

# 两斑块间具有种群动力学的 疟疾传播模型研究

董婵, 张菊平, 李有文  
(中北大学理学院, 山西 太原 030051)

**摘要:** 建立了两个斑块间人口迁移、媒介不迁移的具有种群动力学的疟疾传播模型, 得出该模型是强单调的不可约合作系统, 并计算了基本再生数  $R_0$ , 证明了当  $R_0 \leq 1$  时, 无病平衡点全局渐近稳定; 当  $R_0 > 1$  时, 存在唯一正平衡点且全局渐近稳定。

**关键词:** 基本再生数; 全局渐近稳定; Metzler 矩阵; Lyapunov 函数; 不可约合作系统

**中图分类号:** O29 **文献标志码:** A

## Study of a malaria model with population dynamic in two patches

DONG Chan, ZHANG Ju-ping, LI You-wen  
(School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi, China)

**Abstract:** A malaria model with population dynamic in two patches is established, which the hosts can migrate between patches, but not the vectors. The model is irreducible cooperative and strongly monotone. The basic reproduction number  $R_0$  is computed. If  $R_0 \leq 1$ , then the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable. When  $R_0 > 1$ , there exists a unique endemic equilibrium, which is globally asymptotically stable.

**Key words:** basic reproduction number; global asymptotically stable; Metzler matrix; Lyapunov function; irreducible cooperative system

## 0 引言

疟疾是一种媒介——宿主传染病, 以按蚊为主要传播媒介, 由雌按蚊叮咬人体, 将其体内寄生的疟原虫传入人体而引起的全球性急性寄生虫传染病。在疾病的流行过程中, 种群的迁移使它很容易从一个地区传播到另一个地区, 因此研究多区域间的疟疾传播模型具有重要意义。

近年来, 考虑种群迁移的传染病模型研究中, 文献[1]建立了一个传染病模型并模拟了斑块间人口迁移影响下疾病传播的动力学性态, 文献[2]研究了具有固定潜伏期的  $n$  区域传染病模型。在疟疾传播动力学研究方面, 文献[3]研究了种群遵循 logistic 增长的多斑块疟疾模型, 文献[4]研究了  $n$  个斑块间人口迁移、媒介不迁移的疟疾传播模型。

本文主要讨论了两个斑块间人口迁移、媒介不迁移的具有种群动力学的疟疾传播模型, 得出模型是强单调的不可约合作系统, 并计算了基本再生数, 分析了平衡点的稳定性。

收稿日期: 2014-01-15; 网络出版时间: 2014-05-26 15:10

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/doi/106040/j.issn.1671935202014026.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301491); 山西省青年科学基金资助项目(2011021001-2); 国家数学天元基金资助项目(11226259)

作者简介: 董婵(1989-), 女, 硕士研究生, 研究方向为应用数学. E-mail: dc\_985020@163.com

## 1 模型的建立和化简

在文献[4]的基础上,考虑人的出生死亡,我们建立如下模型:

$$\begin{cases} \dot{S}_{hi} = v_i N_{hi} - b_1 a I_{vi} \frac{S_{hi}}{N_{hi}} + \gamma I_{hi} + m_{ji} S_{hj} - m_{ij} S_{hi} - v_i S_{hi}, \\ \dot{I}_{hi} = b_1 a I_{vi} \frac{S_{hi}}{N_{hi}} - \gamma I_{hi} + m_{ji} I_{hj} - m_{ij} I_{hi} - v_i I_{hi}, \\ \dot{S}_{vi} = \Lambda_i - b_2 a S_{vi} \frac{I_{hi}}{N_{hi}} - \mu_i S_{vi}, \\ \dot{I}_{vi} = b_2 a S_{vi} \frac{I_{hi}}{N_{hi}} - \mu_i I_{vi}, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $i=1, 2; j=1, 2; i \neq j$ 。模型中的参数如表1所述。

表1 参数的意义  
Table 1 The significance of the parameters

参数	意义	参数	意义
$N_{hi}$	斑块 $i$ 的人口数	$N_{vi}$	斑块 $i$ 的蚊子数
$S_{hi}$	斑块 $i$ 的易感人	$I_{hi}$	斑块 $i$ 的染病人
$S_{vi}$	斑块 $i$ 的易感蚊子	$I_{vi}$	斑块 $i$ 的染病蚊子
$v_i$	人口的出生率和死亡率	$\Lambda_i$	新增加的蚊子
$a$	蚊子叮咬人的概率	$b_1$	染病蚊子感染易感人的概率
$b_2$	染病人感染易感蚊子的概率	$\mu_i$	斑块 $i$ 中蚊子自然死亡率
$\gamma$	染病人的恢复率	$m_{ij}$	从斑块 $i$ 到斑块 $j$ 的迁移率

