Многочлены

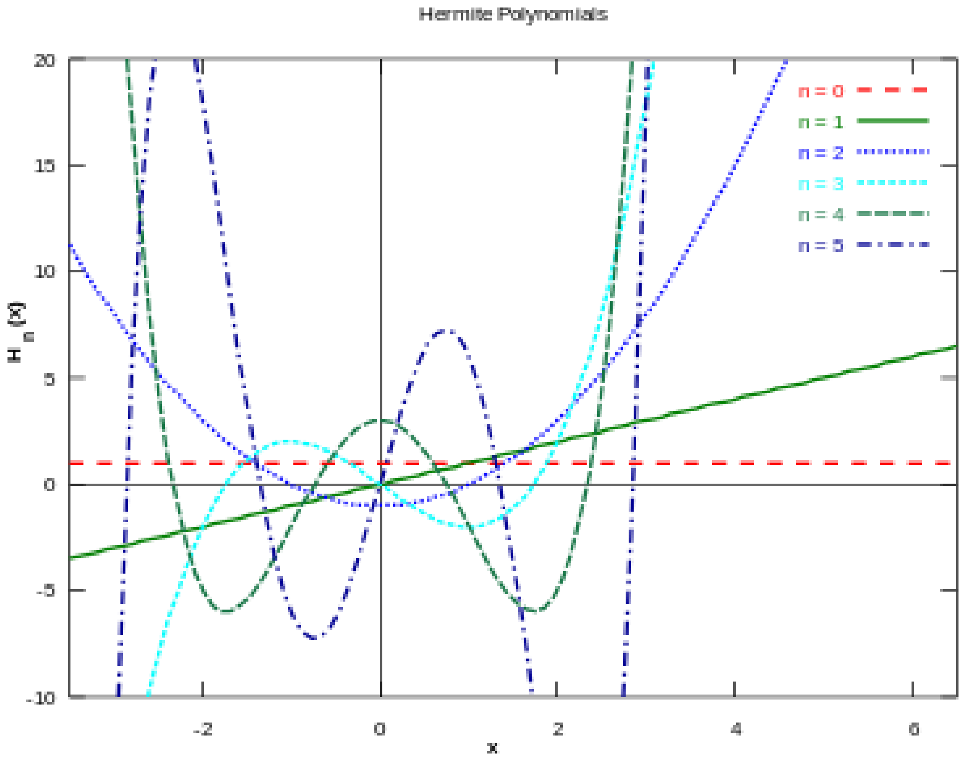
Одночлен и многочлен

- ***Одночлен*** **–** это произведение двух или нескольких сомножителей, каждый из которых либо число, либо буква, либо степень буквы. Например,
- $3a^2b^4$, bd^3, $-17abc$
- - одночлены. Единственное число или единственная буква также могут считаться одночленом. Любой множитель в одночлене называется *коэффициентом*. Часто коэффициентом называют лишь *числовой множитель*. Одночлены называются *подобными*, если они одинаковы или отличаются лишь коэффициентами. Поэтому, если два или несколько одночленов имеют одинаковые буквы или их степени, они также подобны.
- *Степень одночлена* – это сумма показателей степеней всех его букв.
- ***Многочлен*** *- это алгебраическая сумма одночленов. Степень многочлена* есть наибольшая из степеней одночленов, входящих в данный многочлен.
- $3a^2b^4 + 2ab^3 + a^2 + b^4$

Многочлены Эрмита

- Многочлены Эрмита возникают в теории вероятностей, в комбинаторике, физике.
- В теории вероятностей полиномы Эрмита обычно определяются выражением:

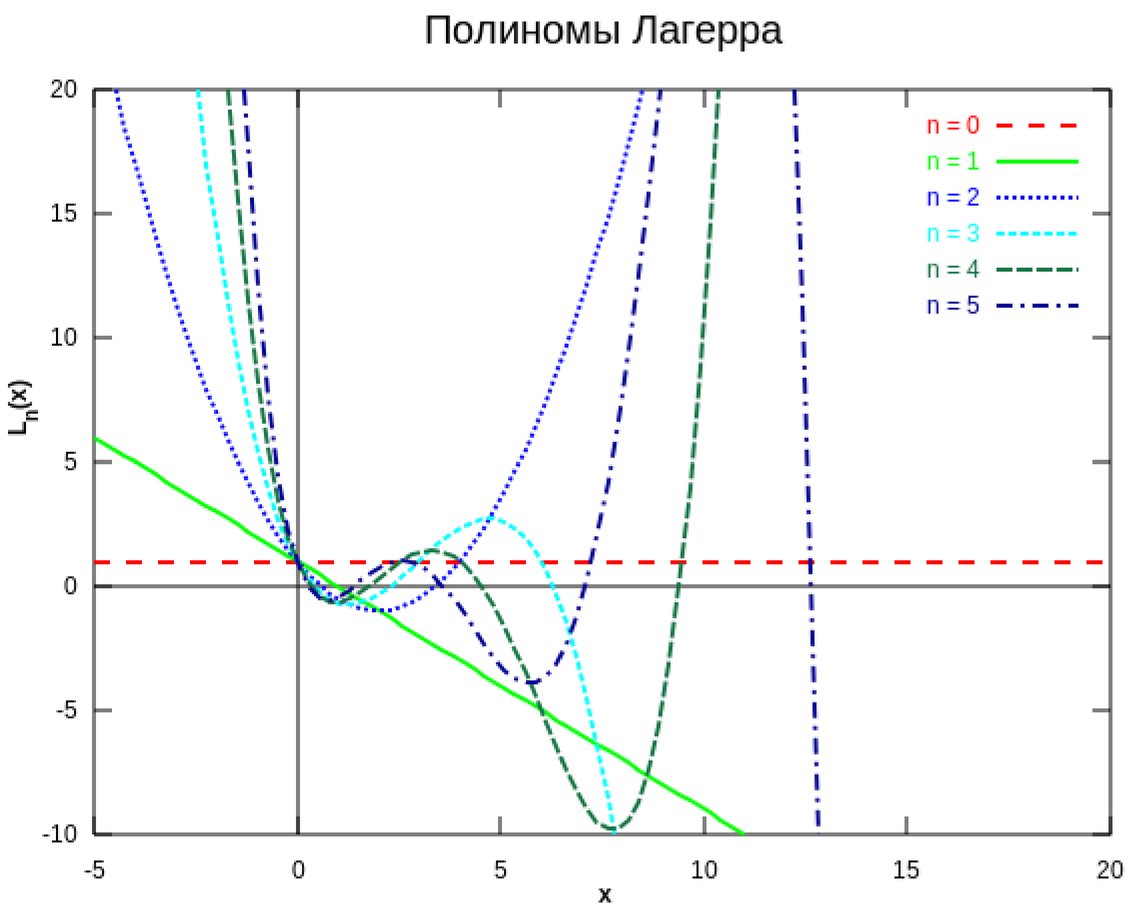
$$H_n^{\mathrm{math}}(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2};$$



Явные выражения для первых одиннадцати (n = 0,1,...,10) многочленов Эрмита приведены ниже (вероятностное определение):

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = x$$
$$H_2(x) = x^2 - 1$$
$$H_3(x) = x^3 - 3x$$
$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$
$$H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$
$$H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$$
$$H_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x$$
$$H_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105$$
$$H_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x$$
$$H_{10}(x) = x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945\,.$$

Многочлены Лагерра



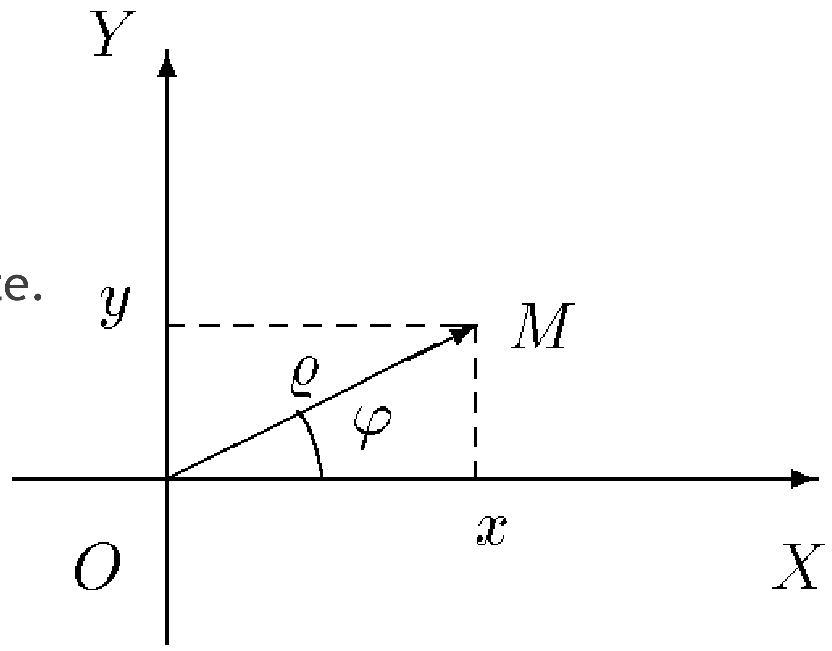
n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x+1$
2	$\frac{1}{2}(x^2-4x+2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720)$

