Probability

Nội dung bổ sung

1. Xác suất
2. Một số phân phối xác suất
3. Quy tắc thực nghiệm
4. Định lý giới hạn trung tâm

1. Xác suất

❑ Hoán vị (*permutation*): thay đổi, sắp xếp vị trí

- Lấy mẫu không lặp lại, hoán vị n *chọn k* ($0 < k \le n$)

  VD: Chọn 5 trong số 11 cầu thủ đá 11m luân lưu (có thứ tự)

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\rightarrow$ nguyên lý nhân k vị trí đầu tiên sẽ chọn: $n(n-1)\ldots(n-k+1)$

Khi k = n (hoán vị toàn bộ): $P_{n,n} = n!$

VD: Dự đoán kết quả giải thưởng FIFA The Best 2019

- Lấy mẫu lặp lại, hoán vị n *chọn k* ($0 < k \le n$)

$$P^*_{n,k} = n^k$$

1. Xác suất (tt.)

❑ Hoán vị lặp

S có n phần tử được phân hoạch thành $S_1, S_2, \ldots, S_k$ ($2 \le k \le n$):

S_j gồm các phần tử giống nhau: $|S_j| = n_j$

Tổng số cách hoán vị S:

$$p = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

VD: Số lượng chuỗi ký tự khác nhau được tạo ra từ các chữ cái của từ MISSISSIPPI

$n = 11$, $k = 4$ ($S_{'I'}, S_{'M'}, S_{'P'}, S_{'S'}$), $n_{'I'} = 4$, $n_{'M'} = 1$, $n_{'P'} = 2$, $n_{'S'} = 4$

$$p = \frac{11!}{4!1!2!4!} = 34650$$

1. Xác suất (tt.)

- **Tổ hợp** (*combination*)
  - *Tổ hợp* n chập k ($0 < k \le n$): KHÔNG (phân biệt) thứ tự

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

<u>VD</u>: Kiểm tra chất lượng ngẫu nhiên 2 trong số 10 sản phẩm.

Số khả năng có thể xảy ra:

1. Xác suất (tt.)

- **Tổ hợp** (*combination*)
  - *Chỉnh hợp* n chập k ($0 < k \le n$): CÓ (phân biệt) thứ tự

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\rightarrow$ hoán vị không lặp lại

1. Xác suất (tt.)

- **Tập hợp con** (*subset*)
  - Số lượng tập hợp con của A có n phần tử: 2^n
    (kể cả tập A và tập ∅)

1. Xác suất (tt.)

- **VD: Số cách chọn 1 lớp trưởng và sau đó 1 lớp phó của 1 lớp có 25 học viên.**

  Hoán vị không lặp: 25.(25 – 1) = 600

- **VD: Một khoa có 20 giảng viên đạt học vị tiến sĩ. Có bao nhiêu cách thành lập Hội đồng khoa học gồm 7 thành viên ?**

  Tổ hợp: $C_{20}^{7} = \dfrac{20!}{7!(20-7)!} =$

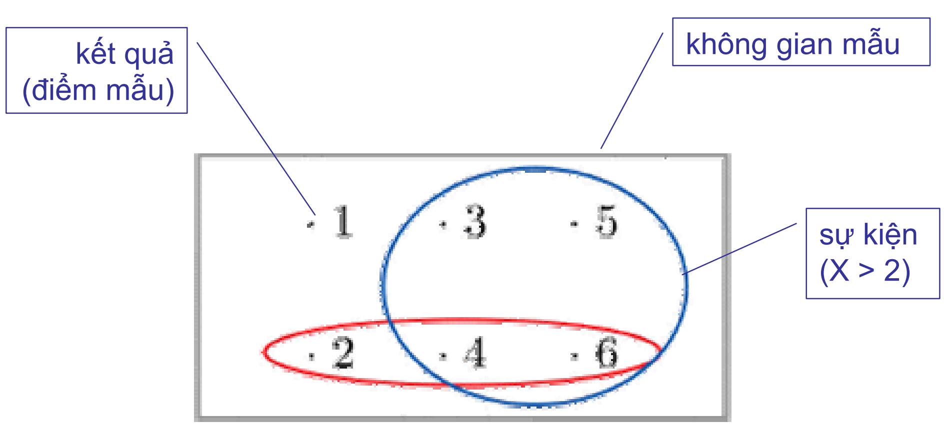
1. Xác suất (tt.)

- **Thí nghiệm** (*experiment*)**: tiến trình (sẽ) diễn ra ngẫu nhiên (không biết trước kết quả) → n <u>lần</u> diễn ra/thực hiện/thử** (*trial*)
  - tung đồng xu 2 lần, số tai nạn máy bay trễ / năm tại sân bay T
- **Kết quả** (*outcome*) **của <u>1 lần</u> (trial) thí nghiệm được diễn ra**
- **Không gian mẫu** (*sample space*)**: tất cả các kết quả có thể có**
  - tung đồng xu 2 lần: S = { HH (heads), TT (tails), HT, TH }
- **Sự kiện** (*event*)**: tập con của không gian mẫu (một số kết quả)**
  - tung đồng xu 2 lần: kết quả 2 lần không giống nhau (HT, TH)

1. Xác suất (tt.)

- **Một sự kiện E được gọi là "xảy ra" nếu 1 phần tử bất kỳ của E là kết quả của một lần thực hiện thí nghiệm**

"*An event E is said to* **occur** *on <u>a particular trial</u> of the experiment if the outcome observed is an element of the set E.*" [Schmitz]



1. Xác suất (tt.)

- **Không gian mẫu tự nhiên** (*natural sample space*)
  - $|S| = n$, $P(s_i) = 1/n$, $P(E) = |E|/n$
- **Phép đếm trên tập hữu hạn**
  - Nguyên tắc cộng (*addition principle*)

    $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$, $S_i \cap S_j = \varnothing$: $|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_k|$
  - Nguyên tắc nhân (*multiplication principle*) $\rightarrow$ thí nghiệm k bước

    $S = S_1 \times \ldots \times S_k$: $|S| = |S_1|.|S_2|\ldots|S_k|$
  - Nguyên tắc Dirichlet (*Dirichlet box principle*)

    Nếu có n chim bồ câu ở trong k chuồng thì tồn tại một chuồng có chứa từ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ *bồ câu trở lên.*

