Ncode **A4**

Ncode printed on front pages only.

Powered by Neo smartpen

NDO- DN140
210 x 297mm | 50 sheets | Plain
-
NeoLAB Convergence Inc.
www.neosmartpen.com

10.1 수열

◍ 무한수열

- 정의역이 자연수

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \cdots \\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \{a_n\} \end{cases}$$

◍ 극한

$|a_n - L| < \varepsilon$ 일때

수열 $\{a_n\}$ 의 극한 $= L$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

* 수열이 극한값을 가지면 수렴.

갖지않으면 발산.

예제 10.1.2

수열 $\left\{\frac{\ln n}{e^n}\right\}$ 의 수렴/발산 판정.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \left(\frac{상수}{\infty}\right) = 0$ ∴ 수렴

$\Rightarrow$ 로피탈정리에의하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \lim \frac{1}{n \cdot e^n} = 0$

◍ 단조수열

$$\begin{cases} 단조증가 : & a_n \le a_{n+1} \\ 단조감소 : & a_n \ge a_{n+1} \end{cases}$$

◍ 유계

상계 $= A$ ($a_n \le A$ 일때)

↳ $\{a_n\}$ 은 위로 유계.

하계 $= B$ ($b_n \ge B$ 일때)

↳ $\{b_n\}$ 은 아래로 유계.

◍ 단조수열 수렴 ⇄ 유계 수열

10.2 무한급수

무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

S_n : 무한급수의 부분합 (n 까지 항의 합)

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\{S_n\}$: 부분합 수열

무한급수의 수렴 / 발산

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \begin{cases} S \text{ 로 수렴} \\ \text{극한값 존재 X} \Rightarrow \text{발산} \end{cases}$$

기하급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

i) $|r| < 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$

ii) $|r| > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n$: 발산

iii) $r = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n$: 발산

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 는 $|r| < 1$ 에서

$\dfrac{a}{1-r}$ 로 수렴한다.

조화급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_{2^k} = 1 + \frac{k}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_{2^k} = \infty$$

$\therefore$ 발산

Note

① $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$ ($|r| < 1$ 일때)

② $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$: 발산

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$: 수렴

10.2 무한급수

정리

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 수렴 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$: 수렴

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 수렴 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 또는 존재 X

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 발산

유한합에 대한 계산 법칙이

무한급수에 그대로 적용되지 않는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+\cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} = (1-1)+(1-1)+\cdots = 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = 1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1$$

수렴급수에서는 괄호를 임의로 묶어서 만든 새급수의 합이 원급수의 합과 같다.

$\{S_n\}$: 수렴급수의 부분합 수열

$\{T_m\}$: 괄호를 묶어서 만든 급수의 부분합 수열

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} T_m$$

$$\therefore \quad S_n = T_m$$

수렴급수의 덧셈법칙

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 수렴할때

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 도 수렴한다.

$$* \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

* 곱셈, 나눗셈은 수렴급수여도 성립 불가능.

10.3 양항급수의 수렴판정법

↳ 무한급수의 각 항이 음이 아닌 급수.

- 양항급수가 수렴 ⟺ 부분합 수열 S_n 의 상계 존재.
  ↳ 단조증가

- "지배한다" 의미

  두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 양항급수일때,

  $a_n \le b_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 을 지배.

- 비교판정법

  $\sum a_n$, $\sum b_n$ 양항급수이고

  $\sum b_n$ 이 $\sum a_n$ 을 지배. ($a_n \le b_n$)

  (1) $\sum b_n$ 수렴 $\Rightarrow$ $\sum a_n$ 수렴

  (2) $\sum a_n$ 발산 $\Rightarrow$ $\sum b_n$ 발산

예제 10.3.1

무한급수 $\sum \frac{n}{2^n(n+1)}$ 수렴 / 발산 판정

$\Rightarrow 0 < \frac{n}{2^n(n+1)} < \frac{1}{2^n}$

$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이 수렴하므로 ($r=\frac{1}{2}<1$ 인 기하급수)

비교판정법에 의해

$\sum \frac{n}{2^n(n+1)}$ 도 수렴.

- 극한비교 판정법

  $\sum a_n$, $\sum b_n$ 양항급수

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

  $\Rightarrow$ 두 급수는 수렴과 발산을 같이함.

  * $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 일때

    $\sum b_n$ 수렴 $\Rightarrow$ $\sum a_n$ 수렴

예제 10.3.3

무한급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-7}}$ 발산 증명

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{4n^2-7}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-7}}{n} = 2 > 0$

$\sum \frac{1}{n}$ 은 발산하므로

극한비교판정법에 의해 $\sum \frac{1}{\sqrt{4n^2-7}}$ 도 발산함.

10.3 양항급수의 수렴판정법

● 적분판정법

f : 모든실수 $x \geq 1$ 에서 $f(x) > 0$ 이고

연속인 단조감소함수.

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = f(n)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 수렴} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ 수렴}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_1^t f(x)\,dx \text{ 수렴}$$

$$* \quad \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

서로 지배.

예제 10.3.6

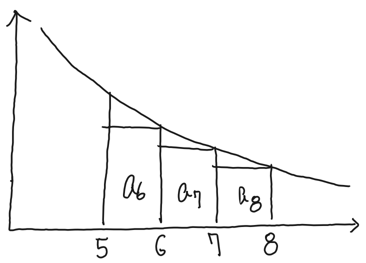
특이적분을 이용하여 수렴급수 $\sum \frac{n}{e^{n^2}}$ 에 대하여

5항까지 합과 급수합과의 오차의 상계를 구하라.

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{5} a_n \right| \leq A$$

$$\sum_{n=6}^{\infty} a_n \leq \int_5^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \cdot dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_5^t \frac{x}{e^{x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^{-25}$$



● P - 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{3}\right)^p + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^p + \cdots$$

$$\begin{cases} p > 1 \text{ 이면 수렴} \\ p \leq 1 \text{ 이면 발산} \end{cases}$$

● 비판정법

$a_n \neq 0$ 이고

양항급수 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 에서

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ 라 할때,

(1) $\rho < 1 \Rightarrow$ 수렴

(2) $\rho > 1 \Rightarrow$ 발산

(3) $\rho = 1 \Rightarrow$ 판정불가

예제 10.3.7

무한급수 $\sum \frac{n^{20}}{2^n}$ 의 수렴/발산 판정

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^{20}}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{20}}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{20} = \frac{1}{2} < 1 \text{ 이므로}$$

비판정법에의해 수렴.

