수리통계학 I

CH 1

확률실험 : 결과를 정확하게 예측할 수 없는 실험. BUT 가능한 결과의 집합은 확정될 수 있음.

표본공간 S : 확률실험에서 가능한 모든 결과의 집합.

사상 A : S의 부분집합.

확률 probability

(a) $P(A) \geq 0$
(b) $P(S) = 1$
(c) $A_i \cap A_j = \phi$ (상호배반) 이면, $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + \cdots + P(A_k)$ 이다.

정리. $P(A) = 1 - P(A')$

증명〉 $S = A \cup A'$, $A \cap A' = \phi$ 이므로

$1 = P(A) + P(A')$ 이다.

정리. $P(\phi) = 0$

증명〉 $A = \phi$ 일때 $A' = S$

$P(\phi) = 1 - P(S) = 0$

정리. 사상 A. B 가 $A \subset B$ 이면 $P(A) \leq P(B)$ 이다.

증명〉 $B = A \cup (B \cap A')$, $A \cap (B \cap A') = \phi$

$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap A')}_{\geq 0} \geq P(A)$

정리. $P(A) \leq 1$

증명〉 $A \subset S$ $P(A) \leq P(S) = 1$

정리. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

증명〉 $A \cup B = A \cup (A' \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(A' \cap B)$

$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

정리. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

증명〉 $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap A \cap C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

CH 1

등확률 equally likely : 확률실험의 가능한 실현치들의 발생가능성이 모두 같으면 실현치들은 등확률을 갖는다고 말함.

$$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\} \quad \text{이면} \quad P(e_i) = \frac{1}{m}$$

$$mean = \frac{1}{m}\sum e_i$$

사건 A에 속한 실현치의 개수 = h 이면, 등확률의 가정하에서 다음 식이 성립함.

$$P(A) = \frac{h}{m} = \frac{N(A)}{N(S)}$$

$$mean = \sum e_i \cdot P(e_i)$$

곱의 원리 : 확률실험이 차례대로 시행될때

순열 permutation : n개의 서로 다른 개체에 대한 $n!$ 가지의 배열 $(0! = 1)$

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

→ n개의 개체 중 r개를 선택하여 배열한 순열

크기 r인 순서표본 ordered sample : n개의 개체를 포함하고있는 집합으로부터 순서를 고려하여 r개의 개체를 추출할때, 선택된 r개의 개체 집합.

복원추출 : 개체를 추출할때 다음번 개체가 추출되기 전에 추출한 개체를 다시 돌려 놓으며 추출하는 방법.
곱의 원리에 의해 n개 개체들의 집합으로부터 r개를 복원추출에 의해 추출했을때 순서표본의 가짓수 = n^r

비복원추출 : 일단 추출된 개체를 다시 돌려놓지 않으며 추출하는 방법.
곱의원리에 의해 n개의 개체들의 집합으로부터 r개를 비복원추출에 의해 추출했을때 순서표본의 가짓수 = $\frac{n!}{(n-r)!}$

조합 combination : 비순서 부분집합 각각을 n개의 개체 중 r개를 선택하는 조합.

$$_nC_r = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이항전개 expansion of a binomial : $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{r}}_{\text{이항계수}} b^r \cdot a^{n-r}$

조건부확률 : 사건 B가 발생했다는 조건하에 사건 A가 일어날 확률 $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

(a) $P(A|B) \geq 0$
(b) $P(B|B) = 1$
(c) $A_i \cap A_j = \emptyset$ (상호배반) 이면, $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k | B) = P(A_1|B) + \cdots + P(A_k|B)$ 이다.

$\divideontimes$ $P(A|B) = 1 - P(A'|B)$

CH 1

조건부확률에서 곱의법칙 : 두개의 사건 A와 B가 모두 일어날 확률

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$$

독립사상 : 어떤 두가지 사건에 대하여 한 사건의 발생 여부는 다른 사건의 발생에 대한 확률에 영향을 주지 않는 경우

$P(A\cap B) = P(A)P(B) \rightleftarrows$ 독립

※ A 와 B가 독립사상이면 A 와 B', A' 와 B, A'와 B' 도 독립이다.

증명〉 $P(A\cap B') = P(A)P(B'|A)$
$= P(A)(1-P(B|A))$
$= P(A)(1-P(B))$
$= P(A)P(B')$

∴ A 와 B' 독립

상호독립 mutually independent 이기 위한 필요충분조건은 다음 2가지를 모두 만족해야함.

(a) 사건 A.B.C 가 쌍별로 독립. $P(A\cap B) = P(A)P(B)$
$P(B\cap C) = P(B)P(C)$
$P(C\cap A) = P(C)P(A)$

(b) $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$

※ A.B.C 가 서로 독립일때 A 와 $B\cap C$. A 와 $B\cup C$. A'와 $B\cap C'$ 도 독립이다.
또한 A'. B'. C' 도 상호독립이다.

분할 partition : 사상 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 이 표본공간 S 의 분할

$S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$ 그리고 $B_i \cap B_j = \phi$

$A = (B_1\cap A) \cup \cdots \cup (B_m \cap A)$

$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(B_i\cap A) = \sum_{i=1}^{m} P(B_i)P(A|B_i)$: **전확률 법칙 law of total probability**

베이즈정리 Bayes' theorem

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(B_i)P(A|B_i)}$$

↑ 조건 A　　　↑ 조건 B

CH 2

확률변수 : 표본공간 S를 갖는 확률실험이 주어진다면 각 원소 s에 대해 오직 하나의 실수 $X(s) = x$ 를 대응시키는 함수 X

이산형 확률변수 : X를 실수공간의 부분집합인 S를 공간으로 갖는 확률변수라고 하자.
공간 S가 유한이거나 양의정수들에 1:1 대응관계를 가질때, 즉 S의 원소를 셀수 있을때의 확률변수 X
확률질량함수 (probability mass function) = pmf = $P(X=x) = f(x)$

pmf f(x) 의 성질
(a) $f(x) > 0$. $x \in S$
(b) $\sum_{x \in S} f(x) = 1$
(c) $P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$

누적분포함수 cumulative distribution function : $F(x) = P(X \le x)$
- y축이 구간에 대한 확률
- $0 \le F(x) \le 1$
- F(x) 는 감소하지 않는 함수. 일정할 수는 있음.
- $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$
- F(x) 는 step function

수학적 기댓값 : 이산형 확률변수 X 의 pmf가 f(x) 이고 총합 $\sum u(x)f(x)$ 가 존재하면,
그 합을 u(X) 의 수학적 기댓값이라 하고 $E[u(X)]$ 로 표기함.

$$E[u(X)] = \sum u(x)f(x)$$

※ C가 상수, U 가 함수일때
(a) $E(c) = c$
(b) $E[c \cdot u(X)] = c \cdot E[u(X)]$
(c) $E[c_1u_1(X) + c_2u_2(X)] = c_1E[u_1(X)] + c_2E[u_2(X)]$ (수학적 기댓값 E는 선형연산자)

※ $Y = aX + b$ 일때 $E(Y) = aE(X) + b = a\mu_x + b$

$$E[(Y-\mu_Y)^2] = E[(aX+b-a\mu_x-b)^2] = E[a^2(X-\mu_x)^2]$$
$$= a^2E[(X-\mu_x)^2] = a^2 \cdot \sigma_x^2$$

적률 moment : 거리와 가중치의 곱.
원점에 관해 1차 적률 = 원점으로부터 거리 U_i 와 가중치 $f(u_i)$의 곱 $u_i f(u_i)$의 총합 = 평균
평균에 관해 2차 적률 = $\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 f(x)$를 확률변수 X의 분산
= 평균으로부터 떨어진 거리 제곱의 가중평균
= $Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$

원점에 관해 분포의 r차 적률 $E(X^r) = \sum x^r f(x)$

b에 관해 분포의 r차 적률 $E[(X-b)^r] = \sum (x-b)^r \cdot f(x)$ ← $b = E(X)$ 일때
$r=2$: 분산
$r=3$: 왜도
$r=4$: 첨도

r차 계승적률 $E[(X)_r] = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$

※ $\mu = E(X)$ 는 확률변수 X의 분포의 중심을 나타내는 척도
표준편차 σ 는 공간 S에 속한 점들의 산포의 척도

CH 2

표본 sample

- sample size = n
- distribution of the sample = empirical distribution <-> theoritical distribution
- sample mean

  $\bar{x} = \Sigma x_i / n$
- variance of the empirical distribution

  $V = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$
- sample variance

  $S^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(x_i - \bar{x})^2$

적률생성함수 moment generating function : 분포의 적률 생성. 유일성을 가짐.