1. Xác suất (tt.)

- **Các tiên đề**

  Cho không gian mẫu S, các sự kiện rời nhau E, E_1, E_2, …

  $$(i) \quad 0 \le P(E)$$

  $$(ii) \quad P(S) = 1$$

  $$(iii) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

1. Xác suất (tt.)

- **Một số tính chất cơ bản: E_1, E_2, … rời nhau**

$(i)\quad 0 \le P(E) \le 1$

$(ii)\quad P(\varnothing) = 0$

$(iii)\quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$(iv)\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$

$(v)\quad P(E^C) = 1 - P(E)$

$(vi)\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$(vii)\quad P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B) = P(A).P(B \mid A)$

- **Lưu ý**
  - A, B rời nhau (*disjoint*): $A \cap B = \varnothing$ (không xảy ra đồng thời)
  - A, B độc lập (*independent*): P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)

1. Xác suất (tt.)

- **Định lý Bayes**

$$P(A \mid B) = \frac{P(A).P(B \mid A)}{P(B)}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

1. Xác suất (tt.)

- **VD: Có 5 thanh kim loại có chiều dài lần lượt: 1, 2, 3, 4, 5 (cm). Xác suất bị gẫy tỷ lệ thuận với chiều dài của thanh. Tính xs thanh đầu tiên bị gẫy là thanh có chiều dài không quá 3cm.**

Gọi s_i là kết quả thanh có chiều dài i bị gẫy đầu tiên ($1 \le i \le 5$).

Không gian mẫu: $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \}$

Sự kiện: $E = \{ s_1, s_2, s_3 \}$

Xác suất thanh i bị gẫy: $p_i = \alpha.i$ (α: hệ số gẫy chưa biết)

Tổng xác suất: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$

$15.\alpha = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 1/15$

Xác suất sự kiện E: $P(E) = p_1 + p_2 + p_3 = 6 / 15 = 0.4$

1. Xác suất (tt.)

- **Bài tập: Ex1 – Bài 1**
- **Bài tập: Ex1 – Bài 2**
- **Bài tập: Ex1 – Bài 3**

1. Xác suất (tt.)

- **Biến ngẫu nhiên** (*random variable*)
  - X lấy giá trị số (}) được xác định từ kết quả của 1 thí nghiệm

    $X : S \rightarrow \}$

    – tung đồng xu 2 lần, X = số mặt ngửa (heads)
  - phạm vi (*range*) R_X của X: tập hợp miền giá trị của X
    – tung đồng xu 2 lần, X = số mặt ngửa, $R_X = \{ 0, 1, 2 \}$
    – tung đồng xu để có mặt ngửa, X số lần tung, $R_X = \{ 1, 2, \ldots \} = N^+$
    – X: thời gian giữa 2 lần nhật thực, $R_X = (0, \infty)$
  - *discrete random variable*: R_X hữu hạn hoặc vô hạn đếm được (*countable*)
  - *continuous random variable*: R_X vô hạn không đếm được

1. Xác suất (tt.)

- **Hàm độ lớn xác suất** (*Probability Mass Function – PMF*), **phân phối xác suất** (*probability distribution*) **của biến X <u>rời rạc</u>**
  - danh sách các xs ứng với từng giá trị x ∈ R_X

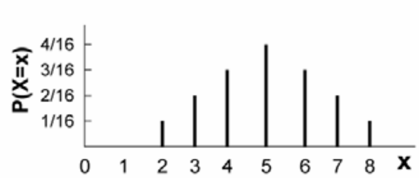
    sự kiện: $E_x = (X = x) = \{s \in S \mid X(s) = x\}$

$$f(x) = P(X = x)$$

$$0 \le f(x) \le 1 \qquad \sum_{x \in R_X} f(x) = 1$$

$$A \subseteq R_X : P(X \in A) = \sum f(x)$$

x	f(x)
2	1/16
3	2/16
4	3/16
5	4/16
6	3/16
7	2/16
8	1/16



– tần số

– tần suất

1. Xác suất (tt.)

- **Hàm độ lớn xác suất** (*Probability Mass Function – PMF*), **phân phối xác suất** (*probability distribution*) **của biến X rời rạc**
  - *kỳ vọng* (trên **n** lần thí nghiệm): trung bình có trọng số là các xs

$$E[X] = E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x f(x)$$

E[X] không bắt buộc phải bằng 1 giá trị mà X có thể nhận

  - *phương sai*, *độ lệch chuẩn* (trên **n** lần thí nghiệm)

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x) = \sum_{x \in R_X} x^2 f(x) - \mu^2$$

1. Xác suất (tt.)

- **Hàm độ lớn xác suất** (*Probability Mass Function – PMF*), **phân phối xác suất** (*probability distribution*) **của biến X rời rạc**

$$R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

$$P(X = x_i) \approx \frac{N_i}{N}$$

$$\text{Average} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} x_i N_i \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} x_i NP(X = x_i) = E[X]$$

VD: 3 người 170cm, 2 người 165cm

$\rightarrow$ TB = (170*3 + 165*2) / 5 = 168cm

1. Xác suất (tt.)

- **Hàm độ lớn xác suất** (*Probability Mass Function – PMF*), **phân phối xác suất** (*probability distribution*) **của biến X <u>rời rạc</u>**

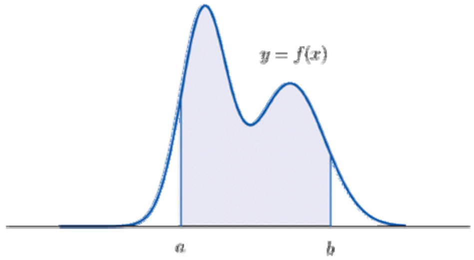
  <u>VD</u>: 10^5 tờ vé số, mỗi tờ giá 10^4.

  Giải thưởng: 1 giải đặc biệt 106, 10^6 giải an ủi 10^5.

  Kỳ vọng của số tiền thu được khi mua 1 tờ vé số ?