10.4 교대급수, 절대수렴

● 교대급수

$a_n > 0$ 일때,

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ 에서

→ 교대급수

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이고 $a_n > a_{n+1}$ 이면

이 급수는 수렴한다.

● 절대수렴

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 이 절대수렴

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$ 가 수렴

EX 1) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}} + \cdots$ 은

절대수렴한다.

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots$ 이

수렴하기 때문. ($r = \frac{1}{3} < 1$ 기하급수)

EX 2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$ 은

절대수렴하지 않는다.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 이

발산하기 때문. (조화급수)

● 조건부수렴

급수는 수렴하지만 절대수렴은 하지 않으면

그 급수는 조건부수렴한다. ($\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$)

● $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 절대수렴하면

이 급수는 수렴한다.

$a_n \leq |a_n|$ 수렴함을 보이면 a_n 도 수렴

예제 10.4.1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(10 \sin \frac{n\pi}{6}\right)$ 의 수렴/발산 판정

$\Rightarrow \left|\frac{10}{n^2} \sin \frac{n\pi}{6}\right| \leq \frac{10}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^2}$ 는 수렴 (p-급수)

비교판정법에의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{10}{n^2} \sin \frac{n\pi}{6}\right|$ 수렴.

즉, 주어진 급수는 절대수렴하므로

이 급수는 수렴한다.

● 각 항이 0 이 아닌 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ 라 할때,

(1) $\rho < 1 \Rightarrow$ 절대수렴

(2) $\rho > 1 \Rightarrow$ 발산

※ 10.3 에서의 비판정법은

양항급수일때를 다룬다.

10.5 거듭제곱급수

거듭제곱급수 (멱급수)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$x=0$ 이면 급수 $= a_0$ 로 수렴

예제 10.5.1

거듭제곱급수가 수렴하는 모든 x의 값

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n} = 1 + \frac{1}{2\cdot 2}\cdot x + \frac{1}{3\cdot 4}\cdot x^2 + \cdots$$

$\Rightarrow$ 비판정법을 이용하면

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{2(n+2)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\cdot\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

$\rho = \frac{|x|}{2} < 1$ ($|x| < 2$) 에서 절대수렴

$\rho = \frac{|x|}{2} > 1$ ($|x| > 2$) 에서 발산

$x = 2$ 일때 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 발산

$x = -2$ 일때 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$; 교대급수

① $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow$ 교대급수 수렴

$\therefore -2 \le x < 2$

수렴집합 $\neq$ 수렴구간

; 거듭제곱급수가 수렴하는 점들의 집합.

(1) 집합 $\{0\}$; $R=0$

(2) $(-R, R)$, $[-R, R]$, $(-R, R]$, $[-R, R)$

(3) 모든실수 ; $R = \infty$

$|x| < R$: 수렴

$|x| > R$: 발산

* R : 수렴반지름

* $(-R, R)$; 수렴구간

거듭제곱급수에서

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ 이 존재하면

수렴반지름 $R = \frac{1}{L}$ 이고

수렴구간 내의 모든 점에서 절대수렴.

Ex) $L = 0 \Rightarrow R = \infty$

$L = \infty \Rightarrow R = 0$

예제 10.5.4

$-1 < x < 1$ 일때 $\lim_{n\to\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n)}{n!} = 0$ 증명.

idea) $\sum a_n$ 수렴 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum \frac{k(k-1)\cdots(k-n)}{n!}\cdot x^n$ 의 수렴집합을 보이면됨

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-n-1}{n+1}\right| = 1 = L$$

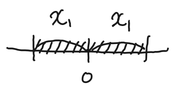
수렴반지름 $R = 1$

수렴구간 : $|x| < R = 1$

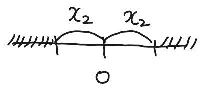
위 급수는 $|x| < 1$ 에서 수렴.

10.5 거듭제곱급수

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 이 $x_1 \neq 0$ 인 실수 x_1 에서 수렴하면 $|x| < |x_1|$ 을 만족하는 모든 x에 대하여 절대수렴.



- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 이 실수 x_2에서 발산하면 $|x| > |x_2|$ 인 모든 x 에 대하여 발산.



- 일반적인 거듭제곱급수

$\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$: $(x-x_0)$에 대한 멱급수

x_0 : 거듭제곱급수의 중심

수렴구간 : x_0를 중심으로하는 열린구간

$(x_0 - R,\ x_0 + R)$

ex) x_0 에서만 수렴 ⇒ $R = 0$

실수전체에서 수렴 ⇒ $R = \infty$

- 거듭제곱급수의 수렴집합 내에서 정의한 함수 f

$f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$

(1) f는 거듭제곱급수의 수렴집합내에서 연속.

(2) 항별미분

$$f'(x) = D_x \cdot f(x) = D_x \cdot \left[\sum a_n (x-x_0)^n\right]$$
$$= \sum D_x \left[a_n (x-x_0)^n\right]$$
$$= \sum n \cdot a_n (x-x_0)^{n-1}$$

(3) 항별적분

$$\int_{x_0}^{x} f(t) \cdot dt = \int_{x_0}^{x} \sum a_n (t-x_0)^n \cdot dt$$
$$= \sum \int_{x_0}^{x} a_n (t-x_0)^n \cdot dt$$
$$= \sum \frac{1}{n+1} \cdot a_n (x-x_0)^{n+1}$$

- 항별적분 활용

① $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad |x| < 1$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} \cdot dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$
$$= -\ln(1-x)$$

② $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} \cdot dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$= \ln(1+x)$$

⇒ $\ln(1+x) - \ln(1-x)$

$$= \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$
$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$\frac{1+x}{1-x} = t$ 로 치환. $0 < t < \infty$

$$\therefore \ln t = 2\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2n+1}, \quad 0 < t < \infty$$

10.6 Taylor 급수와 Maclaurin 급수

● n차 어림식

n번 미분한 값 = 함수값

- 1차 어림식 = 접방

$= f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

- 2차 어림식 $= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

● n번째 Maclaurin 다항식

$$P_n(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

※ $P_1(x)$는 $x=0$ 에서 f의 1차 어림식

$P_2(x)$는 $x=0$ 에서 f의 2차 어림식

● n번째 Taylor 다항식

$$P_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

● Maclaurin 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

● Taylor 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

예제 10.6.4

Maclaurin 급수

(2) $\sin x$

$f(x)=\sin x \to f(0)=0$

$f'(x)=\cos x \to f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x \to f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \to f'''(0)=-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

$$= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$$

(3) $\cos x$

$f(0)=1$

$f'(0)=0$

$f''(0)=-1$

$f'''(0)=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

$$= f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots$$

$$= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}$$

예제 10.6.5

$x=1$ 에서 Taylor 급수. $f(x)=\ln x$, ⊕ 수렴구간

$f(1)=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=-1$, $f'''(1)=2$

$\Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 = L$$

$R=1$ ∴ 수렴구간 $(0, 2)$

10.7 Taylor 급수의 수렴과 나머지의 어림값

- Taylor 의 나머지공식

f의 n번째 나머지

$= x_0$ 에서 n번째 Taylor 다항식과 $f(x)$ 의 차.

