1 Базовые основы высшей математики

1.1 Основные операции с выражениями

– **От перестановки слагаемых – сумма не меняется**: $5+8=8+5$.
А вот это совершенно разные вещи:

$$4-x$$
$$x-4$$

Переставлять «икс» и «четверку» просто так нельзя.

– **От перестановки множителей – произведение не меняется**: $5\cdot 8=8\cdot 5$.
С делением такой фокус не пройдет, $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$ – это две совершенно разные дроби и перестановка числителя со знаменателем без последствий не обходится.

– **Вспоминаем правила раскрытия скобок**:
$+(-a+b+c-d)=-a+b+c-d$ – здесь знаки у слагаемых не меняются
$-(-a+b+c-d)=a-b-c+d$ – а здесь меняются на противоположные.
И для умножения:

$$a(b-c)=ab-ac$$
$$-a(b-c)=-ab+ac$$

Вспоминаем формулы разложения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=\left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\Rightarrow(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

– **Вспоминаем приведение подобных слагаемых**, Вы должны хорошо понимать следующее действие:

$$5ax+4xy^3-17x^2z-3xy^3-9ax+20x^2z+x^2=-4ax+xy^3+3x^2z+x^2$$

– **Вспоминаем что такое степень**:

$$2^4=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{4\ \text{раза}},\quad 4^2=\underbrace{4\cdot4}_{2\ \text{раза}},\quad 10^{12}=\underbrace{10\cdot10\cdot\ldots\cdot10}_{12\ \text{раз}},\quad y^n=\underbrace{y\cdot y\cdot\ldots\cdot y}_{n\ \text{раз}}.$$

Степень – это всего лишь обычное умножение.

– **Вспоминаем, что дроби можно сокращать**:

$$\frac{9}{27}=\frac{\cancelto{1}{3}\times\cancelto{1}{3}}{\cancelto{1}{3}\times\cancelto{1}{3}\times3}=\frac{1\times1}{1\times1\times3}=\frac{1}{3}$$

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (сократили на 2),

$\frac{35}{40}=\frac{7}{8}$ (сократили на пять),

$\frac{x^3}{x^7}=\frac{1}{x^4}$ (сократили на x^3).

– **Вспоминаем действия с дробями**:

$$\frac{\overbrace{a-3}^{\text{числитель}}}{\underbrace{a+b}_{\text{знаменатель}}}$$

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

$\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{7}{7}=1$

$\frac{3}{7}+1=\frac{3}{7}+\frac{7}{7}=\frac{10}{7}$

$\frac{8}{3}-3=\frac{8}{3}-\frac{9}{3}=-\frac{1}{3}$

$-\frac{7}{2}-\frac{13}{2}=-\frac{20}{2}=-10$

$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{6}{77}$

$\frac{13}{5}\cdot\frac{5}{39}=\frac{13}{39}=\frac{1}{3}$

а также, очень важное правило приведения дробей к общему знаменателю:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$

– **Правило пропорции**:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *(считаем, что* a,b,c,d *отличны от нуля)*

То, что находится внизу одной части – можно переместить наверх другой части.
То, что находится вверху одной части – можно переместить вниз другой части.

$$ad = bc\ ,\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a}\ ,\ a = \frac{bc}{d}\ ,\ b = \frac{ad}{c}\ ,\ c = \frac{ad}{b}\ ,\ d = \frac{bc}{a}$$

СОВЕТ: все ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ вычисления в высшей математике лучше проводить в ОБЫКНОВЕННЫХ ПРАВИЛЬНЫХ И НЕПРАВИЛЬНЫХ ДРОБЯХ, даже если будут получаться страшные дроби вроде $\frac{2371}{547}$. Вот эту вот дробь НЕ НАДО представлять в виде $4\frac{183}{547}$, и, тем более, НЕ НАДО делить на калькуляторе числитель на знаменатель, получая 4,334552102….

ИСКЛЮЧЕНИЕМ из правила является конечный ответ задания, вот тогда как раз лучше записать $4\frac{183}{547}$ или $\approx 4{,}33$.

1.2 Функция от одной переменной

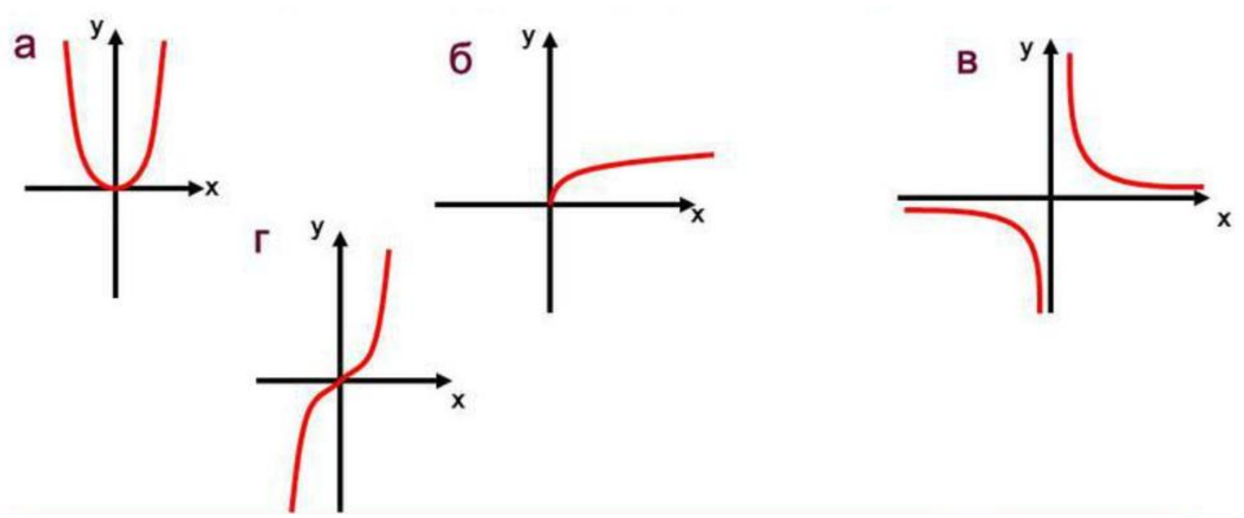
Пусть *x* – числовая переменная величина, *X* – область ее изменения. Если каждому числу x, принадлежащему *X*, поставлено в соответствие некоторое число *y*, то говорят, что на множестве *X* определена функция, и записывают

$$y = f(x).$$

Совокупность *Y* всех частных значений функции называется множеством значений *f(x)*. Другими словами, множество значений – это промежуток по оси *0Y*, где определена функция.

Совокупность всех x называется областью определения f(x).

- ▶ **Функция – зависимость одной переменной от другой, причем для любых значений x соответствует единственное значение функции**
- **X – независимая (аргумент)**
- **У – зависимая (значение функции)**
- **D(y) – область определения функции**
- **E(y) – область значения функции**



Представление о функции, её свойствах и поведении можно получить, построив ее график. Графиком называется геометрическое место точек (x; y) плоскости таких, что y = f (x). Функцию называют непрерывной, если, говоря нестрого, малые изменения её аргумента приводят к малым изменениям её значения. Если это условие нарушается, функция терпит разрыв.

Простыми словами:

Непрерывность — это возможность нарисовать график функции одним росчерком (не отрывая ручку от листа).

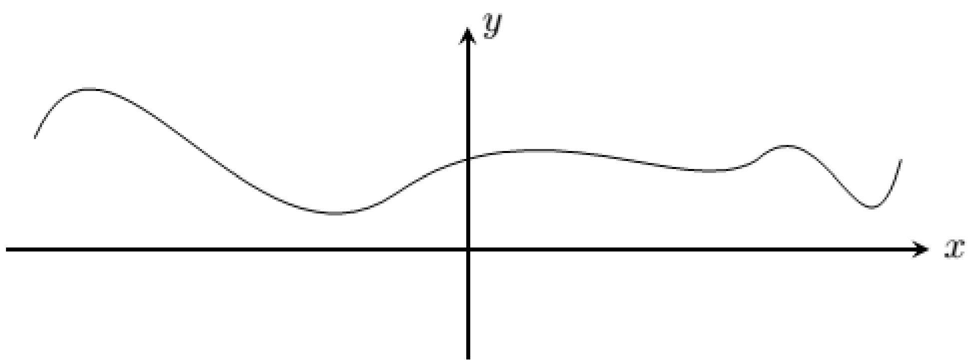


Рис. 1 – График непрерывной функции

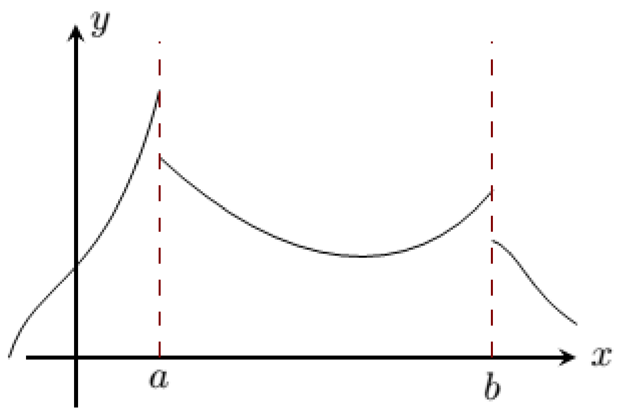


Рис. 2 – Функция с разрывами в точках a и b

Это довольно интересное свойство, которое есть не у всех функций и не во всех точках оно может быть. И разрывы бывают самые разные.

Например, просто может быть так, что одна точка немножко выбивается из наших ожиданий, и если бы мы могли функцию в этой точке поменять и переставить ее в то место, где мы хотели бы, наверное, ее видеть, то функция снова станет непрерывной.

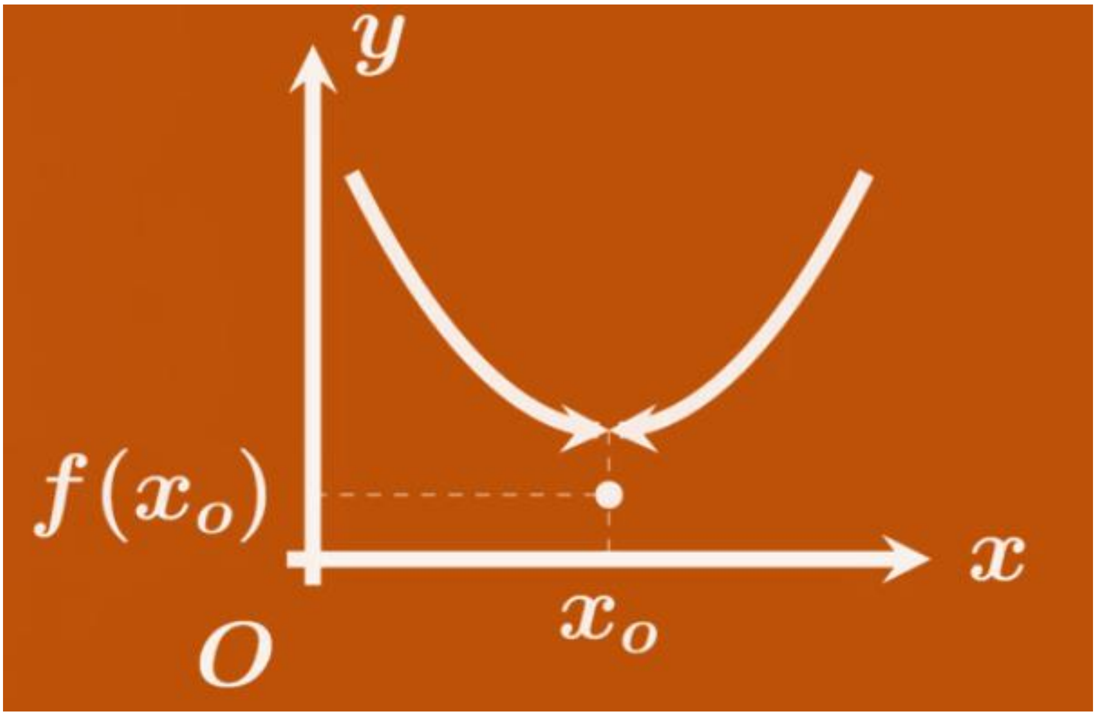


Рис.3

Бывают разрывы, похожие на внезапные скачки значения функции.