1. Xác suất (tt.)

- **Hàm mật độ** (*Probability Density Function – PDF*) **của X <u>liên tục</u>**
  - xs tại 1 giá trị (điểm mẫu) không có ý nghĩa: P(X = x) = 0
  - xs X thuộc 1 khoảng [nửa] đóng/mở
    P(a ≤ X ≤ b): diện tích dưới đường cong giới hạn bởi 2 cận a, b



$$(i)\quad f(x) \geq 0$$

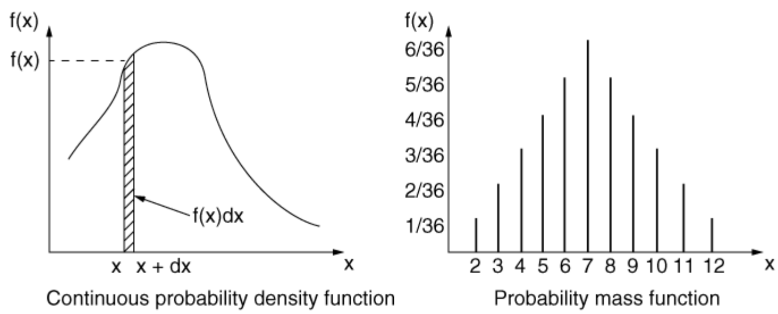
$$(ii)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$(iii)\quad P(X \in [a,b]) = P(X \in (a,b]) = P(X \in [a,b)) = P(X \in (a,b))$$

1. Xác suất (tt.)

❑ **Hàm mật độ** (*Probability Density Function – PDF*) **của X <u>liên tục</u>**

> "*A probability density function (PDF) describes the probability of the value of a continuous random variable falling within a range.*"



https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEMODRefMap/simamod-c-probdensityfunc.htm (07/2020)

1. Xác suất (tt.)

❑ **Hàm mật độ** (*Probability Density Function – PDF*) **của X <u>liên tục</u>**

- kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn (trên <u>n lần</u> thí nghiệm)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

1. Xác suất (tt.)

❑ Một số tính chất của kỳ vọng, phương sai

$(i) \quad E[a] = a$

$(ii) \quad E[aX] = aE[X]$

$(iii) \quad E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

$(iv) \quad E[XY] = E[X]E[Y]$ X, Y độc lập

$(v) \quad Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$(vi) \quad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

$(vii) \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

1. Xác suất (tt.)

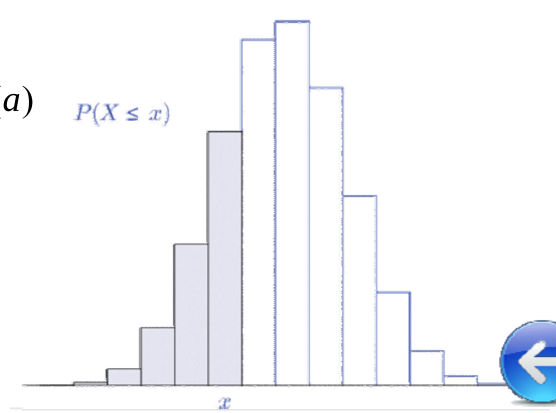
❑ Hàm phân phối tích lũy (*Cumulative Distribution Function – CDF*)

$$F(a) = P(X \le a)$$

$$F(a) = \sum_{x \le a} P(X = x) \qquad F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$(i) \quad P(X < a) = F(a) - f(a)$

$(ii) \quad P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$



Nội dung bổ sung

1. Xác suất
2. **Một số phân phối xác suất**
3. Quy tắc thực nghiệm
4. Định lý giới hạn trung tâm

2. Một số phân phối xác suất

- **Mô hình xác suất: biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất**
  - mô hình hóa các tiến trình ngẫu nhiên
  - kết quả dự đoán gần với thực tế quan sát
  - cho trước 1 bài toán, cần *xác định phân phối xác suất* (hợp lý) của dữ liệu thu thập được → PMF/PDF, CDF, μ, σ, …

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối đều**
- **Phân phối chuẩn**
- **Một số phân phối rời rạc**
  - nhị thức, Bernoulli, hình học, Poisson, …
- **Một số phân phối liên tục**
  - lũy thừa (mũ), Gamma, Beta, Chi-bình phương, Student, …

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối đều** (*Uniform Distristribution*) – **Rời rạc**

X ~ *Uniform*(a, b), a < b

$$n = (b - a + 1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a+1}{n}, & x \in [a,b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

a = 0: *Rectangular Distristribution*

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối đều** (*Uniform Distristribution*) – **Rời rạc**

$$\text{(i) } \mu = \frac{(a+b)}{2} \qquad \text{(ii) } \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

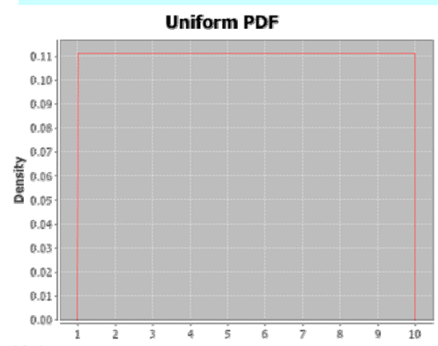
$$\text{(iii) } Skewness = 0 \quad \text{(iv) } ExcessKurt = -\frac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)}$$

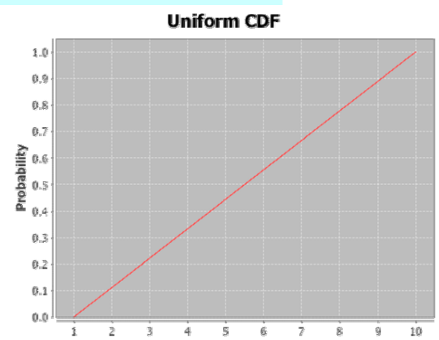
2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối đều** (*Uniform Distristribution*) – **Liên tục**

X ~ *Uniform*(a, b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$





2. Một số phân phối xác suất (tt.)

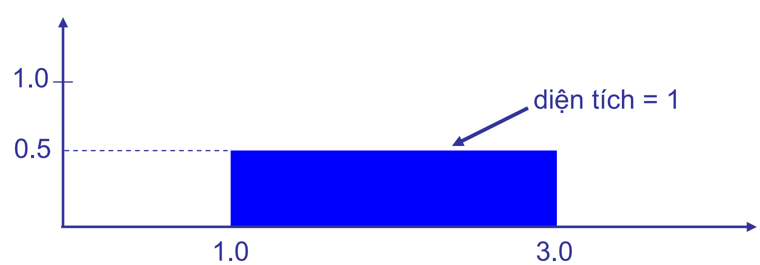
- **Phân phối đều** (*Uniform Distristribution*) – **Liên tục**

$$\text{(i) } \mu = \frac{(a+b)}{2} \qquad \text{(ii) } \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\text{(iii) } Skewness = 0 \qquad \text{(iv) } ExcessKurt = -\frac{6}{5}$$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **<u>VD</u>: Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có phân phối đều**