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = R_n(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \ (x_0 < c < x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ \text{성립}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

- 나머지 어림값 정리

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \le \underbrace{\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}}$$

$n\to\infty$ 일때 0 으로 수렴

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

예제 10.7.1

$\cos x$ 의 Maclaurin 급수는 모든 x에서 수렴.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$f(x) = \cos x$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le 1 = M$, $x_0 = 0$

$$0 \le |R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le |x|^{N-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2-N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

예제 10.7.2

$\sin x$ 의 Maclaurin 급수를 이용하여 $\sin 3^\circ$의 값을

소수점이하 5자리까지 구하라.

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin 3^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{60}\right)$$

$$\left|R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)\right| < 0.000005$$

$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le 1 = M$, $x_0 = 0$, $x = \frac{\pi}{60}$

$$\left|R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)\right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\dfrac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)!} < 5\times10^{-6}$ 이 성립하는

최소의 자연수 $n = 3$ 이다.

$$\therefore \sin 3^\circ = \left(\frac{\pi}{60}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3$$

예제 10.7.4

e^x의 Maclaurin 급수를 사용하여 e의 값을

소수점이하 5자리까지 구하라.

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$|R_n(1)| < 5\times10^{-6}$, $I = [0, 1]$

$$|R_n(1)| \le \frac{M}{(n+1)!} = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

$\dfrac{3}{(n+1)!} \le 5\times10^{-6}$ 이 성립하는

최소의 자연수 $n=9$ 이다.

$$\therefore e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!}$$

예제 10.7.5

$\tan^{-1}x$ 의 Maclaurin 급수

※ 미분을 계속해서 풀면 규칙을 찾기 힘듦. ⇒ 적분 사용

$$\Rightarrow f(x) = \tan^{-1}x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0} (-x^2)^n \quad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \quad \text{적분}$$

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

$$= \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \quad \underbrace{(|x|<1)}_{\text{수렴구간}}$$

$x=1$ 일때

$\tan^{-1}\cdot 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$; 수렴하는 교대급수

$x=-1$ 일때

$\tan^{-1}\cdot(-1) = -\frac{\pi}{4} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots$; 수렴

∴ $-1 \le x \le 1$ 일때 → 수렴집합

$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ 이

성립한다.

- 이항급수

; m이 실수일때 $(1+x)^m$의 Maclaurine 급수

$${}_mC_0 + {}_mC_1\cdot x + {}_mC_2\cdot x^2 + \cdots + {}_mC_n\cdot x^n + \cdots$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$|x|<1$ 이면 이항급수는 $(1+x)^m$으로 수렴.

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

예제 10.7.7

$\frac{1}{(1+x)^2}$ 의 이항급수

$$\Rightarrow m = -2$$

$$(1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{2!}\cdot x^2 + \cdots$$

$$= 1 - 2x + \frac{3!}{2!}x^2 - \frac{4!}{3!}\cdot x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$$

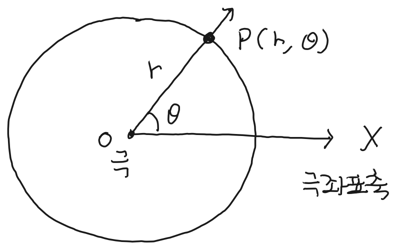
11.1 극좌표계

- 극좌표

! 순서쌍 (r, θ)

동경 : r

편각 : θ [반시계방향 : $+$ / 시계 방향 : $-$]



* 한 점 P에 여러개의 극좌표 대응

1대1 대응 아님.

- 극방정식

$r = 8\sin\theta$ 또는 $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

그래프 그리기 ⇒ 점찍기.

(θ : $0 \sim 2\pi$ 에 대응되는 점.)

- 직교좌표와 극좌표의 관계

$$\left[\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & r^2 = x^2+y^2 \\ y = r\sin\theta & \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{array}\right]$$

예제 11.1.4

$r=8\sin\theta$ 와 $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ 를

직교좌표방정식으로 변환시켜 각각

원 그리고 포물선인 것을 밝혀라.

⇒ $r^2 = 8r\sin\theta$

$x^2+y^2 = 8y$

$x^2+(y-4)^2 = 16$: 원

⇒ $r - r\cos\theta = 2$

$r - x = 2$

$r^2 = x^2+4x+4$

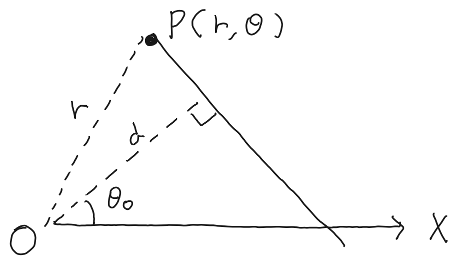
$x^2+y^2 = x^2+4x+4$

$y^2 = 4(x+1)$: 포물선

- 직선의 극방정식

[$\theta = \theta_0$ (극을 지나는 직선)

$r = \dfrac{d}{\cos(\theta-\theta_0)}$ (극을 안지나는 직선)



11.1 극좌표계

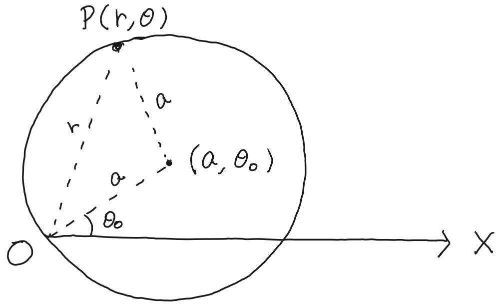
● 원의 극방정식

$r = \pm a$ (중심이 극이고 반지름이 a)

$r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$

* $\theta_0 = 0$ 일때 : $r = 2a\cos\theta$

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 일때 : $r = 2a\sin\theta$



● 원뿔곡선의 극방정식

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$ (초점 = 극)

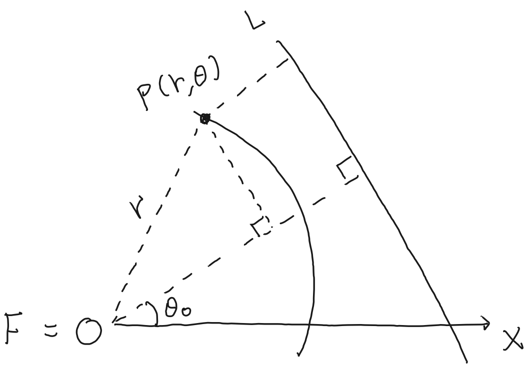
* 이심률 e

$0 < e < 1$: 타원

$e = 1$: 원

$e > 1$: 쌍곡선

* d : 초점과 준선 사이 거리.



