es sich dabei um lokale Extrema handelt, bestimmen wir zunächst die Positivitäts- und Negativitätsbereiche von $f'$ zu

$$\begin{aligned} f' &> 0 \qquad \text{auf } (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), \\ f' &< 0 \qquad \text{auf } (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty). \end{aligned}$$

Sei zunächst $x_0 = 1 + \sqrt{2}$. Für $\varepsilon > 0$ gilt also

$$f'(1+\sqrt{2}-\varepsilon) > 0 \qquad \text{und} \qquad f'(1+\sqrt{2}+\varepsilon) < 0.$$

Also wechselt $f'$ in $x_0$ sein Vorzeichen (monoton fallend) und damit hat $f$ in $x_0$ ein lokales Maximum. Sei $x_1 = 1-\sqrt{2}$. Für $0 < \varepsilon < 2\sqrt{2}$ gilt

$$f'(1-\sqrt{2}-\varepsilon) < 0 \qquad \text{und} \qquad f'(1-\sqrt{2}+\varepsilon) > 0.$$

Also wechselt $f'$ in $x_1$ sein Vorzeichen (monoton wachsend) und damit hat $f$ in $x_1$ ein lokales Minimum. Direktes Ausrechnen liefert

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) > 0 \quad \text{und} \quad f(x_1) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) < 0.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ sind die Extrema sogar global.

b) Es gilt $-15x^2 - 12x - 12 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit besitzt $f$ keine kritischen Punkte und damit auch keine lokalen Extrema.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte in $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{-2(3x^2-6x+1)}{(x^2-4x+3)^3} = 0 \Longleftrightarrow 3x^2-6x+1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Wir verfahren wie in a) und bestimmen zunächst die Positivitäts- und Negativitätsbereiche von $f'$ zu

$$\begin{aligned} f' &< 0 && \text{auf} \quad \left(-\infty, 1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(1, 1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup (3,\infty), \\ f' &> 0 && \text{auf} \quad \left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right) \cup \left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}, 3\right). \end{aligned}$$

Setze nun $x_0 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$. Für $0 < \varepsilon \ll 1$ gilt

$$f'(x_0-\varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0+\varepsilon) > 0.$$

Also besitzt $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum. Weiter ist

$$f'(x_1-\varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_1+\varepsilon) > 0.$$

Also besitzt $f$ auch in $x_1$ ein lokales Minimum. Desweiteren ist

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 3} f(x) = \infty.$$

Folglich besitzt $f$ keine globalen Maxima.

## Aufgabe 35

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 3.$$



a) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima von $f$.

b) Bestimmen Sie die größten Intervalle, auf denen $f$ streng monoton wachsend ist.

c) Fertigen Sie eine Skizze von $f$ an.

**Lösung:**

a) Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 75x^2 + 60, \\ f''(x) &= 60x^3 - 150x, \\ f'''(x) &= 180x^2 - 150. \end{aligned}$$

Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von $f$. Es gilt

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 15x^4 - 75x^2 + 60 = 0 \Longleftrightarrow 15(x^4 - 5x^2 + 4) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{\pm 1, \pm 2\}.$$

Explizit berechnet man

$$f''(1) = -90, \quad f''(-1) = 90, \quad f''(2) = 240, \quad f''(-2) = -240.$$

Damit liegen in $x_0 = -1$ und $x_0 = 2$ lokale Minima, sowie in $x_0 = 1$ und $x_0 = -2$ lokale Maxima vor.

b) Es gilt $f' > 0$ auf $(-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,\infty)$. Die gesuchten Monotonieintervalle sind damit $(-\infty,-2)$ und $(2,\infty)$.

## Aufgabe 36

Untersuchen Sie analog zu vorigen Aufgabe die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2(x-2)}{(x+2)}.$$

*Hinweis:* Die einzige reelle Nullstelle von $f''$ ist $x_0 = 2\sqrt[3]{2} - 2$.