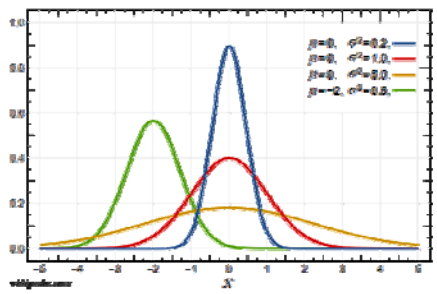
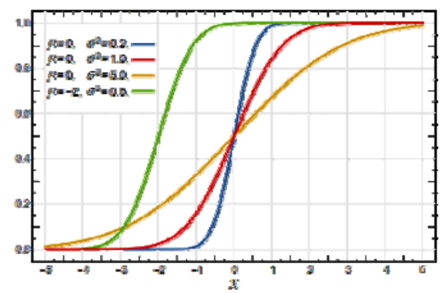
a. P(X = 2.5) = 0

b. P(2.0 ≤ X ≤ 2.5) = 0.5(2.5 – 2.0) = 0.25

c. P(1.5 < X < 2.5) = 0.5(2.5 – 1.5) = 0.5

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối chuẩn** (*Normal Distribution* / *Gaussian Distribution*)
  - phân phối hình chuông (*bell-shaped curve*)
  - đặc trưng bởi "tâm" (μ) và "độ rộng" (σ)

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối chuẩn** (*Normal Distribution* / *Gaussian Distribution*)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

$$Skewness = ExcessKurt = 0$$

- Tính xs: $P(x \in [a, b]) \to$ độ phức tạp ?

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối chuẩn (chuẩn) tắc** (*Standard Normal Distribution* / *Z*)

$$Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma} \qquad X = \sigma . Z + \mu$$

Z ~ N(0, 1)

hàm tích phân Laplace

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \qquad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$\text{(i) } \mu = 0 \qquad \text{(ii) } \sigma^2 = 1$$

$$\text{(iii) } Skewness = 0 \qquad \text{(iv) } ExcessKurt = 0$$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Standard normal table, Z table: P(Z < z)**

phần nguyên,
chữ số thập phân thứ 1:
n.d_

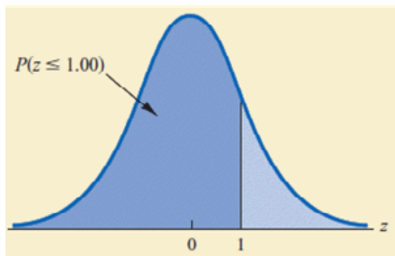
chữ số thập phân thứ 2:
._d

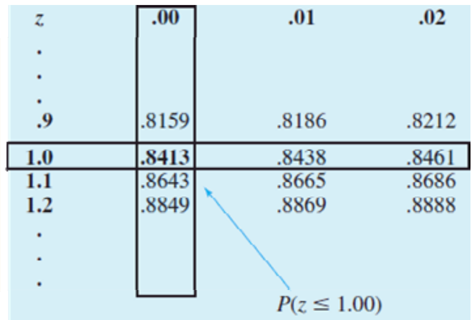
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831

http://www.z-table.com/

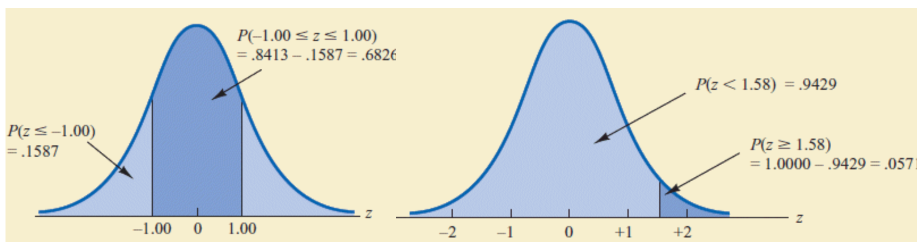
2. Một số phân phối xác suất (tt.)

❑ **Standard normal table, Z table: P(Z < z)**





z	.00	.01	.02
.			
.			
.			
.9	.8159	.8186	.8212
1.0	**.8413**	.8438	.8461
1.1	.8643	.8665	.8686
1.2	.8849	.8869	.8888
.			
.			
.			



[Anderson+]

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

❑ **Tính xác suất theo phân phối chuẩn**

B1. Mô hình hóa P(X < x)

B2. Chuyển về phân phối Z

B3. Tra bảng Z

- VD: X ~ N(μ = 16, σ = 4) → P(X < 8) ?

  X = 4Z + 16 < 8 ⇒ Z < –2

  P(Z < –2) = 0.0228

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **VD: Tính xác suất của biến ngẫu nhiên có phân phối z**

  a. $P(z \le 1.2) = 0.8849$

  b. $P(z \le -0.71) = 0.2389$

  c. $P(0 \le z \le 0.83) = 0.2967$

  d. $P(-1.57 \le z \le 0) = 0.4418$

  e. $P(0.44 < z) = 0.3300$

  e. $P(-0.23 \le z) = 0.5910$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Tìm ngưỡng x tương ứng với xs đã biết**

  B1. Mô hình hóa $P(X < x)$

  B2. Tra bảng Z

  B3. Chuyển từ Z về $X = \sigma Z + \mu$

- VD: $X \sim N(\mu = 16, \sigma = 4)$, $P(Z > z) = 0.9834 \rightarrow x = ?$

  $P(Z < z) = 1 - (Z > z) = 0.0166$

  $z = -2.13$

  $x = 4.(-2.13) + 16$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **VD: Xác định giá trị của z khi biết:**
  - a. Diện tích bên trái của z là 0.2119 → Python
  - b. Diện tích bên trái của z là 0.9948
  - c. Diện tích ở giữa –z và z là 0.9030
  - d. Diện tích ở giữa –z và z là 0.2052
  - e. Diện tích bên phải của z là 0.6915

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối nhị thức** (*Binominal Distristribution*)
  - tiến trình Bernoulli (*Bernoulli trial*) → { thành công, thất bại }
  - thí nghiệm: n (lần) Bernoulli trial(s) ĐỘC LẬP
  - xs để 1 Bernoulli trial thành công (p), hay thất bại q = (1 – p), giống nhau trong thí nghiệm
  - biến ngẫu nhiên X: *số lần thành công* ($0 \leq X \leq n$)

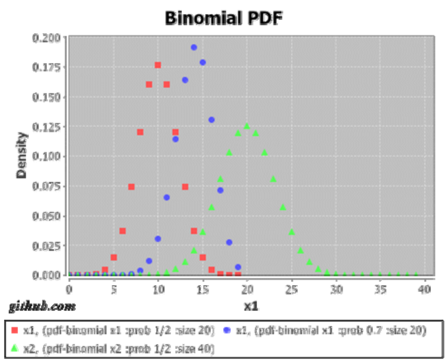
2. Một số phân phối xác suất (tt.)