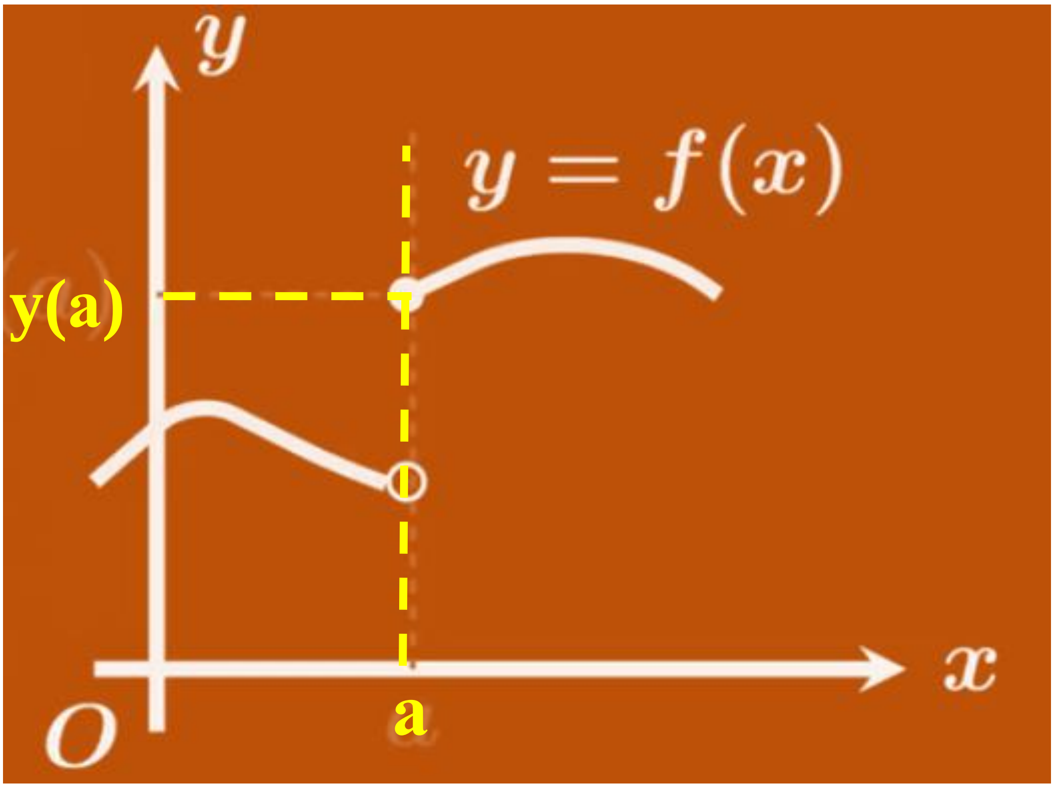


Рис.4

А бывают разрывы, связанные с тем, что у функции есть асимптота. Асимптота — это прямая, к которой функция может приближаться очень близко, но при этом ее не будет пересекать.

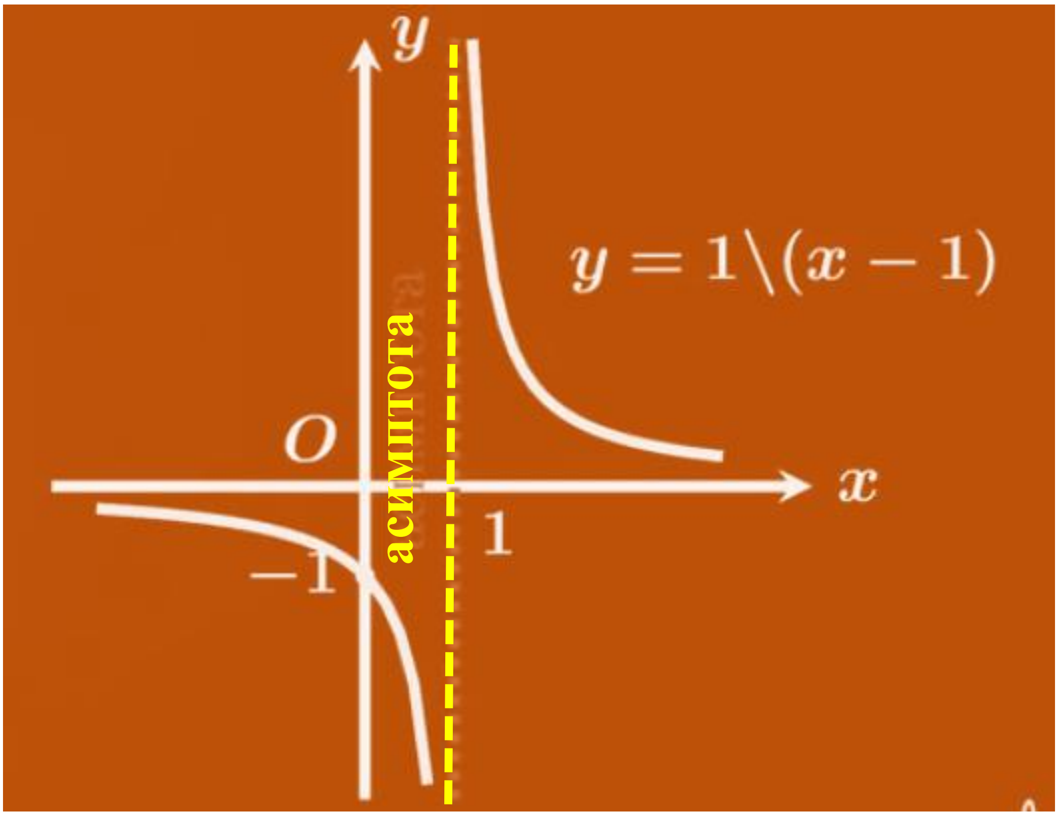
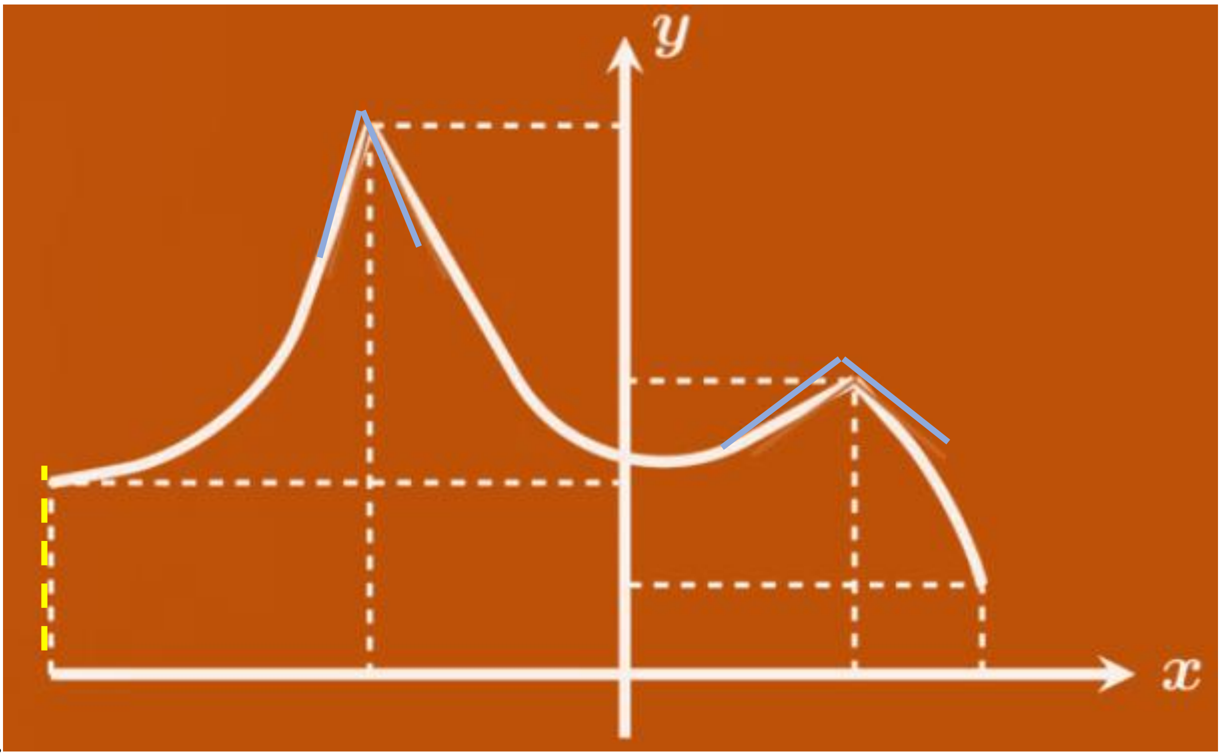


Рис.5

Например, такая прямая будет для функции y = 1 / (x − 1).

У графика функции могут быть не только разрывы, но и какие-то углы. Гладкость функции — это отсутствие углов.



.

Рис.6

В реальной жизни у нас редко встречается ситуация, когда функция гладкая во всех точках.

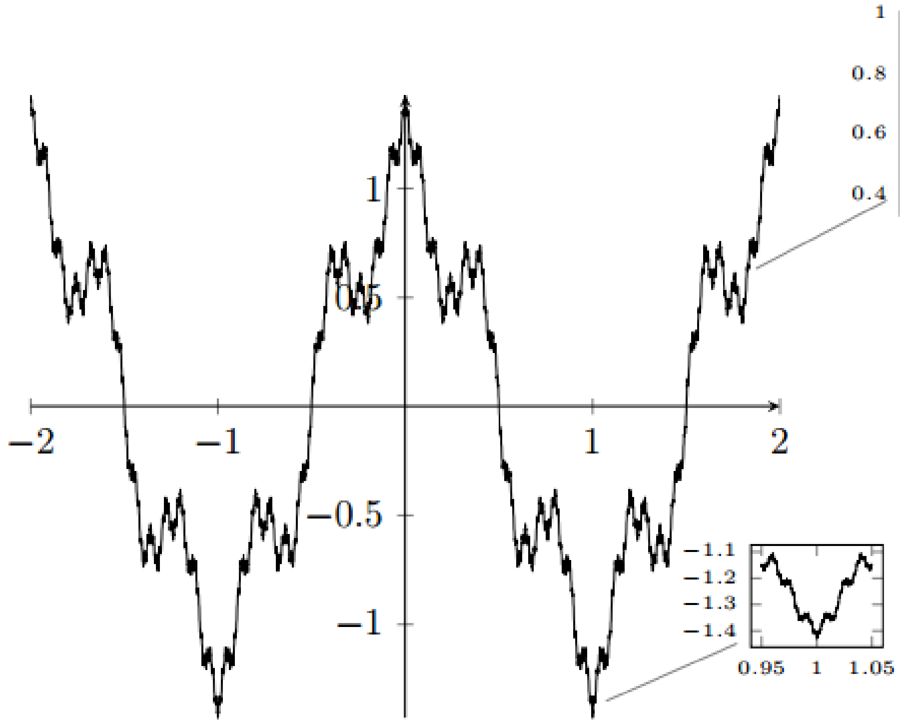


Рис.7

Давайте рассмотрим какую-нибудь функцию. Например

$$f(x)=(1+x)^{1/x}$$

При x = 0 функция не определена. Но можно посмотреть, как она себя ведет при приближении x к 0. Возьмем небольшое значение *x*, например, 0.1, подставим в функцию, вычислим значение функции.

Затем возьмем *x* еще поближе к 0 (например, *x*=0,01), снова вычислим значение функции. Затем еще ближе, и еще. Мы видим, что значение функции приближается к некоторой величине.

x левее нуля	$f(x)=(1+x)^{1/x}$	*x* правее нуля	$f(x)=(1+x)^{1/x}$
-0,1	2,867971991	0,1	2,59374246
-0,01	2,731999026	0,01	2,704813829
-0,001	2,719642216	0,001	2,716923932
-0,0001	2,718417755	0,0001	2,718145927
-0,00001	2,71829542	0,00001	2,718268237

Именно эта величина и будет пределом этой функции при x стремящемся к 0.

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2.7182...$$

Рассмотрим другой пример:

f(x)= 1 / x.

Опять же возьмем небольшое значение x. Например, 0.1. Затем еще меньше. Еще меньше. И еще.