**Lösung:**

a) Es gilt

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{x \cdot (x^2+2x-4)}{(x+2)^2}.$$

Weiter hat man

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{0, -1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\right\}.$$

Die Positivitäts- und Negativitätsbereiche von $f'$ bestimmen sich zu

$$\begin{aligned} f' &< 0 && \text{auf } (-\infty, -1-\sqrt{5}) \cup (0, -1+\sqrt{5}), \\ f' &> 0 && \text{auf } (-1-\sqrt{5}, 0) \cup (-1+\sqrt{5}, \infty). \end{aligned}$$

Wie oben sei $0 < \varepsilon \ll 1$. Für $x_0 = 0$ hat man

$$f'(x_0 - \varepsilon) > 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0 + \varepsilon) < 0.$$

Damit hat $f$ in $x_0 = 0$ ein lokales Maximum. Für $x_1 = -1 - \sqrt{5}$ gilt

$$f'(x_1 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_1 + \varepsilon) > 0.$$

Damit hat $f$ in $x_0 = -1 - \sqrt{5}$ ein lokales Minimum. Für $x_2 = -1 + \sqrt{5}$ gilt

$$f'(x_2 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_2 + \varepsilon) > 0.$$

Damit hat $f$ in $x_2 = -1 + \sqrt{5}$ ein lokales Minimum.

b) Die einzige reelle Nullstelle von $f''$ liegt in $x = 2\sqrt[3]{2} - 2$ vor. Da

$$f''(2\sqrt[3]{2} - 2 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f''(2\sqrt[3]{2} - 2 + \varepsilon) > 0$$

für $\varepsilon$ klein genug, handelt es sich hierbei um einen Wendepunkt.

c) Es ist

$$f' > 0 \quad \text{auf} \quad (-1 - \sqrt{5} - 2) \cup (-2, 0) \cup (-1 + \sqrt{5}, \infty).$$

Damit ist $(-1 + \sqrt{5}, \infty)$ das gesuchte Intervall.

## Aufgabe 37

Untersuchen Sie die Funktionen

a) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - x^2$,

b) $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$

auf lokale und globale Maxima und Minima. Bestimmen Sie auch die entsprechenden Extremalwerte.

**Lösung:**

a) Es gilt $f'(x) = -2x = 0$ genau für $x = 0$. Es gilt $f''(x) = -2 < 0$. Damit liegt in $x_0 = 0$ ein lokales Maximum vor. Es ist $f(-2) = 0$ und $f(3) = -5$. Aus $f(0) = 4$ folgt damit, dass $f$ auf dem Intervall $[-2, 3]$ in $x_0 = 0$ ein globales Maximum und in $x_1 = 3$ ein globales Minimum besitzt.

b) Es ist

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2\left(x^2 - 4x + 3\right) = 5x^2(x-3)(x-1),$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x.$$

Also sind $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$ die einzigen Nullstellen von $f'$. Weiterhin gilt

$$f''(1) = -10 < 0, \quad f''(3) = 90 > 0, \quad f''(0) = 0.$$



Im Punkt $x_3 = 1$ besitzt die Funktion also ein lokales Maximum, im Punkt $x_2 = 3$ ein lokales Minimum. Im Punkt $x_1 = 0$ ist keine Aussage möglich, da $f'$ in diesem Punkt keinen Vorzeichenwechsel hat. Schließlich müssen die inneren Extremwerte mit den Randwerten verglichen werden. Man berechnet

$$f(-1) = -4, \quad f(1) = 8, \quad f(3) = -20, \quad f(4) = 71.$$

Damit hat

- $f$ in $x = -1$ ein lokales, aber kein globales Minimum,
- $f$ in $x = 1$ ein lokales, aber kein globales Maximum,
- $f$ in $x = 3$ ein lokales und globales Minimum,
- $f$ in $x = 4$ ein lokales und globales Maximum.

