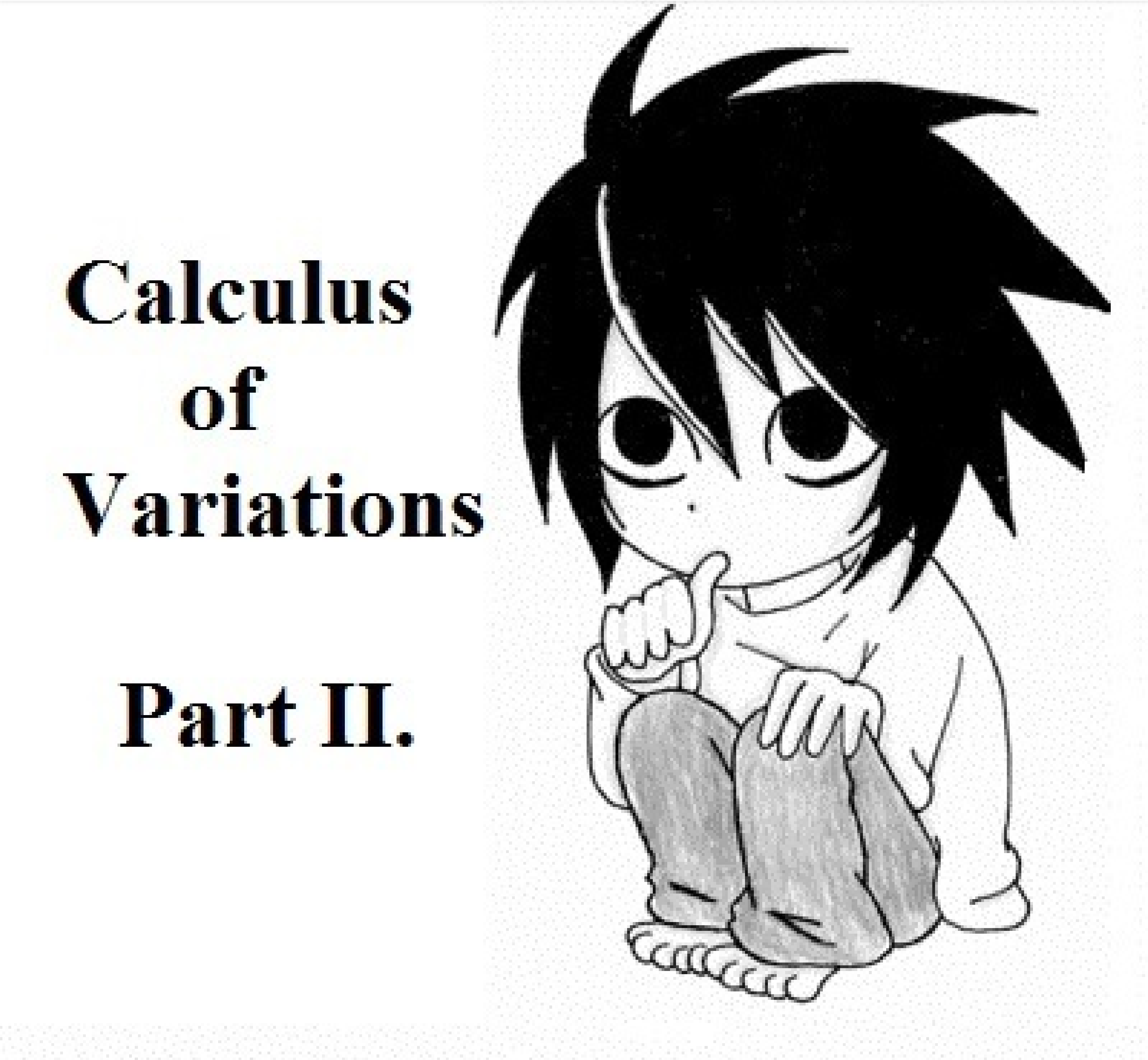

变分法简介Part 2.（Calculus of Variations）

Dr.Stein
计算力学

接着上次Part 1.的内容。首先回顾下，上节最后我们得到了泛函数的一阶变分：

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\delta y dx+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}$$

从上式我们又可以得到欧拉-拉格朗日方程(E-L equation):