由于  $N_{hi}(t) = S_{hi}(t) + I_{hi}(t)$ ,  $N_{vi}(t) = S_{vi}(t) + I_{vi}(t)$ , 则模型(1)等同于下述模型:

$$\begin{cases} \dot{N}_{hi} = m_{ji} N_{hj} - m_{ij} N_{hi}, \\ \dot{N}_{vi} = \Lambda_i - \mu_i N_{vi}, \\ \dot{I}_{hi} = b_1 a I_{vi} \frac{N_{hi} - I_{hi}}{N_{hi}} - \gamma I_{hi} + m_{ji} I_{hj} - m_{ij} I_{hi} - v_i I_{hi}, \\ \dot{I}_{vi} = b_2 a (N_{vi} - I_{vi}) \frac{I_{hi}}{N_{hi}} - \mu_i I_{vi}. \end{cases} \quad (2)$$

从模型(2)中可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_{vi} = \frac{\Lambda_i}{\mu_i}$ , 于是模型(2)有如下极限系统:

$$\begin{cases} \dot{N}_{hi} = m_{ji} N_{hj} - m_{ij} N_{hi}, \\ \dot{I}_{hi} = b_1 a I_{vi} \frac{N_{hi} - I_{hi}}{N_{hi}} - \gamma I_{hi} + m_{ji} I_{hj} - m_{ij} I_{hi} - v_i I_{hi}, \\ \dot{I}_{vi} = b_2 a \left( \frac{\Lambda_i}{\mu_i} - I_{vi} \right) \frac{I_{hi}}{N_{hi}} - \mu_i I_{vi}. \end{cases} \quad (3)$$

由于模型中两斑块的总人数是不变的,那么令  $H = N_{h1} + N_{h2}$ , 我们有:

定理 1.1 系统(3)的正不变集为

$$\sigma = \left\{ (N_{hi}, I_{hi}, I_{vi}) \in \mathbf{R}^6, i=1, 2 \mid 0 \leq N_{hi} \leq H; 0 \leq I_{hi} \leq H; 0 \leq I_{vi} \leq \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \right\}.$$

为方便计算,我们对系统(3)进行化简。令

$$M = \begin{pmatrix} -m_{12} & m_{21} \\ m_{12} & -m_{21} \end{pmatrix},$$

可以求出  $M$  的特征值为  $0, -(m_{12} + m_{21})$ , 其中  $0$  的特征向量为  $\omega = \left( \frac{m_{21}}{m_{12} + m_{21}}, \frac{m_{12}}{m_{12} + m_{21}} \right)^T$ 。于是  $N^* = H\omega$

是系统

$$\begin{cases} \dot{N}_{h1} = m_{21}N_{h2} - m_{12}N_{h1}, \\ \dot{N}_{h2} = m_{12}N_{h1} - m_{21}N_{h2} \end{cases}$$

的平衡点。又  $-(m_{12} + m_{21}) < 0$  故  $N^* = H\omega$  是全局渐近稳定的。于是系统(3)的稳定性分析等价于如下系统的稳定性分析:

$$\begin{cases} \dot{I}_{h1} = b_1 a I_{v1} \frac{N_{h1}^* - I_{h1}}{N_{h1}^*} - \gamma I_{h1} + m_{21}I_{h2} - m_{12}I_{h1} - v_1 I_{h1}, \\ \dot{I}_{h2} = b_1 a I_{v2} \frac{N_{h2}^* - I_{h2}}{N_{h2}^*} - \gamma I_{h2} + m_{12}I_{h1} - m_{21}I_{h2} - v_2 I_{h2}, \\ \dot{I}_{v1} = b_2 a \left( \frac{\Lambda_1}{\mu_1} - I_{v1} \right) \frac{I_{h1}}{N_{h1}^*} - \mu_1 I_{v1}, \\ \dot{I}_{v2} = b_2 a \left( \frac{\Lambda_2}{\mu_2} - I_{v2} \right) \frac{I_{h2}}{N_{h2}^*} - \mu_2 I_{v2}. \end{cases} \quad (4)$$

