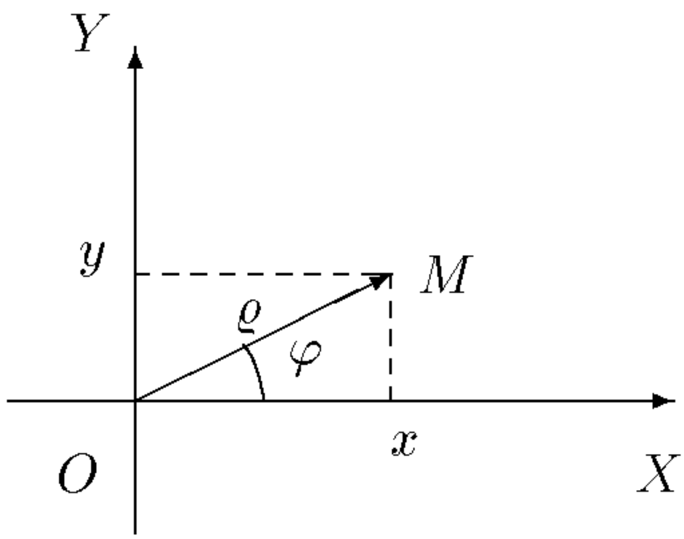
Векторы

Декартова прямоугольная система координат определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси — координатными осями. Первая из координатных осей называется осью абсцисс, а вторая — осью ординат.



Начало координат обозначается буквой *O,* ось абсцисс — символом *Ox,* ось ординат — символом *Oy.*

Координатами произвольной точки M в заданной системе называют числа

$$x = OM_x,\ y = OM_y$$

где M_x и My – проекции точки M на оси Ox и Oy, OM_X обозначает величину отрезка OM_X оси абсцисс, OM_y — величину отрезка OM_y оси ординат.

Действия с векторами. Координаты вектора. Простые операции над векторами

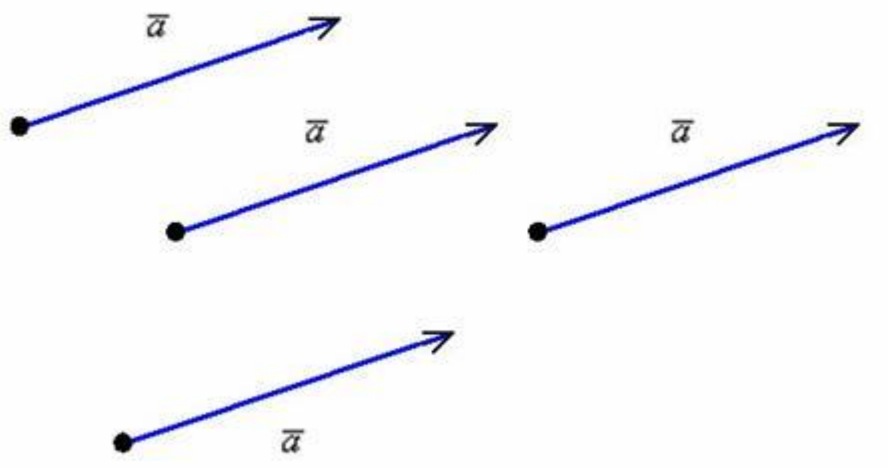
В математике, программировании, физике и др. науках приходится иметь дело с величинами двух видов – скалярными и векторными.

Скалярной величиной (скаляром) называется величина, которая характеризуется лишь числом, которое отображает отношение величины к соответствующей единице измерения (температура, время, площадь, объем и т.п.).

Но есть такие величины, для которых только числа недостаточно – перемещение точки, скорости, ускорения, момента силы, магнитного поля и т.п. Этим величинам кроме числа неоходимо еще и направление.

Векторной величиной называется величина, которая характеризуется числом и направлением в пространстве. Каждую векторную величину можно отобразить направленным отрезком – вектором – длина вектора равна числовому значению векторной величины, а направление вектора соответствует направлению этой величины.

В линейной алгебре рассматривается так называемый **свободный вектор**.