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\qquad x_1\leq x\leq x_2$$

以及边界条件：

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}=0$$

不是第一项为零就是第二项为零（或者都为零）。如果在边界 x_1 或 x_2 处 $\frac{\partial F}{\partial y'}$ 等于零，那么我们称在 x_1 或 x_2 处满足**Natural Boundary Condition**。对应的，如果在边界 x_1 或 x_2 处 δy 等于零，我们就称在 x_1 或 x_2 处满足**Essential Boundary condition**。$\delta y=0$ 是一个比较模糊的概念，不好判断，所以我们把它等价转化一下。如果y在某一点处的变分为零，说明它在这点的值是确定不变的。换句话说如果y在边界上是确定的值(specified)，那么我们称这个是essential boundary condition。

Solution of Example 1

现在我们终于可以解Part 1.中提出的两点之间直线最短的问题啦。我们回忆下两点之间的路径长度泛函数是：$L=\int_{x1}^{x2}\sqrt{1+(y')^2}dx$。也就是说 $F=\sqrt{1+(y')^2}$。带入欧拉-拉格朗日方程(E-L equation)：$\frac{\partial F}{\partial y}=0$，$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$

E-L: $0-\frac{d}{dx}(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}})=0, \quad x\epsilon(x_1,x_2)$

两个边界条件(BC)：$y(x_1)=y_1 \quad \& \quad y(x_2)=y_2$,所以在两个边界点上都是Essential Boundary Condition。

然后解一下E-L方程，可以得出：$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=constant=C$。进一步化简可以得出：

$(y')^2=\frac{C^2}{(1-C^2)}$，

上式表示y'是常数，导数是常数的曲线是什么？是直线。加上边界条件，两点之间路径最短的曲线就是直线了。这里我们用变分法科学得解释了一个非常直观的问题。

当然上述问题中，F只是y和y'的函数，但是F完全还可能是y''甚至更高阶导数的函数。这时候我们用上节所说的设 $\tilde{y}(x)=y(x)+\epsilon\eta(x)$ 的方法就有点麻烦了（但是也可行）。这里我们提供一个更高效的方法，直接对泛函数求变分。

假如泛函数 $I=\int_{x_1}^{x_2}F(y,y',y'';x)dx$,那么它的一阶变分为：

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'')dx$$

然后再进行分部积分得到：

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''})\delta y dx+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2}+[\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y''})]\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}=0$$

同样我们可以得到欧拉-拉格朗日方程：

E-L: $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}=0$

以及边界条件：

@ x_1 and x_2 : $\frac{\partial F}{\partial y''}=0$ (Natural) or $\delta y'=0$ (Essential) ; $\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y''})=0$ (Natural) or $y=0$ (Essential)

带约束条件的泛函数极值问题（拉格朗日乘数）

格朗日乘数(λ)。

假设约束条件为： $J(y)=\int_{x1}^{x_2}G(y,y';x)=constant$

那我们引入拉格朗日乘数在原泛函数的基础上构建新的泛函数：

$$I^*=I+\lambda J=\int_{x_1}^{x_2}(F+\lambda G)dx=\int_{x_1}^{x_2}F^*(y,y';x)dx$$

然后我们就可以转化成之前的问题来解了。还是用刚才提到的最大化面积问题为例来阐述下这个过程吧：

面积： $A=\int_{x_1}^{x_2}ydx$,

边界长度约束： $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}dx=constant$

则： $I^*=\int_{x_1}^{x_2}[y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}]dx$

令一阶变分为零($\delta I^*=0$):

$$\int_{x_1}^{x_2}[\delta y+\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\delta y']dx=0$$

依旧老朋友分部积分：

$$\delta I^*=\int_{x_1}^{x_2}[1-\lambda\frac{d}{dx}(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}})]\delta ydx+B.C.term=0$$

这里图方便我就将边界条件项用B.C.term代替啦。然后欧拉-拉格朗日方程为：

E-L： $1-\lambda\frac{d}{dx}(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}})=0 \qquad x\in(x_1,x_2)$

现在我们可以解一下E-L方程：

$$\frac{d}{dx}(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}})=\frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{1}{\lambda}$$

也就是说边界是曲率恒为 $\frac{1}{\lambda}$ 的曲线，即半径为 λ 的圆，这也和我们日常的常识符合一致。

现在引用圆的参数方程：

$$\begin{aligned}x-x_0&=\lambda\text{cost}\\ y-y_0&=\lambda\text{sint}\quad t\in[0,2\pi]\end{aligned}$$

带入原约束方程：

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}dt=2\pi\lambda$$

可以解得半径 $\lambda=S/2\pi$ 。

编辑于 2018-02-10

「真诚赞赏，手留余香」

赞赏

还没有人赞赏，快来当第一个赞赏的人吧！

有限元分析（FEA） 固体力学 应用数学

文章被以下专栏收录

Dr. Stein's Lab
这是一个中二少年记录有关有限元，计算力学，固体力学的基础知识和自己的一些科...
已关注

推荐阅读

变分法&能量原理（中）

QuYln

变分法&能量原理（下）

QuYln

变

Qu

24 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...