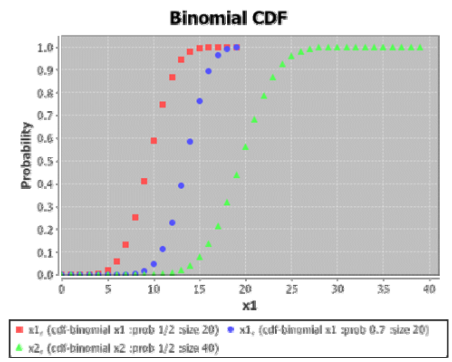
- **Phân phối nhị thức** (*Binominal Distristribution*)

X ~ *Binomial*(n, p)

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad F(x) = \sum_{X \le x} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$





2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối nhị thức** (*Binominal Distristribution*)

(i) $\mu = np$ (ii) $\sigma^2 = np(1-p)$

(iii) $Skewness = \dfrac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$ (iv) $ExcessKurt = \dfrac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$

- Có thể sử dụng phân phối chuẩn để xấp xỉ phân phối nhị thức với n đủ lớn và p gần 0.5

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **<u>VD</u>: Xét thí nghiệm gồm 2 lần phép thử Bernoulli có p = 0.4**
  - a. Xác suất 1 lần thành công:

$$f(1) = \binom{2}{1} 0.4^1 (1 - 0.4)^{2-1} = 0.48$$

  - b. Xác suất không có lần nào thành công: f(0) = 0.36
  - c. Xác suất tối thiểu 1 lần thành công: $P(1 \leq X) = f(1) + f(2) = 0.64$
  - d. Tính kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn
    - E[X] = n.p = 0.8
    - Var(X) = n.p.(1 – p) = 0.48

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

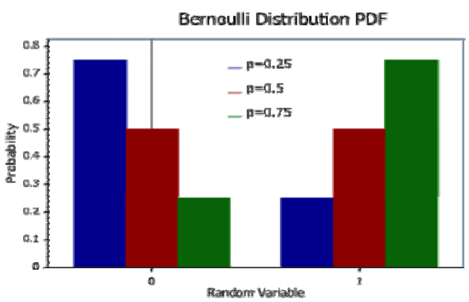
- **<u>VD</u>: Xét thí nghiệm gồm 10 lần phép thử Bernoulli có p = 0.1**
  - a. Xác suất tối thiểu 1 lần thành công:
  - b. Xác suất tối đa 2 lần thành công:
  - c. Tính kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn:

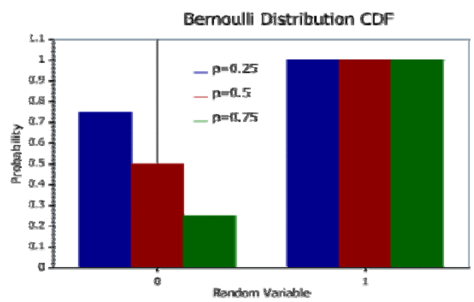
2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Bernoulli: phân phối nhị thức với n = 1**

X ~ *Bernoulli*(p)

$$f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ (1-p) & x = 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (1-p), & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$





2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Poisson**
  - số lần 1 sự kiện xảy ra trong một khoảng THỜI GIAN cố định
    - số lượng truy cập trang Web, cuộc gọi cần tư vấn trong 1 giờ
    - số tai nạn tại 1 giao lộ trong 1 ngày
    - …
  - số lần 1 sự kiện xảy ra trong một vùng KHÔNG GIAN cố định
    - số lần gõ sai 2 từ trong một trang
    - số vết nứt trên 100m đường ống
    - …

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Poisson**
  - X: *số lần sự kiện xảy* ra trong 1 khoảng thời gian/không gian

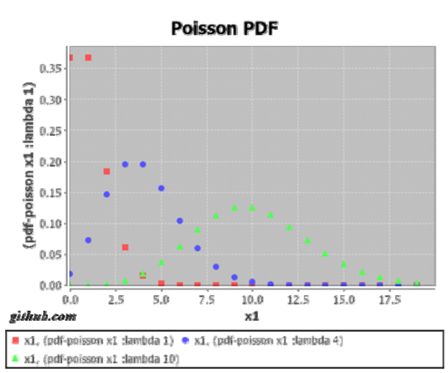
    X $\in$ N, *rời rạc*, ~ vô hạn đếm được (hữu hạn $\rightarrow$ bao nhiêu ?)
    (phân phối nhị thức: X $\leq$ n lần thí nghiệm cố định)
  - các sự kiện độc lập với nhau
  - không có 2 sự kiện cùng xảy ra tại 1 thời điểm (hay tại 1 điểm)
  - xs như nhau trong những khoảng thời gian/không gian = nhau

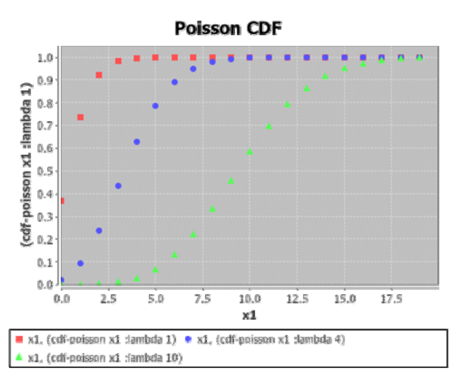
2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Poisson**

$\boxed{X \sim Poisson(\lambda)}$ *λ: số lần xảy ra trong 1 khoảng cho trước*

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad F(x) = e^{-\lambda}\sum_{X \leq x}\frac{\lambda^x}{x!}$$





2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- Phân phối Poisson

$$\text{(i) } \mu = \lambda \qquad \text{(ii) } \sigma^2 = \lambda$$

$$\text{(iii) } Skewness = \lambda^{-1/2} \qquad \text{(iv) } ExcessKurt = \lambda^{-1}$$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- Phân phối Poisson

<u>VD</u>: Quan sát lưu lượng xe tại 1 giao lộ vào giờ cao điểm.