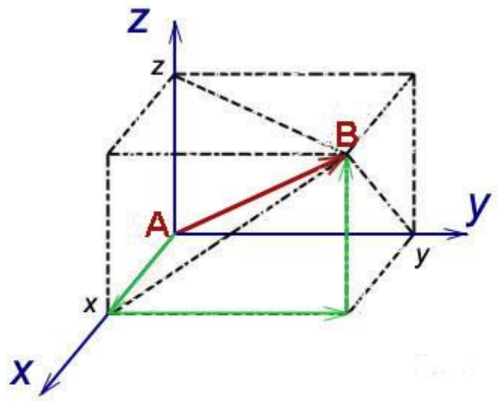


Свободный вектор – это **<u>множество</u>** одинаковых направленных отрезков

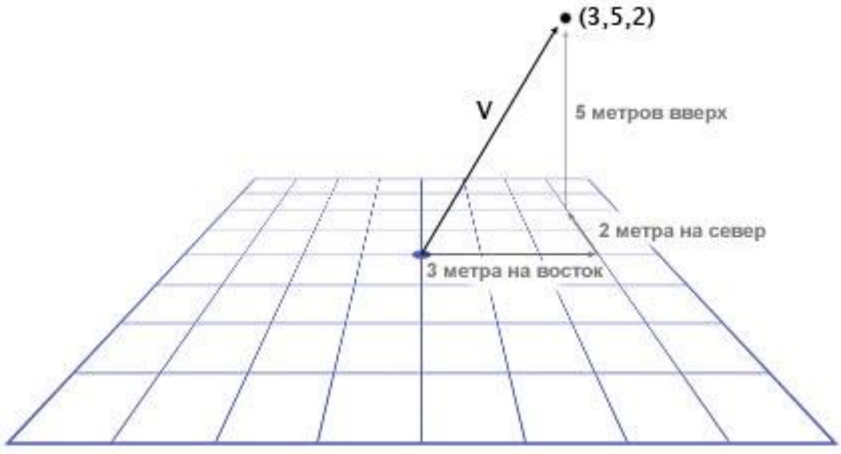
Нулевой вектор – отдельная точка пространства или плоскости, начало и конец такого вектора совпадает. Направление такого вектора не определено.

Другими словами

Вектор - это вид представления точки, до которой требуется добраться из некоторой начальной точки. Например, трёхмерный вектор, как правило, записывается в виде (*x, y, z*). Говоря совсем просто, эти числа означают, как далеко требуется пройти в трёх различных направлениях, чтобы добраться до точки.



Пусть дан вектор. При этом $x = 3$ (правая рука указывает направо), $y = 2$ (левая рука указывает вперёд), $z = 5$ (под точкой стоит лестница, ведущая вверх). По этим данным вы найдёте точку, проходя 3 метра в направлении, указываемом правой рукой, затем 2 метр в направлении, указываемом левой рукой, а далее Вас ждёт лестница и, поднимаясь на 5 метров, Вы, наконец, окажетесь в искомой точке.

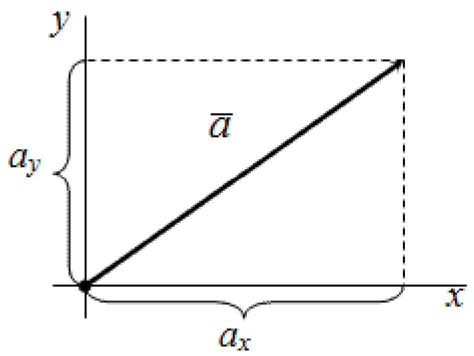


Координаты вектора

Координатами вектора $\bar{a}$ называются проекции a_x и a_y данного вектора на оси Ox и Oy соответственно:

$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\ \bar{a}, a_y = \text{Пр}_{Oy}\ \bar{a}$$

Величина a_xназывается **абсциссой вектора** $\bar{a}$, а число a_y- его **ординатой**. То, что вектор $\bar{a}$ имеет координаты a_x и a_y, записывается следующим образом: $\bar{a} = (a_x; a_y)$.



Проекция вектора на направление равна произведению его длины на косинус угла между вектором и положительным направлением оси.

$$пр_u a = |a| \cdot \cos\varphi$$

Проекции произвольного вектора ***a*** на оси некоторой заданной системы координат в дальнейшем обозначаются буквами *X, Y, Z*. Равенство

$$a = \{X, Y, Z\}$$

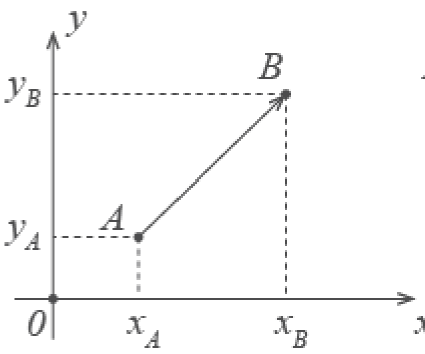
означает, что числа *X, Y, Z* являются проекциями вектора на координатные оси.