## Aufgabe 38

Seien $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq -n$ und $m, n \neq 0$.

a) Zerlegen Sie $a$ so in zwei Summanden, dass deren Produkt möglichst groß wird.

b) Zerlegen Sie $a$ so in zwei Summanden, dass das Produkt der $m$-ten Potenz des einen Summanden und der $n$-ten Potenz des anderen Summanden möglichst groß wird.

**Lösung:**

a) Die beiden Summanden sind $x = y = \frac{a}{2}$.

b) Die beiden Summanden sind $x = \frac{ma}{m+n}$ und $y = \frac{na}{m+n}$.

## Aufgabe 39

Die Summe der Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks ergibt $k$. Wie groß müssen die einzelnen Kathetenlängen gewählt werden, damit die Hypothenusenlänge möglichst klein wird?

**Lösung:**

Die beiden Katheten müssen die Länge $\frac{k}{2}$ haben.

## Aufgabe 40

Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Sein Umfang sei $U$. Für welchen Halbkreisradius wird der Flächeninhalt des Querschnitts am größten?

**Lösung:**

Es bezeichne $r$ den Halbkreisradius, $a$ die Höhe des Rechtecks und $F$ die Fläche des Querschnitts. Dann ist

$$U = \pi r + 2a + 2r, \quad \text{also } a = \frac{U - (2+\pi)r}{2}.$$

Für die Fläche erhalten wir

$$F = 2ar + \frac{\pi r^2}{2}.$$

Setzen wir $a$ als Funktion von $r$ ein, so ergibt dies

$$\begin{aligned} F(r) &= r \cdot (U - (2+\pi)r) + \frac{\pi}{2} r^2 = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r^2 + Ur, \\ F'(r) &= -2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r + U, \\ F''(r) &= -2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von $F'$ wird durch $r_0 = \frac{U}{\pi+4}$ gegeben. Wegen $F''(r_0) < 0$ handelt es sich hierbei um ein lokales Maximum. Wegen $\lim_{r\to\infty} F(r) = -\infty$ ist das lokale Maximum sogar global.

## — Integralrechnung —

### Aufgabe 41

Bestimmen Sie ohne Rechnung und nur mit der Definition des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{3} (6x+1)dx, \quad \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx,$$
$$\int_{-4}^{4} ||x|-2|dx.$$

**Lösung:**

Das Integral ist die Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse, wobei Fläche unter der x-Achse negativ gezählt wird. a) Das erste Integral ist die Differenz der Flächen der beiden Dreiecke $19 \cdot 19/12 - 5 \cdot 5/12 = 28$. b) Das zweite Integral ist die Fläche eines Halbkreises vom Radius 2, also $\pi 2^2/2 = 2\pi$. c) Die Fläche besteht aus vier Dreiecken, die zusammen ein Quadrat der Kantenlänge $2\sqrt{2}$ ergeben. Damit ist das Integral gleich $(2\sqrt{2})^2 = 8$.

### Aufgabe 42

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion $F$ der Funktionen $f$, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x + 1$, b) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$, c) $f(x) = 2e^x$,

d) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x}}$, e) $f(x) = 5x^4 + 4 + \frac{6}{x}$, f) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x}}$,

g) $f(x) = (x-2)^2$, h) $f(x) = 4^x$.



**Lösung:**

a) $F(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x$, b) $F(x) = \frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}$, c) $F(x) = 2e^x$,

d) $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}$, e) $F(x) = x^5 + 4x + 6\ln|x|$, f) $F(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6\sqrt{x}$,

g) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$, h) $F(x) = \frac{4^x}{\ln(4)}$.

### Aufgabe 43

Bestimmen Sie:

a) $\int_0^2 (3x+1)^2 \, dx$, b) $\int_1^4 (\sqrt{x} + x) \, dx$, c) $\int_0^1 (2-x) \, dx + \int_0^1 2(x-1) \, dx$,

d) $\int_0^1 x^4 \, dx - \int_3^1 x^4 \, dx + \int_3^5 x^4 \, dx$, e) $\int_1^4 x(x^2+x) \, dx + \int_4^7 (x^3+x^2) \, dx - \int_1^7 (x^3+x^2) \, dx$,

f) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) dx$, g) $\int_1^4 5\sqrt[4]{x} \, dx$, h) $\int_{-1}^1 \left(e^{\frac{x}{3}} + 3x^2\right) dx$,

i) $\int_0^1 5^x \, dx$, j) $\int_{-3}^{-1} \frac{4}{x} \, dx$.