- sự độc lập trong giao thông
- xs có xe là như nhau trong 2 khoảng thời gian dài bằng nhau
- thông tin quá khứ: 10 xe / 15 phút → X: số xe trong 15 phút

Xác suất có <u>5 xe trong 15 phút</u>: $P(X = 5) = f(5) = e^{-10}.\dfrac{10^5}{5!} = 0.0378$

Xác suất có <u>1 xe trong 3 phút</u> = 0.0378 ?

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Poisson**

  VD: Quan sát hư hại (lớn) trên mặt đường cao tốc.

  - sự độc lập trong hư hại
  - xs hư hại là như nhau trên 2 quảng đường dài bằng nhau
  - thông tin quá khứ: 2 hư hại / km → X: số hư hại / km

  Xác suất KHÔNG có hư hại trên 3km:

  2 hư hại / km ⇒ kỳ vọng 6 hư hại / 3km ⇒ $\lambda_{3km} = 6$

  $$P(X=0) = f(0) = e^{-6}.\frac{6^0}{0!} = 0.0025$$

  Xác suất có tối thiểu 1 hư hại / 3km rất lớn: 1 – 0.0025 = 0.9975

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Poisson**

  Giả sử một phân phối Poisson có giá trị trung bình $\mu = 50 = \lambda$.
  Tính P(X = 45).

  $$P(X=45) = e^{-50}\frac{50^{45}}{45!}$$

  → xấp xỉ phân phối chuẩn: với λ đủ lớn

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- Xấp xỉ phân phối Poisson bằng phân phối chuẩn: $\lambda \geq 20$

  Left Right 2 sides

  B1. Đưa bài toán về dạng $P(X \leq b)$, $P(X \geq b)$, $P(a \leq X \leq b)$

  B2. Chuyển các cận a, b sang Z

  B3. Tính xs $P(Z \leq z)$ theo phân phối chuẩn tắc

  B4. Xét các trường hợp:

  - Bài toán tính xs NHỎ hơn: NOP
  - Bài toán tính xs LỚN hơn: kết quả = 1 – giá trị trong bảng tra
  - Bài toán tính xs trong khoảng: thực hiện B1-B3 cho cận trên; sau đó trừ 2 kết quả nhận được

  B5. Chuyển từ Z trở về $X = \sigma Z + \mu$ (nếu cần thiết)

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **<u>VD</u>: Một ngân hàng có trung bình 5 khách hàng trong 10 phút. Tính xs có nhiều hơn 35 khách hàng / giờ với λ = 30 / giờ.**

  B1. $p = P(X > 35) = ?$

  B2. $Z = (X - \mu) / \sigma = (35 – 30) / (30)^{1/2} = 0.91$; $p \approx P(Z > 0.91)$

  B3. Tra bảng phân phối Z ta được $P(Z < 0.91) = 0.8186$

  B4. $P(Z > 0.91) = 1 – P(Z < 0.91) = 1 – 0.8186 = 0.1814$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Poisson**
  - Có thể dùng phân phối nhị thức để xấp xỉ phân phối Poisson với n đủ lớn và p đủ nhỏ

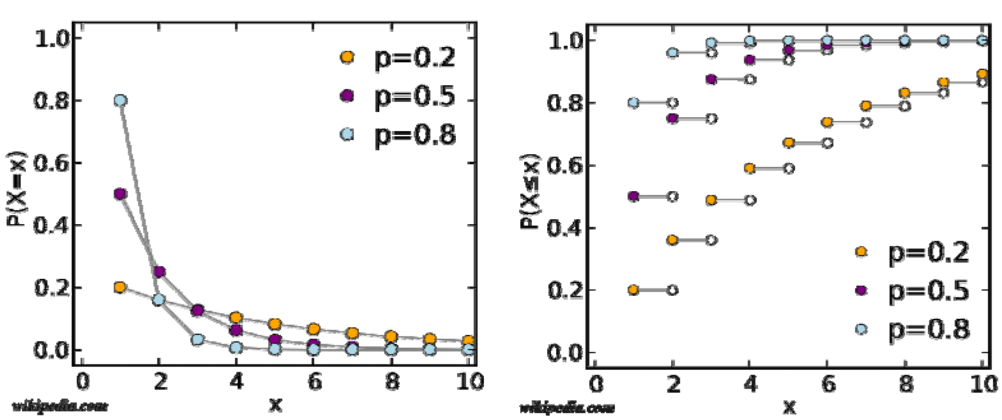
$$X \sim Binomial\left(n, p = \frac{\lambda}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(x) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}$$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối hình học (*Geometric Distristribution*): thực hiện X lần tiến trình Bernoulli cho đến khi xuất hiện sự kiện mong muốn**

X ~ *Geometric*(p), với 0 < p < 1

$$f(x) = p(1-p)^{x-1} \qquad F(x) = 1-(1-p)^x$$



2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối hình học** (*Geometric Distristribution*)**: thực hiện X lần tiến trình Bernoulli cho đến khi xuất hiện sự kiện mong muốn**

$$\text{(i) } \mu = \frac{1}{p} \qquad \text{(ii) } \sigma^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$$

$$\text{(iii) } Skewness = \frac{(2-p)}{\sqrt{(1-p)}} \qquad \text{(iv) } ExcessKurt = 6 + \frac{p^2}{(1-p)}$$

Nhận xét: X là số lần thực hiện thí nghiệm

- bắt đầu là (X – 1) lần thất bại, với xs thất bại là (1 – p)
- kế tiếp là lần thứ X thành công, với xs thành công là p

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}.p$$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối hình học** (*Geometric Distristribution*)**: thực hiện X lần tiến trình Bernoulli cho đến khi xuất hiện sự kiện mong muốn**

<u>VD</u>: Trong 3 lần ném rổ, xs thành công là 0.7.