Векторы

Действия с векторами. Координаты вектора. Операции над векторами

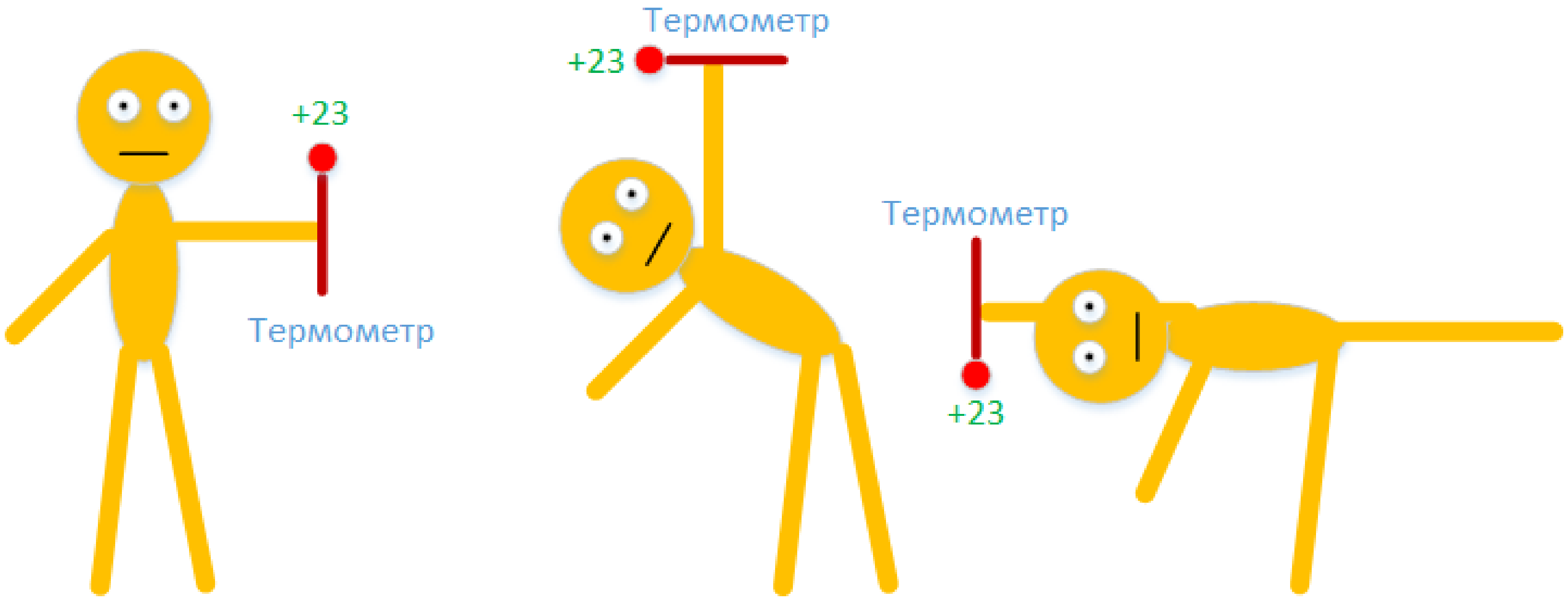
Декартова прямоугольная система координат

- определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке.
- Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси — координатными осями. Первая из координатных осей называется осью абсцисс, а вторая — осью ординат.



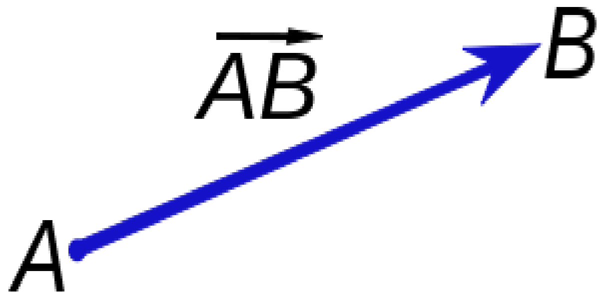
Начало координат обозначается буквой *O*, ось абсцисс — символом *Ox*, ось ординат — символом *Oy*.
Координатами произвольной точки *M* в заданной системе называют числа
$x = OM_x$, $y = OM_y$
где M_x и *My* – проекции точки *M* на оси *Ox* и *Oy*, OM_X обозначает величину отрезка OM_X оси абсцисс, OM_y — величину отрезка OM_y оси ординат.

Два вида величин – скалярная и векторная



Вектор

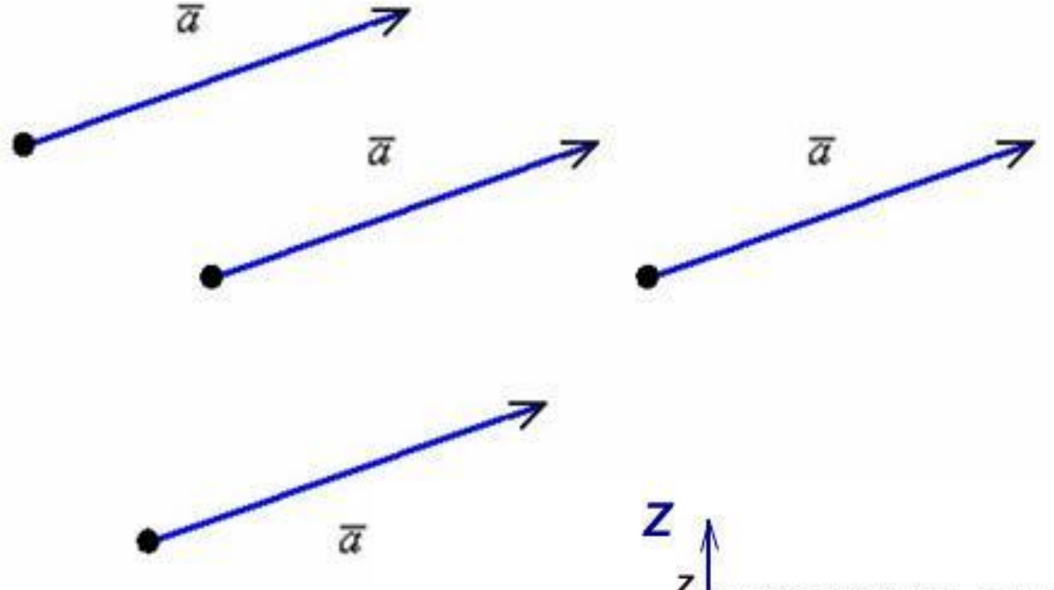
- Векторной величиной называется величина, которая характеризуется числом и направлением в пространстве.
- Каждую векторную величину можно отобразить направленным отрезком – вектором – длина вектора равна числовому значению векторной величины, а направление вектора соответствует направлению этой величины



В играх вектора используются для хранения местоположений, направлений и скоростей.

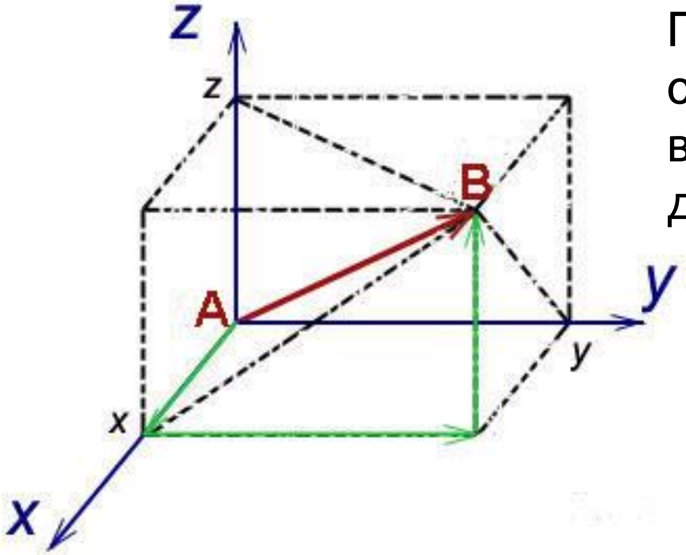
Свободный вектор

- **Свободный вектор** – это **<u>множество</u>** одинаковых направленных отрезков



Вектор - это вид представления точки, до которой требуется добраться из некоторой начальной точки.

Например, трёхмерный вектор, как правило, записывается в виде (*x*, *y*, *z*). Говоря совсем просто, эти числа означают, как далеко требуется пройти в трёх различных направлениях, чтобы добраться до точки.

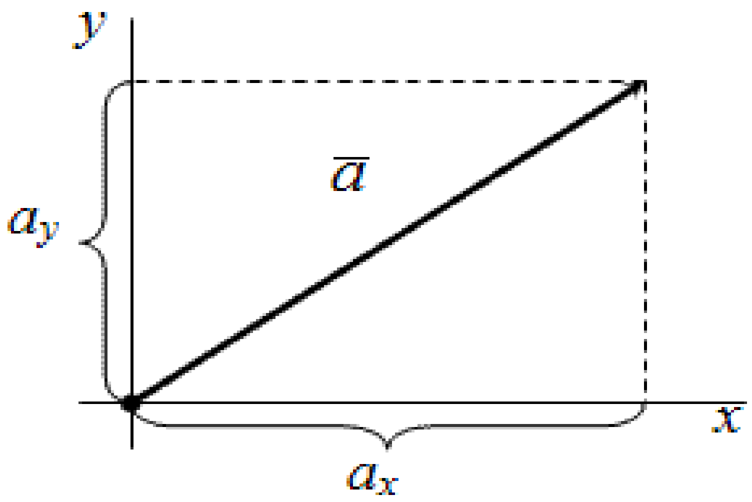


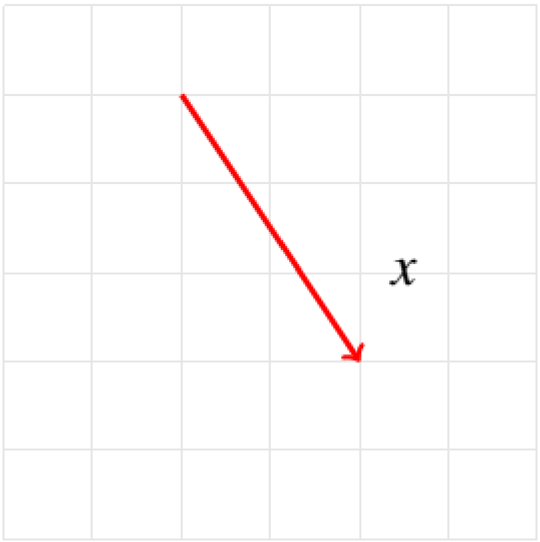
Координаты вектора

Координатами вектора $\bar{a}$ называются проекции a_x и a_y данного вектора на оси Ox и Oy соответственно:

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\,\bar{a}, a_y = \text{Пр}_{Oy}\,\bar{a}$$

Величина a_x называется **абсциссой вектора** $\bar{a}$, а число a_y- его **ординатой**. То, что вектор $\bar{a}$ имеет координаты a_x и a_y, записывается следующим образом: $\bar{a} = (a_x; a_y)$.