Проекции вектора на координатные оси называют также его (декартовыми) координатами. Если даны две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и M2(x2; y2; z2), являющиеся соответственно началом и концом вектора a, то его координаты X, Y, Z определяются по формулам

$$X = x_2 - x_1, \qquad Y = y_2 - y_1, \qquad Z = z_2 - z_1$$

Так, если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

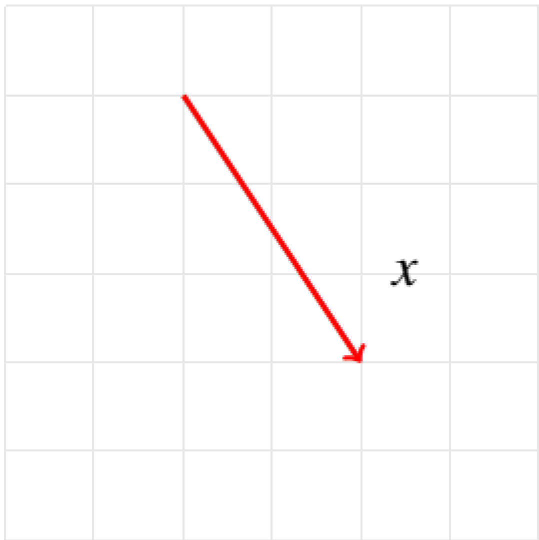


$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A , y_B - y_A)$

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Примеры



(a) $x = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (b) $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (d) $x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(e) Свой вариант

Задание. *Заданы векторы* $\bar{a} = (-3; 5)$ *и* $\bar{b} = (0; -1)$. *Найти координаты вектора* $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

Решение. $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (-3; 5) + (0; -1) = (-3 + 0; 5 + (-1)) = (-3; 4)$

Задание. *Вектор* $\bar{a} = (3; -2)$. *Найти координаты вектора* $2\bar{a}$

Решение. $2\bar{a} = 2 \cdot (3; -2) = (2 \cdot 3; 2 \cdot (-2)) = (6; -4)$

Задание. *Найти координаты вектора* $\overline{AB}$, *если* $A(-4; 2)$, $B(1; -3)$

Решение. $\overline{AB} = (1 - (-4); -3 - 2) = (5; -5)$

Задание. *Найти длину вектора* $\bar{a} = (-4; 3)$

Решение. *Используя формулу, получаем:*

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

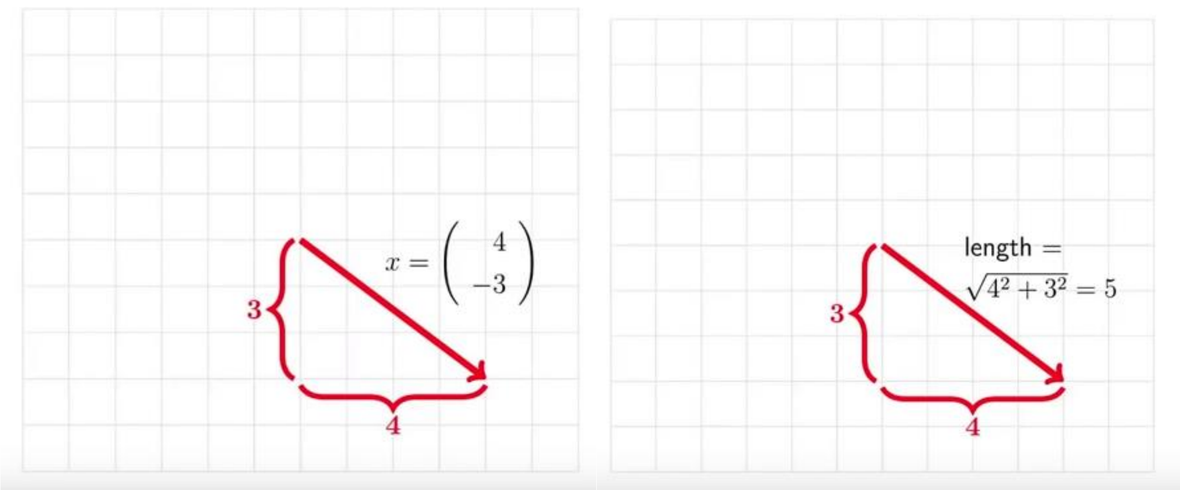
Длиной (модулем, абсолютной величиной) вектора **называется расстояние между его началом и его концом.**

Т.е. длина вектора $\vec{A}\vec{B}$ - это длина отрезка AB **.**

Если вектор задан своими координатами: $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$, то его длина находится по формуле:1

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

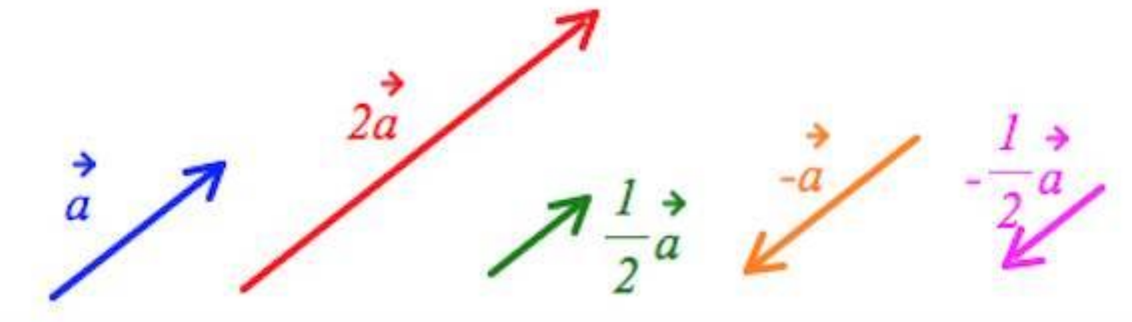
Вычисление координат вектора и его длины



Линейные операции над геометрическими векторами

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda|>1$) или сжатием (при $|\lambda|<1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda>0$, и меняется на противоположное, если $\lambda<0$.



