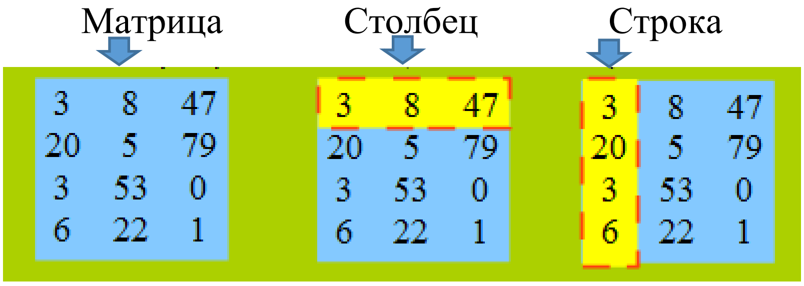
Матрицы

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, где $i = 1, 2, \dots, m$ – номер строки, $j = 1, 2, \dots, n$ – номер столбца, таких, на пересечении которых расположены числа a_{ij},

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$



У каждого числа свое местоположение, и перетасовывать их нельзя!

Когда говорят о размерах матрицы, то **сначала** указывают количество строк, а только потом – количество столбцов.

Пример

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица размера (2×3).

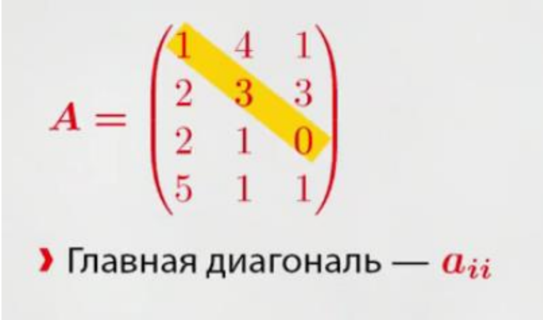
Если $m = n$, матрица называется ***квадратной*** порядка n.

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка.

Главная и ***побочная диагональ*** квадратной матрицы –

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побочная диагональ главная диагональ



Частные случаи квадратных матриц

а) ***<u>треугольная матрица</u>*** – выше или ниже главной диагонали все элементы равны нулю.

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\5&6&7\end{pmatrix};$$

б) ***<u>диагональная матрица</u>*** – выше и ниже главной диагонали – нули, на главной диагонали произвольные числа.

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

в) ***<u>единичная матрица</u>*** – диагональная матрица, на главной диагонали которой – единицы.

Пример

$E=(1)$ – единичная матрица первого порядка.

$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка.

$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Таким образом $E=(a_{ij})$, $a_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$

Это матрица - строка

$$\begin{pmatrix} 4 & 53 & 47 \end{pmatrix}$$

Это матрица - столбец

$$\begin{pmatrix} 62 \\ 2 \\ 10 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Это квадратная матрица третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 67 \\ 2 & 34 & 7 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Это диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Это единичная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Это нулевая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

симметричная матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 6 & 3 & -9 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ -4 & -9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

антисимметричная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -9 \\ -5 & -3 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Действия с матрицами

1. Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу)

Минус можно вынести за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак

$$E = -\begin{pmatrix} -4 & 13 & -6 \\ -17 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -13 & 6 \\ 17 & -5 & -7 \\ 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число

Всё просто, для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы **умножить на данное число**.

$$\boxed{C = kA} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij} = k \cdot a_{ij}}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xcancel{-\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 14 & -8 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}285714285 & 0 \\ -2 & 1{,}142857143 \\ 1{,}428571429 & 0{,}428571428 \end{pmatrix}}$$

3 Транспонирование

Транспонирование -это преобразование матрицы А в матрицу A^T , при котором строки матрицы А записываются в столбцы A^T с сохранением порядка.

Другими словами: столбцы матрицы А записываются в строки матрицы A^T с сохранением порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

<u>Пример:</u>

Транспонировать матрицу $D = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -12 & 0 & 34 \end{pmatrix}$

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -12 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица.

Пошаговый пример:

Транспонировать матрицу $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}-1 & * & *\\ 0 & * & *\\ -2 & * & *\end{pmatrix} \quad B^T=\begin{pmatrix}-1 & -5 & *\\ 0 & 4 & *\\ -2 & -7 & *\end{pmatrix} \quad B^T=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 6\\ 0 & 4 & -4\\ -2 & -7 & -6\end{pmatrix}$$

Можно сказать, что транспонирование – это поворот матрицы вокруг главной диагонали

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Обратите внимание, как при транспонировании меняется размер матрицы, то есть количество строк и столбцов. Также обратите внимание, что элементы на первой строке, первом столбце, и последней строке, последнем столбце остаются на месте.