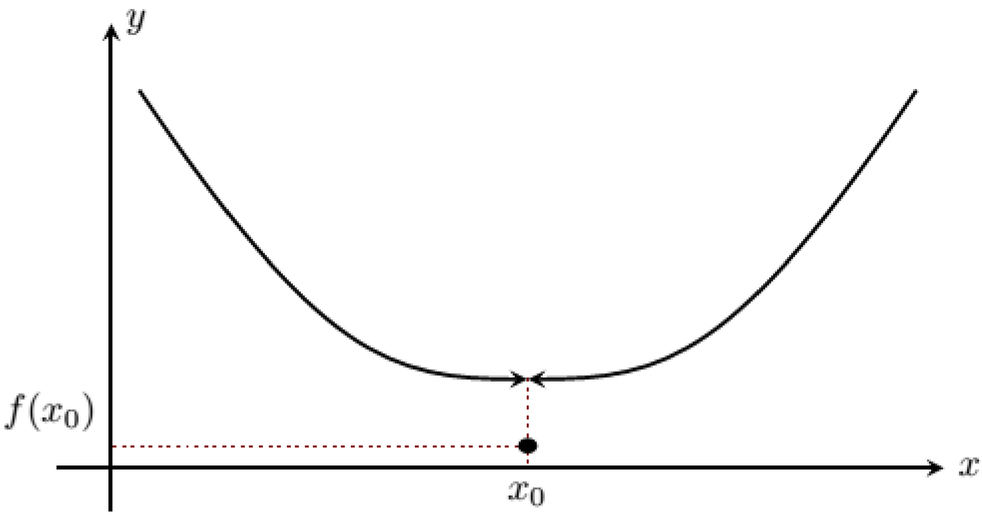
x левее нуля	*f(x)=1/x*	*x* правее нуля	*f(x)=1/x*
-0,1	-10	0,1	10
-0,01	-100	0,01	100
-0,001	-1000	0,001	1000
-0,0001	-10000	0,0001	10000
-0,00001	-100000	0,00001	100000

Видим, что в этом случае функция просто неограниченно растет при приближении к 0. Это означает, что предел *f(x)= 1/x* при *x* стремящемся к 0 равен бесконечности.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

(более детально про пределы можно посмотреть http://mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html)

Понятие предела оказывается неразрывно связанным с понятием непрерывности функции.



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a).$$

Рис.8

С помощью понятия предела определяется другое полезное понятие — понятие производной (скорость роста функции).

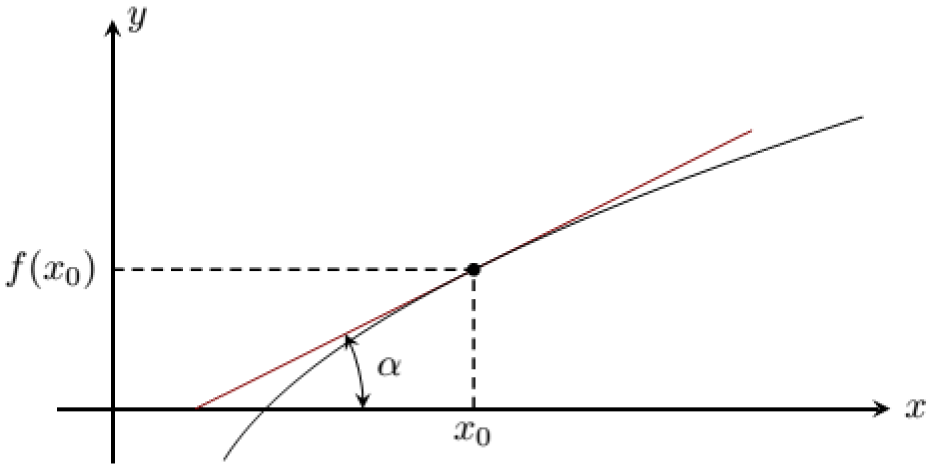


Рис.9

Следом за производной при исследовании функций вводится понятие экстремума и выпуклости функции (глобальные/локальные минимумы и максимумы).

Достаточное условие экстремума Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке x_0 значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

Таким образом, если функция является строго выпуклой или строго вогнутой, необходимое условие экстремума будет для нее также и достаточным.

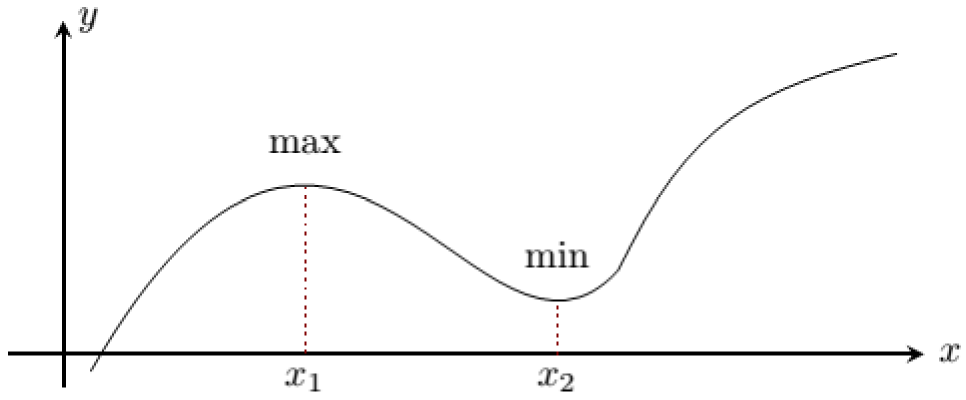


Рис.10

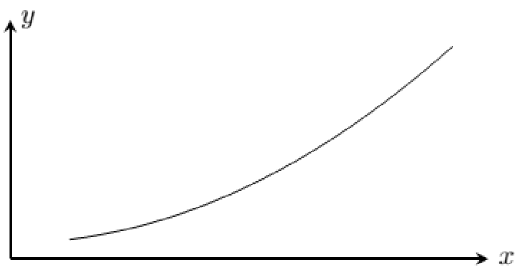


Рис. 11: Выпуклая функция

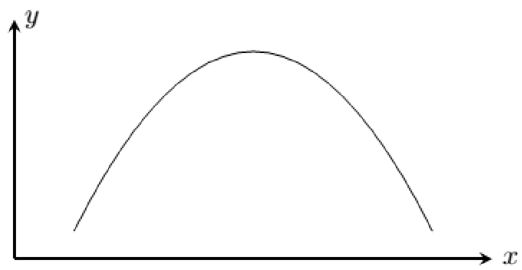


Рис. 12: Вогнутая функция

1. $f'(x) \geq 0$ — функция возрастает,
2. $f'(x) > 0$ — функция строго возрастает,
3. $f'(x) \leq 0$ — функция убывает,
4. $f'(x) < 0$ — функция строго убывает.

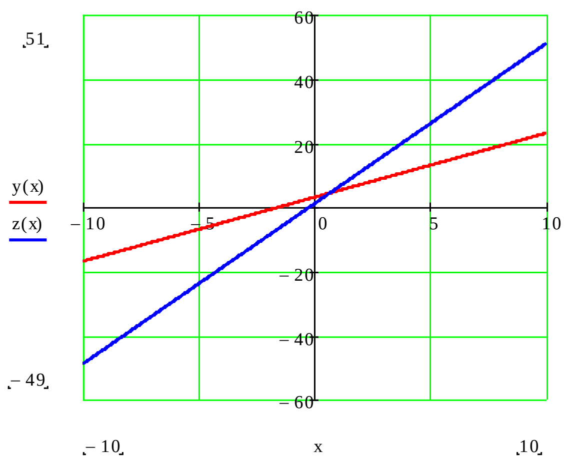
1.3 Приращение функции, относительное приращение, производная

Рассмотрим функцию $y = 2x + 3$. Если $x = 1$, то $y = 5$. Увеличим аргумент x на пять единиц (это увеличение называется приращением аргумента и обозначается Δx).

Новое значение аргумента будет равно $x = 6$, а новое значение функции будет равно $y = 15$. Видно, что с увеличением x на $\Delta x = 5$ функция также выросла на величину $\Delta y = 10$.

Задача 2. Найти приращение функции $y = 5x + 1$, если $x = 3$, а $\Delta x = 2$.

(Ответ: $\Delta y = 10$).



Итак, приращения Δy у двух рассмотренных функций одинаковые. Означает ли это, что обе эти функции растут одинаково быстро? Нет, так как для получения одинакового увеличения y в первом случае мы должны увеличить аргумент x на 5 единиц, а во втором – только на 2. Поэтому важен не абсолютный рост функции, а ее относительный рост.

Показатель относительного роста (скорость роста) характеризуется величиной

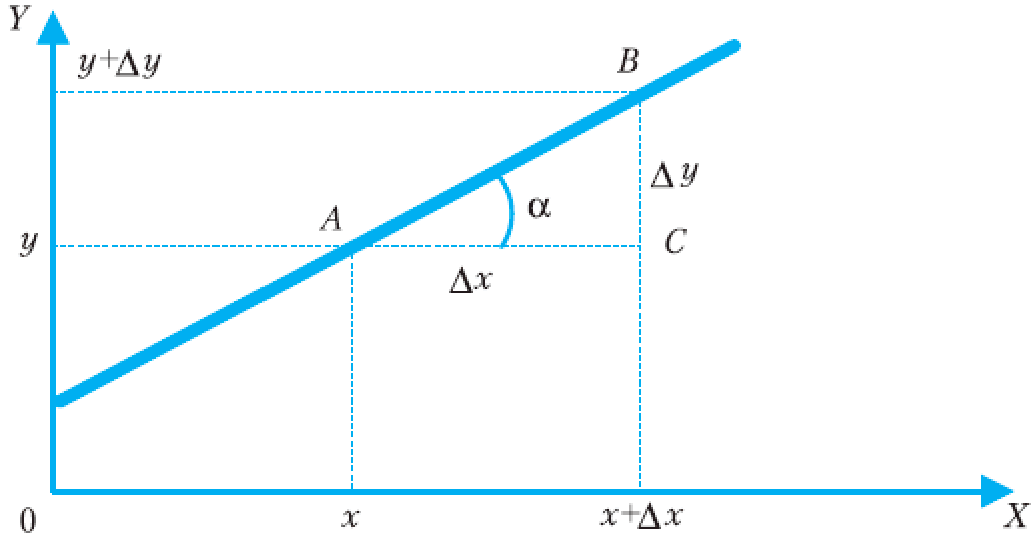
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для первой функции $к = 2$, для второй $к = 5$. Это означает, что вторая функция растет быстрее.

Две рассмотренные функции принадлежат к классу *линейных функций,* общий вид которых задается уже известной нам формулой $y = кx + b$. Графиком линейной функции является прямая.

Рассмотрим геометрический смысл уже введенных понятий «приращение аргумента», «приращение функции» и «показатель относительного роста».

На рис. изображены график линейной функции $y = kx + b$ и две точки на нем – A(x, y) и $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$.



Из треугольника *ABC* видно, что показатель относительного роста равен

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha.$$

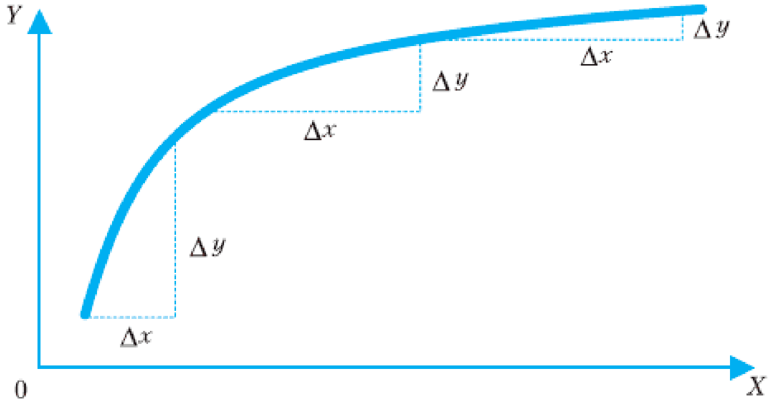
Можно убедиться, что для линейной функции показатель относительного роста (скорость роста) равен коэффициенту при x в уравнении прямой $y = кx + b$, т. е.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Это означает, что скорость роста связана с наклоном прямой. Чем больше угол наклона прямой, тем больше показатель относительного роста *к,* тем больше скорость роста. Так как для линейной функции скорость роста *к* связана с углом, величину *к* называют еще угловым коэффициентом. Знак углового коэффициента указывает на характер изменения функции (плюс – функция возрастает, минус – функция убывает).