令  $\beta_1 = b_1 a$ ,  $\beta_2 = b_2 a$ ,  $x_1 = \frac{I_{h1}}{N_{h1}^*}$ ,  $x_2 = \frac{I_{h2}}{N_{h2}^*}$ ,  $y_1 = \frac{\mu_1 I_{v1}}{\Lambda_1}$ ,  $y_2 = \frac{\mu_2 I_{v2}}{\Lambda_2}$ ,  $m_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1 N_{h1}^*}$ ,  $m_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2 N_{h2}^*}$ 。系统(4)还可以写成:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta_1 m_1 (1 - x_1) y_1 - \gamma x_1 + m_{12}x_2 - m_{21}x_1 - v_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \beta_1 m_2 (1 - x_2) y_2 - \gamma x_2 + m_{21}x_1 - m_{12}x_2 - v_2 x_2, \\ \dot{y}_1 = \beta_2 (1 - y_1) x_1 - \mu_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \beta_2 (1 - y_2) x_2 - \mu_2 y_2. \end{cases} \quad (5)$$

我们进一步简化系统,令

$$X = (x_1, x_2, y_1, y_2)^T \in \mathbf{R}^4, I = (1, 1, 1, 1)^T, \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \beta_1 m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} -\gamma - m_{12} - v_1 & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & -\gamma - m_{21} - v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}.$$

得

$$\dot{X} = \Phi \text{diag}(I - X) B X + \Delta X = [\Phi \text{diag}(I - X) B + \Delta] X. \quad (6)$$

**定理 1.2** 系统(6)的正不变集为  $[0, 1]^4$ 。

**定理 1.3** 系统(6)在  $[0, 1]^4$  是合作并且强单调的。

**证明** 系统(6)在  $\mathbf{R}^4$  上的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 m_1 y_1 - \gamma - m_{12} - v_1 & m_{12} & \beta_1 m_1 (1 - x_1) & 0 \\ m_{21} & -\beta_1 m_2 y_2 - \gamma - m_{21} - v_2 & 0 & \beta_1 m_2 (1 - x_2) \\ \beta_2 (1 - y_1) & 0 & -\beta_2 x_1 - \mu_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 (1 - y_2) & 0 & -\beta_2 x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}.$$

显然对于  $0 \leq X \leq I$ ,  $J$  中非对角线元素非负,故  $J$  是一个 Metzler 矩阵。又  $J$  所对应的有向图中任意两个不同的顶点都互通,则  $J$  强连通。因此系统(6)是一个不可约合作系统, Hirsh 证明了不可约合作系统其解是强单调的<sup>[5]</sup>,于是系统(6)在  $[0, 1]^4$  上是强单调的。

## 2 基本再生数及稳定性分析

原点是系统(5)的无病平衡点 根据文献[6]我们有

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_1 m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 m_2 \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \gamma + m_{12} + v_1 & -m_{12} & 0 & 0 \\ -m_{21} & \gamma + m_{21} + v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma + m_{21} + v_2}{(\gamma + m_{12} + v_1)(\gamma + m_{21} + v_2) - m_{12}m_{21}} & \frac{m_{12}}{(\gamma + m_{12} + v_1)(\gamma + m_{21} + v_2) - m_{12}m_{21}} & 0 & 0 \\ \frac{m_{21}}{(\gamma + m_{12} + v_1)(\gamma + m_{21} + v_2) - m_{12}m_{21}} & \frac{\gamma + m_{12} + v_1}{(\gamma + m_{12} + v_1)(\gamma + m_{21} + v_2) - m_{12}m_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix}.$$

令  $\gamma + m_{12} + v_1 = A$ ,  $\gamma + m_{21} + v_2 = B$  则

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_1 m_1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1 m_2}{\mu_2} \\ \frac{\beta_2 B}{AB - m_{12}m_{21}} & \frac{\beta_2 m_{12}}{AB - m_{12}m_{21}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2 m_{21}}{AB - m_{12}m_{21}} & \frac{\beta_2 A}{AB - m_{12}m_{21}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若  $C$  是  $n \times p$  矩阵  $D$  是  $p \times n$  矩阵 则

$$\det \begin{pmatrix} \lambda I_n & -C \\ -D & \lambda I_p \end{pmatrix} = \lambda^{n-p} \det(\lambda^2 I_p - DC) = \lambda^{p-n} \det(\lambda^2 I_p - CD).$$