X는 이산형 pmf f(x)와 공간 S를 가지는 확률변수.

기댓값 $E(e^{tx}) = \Sigma e^{tx} f(x)$ 이 존재하고 유한이라면

함수 $M(t) = E(e^{tx})$ 을 X의 적률생성함수라고 함. (mgf)

두 확률변수가 같은 mgf를 갖는다면 두 확률변수들은 똑같은 확률분포를 가짐.
mgf가 존재하면 mgf에 상응하는 오직 하나의 확률분포가 존재함.

mgf 가 $E(X)$. $E(X^2)$. $E(X^3)$ 등을 계산하기 편하게 해줌.

Step 1. 식 세우기

$$E(e^{tx}) = \Sigma e^{tx} f(x)$$

Step 2. t에 대해 미분 (n차 moment → n번 미분)

$$M'(t) = \Sigma x e^{tx} f(x)$$

$$M''(t) = \Sigma x^2 e^{tx} f(x)$$

Step 3. t=0 대입

$$M'(0) = \Sigma x f(x) = E(X)$$

$$M''(0) = \Sigma x^2 f(x) = E(X^2)$$

CH 2

이산형 균일분포 discrete uniform : 1 부터 80까지 카드뽑기

$X \sim DU(a, b)$ $R = \{a, a+1, \cdots b\}$ 일때, $f(x) = \frac{1}{b-a+1}$

초기하분포 hypergeometric : 주머니 안에 빨간공, 파란공이 있을때 뽑힌 n개중 빨간공이 x개일 확률

$X \sim Hypergeo(n, N_1, N_2)$ $f(x) = P(X=x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

$E(X) = n \cdot \frac{N_1}{N}$ $Var(X) = n \cdot \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N-N_1}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

mark-recapture : 모집단의 크기를 측정할때.

capture a small number of individuals -> mark on them
-> release them back into the population -> catch another group
-> record how many have a mark

N : 예측된 모집단 개체수
N_1 : 첫번째에 잡혀서 마크된 개체수
n : 두번째에 잡힌 개체수
μ : 두번째에 잡힌 마크가 있는 개체수

$N = (n \times N_1) / \mu$

베르누이실험 Bernoulli experiment : 결과가 상호 배타적이고 전체를 포괄하는 두 결과 중 하나로 나타나는 확률실험
성공확률 p , 실패확률 q
베르누이시행 : 베르누이실험의 성공확률 p가 같고 독립적으로 반복해서 이루어지는 시행

베르누이분포 Bernoulli distribution : 베르누이 시행에서 성공의 경우는 X=1, 실패의 경우는 X=0 => X는 베르누이 확률변수.

$X \sim Ber(p)$

$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$

이항정리

$M(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} p^x (1-p)^{1-x} = \sum (pe^t)^x (1-p)^{1-x} = [(1-p)+pe^t]$

$\mu = E(X) = p$ $\sigma^2 = Var(X) = pq$

이항분포 binomial distribution :
- 베르누이 실험이 n회 시행
- 각 시행은 독립
- 각 시행에서 성공의 확률 = p , 실패의 확률 = q
- 확률변수 X는 n회 시행에서 성공의 횟수와 같음

$X \sim B(n, p)$

$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

이항정리

$M(t) = E(e^{tx}) = \sum \binom{n}{x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x} = [(1-p)+pe^t]^n$

$\mu = E(X) = np$, $\sigma^2 = Var(X) = npq$

$* \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p+1-p)^n = 1$

$* B(1, p) = Ber(p)$

CH 2

* 이항분포와 초기하분포의 차이

이항분포 : 시행횟수에 관계없이 확률 일정. 복원추출.

초기하분포 : 모집단의 크기가 유한하고 실험을 수행하는 과정에서 모집단의 크기가 줄어듦. 비복원추출.

* 초기하분포가 이항분포로 근사

$N_1, N_2 \to \infty$. $p = N_1/N$ 일때 Hypergeo $(n, N_1, N_2) \equiv B(n, p)$

Proof) $P(X=x) = \dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N_1+N_2}{n}} = \dfrac{\frac{N_1!}{(N_1-x)!x!}\frac{N_2!}{(N_2-n+x)!(n-x)!}}{\frac{(N_1+N_2)!}{(N_1+N_2-x)!n!}}$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\frac{N_1!}{(N_1-x)!}\frac{N_2!}{(N_2-n+x)!}\frac{(N_1+N_2-n)!}{(N_1+N_2)!}$$

Using Stirling's formula
$n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/2)^n$

$$\approx \binom{n}{x}\frac{N_1^{N_1+0.5}}{(N_1-x)^{N_1-x+0.5}}\frac{N_2^{N_2+0.5}}{(N_2-n+x)^{N_2-n+x+0.5}}\frac{(N_1+N_2-n)^{N_1+N_2-n+0.5}}{(N_1+N_2)^{N_1+N_2+0.5}}$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{N_1}{N_1-x}\right)^{N_1+0.5}\left(\frac{N_2}{N_2-n+x}\right)^{N_2+0.5}\left(\frac{N_1+N_2-x}{N_1+N_2}\right)^{N_1+N_2+0.5}\frac{(N_1+N_2-n)^{-n}}{(N_1-x)^{-x}(N_2-n+x)^{-n+x}}$$

Proof)

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N_1+N_2}{n}} = \lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\binom{n}{x}\left(\frac{N_1}{N_1-x}\right)^{N_1+0.5}\left(\frac{N_2}{N_2-n+x}\right)^{N_2+0.5}\left(\frac{N_1+N_2-x}{N_1+N_2}\right)^{N_1+N_2+0.5}\frac{(N_1+N_2-n)^{-n}}{(N_1-x)^{-x}(N_2-n+x)^{-n+x}}$$

$$= \binom{n}{x}\lim_{N_1\to\infty}\left(\frac{N_1}{N_1-x}\right)^{N_1+0.5}\lim_{N_1\to\infty}\left(\frac{N_2}{N_2-n+x}\right)^{N_2+0.5}$$

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\left(\frac{N_1+N_2-x}{N_1+N_2}\right)^{N_1+N_2+0.5}\frac{(N_1+N_2-n)^{-n}}{(N_1-x)^{-x}(N_2-n+x)^{-n+x}}$$

$$\approx \lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\binom{n}{x}e^{x}e^{k-x}e^{-k}\frac{(N_1+N_2-n)^{-n}}{(N_1-x)^{-x}(N_2-n+x)^{-n+x}}$$

$$= \lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\binom{n}{x}\frac{(N_1-x)^{x}(N_2-n+x)^{n-x}}{(N-n)^{x}(N-n)^{n-x}}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\binom{n}{x}\frac{\left(\frac{N_1}{N}-\frac{x}{N}\right)^{x}\left(\frac{N_2}{N}-\frac{n-x}{N}\right)^{n-x}}{\left(1-\frac{n}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{n-x}} \approx \binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

CH 2

기하분포 geometric distribution : 베르누이 시행에서 x번째에 처음 성공할 확률분포

확률변수 x는 베르누이 시행에서 처음 성공할때까지 시행한 횟수

$X \sim Geo(p)$

$$f(x) = p \cdot (1-p)^{x-1}$$ ← 성공하는 사건은 마지막. Combination 없음.