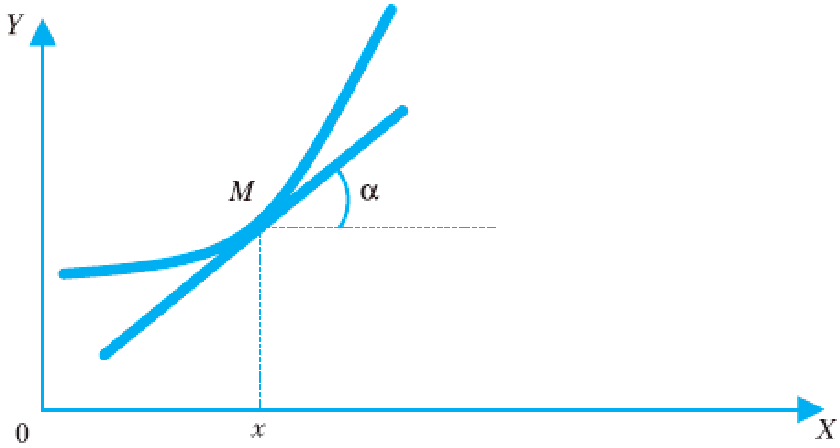
Рассмотрим пример

Рассмотрим функцию, не являющуюся линейной. Графиком такой функции будет кривая линия



Видно, что для таких функций показатель относительного роста $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (скорость роста) будет меняться от точки к точке. В случае, изображенном на рис. 8, видно, что угол наклона уменьшается, и поэтому уменьшается скорость роста.

С целью нахождения показателя относительного роста (скорости роста) данной функции в данной точке M проведем в этой точке касательную к графику функции (рис. 9).



Можно считать, что вблизи точки M кривая и касательная совпадают, т. е. вблизи этой точки графиком функции является прямая линия, а сама функция вблизи данной точки является линейной.

Уже было установлено, что для линейной функции показатель относительного роста функции равен k = tgα. Это и есть скорость роста данной функции в данной точке. Но величина k меняется от точки к точке, так как меняется угол наклона. Следовательно, можно сказать, что показатель относительного роста k (скорость роста) является функцией от x. Эта функция называется *производной* от данной функции у = $f(x)$ и обозначается как $y = f'(x)$.

Итак, производная от данной функции в данной точке – это тангенс угла наклона касательной к оси X, т. е. f'(x) = tgα.

И одновременно производная – это показатель относительного роста (скорость роста) функции в данной точке, т. е. $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δ$x$ и Δy следует принимать очень малыми для того, чтобы находиться вблизи данной точки.

Как найти производную?

Обычно при нахождении производных сначала используются правиладифференцирования, а затем– таблица производных элементарных функций.

Правила дифференцирования:

1) $(Cu)' = Cu'$, где C – постоянное число;

– константу можно вынести за знак производной.

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ – правило дифференцирования суммы

3) $(uv)' = u'v + uv'$ – правило дифференцирования произведения

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ – правило дифференцирования частного

5) $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ – дифференцирование сложной функции

Производные элементарных функций:

$(C)' = 0$, где C – постоянное число;

$(x^n)' = nx^{n-1}$, в частности: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x)' = 1$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

Следует обратить внимание, что производная степенной функции – это самая «ходовая» вещь на практике. Любой радикал (корень), например $\sqrt[3]{x^5}$, $\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$, $\dfrac{1}{x^5}$, $\sqrt{(4x-7)^3}$, нужно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$ для применения формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$

Для того чтобы найти производную функции, нужно по определенным правилам превратить её в другую функцию.

Операция нахождения производной называется <u>дифференцированием</u>.

Обозначения: Производную обозначают y' или $\dfrac{dy}{dx}$.

ВНИМАНИЕ, ВАЖНО! Забыть поставить штрих (там, где надо), либо нарисовать лишний штрих (там, где не надо) – **ГРУБАЯ ОШИБКА!** Функция и её производная – это две разные функции!

Из большой таблицы производных желательно **запомнить наизусть**: правила дифференцирования и производные некоторых элементарных функций, особенно:

- производную константы:

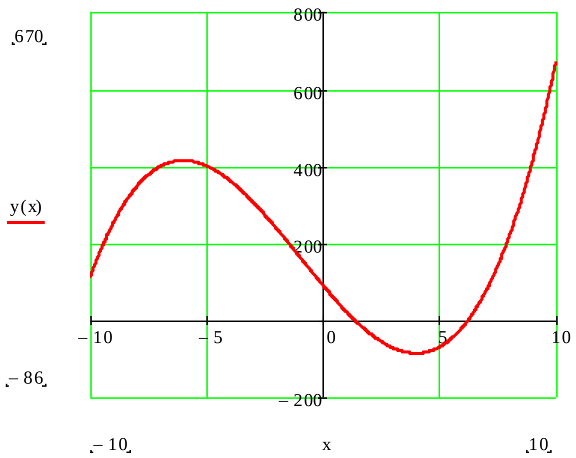
$(C)' = 0$, где C – постоянное число;

-производную степенной функции:

$(x^n)' = nx^{n-1}$, в частности: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x)' = 1$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

<u>Пример 1</u>

Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$



Сначала находим производную:

$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 72x + 90)' = 3x^2 + 6x - 72$

На втором шаге вычислим значение производной в точке $x = 5$:

$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 72 = 75 + 30 - 72 = 33$

Частные производные – это почти то же самое, что и «обычные» производные функции одной переменной.

Для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций. Есть только пара небольших отличий.

В чём смысл частных производных?

По своей сути частные производные 1-го порядка напоминают **«обычную» производную**:

z'_x, z'_y – это функции, которые характеризуют *скорость изменения* функции $z = f(x;y)$ в направлении осей OX и OY соответственно.

Так, например, функция $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ характеризует крутизну «подъёмов» и «склонов» **поверхности** $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$ в направлении оси абсцисс, а функция $z'_y = 6x^2y^2 + 5$ сообщает нам о «рельефе» этой же поверхности в направлении оси ординат.

Элементарные прикладные правила:

1) Когда мы дифференцируем по x, то переменная y считается константой.

2) Когда же дифференцирование осуществляется по y, то константой считается x.

3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной (x, y либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Пример 1

Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

Обозначения:

z'_x или $\frac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»

z'_y или $\frac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»

Начнем с z'_x. **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом).**

Решаем:

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$

$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

1.4 Уравнения

Уравнение имеет приравненную левую и правую часть.

$$x^2 - 7ax + 14b + 18 = y^2 - 3x + 5$$

Можно перенести любое слагаемое в другую часть, сменив у него знак: Перенесем, например, все слагаемые в левую часть:

$$x^2 - 7ax + 14b + 18 - y^2 + 3x - 5 = 0$$

Или в правую:

$$0 = y^2 - 3x + 5 - x^2 + 7ax - 14b - 18$$

Обратите внимание, что части уравнения можно безболезненно поменять местами: $y^2 - 3x + 5 - x^2 + 7ax - 14b - 18 = 0$, равно, как и произвольно переставить слагаемые в пределах ОДНОЙ части.

Различают *алгебраические, параметрические, трансцендентные, функциональные, дифференциальные* и другие виды уравнений. К уравнениям, для которых известны *аналитические решения*, относятся алгебраические уравнения не выше четвёртой степени: *линейное, квадратное, кубическое уравнения и уравнение четвёртой степени*. Алгебраические уравнения высших степеней в общем случае аналитического решения не имеют, хотя некоторые из них можно свести к уравнениям низших степеней.

- Линейное уравнение
  - от одной переменной: $ax + b = 0, \quad a \neq 0.$
  - от нескольких переменных: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0.$
- Квадратное уравнение
  - от одной переменной: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$
- Кубическое уравнение
  - от одной переменной: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0.$
- Уравнение четвёртой степени
  - от одной переменной: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0.$

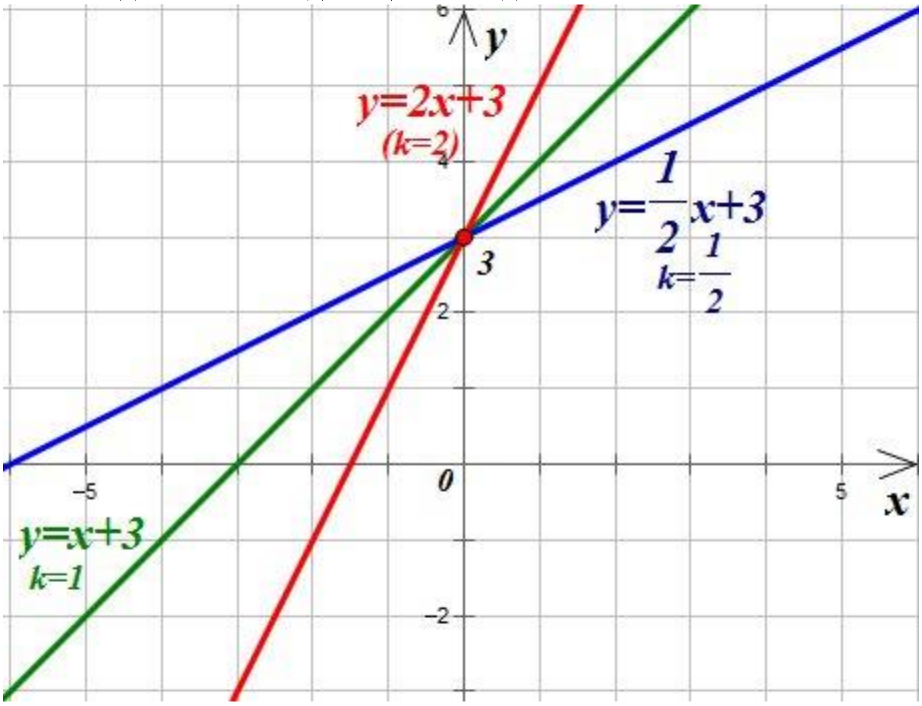
Решение уравнения — задача по нахождению таких значений аргументов *x*, при которых это равенство достигается.

В уравнении функции $y = kx + b$ коэффициент k отвечает за наклон графика функции:

- если $k > 0$, то график наклонен вправо
- если $k < 0$, то график наклонен влево

Коэффициент b отвечает за сдвиг графика вдоль оси OY:

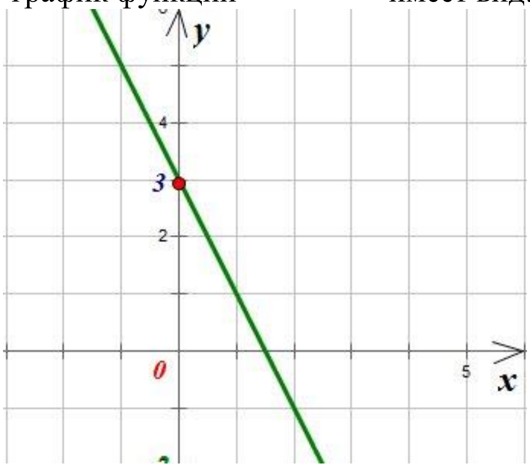
- если $b > 0$, то график функции $y = kx + b$ получается из графика функции $y = kx$ сдвигом на b единиц вверх вдоль оси OY
- если $b < 0$, то график функции $y = kx + b$ получается из графика функции $y = kx$ сдвигом на b единиц вниз вдоль оси OY



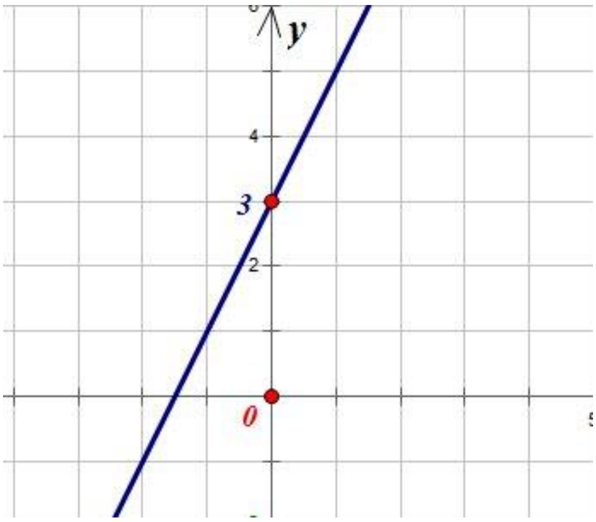
На рисунке ниже изображены графики функций $y = 2x + 3$; $y = \frac{1}{2}x + 3$ $y = x + 3$

Если мы знаем знаки коэффициентов k и b, то можем сразу представить, как выглядит график функции $y = kx + b$.