(a) $x = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (b) $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

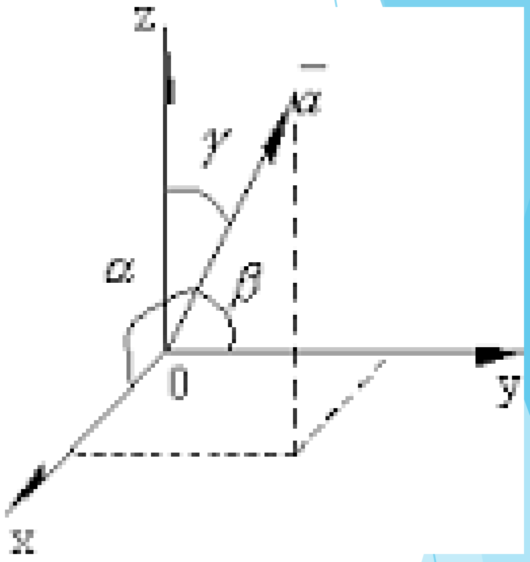
(c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (d) $x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(e) Свой вариант

Проекции вектора

Проекция вектора на направление равна произведению его длины на косинус угла между вектором и положительным направлением оси.

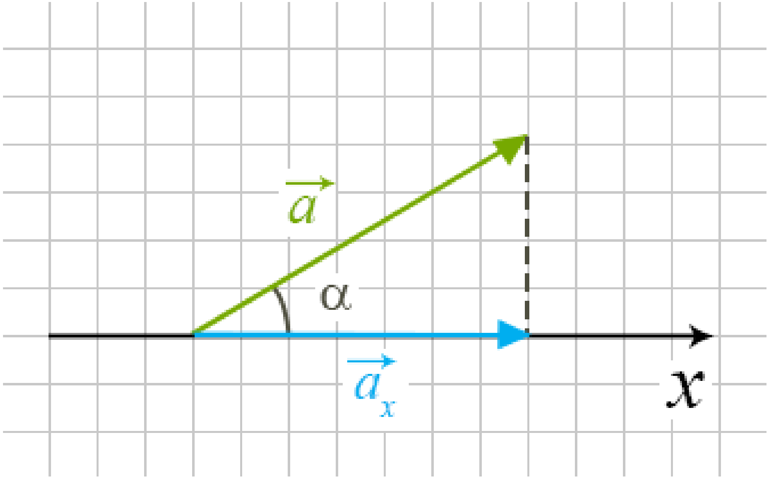
$$пр_u a = |a| \cdot \cos\varphi$$

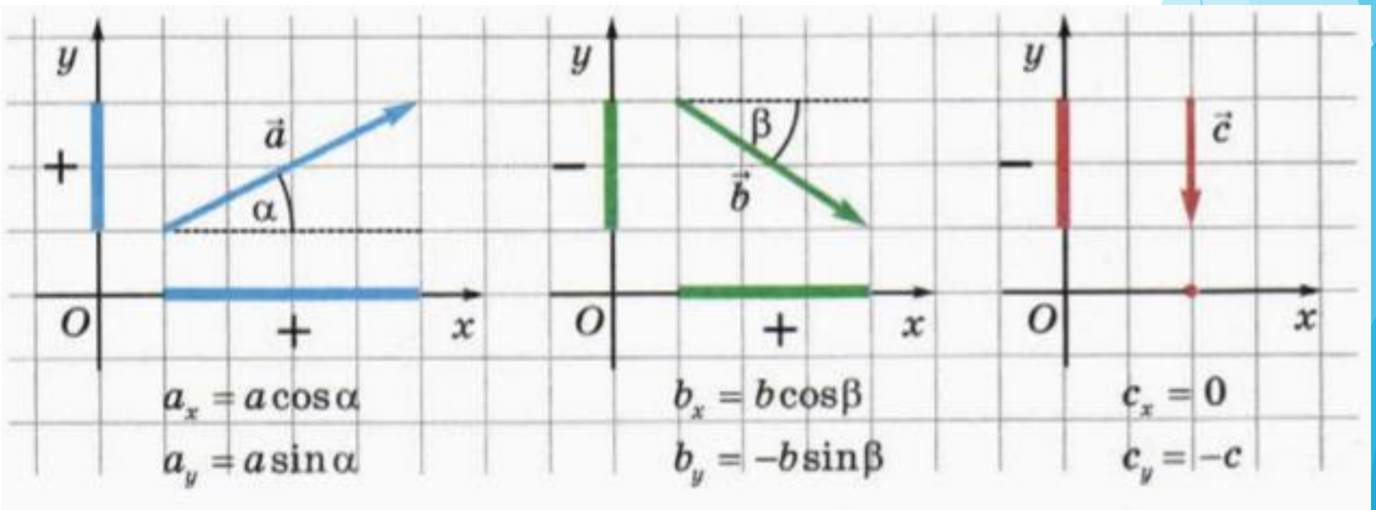


Проекции произвольного вектора ***a*** на оси некоторой заданной системы координат в дальнейшем обозначаются буквами *X, Y, Z*. Равенство

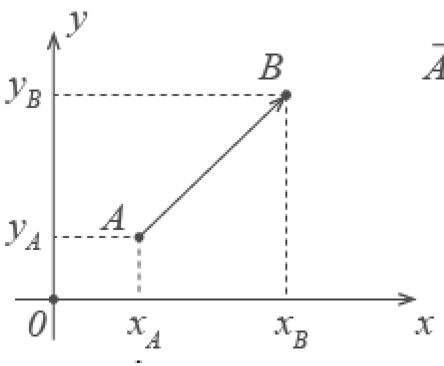
$$a = \{X, Y, Z\}$$

означает, что числа *X, Y, Z* являются проекциями вектора на координатные оси.





Как найти вектор по двум точкам?



$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

Так, если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Пример

Задание. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(-4; 2)$, $B(1; -3)$

Решение. $\overline{AB} = (1 - (-4); -3 - 2) = (5; -5)$

Длина вектора

- Длиной (модулем, абсолютной величиной) вектора **называется расстояние между его началом и его концом.**
- Т.е. длина вектора **АВ - это длина отрезка АВ.**

Если вектор задан своими координатами: $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то его длина находится по формуле:1

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Пример

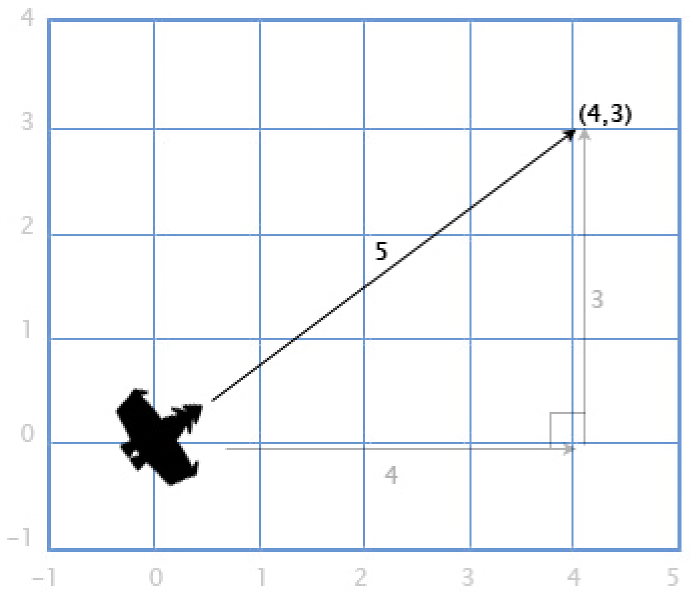
Задание. Найти длину $\bar{a} = (1; 0; -4)$

Решение. Используя формулу, получаем:

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 0 + 16} = \sqrt{17}$$

Где это применить?

- Если у нас есть корабль с вектором скорости V (4, 3), нам также понадобится узнать как быстро он двигается, чтобы посчитать потребность в экранном пространстве или сколько потребуется топлива. Чтобы сделать это, нам понадобится найти длину (модуль) вектора V. Длина вектора обозначается вертикальными линиями, в нашем случае длина вектора V будет обозначаться как |V|.

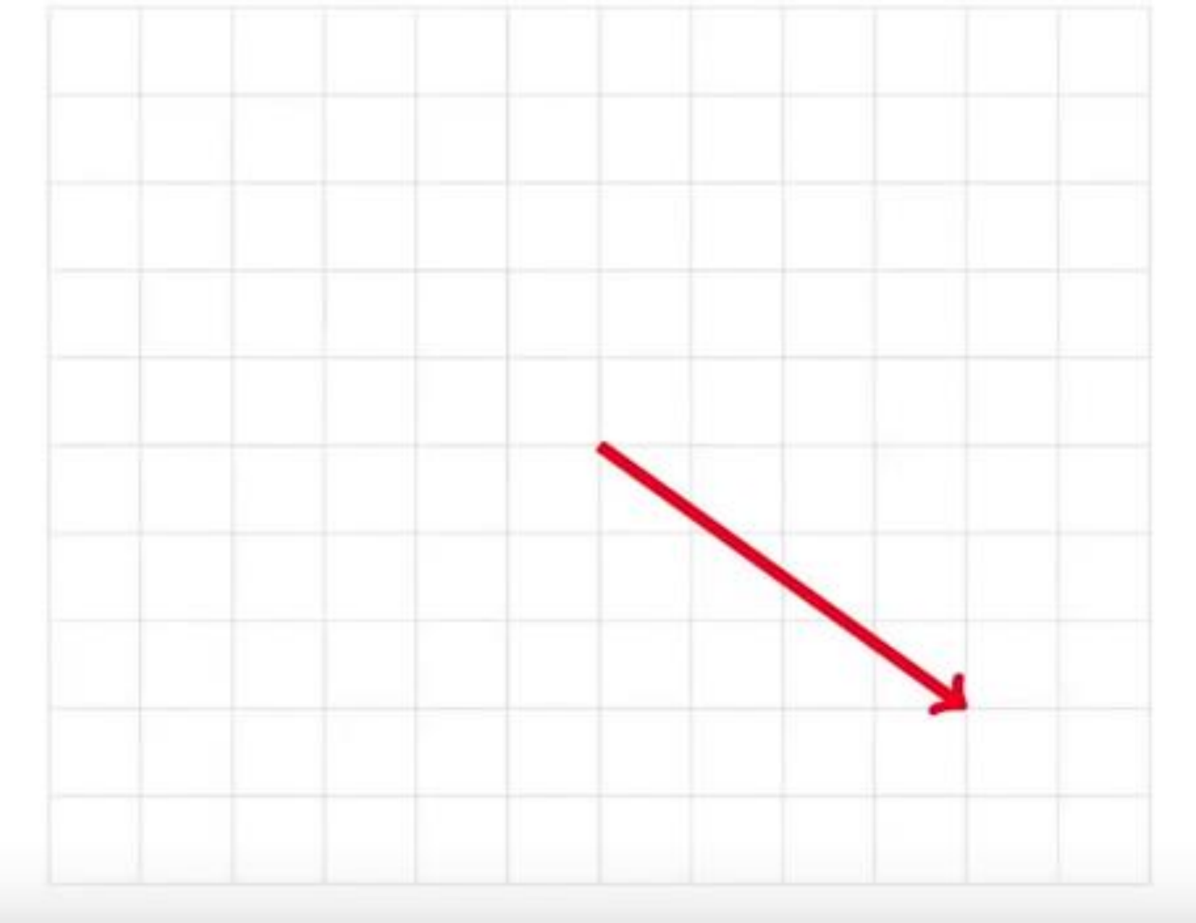


Итак, скорость нашего корабля равна:

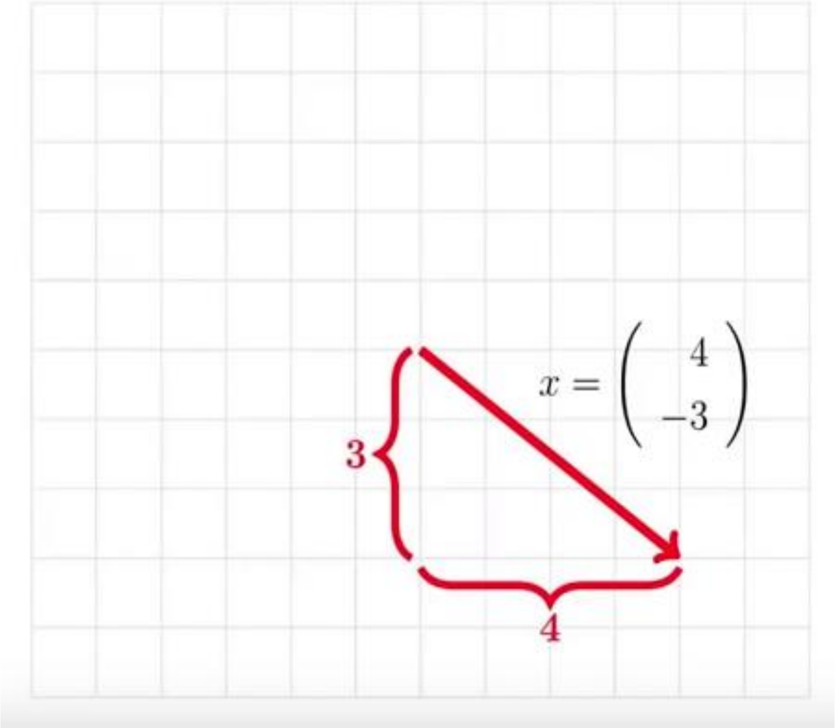
$|V| = \mathrm{sqrt}(4^2 + 3^2) = \mathrm{sqrt}(25) = 5$

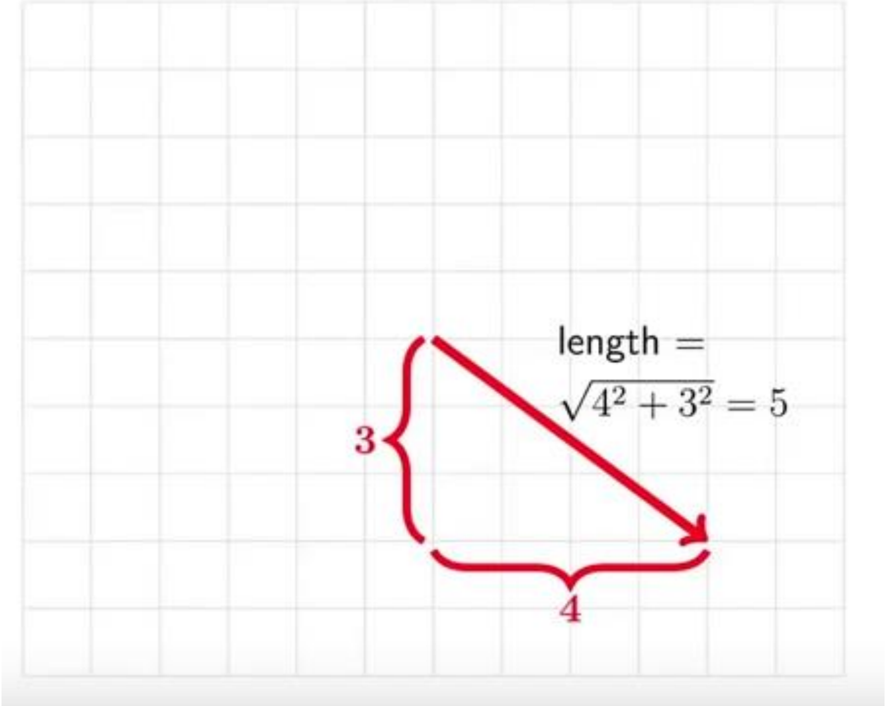
Рассмотрим пример

- Назовите координаты и длину вектора (каждая клеточка – 1 единица)



Вычисление координат вектора и его длины





А если вектор в пространстве?

Задание. Найти длину вектора $\bar{a} = (1; 0; -4)$

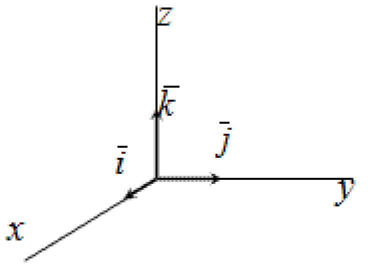
Решение. Используя формулу, получаем:

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 0 + 16} = \sqrt{17}$$

Базисный вектор

- **Система ортов (или базисная система векторов) -** это система единичных векторов осей координат.
- Тройка векторов ***i*, *j*, *k*** называется координатным базисом

Орт координатной оси Ox обозначается через $\bar{i}$, оси Oy- через $\bar{j}$, оси Oz - через $\bar{k}$.



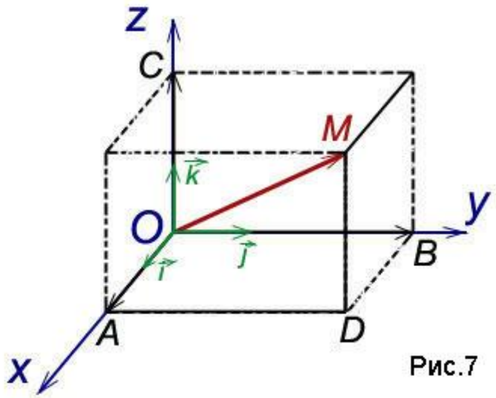
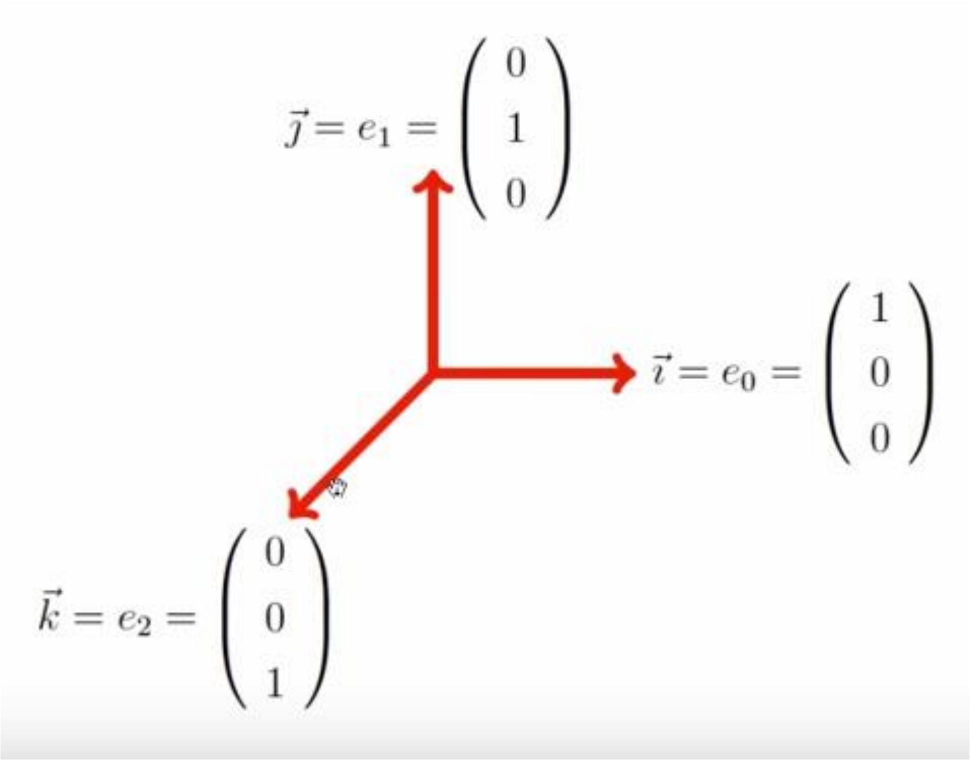


Рис.7

Для любого вектора $\bar{a} = (a_x; a_y)$, который лежит в плоскости xOy, имеет место следующее разложение: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$

Если вектор $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$расположен в пространстве, то разложение по ортам координатных осей имеет вид: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$

Базисные векторы можно представить так …



Примеры

Задание. Зная разложение $\bar{a}$ по базисной системе векторов: $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{k}$, записать координаты этого вектора в пространстве.

Решение. Коэффициенты при ортах и есть координатами вектора, поэтому из того, что $\bar{a} = 3\bar{i} - 0 \cdot \bar{j} - \bar{k}$, получаем, что $\bar{a} = (3; 0; -1)$

Задание. Вектор $\bar{a}$ задан своими координатами: $\bar{a} = (2; -1; 5)$. Записать разложение данного вектора по ортам осей координат.