Где это может пригодится? Моделируя простое сопротивление воздуха путём умножения скорости игрока на 0.9 в каждом кадре. Чтобы сделать это, надо умножить каждый компонент вектора на число 0,9.

Если скорость игрока (10, 20), то новая скорость будет:

$$0.9\cdot(10, 20) = (0.9 \cdot 10, 0.9 \cdot 20) = (9, 18).$$

Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны отношением

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

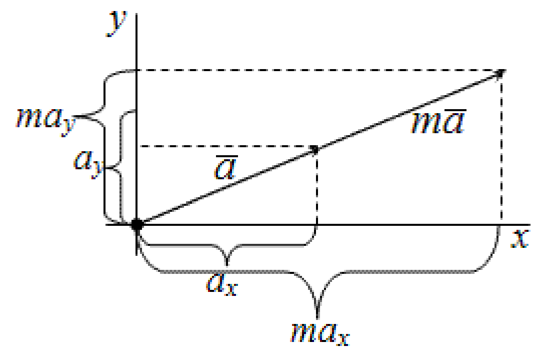


Рис. 3

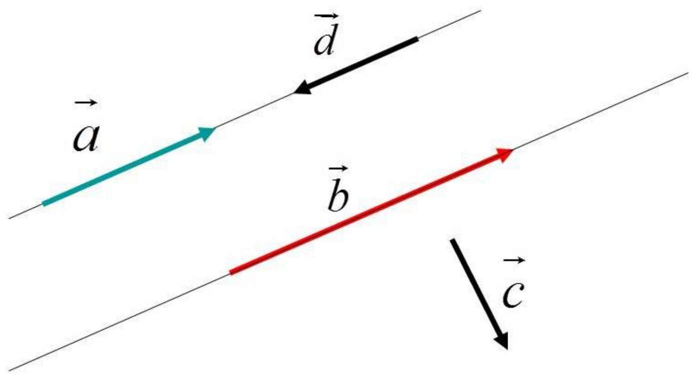
Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или на параллельных прямых. Иными словами, векторы коллинеарны, если существует прямая, которой они параллельны.

Коллинеарность обозначается символом параллельности: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Нуль-вектор коллинеарен любому другому вектору, так как он не имеет определенного направления: $\forall \vec{a} \quad \vec{0} \parallel \vec{a}$.

Ненулевые коллинеарные вектора, могут быть

- **сонаправленными** (имеющими одинаковое направление), что мы будем обозначать $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

- **противонаправленными** (имеющими противоположное направление), что мы будем обозначать $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{d} \qquad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \qquad \vec{d} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

Отметим очевидные свойства отношений сонаправленности и противонаправленности:

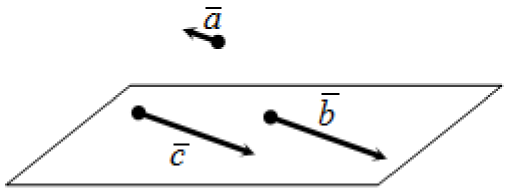
1. Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}, \vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$;

2. Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}, \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$;

3. Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}, \vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$;

4. Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}, \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$.

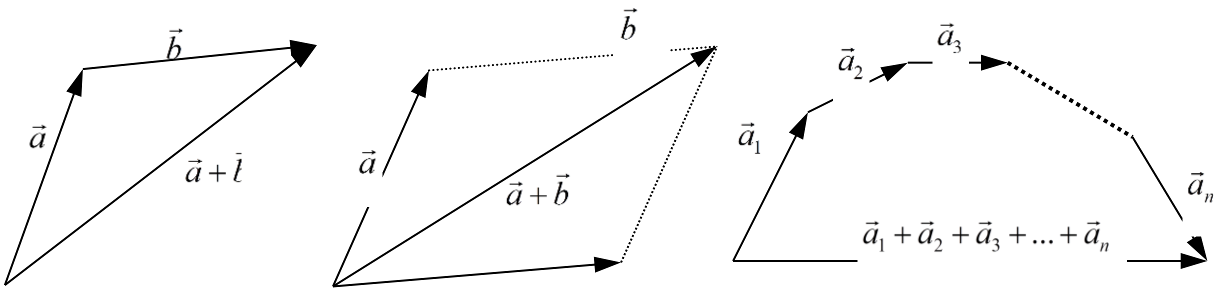
Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.