예제 11.1.5

이심률이 $\frac{1}{2}$ 이고 초점이 극에 있고 준선이 극좌표축에 수직인 원뿔곡선의 극방정식. 준선은 극의 오른쪽에 있으며 초점과 준선 사이 거리는 10 이다.

$\Rightarrow$ $e = \frac{1}{2}$, $\theta_0 = 0$, $d = 10$

$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta} = \frac{10}{2 + \cos\theta}$$

$\therefore$ 타원

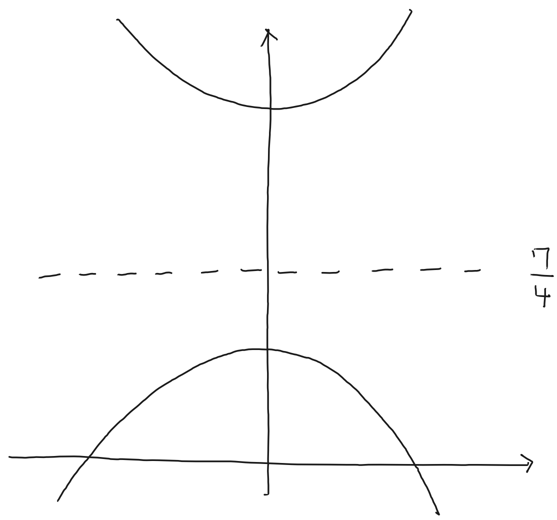
예제 11.1.6

다음 극방정식의 그래프

$$r = \frac{7}{2 + 4\sin\theta}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{7}{2}}{1 + 2\sin\theta} = \frac{2\left(\frac{7}{4}\right)}{1 + 2\sin\theta}$$

$e = 2$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $d = \frac{7}{4}$ $\therefore$ 쌍곡선



11.2 극방정식의 자취

- 대칭관계 $f(r, \theta) = 0$

(1) 극좌표축 대칭

$\theta \to -\theta$

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 대칭

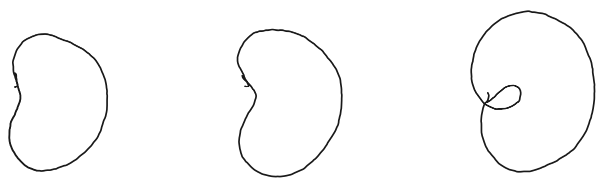
$\theta \to \pi - \theta$

(3) 극 대칭

$r \to -r$

- 달팽이꼴 곡선

$$\begin{cases} r = a \pm b\cos\theta \\ r = a \pm b\sin\theta \end{cases} \quad (a>0,\ b>0)$$



$a>b$ $a=b$ (심장형) $a<b$

- 8자형

$$\begin{cases} r^2 = a\cos 2\theta \\ r^2 = a\sin 2\theta \end{cases}$$

* 8자형 그래프는 항상 극에 대칭이다.

- 장미선

$$\begin{cases} r = a\cos n\theta \\ r = a\sin n\theta \end{cases}$$

* 식으로는 대칭을 찾을 수 없다.

- 나선

$r = a\theta$: 아르키메데스의 나선

$r = ae^{b\theta}$: 로그 나선

* 각이 커질수록 반지름도 커진다.

- 극좌표로 표시된 곡선의 교점

곡선의 연립방정식의 해를 구하고

곡선을 그려서 이미 구한 해 이외의

교점을 찾아야함.

예제 11.2.5

$r = 1 + \cos\theta$ 와 $r = 1 - \sin\theta$ 교점

$\Rightarrow \cos\theta = -\sin\theta$

$\tan\theta = -1$

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ or $\frac{7}{4}\pi$

$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\pi\right), \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$

그래프를 그리면 극도 교점이다.

- 추가공식

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$

$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$

11.3 극좌표에서의 적분

극좌표에서의 넓이

$\alpha \le \theta \le \beta$ 에서 정의된

함수 $r = f(\theta)$ 가 이 구간에서 연속.

$r = f(\theta)$ 와 두 직선 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 로

둘러싸인 영역의 넓이 A.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta$$

예제 11.3.1

$r = 2 + \cos\theta$ 의 내부넓이

$\Rightarrow$ 극좌표축 대칭

$$A = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (2+\cos\theta)^2 \cdot d\theta$$

예제 11.3.2

4잎 장미선 $r = 4\sin 2\theta$ 에서 잎 하나의 넓이

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin 2\theta)^2 \cdot d\theta$$

예제 11.3.3

심장형 $r = 1 + \cos\theta$ 의 외부와 원 $r = \sqrt{3}\sin\theta$

내부의 공통부분 넓이

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin\theta = 1 + \cos\theta$

$3\sin^2\theta = (1+\cos\theta)^2$

$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = \frac{1}{2}, -1$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \pi$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3\sin^2\theta - 1 - 2\cos\theta - \cos^2\theta) \cdot d\theta$$

극좌표에서의 접선

$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$

$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta}{-f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{f(\theta) + f'(\theta)\tan\theta}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta} = \tan\alpha$$

※ 극에서 접선의 방정식

$f(0, \theta) = 0$ 의 근이 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \cdots$ 이면

$\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \theta = \theta_3, \cdots$ 이다.

예제 11.3.4

$r = 4\sin 3\theta$ 일때

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 와 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 에서 접선의 기울기

$$m = \frac{4\sin 3\theta\cos\theta + 12\cos 3\theta\sin\theta}{-4\sin 3\theta\sin\theta + 12\cos 3\theta\cos\theta}$$

(2) 극에서 접선의 방정식

$f(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{n\pi}{3}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots 5)$

$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \cdots, \frac{5}{3}\pi$

(3) 방정식의 그래프에서 한 잎의 내부 넓이

$\sin 3\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \cdots$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\sin 3\theta)^2 d\theta$$

12.1 매개방정식

매개방정식

$x = f(t)$, $y = g(t)$

t : 매개변수

t 소거 → 직교좌표방정식

예제 12.1.2

$x = a\cos t$ $y = b\sin t$ 가 타원임을 증명 $(0 \le t \le 2\pi)$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

예제 12.1.4

(1) $x = a\sec t$, $y = b\tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

(2) $x = a\cosh t$, $y = b\sinh t$, $-\infty < t < \infty$

$\Rightarrow$ (1) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sec^2 t - \tan^2 t = 1$

(2) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

* 하나의 직교좌표를 나타낼 수 있는 매개방정식은 여러개.