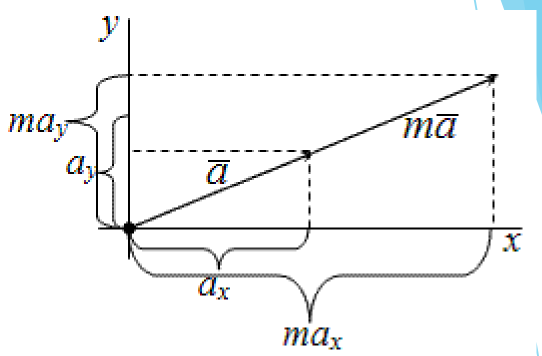
Решение. Координаты вектора - это коэффициенты при ортах координатных осей в разложении вектора по базисной системе, поэтому искомое разложение:

$$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$$

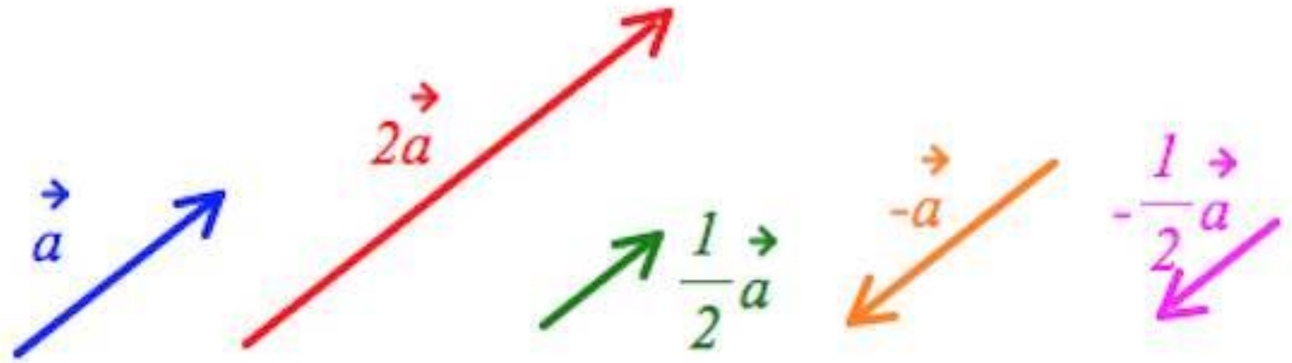
Линейные операции над геометрическими векторами

- Умножение на число
- Сложение векторов
- Вычитание векторов
- Умножение векторов (скалярное, векторное, смешанное произведения векторов)

Умножение вектора на число

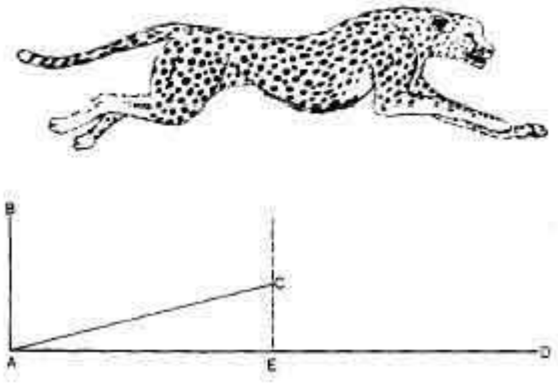


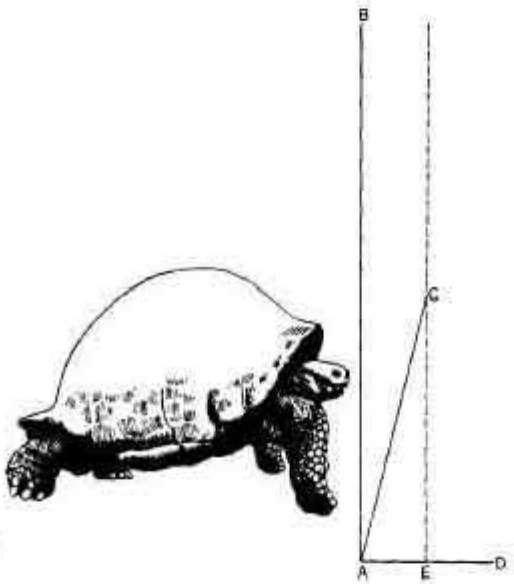
Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda| > 1$) или сжатием (при $|\lambda| < 1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$.



Где это может пригодится?

- Моделируя простое сопротивление воздуха путём умножения скорости игрока на 0.9 в каждом кадре. Чтобы сделать это, надо умножить каждый компонент вектора на число 0,9.
- Если скорость игрока (10, 20), то новая скорость будет:
  - $0.9 \cdot (10, 20) = (0.9 \cdot 10, 0.9 \cdot 20) = (9, 18)$.

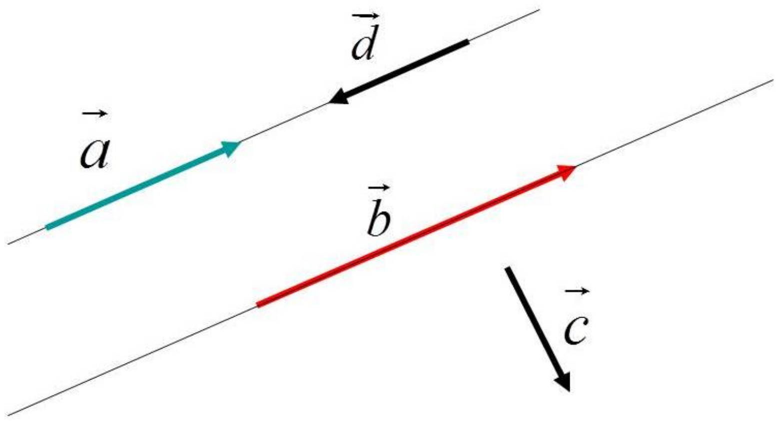




Коллинеарность векторов

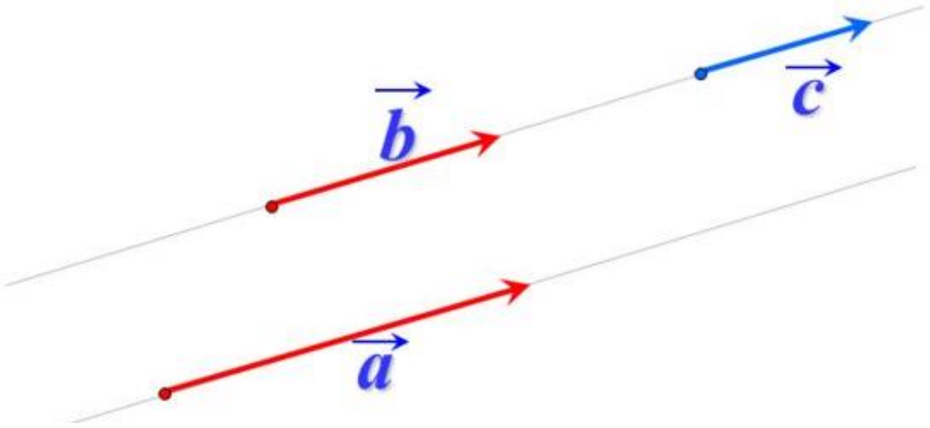
Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны отношением

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$



$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{d}$ $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ $\vec{d}\uparrow\downarrow\vec{b}$

Свойства отношений сонаправленности и противонаправленности



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

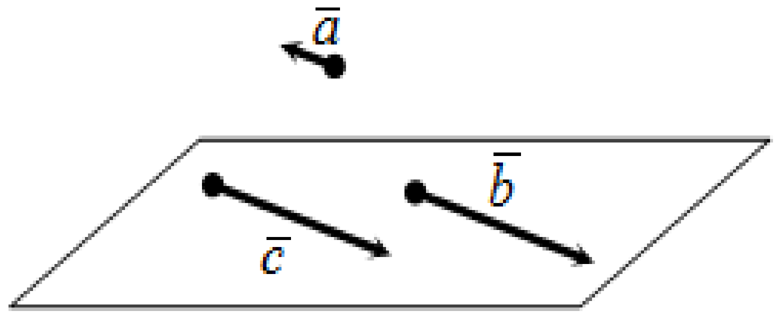
$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$

1. Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$;
2. Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$;
3. Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$;
4. Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$.

Компланарные и ортогональные векторы

- Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.



- Векторы, лежащие на перпендикулярных прямых, называются **ортогональными**.

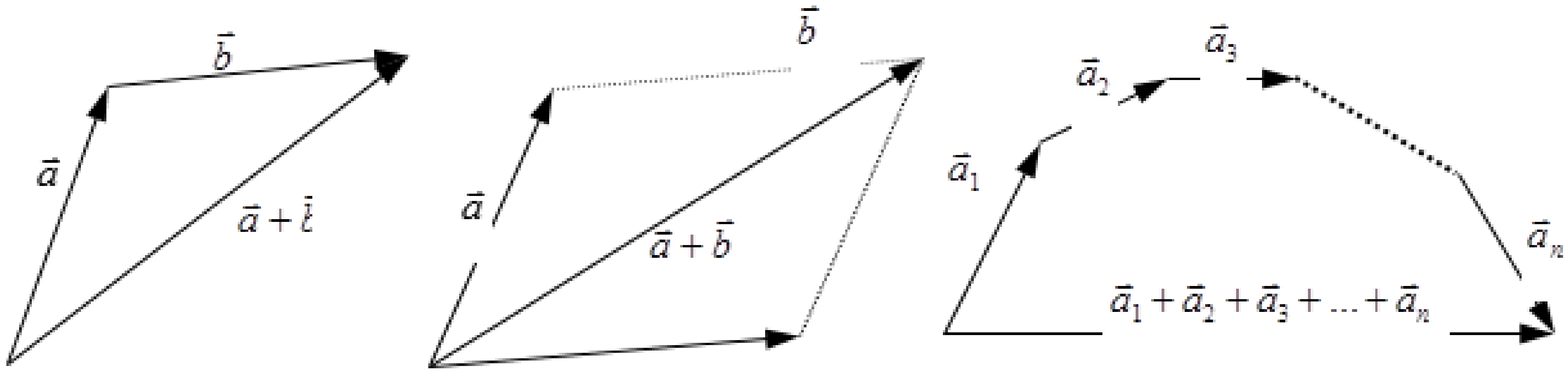
Сложение векторов

а) **Правило треугольника**

Вектор $\vec{b}$ прикладывается к концу вектора $\vec{a}$. Тогда сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}$ будет вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$.