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot q^{x-1} \cdot p = \left(\frac{p}{q}\right) \sum (qe^t)^x$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)\left[(qe^t) + (qe^t)^2 + (qe^t)^3 + \cdots\right]$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right) \frac{qe^t}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

$t=0$ 근처에서만!
$qe^t \doteqdot q < 1$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} \qquad \sigma^2 = var(X) = \frac{q}{p^2}$$

* $S_n = \sum ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

* $P(X>k) = 1 - P(X \le k)$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1} - \sum_{x=1}^{k} pq^{x-1}$$

$$= p\left(\frac{1}{1-q}\right) - p\left(\frac{1-q^k}{1-q}\right) = \frac{pq^k}{1-q}$$

* 무기억성

음이항분포 negative binomial distribution : 베르누이 시행에서 x번째에 r회 성공할 확률분포

확률변수 x는 베르누이 시행에서 r회 성공할때까지 시행한 횟수

$X \sim NB(r, p)$

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} = (pe^t)^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} [(1-p)e^t]^{x-r}$$

$$= \frac{(pe^t)^r}{[1-(1-p)e^t]^r}$$

$$\mu = E(X) = \frac{r}{p}, \quad \sigma^2 = var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

* 테일러급수

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(b)}{k!}(x-b)^k$$

↳ $b=0$ 이면 맥클로린 급수

Ex) $f(w) = (1-w)^{-r}$ 일때

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{r-1} w^k \overset{x=k+r}{=} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} w^{x-r}$$

* $NB(1, p) = Geo(p)$

$X_i \overset{iid}{\sim} Geo(p)$ 이면 $\sum^{r} X_i \sim NB(r, p)$

* 음이항 기하

CH 2

포아송분포 poisson distribution : 단위시간당 어떤 사건이 x번 발생하는 확률분포

확률변수 x는 단위시간당 사건 발생 횟수

$X \sim Poisson(\lambda)$

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$M(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$\mu = E(X) = \lambda$. $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$

* $X_i \overset{i.i.d}{\sim} Poisson(\lambda)$, $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Poisson(k\lambda)$

* 이항분포에서 n이 크고 성공확률이 작을때 포아송분포가 됨.

$n \to \infty$. $p \to 0$. $X \sim B(n, p) \approx Poisson(np)$

Proof) Let's $\lambda = np$, then $p = \frac{\lambda}{n}$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \frac{(n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{(n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

Proof)

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{(n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{(n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

[Note50-1]

✓ The Poisson approximation is quite accurate if $n \geq 20$ and $p \leq 0.05$ or $n \geq 100$ and $p \leq 0.1$

✓ Good for $np < 5$ as $n \to \infty$

EX) 전구공장에서 생산되는 전구중 약 2%는 불량품. 100개의 전구가 한 상자에 담겨있다면 그 중 많아야 3개의 불량품이 포함되어 있을 확률.

<1> 이항분포

$$\sum_{x=0}^{3} \binom{100}{x} (0.02)^x (0.98)^{100-x}$$

<2> 포아송분포

$$\sum_{x=0}^{3} \frac{2^x \cdot e^{-2}}{x!}$$

CH 2

이산형 분포 정리

Bernoulli
$0 < p < 1$

$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$
$M(t) = 1 - p + pe^t, \quad -\infty < t < \infty$
$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p)$

Binomial
$b(n, p)$
$0 < p < 1$

$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$
$M(t) = (1 - p + pe^t)^n, \quad -\infty < t < \infty$
$\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$

Geometric
$0 < p < 1$

$f(x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$
$M(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p)$
$\mu = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Hypergeometric
$N_1 > 0, \; N_2 > 0$
$N = N_1 + N_2$

$f(x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x \le n, x \le N_1, n - x \le N_2$
$\mu = n\left(\frac{N_1}{N}\right), \quad \sigma^2 = n\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N_2}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

$M(t) = \frac{\binom{N-K}{n}\,{}_2F_1(-n,-K;N-K-n+1;e^t)}{\binom{N}{n}}$

Negative Binomial
$0 < p < 1$
$r = 1, 2, 3, \ldots$

$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r(1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, r+2, \ldots$
$M(t) = \frac{(pe^t)^r}{[1-(1-p)e^t]^r}, \quad t < -\ln(1-p)$
$\mu = r\left(\frac{1}{p}\right), \quad \sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Poisson
$\lambda > 0$

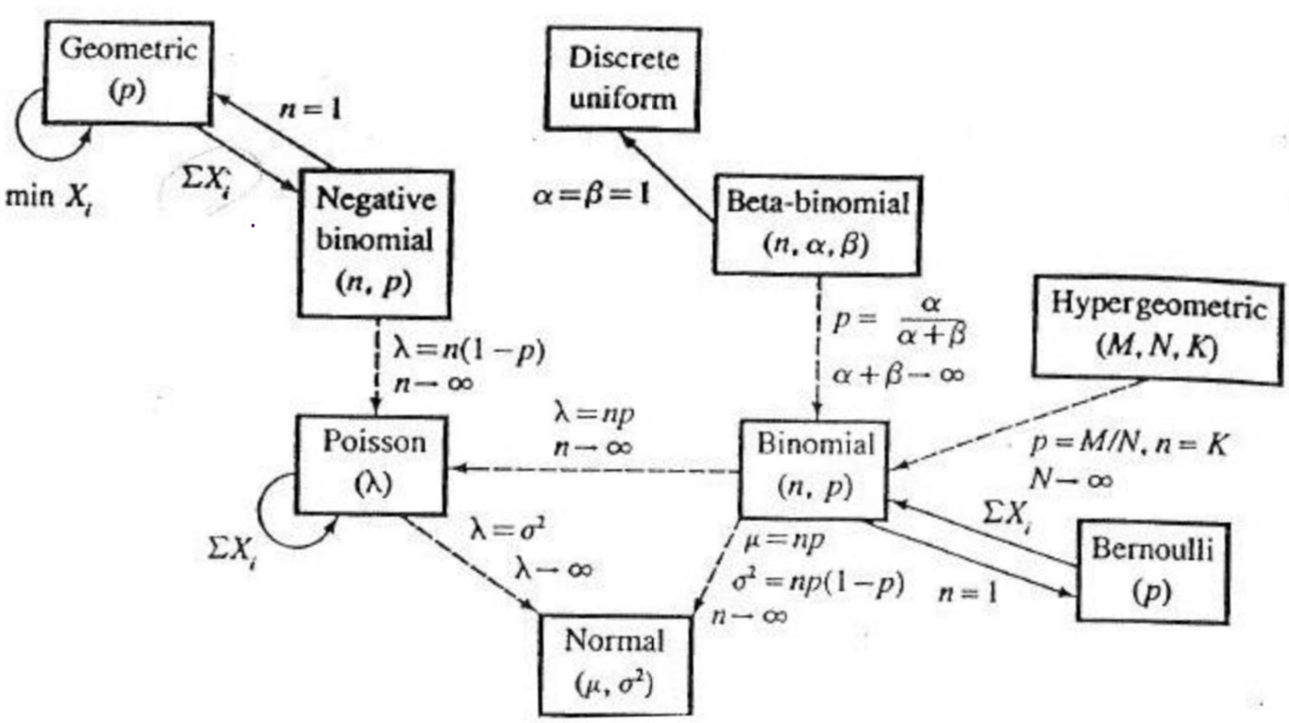
$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$
$M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, \quad -\infty < t < \infty$
$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$

Uniform
$m > 0$

$f(x) = \frac{1}{m}, \quad x = 1, 2, \ldots, m$
$\mu = \frac{m+1}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{m^2-1}{12}$

52

* It is very hard to derive the mgf of Hypergeometric distribution



CH 2

핵심 수학 공식

Differentiation Formulas:

1. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
2. $\frac{d}{dx}(ax) = a$
3. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
5. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
6. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
8. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
9. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x(\cot x)$
10. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
11. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
12. $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$
13. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
15. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Integration Formulas:

1. $\int 1\,dx = x + C$
2. $\int a\,dx = ax + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
6. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
7. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
8. $\int \sec x(\tan x)\,dx = \sec x + C$
9. $\int \csc x(\cot x)\,dx = -\csc x + C$
10. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
11. $\int e^x dx = e^x + C$
12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ a > 0,\ a \neq 1$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$
14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$
15. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$