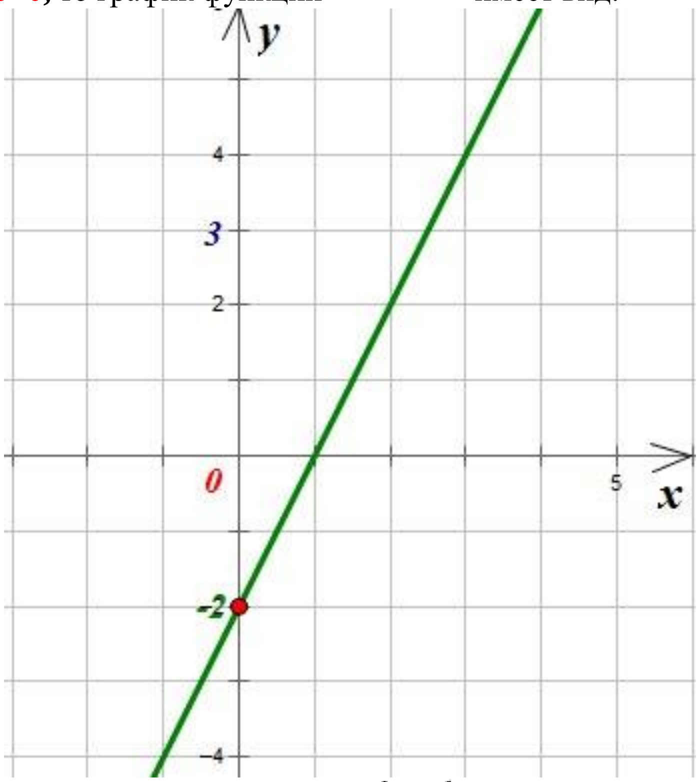
Если **k<0 и b>0**, то график функции $y = kx + b$ имеет вид:



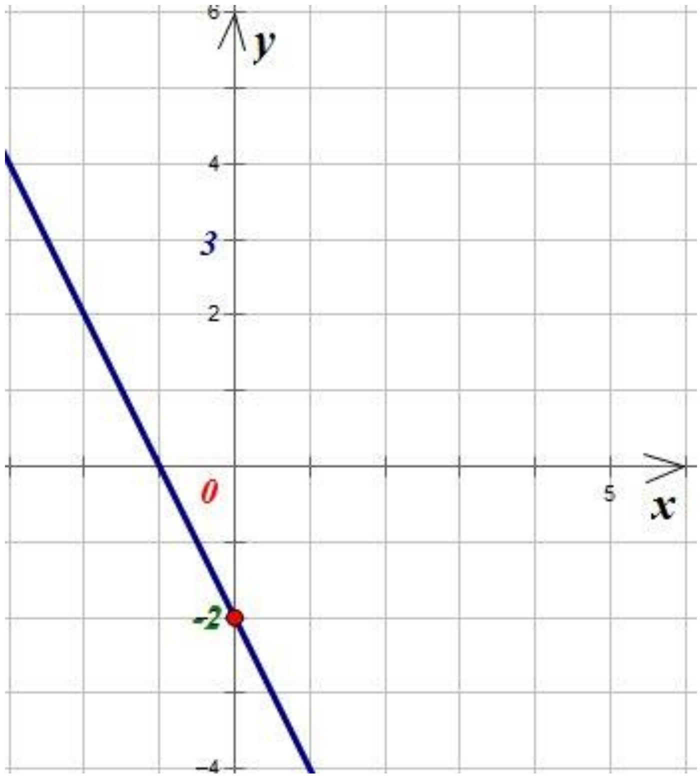
Если **k>0 и b>0**, то график функции $y = kx + b$ имеет вид:



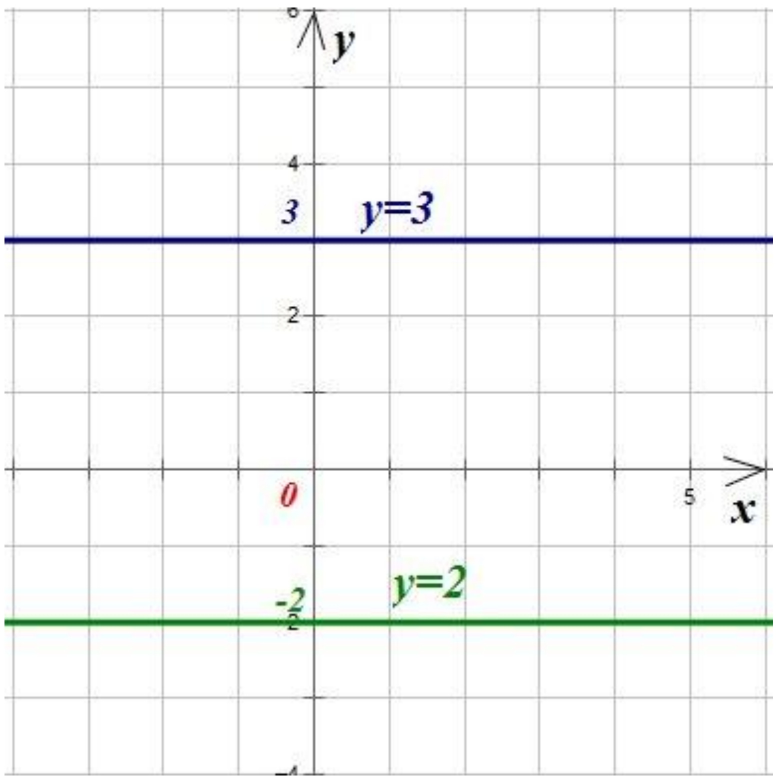
Если **k>0 и b<0**, то график функции $y = kx + b$ имеет вид:



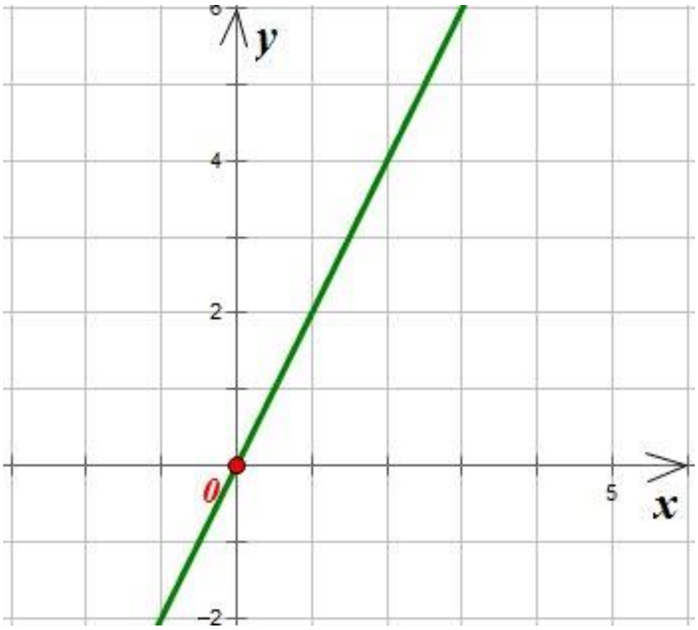
Если **k<0 и b<0**, то график функции $y = kx + b$ имеет вид:



Если **k=0 ,** то функция $y = kx + b$ превращается в функцию $y = b$ и ее график имеет вид:



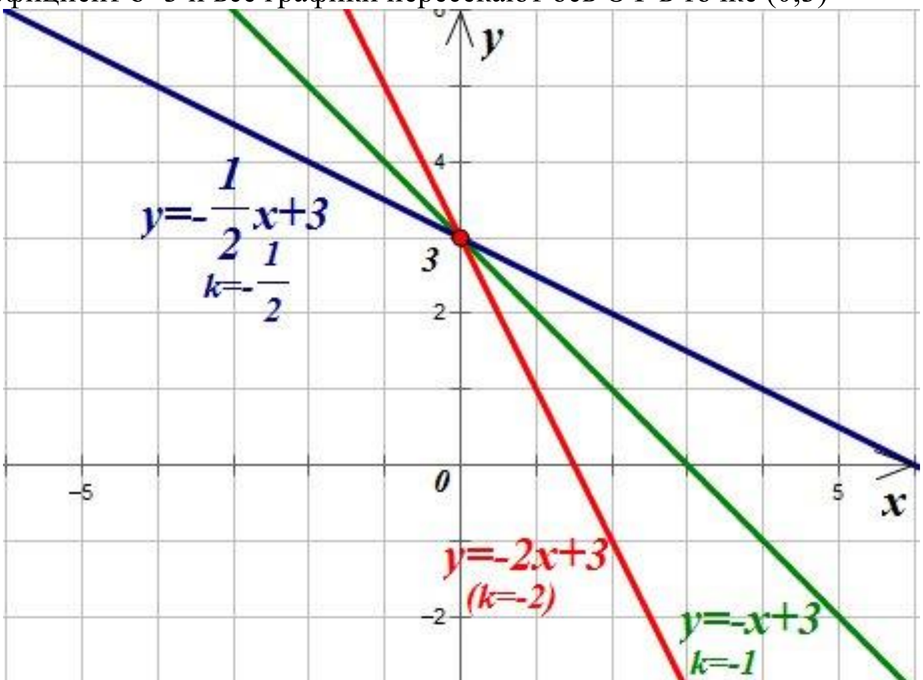
Если **b=0**, то график функции $y = kx$ проходит через начало координат:



Через одну точку можно провести сколько угодно прямых с разным наклоном. Этот наклон зависит от значения и знака параметра k .

Рассмотрим пример, изображенный на графике ниже. Заметьте, что на графике ниже во всех функциях коэффициент k **меньше нуля**, и все графики функций наклонены **влево**.

Коэффициент b=3 и все графики пересекают ось OY в точке (0;3)

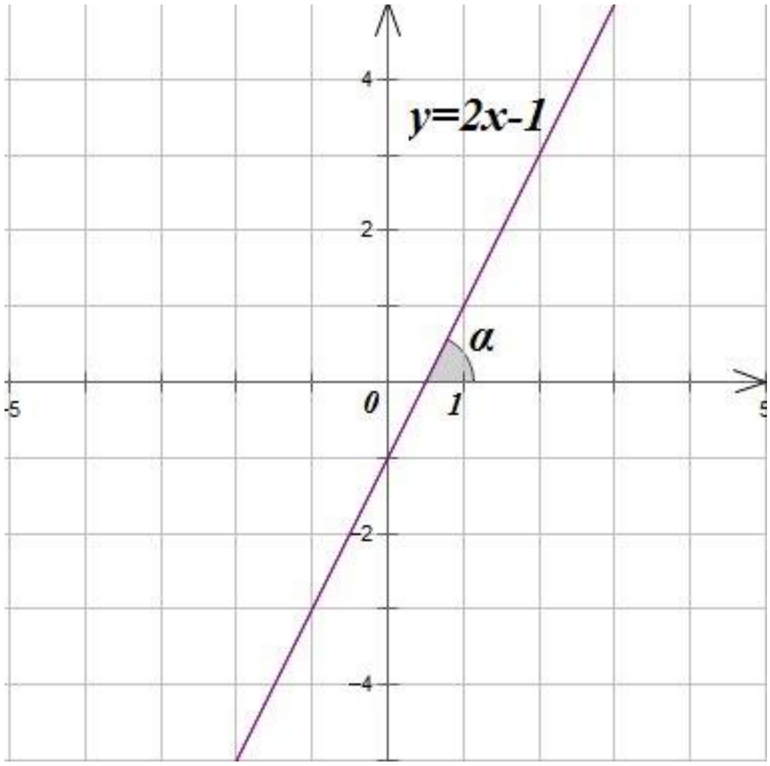


Заметим, что чем больше |k|, тем круче идет прямая.

Таким образом коэффициент при x отвечает за наклон прямой и называется коэффициентом наклона. Кроме того – он равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси OX .

Внимание! Не просто между прямой и осью OX, а именно между прямой и положительным направлением оси OX.

Например, в прямой $y=3x-1$ коэффициент наклона равен 3, а прямой $y=2-5x$ коэффициент наклона равен -5.



В уравнении прямой $y=-1$ слагаемое, содержащее x отсутствует, следовательно, коэффициент при x равен нулю. Угол наклона этой прямой к оси OX равен нулю - прямая $y=-1$ параллельна оси OX.