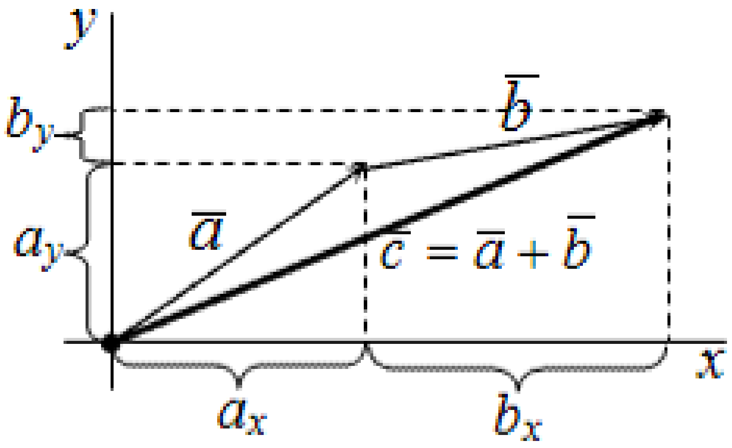
б) **Правило параллелограмма**

Строим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм. Тогда суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}$ будет диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



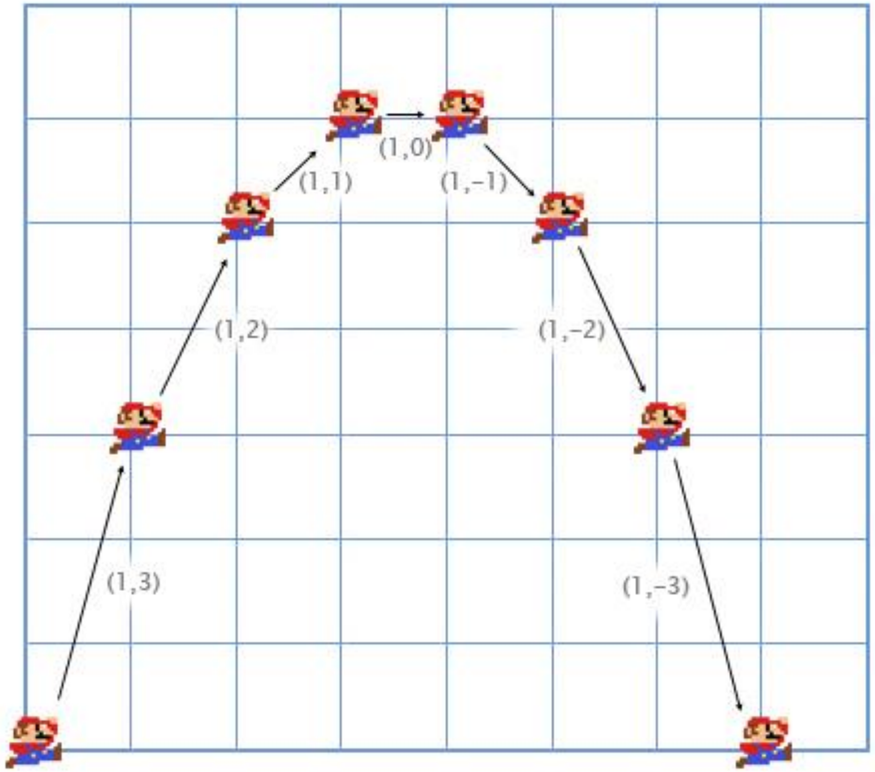
Как рассчитать сумму векторов

Если заданы $\bar{a} = (a_x; a_y)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y)$, тогда вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ имеет координаты $(a_x + b_x; a_y + b_y)$.



Зачем нужно складывать векторы?

сложение векторов в играх применяется для физического интегрирования.



Для первого кадра добавляем скорость Марио (1, 3) к его местоположению (0, 0) и получаем его новые координаты (1, 3).

Затем мы складываем ускорение (0, -1) с его скоростью (1, 3) и получаем новое значение скорости Марио (1, 2).

Делаем тоже самое для второго кадра. Добавляем скорость (1, 2) к местоположению (1, 3) и получаем координаты (2, 5).

Затем добавляем ускорение (0, -1) к его скорости (1, 2) и получаем новую скорость (1, 1).

Свойства операции сложения векторов

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \qquad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \vec{a}, \vec{b}$ (коммутативность);

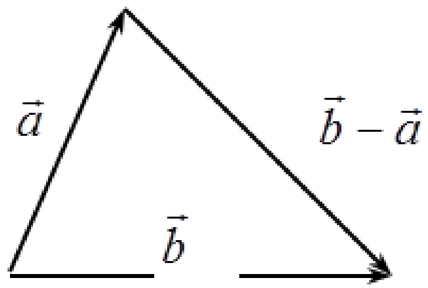
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность);

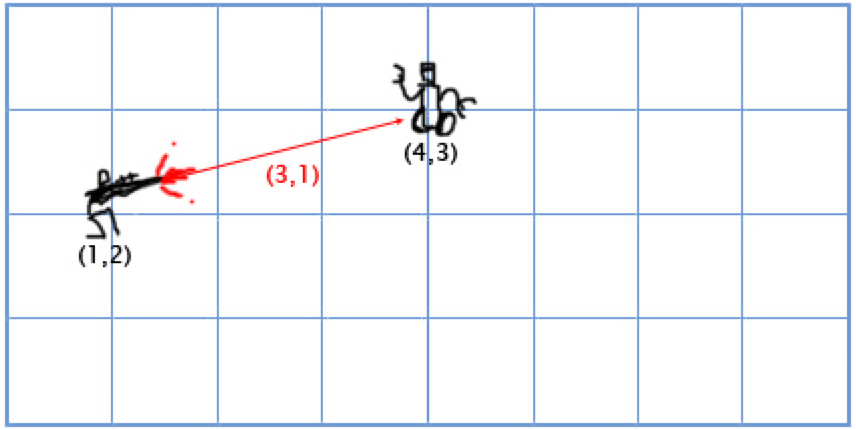
3. $\forall \vec{a} \in V \qquad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4. $\forall \vec{a} \in V \ \exists(-\vec{a}) \quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Разность векторов

Разностью $\vec{b}-\vec{a}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем вектор $\vec{c}$, для которого $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$.





Очевидно, что $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$.

Скалярное произведение векторов

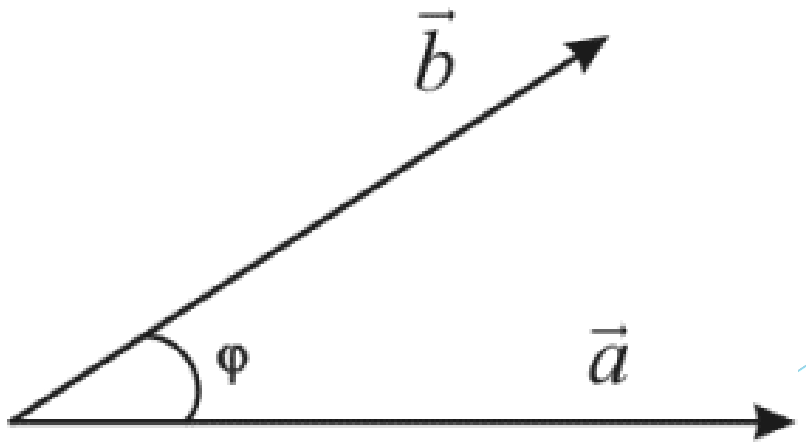
Скалярным произведением векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ называется число $(\bar{a}, \bar{b})$, равное сумме произведений соответствующих координат:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Свойства скалярного произведения

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$
2. $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$
3. $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$
4. $(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$
5. $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$
6. $(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$



Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов:

- *два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

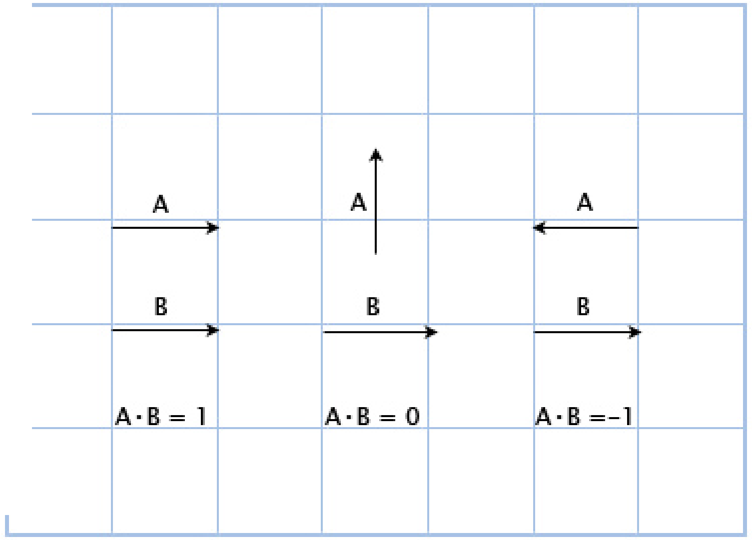
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})$$

Косинус угла – мера сонаправленности векторов

$$cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

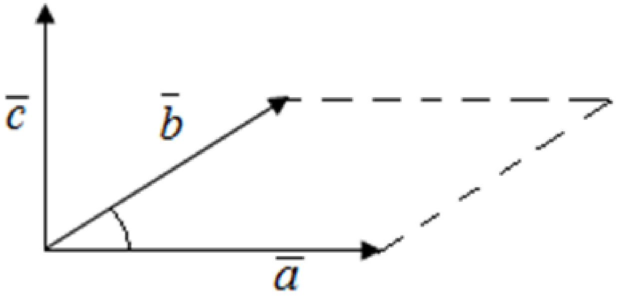
Для параллельных векторов: $cos(\vec{a},\vec{b})=1$.

Для перпендикулярных векторов: $cos(\vec{a},\vec{b})=0$.



Векторное произведение

Векторным произведением **ненулевых векторов** $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **называется вектор** $\bar{c}$**, обозначаемый символом** $[\bar{a}, \bar{b}]$ **или** $\bar{a} \times \bar{b}$**, длина которого** $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a} \hat{,} \bar{b})$



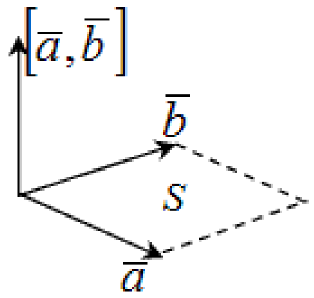
Свойства векторного произведения:

1° $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$, тогда и только тогда, когда $\bar{a} || \bar{b}$

2° $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$

3° Модуль векторного произведения $|[\bar{a}, \bar{b}]|$ равен площади параллелограмма, построенного на заданных векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е.

$$S = |[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a} \hat{,} \bar{b})$$



4° $[\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a}, \bar{b}]$

5° $[\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}] = [\bar{a}_1, \bar{b}] + [\bar{a}_2, \bar{b}]$; $[\bar{a}, \bar{b}_1 + \bar{b}_2] = [\bar{a}, \bar{b}_1] + [\bar{a}, \bar{b}_2]$

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то векторное произведение находится по формуле:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример

Задание. Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = (6;7;10)$ и $\bar{b} = (8;5;9)$

Решение. Составляем определитель и вычисляем его:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(7 \cdot 9 - 5 \cdot 10) - \bar{j}(6 \cdot 9 - 8 \cdot 10) + \bar{k}(6 \cdot 5 - 8 \cdot 7) =$$

$$= 13\bar{i} + 26\bar{j} - 26\bar{k} = (13;26;-26)$$

Задание Найти скалярное и векторное произведение векторов $\bar{a} = (1, -3, 5)$ и $\bar{b} = (1, 2, 0)$

Решение Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 0 = -5$$

Векторное произведение векторов, заданных своими координатами равно

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}$$

т.е. $[\bar{a}, \bar{b}] = (-10, 5, 5)$.