Sum of Sequence Formula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Sum of Arithmetic Sequence Formula

$a_k = a_1 + (k-1)d,$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2_{a_1+} + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Sum of Geometric Sequence Formula

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

Sum of Infinite Geometric Sequence Formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r},\ where\ |r| < 1$$

CH 3

확률밀도함수 probability density function : 연속형 확률 변수의 pdf.
y값이 1보다 클 수 있음.
면적 = 확률

(a) $f(x) \geq 0$

(b) $\int f(x)\,dx = 1$

(c) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

* pdf 임을 보이는 방법
(1) 모든 구간에서 0 이상
(2) 면적 = 1

누적분포함수 cumulative distribution function : 연속형 확률변수 x의 cdf.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

기댓값 expectation : $E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\,dx$

$$\mu = E[X] = \int x f(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int e^{tx} \cdot f(x)\,dx$$

percentile / quantile / quartile : 25th percentile = 0.25th quantile = first quartile
50th percentile = 0.5th quantile = second quartile = median
75th percentile = 0.75 quantile = third quartile

CH 3

부분적분 공식

<부분적분>

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{적분쉬운거}} g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

로 다 삼 지

$$\underrightarrow{\ln x \quad x^2 \quad \sin x \quad e^x}_{\text{적분쉬움}}$$

$$\begin{aligned}\int x \underbrace{\sin x}_{\text{적분쉬움}}\,dx &= \int \sin x \; x \; dx \\ &= -\cos x \cdot x - \int -\cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_{\text{적분쉬움}}(x+1)\,dx &= e^x(x+1) - \int e^x\,dx \\ &= e^x(x+1) - e^x \\ &= x \cdot e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{\text{적분쉬움}} \ln x\,dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\end{aligned}$$

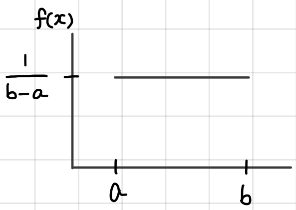
$$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{\text{적분쉬움}} \cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x$$

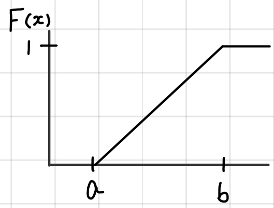
균일분포 uniform distribution : pdf 가 상수

$X \sim U(a.b)$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at}) & , t \neq 0 \\ 1 \quad (\text{로피탈정리}) & , t = 0 \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$





※ 로피탈정리

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 가 $\dfrac{0}{0}$ 꼴, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴일때 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 로 대신함.

CH 3

지수분포 exponential distribution : 첫번째 사건이 발생할때까지 대기시간

$X \sim exponential(\lambda)$

* 포아송분포로 지수분포 도출

$X \sim Poisson(\lambda t)$: 단위시간동안 사건이 발생한 횟수에 대한 분포

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$$

U : 포아송과정에서 다음 사건이 일어날때까지 걸린 시간

$P(U > t)$ = t시간동안 사건이 발생하지 않음

$= P(X=0) = e^{-\lambda t}$

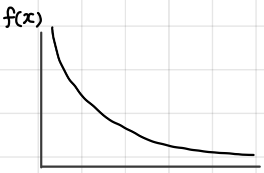
$$F_U(u) = P(U \le u) = 1 - P(U > u)$$
$$= 1 - e^{-\lambda u}$$

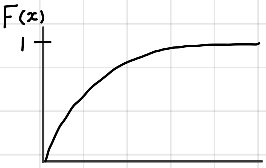
$f_U(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ (λ는 단위시간당 평균 사건 발생수)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$M(t) = E(e^{tx}) = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} \cdot dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$$

$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad \sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

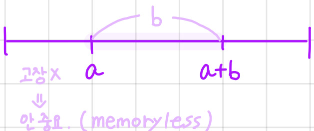




* 무기억성 : a시간까지 사건이 일어나지 않았을때 b시간까지 사건이 일어나지 않을 확률

= b시간까지 사건이 일어나지 않을 확률

$$P(X > a+b \mid X > a) = P(X > b)$$



Proof)

$X \sim \varepsilon(\theta)$

$$P(X > a+b | X > a) = \frac{P(X>a+b, X>a)}{P(X>a)} = \frac{P(X>a+b)}{P(X>a)}$$

$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$ 이므로 $P(X > x) = e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$

$$\therefore \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} = \frac{e^{-\frac{a+b}{\theta}}}{e^{-\frac{a}{\theta}}} = e^{-\frac{b}{\theta}} = P(x > b)$$

CH 3

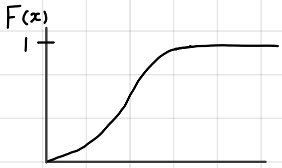
감마분포 gamma distribution : α 번째 사건이 발생할때까지 대기시간

$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}$$

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot exp(-(1-\beta t)x/\beta)\, dx = (1-\beta t)^{-\alpha}$$

$$\mu = E(X) = \alpha\beta \qquad \sigma^2 = var(X) = \alpha\beta^2$$



*** 감마분포와 포아송분포의 관계**

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \Rightarrow X \sim Gamma(\alpha, \tfrac{1}{\lambda})$$

*** 감마함수**

$$\Gamma(n) = \int y^{n-1} \cdot e^{-y} \cdot dy$$

n 이 양의 정수일때 $\Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

*** 감마분포에서 $\alpha = 1$ 이면 지수분포**

*** 감마분포에서 $\alpha = r/2$, $\beta = 2$ 이면 카이제곱분포**

* 감마
지수
카이제곱

CH 3

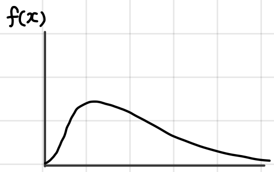
카이제곱분포 chi-square distribution : 표준정규 확률변수를 각각 제곱한 후 합해서 얻어지는 분포
감마분포의 특수한 형태

$X \sim \chi^2$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)\cdot 2^{r/2}} x^{r/2-1} \cdot e^{-x/2} \sim Gamma(r/2, 2)$$

$$M(t) = (1-2t)^{-r/2}$$

$$\mu = E(X) = \alpha\beta = r \qquad \sigma^2 = Var(X) = \alpha\beta^2 = 2r$$



* 카이제곱분포에서 $r = 1$ 이면 표준정규분포의 제곱

* $r = 2$ 인 카이제곱분포 <=> $\lambda = \frac{1}{2}$ 인 지수분포 <=> $\alpha = 1, \beta = 2$ 인 감마분포

정규분포 normal distribution

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$M(t) = \exp\left[\frac{\sigma^2}{2}t^2 + \mu t\right]$$

<- 어떤 확률분포의 적률모함수가 $e^{t\text{이차식}}$ 꼴이면
무조건 정규분포

[Theorem 2] The moment generating function of then $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ is $e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$.

Proof) $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2]\right\} dx.$$

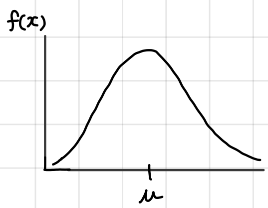
To evaluate this integral, we complete the square in the exponent:

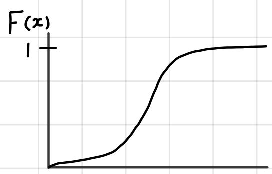
$$x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2 = [x - (\mu + \sigma^2 t)]^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2.$$

Hence,

$$M_X(t) = \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[x - (\mu + \sigma^2 t)]^2\right\} dx.}_{1}$$

$$= \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$





* 정규분포를 따르는 확률변수의 선형변환

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

CH 3

표준정규분포 standard normal distribution

$Z \sim N(0.1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$M(t) = exp\left[t^2/2\right]$$

[Theorem 1] If $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then $Z = (X-\mu)/\sigma$ is $N(0,1)$

Proof 1) We know that

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Consider the transformation $Z = (X-\mu)/\sigma$ so that $X = \mu + Z\sigma$ with $-\infty < z < \infty$. These gives

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] J(X \to Z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \quad -\infty < z < \infty. \end{aligned}$$

This is the pdf of $N(0,1)$.