于是

$$\det(\lambda I_4 - FV^{-1}) = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{\beta_1 \beta_2 m_1 B}{\mu_1 (AB - m_{12}m_{21})} & -\frac{\beta_1 \beta_2 m_1 m_{12}}{\mu_1 (AB - m_{12}m_{21})} \\ -\frac{\beta_1 \beta_2 m_2 m_{21}}{\mu_2 (AB - m_{12}m_{21})} & \lambda^2 - \frac{\beta_1 \beta_2 m_2 A}{\mu_2 (AB - m_{12}m_{21})} \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 - \frac{\beta_1 \beta_2 (m_1 B \mu_2 + m_2 A \mu_1)}{\mu_1 \mu_2 (AB - m_{12}m_{21})} \lambda^2 + \frac{\beta_1^2 \beta_2^2 m_1 m_2 (AB - m_{12}m_{21})}{\mu_1 \mu_2 (AB - m_{12}m_{21})^2} = 0,$$

$$R_0^2 = \frac{\beta_1 \beta_2 (m_1 B \mu_2 + m_2 A \mu_1) + \beta_1 \beta_2 \sqrt{(m_1 B \mu_2 + m_2 A \mu_1)^2 - 4m_1 m_2 (AB - m_{12}m_{21}) \mu_1 \mu_2}}{2\mu_1 \mu_2 (AB - m_{12}m_{21})},$$

令  $\xi = \Lambda_1 \mu_2^2 (m_{12}m_{21} + m_{12}^2) (\gamma + m_{21} + v_2) + \Lambda_2 \mu_1^2 (m_{21}^2 + m_{12}m_{21}) (\gamma + m_{12} + v_1)$  则

$$R_0^2 = \frac{b_1 b_2 a^2 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 4\Lambda_1 \Lambda_2 \mu_1^2 \mu_2^2 (m_{12} + m_{21})^2 m_{12}m_{21} [(\gamma + m_{12} + v_1)(\gamma + m_{21} + v_2) - m_{12}m_{21}]})}{2\mu_1^2 \mu_2^2 H m_{12}m_{21} [(\gamma + m_{12} + v_1)(\gamma + m_{21} + v_2) - m_{12}m_{21}]}.$$

**定理 2.1** 如果  $R_0 \leq 1$  那么系统 (6) 的无病平衡点是全局渐近稳定的。

**证明** 无病平衡点的 Jacobian 矩阵  $J = F - V = \Phi B + \Delta$ 。由于  $-V$  是非平凡 Metzler 矩阵,  $F \geq 0$  那么  $\alpha(J) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(J)} \text{Re } \lambda \leq 0 \Leftrightarrow R_0 \leq 1^{[6]}$ 。

显然  $J$  是一个不可约 Metzler 矩阵, 则存在一个向量  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T \geq 0$  使得  $c^T (\Phi B + \Delta) = \alpha(J) c^T \leq 0$ 。我们构造一个 Liapunov 函数  $V(X) = \langle c | X \rangle$ ,  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  表示内积,  $V(X) \geq 0$ 。沿系统 (6) 对  $V$  求导得  $\dot{V} = \langle c | (\Phi \text{diag}(I - X) B + \Delta) X \rangle = \langle c | (\Phi B + \Delta) X \rangle - \langle c | \Phi \text{diag}(X) B X \rangle$ 。

若  $R_0 < 1$  则  $\alpha(\Phi B + \Delta) < 0$  那么  $\dot{V} \leq \langle c | (\Phi B + \Delta) X \rangle = \alpha(\Phi B + \Delta) \langle c | X \rangle < 0$  若  $R_0 = 1$  则  $\alpha(\Phi B + \Delta) = 0$  于是  $\dot{V} = -\langle c | \Phi \text{diag}(X) B X \rangle \leq 0$ 。

考虑集合  $\mathcal{E} = \{X \in [0, 1]^4 | V(X) = 0\}$ 。 $\mathcal{E} = \{(x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 \neq 0, y_2 \neq 0), (x_1 = 0, x_2 \neq 0, y_1 \neq 0, y_2 = 0), (x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 \neq 0, y_2 = 0), (x_1 \neq 0, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 \neq 0), (x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, y_1 = 0, y_2 = 0), (x_1 \neq 0, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0), (x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 \neq 0), (x_1 = 0, x_2 \neq 0, y_1 = 0, y_2 = 0), (x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0)\}$ 。