* $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

파선 (Cycloid)

$x = a(t - \sin t)$

$y = a(1 - \cos t)$

예제 12.1.6

$x = 5\cos t$, $y = 4\sin t$, $0 < t < 3$ 에서

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 를 구하라.

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -5\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 4\cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos t}{-5\sin t} = -\frac{4}{5}\cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\csc^2 t}{-5\sin t} = -\frac{4}{25}\csc^3 t$$

예제 12.1.8

파선의 한 호로 둘러싸인 영역의 넓이 A

호의 길이 L

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi a} y \cdot dx$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot a(1-\cos t) \cdot dt$$

$$= 3\pi a^2$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} \cdot dt$$

$$= 8a$$

13.1 공간좌표

두 점 사이의 거리

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

구의 방정식

중심 (x_0, y_0, z_0) 반지름 r

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

공간에서의 그래프

<u>예제 13.1.4</u>

$3x+4y+2z=14$ 의 그래프

$\Rightarrow$ 절편 : $(4,0,0)$ $(0,3,0)$ $(0,0,6)$

세 절편 연결 $\Rightarrow$ 삼각형

$\therefore$ 이 삼각형을 포함하는 평면.

<u>예제 13.1.5</u>

$2x+3y=6$ 의 그래프

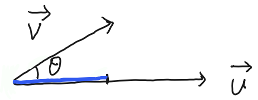
* z값이 무엇이든 상관없음

$\Rightarrow$ 절편 : $(3,0,0)$ $(0,2,0)$

$\therefore$ 절편을 지나며 z 축과 평행한 평면

벡터의 기초

- 스칼라 : 양
- 유향선분 : 방향을 갖는 선분 = 벡터
- 영벡터 : 시점 = 종점 $(\vec{0})$
- 단위벡터 : 크기가 1인 벡터
- 위치벡터 : 점과 원점에 대한 유향선분 $\overrightarrow{OA}$
- 스칼라사영 : $p = |\vec{v}|\cos\theta$
  (projection) (v의 u 위로의 사영)



$|\vec{v}|\cos\theta$

벡터의 내적

두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 의 시점이 일치되었을때

그 끼인각을 θ 라 하면 $(0 \le \theta \le \pi)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

* $\vec{u}$ 와 $\vec{v}$ 가 수직

$$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

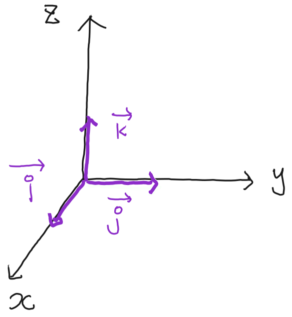
13.2 공간벡터

● 기본단위벡터

$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

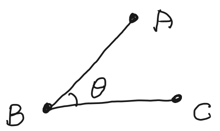
$\vec{k} = (0,0,1)$



예제 13.2.1

A(1, -2, 3)　B(2, 4, -6)　C(5, -3, 2)

∠ABC 의 값



$\Rightarrow \ \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (-1, -6, 9) = \vec{u}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (3, -7, 8) = \vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$111 = \sqrt{118}\sqrt{122}\cos\theta$

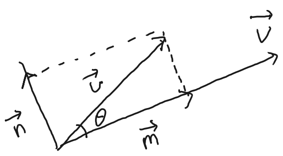
$\therefore \cos\theta = \dfrac{111}{\sqrt{118}\sqrt{122}}$

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{111}{\sqrt{118}\sqrt{122}}$

예제 13.2.2

$\vec{u} = (2,4,5)$ 를 $\vec{v} = (2,-1,-2)$ 에 평행한 벡터 $\vec{m}$ 과 벡터 $\vec{v}$에 수직인 벡터 $\vec{n}$의 합으로 나타내라.

$\Rightarrow \ \vec{m} = |\vec{m}|\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$



$= \left||\vec{u}|\cos\theta\right|\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$= \left|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|^2}\cdot\vec{v}$

$= \left(\dfrac{20}{9}, -\dfrac{10}{9}, -\dfrac{20}{9}\right)$

$\vec{n} = \vec{u} - \vec{m} = \left(-\dfrac{2}{9}, \dfrac{46}{9}, \dfrac{65}{9}\right)$

$\therefore \vec{u} = \vec{n} + \vec{m} = (2, 4, 5)$

● 평면

$\vec{P_1P}\cdot\vec{n} = 0$

⇔ 점 $P(x, y, z)$ 의 집합은 $\vec{n}$에 수직이며 점 P_1 을 지나는 평면.

$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$

* $\vec{n} = (A, B, C)$

예제 13.2.5

점 $(5, 1, -2)$ 를 지나고 $\vec{n} = (2, 4, 3)$ 에 수직인 평면의 방정식.

이 평면과 평면 $3x-4y+7z=5$ 가 이루는 각의 크기.

⇒ 평면의 방정식 : $2(x-5)+4(y-1)+3(z+2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x+4y+3z = 8$ //

$3x-4y+7z=5$ 의 수직벡터

$\vec{m} = (3, -4, 7)$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|} = \dfrac{11}{\sqrt{74}\sqrt{29}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{11}{\sqrt{74}\sqrt{29}}$

13.3 벡터의 외적

- 외적

두 벡터의 외적의 결과 : 벡터

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

$\ast$ $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$

- $\vec{u} \times \vec{v}$ 의 기하학적 의미

1. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
2. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ 는 오른손 법칙을 따름
3. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$

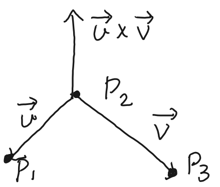
⇒ 두 벡터에 동시에 수직인 벡터

= 외적벡터 $\vec{u} \times \vec{v}$

- $\vec{u}, \vec{v}$ 평행 $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \times \vec{v} = 0$

예제 13.3.2

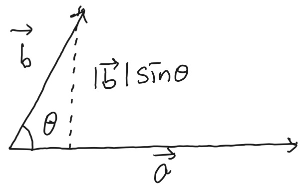
$P_1(1,-2,3)$ $P_2(4,1,-2)$ $P_3(-2,-3,0)$ 을 지나는 평면의 방정식