[Theorem 1] If $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then $Z = (X-\mu)/\sigma$ is $N(0,1)$

Proof 2) The cdf of Z is

$$\begin{aligned} P(Z \le z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) &= P(X \le z\sigma + \mu) \\ &= \int_{-\infty}^{z\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \end{aligned}$$

Now, for the integral representing $P(Z \le z)$, we use the change of variable of integration given by $w = (x-\mu)/\sigma$ (i.e., $x = w\sigma + \mu$) to obtain

$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw.$$

But this is the expression for $\Phi(z)$, the cdf of a standardized normal random variable. Hence, Z is $N(0,1)$.

*** 표준정규분포와 카이제곱분포**

$Z \sim N(0.1)$ $\quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

$X = Z^2$ $\quad F(x) = P(X \le x) = P(Z^2 \le x) = P(-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x})$

$$= 1 - 2(1 - F_Z(\sqrt{x})) = -1 + 2F_Z(\sqrt{x})$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2f_Z(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$ $\Rightarrow$ $r=1$ 인 카이제곱

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot 2^{\frac{1}{2}}} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$ 인 감마

CH 3

Beta
$\alpha > 0$
$\beta > 0$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1$$
$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

Chi-square
$\chi^2(r)$
$r = 1, 2, \ldots$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2}, \qquad 0 < x < \infty$$
$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}, \qquad t < \frac{1}{2}$$
$$\mu = r, \qquad \sigma^2 = 2r$$

Exponential
$\theta > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \qquad 0 \le x < \infty$$
$$M(t) = \frac{1}{1-\theta t}, \qquad t < \frac{1}{\theta}$$
$$\mu = \theta, \qquad \sigma^2 = \theta^2$$

Gamma
$\alpha > 0$
$\theta > 0$

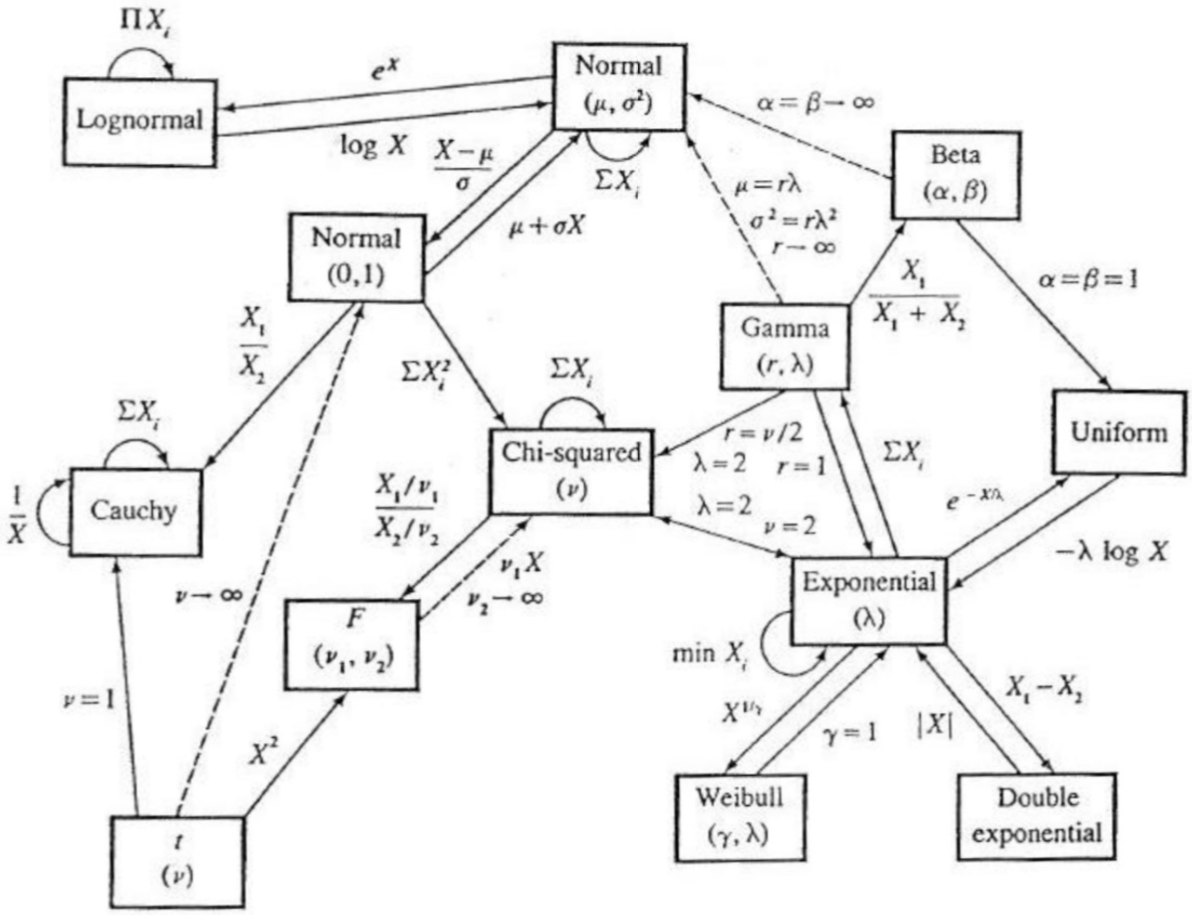
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, \qquad 0 < x < \infty$$
$$M(t) = \frac{1}{(1-\theta t)^\alpha}, \qquad t < \frac{1}{\theta}$$
$$\mu = \alpha\theta, \qquad \sigma^2 = \alpha\theta^2$$

Normal
$N(\mu, \sigma^2)$
$-\infty < \mu < \infty$
$\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$
$$M(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}, \qquad -\infty < t < \infty$$
$$E(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Uniform
$U(a, b)$
$-\infty < a < b < \infty$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \le x \le b$$
$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \qquad t \ne 0; \qquad M(0) = 1$$
$$\mu = \frac{a+b}{2}, \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



CH 4

결합확률질량함수 joint probability mass function (joint pmf)

random variable $X.\ Y$

$f(x.y) = P(X=x.\ Y=y)$

성질
(a) $0 \le f(x.y) \le 1$
(b) $\sum\sum f(x.y) = 1$
(c) $P[(X.Y) \in A] = \sum\sum f(x.y)$

주변확률질량함수 marginal probability mass function (marginal pmf)

X, Y가 결합 pmf f(x.y) 를 가질 때 X만의 pmf 또는 Y만의 pmf를 각각 X 또는 Y의 주변확률질량함수라고 함.

$f_X(x) = \sum_y f(x.y) = P(X=x)$ $\qquad f_Y(y) = \sum_x f(x.y) = P(Y=y)$

* X, Y 독립/종속 $\quad P(X=x,\ Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$ 이면 X.Y 독립

즉, $f(x.y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 이면 X.Y 독립

수학적 기댓값

$X_1.\ X_2$ 는 결합 Pmf $f(X_1\ X_2)$ 를 갖는 이산형 확률변수.