若  $x_1 = 0$  由  $\dot{x}_1 = \beta_1 m_1 (1 - x_1) y_1 - \gamma x_1 + m_{12} x_2 - m_{12} x_1 - v_1 x_1 = \beta_1 m_1 y_1 + m_{12} x_2 = 0$  可得对于  $m_{12} \neq 0$  有  $y_1 = 0, x_2 = 0$ 。若  $x_2 = 0$  由  $\dot{x}_2 = \beta_2 m_2 (1 - x_2) y_2 - \gamma x_2 + m_{21} x_1 - m_{21} x_2 - v_2 x_2 = \beta_2 m_2 y_2 + m_{21} x_1 = 0$  可得对于  $m_{21} \neq 0$  有  $y_2 = 0, x_1 = 0$ 。若  $y_i = 0$  由  $\dot{y}_i = \beta_i (1 - y_i) x_i - \mu_i y_i = \beta_i x_i = 0$  可得  $x_i = 0$ 。从而  $\mathcal{E}$  是单点集  $\{0\}$ 。由 LaSalle 不变集原理知无病平衡点是全局渐近稳定的。

**定理 2.2** 如果  $R_0 > 1$  系统(6)存在唯一正平衡点且全局渐近稳定。

**证明** 文献[7]的定理 6.1 证明了具有凹性质的不可约合作系统, 其所有轨线收敛于原点, 或者存在一个唯一的正平衡点  $P$  使得所有轨线收敛于  $P$ 。当  $R_0 > 1$  时, 无病平衡点即原点是不稳定的<sup>[6]</sup>。易验证系统(6)的 Jacobian 矩阵中每个元素关于  $x_1, x_2, y_1, y_2$  分别是单调递减的, 即系统(6)所对应的向量场是凹的。又由定理 1.3 知系统(6)是不可约合作系统, 则系统(6)存在唯一正平衡点且全局渐近稳定。

### 3 数值模拟及应用

基于上述理论, 我们给出数值模拟来证明人口迁移对疟疾传播的影响。

当斑块间没有迁移即  $m_{ij} = 0$  时, 模型(1)变为单斑块模型, 根据文献[6]我们有

$$R_{0i} = \sqrt{\frac{b_1 b_2 a^2 \Lambda_i}{(\gamma + v_i) \mu_i^2 N_{hi}}} \quad i = 1, 2。$$

依据文献[4]令  $b_i = 0.3; a = 0.2; \mu_i = 0.2; \gamma = 1/20; v_i = 0.03; \Lambda_i = 200; N_{hi} = 250; H = 500$ 。利用 MATLAB 可得  $R_{0i} = 0.9487 < 1$ , 此时疟疾在单个斑块内不传播。若斑块间具有人口迁移, 则两个斑块作为一个整体的  $R_0$  情况如图 1 所示。令  $b_i = 0.3; a = 0.2; \mu_i = 0.2; \gamma = 1/20; v_i = 0.03; \Lambda_1 = 230; \Lambda_2 = 200; N_{hi} = 250; H = 500$ 。利用 MATLAB 可得  $R_{01} = 1.0173 > 1, R_{02} = 0.9487 < 1$ , 此时疟疾在斑块 1 内传播, 在斑块 2 内不传播。若斑块间具有人口迁移, 则两个斑块作为一个整体的  $R_0$  情况如图 2 所示。

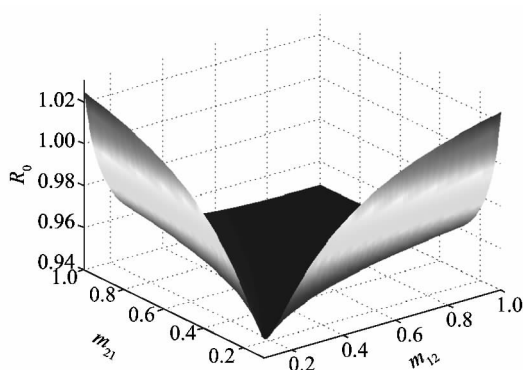


图 1 当  $R_{0i} < 1$  时  $R_0$  与  $m_{ij}$  的关系  
Fig. 1 The relationship between  $R_0$  and  $m_{ij}$  when  $R_{0i} < 1$

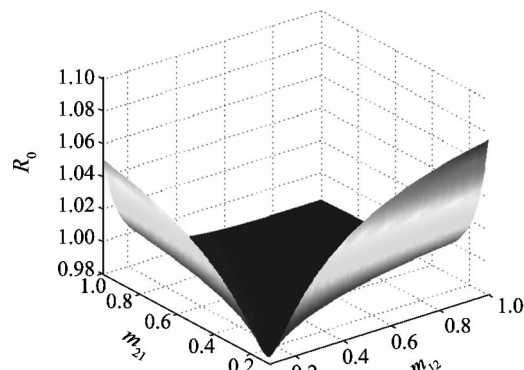


图 2 当  $R_{01} > 1; R_{02} < 1$  时  $R_0$  与  $m_{ij}$  的关系  
Fig. 2 The relationship between  $R_0$  and  $m_{ij}$  when  $R_{01} > 1; R_{02} < 1$