Свойства транспонирования:

$(A^T)^T=A$ (транспонируй матрицу два раза - получишь такую же матрицу)

$(xA)^T=xA^T$ (если надо матрицу умножить на число и транспонировать, можно сначала умножить, затем транспонировать, или наоборот)

$(A+B)^T = A^T+B^T$

$(AB)^T=B^TA^T$

4. Операция сложения матриц

Результатом ***сложения матриц*** A и B называется матрица C, элементы которой являются суммой соответствующих элементов исходных матриц.

$$\boxed{\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+(-4) & -1+(-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 12-4 & -1-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов**.

НЕ ВСЕ МАТРИЦЫ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ. Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были ОДИНАКОВЫМИ ПО РАЗМЕРУ.

$$\cancel{\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}}$$

Пример

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-4) & 5-3 & -17-(-15) \\ -1-(-5) & 0-(-7) & 10-0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3+4 & 5-3 & -17+15 \\ -1+5 & 0+7 & 10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Свойства операции сложения

Рассмотрим матрицы $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ – размера $(m\times n)$.

1°. $A+B=B+A$ (коммутативность сложения).

2°. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность сложения).

$$\begin{pmatrix}6 & 15\\ 21 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 5 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 15\\ 21 & 9\end{pmatrix}+\left(-1\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 5 & -7\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}9 & 9\\ 16 & 16\end{pmatrix}$$

5. Умножение матриц.

Пусть $A=(a_{ij})$ размера $(m\times p)$, $B=(b_{ij})$ – $(p\times n)$,

тогда их произведением называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $(m\times n)$:

$$\boxed{C=AB}\ \Leftrightarrow\ \boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}.$$

Правило умножения матриц:

1. Перемножать можно лишь матрицы согласованных размеров (число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B).

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{pmatrix}$$

2. Размер матрицы C равен произведению числа строк матрицы A на число столбцов матрицы B, т.е. $(m\times n)$.

3. Чтобы получить элемент матрицы произведения c_{ij}, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца следует перемножить соответствующие элементы i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B и найти сумму полученных произведений.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{11} & B_{21} \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} & A_{12} \cdot B_{21} \\ A_{21} \cdot B_{11} & A_{22} \cdot B_{21} \end{pmatrix}$$

4) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} + A_{13} \cdot B_{31} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{23} \cdot B_{31} \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} & A_{11} \cdot B_{12} & A_{11} \cdot B_{13} \\ A_{21} \cdot B_{11} & A_{21} \cdot B_{12} & A_{21} \cdot B_{13} \\ A_{31} \cdot B_{11} & A_{31} \cdot B_{12} & A_{31} \cdot B_{13} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} w_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} w_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} w_i \end{pmatrix}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 2 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 2 \\ 10\cdot 1+0\cdot 0 & 10\cdot 0+0\cdot 0 & 10\cdot 0+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Примеры:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1+b_1c_2 & a_1d_1+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2c_2 & a_2d_1+b_2d_2 \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 9-3\cdot 6 & 2\cdot(-6)-3\cdot(-4) \\ 4\cdot 9-6\cdot 6 & 4\cdot(-6)-6\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NM =?

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1+b_1d_2+c_1d_3 \\ a_2d_1+b_2d_2+c_2d_3 \\ a_3d_1+b_3d_2+c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2+8\cdot(-3)-4\cdot 1 \\ 6\cdot 2+9\cdot(-3)-5\cdot 1 \\ 4\cdot 2+7\cdot(-3)-3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

RP=?

ВАЖНО!!! При умножении переставлять матрицы нельзя!

Свойства операций умножения матрицы на число и умножения матриц

1°. $AB \neq BA$ (коммутативность умножения в общем случае не выполняется).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются ***перестановочными***.