$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (14, -24, -6)$$

$\therefore 14(x+2) - 24(y+3) - 6z = 0$

- $\vec{a}, \vec{b}$ 를 인접한 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이 $= |\vec{a} \times \vec{b}|$



- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 결정되는 평행육면체의 부피

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

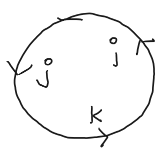
$$= \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$

- 외적의 대수적 성질

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$: 역교환법칙
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$: 좌분배법칙
3. $\vec{u} \times \vec{u} = 0$
4. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
5. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

   $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

   $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$



13.4 공간에서 직선과 곡선의 방정식

벡터함수

- 공간곡선의 매개방정식

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$

- 점 P의 위치벡터 : $r(t)$

$$r = r(t) = (f(t), g(t), h(t))$$
$$= f(t)\cdot\vec{i} + g(t)\cdot\vec{j} + h(t)\vec{k}$$
$$= F(t) \quad : \text{벡터함수}$$

* 벡터함수 : 변수 1개 → 성분 3개

직선

: 직선위의 한 점 P_0 와 직선과 평행한 벡터 $\vec{v} = (a, b, c)$ 에 의해 결정됨.

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{v}$$
$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + at \\ z = z_0 + at \end{cases}$$

⇒ 점 (x_0, y_0, z_0)을 지나며 $\vec{v} = (a, b, c)$ 에 평행한 직선의 방정식

* $a. b. c$: 방향수

$(a. b. c)$: 방향벡터

직선의 대칭방정식

(1) $a. b. c \neq 0$

$$t = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

(2) $a = 0$, $b. c \neq 0$

$$x = x_0, \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

(3) $a = 0$. $b = 0$. $c \neq 0$

$x = x_0$. $y = y_0$ (z축 평행)

예제 13.4.3

두 평면 $2x-y-5z = -14$, $4x+5y+4z = 28$ 이 만나는 선의 대칭방정식.

⇒ 직선위의 한 점 $(3, 0, 4)$ ← xz 평면 위

법선벡터 $\vec{u} = (2, -1, -5)$

$\vec{v} = (4, 5, 4)$

구하는 직선은 $\vec{u}, \vec{v}$ 에 동시에 수직 ⇒ 외적

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (21, -28, 14)$$

$$\therefore \frac{x-3}{21} = -\frac{y}{28} = \frac{z-4}{14}$$

곡선에 대한 접선

$$r'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

↳ 접선의 방향벡터

* $f'(t)$, $g'(t)$. $h'(t)$: 점P에서 접선의 방향수

13.5 속도, 가속도, 곡률

호의길이 S

곡선위의 점 P 에 대한 위치벡터

$$r(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

P(a) 로부터 P(t) 까지의 호의 길이

$$S = \int_a^t |r'(u)| \cdot du$$

$$= \int_a^t \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2 + (h'(u))^2} \cdot du$$

속도, 속력, 가속도

- 속도 : $v(t) = r'(t)$
- 속력 : $\frac{ds}{dt} = |r'(t)| = |v(t)|$
- 가속도 : $a(t) = r''(t)$

원나선

$$r(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + ct \cdot \vec{k}$$

$$(a > 0,\ c > 0)$$

곡률

$V(t) = r'(t)$: 점P에서 접선의 방향벡터

단위접선벡터 $T = T(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$

공간곡선의 곡률 $k = k(t) = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{|T'(t)|}{|v(t)|}$

가속도의 성분 & 곡률 공식

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

$$a = a_T T + a_N N$$

$a_T = T \cdot a = \frac{r' \cdot r''}{|r'|}$; 가속도의 접선성분

$a_N = |T \times a| = \frac{|r' \times r''|}{|r'|}$; 가속도의 법선성분

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

$N = \frac{a - a_T T}{a_N} = \frac{1}{k}\frac{dT}{ds}$; 단위주법선벡터

$B = T \times N$; 단위종법선벡터

예제 13.5.4

점 $(1, 1, \frac{1}{3})$ 에서 $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\vec{k}$ 에 대한 a_T, a_N, k, T, N, B 를 구하라.

$\Rightarrow r(1) = (1, 1, \frac{1}{3})$

$r'(1) = (1, 2, 1)$

$r''(1) = (0, 2, 2)$

$$a_T = \frac{r' \cdot r''}{|r'|} = \frac{0+4+2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$a_N = \frac{|r' \times r''|}{|r'|} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$$

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$T = \frac{r'}{|r'|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$$

$$N = \frac{a - a_T T}{a_N} = \frac{r'' - a_T T}{a_N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$$B = T \times N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

14.1 다변수 함수

- 2 변수함수

- $f(x, y)$ 또는 $z = f(x, y)$

- 집합 $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ 를
  f의 그래프라고함. 이것은 좌표공간에서
  곡면을 나타냄

* 3 변수함수 : $f(x, y, z)$

- 그래프를 그려라.
  $x=0$. $y=0$. $z=0$ 일때
  각각 평면에 그리기.

- 등고선지도
  곡면 $z = f(x, y)$ 를 xy 평면에 평행한
  평면 $z = c$ 로 잘랐을때 만들어지는
  공간곡선을 xy 평면에 사영시킨
  평면곡선 = 등고선

  * $z = f(x, y)$ 의 그래프를 그리기 어려울때
    등고선지도 이용.

14.2 극한과 연속

- 극한 정의

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

$\Leftrightarrow$ $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta$ 인
모든 (x, y) 가
$|f(x,y) - L| < \varepsilon$ 을 만족시킴.

* (x, y) 가 (a, b) 에 접근하는
  많은 경로에 관계없이 극한값은 일정함.

* 경로 : x축 → y축 → 직선

* (a, b) 에서 $f(x, y)$ 가 정의되지 않을 수 있음

예제 14.2.2

$f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 은 점 $(0, 0)$ 에서

극한값이 없음을 밝혀라.

⇒ ① x축 : $y=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

② y축 : $x=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

∴ 점 (x, y) 가 $(0, 0)$ 에 접근하는 경로에 따라
값이 달라진다. ⇒ 극한 존재 X

14.2 극한과 연속

예제 14.2.3

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 에 대해서

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 가 존재하지 않는것을 보여라.

$\Rightarrow$ ① x축 : $y=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to0} f(x,0) = \lim_{x\to0} 0 = 0$$

② y축 : $x=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to0} f(0,y) = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

③ 직선 $y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to0} f(x,x) = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 접근 경로에 따라 극한값이 다르다.