Векторы, лежащие на перпендикулярных прямых, называются ортогональными.

Условия компланарности и ортогональности векторов будут рассмотрены ниже.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ **двух векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$.



а) **Правило треугольника**

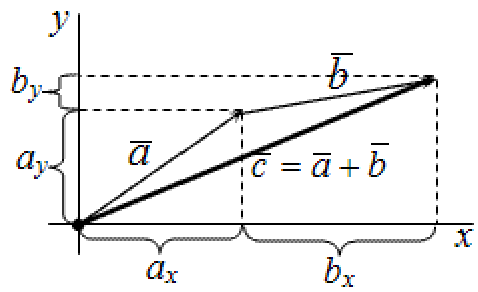
Вектор $\vec{b}$ прикладывается к концу вектора $\vec{a}$. Тогда сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}$ будет вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$.

б) **Правило параллелограмма**

Строим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм. Тогда суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}$ будет диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Проще говоря:

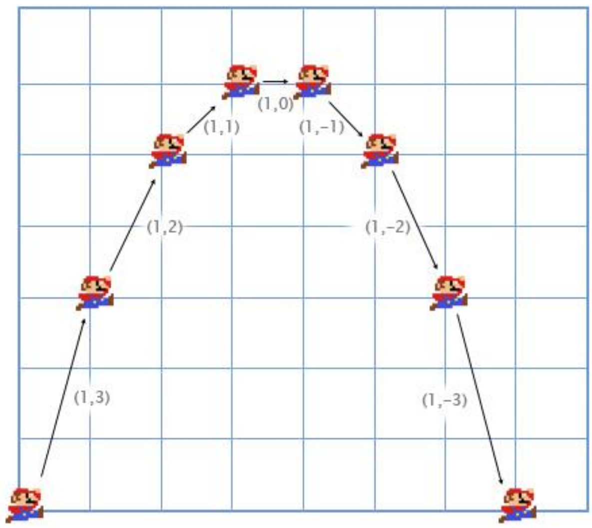
Если заданы $\bar{a}=(a_x;a_y)$и $\bar{b}=(b_x;b_y)$, тогда вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ имеет координаты $(a_x+b_x;a_y+b_y)$.



Зачем складывать векторы?

Любой физический объект будет иметь вектора для местоположения, скорости и ускорения. Для каждого кадра (обычно это одна шестидесятая часть секунды), мы должны интегрировать два вектора: добавить скорость к местоположению и ускорение к скорости.

Давайте рассмотрим пример с прыжками Марио. Он начинает с позиции (0, 0). В момент начала прыжка его скорость (1, 3), он быстро двигается вверх и вправо. Его ускорение равно (0, -1), так как гравитация тянет его вниз. На картинке показано, как выглядит его прыжок, разбитый на семь кадров. Чёрным текстом показана его скорость в каждом фрейме.



Давайте рассмотрим первые кадры поподробнее, чтобы понять как всё происходит.

Для первого кадра, мы добавляем скорость Марио (1, 3) к его местоположению (0, 0) и получаем его новые координаты (1, 3). Затем мы складываем ускорение (0, -1) с его скоростью (1, 3) и получаем новое значение скорости Марио (1, 2). Делаем тоже самое для второго кадра. Добавляем скорость (1, 2) к местоположению (1, 3) и получаем координаты (2, 5). Затем добавляем ускорение (0, -1) к его скорости (1, 2) и получаем новую скорость (1, 1).

Таким образом, сложение векторов в играх применяется для физического интегрирования.

Свойства операции сложения векторов:

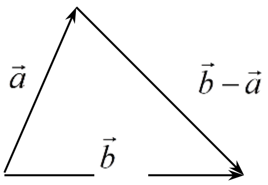
1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \vec{a}, \vec{b}$ (коммутативность);

2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность);

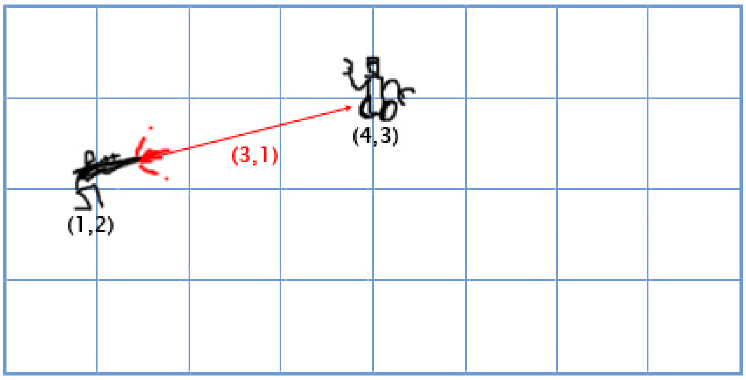
3. $\forall \vec{a} \in V \quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4. $\forall \vec{a} \in V \; \exists(-\vec{a}) \quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Разностью $\vec{b}-\vec{a}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем вектор $\vec{c}$, для которого $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$. По сути принцип тот же, что и при сложении $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$



Вычитание векторов удобно для получения вектора, который показывает из одного местоположения на другое. Например, пусть игрок находится по координатам (1, 2) с лазерным ружьём, а вражеский робот находится по координатам (4, 3).