Примеры перестановочных матриц

а) $A \cdot A = A \cdot A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}-1\\3\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\4\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-5\\1\\2\end{matrix}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot\boxed{(-1)}+2\cdot\boxed{3}-5\cdot\boxed{0} & -1\cdot\boxed{2}+2\cdot\boxed{4}-5\cdot\boxed{1} & -1\cdot\boxed{(-5)}+2\cdot\boxed{1}-5\cdot\boxed{2} \\ 3\cdot\boxed{(-1)}+4\cdot\boxed{3}+1\cdot\boxed{0} & 3\cdot\boxed{2}+4\cdot\boxed{4}+1\cdot\boxed{1} & 3\cdot\boxed{(-5)}+4\cdot\boxed{1}+1\cdot\boxed{2} \\ 0\cdot\boxed{(-1)}+1\cdot\boxed{3}+2\cdot\boxed{0} & 0\cdot\boxed{2}+1\cdot\boxed{4}+2\cdot\boxed{1} & 0\cdot\boxed{(-5)}+1\cdot\boxed{1}+2\cdot\boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 9 & 23 & -9 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

б) $A \cdot E = E \cdot A$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

в) $A \cdot O = O \cdot A$

O – ***нулевая матрица*** (все элементы равны нулю). В общем случае матрица O может иметь произвольную размерность, но в данном примере ее размерность согласована с размерностью матрицы A.

2°. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность умножения).

3°. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность).

4°. $k(A + B) = kA + kB$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц).

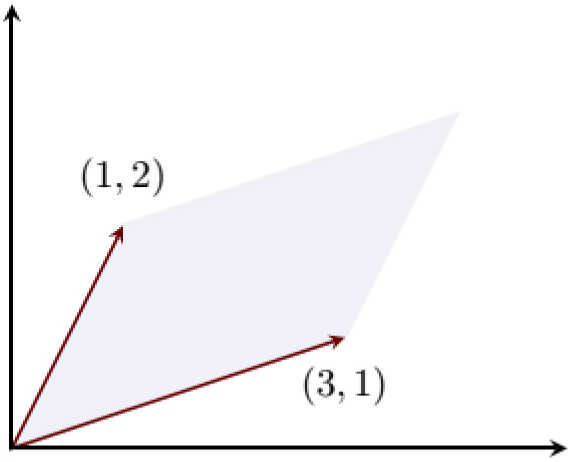
5°. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$.

6°. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

7°. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, если A и B – квадратные матрицы.

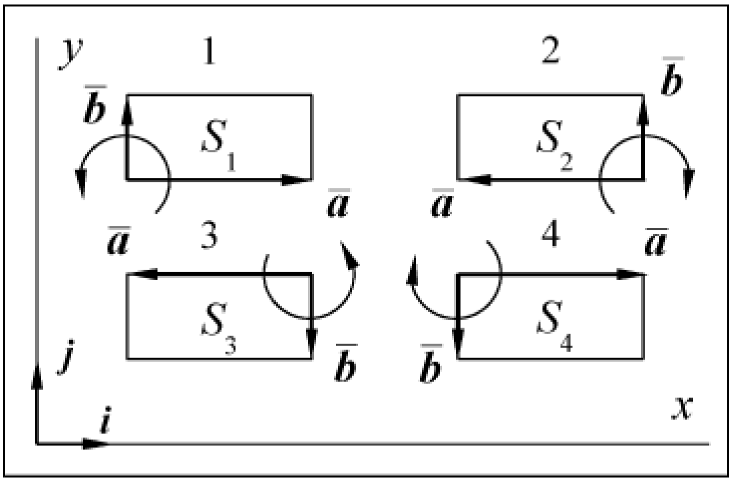
Определитель матрицы

Рассмотрим два неколлинеарных вектора (векторы не лежащие на одной прямой или на параллельных прямых)



Оказывается, что площадь параллелепипеда равна определителю этой матрицы.

Для начала рассмотрим вариант, когда векторы ориентированы вдоль координатных осей декартовой системы координат.



Запишем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в координатной форме:

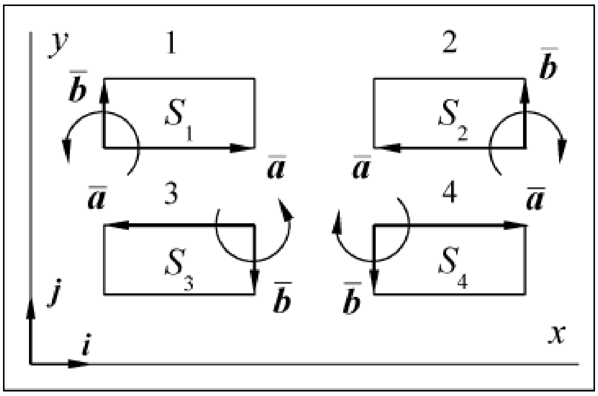
$$\bar{a} = \bar{a}\begin{bmatrix} a_x \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{a}\begin{bmatrix} s(a_x)\cdot a \\ 0 \end{bmatrix} \doteq s(a_x)\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = s(a_x)a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{b} = \bar{b}\begin{bmatrix} 0 \\ b_y \end{bmatrix} = \bar{b}\begin{bmatrix} 0 \\ s(b_y)\cdot b \end{bmatrix} \doteq s(b_y)\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = s(b_y)b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