由图 1 可以看出即使单个斑块内没有疟疾传播, 不恰当的人口迁移也可能引起疟疾爆发。从图 2 可以得出即使有一个斑块内出现疟疾传播, 若适当地控制人口迁移率就会使疟疾消亡。这给疟疾传播的防治工作提供了理论依据。

(下转第 84 页)

把这些新的估计代入(4.1) 取  $R = \left[ \frac{1}{|S_{d-1}|} \frac{\left(d - \frac{\alpha}{2}\right)^4}{(d - \alpha)^3} \frac{\left(\int |v|^\alpha f^3 dv\right)^3}{\left(\int |v|^\alpha f^2 dv\right)^2} \right]^{\frac{1}{\alpha+d}}$  ,有

$$\int f dv \leq 2 \left[ \frac{|S_{d-1}|^\alpha \left(d - \frac{\alpha}{2}\right)^{2(d-\alpha)}}{(\alpha - d)^{2d-\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha+d}} \left(\int |v|^\alpha f^2 dv\right)^{\frac{2d-\alpha}{\alpha+d}} \left(\int |v|^\alpha f^3 dv\right)^{\frac{\alpha-d}{\alpha+d}}.$$

移项整理就获得了插值不等式(3.3)。

参考文献:

- [1] KANIADAKIS G, QUARATI P. Kinetic equation for classical particles obeying an exclusion principle[J]. Phys Rev E, 1993, 48: 4263-4270.
- [2] KANIADAKIS G, QUARATI P. Classical model of bosons and fermions[J]. Phys Rev E, 1994, 49: 5103-5110.
- [3] GUÉNAULT T. Statistical Physics[M]. Berlin: Springer, 2007.
- [4] CARRILLO J A, ROSADO J, SALVARANI F. 1D nonlinear Fokker-Planck equations for fermions and bosons[J]. Applied Math Letters, 2008, 21: 148-154.
- [5] NEUMANN L, SPARBE C. Stability of steady states in kinetic Fokker-Planck equations for Bosons and Fermions[J]. Commun Math Sci, 2007, 5(4): 765-777.
- [6] TOSCANI G. Finite time blow up in Kaniadakis-Quarati model of Bose-Einstein particles[J]. Commun Part Diff Eq, 2012, 37(1): 77-87.
- [7] SPOHN H. Kinetics of Bose-Einstein condensation[J]. Physica D, 2010, 239: 627-634.
- [8] JOSSERAND C, POMEAU Y, RICA S. Self-similar singularities in the kinetics of condensation[J]. J Low Temp Phys, 2006, 145: 231-265.

(编辑: 于善清)

(上接第 78 页)

## 4 结语

本文主要讨论了两个斑块间人口迁移、媒介不迁移的具有种群动力学的疟疾传播模型, 得出模型是强单调的不可约合作系统, 并计算了基本再生数  $R_0$ , 证明了当  $R_0 \leq 1$  时, 无病平衡点全局渐近稳定, 当  $R_0 > 1$  时, 存在唯一正平衡点且全局渐近稳定。最后给出数值模拟及应用表明了这个模型的重要性。

参考文献:

- [1] WANG W D, MULONE G. Threshold of disease transmission in a patch environment[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 285(1): 321-335.
- [2] LI J, ZOU X F. Dynamics of an epidemic model with non-local infections for diseases with latency over a patchy environment[J]. Journal Mathematical Biology, 2010(60): 645-686.
- [3] GAO D Z, RUAN S G. A multipatch malaria model with logistic growth populations[J]. Society for industrial and applied mathematics, 2012, 72(3): 819-841.
- [4] AUGER P, KOUOKAM E, SALLET G, et al. The Ross-Macdonald model in a patch environment[J]. Mathematical Biosciences, 2008(216): 123-131.
- [5] HIRSCH M W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative ii: convergence almost everywhere[J]. SIAM J Math Anal, 1985, 16(3): 423-429.
- [6] DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002(180): 29-48.
- [7] HIRSCH M W. The dynamical systems approach to differential equations[J]. Bull. Am Math Soc, 1984, 11: 1-64.

(编辑: 于善清)