Ответ $(\bar{a}, \bar{b}) = -5, \ [\bar{a}, \bar{b}] = (-10, 5, 5)$

Рекомендации к прочтению

- **Линейная алгебра для разработчиков игр -** https://habrahabr.ru/post/131931/
- **Векторы для чайников. Действия с векторами. Координаты вектора. Простейшие задачи с векторами**
- http://mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html

Матрицы

Действия с матрицами. Операции над матрицами

Что такое матрица?

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, где $i = 1, 2, \ldots, m$ – номер строки, $j = 1, 2, \ldots, n$ – номер столбца, таких, на пересечении которых расположены числа a_{ij},

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

3	8	47
20	5	79
3	53	0
6	22	1

Строка

3	8	47
20	5	79
3	53	0
6	22	1

Столбец

3	8	47
20	5	79
3	53	0
6	22	1

У каждого числа свое местоположение, и перетасовывать их нельзя!

Когда говорят о размерах матрицы, то **сначала** указывают количество строк, а только потом – количество столбцов.

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица размера (2×3).

Если $m = n$, матрица называется ***квадратной*** порядка n.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка.

Главная и *побочная диагональ* матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побочная диагональ   главная диагональ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

› Главная диагональ — a_{ii}

Частные случаи квадратных матриц

а) ***треугольная матрица*** – выше или ниже главной диагонали все элементы равны нулю.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

б) ***диагональная матрица*** – выше и ниже главной диагонали – нули, на главной диагонали произвольные числа.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Единичная матрица

в) ***<u>единичная матрица</u>*** – диагональная матрица, на главной диагонали которой – единицы.

Пример

$\mathrm{E} = (1)$ – единичная матрица первого порядка.

$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка.

$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Таким образом $\mathrm{E} = (a_{ij}),\ a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$

Это матрица - строка

$$\begin{pmatrix} 4 & 53 & 47 \end{pmatrix}$$

Это матрица - столбец

$$\begin{pmatrix} 62 \\ 2 \\ 10 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Это квадратная матрица третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 67 \\ 2 & 34 & 7 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

симметричная матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 6 & 3 & -9 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ -4 & -9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Это диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Это единичная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Это нулевая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

антисимметричная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -9 \\ -5 & -3 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Действия с матрицами

- 1. Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу)
- 2. Умножение матрицы на число
- 3 Транспонирование
- 4. Операция сложения матриц
- 5. Умножение матриц.

1. Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу)

Минус можно вынести за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак

$$E = -\begin{pmatrix} -4 & 13 & -6 \\ -17 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -13 & 6 \\ 17 & -5 & -7 \\ 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число

Всё просто, для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы **умножить на данное число**.

$$\boxed{C = kA} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij} = k \cdot a_{ij}}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 14 & -8 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,285714285 & 0 \\ -2 & 1,142857143 \\ 1,428571429 & 0,428571428 \end{pmatrix}$$

3 Транспонирование

Транспонирование -это преобразование матрицы А в матрицу A^T, при котором строки матрицы А записываются в столбцы A^T с сохранением порядка.

Другими словами: столбцы матрицы А записываются в строки матрицы A^T с сохранением порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Примеры

Транспонировать матрицу $D = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -12 & 0 & 34 \end{pmatrix}$

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -12 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица.

Можно сказать, что транспонирование – это поворот матрицы вокруг главной диагонали

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Свойства транспонирования*:

$(A^T)^T = A$ (транспонируй матрицу два раза - получишь такую же матрицу)

$(xA)^T = xA^T$ (если надо матрицу умножить на число и транспонировать, можно сначала умножить, затем транспонировать, или наоборот)

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

4. Операция сложения матриц

Результатом ***сложения матриц*** A и B называется матрица C, элементы которой являются суммой соответствующих элементов исходных матриц.

$$\boxed{C = A + B} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+(-4) & -1+(-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12-4 & -1-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

НЕ ВСЕ МАТРИЦЫ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ.

НЕ ВСЕ МАТРИЦЫ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ. Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были ОДИНАКОВЫМИ ПО РАЗМЕРУ.

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Вычитание матриц

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов.**

$$A-H=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\ -5 & -7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-4) & 5-3 & -17-(-15)\\ -1-(-5) & 0-(-7) & 10-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+4 & 5-3 & -17+15\\ -1+5 & 0+7 & 10-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

Свойства операции сложения

Рассмотрим матрицы $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ – размера $(m\times n)$.

1°. $A+B=B+A$ (коммутативность сложения).

2°. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность сложения).

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}+\left(-1\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$$

5. Умножение матриц

Пусть $A=(a_{ij})$ размера $(m\times p)$, $B=(b_{ij})$ – $(p\times n)$,
тогда их произведением называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $(m\times n)$:

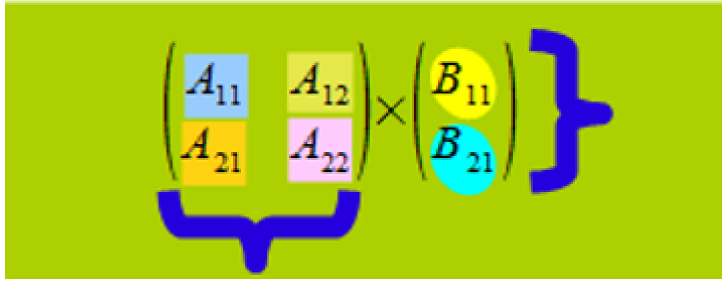
$$\boxed{C=AB} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}.$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}, \qquad c_{ij}=\sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}.$$

$$A\cdot w=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}w_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}w_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}w_i \end{pmatrix}$$

Правило умножения матриц:

1. Перемножать можно лишь матрицы согласованных размеров (число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В).



2. Размер матрицы С равен произведению числа строк матрицы А на число столбцов матрицы В, т.е. $(m \times n)$.

3. Чтобы получить элемент матрицы произведения c_{ij}, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца следует перемножить соответствующие элементы i-й строки матрицы А и j-го столбца матрицы В и найти сумму полученных произведений.

1) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} + A_{13} \cdot B_{31} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{23} \cdot B_{31} \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} & A_{11} \cdot B_{12} & A_{11} \cdot B_{13} \\ A_{21} \cdot B_{11} & A_{21} \cdot B_{12} & A_{21} \cdot B_{13} \\ A_{31} \cdot B_{11} & A_{31} \cdot B_{12} & A_{31} \cdot B_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot2 \\ 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot2 \\ 10\cdot1+0\cdot0 & 10\cdot0+0\cdot0 & 10\cdot0+0\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 8\cdot(-3) - 4\cdot 1 \\ 6\cdot 2 + 9\cdot(-3) - 5\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 7\cdot(-3) - 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

RP=?

ВАЖНО!!! При умножении переставлять матрицы нельзя!

Свойства операций умножения матрицы на число и умножения матриц

Свойства операций умножения матрицы на число и умножения матриц

1°. $AB \neq BA$ (коммутативность умножения в общем случае не выполняется).

2°. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность умножения).

3°. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность).

4°. $k(A + B) = kA + kB$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц).

5°. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$.

6°. $(A \cdot B)^{т} = B^{т} \cdot A^{т}$.

7°. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, если A и B – квадратные матрицы.

Свойство коммутативности не выполняется

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix};\ A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются ***перестановочными***.

Примеры перестановочных матриц

а) $A \cdot A = A \cdot A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot \boxed{(-1)} + 2 \cdot \boxed{3} - 5 \cdot \boxed{0} & -1 \cdot \boxed{2} + 2 \cdot \boxed{4} - 5 \cdot \boxed{1} & -1 \cdot \boxed{(-5)} + 2 \cdot \boxed{1} - 5 \cdot \boxed{2} \\ 3 \cdot \boxed{(-1)} + 4 \cdot \boxed{3} + 1 \cdot \boxed{0} & 3 \cdot \boxed{2} + 4 \cdot \boxed{4} + 1 \cdot \boxed{1} & 3 \cdot \boxed{(-5)} + 4 \cdot \boxed{1} + 1 \cdot \boxed{2} \\ 0 \cdot \boxed{(-1)} + 1 \cdot \boxed{3} + 2 \cdot \boxed{0} & 0 \cdot \boxed{2} + 1 \cdot \boxed{4} + 2 \cdot \boxed{1} & 0 \cdot \boxed{(-5)} + 1 \cdot \boxed{1} + 2 \cdot \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 9 & 23 & -9 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