где a и b означают модуль соответствующего вектора,

$s(a_x)$ – знак координаты вектора.

Поскольку векторы ортогональны (перпендикулярны), то параллелограммы, построенные на них, являются прямоугольниками. Их площади равны просто произведению их сторон. Выразим эти произведения через координаты векторов для всех четырех случаев.



1. $S_1 = a \cdot b = a_x b_y$;
2. $S_2 = a \cdot b = (-a_x) b_y = -a_x b_y$;
3. $S_3 = a \cdot b = (-a_x)(-b_y) = a_x b_y$;
4. $S_4 = a \cdot b = a_x(-b_y) = -a_x b_y$.

Все четыре формулы для вычисления площади одинаковы за исключением знака. Это свойство можно связать с ориентацией плоскости прямоугольника (кода поворот вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ осуществляется по часовой стрелке – площадь положительна, в тех же случаях, когда мы вынуждены использовать в формуле знак минус, поворот вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ осуществляется против часовой стрелки).

Общее выражение для всех четырех случаев.

$$\bar{S}(\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} = \Delta(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}, \bar{b}|$$

.

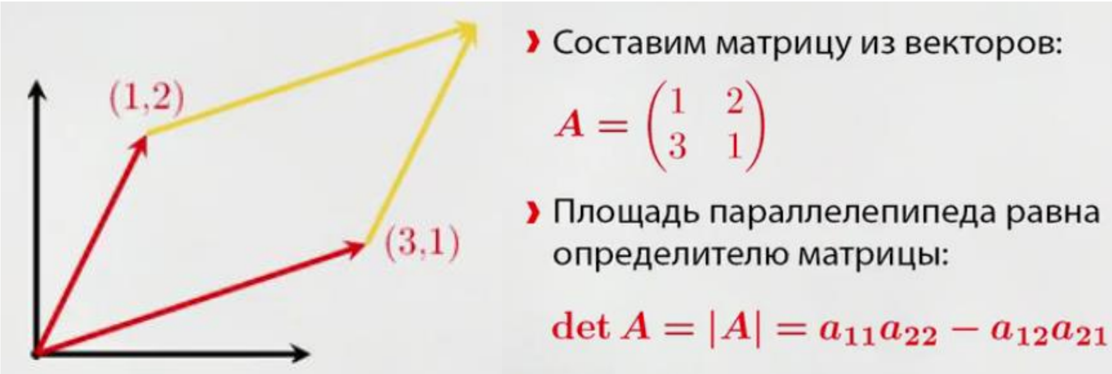
То есть, ориентированная площадь прямоугольника, построенного на векторах, как на сторонах, равна определителю, составленному из координат векторов, как из столбцов.

$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$, $\det\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$, $\Delta(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}})$, $|\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}|$ – различные формы обозначения для одного и того же понятия – определителя, составленного из координат векторов, как из столбцов.

Равенство для вычисления определителя 2х2

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

Случай с произвольно ориентированными векторами рассмотрим на примере



Можно посчитать, что в нашем случае эта формула даст (−5)

ВАЖНО!!!*Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы.*

При расчётах в зависимости от значения определителя можно делать важные выводы, например, перпендикулярны или нет прямые.