$\Rightarrow$ 극한값 존재 X

● 이변수함수의 연속

(1) $f(a,b)$ 존재.

(2) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 존재

(3) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

$\Rightarrow$ 연속

예제 14.2.6

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$ 연속?

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ 가 접근경로에 따라

극한값이 다르므로 존재하지 않는다.

$\therefore$ $g(x,y)$ 는 $(0,0)$ 에서 불연속이다.

● 합성함수의 연속

2변수함수 g 가 (a,b) 에서 연속.

1변수함수 f 가 $g(a,b)$ 에서 연속.

$\Rightarrow$ 합성함수 $(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y))$ 도

점 (a,b) 에서 연속.

예제 14.2.8

$F(x,y) = \cos(x^3-4xy+y^2)$ 은 평면 위의

모든 점에서 연속인 것을 보여라.

$\Rightarrow$ $g(x,y) = x^3-4xy+y^2$ 은 연속

$f(t) = \cos t$ 도 연속

$\therefore$ $F(x,y) = (f\circ g)(x,y) = f(g(x,y))$ 도 연속.

14.3 편도함수

편미분계수

① $f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

; $x = x_0$ 에서 $f(x, y_0)$ 의 도함수값

② $f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

; $y = y_0$ 에서 $f(x_0, y)$ 의 도함수값

1계 편도함수

① f_x, $f_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$; y 상수 취급 x로 미분

② f_y, $f_y(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$; x 상수 취급 y로 미분

예제 14.3.2

$z = x^2 \sin(xy^2)$ 일때, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 를 구하라.

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin(xy^2) + x^2y^2 \cos(xy^2)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y \cos(xy^2)$

접선의 기울기

$z = f(x, y)$ 인 곡면.

① $f_x(x_0, y_0)$; 곡선 $z = f(x, y_0)$ 의 접선의 기울기

② $f_y(x_0, y_0)$; 곡선 $z = f(x_0, y)$ 의 접선의 기울기

예제 14.3.3

$PV = 10T$ 관계가 성립할때

$T = 200$, $V = 50$ 일때 부피에 대한 압력의 변화율

$\Rightarrow P = \frac{10T}{V}$

$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{10T}{V^2}$

$\therefore \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{(T=200,\, V=50)} = \frac{(-10)(200)}{50^2} = -\frac{4}{5}$

2계 편도함수

① $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

② $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

③ $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

④ $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

편도함수의 순서교환

f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} 가 열린집합에서 연속

$\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

14.4 미분가능성

접평면 방정식

$z = T(x,y)$

$= f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)$

이때, $a = x$ 편미분 $b = y$ 편미분

벡터 $(a.b)$ 존재 ⇒ 미분가능

그래디언트

$(a.b) = \nabla f(x.y) = (f_x. f_y)$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(x.y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x.y)\vec{j}$

미분가능성

$f_x. f_y$ 존재 ⊕ $f_x. f_y$ 연속

⇒ 미분가능

예제 14.4.1

$f(x.y) = xe^y + x^2y$ 가 모든 점에서

미분가능함을 밝히고 그래디언트를 구하라.

또 점 $(2,0)$ 에서 접평면의 방정식

$z = T(x.y)$ 를 구하라.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f_x &= e^y + 2xy \\ f_y &= xe^y + x^2 \end{aligned}\right) \text{연속} \Rightarrow \text{미분가능}$$

$\nabla f(2,0) = i + 6j$

$z = T(x.y) = f(2,0) + (x-2) + 6y$

$= x + 6y$

예제 14.4.2

$f(x.y.z) = x\sin z + x^2y$ 에서

$\nabla f(1.2.0)$ 를 구하라.

$\Rightarrow f_x = \sin z + 2xy$

$f_y = x^2$

$f_z = x\cos z$

$\nabla f(1.2.0) = 4i + j + k$

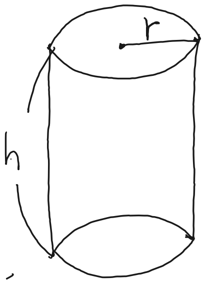
14.5 연쇄법칙

연쇄법칙 (1)

$$z = f(x(t), y(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

예제 14.5.2



반지름은 시간당 0.2 cm 비율로 증가하고, 높이는 시간당 0.5 cm 비율로 증가한다. 반지름이 10cm, 높이가 100 cm 인 순간 겉넓이의 증가율

$\Rightarrow$ $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$= (4\pi r + 2\pi h)\times 0.2 + 2\pi r \times 0.5$$

$$= 48\pi + 10\pi = 58\pi$$

예제 14.5.3

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = \theta^2$ 이며

$w = x^2y + y + xz$ 라고 하자.

$\frac{dw}{d\theta}$ 를 구하고 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일때 값을 구하라.

$$\Rightarrow \frac{dw}{d\theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\theta}$$

$$= (2xy+z)(-\sin\theta) + (x^2+1)\cos\theta + 2x\theta$$

$$= -2\cos\theta\sin^2\theta - \theta^2\sin\theta + \cos^3\theta$$

$$+ \cos\theta + 2\theta\cos\theta$$

연쇄법칙 (2)

$$z = f(x(s,t), y(s,t))$$

① $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$: t를 상수취급

② $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$: S를 상수취급

음함수의 도함수

(1) $F(x,y) = 0$ 일때

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(2) $F(x,y,z) = 0$ 일때

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

예제 14.5.7

$x^3e^{y+z} - y\sin(x-z) = 0$ 에서 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 를 구하라

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2e^{y+z} - y\cos(x-z)}{x^3e^{y+z} + y\cos(x-z)}$$

14.6 방향미분계수와 그래디언트

● 방향미분계수의 계산

단위벡터 $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$D_u f(x,y) = \vec{u} \cdot \nabla f(x,y)$

예제 14.6.1

$f(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$ 일때 점 $(2,-1)$ 에서 벡터 $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ 방향으로 방향미분계수를 구하라.

⇒ $\vec{a}$ 방향의 단위벡터 : $\vec{u} = \left(\frac{4}{5}\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{5}\right)\vec{j}$

$f_x = 8x - y$

$f_y = -x + 6y$

$\nabla f(2,-1) = (17, -8)$

∴ $D_u f(2,-1) = \frac{4}{5}\cdot 17 - \frac{3}{5}\cdot 8 = \frac{44}{5}$

● 최대변화율

$D_u f(x,y)$ 는 $\theta = 0$ 일때 최대

$\theta = \pi$ 일때 최소

⇒ ① $\nabla f(x_0, y_0)$ 방향으로 최대방향미분계수 $|\nabla f(x_0, y_0)|$ 를 갖는다.