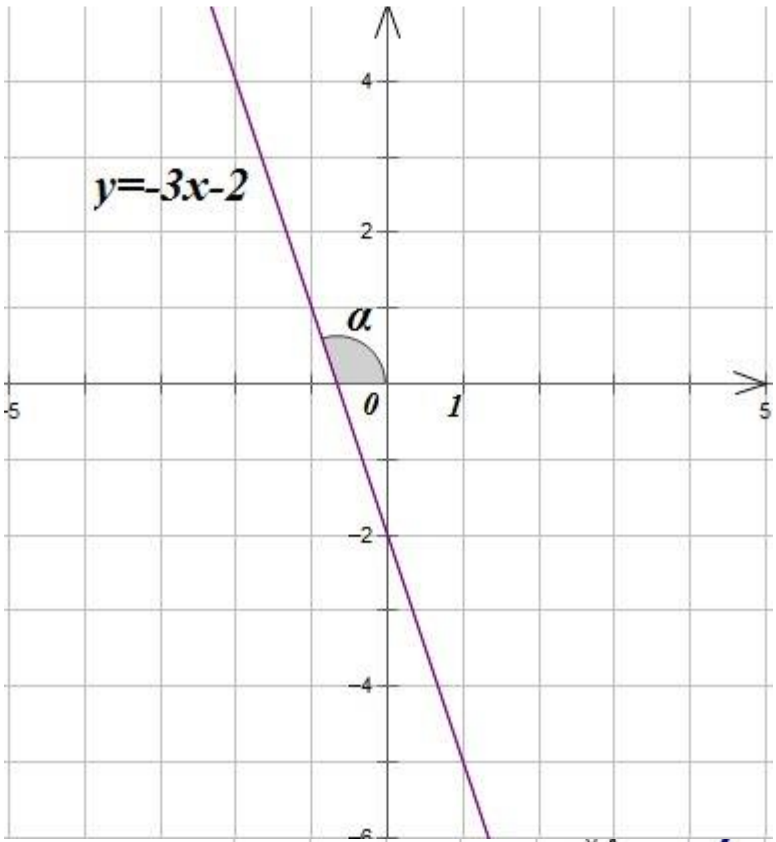
Если прямая наклонена вправо, то угол между прямой и положительным направлением оси OX - острый, соответственно, тангенс этого угла больше нуля, и коэффициент $k>0$.

Например:

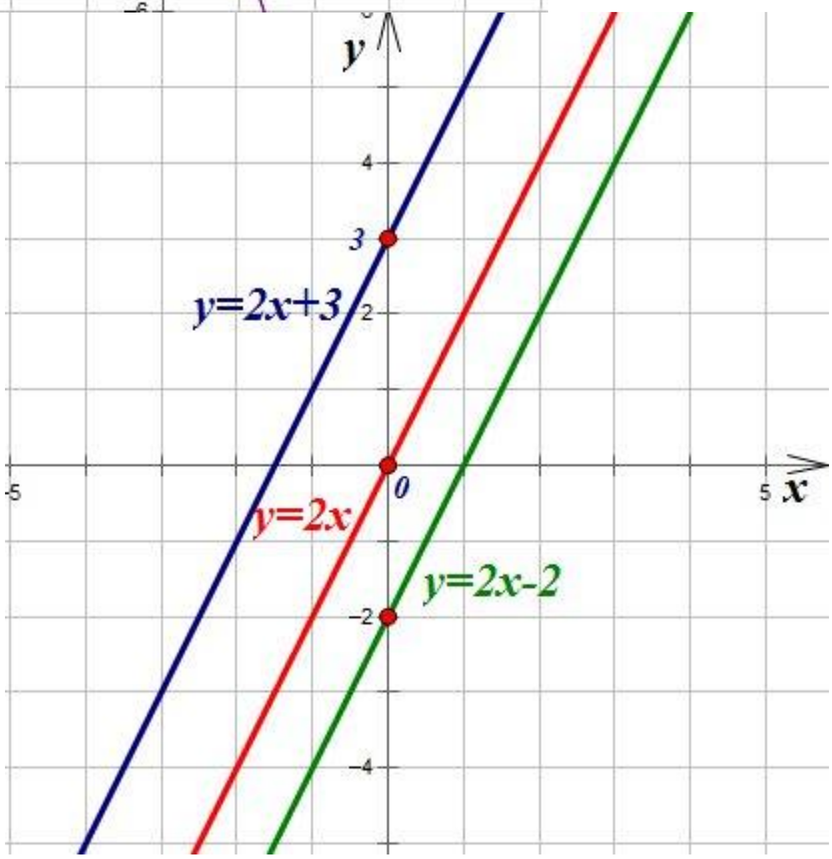
Здесь $k=tg\,\alpha=2>0$

Если прямая наклонена влево, то угол между прямой и положительным направлением оси OX - тупой, соответственно, тангенс этого угла меньше нуля, и коэффициент $k<0$:

Здесь $k=tg\,\alpha=-3<0$.



Коэффициент b сдвигает график относительно оси Oy.



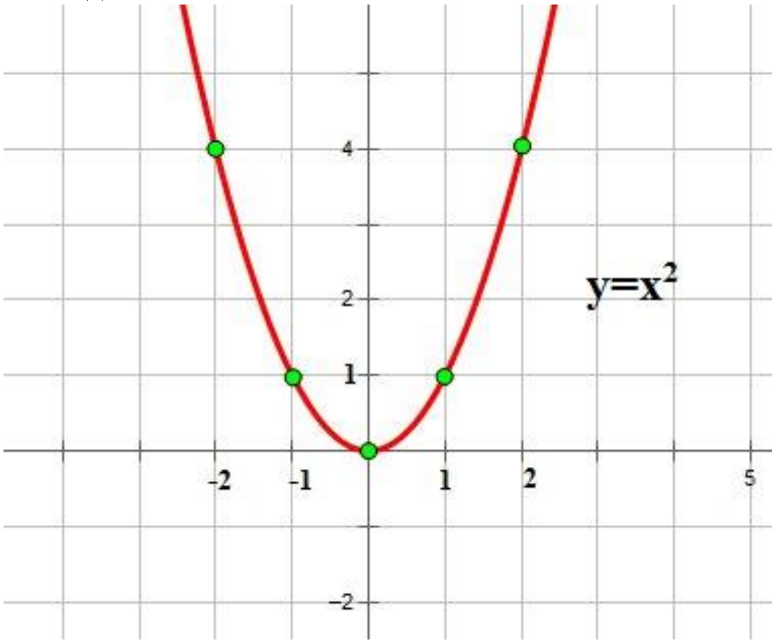
1.5 Квадратичная функция и ее график

Функция вида

$$y=ax^2+bx+c,$$

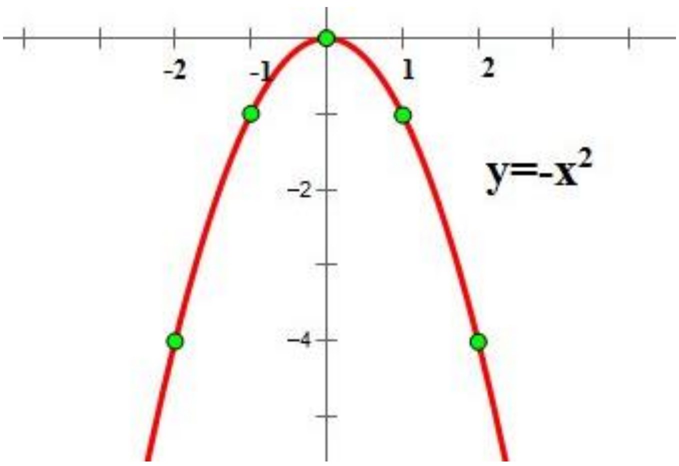
где $a\neq 0$ называется квадратичной функцией.
В уравнении квадратичной функции:
a - старший коэффициент
b - второй коэффициент
c - свободный член.

Графиком квадратичной функции является квадратичная парабола, которая для функции $y=x^2$ имеет вид:



Чтобы найти координаты этих точек для функции $y=x^2$ можно составить таблицу, отметить найденные точки на графике и соединить их гладкой кривой:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Если поменять знак коэффициента *a* график функции $y=-x^2$ зеркально отразится относительно оси *Ox*.

Если старший коэффициент a>0, то ветви параболы направлены вверх.

Если старший коэффициент a<0, то ветви параболы направлены вниз.

Второй параметр для построения графика функции - значения x, в которых функция равна нулю, или **нули функции**. На графике нули функции $f(x)$ - это точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью ОХ.

Поскольку ордината (у) любой точки, лежащей на оси ОХ равна нулю, **чтобы найти координаты точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью ОХ, нужно решить уравнение $f(x)=0$.**

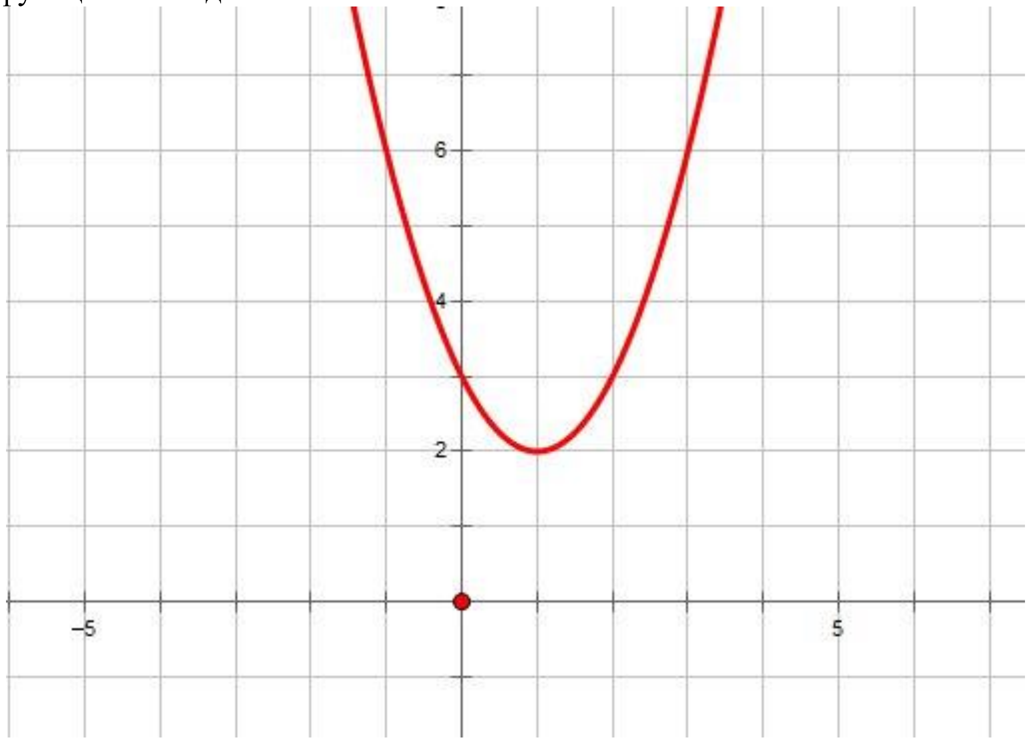
В случае квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, нужно решить квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0$$

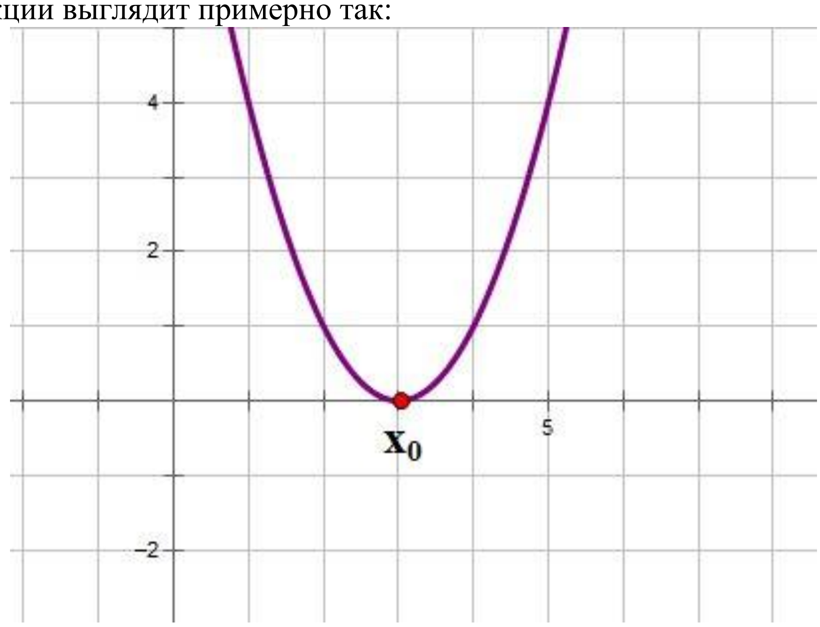
В процессе решения квадратного уравнения мы находим дискриминант: $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$, который определяет число корней квадратного уравнения.