Чтобы определить вектор движения лазерного луча, который поразит робота, нам надо вычесть местоположение игрока из местоположения робота. Получаем:

(4, 3) — (1, 2) = (4-1, 3-2) = (3, 1).

Скалярное произведение двух векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется действительное число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Чтобы рассчитать скалярное произведение двух векторов, необходимо умножить их компоненты, а затем сложить полученные результаты вместе

Скалярным произведением векторов $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ называется число $(\bar{a},\bar{b})$, равное сумме произведений соответствующих координат:

$$(\bar{a},\bar{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Также скалярное произведение можно вычислить через норму векторов и угол между ними

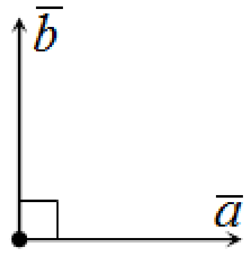
$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

Это очень важное свойство и косинус угла между векторами можно использовать как меру сонаправленности векторов

$$cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

Для параллельных векторов: $cos(\vec{a},\vec{b})=1$.

Для перпендикулярных векторов: $cos(\vec{a},\vec{b})=0$.



Тогда, чтоб найти угол между векторами, можно воспользоваться формулой:

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\arccos\left(\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\right)$$

Свойства скалярного произведения двух векторов:

1. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

2. $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=|\vec{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины);

3. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$;

4. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

5. $(\alpha\vec{a},\vec{b}) = \alpha(\vec{a},\vec{b})$;

6. $(\vec{a},\vec{0}) = 0$;

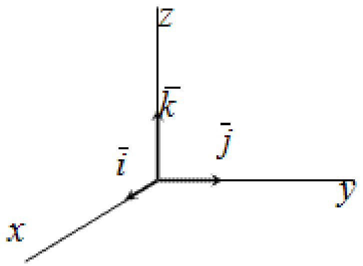
7. если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $(\vec{a},\vec{b}) = 0$;

8. если $(\vec{a},\vec{b}) = 0$, то либо хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен нулю, либо $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

Базисный вектор

Система ортов (или базисная система векторов) - это система единичных векторов осей координат.

Орт координатной оси Ox обозначается через $\bar{i}$, оси Oy- через $\bar{j}$, оси Oz - через $\bar{k}$.



Для любого вектора $\bar{a} = (a_x; a_y)$, который лежит в плоскости xOy, имеет место следующее разложение: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$

Если вектор $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$расположен в пространстве, то разложение по ортам координатных осей имеет вид: $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$

Тройка векторов ***i, j, k*** называется координатным базисом, если эти векторы удовлетворяют следующим условиям:

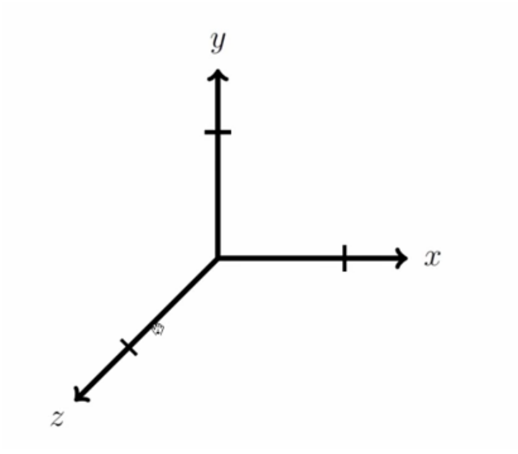
1) вектор ***i*** лежит на оси *Ox,* вектор ***j*** — на оси *Oy,* вектор ***k*** — на оси *Oг;*