$u(X_1.X_2)$ 를 두 확률변수의 하나의 함수라 하면, $u(X_1.X_2)$ 의 기댓값은

$E[u(X_1.X_2)] = \sum\sum u(x_1.\ x_2) \cdot f(x_1.\ x_2)$

* 평균 $\quad u_i(X_1.X_2) = X_i$, $i = 1.2$ 이면 $E[u_i(X_1.X_2)] = E(X_i) = \mu_i$

* 분산 $\quad u_i(X_1.X_2) = (X_i - \mu_i)^2$, $i = 1.2$ 이면 $E[u_i(X_1.X_2)] = E[(X_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2 = var(X_i)$

* 평균 μ_i 와 분산 σ_i^2 은 결합 pmf $f(x_1.x_2)$ 혹은 주변 pmf $f_i(x_i)$ 로부터 계산 가능

* 특별한 수학적 기댓값 $\quad \mu_X = E(X) \qquad \sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$

$\mu_Y = E(Y) \qquad \sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2]$

공분산 covariance

$u(X.Y) = (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ 라 하면

$E[u(X\ Y)] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sigma_{XY} = cov(X.Y)$

$COV(X.Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

* X, Y 가 독립이면 $E[XY] = E[X]E[Y]$ 이므로 $COV(X.Y) = 0$

CH 4

상관계수 correlation coefficient

$\sigma_X \cdot \sigma_Y > 0$ 이면 $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

* Cauchy-Schwarz Inequality

For any two random variables X and Y

$$|E(XY)| \le E(|XY|) \le \left(E(|X|^2)\right)^{1/2}\left(E(|Y|^2)\right)^{1/2}$$

In correlation coefficient,

$$E(|(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)|) \le \left(E(|X-\mu_X|^2)\right)^{1/2}\left(E\left(|Y-\mu_y|^2\right)\right)^{1/2}$$
$$\Leftrightarrow E\left(\frac{|(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)|}{\sigma_X\sigma_Y}\right) \le 1$$
$$\Leftrightarrow \left|E\left(\frac{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right| \le 1$$
$$\Leftrightarrow -1 \le \rho_{XY} \le 1$$

26

- $E[XY] = \mu_X \cdot \mu_Y + \rho\sigma_X\sigma_Y$
- $-1 \le \rho \le 1$ (코시슈바르츠 부등식에 의해 증명)
- X, Y 가 독립이면 $\rho = 0$ (역은 항상 성립하는것은 아님)
- Covariance 를 σ_X, σ_Y 로 나누는 이유 : 표준화. 비교하기위해.

Example) joint pmf 가 주어졌을때, 상관계수 구하기

joint → marginal → E(X), E(Y), sd(X), sd(Y) → cov → correlation

$$f(x,y) = \frac{x+2y}{18}, \qquad x = 1,2, \qquad y = 1,2.$$

The marginal probability mass functions are, respectively,

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{2} \frac{x+2y}{18} = \frac{2x+6}{18} = \frac{x+3}{9}, \qquad x = 1,2,$$

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x+2y}{18} = \frac{3+4y}{18}, \qquad y = 1,2.$$

Since $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, X and Y are dependent. The mean and the variance of X are, respectively,

$$\mu_X = \sum_{x=1}^{2} x\frac{x+3}{9} = (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (2)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{14}{9}$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{x=1}^{2} x^2\frac{x+3}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{24}{9} - \frac{196}{81} = \frac{20}{81}.$$

The mean and the variance of Y are , respectively,

$$\mu_Y = \sum_{y=1}^{2} y\frac{3+4y}{18} = (1)\left(\frac{7}{18}\right) + (2)\left(\frac{11}{18}\right) = \frac{29}{18}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{y=1}^{2} y^2\frac{3+4y}{18} - \left(\frac{29}{18}\right)^2 = \frac{51}{18} - \frac{841}{324} = \frac{77}{324}.$$

The covariance of X and Y is

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X,Y) &= \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{2} xy\frac{x+2y}{18} - \left(\frac{14}{9}\right)\left(\frac{29}{18}\right) \\
&= (1)(1)\left(\frac{3}{18}\right) + (2)(1)\left(\frac{4}{18}\right) + (1)(2)\left(\frac{5}{18}\right) \\
&\quad + (2)(2)\left(\frac{6}{18}\right) - \left(\frac{14}{9}\right)\left(\frac{29}{18}\right) \\
&= \frac{45}{18} - \frac{406}{162} = -\frac{1}{162}.
\end{aligned}$$

Hence, the correlation coefficient is

$$\rho = \frac{-1/162}{\sqrt{(20/81)(77/324)}} = \frac{-1}{\sqrt{1540}} = -0.025.$$

CH 4

조건부 확률질량함수 conditional probability mass function

$Y=y$ 가 주어졌을 때 X의 조건부 pmf : $g(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_Y(y)>0$

$X=x$ 가 주어졌을 때 Y의 조건부 pmf : $g(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$, $f_X(x)>0$

* joint 분포 먼저 필요함. (꼭 x,y 두개일 필요 없음. 확장가능. ex.윷놀이)

- Proper : $\sum_y g(y|x) = \sum_y \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1$
- $P(a<Y<b|X=x) = \sum_{y=a}^{b} g(y|x)$ ← 키를 아는데 몸무게 분포
- $\mu_{Y|X} = E[Y|X=x] = \sum_y y \cdot g(y|x)$
- $E[h(y)|X=x] = \sum_y h(y)\, g(y|x)$
- $\sigma^2_{Y|X} = E[(Y-E[Y|x])^2|x] = \sum_y (y-E[Y|x])^2 \cdot g(y|x) = E(Y^2|x) - [E(Y|x)]^2$

[Theorem] The conditional mean of Y, given $X=x$ is a function of x alone, so that $E[Y|X=x]=a+bx$.

Then $a=\mu_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$, and $b=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

$$E[Y\mid X=x]=\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X).$$

$\sum_y y\cdot g(y|x) = \sum_y y\cdot\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = a+bx$ 이므로

$\sum_x\sum_y y\cdot f(x,y) = \sum_x (a+bx)f_X(x) \Rightarrow \mu_Y = a+b\mu_X$

$\sum_x\sum_y xy\cdot f(x,y) = \sum_x (ax+bx^2)f_X(x) \Rightarrow E(XY) = aE(X)+bE(X^2)$

$\mu_X\mu_Y + \rho\sigma_X\sigma_Y = a\mu_X + b(\mu_X^2+\sigma_X^2)$

$\therefore\ a = \mu_Y - \rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$, $b=\rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

$E[Y|X=x] = \mu_Y + \rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$ ← x 에 대한 선형식 (μ_X, μ_Y) 를 지남.

↓

ρ는 기울기.
X 와 Y의 선형성의 강도 측도

CH 4

결합확률밀도함수 joint probability density function (joint pdf)

random variable X . Y
(continuous)

성질
- (a) $f(x.y) \geq 0$
- (b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x.y)\cdot dx\,dy = 1$
- (c) $P[(X.Y) \in A] = \iint_A f(x.y)\,dx\,dy$: $\{(X.Y) \in A\}$는 평면상에서 정의된 하나의 사상

↳ $P[(X.Y) \in A]$는 xy 평면상의 영역 A를 면적으로 하고 A 상에 있는 각 점 $(x.y)$에 대하여 높이 $z = f(x.y)$를 갖는 공간체의 부피를 의미함.

주변확률밀도함수 marginal probability density function (marginal pdf)

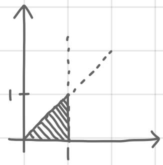
X, Y가 결합 pdf $f(x.y)$를 가질 때 X만의 pdf 또는 Y만의 pdf를 각각 X 또는 Y의 주변확률밀도함수라고 함.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x.y)\,dy \quad , \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x.y)\cdot dx$$

* X, Y 독립/종속 $\quad f(x.y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 이면 X.Y 독립 $(X \perp Y)$

example1) joint pdf와 x,y의 범위가 주어졌을때

$$f(x.y) = \frac{3}{2}x^2(1-|y|) \quad , \quad -1 < x < 1 \; , \; -1 < y < 1$$



1. 그림

$A = \{(x.y) : 0 < x < 1, \; 0 < y < x\}$ 라고 할 때,

2. 적분 범위

(X.Y)가 A에 속할 확률은 $P[(X.Y) \in A] = \int_0^1\int_0^x \frac{3}{2}x^2(1-y)\,dy\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}\left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{9}{40} \quad (부피) = (확률)$$

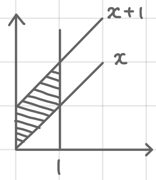
X.Y의 평균은 $\mu_X = E(X) = \int_{-1}^{1} x\cdot f_X(x) = 0$