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной матрице третьего порядка, называется число

$$\det \mathrm{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Правило треугольника

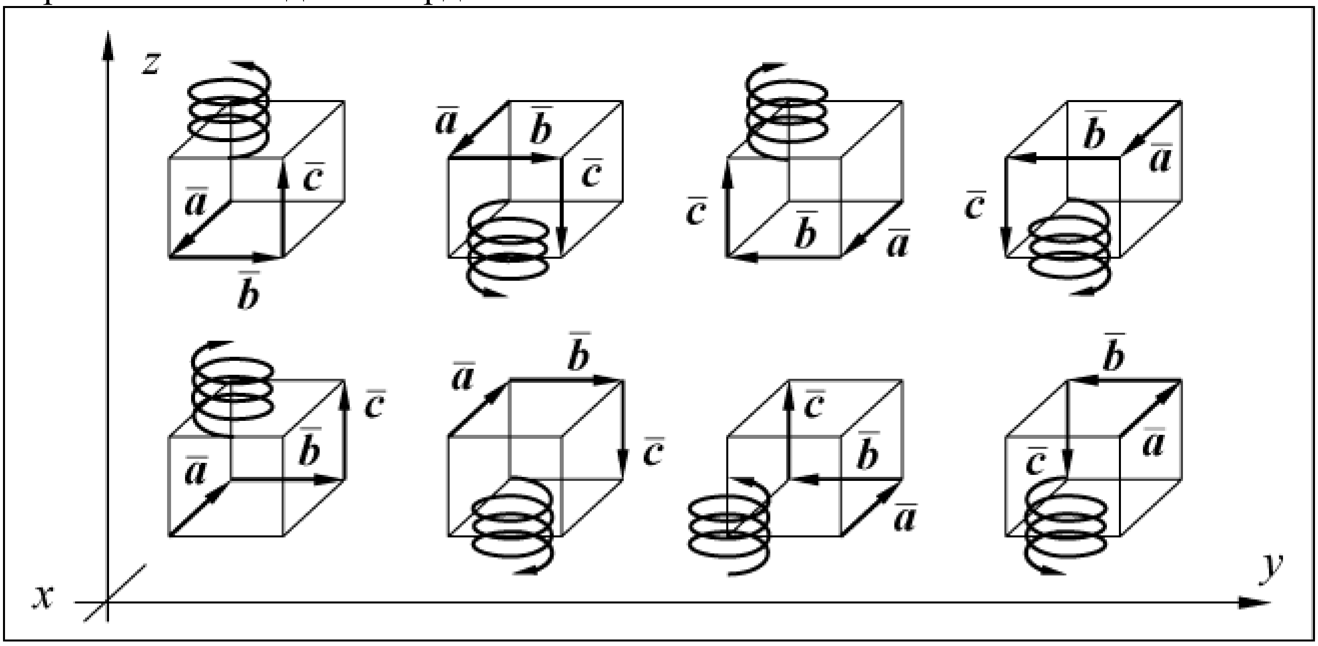
В выражение определителя со знаком '+' входят произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, расположенных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; со знаком '–' ... (то же про побочную диагональ).

Пример

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - 7\cdot5\cdot3 - 4\cdot2\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = 0.$$

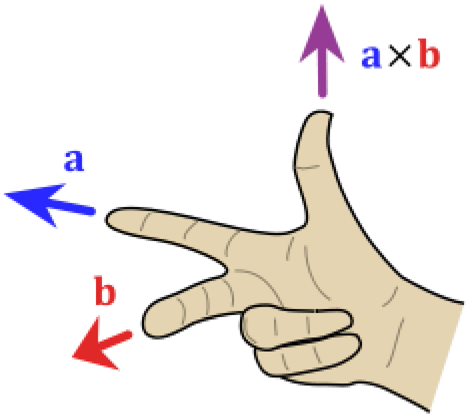
Физический смысл определителя 3-го порядка

Рассмотрим наиболее простые частные случаи, когда векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ расположены вдоль координатных осей



Во всех этих случаях объем параллелепипеда, построенного на векторах, может быть вычислен по формуле: $V = \pm a_x b_y c_z$.

Причем произведение $a_x b_y c_z$ должно быть взято со знаком плюс в тех случаях, когда векторы образуют правую тройку векторов; и со знаком минус, когда – левую.



Ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах, образующих правую тройку, будем считать положительным, а объем, построенный на векторах, образующих левую тройку – отрицательным.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц

Если $\det A \neq 0$, матрица A называется ***невырожденной***, в противном случае A называется ***вырожденной*** матрицей.

Для всякой невырожденной матрицы существует и единственна обратная матрица

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T},}$$

где $A^{\vee}$ – присоединенная матрица (составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы A: каждый элемент матрицы $A^{\vee}$ является алгебраическим дополнением соответствующего элемента матрицы A).