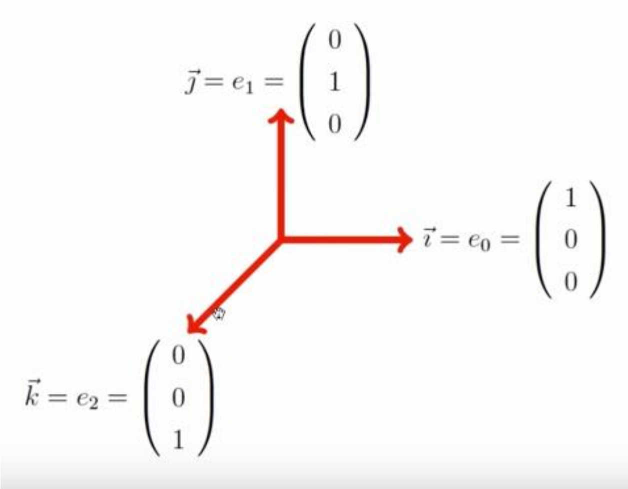
2) каждый из векторов ***i, j, k*** направлен на своей оси в положительную сторону;

3) векторы ***i, j, k*** — единичные, т. е. |***i***| = 1, . |***j***| = 1, |***k***| = 1. Каким бы ни был вектор ***a,*** он всегда может быть разложен по базису ***i, j, k,*** т. е. может быть представлен в виде:

$$\boldsymbol{a} = X_i + Y_j + Z_k;$$

коэффициенты этого разложения являются координатами вектора **а** (т. е. *X, Y, Z* - проекции вектора ***a*** на координатные оси).





Задание. Зная разложение $\bar{a}$ по базисной системе векторов: $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{k}$, записать координаты этого вектора в пространстве.

Решение. Коэффициенты при ортах и есть координатами вектора, поэтому из того, что $\bar{a} = 3\bar{i} - 0 \cdot \bar{j} - \bar{k}$, получаем, что $\bar{a} = (3; 0; -1)$

Задание. Вектор $\bar{a}$ задан своими координатами: $\bar{a} = (2; -1; 5)$. Записать разложение данного вектора по ортам осей координат.

Решение. Координаты вектора - это коэффициенты при ортах координатных осей в разложении вектора по базисной системе, поэтому искомое разложение:

$$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$$

Вычисление **длины вектора в ортонормированном базисе**

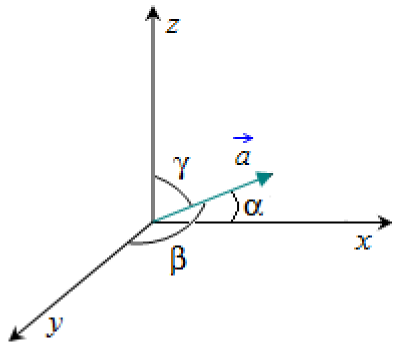
$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Вычисление **координат орта вектора** в ортонормированном базисе

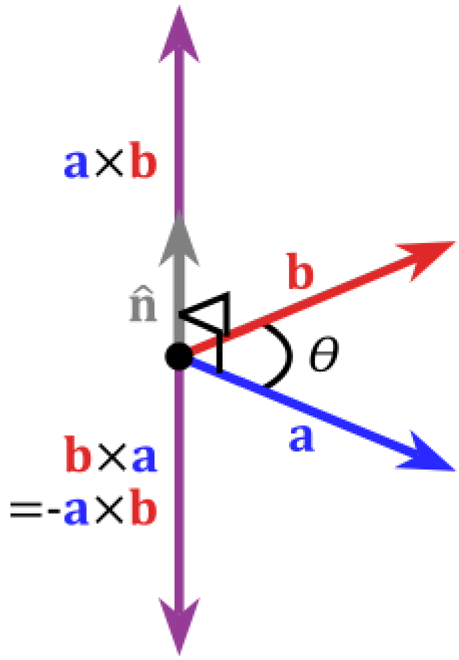
$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{k}.$$

Косинусы углов, которые отличный от нуля вектор образует с векторами ортонормированного базиса, называются **направляющими косинусами**.

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{i})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \ \cos\beta = \frac{(\vec{a}, \vec{j})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \ \cos\gamma = \frac{(\vec{a}, \vec{k})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$



Векторное произведение



Векторное произведение двух векторов в трёхмерном евклидовом пространстве — вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам, норма которого равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами, а выбор из двух направлений определяется ориентацией пространства.

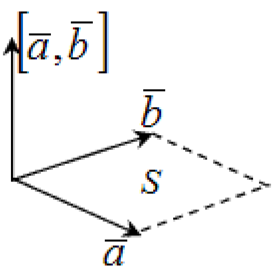
Или другими словами - векторным произведением **ненулевых векторов** $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$ **называется вектор** $\bar{c}$**, обозначаемый символом** $[\bar{a},\bar{b}]$ **или** $\bar{a}\times\bar{b}$**, длина кото рого** $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\hat{\ }\bar{b})$ **а направление перпендикулярно** $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$**.**

Свойства векторного произведения:

1° $[\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}$, тогда и только тогда, когда $\bar{a}||\bar{b}$

2° $[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}]$

3° Модуль векторного произведения $|[\bar{a},\bar{b}]|$ равен площади параллелограмма, построенного на заданных векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е.