$\mu_Y = E(Y) = \int_{-1}^{1} y\cdot f_Y(y) = 0$

CH 4

example2) joint pdf와 x,y의 범위가 주어졌을때

$f(x,y) = 1, \quad x \le y \le x+1, \quad 0 \le x \le 1 \quad \longrightarrow$



marginal pdf $\quad f_X(x) = \int_x^{x+1} 1 \cdot dy = 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 1 \, dx = y & , \ 0 \le y \le 1 \\ \int_{y-1}^1 1 \, dx = 2-y & , \ 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

$\mu_X = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{2} \qquad \mu_Y = \int_0^1 y \cdot y \cdot dy + \int_1^2 y(y-2) \cdot dy = 1$

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{3} \qquad E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot y \cdot dy + \int_1^2 y^2(y-2) \cdot dy = \frac{7}{6} \qquad E(XY) = \int_0^1 \int_x^{x+1} xy \cdot 1 \cdot dx = \frac{7}{12}$

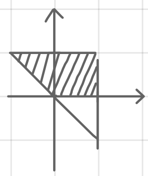
$\sigma_X^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \qquad \sigma_Y^2 = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}$

$Cov(X,Y) = \frac{7}{12} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{1}{12}$

$$\rho = \frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

example3) joint pdf와 x,y의 범위가 주어졌을때

$f(x,y) = \overset{\text{normalizing constant}}{c}\,x^2y, \quad -y \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 \quad \longrightarrow$



$\int_0^1 \int_{-y}^1 cx^2y \cdot dx\,dy = \frac{7c}{30} = 1 \qquad \therefore c = \frac{30}{7}$

marginal pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x}^1 \frac{30}{7} x^2 y \cdot dy = \frac{15}{7} x^2(1-x^2) & , \ -1 \le x \le 0 \\ \int_0^1 \frac{30}{7} x^2 y \cdot dy = \frac{15}{7} x^2 & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$f_Y(y) = \int_{-y}^1 \frac{30}{7} x^2 y \cdot dx = \frac{10}{7}(y + y^4) \qquad , \ 0 \le y \le 1$

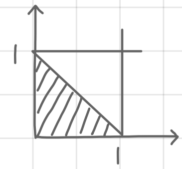
$P(X \le 0) = \int_{-1}^0 \frac{15}{7} x^2(1-x^2)\,dx = \frac{2}{7}$

$P(0 \le Y \le X \le 1) = \int_0^1 \int_0^x \frac{30}{7} x^2 y \, dy\,dx = \frac{3}{7}$

CH 4

example4) joint pdf 와 x,y의 범위가 주어졌을때

$f(x,y) = c(x+y)$ $\quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 < x+y < 1$



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} c(x+y)\,dy\,dx = \frac{3}{c} = 1 \qquad \therefore c = 3$$

marginal pdf $\quad f_X(x) = \int_0^{1-x} 3(x+y)\,dy = -\frac{3}{2}(-1+x^2)\ ,\ 0 \le x \le 1$

$\qquad f_Y(y) = \int_0^{1-y} 3(x+y)\,dx = -\frac{3}{2}(-1+y^2)\ ,\ 0 \le y \le 1$

$$\mu_X = \int_0^1 x \cdot \left(-\frac{3}{2}(-1+x^2)\right) dx = \frac{3}{8} \qquad \mu_Y = \int_0^1 y \cdot \left(-\frac{3}{2}(-1+y^2)\right) dy = \frac{3}{8}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}(-1+x^2)\right) dx = \frac{1}{5} \qquad E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}(-1+y^2)\right) dy = \frac{1}{5}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{19}{320}$$

조건부 확률밀도함수 conditional probability density function

$Y=y$ 가 주어졌을 때 X의 조건부 pdf : $g(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ ,\quad f_Y(y) > 0$

$X=x$ 가 주어졌을 때 Y의 조건부 pdf : $g(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}\ ,\quad f_X(x) > 0$

* joint 분포 먼저 필요함. (꼭 x,y 두개일 필요 없음. 확장가능)

— $E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y|x)\,dy$

— $Var(Y|x) = E\left[(Y - E(Y|x))^2 \mid x\right]$

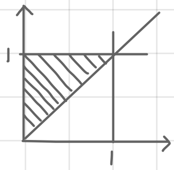
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y|x)]^2 \cdot g(y|x) \cdot dy$$

$$= E[Y^2|x] - (E[Y|x])^2$$

CH 4

example1) joint pdf와 x,y의 범위가 주어졌을때 conditional pdf

$f(x,y) = 2 \quad 0 \le x \le y \le 1 \longrightarrow$



$f_X(x) = 2(1-x), \quad 0 \le x \le 1$

$f_Y(y) = 2y, \quad 0 \le y \le 1$

$g(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x}, \quad x \le y \le 1$

$E(Y|x) = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{1-x} dy = \frac{1+x}{2}, \quad 0 \le x \le 1$

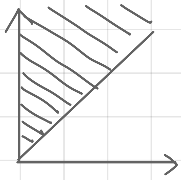
$E(X|y) = \int_0^y x \cdot g(x|y)\, dx = \frac{y}{2}, \quad 0 \le y \le 1$

$Var(Y|x) = \int_x^1 \left(y - \frac{1+x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-x} dy = \left[\frac{1}{3(1-x)} \cdot \left(y - \frac{1+x}{2}\right)^3\right]_x^1$

$= \frac{(1-x)^2}{12}$

example2) joint pdf와 x,y의 범위가 주어졌을때 conditional pdf

$f(x,y) = e^{-y} \quad 0 < x < y < \infty \longrightarrow$



$f_X(x) = \int_x^\infty e^{-y} \cdot dy = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$

$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y} \cdot dx = ye^{-y}, \quad 0 < y < \infty$

$g(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = e^{x-y}$

$E(Y|x) = \int_x^\infty y \cdot e^{x-y} \cdot dy = 1+x, \quad 0 < x < \infty$

$Var(Y|x) = \int_x^\infty (y-(1+x))^2 \cdot e^{x-y} \cdot dy = 1$

CH 4

문제1) $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$

$X+Y \sim$? $\quad P(X+Y=0) = $?

풀이1) $P(X+Y=k)$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(X+Y=k \mid X=i)$$

$$= \sum P(Y=k-X \mid X=i)$$

$$= \sum P(Y=k-X)\,P(X=i)$$

풀이2) $M_X(t) = \exp[\lambda(e^t-1)]$

$$X+Y = Z$$

$$M_Z(t) = E[\exp(tX+tY)]$$

$$= E(e^{tX})\cdot E(e^{tY})$$

문제2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX+b$

$Y \sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

풀이1) cdf 방법

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

$$= P(aX+b \le y)$$

$$= P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right)$$

$$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) - F_X(-\infty)$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}$$

풀이2) Mgf 방법

$$M_X(t) = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2\right]$$

$$M_Y(t) = E(e^{tY})$$

$$= E[\exp(t(aX+b))]$$

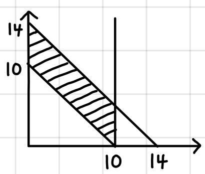
$$= e^{tb}\cdot E(e^{atX})$$

$$= e^{tb}\cdot\exp\left(a\mu t + \frac{\sigma^2}{2}a^2t^2\right)$$

$$= \exp\left[(a\mu+b)t + \frac{a^2\sigma^2}{2}t^2\right]$$

문제3) $f(x,y) = \frac{1}{40}$, $0 \le x \le 10$, $10-x \le y \le 14-x$

(a) $f(x,y) > 0$



(b) $f_X(x) = \int_{10-x}^{14-x} f(x,y)\,dy$

$$= \frac{1}{40}\cdot y\Big|_{10-x}^{14-x}$$

$$= \frac{1}{10}, \quad 0 \le x \le 10$$

(c) $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{4}, \quad 10-x \le y \le 14-x$$

(d) $E(Y|x) = \int_{10-x}^{14-x} y\cdot f(y|x)\,dy$

$$= 12 - x$$

CH 4

문제4) $X \sim U(0, 2)$, $Y|X=x \sim U(0, x^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 2$ $\qquad f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x^2}$, $0 \le y \le x^2$

