Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 9

M. Gruber

KW 44

Zusammenfassung

Lineare Unabhängigkeit, lineare Abhängigkeit.

Aufspannen eines Unterraums.

Basis.

Dimension.

Lineare Unabhängigkeit

Definition 1. [Lineare Unabhängigkeit] *Vektoren* $v_1, \ldots, v_n$ *sind linear unabhängig, wenn für jede Linearkombination außer der trivialen Linearkombination* $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n$ *gilt:*

$$c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n \neq 0.$$

Definition 2. [Lineare Abhängigkeit] *Vektoren* $v_1, \ldots, v_n$ *sind linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind, d.h. wenn es eine nichttriviale Linearkombination (nicht alle* $c_i = 0$*) gibt mit*

$$c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0.$$

Beispiele

Beispiel 1. *Sei $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. Die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $2\boldsymbol{v}$ sind linear abhängig. Warum?*

Tipp: *Finde eine nichttriviale Linearkombination von $\boldsymbol{v}$ und $2\boldsymbol{v}$ mit dem Wert null.*

Beispiel 2. *Sei $\boldsymbol{v}$ ein beliebiger Vektor. Der Nullvektor $\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{v}$ sind linear abhängig. Warum?*

Tipp: *Finde eine nichttriviale Linearkombination von $\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{v}$ mit dem Wert null.*

Beispiel 3. *Seien $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbf{R}^2$. Die Vektoren sind linear abhängig. Warum?*

Tipp: *Schreibe $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ als Spalten in eine 2×3-Matrix A und betrachte ihren Nullraum $N(A)$.*

Beispielwerte: $\boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{v}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 2.5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$

Zusammenhang mit $Ax = 0$

Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten einer Matrix A.

1. $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $N(A) = \{0\}$ ist.

2. $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\mathbf{rank}\, A = n$ ist, d.h. wenn es keine freien Spalten gibt.

3. $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn $Ac = 0$ für ein $c \neq 0$ ist.

4. $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\mathbf{rank}\, A < n$ ist, d.h. wenn es freie Spalten gibt.

Basis

Definition 3. [“aufspannen”] *$v_1, \ldots, v_l$ spannen den Vektorraum V auf, wenn V aus allen Linearkombinationen der $v_1, \ldots, v_l$ besteht.*

Bemerkung 1. *Dabei ist nicht gesagt, dass $v_1, \ldots, v_l$ linear unabhängig sein müssen.*

Definition 4. [Basis] *Die Vektoren $v_1, \ldots, v_d$ bilden eine Basis des Vektorraums V, wenn sie*

1. *den Vektorraum V aufspannen und*

2. *linear unabhängig sind.*

Beispiele

$V = \mathbf{R}^3$.

Beispiel 4. *Die Vektoren* $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ *bilden eine Basis. Warum?*

Tipp: *Schreibe sie in eine* 3×3*-Matrix* A*. Sind sie linear unabhängig? Ist* $C(A) = V$*?*

Beispiel 5. *Die Vektoren* $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\8\end{bmatrix}$ *bilden eine Basis. Warum?*

Tipp: *Schreibe sie in eine* 3×3*-Matrix* A*. Sind sie linear unabhängig? Ist* $C(A) = V$*?*

Beispiel 6. *Die Vektoren* $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$ *bilden keine Basis. Warum nicht?*

Tipp: *Schreibe sie in eine* 3×3*-Matrix* A*. Sind sie linear unabhängig? Ist* $C(A) = V$*?*

Beispiel 7. *Die Vektoren* $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\8\end{bmatrix}$ *bilden keine Basis. Warum nicht?*

Tipp: *Schreibe sie in eine* 3×3*-Matrix* A*. Sind sie linear unabhängig? Ist* $C(A) = V$*?*

Dimension

Satz 1. *Jede Basis eines Vektorraums $S \subset \mathbf{R}^m$ hat die gleiche Anzahl von Vektoren.*

Beweis Angenommen, $v_1, \ldots, v_d$ und $w_1, \ldots, w_l \in S$ sind Basen von S und $l > d$..

Schreibe die v_i als Spalten in die $m \times d$-Matrix V und die w_i als Spalten in die $m \times l$-Matrix W. Es gibt eine $d \times l$-Matrix C mit Spalten $c_1, \ldots, c_l$ und $VC = W$, denn V enthält eine Basis.

Da C mehr Spalten als Zeilen hat, müssen die Spalten von C linear abhängig sein. Deshalb gibt es eine nichttriviale Linearkombination der c_i mit $s_1 c_1 + \ldots + s_l c_l = 0$ und man hat wegen $0 = V(s_1 c_1 + \ldots + s_l c_l) = s_1 w_1 + \ldots + s_l w_l$ eine nichttriviale Linearkombination der w_i mit dem Wert null.

Also bilden die $w_1, \ldots, w_l$ keine Basis. Widerspruch! $\square$

Definition 5. [Dimension] *Sei S ein Vektorraum mit Basis $v_1, \ldots, v_d$.*
$\dim S := d$ *ist die Dimension von S.*

Ein Beispiel

Beispiel 8. *Sei* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

- $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in N(A) \Rightarrow$ *die ersten drei Spalten von* A *bilden keine Basis von* $C(A)$.
- $2 = \operatorname{rank} A = \#$ *der Pivot-Spalten von* $A = \dim C(A)$.
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *ist eine Basis von* $C(A)$; $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ *ist eine andere Basis von* $C(A)$...
- $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ist eine Basis von* $N(A)$.
- $\dim N(A) = \#$ *der freien Spalten von* $A = n - r$.