**Lösung:**

a) $38$, b) $\frac{73}{6}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $625$, e) $0$,

f) $\frac{101}{192}$, g) $16\sqrt{2} - 4$, h) $3\left(\sqrt[3]{e} - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) + 2$, i) $\frac{4}{\ln(5)}$, j) $-4\ln(3)$.

### Aufgabe 44

Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode jeweils eine Stammfunktion $F$ der Funktionen $f$, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = (2x+3)^3$, b) $f(x) = \frac{2e^x}{3+2e^x}$, c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$,

d) $f(x) = \frac{9x^2+1}{x(3x^2+1)}$, e) $f(x) = \frac{3}{3x\ln(x) + 2x}$, f) $f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$.

**Lösung:**

a) $\varphi(t) = 2t + 3$ und $F(x) = \frac{1}{8}(2x+3)^4$, $D_f = \mathbb{R}$,

b) $\varphi(t) = 3 + 2e^t$ und $F(x) = \ln(3 + 2e^x)$, $D_f = \mathbb{R}$,

c) $\varphi(t) = t^2 + 3$ und $F(x) = 2\sqrt{x^2+3}$, $D_f = \mathbb{R}$,

d) $\varphi(t) = t(3t^2+1)$ und $F(x) = \ln(|3x^3+x|)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

e) $\varphi(t) = 3\ln(t)+2$ und $F(x) = \ln(|3\ln(x)+2|)$, $D_f = (0,\infty)$,

f) $\varphi(t) = \ln(t+2)$ und $F(x) = \ln(|\ln(x+2)|)$, $D_f = (-2,\infty)$.

## Aufgabe 45

Bestimmen Sie den Wert $I$ der folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) $\int\limits_0^1 (2x+3)^4\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_0^1 (1+x^3)^2 \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_3^5 \frac{2x+4}{x^2+4x}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int\limits_2^{10} \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\,\mathrm{d}x$, e) $\int\limits_0^1 (6x+5)\cdot e^{3x^2+5x}\,\mathrm{d}x$, f) $\int\limits_{-4}^{12} 4x\sqrt[4]{x+4}\,\mathrm{d}x$.

**Lösung:**

a) $\varphi(t) = 2t+3,\ I = \frac{2882}{10}$, b) $\varphi(t) = 1+t^3,\ I = \frac{7}{3}$, c) $\varphi(t) = t^2+4t,\ I = \ln\frac{15}{7}$,

d) $\varphi(t) = 2t+5,\ I = \frac{34}{3}$, e) $\varphi(t) = 3t^2+5t,\ I = e^8-1$, f) $\varphi(t) = t+4,\ I = \frac{22528}{45}$.

## Aufgabe 46

Bestimmen Sie mit Hilfe der partiellen Integration jeweils eine Stammfunktion $F$ der Funktionen $f$, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = x\cdot e^x$, b) $f(x) = e^x(x^2+3x)$, c) $f(x) = \ln(x)$,

d) $f(x) = x^2\cdot\ln(x)$, e) $f(x) = \log_2(x)$, f) $f(x) = \ln(x)^2$.

**Lösung:**

a) $f(x) = x,\ g'(x) = e^x,\ F(x) = (x-1)e^x$,

b) $f(x) = x^2+3x,\ g'(x) = e^x,\ F(x) = e^x\left(x^2+x-1\right)$,

c) $f(x) = \ln(x),\ g'(x) = 1,\ F(x) = x(\ln(x)-1)$,

d) $f(x) = \ln(x),\ g'(x) = x^2,\ F(x) = \frac{x^3}{9}\,(3\ln(x)-1)$,

e) $f(x) = \log_2(x),\ g(x) = 1,\ F(x) = \frac{x}{\ln(2)}\,(\ln(x)-1)$,

f) $f(x) = \ln(x),\ g'(x) = \ln(x),\ F(x) = x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) + 2x$.