Детальнее рассмотрим на примере

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ A^{-1} - ?$$

Решение (Последовательность действий удобно разложить по пунктам)

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Важно! В том случае, если определитель матрицы равен **НУЛЮ** – обратной матрицы **НЕ СУЩЕСТВУЕТ**.

$\det A = -2 \neq 0 \ \Rightarrow$ существует единственная A^{-1}.

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет такие же размеры, как и матрица A, то есть в данном случае

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Как найти его **минор**? МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Оставшееся число и является **минором данного элемента**, которое записываем в нашу матрицу миноров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

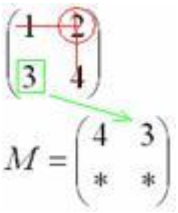
Рассматриваем следующий элемент матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

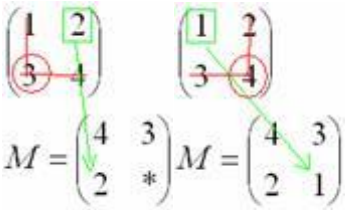
Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит данный элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

То, что осталось, и есть минор данного элемента, который записываем в нашу матрицу:



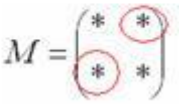
Аналогично рассматриваем элементы второй строки и находим их миноры:



$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

3. Находим матрицу алгебраических дополнений **.**

В матрице миноров нужно **ПОМЕНЯТЬ ЗНАКИ** у двух чисел:



$\left(A^{\vee}\right)^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений

$\left(A^{\vee}\right)^{T}$ – ?

$\left(A^{\vee}\right)^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Ответ.

Вспоминаем нашу формулу $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T}}$

$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Усложним задачу и рассмотрим пример для матрицы

$$B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

1) Находим определитель матрицы.

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot(-9+8)-5\cdot(-18-20)+7\cdot(-12-15)=-2+190-189=-1$$

Здесь определитель раскрыт **по первой строке**.

Также не забываем, что $|B|=-1\neq 0$, а значит, всё нормально – **обратная матрица существует**.

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет размерность «три на три»

$$M=\begin{pmatrix}* & * & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{pmatrix}$$, и нам нужно найти девять чисел.

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и **является минором данного элемента**. Его нужно вычислить:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Необходимо вычислить девять определителей «два на два».

Нахождение еще одного минора в картинках:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-6\cdot 7=8-42=-34$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Остальные миноры попробуйте вычислить самостоятельно.

Окончательный результат:

$M=\begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

То, что все миноры получились отрицательными – чистая случайность.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.

В матрице миноров необходимо **СМЕНИТЬ ЗНАКИ** строго у следующих элементов:

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$B_* = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений B_*^T.

$$B_*^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Проверка:

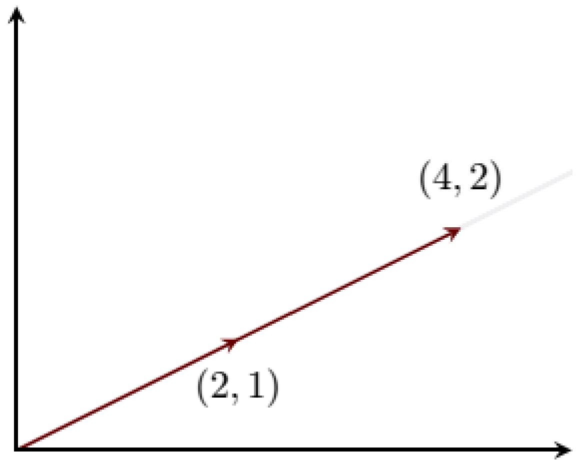
$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-38) + 7 \cdot 27 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 41 + 7 \cdot (-29) & 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-34) + 7 \cdot 24 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-38) + 4 \cdot 27 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 41 + 4 \cdot (-29) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-34) + 4 \cdot 24 \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-38) - 3 \cdot 27 & 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 41 - 3 \cdot (-29) & 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-34) - 3 \cdot 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ранг матрицы.

Рассмотрим случай, когда два вектора линейно зависимы, т.е. один вектор можно выразить через второй с помощью умножения на число.