Xs ném rổ thành công ở lần thứ 2: P(X = 2) = p(1 – p) = 0.21

Xs ném rổ thành công ở lần thứ 3: P(X = 3) = p(1 – p)^2 = 0.063

$\Rightarrow$ Càng về sau, xs thành công càng giảm dần về 0

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **So sánh 3 phân phối rời rạc: nhị thức, hình học và Poisson**
  - nhị thức: số lần thành công trong n (cố định) lần thực hiện
  - hình học: số lần thực hiện cho đến khi thành công
  - Poisson: số lần xảy ra trong 1 thời gian/không gian cố định

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

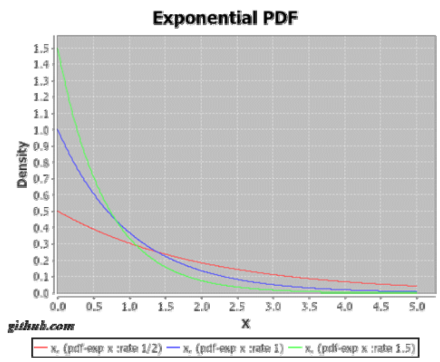
- **Phân phối lũy thừa/mũ** (*Exponential Distribution*)
  - thể hiện thời gian đối với các sự kiện
    - thời gian giữa các thời điểm trong quy trình Poisson
    - thời gian giữa các cuộc gọi cần tư vấn

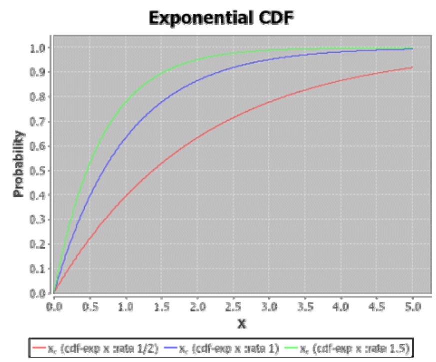
2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối lũy thừa/mũ** (*Exponential Distribution*)

X ~ *Exponential*(λ)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$





2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối lũy thừa/mũ** (*Exponential Distribution*)

$$\text{(i) } \mu = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{(ii) } \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{(iii) } Skewness = 2 \qquad \text{(iv) } ExcessKurt = 6$$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối lũy thừa/mũ** (*Exponential Distribution*)

  VD: Thời gian chờ đợi (xếp hàng) trung bình là 1 giờ đồng hồ.

  Xác suất chờ đợi tối đa 15 phút:

  Quy đổi về đơn vị giờ: 15 phút $\rightarrow$ 0.25

  Thời gian chờ đợi trung bình 1 giờ $\Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \lambda = \mu^{-1} = 1$

  $\Rightarrow P(X \leq 0.25) = (1 - e^{-0.25}) = 0.2211$

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

- **Phân phối Pareto**
  - xuất phát: xã hội học (dân số, thu nhập, …)
  - mở rộng: thời gian sống $\rightarrow$ bệnh tật, hư hỏng, risk, …
  - survival analysis: khoảng thời gian cho đến khi xảy ra sự kiện được quan tâm $\rightarrow$ thời gian tồn tại $\geq$ warranty period t
  - quy luật 80-20: 20% nguyên nhân (I) $\rightarrow$ 80% kết quả

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

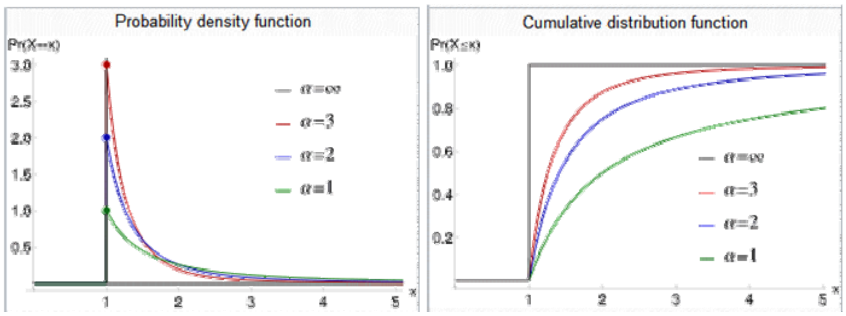
❑ Phân phối Pareto

X ~ *Pareto*(k, α)

k: giá trị chặn dưới

α: shape/slope parameter, tail/Pareto index

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k^{\alpha}\alpha}{x^{(\alpha+1)}}, & x\ge k\\ 0, & x<k\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{k}{x}\right)^{\alpha}, & x\ge k\\ 0, & x<k\end{cases}$$



www.wikipedia.com

2. Một số phân phối xác suất (tt.)

❑ Phân phối Pareto

$$\text{(i) } \mu=\begin{cases}\infty, & \alpha\le 1\\ \dfrac{k\alpha}{\alpha-1}, & \alpha>1\end{cases}\qquad \text{(ii) } \sigma^2=\begin{cases}\infty, & \alpha\le 2\\ \dfrac{k^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, & \alpha>2\end{cases}$$

$$\text{(iii) } Skewness=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha-3}\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}},\alpha>3$$

$$\text{(iv) } ExcessKurt=\frac{6(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha-2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)},\alpha>4$$

Nội dung bổ sung

1. Đạo hàm
2. Một số phân phối
3. Quy tắc thực nghiệm
4. Định lý giới hạn trung tâm

3. Quy tắc thực nghiệm

- Bất đẳng thức Markov cho X không âm

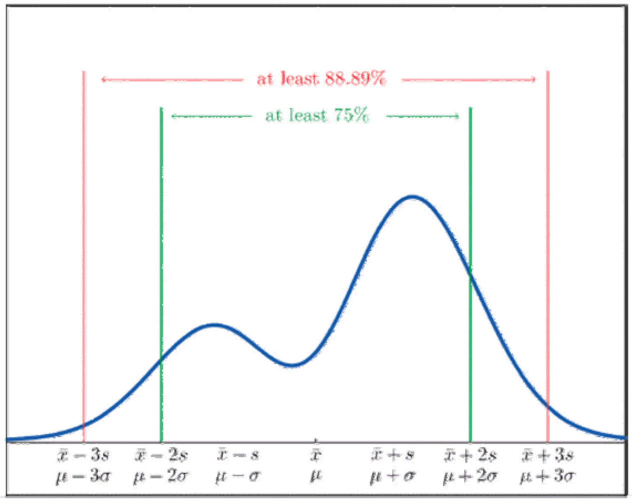
$$P(a \le X) \le \frac{\mu}{a}$$

- Bất đẳng thức Chebyshev

$$P(z\sigma \le (|X - \mu|) \le \frac{1}{z^2}$$

3. Quy tắc thực nghiệm (tt)

- **Định lý Chebyshev**
  - tối thiểu $\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ quan sát nằm trong [$\mu - z\sigma$, $\mu + z\sigma$], với k > 1