И здесь **возможны три случая:**

1. Если $D<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, и, следовательно, квадратичная парабола $y=ax^2+bx+c$ не имеет точек пересечения с осью ОХ. Если a>0 ,то график функции выглядит как-то так:



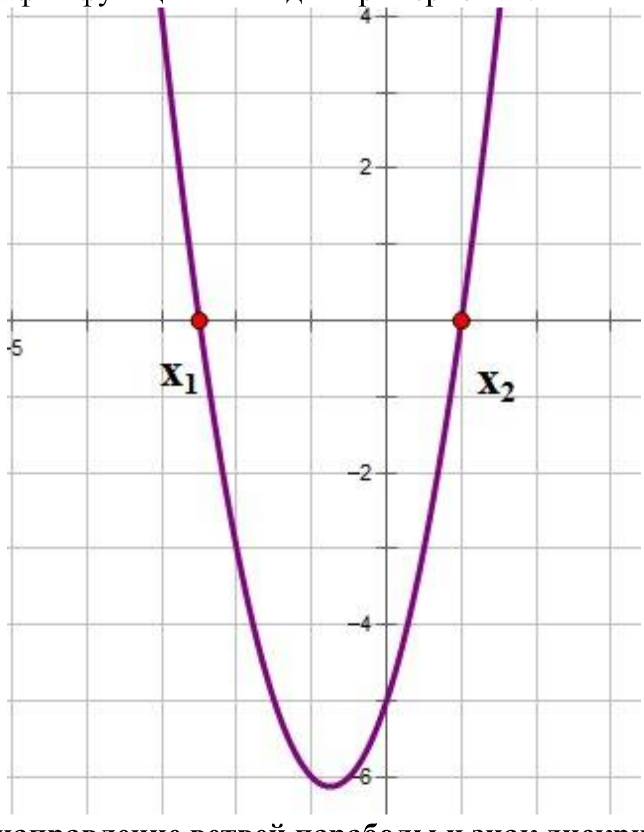
2. Если $D=0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет одно решение, и, следовательно, квадратичная парабола $y=ax^2+bx+c$ имеет одну точку пересечения с осью Ox. Если a>0 , то график функции выглядит примерно так:



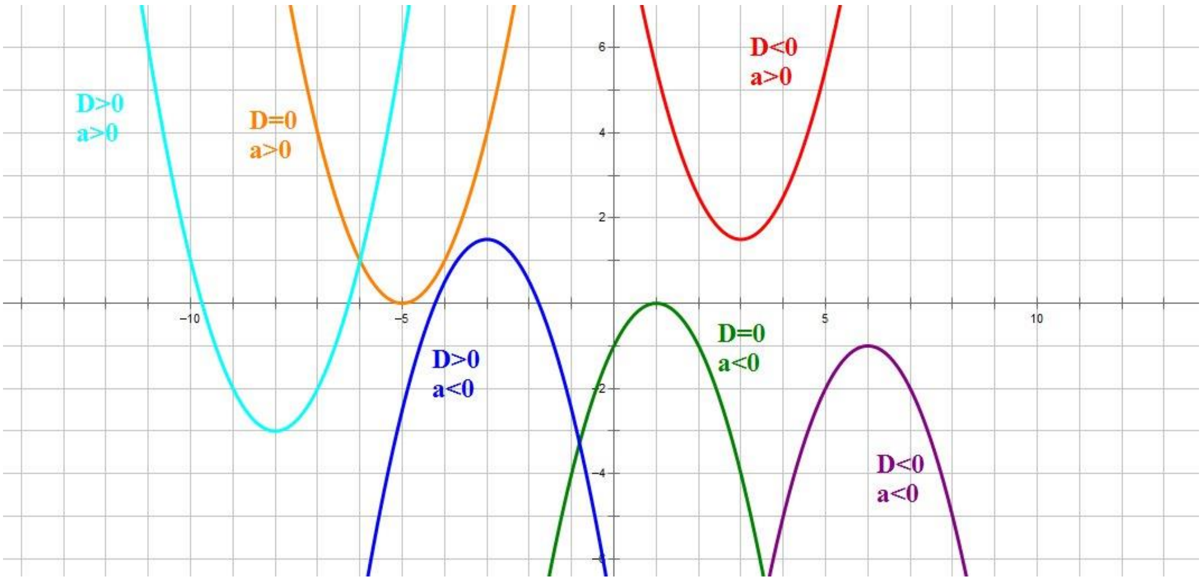
3. Если $D>0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два решения, и, следовательно, квадратичная парабола $y=ax^2+bx+c$ имеет две точки пересечения с осью OX:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

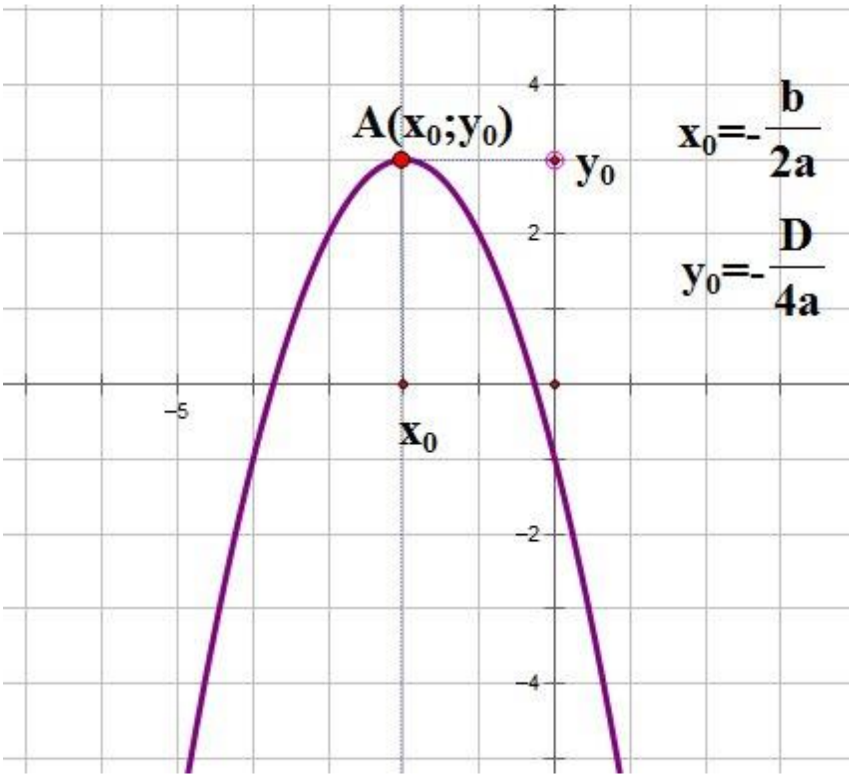
Если a>0, то график функции выглядит примерно так:



Следовательно, **знaя направление ветвей параболы и знак дискриминанта, мы уже можем в общих чертах определить, как выглядит график нашей функции.**



Следующий важный параметр графика квадратичной функции - **координаты вершины параболы:**



$x_0 = -\frac{b}{2a}$

$y_0 = -\frac{D}{4a} = y\left(x_0\right)$

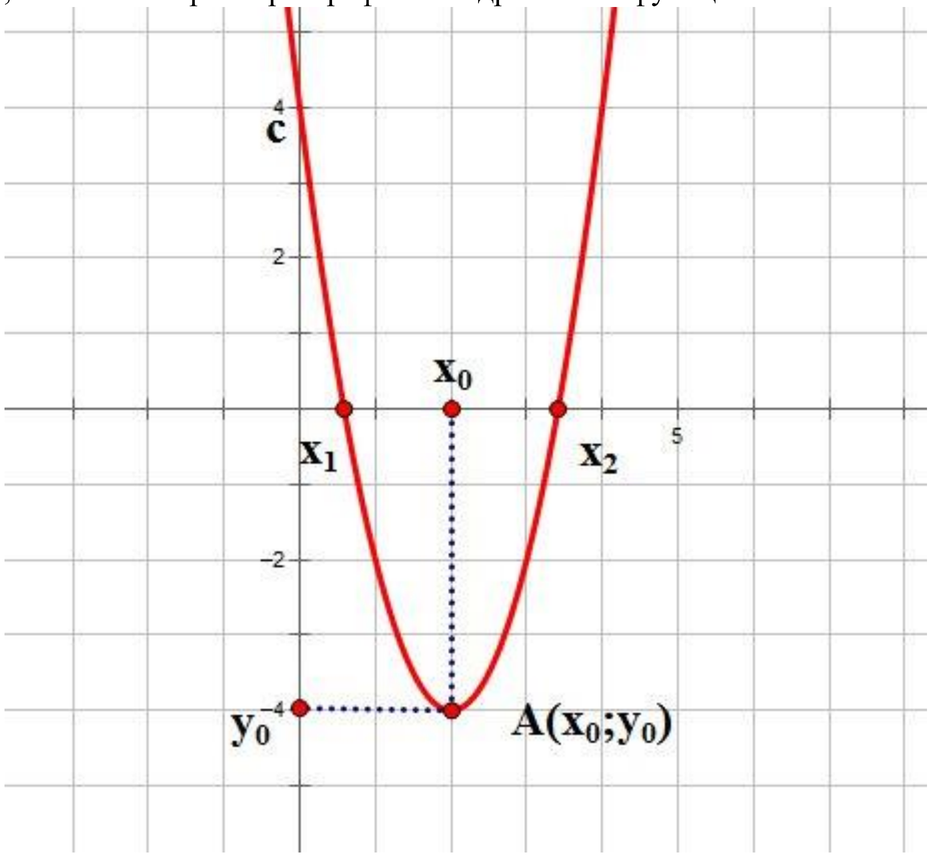
Прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси OY является осью симметрии параболы.

И еще один параметр, полезный при построении графика функции - **точка пересечения параболы** $y=ax^2+bx+c$ **с осью OY.**

Поскольку абсцисса любой точки, лежащей на оси OY равна нулю, чтобы найти точку пересечения параболы $y=ax^2+bx+c$ с осью OY, нужно в уравнение параболы вместо x подставить ноль: y(0)=c.

То есть точка пересечения параболы с осью OY имеет координаты (0;c).

Итак, основные параметры графика квадратичной функции показаны на рисунке:



При нахождении точек пересечения графика с осью Оу нам пришлось **решать уравнение** – найти нули функции.

Нули функции - это те значения аргумента х, при которых значение функции (у) равно нулю.

Чтобы найти нули функции *y=f(x)*, нужно решить уравнение *f(x)=0*. Корни этого уравнения и будут нулями функции *y=f(x)*.

Чтобы найти нули функции *y=f(x)* по ее графику, нужно найти точки пересечения графика с осью ОХ. Абсциссы точек пересечения и будут нулями функции *y=f(x)*.

1.6 Многочлены

Объектом нашего интереса будут наиболее распространённые многочлены вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Натуральное число n называют *степенью многочлена*, число a_0 – коэффициентом при старшей степени *(или просто старшим коэффициентом)*, а коэффициент a_n – *свободным членом*.

Данный многочлен я буду свёрнуто обозначать через $P_n(x)$.

Корнями многочлена $P_n(x)$ называют корни уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$

С нахождением корней многочленов 1-й и 2-й степеней нет никаких проблем, но по мере увеличения n эта задача становится всё труднее и труднее.

1.7 Решение системы линейных уравнений

Решение системы линейных уравнений методом подстановки

Данный метод также можно назвать «школьным методом» или методом исключения неизвестных.