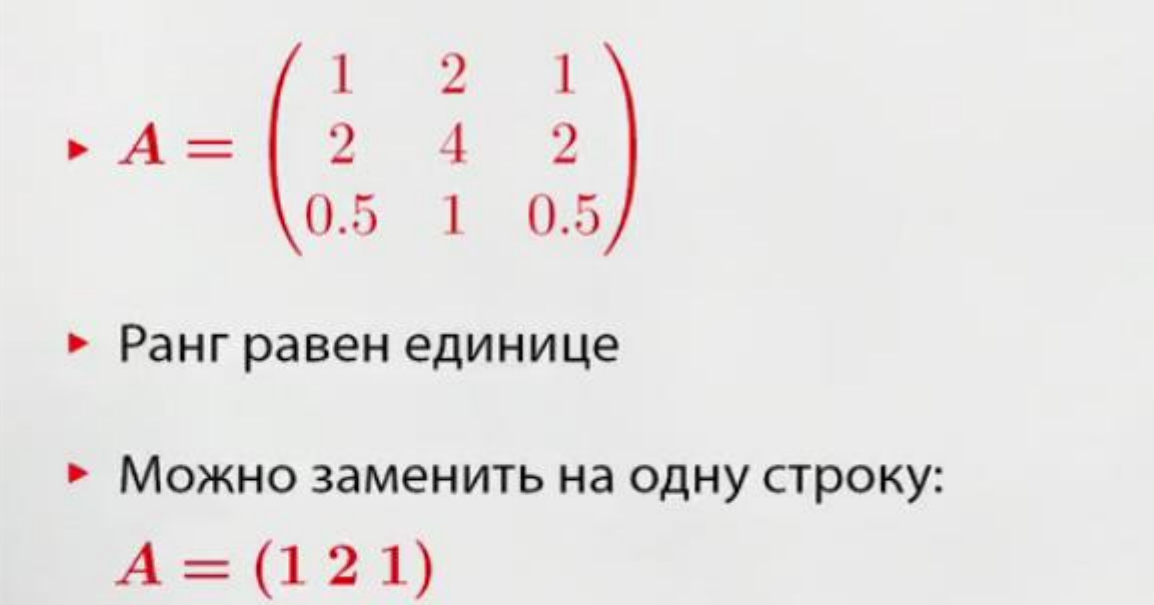
Чему равна площадь параллелограмма?? Нулю!!!

Отсюда вытекает важное свойство:

Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда строки (или столбцы) матрицы линейно зависимы.

Ранг матрицы –характеристика количества информации в матрице

Давайте рассмотрим пример, матрица размера 3 на 3, в которой, как мы видим, строки линейно зависимы: чтобы получить вторую, нужно первую умножить на два; чтобы получить третью, нужно первую разделить на два. Кстати, заметьте, при этом столбцы тоже линейно зависимы. Можно получить второй столбец из первого умножением на два, а третий вообще совпадает с первым. Это не случайно. Ранг этой матрицы равен единице, откуда следует, что можно заменить всю эту матрицу на одну строку, потому что остальные строки линейно выражаются через неё. То есть можно заменить матрицу A размера 3 на 3 на матрицу размера 3 на 1 с элементами (1, 2, 1). И при этом мы не потеряем никакой информации.



Собственные значения (числа) и собственные векторы.

Рассмотрим произвольную *квадратную* матрицу, например, $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. И умножим данную матрицу справа на какой-нибудь подходящий столбец $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$A\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \bar{c}$$

получили другой *вектор-столбец* $\bar{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Но существуют особые векторы.

Умножим ту же матрицу на $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

На последнем шаге вынесли константу.

Что произошло?

В результате умножения матрицы A на вектор $\overline{u}$, данный «возродился» с числовым коэффициентом $\lambda = 2$:

$$A\overline{u} = \lambda\overline{u}$$

Определение:

<u>ненулевой</u> вектор $\overline{u}$, который при умножении на некоторую квадратную матрицу A превращается в самого же себя с числовым коэффициентом λ, называется **собственным вектором** матрицы A.
Число λ называют **собственным значением** или **собственным числом** данной матрицы.

собственный вектор $\overline{u}$ соответствует собственному значению λ.

Поскольку каждой квадратной матрице соответствует определенное **линейное преобразование** *(в некотором базисе)*, то, исходя из содержательного смысла, часто говорят о собственных значениях и собственных векторах *линейного преобразования*.

Сколько у матрицы собственных чисел и собственных векторов?

У квадратной матрицы размером $n \times n$ существует **ровно** n **собственных значений**, причём некоторые из них (или даже все) могут быть *кратными* (совпавшими).

Так, у демонстрационной квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ровно два собственных значения, причём одно из них нам уже известно: $\lambda_1 = 2$.