Nội dung bổ sung

1. Đạo hàm
2. Một số phân phối
3. Quy tắc thực nghiệm
4. **Định lý giới hạn trung tâm**

4. Định lý giới hạn trung tâm

- **Luật số lớn** (*Law of Large Numbers – LLN*)
  - thực hiện thí nghiệm n (rất nhiều) lần: trị trung bình ≈ kỳ vọng
- **Trung bình mẫu** (*sample mean*) **các biến độc lập, cùng ph. phối**

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- **Luật số lớn YẾU** (*Weak Law of Large Numbers – WLLN*)

$$E(X_i) = \mu < \infty, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

- **Luật số lớn MẠNH** (*Strong Law of Large Numbers – SLLN*)

$$E(X_i) = \mu < \infty, \qquad P(\lim_{n\to\infty} \overline{X} = \mu) = 1$$

4. Định lý giới hạn trung tâm (tt.)

- **Central Limit Theorem** (*CLT*)
  - trong thực tế, một biến ngẫu nhiên X có thể được biểu diễn bằng tổng của một số lượng lớn các biến ngẫu nhiên X_1, X_2, … → X xấp xỉ phân phối chuẩn

X_i: thời gian phục vụ khách i, với $E(X_i)$ = 2 min, $Var(X_i)$ = 1

Xs phục vụ 50 người trong vòng 90 đến 110 phút là bao nhiêu ?

$$E(X_i) = \mu < \infty, \qquad 0 < Var(X_i) = \sigma^2 < \infty, \qquad Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

$\Phi(x)$: *standard normal* CDF

4. Định lý giới hạn trung tâm (tt.)

- **Central Limit Theorem** (*CLT*)

  $X_i \sim$ *Bernoulli*(p), $E(X_i) = p$, $Var(X_i) = p(1 - p)$

  Ta có: $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim$ *Binomial*(n, p)

$$Z_n = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

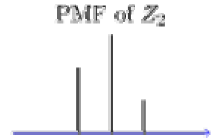
$\boxed{p = \frac{1}{3}}$

$$Z_1 = \frac{X_1 - p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

PMF of Z_1

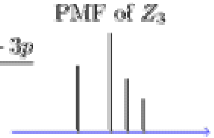
$$Z_2 = \frac{X_1 + X_2 - 2p}{\sqrt{2p(1-p)}}$$

PMF of Z_2



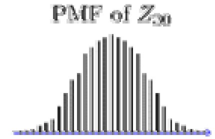
$$Z_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 - 3p}{\sqrt{3p(1-p)}}$$

PMF of Z_3



$$Z_{30} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 30p}{\sqrt{30p(1-p)}}$$

PMF of Z_{30}



4. Định lý giới hạn trung tâm (tt.)

- **Central Limit Theorem** (*CLT*)

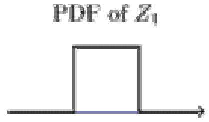
  $X_i \sim$ *Uniform*(0, 1), $E(X_i) = 1/2$, $Var(X_i) = 1/12$

  Ta có: $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim$ Binomial(n, p)

$$Z_n = \frac{Y - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}}$$

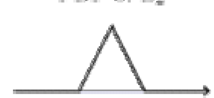
$$Z_1 = \frac{X_1 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}$$

PDF of Z_1



$$Z_2 = \frac{X_1 + X_2 - 1}{\sqrt{\frac{2}{12}}}$$

PDF of Z_2



$$Z_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{12}}}$$

PDF of Z_3

$$Z_{30} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - \frac{30}{2}}{\sqrt{\frac{30}{12}}}$$

PDF of Z_{30}

4. Định lý giới hạn trung tâm (tt.)

- **Central Limit Theorem** (*CLT*)
  - áp dụng trong nhiều lãnh vực
  - đơn giản hóa quá trình tính toán: 1 biến ngẫu nhiên thay cho (SUM) rất nhiều biến ngẫu nhiên X_i khác (chỉ cần μ và σ của X_i)
  - ngưỡng giá trị của n phụ thuộc vào phân phối của X_i ($n \geq 30$)

4. Định lý giới hạn trung tâm (tt.)

- **Quy trình áp dụng CLT**

B1. Đặt: $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$

B2. Tính: $E(Y) = n\mu$, $Var(Y) = n\sigma^2$

B3. Tính xs:

$$
\begin{aligned}
P(y_1 \leq Y \leq y_2) &= P\left(\frac{y_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{Y - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{y_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \\
&\approx \Phi\left(\frac{y_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

4. Định lý giới hạn trung tâm (tt.)

- **Quy trình áp dụng CLT**

  X_i: thời gian phục vụ khách i, với $E(X_i) = 2$ min, $Var(X_i) = 1$

  Xs phục vụ 50 người trong vòng 90 đến 110 phút là bao nhiêu ?

  B1. $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n = 50$,

  B2. $E(Y) = 2 * 50 = 100$, $Var(Y) = 1 * 50 = 50$

  B3. Tính xs:

$$\begin{aligned} P(90 \le Y \le 110) &= P\left(\frac{90-100}{\sqrt{50}} < \frac{Y-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{110-100}{\sqrt{50}}\right) = \\ &= P\left(-\sqrt{2} < \frac{Y-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \sqrt{2}\right) \approx \\ &\approx \Phi\left(\sqrt{2}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2}\right) = 0.8427 \end{aligned}$$

Tài liệu tham khảo

Anderson et al., *Statistics for Business and Economics*, Cengage, 2016.

Nguyễn Đình Thúc và các tác giả, *Thống kê máy tính*, NXB Khoa học và kỹ thuật, 2010.

Pishro-Nik H., *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*, Kappa Research LLC, 2014.

Schmitz Andy, *Introductory Statistics*, Saylor Academy, (https://saylordotorg.github.io/text_introductory-statistics/index.html, 09/2019).