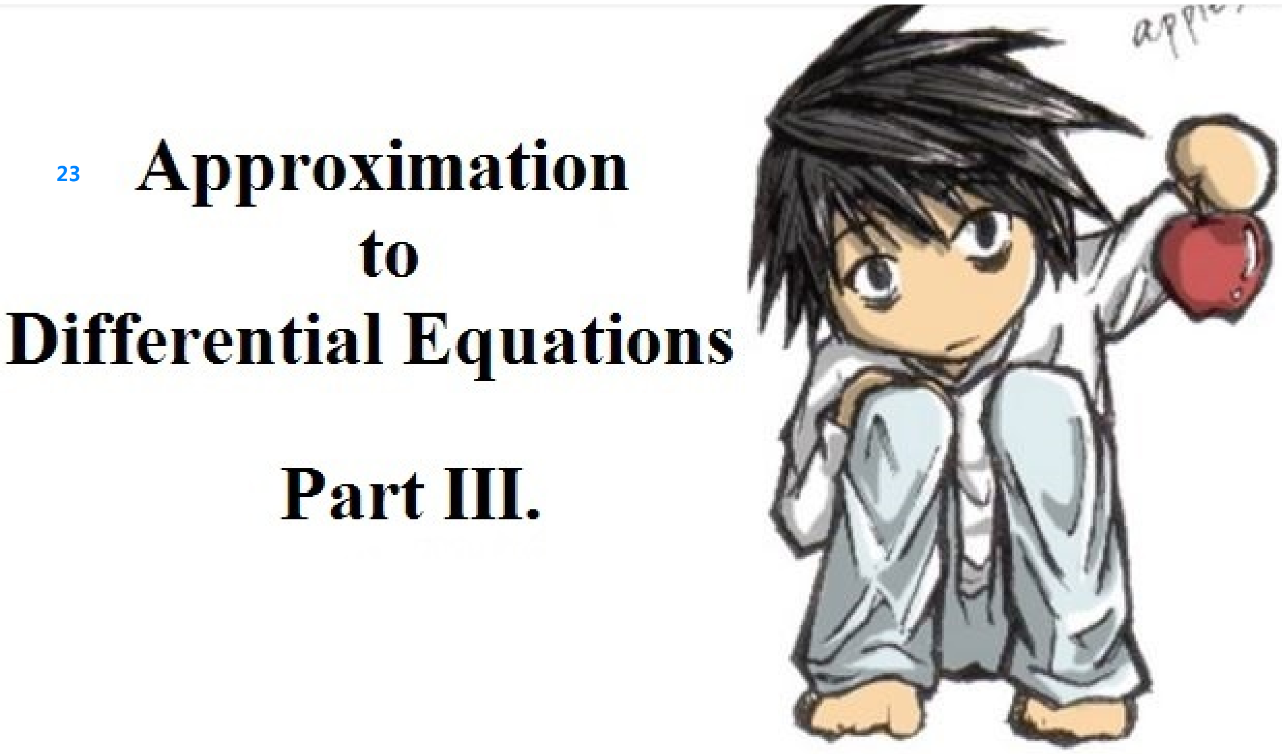


变分法近似解法 Part 3.---Weak Form Galerkin

Dr.Stein
计算力学

抓住周末的尾巴把最后一种近似解法Weak Form Galerkin更完。弱形式是应用最广也是被应用于有限元的方法。

3.Weak Form Galerkin

弱形式和强形式的本质是一致的，其实可以通过分部积分将强形式转化为弱形式。强形式的主要缺点在于，所设的近似解函数需要有非常高阶的可微性。以上篇文章中的Example 2.为例，待解的微分方程含有四阶导数项 y''''，所以所设的近似解函数需要保证四阶导数不为零，如果使用多项式形式的话，则最高次项至少要是四次。这和上文提到的由于四个边界条件都要满足所以至少要是四次的结论是一致的。对应的，**弱形式的优点在于可以通过分部积分将要求的可微次数减半，并且近似解函数只需满足Essential boundary condition，不必满足Natural boundary condition.** 直接说这个结论比较难以理解，还是结合一个简单的例子说明。

假设我们现在要解这样一个带边界条件的微分方程：

$y'' - y - 1 = 0$; B.C.: $y(0) = 1$, $y'(1) = 0$

其中 $y(0) = 1$ 是Essential boundary condition, $y'(1) = 0$ 是Natural boundary condition.