Пример 1

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

Что значит решить систему линейных уравнений? **Решить систему уравнений – это значит найти множество её решений. Решение системы представляет собой набор значений всех входящих в неё переменных, который обращает КАЖДОЕ уравнение системы в верное равенство.**

Решаем: из первого уравнения выразим: $x = y - 5$

Полученное выражение $x = y - 5$ подставляем во второе уравнение:

$2(y-5) + y + 7 = 0$

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые и находим значение y:

$2y - 10 + y + 7 = 0$

$3y - 3 = 0$

$3y = 3$

$y = 1$

Далее опять подставляем в первое уравнение: $x = y - 5$

Значение y нам уже известно, осталось найти: $x = 1 - 5 = -4$

Ответ: $x = -4, y = 1$

После того, как решена ЛЮБАЯ система уравнений ЛЮБЫМ способом, настоятельно рекомендуется выполнить проверку

1) Подставляем найденный ответ $x = -4, y = 1$ в первое уравнение $x - y + 5 = 0$:

$-4 - 1 + 5 = 0$

$0 = 0$ – получено верное равенство.

2) Подставляем найденный ответ $x = -4, y = 1$ во второе уравнение $2x + y + 7$:

$2 \cdot (-4) + 1 + 7 = 0$

$-8 + 8 = 0$

$0 = 0$ – получено верное равенство.

Рассмотренный способ решения не является единственным, из первого уравнения можно было выразить y, а не x.

Можно наоборот – что-нибудь выразить из второго уравнения $2x + y = -7$ и подставить в первое уравнение. Кстати, заметьте, самый невыгодный из четырех способов – выразить x из второго уравнения:

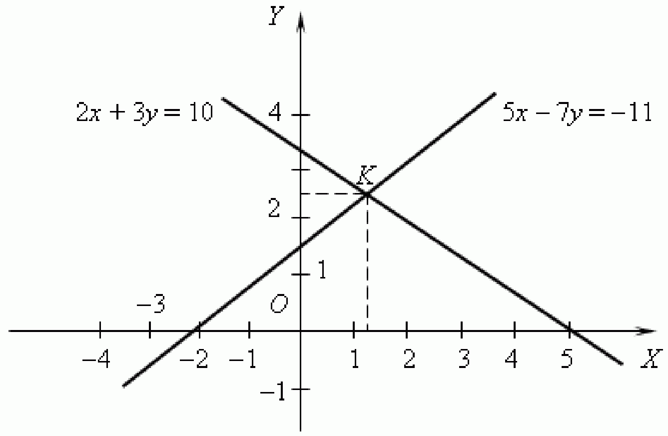
$2x = -y - 7$

$x = -\frac{1}{2}y - \frac{7}{2}$

Решение системы уравнения можно запросто найти по графику.

$$\begin{cases} 5x - 7y = -11, \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Графики этих уравнений – прямые линии



Решение системы уравнений – это точки пересечения линий – заданных каждый уравнением.

Решение системы методом почленного сложения (вычитания) уравнений системы

В ходе решения систем линейных уравнений нужно стараться использовать не «школьный метод», а метод почленного сложения (вычитания) уравнений системы. Почему? Это экономит время и упрощает вычисления.

<u>Пример 4</u>

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

Анализируя систему уравнений, замечаем, что коэффициенты при переменной y одинаковы по модулю и противоположны по знаку (–1 и 1). В такой ситуации уравнения можно сложить почленно:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ + \quad + \quad + \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad 0 \qquad \downarrow$$

$$3x \qquad + 12 = 0$$

Действия, обведенные красным цветом, выполняются МЫСЛЕННО.

Как видите, в результате почленного сложения у нас пропала переменная y. В этом, собственно, и состоит **суть метода – избавиться от одной из переменных**.

Теперь всё просто: $3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4$ – подставляем в первое уравнение системы (можно и во второе, но это не так выгодно – там числа больше):

$-4 - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1$

В чистовом оформлении решение должно выглядеть примерно так:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases} + \Rightarrow 3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$-4 - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1$

Ответ: $x = -4,\ y = 1$

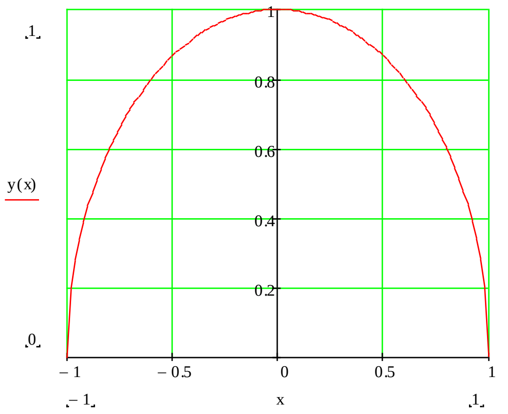
1.8 Неравенства

Рассмотрим пример нахождения области определения функции
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Решение:
Функция будет иметь решение только тогда, когда выражение под корнем будет больше или равно нулю.
Иными словами, нужно решить неравенство
$1 - x^2 \geq 0$.

Парабола $\alpha(x) = -x^2 + 1$ *пересекает ось абсцисс в точках* $x = \pm 1$. *Поскольку* $a = -1$, *то ветви параболы направлены вниз.*

Ответ*: область определения:* $D(f) = [-1; 1]$



И мы плавно подошли к понятию ***неравенства***.

Различают два типа линейных неравенств:

1) **Строгие** неравенства: $Ax + By + C > 0$ либо $Ax + By + C < 0$.

2) **Нестрогие** неравенства: $Ax + By + C \geq 0$ либо $Ax + By + C \leq 0$.

Какой геометрический смысл этих неравенств?

Если линейное уравнение $Ax + By + C = 0$ задаёт прямую, то линейное неравенство определяет **полуплоскость**.

Что значит решить линейное неравенство?

Решить линейное неравенство – это значит найти полуплоскость, точки которой удовлетворяют данному неравенству (плюс саму прямую, если неравенство нестрогое).

Алгоритм нахождения решения неравенства графическим методом достаточно прост и состоит в следующих этапах.

Сначала чертим прямую $2x + 5 = 0$.

Теперь выбираем любую точку плоскости, **не принадлежащую прямой**. В большинстве случаев, самая простая точка $O(0; 0)$. Подставим координаты данной точки в неравенство $2x + 0 \cdot y + 5 < 0$:

$2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 < 0$

$5 < 0$

Получено **неверное неравенство** (простыми словами, так быть не может), значит, точка $O(0; 0)$ не удовлетворяет неравенству $2x + 5 < 0$, значит множество решений не включает эту точку.

Ключевое правило решение задачи:

– Если какая-либо точка полуплоскости (не принадлежащая прямой) **не удовлетворяет** неравенству, то и **ВСЕ** точки данной полуплоскости **не удовлетворяют** данному неравенству.

– Если какая-либо точка полуплоскости (не принадлежащая прямой) **удовлетворяет** неравенству, то и **ВСЕ** точки данной полуплоскости **удовлетворяют** данному неравенству.

Можете протестировать: любая точка справа от прямой $2x + 5 = 0$ не будет удовлетворять неравенству $2x + 5 < 0$.

Система линейных неравенств – это, как вы понимаете, система, составленная из нескольких неравенств.

Рассмотри пример

$$\begin{cases} x - y + 5 \geq 0 \\ 2x + y + 7 \leq 0 \end{cases}$$

Построим графики прямых $y=x+5$ и $y=-7-x$

Теперь подставим в неравенство $x-y+5 \geq 0$ координаты точки $x=0$ *и* $y=0$

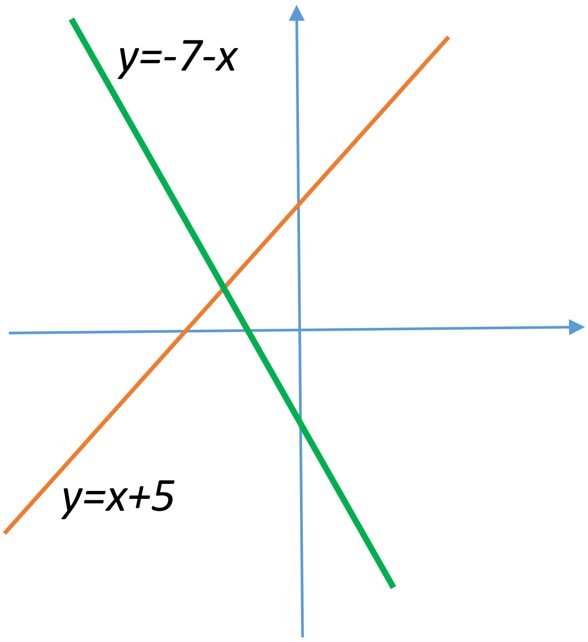
$0-0+5 \geq 0$

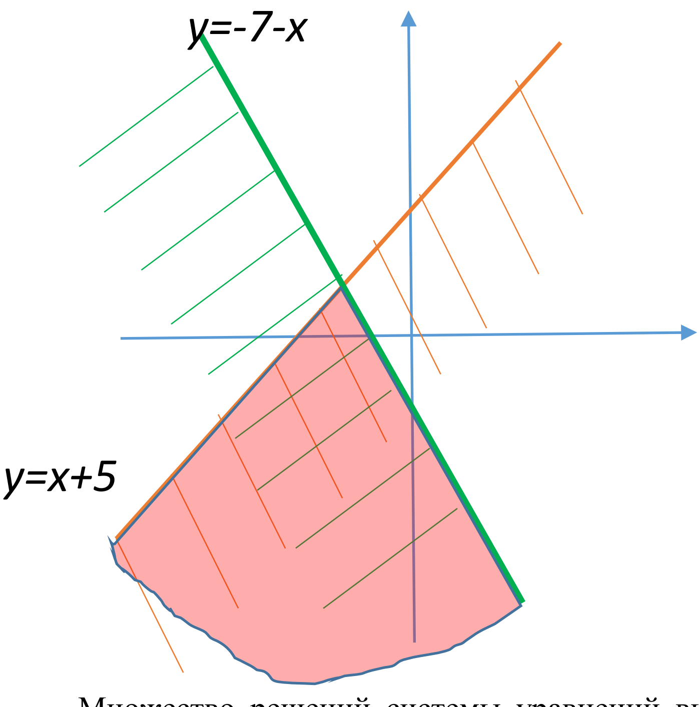
Условие выполняется, значит точка (0;0) принадлежит множеству решений – заштрихуем это полуплоскость на графике.)

Аналогичную операцию выполним для выражения $2x+y+7 \leq 0$

$2 \cdot 0+0+7 \leq 0$

А тут условие не выполняется, значит заштрихуем полуплоскость, в которой нет точки (0;0)





Множество решений системы уравнений выделена на рисунке красны цветом – любая точка из этой области дает решение, удовлетворяющее и первому и второму неравенству системы.

Рекомендуемые ссылки

- **Linear equations and inequalities**
- https://www.khanacademy.org/math/algebra-basics/alg-basics-linear-equations-and-inequalities
- Как исследовать функцию и построить её график?
- http://mathprofi.ru/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika.html
- Как найти производную? Примеры решений
- http://mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html
- Частные производные функции двух переменных. Понятие и примеры решений
- http://mathprofi.ru/chastnye_proizvodnye_primery.html
- **Линейные неравенства. Системы линейных неравенств**
- http://mathprofi.ru/lineinye_neravenstva.html

Некоторые функции ☺ (просто скопировать формулу и вставить в гугл поиск по очереди)

100-3/sqrt(x^2+y^2)+sin(sqrt(x^2+y^2))+sqrt(200-x^2+y^2+10*sin(x)+10*sin(y))/1000

5 + (-sqrt(1-x^2-(y-abs(x))^2))*cos(30*((1-x^2-(y-abs(x))^2))), x is from -1 to 1, y is from -1 to 1.5, z is from 1 to 6

log(x^2+y^2)^3

2 sqrt(-abs(abs(x)-1)*abs(3-abs(x))/((abs(x)-1)*(3-abs(x))))(1+abs(abs(x)-3)/(abs(x)-3))sqrt(1-(x/7)^2)+(5+0.97(abs(x-.5)+abs(x+.5))-3(abs(x-.75)+abs(x+.75)))(1+abs(1-abs(x))/(1-abs(x))),-3sqrt(1-(x/7)^2)sqrt(abs(abs(x)-4)/(abs(x)-4)),abs(x/2)-0.0913722(x^2)-3+sqrt(1-(abs(abs(x)-2)-1)^2),(2.71052+(1.5-.5abs(x))-1.35526sqrt(4-(abs(x)-1)^2))sqrt(abs(abs(x)-1)/(abs(x)-1))+0.9