(a) $f(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y)$

$= \frac{1}{2x^2}$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x^2$

(b) $f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\cdot dx$

$= \int_{\sqrt{y}}^{2} \frac{1}{2x^2}\cdot dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\right)$, $0 \le y \le 4$

(c) $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{2\sqrt{y}}{x^2(2-\sqrt{y})}$

$E(X|Y) = \int x \cdot f(x|y)\, dx$

(d) $E(Y|X) = \int_0^{x^2} y \cdot f(y|x)\, dy$

$= \frac{1}{2}x^2$

문제5) 사건 A . B $\quad P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$ $\quad P(A|B) = ?$ $\leftarrow$ Max. Min

풀이) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$max = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1$

$min = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\begin{aligned} &\text{* Bonferroni Inequality} \\ &S \supset A\cup B \\ &P(S) > P(A\cup B) \\ &1 > P(A) + P(B) - P(A\cap B) \\ &\therefore \tfrac{1}{3} \le P(A\cap B) \le 1 \end{aligned}}$

문제6) $f(x,y) = 3\theta^{-3}(x+y)$ $\qquad 0<x<\theta$. $0<y<\theta$. $0<x+y<\theta$ $\rightarrow$ $0<x<\theta-y$, $0<y<\theta-x$

(a) $f_X(x) = \int_0^{\theta-x} f(x,y)\, dy = \frac{3}{2}\theta^{-3}(\theta-x)(\theta+x)$, $0<x<\theta$

(b) $f(Y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{2(x+y)}{(\theta-x)(\theta+x)}$, $0<y<\theta$

$E(Y^k|X=x) = \int_0^{\theta} y^k \cdot f(Y|x)\, dy = \frac{2}{(\theta-x)(\theta+x)}$

CH 4

문제7) $\mathrm{Cov}(X.Y|Z) = E[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}|Z]$

(a) 증명 : $\mathrm{Cov}(X.Y|Z) = E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)$

$$
\begin{aligned}
(\text{좌변}) &= E[XY - XE(Y|Z) - YE(X|Z) + E(X|Z)E(Y|Z) \,|\, Z] \\
&= E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z) - E(Y|Z)E(X|Z) + E(X|Z)E(Y|Z) \\
&= E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z) \\
&= (\text{우변})
\end{aligned}
$$

(b) 증명 : $\mathrm{Cov}(X.Y) = E[\mathrm{cov}(X.Y|Z)] + \mathrm{cov}(E(X|Z), E(Y|Z))$

$$
\begin{aligned}
(\text{좌변}) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\
&= E_Z[E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y) \,|\, Z]] \\
&= E_Z[E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y) - E(Y|Z)E(X) + E(X)E(Y)] \\
&= E_Z[\mathrm{cov}(XY|Z) + \{E(X) - E(X|Z)\}\{E(Y) - E(Y|Z)\}] \\
&= E[\mathrm{cov}(XY|Z)] + \mathrm{cov}(E(X|Z), E(Y|Z)) \\
&= (\text{우변})
\end{aligned}
$$

$\ast$ $E(XY) = E_Z(E(XY|Z))$

$$
\begin{aligned}
(\text{좌변}) &= \iint xy \cdot f(x.y)\, dx\, dy \\
&= \iiint xy \cdot f(x.y|z) \cdot f(z) \cdot dz\, dx\, dy \\
&= \int E(XY|Z) f(z) \cdot dz \\
&= E_Z[E(XY|Z)]
\end{aligned}
$$

CH 4

다변량정규분포 multivariate normal distribution

$$X = (X_1, \dots, X_k) \qquad X \sim N_k(\mu, \Sigma)$$

$$f_X(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \cdot |\Sigma|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)\right)$$

이변량정규분포 bivariate normal distribution

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(X-\mu_X)^2}{\sigma_X{}^2} + \frac{(Y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y{}^2} - \frac{2\rho(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right]\right)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_X \\ \mu_Y\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2\end{pmatrix}$$

이변량정규분포의 marginal distribution

Proof)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left\{\frac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y} - \frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\rho\right\}^2 - \left(\frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\rho\right)^2\right]\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\rho^2\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left\{\frac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y} - \frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\rho\right\}^2\right]\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\rho^2\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left\{\frac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y} - \frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\rho\right\}\right]^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\rho^2\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left\{\frac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y} - \frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\rho\right\}\right]^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\rho^2\right)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left\{\frac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y} - \frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}\rho\right\}\right]^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\rho^2\right)\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{y-(\mu_Y+\sigma_{XY}(x-\mu_X))}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right) dy}_{\sim N\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\bar{x}),\, (1-\rho^2)\sigma_Y^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\rho^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)$$

CH 4

이변량정규 pdf에서 조건부분포

$$f_{XY}(x, y) \sim N(\mu, \Sigma) \qquad f_X(x) \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \qquad Y|X \sim N(\mu_*, \sigma_*^2)$$

$$E(Y|x) = \mu_* = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

$$var(Y|x) = \sigma_*^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

Proof) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)}{\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)}$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right] + \frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\rho^2\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}(x-\mu_X)^2 + (y-\mu_Y)^2 - 2\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\right]\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}\left[y - \mu_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)\right]^2\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

CH5

한 확률변수의 함수

분포함수 기법

감마분포를 따르는 확률변수 X 의 pdf

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\theta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\theta}, \quad 0<x<\infty$$

$Y = e^{X}$ 라 놓으면 확률변수 Y 의 cdf $(1 < y < \infty)$

$$G(y) = P(Y \le y) = P(e^{X} \le y) = P(X \le \ln y)$$

$$= \int_0^{\ln y} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\theta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\theta} \cdot dx$$

확률변수 Y 의 pdf $g(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^{\alpha}} (\ln y)^{\alpha-1} \cdot e^{-(\ln y)/\theta} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$

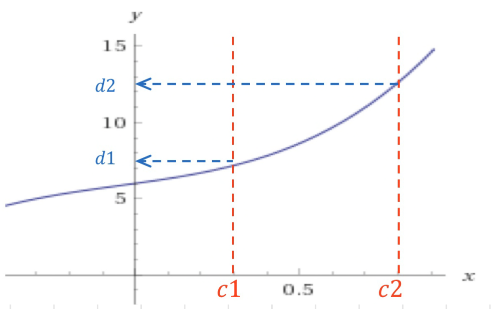
$\Rightarrow$ 로그감마 pdf

평균 $\mu = \frac{1}{(1-\theta)^{\alpha}}$ 분산 $\sigma^2 = \frac{1}{(1-2\theta)^{\alpha}} - \frac{1}{(1-\theta)^{2\alpha}}$

변수변환 기법 – continous increasing function

$C_1 < x < C_2$ 에서 pdf $f(x)$ 를 갖는 연속형 확률변수 X

증가함수 $Y = u(X)$ 의 역함수를 $X = v(Y)$ 라 놓는다. $(d_1 = u(c_1) < y < u(c_2) = d_2)$



Y의 cdf $G(y) = P(Y \le y)$

$$= P[u(X) \le y]$$

$$= P[X \le v(y)]$$

$$= \int_{C_1}^{v(y)} f(x)\,dx, \quad d_1 < y < d_2$$

Y의 pdf $g(y) = G'(y) = f[v(y)][v'(y)]$

CH5

변수변환 기법 - continous decreasing function

$C_1 < x < C_2$ 에서 pdf $f(x)$ 를 갖는 연속형 확률변수 X

증가함수 $Y = u(X)$ 의 역함수를 $X = v(Y)$ 라 놓는다. $(d_1 = u(c_1) < y < u(c_2) = d_2)$

Y의 cdf $G(y) = P(Y \le y)$

$$= P[u(X) \le y]$$

$$= P[X \le v(y)]$$

$$= \int_{C_1}^{v(y)} f(x)\,dx \quad , \quad d_1 < y < d_2$$

Y의 Pdf $g(y) = G'(y) = f[v(y)][v'(y)]$