## Aufgabe 47

Bestimmen Sie die folgenden Integrale unter Benutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

a) $\int\limits_0^{1/\sqrt{7}} \frac{1}{3+7x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_6^{11} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int\limits_{-8}^{-4} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x$, e) $\int\limits_2^3 \frac{1}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x$, f) $\int\limits_2^3 \frac{8x-5}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int\limits_0^{2\pi/3} \frac{\sin(x)}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x$, h) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{3+4\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

**Lösung:**

a)

$$\int\limits_0^{1/\sqrt{7}} \frac{1}{3+7x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^{1/\sqrt{7}} \frac{1}{1+\frac{7}{3}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{3}{7}}\arctan\left(\sqrt{\frac{7}{3}}x\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \frac{\pi}{6\sqrt{21}}.$$

b)

$$\int\limits_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{1+\frac{9}{4}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right)\right]_0^{2/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{18}.$$

c) Es gilt $x^2-2x-15 = (x+3)(x-5)$. Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)} = \frac{-1}{8(x+3)} + \frac{1}{8(x-5)}.$$

Es folgt

$$\int\limits_6^{11} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int\limits_6^{11}\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int\limits_6^{11}\frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\left(\ln(6)-\ln(14)+\ln(9)\right) = \frac{1}{8}\left(3\ln(3)-\ln(7)\right).$$

d)

$$\int\limits_{-8}^{-4} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\ln(13)-\ln(5)-2\ln(3)\right).$$

e) Es gilt $4x^2-5x+1 = (x-1)(4x-1)$. Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{4x^2-5x+1} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{3(4x-1)}.$$

Es folgt

$$\int_2^3 \frac{1}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\ln(2)-\ln(11)+\ln(7)\right).$$

f) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^2-5x+1\right) = 8x-5$ folgt mit der Substitutionsmethode

$$\int_2^3 \frac{8x-5}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(4x^2-5x+1)\Big]_2^3 = \ln(22)-\ln(7).$$

g) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2+3\cos(x)\right) = -3\sin(x)$ folgt mit der Substitutionsmethode

$$\int_0^{2\pi/3} \frac{\sin(x)}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\Big[\ln(2+3\cos(x))\Big]_0^{2\pi/3} = \frac{1}{3}\left(\ln(2)+\ln(5)\right).$$

h) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3+4\sin(x)\right) = 4\cos(x)$ folgt mit der Substitutionsmethode

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{3+4\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[\ln(3+4\sin(x)\Big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{4}(\ln(5)-\ln(3)).$$

## Aufgabe 48

Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(x)\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$,  b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x$,  d) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

**Lösung:**

a) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(x)\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x &= \Big[\sin(x)\ln(\sin(x))\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} - \int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln(2)\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} - \Big[\sin(x)\Big]_{\pi/6}^{\pi/4}\\ &= \ln(2)\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$



b) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-x^2\cos(x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \pi^2 + 2\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \pi^2-4.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{3}x^3\cdot 3x^2\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x\\ = \Big[\frac{1}{3}\Big((x^3+1)\ln(x^3+1)-(x^3+1)\Big)\Big]_0^1 &- \int_0^1 x^2(x^3+1)\ln(x^3+1) - x^2(x^3+1)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}(2\ln(2)-2) - \int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^5+x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}(2\ln(2)-2) - \int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}(2\ln(2)-2) - \frac{1}{3}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\,e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big]_0^1 - \int_0^1 3x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\,e^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\Big[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{2}\Big[\frac{1}{2}xe^{2x}\Big]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(e^2+3).\end{aligned}$$