Второе собственное число λ_2 гипотетически тоже может равняться «двойке» *(но чаще всего, и здесь – в частности, собственные значения различны)*.

Что касается количества собственных векторов?

Любой вектор, который *коллинеарен* вектору $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ тоже будет собственным вектором. Действительно, если взять пропорциональные столбцы, скажем, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, то совсем несложно убедиться в равенствах:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

И с этой точки зрения у матрицы A бесконечно много собственных векторов. Но под рассматриваемым вопросом всегда подразумевают **количество линейно независимых** (неколлинеарных) собственных векторов.

Каждому собственному значению соответствует **хотя бы один** собственный вектор, и если **все** собственные числа матрицы $n \times n$ **различны**, то она имеет ровно n собственных векторов.

Как найти собственные значения и собственные векторы матрицы?

Рассмотрим **алгоритм**, по которому нужно решать данную задачу на примере.

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ неизвестный собственный вектор. Тогда **матричное уравнение** $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$ запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

В левой части по обычному правилу проведём **матричное умножение**, в правой части – внесём «лямбду»:

$$\begin{pmatrix} -x-6y \\ 2x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы. Приравниваем соответствующие элементы *векторов-столбцов* и получаем **однородную систему линейных уравнений**:

$$\begin{cases} -x-6y=\lambda x \\ 2x+6y=\lambda y \end{cases}$$

Перенесём всё налево:

$$\begin{cases} -x-6y-\lambda x=0 \\ 2x+6y-\lambda y=0 \end{cases}$$

В первом уравнении за скобки вынесем «икс», во втором уравнении – «игрек»:

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x-6y=0 \\ 2x+(6-\lambda)y=0 \end{cases}$$

По определению, собственный вектор не может быть нулевым $\bar{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, **уравнения линейно зависимы и определитель матрицы системы равен нулю** *(вспоминаем условие коллинеарности двух векторов)*:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Это так называемое **характеристическое уравнение** матрицы A, **корни которого являются собственными числами** данной матрицы.

Сначала найдём собственные значения

Раскроем определитель и решим **квадратное уравнение**:

$$(-1-\lambda)(6-\lambda)-2\cdot(-6)=0$$
$$\lambda^2-5\lambda-6+12=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$
$$D=25-24=1;\ \sqrt{D}=1$$
$$\lambda_1=\frac{5-1}{2}=2$$
$$\lambda_2=\frac{5+1}{2}=3$$

Таким образом, собственные значения: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

Теперь найдём собственные векторы

В данном примере получены различные собственные числа и каждому из них соответствует свой собственный вектор.

1) Рассмотрим собственное число $\lambda_1 = 2$ и подставим значение $\lambda = \lambda_1 = 2$ в **однородную систему уравнений**

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x - 6y = 0 \\ 2x + (6-\lambda)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Для записи системы целесообразно запомнить формальный приём: мысленно либо на черновике подставляем $\lambda = \lambda_1 = 2$ в определитель $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ – это и есть коэффициенты системы.

Из обоих уравнений следует:

$$\begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

Итак, в нашем распоряжении есть выражение $x = -2y$, и координаты собственного вектора $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ определены не однозначно. Стараемся подобрать значение «игрек» так, чтобы первая («иксовая») координата собственного вектора была **целой, положительной и минимальной**.

Пусть $y = -1$, тогда: $x = -2 \cdot (-1) = 2$

Обязательно проверяем, что частное решение $x = 2, y = -1$ удовлетворяет каждому уравнению системы:

$$-3x - 6y = -3 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) = -6 + 6 = 0$$
$$2x + 4y = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$$

Таким образом: $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Найдём второй собственный вектор. Для этого мысленно либо на черновике подставим $\lambda = \lambda_2 = 3$ в определитель $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$ и запишем вторую **однородную систему**:

$$\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует, что $x = -\frac{3}{2}y$.

Положим $y = -2$, тогда: $x = -\frac{3}{2} \cdot (-2) = 3$

В результате, собственный вектор: $\overline{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Повторим важные моменты решения:

– полученная система $\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ непременно имеет общее решение (уравнения линейно зависимы);

– «игрек» подбираем таким образом, чтобы первая «иксовая» координата была целой, положительной и как можно меньше.

– проверяем, что частное решение $x = 3, y = -2$ удовлетворяет каждому уравнению системы.

Ответ: собственные числа: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, собственные векторы: $\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.