② $-\nabla f(x_0, y_0)$ 방향으로 최소방향미분계수 $-|\nabla f(x_0, y_0)|$ 를 갖는다.

* 올라간다, 내려간다, 증가, 감소 ⇒ 방향미분계수

예제 14.6.3

쌍곡포물면 $z = y^2 - x^2$ 위의 점 $(1,1,0)$ 에 있는 벌레가 어느방향으로 가면 가장 경사진 곳으로 올라가는가? 출발할때의 기울기는?

⇒ $f(x,y) = y^2 - x^2$

$f_x = -2x$, $f_y = 2y$

$\nabla f(1,1) = (-2, 2)$

∴ 벌레는 $(-2,2)$ 방향으로 움직이고 기울기는 $\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ 이다.

● 등고선과 곡면

$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot r'(t) = 0$

* $r'(t)$ 는 등고선의 접선벡터.

⇒ 점 P에서 f 의 그래디언트는 P를 지나는 f의 등고선에 수직이다.

예제 14.6.4

포물면 $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ 에서

(1) 점 $P(2,1)$ 을 지나는 등고선의 방정식

(2) 점 P 에서 포물면의 그래디언트 벡터

⇒ (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = k \xrightarrow[\text{대입}]{(2,1)} k = 2$

∴ 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) $f_x = \frac{x}{2}$, $f_y = 2y$

$P(2,1)$ 에서 그래디언트

$\nabla f(2,1) = (1, 2)$

14.7 접평면, 미분과 어림값

접평면의 방정식

곡면 $F(x,y,z)=k$ 위의 점 $P(x_0,y_0,z_0)$에서

접평면 : P를 지나고 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$에 수직.

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+ F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

예제 14.7.1

$z = x^2+y^2$ 위의 점 $(1,1,2)$에서

접평면의 방정식을 구하라.

$\Rightarrow F(x,y,z) = x^2+y^2-z$

$\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$

$\nabla F(1,1,2) = (2, 2, -1)$

$2(x-1)+2(y-1)-1(z-2)=0$

$\therefore 2x+2y-z=2$

예제 14.7.2

곡면 $x^2+y^2+2z^2=23$ 위의 점 $(1,2,3)$에서

접평면과 법선의 방정식을 구하라.

$\Rightarrow F(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2$

$\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$

$\nabla F(1,2,3) = (2, 4, 12)$

$2(x-1)+4(y-2)+12(z-3)=0$: 접평면

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{12}$: 법선

＊ 미분과 어림값 생략

14.8 최대, 최소

임계점

- 경계점 : 양 끝점
- 정점 : $\nabla f(x_0, y_0) = 0$
- 특이점 : (x_0, y_0)에서 미분불가능

예제 14.8.1

$f(x,y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$ 의 최댓값과 최솟값

$\Rightarrow f_x = 2x - 2, \quad f_y = \frac{y}{2}$

$\nabla f(x,y) = (2x-2, \frac{y}{2}) = (0,0)$

$(1,0)$: 정점

$f(x,y) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \geq -1$

$f(1,0) = -1$: 최솟값.

최댓값은 없다.

예제 14.8.2

$f(x,y) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 의 극값을 조사하라.

$\Rightarrow f_x = -\frac{2x}{a^2} = 0$

$f_y = \frac{2y}{b^2} = 0$

임계점은 $(0,0)$: 극대 X, 극소 X

안장점

2계 편도함수 판정법

$\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$D = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2$

(1) $D > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$: 극대

(2) $D > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$: 극소

(3) $D < 0$: 극값이 없다. (안장점)

(4) $D = 0$: 판정법 적용 X

예제 14.8.4

원점과 곡면 $z^2 = x^2y + 4$ 사이의 최단거리

$\Rightarrow$ 곡면 위의 점 $P(x,y,z)$

$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + x^2y + 4 = f(x,y)$

$\nabla f(x,y) = (2x + 2xy, 2y + x^2) = 0$

임계점 : $(0,0)$ $(\sqrt{2}, -1)$ $(-\sqrt{2}, -1)$

$D = 4 + 4y - 4x^2$

$D(\pm\sqrt{2}, -1) < 0 \Rightarrow$ 안장점

$D(0,0) > 0$, $f_{xx}(0,0) > 0 \Rightarrow$ 극소

예제 14.8.5

$S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ 에서 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ 의 최대, 최소

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (1,1)$ 정점

$f(2\cos t, 2\sin t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$g'(t) = 4\sin t - 4\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \quad \oplus \quad t = 0, 2\pi$

$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} \qquad f(1,1) = 0$

$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2} \qquad f(2,0) = 2$

14.9 Lagrange

Lagrange 방법 (1)

제약조건 $g(x,y)$ 에 대해서

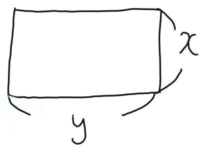
$f(x,y)$를 최대 또는 최소가 되는 (x,y)

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

예제 14.9.1

대각선의 길이가 2 인 직사각형의 최대 넓이

$\Rightarrow$



$\sqrt{x^2+y^2} = 2$

넓이 $= xy$

제약조건 $g(x,y) = x^2+y^2-4$

목적함수 $f(x,y) = xy$

$\nabla f(x,y) = (y, x)$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$

$$\begin{cases} (1) & y = \lambda(2x) \\ (2) & x = \lambda(2y) \\ (3) & x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = y = \sqrt{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$

넓이 $xy = 2$

예제 14.9.2

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위에서

$f(x,y) = y^2 - x^2$ 의 최대 . 최소

$\Rightarrow$ 제약조건 $g(x,y) = x^2+4y^2-4 = 0$

$\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$

$\nabla g(x,y) = (2x, 8y)$

$$\begin{cases} (1) & -2x = \lambda(2x) \\ (2) & 2y = \lambda(8y) \\ (3) & x^2+4y^2 = 4 \end{cases}$$

i) $x = 0$. $y \neq 0$

$\lambda = \frac{1}{4}$, $y = \pm 1$ $\Rightarrow (0, \pm 1)$

ii) $x \neq 0$. $y = 0$

$\lambda = -1$, $x = \pm 2$ $\Rightarrow (\pm 2, 0)$

$\therefore f(0, \pm 1) = 1$, $f(\pm 2, 0) = -4$

Lagrange 방법 (2)

두 제약조건 $g(x,y,z) = 0$. $h(x,y,z) = 0$

$f(x,y,z)$ 의 최대 . 최소

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ h(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$