$$S = |[\bar{a},\bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\hat{\ }\bar{b})$$

4° $[\lambda\bar{a},\bar{b}] = [\bar{a},\lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a},\bar{b}]$

5° $\left[\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{b}\right]=\left[\bar{a}_1,\bar{b}\right]+\left[\bar{a}_2,\bar{b}\right]$; $\left[\bar{a},\bar{b}_1+\bar{b}_2\right]=\left[\bar{a},\bar{b}_1\right]+\left[\bar{a},\bar{b}_2\right]$

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\bar{b}=(b_1;b_2;b_3)$, то векторное произведение находится по формуле:

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Задание. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}=(6;7;10)$ и $\bar{b}=(8;5;9)$

Решение. Составляем определитель и вычисляем его:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 7 & 10\\ 8 & 5 & 9\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}7 & 10\\ 5 & 9\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}6 & 10\\ 8 & 9\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}6 & 7\\ 8 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}(7\cdot 9-5\cdot 10)-\bar{j}(6\cdot 9-8\cdot 10)+\bar{k}(6\cdot 5-8\cdot 7)=$$

$$=13\bar{i}+26\bar{j}-26\bar{k}=(13;26;-26)$$

Задание Найти скалярное и векторное произведение векторов $\bar{a}=(1,-3,5)$ и $\bar{b}=(1,2,0)$

Решение Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(\bar{a},\bar{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=1\cdot 1+(-3)\cdot 2+5\cdot 0=-5$$

Векторное произведение векторов, заданных своими координатами равно

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -3 & 5\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-10\bar{i}+5\bar{j}+5\bar{k}$$

т.е. $[\bar{a},\bar{b}]=(-10,5,5)$.

Ответ $(\bar{a},\bar{b})=-5,\ [\bar{a},\bar{b}]=(-10,5,5)$

Векторное произведение полезно для «измерения» перпендикулярности векторов — модуль векторного произведения двух векторов равен произведению их модулей, если они перпендикулярны, и уменьшается до нуля, если векторы параллельны либо антипараллельны.

Библиотеки в Python для работы с векторами и матрицами

NumPy

Сайт: http://numpy.scipy.org/

Поддерживаемые версии Python: 2.5, 2.6 (есть более старые версии,

которые поддерживают Python 2.3 и 2.4)
Документация: http://scipy.org/doc/numpy_api_docs/

Краткое описание

NumPy - это пакет, который просто необходимо ставить в первую очередь, если вы хотите заниматься вычислениями на Python.

Вот неполный список того, что есть внутри **NumPy**.

- Работа с матрицами и векторами
- Быстрое преобразование Фурье (одномерное и двумерное)
- Компиляция модулей на фортране
- Работа с полиномами (вычисление корней полинома, математические операции с полиномами и т.п.)
- Функции для линейной алгебры (вычисление определителя матрицы, вычисление обратных матриц, решение системы линейных уравнений и т.п.)

SymPy

Сайт: http://code.google.com/p/sympy/
Поддерживаемые версии Python: 2.4 - 3.1
Документация: http://docs.sympy.org/

Краткое описание

SymPy - это активно развивающаяся библиотека для символьных вычислений в Python (новые версии выходят практически каждый месяц, а иногда и чаще). Очень интересная библиотека, причем благодаря большому количеству примеров в документации освоить ее довольно легко. Правда, это же является и недостатком. Практически вся документация представляет собой набор примеров, описание отдельных классов довольно скудное.

Кроме основных символьных операций вроде упрощения выражений, раскрытия скобок, вычисления пределов и разложения функций в ряд из дробей в пакет **Sympy** входят следующие модули:

- Модуль для работы с матрицами (модуль линейной алгебры).
- Модуль геометрии, с помощью которого можно символьно вычислять площадь геометрических фигур, находить точки пересечения прямых, отрезков и лучей.
- Модуль статистики, с помощью которого можно получать случайные величины с заданной функцией распределения плотности вероятности.

- Модуль для отображения трехмерных поверхностей, заданных в виде уравнений с символьными переменными

Matplotlib

Сайт: http://matplotlib.sourceforge.net/
Поддерживаемые версии Python: 2.4, 2.5
Документация: http://matplotlib.sourceforge.net/

Краткое описание

Matplotlib - это библиотека для построения графиков и визуализации данных. Кроме большого количества типов графиков, которые можно построить с помощью этого пакета, приятной особенностью **Matplotlib** является то, что функции для построения графиков напоминают функции Matlab. Здесь есть проблемы с отображением на графиках русских букв. Зато через Matplotlib можно выводить формулы в виде TeX. Графики, нарисованные с помощью **Matplotlib** можно масштабировать для просмотра интересующей области, причем как программно из скрипта, так и через интерфейс с помощью мыши.

http://jenyay.net/Programming/PyMath