数峰青 1 年前

先赞，有时间再看

赞

斯是陋室 1 年前

写的非常不错哦，还会有再次的更新ma

赞

Dr.Stein (作者) 回复 斯是陋室 1 年前

谢谢，还会继续更新的

赞 查看对话

夏筠峥 1 年前

赞

夏筠峥 1 年前

可以解释一下Natural Boundary Condition的物理意义么

赞

Dr.Stein (作者) 回复 夏筠峥 1 年前

好仔细，已改正，谢谢~

赞 查看对话

Dr.Stein (作者) 回复 夏筠峥 1 年前

用文字解释可能没有数学那么严谨，但是我可以举个例子让你感受下。比如有一个悬臂梁（一端固定一端自由），现在在自由端施加一个向下1个单位的位移，求解整个梁的位移分布。这个问题中，两端的位移约束是Essential B.C.,是外界强加的约束，直接决定了这个问题的解，所以很essential。而整个梁体的外表面traction-free是Natural B.C.,是问题的解自然满足的，所以称为natural.

赞 查看对话

夏筠峥 回复 Dr.Stein (作者) 1 年前

我觉得可能我的困惑点在于∂F/∂y'不能理解吧。。不知道他具体含义代表了什么，然后如果我们满足了Essential B.C.还需要满足Natural B.C.么，这两个从表达式来看是不是可以同时存在，也可以两者取一个？最后我查了traction-free但是不是很理解 “Traction free boundary condition means that the the surface is free from external stress.” 您能否详细解释一下。我本身学结构，但可能对mechanics的理解还不够深。

赞 查看对话

Dr.Stein (作者) 回复 夏筠峥 1 年前

表达式上看是可以同时存在，但是实际中永远只满足其中一个，不然就过定义了。就比如说在直线的例子中，在两个端点已经有了Essential B.C, 如果你再要求∂F/∂y'在两个端点等于零，把F带进去解一下发现要求y'在两个端点等于零，就和直线斜率冲突了。∂F/∂y'根据F和y的不同物理意义也不同，就拿traction-free这个例子，其中存在一个边界项为σij*nj*δu，这里σij*nj=0就是在边界上的Natural B.C.(变分前面部分等于0是Natural B.C, 变分部分等于0是Essential B.C)。固体力学中traction ti=σij*nj，也就是你查到的句子里的external stress. 物理意义就是在traction-free的边界上没有外力施加。详细解释solid mechanic感觉不能三言两语解释清，还是推荐看一些书，目前linear elasticity就够了。

赞 查看对话

朱子青 8 个月前

没太理解你说的，直接对泛函数求变分什么意思？
那个泛函求解形式，不就是用y=y+ne 的得到的吗？其实，暗含了还是用这个做的？
就是照搬格式就行了？

赞

朱子青 回复 Dr.Stein (作者) 8 个月前

看了两点之间线段最短的例子，觉得很有意思。
数学体系果然都是自洽的，代数分析，最后也能得出几何上的公理。

赞 查看对话

朱子青 8 个月前

其实example1 还不够严谨。应该说明一下，二阶变分在条件满足时，大于0。
当然结合实际问题背景，已经可以得出答案。

赞

银河系花菜 5 个月前

五道口的海龟 4 个月前

明白了，写的很好，感谢！

赞

徐元昭 4 个月前

思路和教授的一摸一样，而且讲解比教授详细，期待更新

赞

大表哥他哥亲哥 3 个月前

为什么必须要用分部积分呢？没有分部积分就得不到最后的结果吗

赞

王斯基 2 个月前

真～巨佬

赞

laplace 1 个月前

请教一下求导的问题。
这里是否要考虑y'对y的导数和y对y'的导数?也就是dy'/dy 和 dy/dy'（partial不会打先用d代替了不好意思）
其中dy'/dy=d(dy/dx)/dy=d(dy/dy)dx=0
但dy/dy'怎么算呢？如果是上式的倒数那就变成无穷了

赞

邬佳容 1 个月前

在直接对泛函数求变分的最后，边界条件里y和y'=0是否是少了变分符号？

赞

邬佳容 1 个月前

以及lambda应该在推导过程中是任取的？但是在最后也会有关于lambda的约束吧，和那个常数有关？这个怎么体现呢？

赞

1 2 下一页