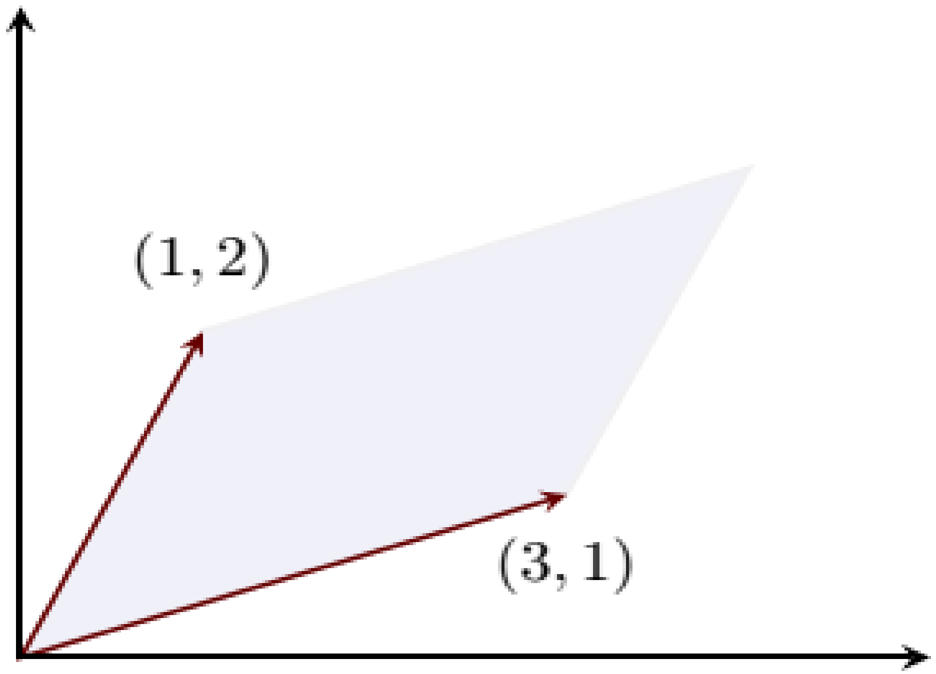
б) $A \cdot E = E \cdot A$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

в) $A \cdot O = O \cdot A$

Определитель матрицы



Рассмотрим два неколлинеарных вектора (векторы не лежащие на одной прямой или на параллельных прямых)

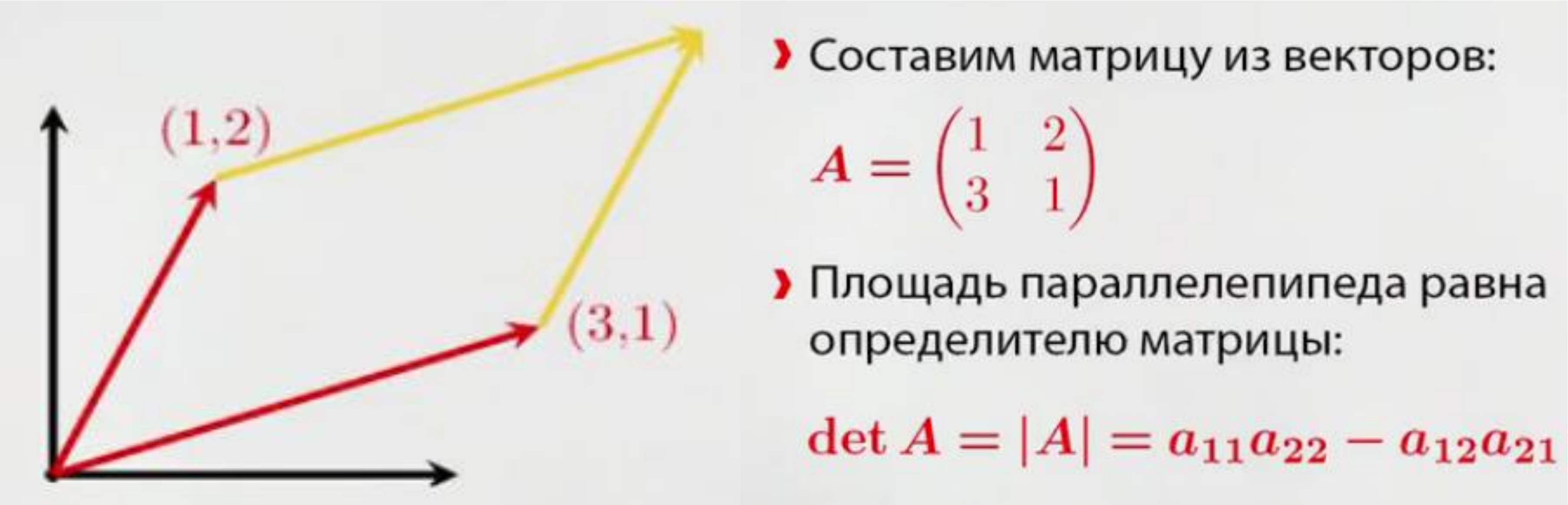
Оказывается, что площадь параллелепипеда равна определителю этой матрицы.

Общее выражение для вычисления определителя 2x2

$$\overline{S}(\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}}) = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} = \Delta(\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}}) = |\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}}|$$

Ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах, как на сторонах, равна определителю, составленному из координат векторов, как из столбцов

Случай с произвольно ориентированными векторами



Можно посчитать, что в нашем случае эта формула даст (−5)

ВАЖНО!!!*Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы.*

Определитель третьего порядка

- ***Определителем третьего порядка***, соответствующим квадратной матрице третьего порядка, называется число

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathrm{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Правило треугольника

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

В выражение определителя со знаком '+' входят произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, расположенных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; со знаком '–' ... (то же про побочную диагональ).

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - 7\cdot5\cdot3 - 4\cdot2\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = 0$$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц

Если $\det A \neq 0$, матрица A называется ***невырожденной***, в противном случае A называется ***вырожденной*** матрицей.

Для всякой невырожденной матрицы существует и единственна обратная матрица

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T},}$$

где $A^{\vee}$ – присоединенная матрица (составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы A: каждый элемент матрицы $A^{\vee}$ является алгебраическим дополнением соответствующего элемента матрицы A).

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} - ?$$

Решение (Последовательность действий удобно разложить по пунктам)

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Важно! В том случае, если определитель матрицы равен **НУЛЮ** – обратной матрицы **НЕ СУЩЕСТВУЕТ**.

$\det A = -2 \neq 0 \;\Rightarrow$ существует единственная A^{-1}.

Пример(продолжение)

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет такие же размеры, как и матрица A, то есть в данном случае

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Как найти его **минор**? МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример(продолжение)

Оставшееся число и является **минором данного элемента**, которое записываем в нашу матрицу миноров:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & \boxed{4}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2\\\boxed{3} & 4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & \boxed{2}\\3 & 4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}4 & *\\ * & *\end{pmatrix} M=\begin{pmatrix}4 & 3\\ * & *\end{pmatrix} M=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & *\end{pmatrix} M=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$M=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

Пример(продолжение)

3. Находим матрицу алгебраических дополнений **.**

В матрице миноров нужно **ПОМЕНЯТЬ ЗНАКИ** у двух чисел:

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$(A^{\vee})^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений

$(A^{\vee})^{T}$ – ?

$$(A^{\vee})^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример(ответ)

5) Ответ.

Вспоминаем нашу формулу $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T}}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Усложняем задачу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Находим определитель матрицы.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-9+8) - 5 \cdot (-18-20) + 7 \cdot (-12-15) = -2 + 190 - 189 = -1$$

Здесь определитель раскрыт **по первой строке**.

Также не забываем, что $|B| = -1 \neq 0$, а значит, всё нормально – **обратная матрица существует**.

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет размерность «три на три»

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$, и нам нужно найти девять чисел.

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4 = -9+8 = -1$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4-6\cdot 7=8-42=-34$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

$$M=\begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.

В матрице миноров необходимо **СМЕНИТЬ ЗНАКИ** строго у следующих элементов:

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$B_* = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$

– матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений $B_{\bullet}^{T}$.

$$B_{\bullet}^{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

– транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_{\bullet}^{T} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

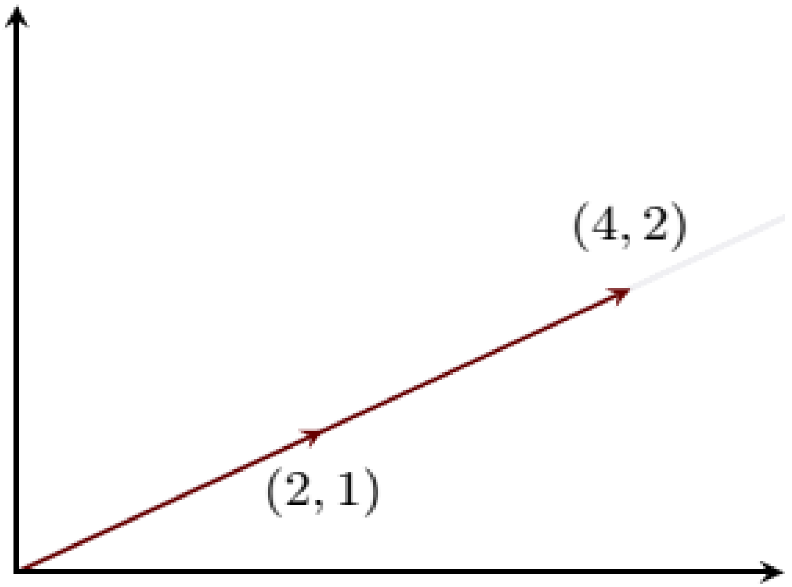
Проверка

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+5\cdot(-38)+7\cdot 27 & 2\cdot(-1)+5\cdot 41+7\cdot(-29) & 2\cdot 1+5\cdot(-34)+7\cdot 24 \\ 6\cdot 1+3\cdot(-38)+4\cdot 27 & 6\cdot(-1)+3\cdot 41+4\cdot(-29) & 6\cdot 1+3\cdot(-34)+4\cdot 24 \\ 5\cdot 1-2\cdot(-38)-3\cdot 27 & 5\cdot(-1)-2\cdot 41-3\cdot(-29) & 5\cdot 1-2\cdot(-34)-3\cdot 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ранг матрицы



- Рассмотрим случай, когда два вектора линейно зависимы, т.е. один вектор можно выразить через второй с помощью умножения на число.

- (4,2) = 2·(2, 1)

Чему равна площадь параллелограмма?? Нулю!!!

Отсюда вытекает важное свойство:

Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда строки (или столбцы) матрицы линейно зависимы.

Ранг матрицы –характеристика количества информации в матрице

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$
- Ранг равен единице

Строки линейно зависимы:
1-я строка - первая умноженная на два;
3-я- первая разделенная на два.
Столбцы тоже линейно зависимы:
2-й столбец - это первый умноженный на два,
3-й совпадает с первым.
Это не случайно.

Всю матрицу можно заменить на одну строку (1 2 1)
и при этом мы не потеряем никакой информации.

Рекомендации к прочтению

- **Статьи для программистов. Матрицы и кватернионы.**
- http://www.rossprogrammproduct.com/translations/Matrix%20and%20Quaternion%20FAQ.htm#Q7

- **Матрица для чайников. Действия с матрицами**
- http://mathprofi.ru/deistviya_s_matricami.html