根据上一篇文章中强形式的思路，我们会将微分方程乘以一个权函数（基函数），然后令加权积分为零。在弱形式中，我们将乘的这个函数称为检验函数(test function)，用 $v(x)$ 表示。（后文会谈到这个 $v(x)$ 和待解函数的变分 δy 不可告人的关系）。现在我们得到了下式：

$$\int_0^1 [(y'' - y - 1)v]dx = \int_0^1 y''v\,dx - \int_0^1 yv\,dx - \int_0^1 v\,dx = 0$$

我们可以发现第二项积分内 y 和 v 的微分次数是一样的（都是零次微分），但是第一项积分内 y 是二次微分而检验函数 v 是零次微分。如果使用分部积分，就可以将一次微分转移到检验函数 v 上，**这样 y 的近似解函数只需是一阶线性的而不用是二次的了(对应上文提到的将要求的可微分次数减半)**。通过分部积分可得：

这样积分内 y 和 v 的微分次数就一样了，看上去很舒服，处女座的福音啊，没错我就是。想起小学数学老师说的，数学是应该有美感的。不小心扯远了。。

现在我们来处理边界项 $y'v\Big|_0^1$ ，

23

$$y'v\Big|_0^1 = y'v\Big|_{x=1} - y'v\Big|_{x=0} = y'(1)v(1) - y'(0)v(0)$$

由边界条件可知，$y'(1)=0$。另外由于在 $x=0$ 处有Essential boundary condition $y(0)=1$ ，所以 $v(0)=0$ (这是基函数的性质，即 $v(x)$ 在有Essential boundary condition的点处为零，后面会从另一个角度阐述这个性质)。将 $y'(1)=0$ 和 $v(0)=0$ 带入边界项可得出边界项为零。当然这种情况只是巧合，边界项不是一定等于零。

现在，我们最初的加权积分等式被化简为了：

$$\int_0^1 y'v' + yv + v\,dx = 0$$

其实上式就已经是原微分方程的**弱形式(Weak Form)**了。

这里我希望大家能去变分法Part 1那篇文章的前几段复习一下微分方程和原泛函数的关系。通过令泛函数的一阶变分为零，经过分部积分的化简，可以得到积分内的微分方程。上文中我们从微分方程开始得到了弱形式，现在可以继续反推到原泛函数。这么做的目的是为了显示泛函数和其对应的微分方程的可逆关系。具体步骤如下：

首先弱形式积分中的前两项($y'v'$ 和 yv)中 y 和 v （或者 $y^{(n)}$ 和 $v^{(n)}$ ，上标n代表n次导数）都是线性的，而第三项只有线性的 v。所以我们定义：

$$B(y,v) = \int_0^1 y'v' + yv\,dx\text{；}\; l(v) = \int_0^1 v\,dx$$

其中 $B(y,v)$ 称为双线性项(y 和 v 或其微分都是线性的)，$l(v)$ 称为线性项。

这样，我们就可以得到对应微分方程的原泛函数是：

$$I(y) = \frac{1}{2}B(y,y) + l(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y')^2 + y^2 + 2y\,dx$$

有兴趣的可以试着用变分法将这个泛函数化为一开始的微分方程，可以发现是一致的。从弱形式到泛函数的过程中，实际上我们做了一个 $v \to \delta y$ 的替换。如果将弱形式中的 v 替换成 δy ，则可以得到：

$$\int_0^1 y'\delta y' + y\delta y + \delta y\,dx = 0$$

这个式子实际上就是泛函数 I 的一阶变分 δI。一切都联系在一起了。如果将 v 和 δy 看成是等价，我们可以从另一个角度解释为什么 $v(x)$ 在Essential boundary condition的地方等于零。比如有 $y(0)=1$ 这个Essential B.C.，说明 $y(x)$ 在 $x=0$ 处是确定或固定的，只能等于1，因此自然其变分 δy 在 $x=0$ 是等于零的，因为是确定的值没有变动的空间。

从弱形式还原到原泛函数这段算是额外的内容，让我们回到如何用Weak Form Galerkin求解近似解。还是用那个大家已经看过两遍的Example 2.的例子，方便和其余方法比较。

Example. 2

$$I[y(x);x] = \int_0^2 [0.5(y'')^2 + 5(y')^2 + 2y^2 + y]dx - 10y(0)$$

Essential Boundary Conditions: $y(2)=0$ ； $y'(0)=-2$

Natural Boundary Conditions: $y'''(0)=-10$ ； $y''(2)=0$

解：

和Strong Form Galerkin（SFG）一样，我们从泛函数对应的微分方程开始：

$y'''' - 10y'' + 4y + 1 = 0,\ \ 0 < x < 2$，（加上上述题目中的边界条件）

第一步也和SFG类似，将微分方程乘以检验函数然后求积分:

$$\int_0^2 y''''v - 10y''v + 4yv + v\,dx = 0$$

然后通过分部积分平衡微分，将 y'''' 中的两撇分给 v，y'' 中的一撇分给 v,可以得到：

$$\int_0^2 y''v'' + 10y'v' + 4yv + v\,dx + (y''' - 10y')v\Big|_0^2 - y''v'\Big|_0^2 = 0$$

展开一下积分外的边界项：

$$[y'''(2) - 10y'(2)]v(2) - [y'''(0) - 10y'(0)]v(0) - y''(2)v'(2) + y''(0)v'(0)$$

由于 $y(2) = 0$ 和 $y'(0) = -2$ 这两个Essential B.C, 可以得到 $v(2) = 0$ 以及 $v'(0) = 0$。再加上那两个Natural B.C,边界项可最终化简为 $-10v(0)$。这样整个式子就被化简为：

$$H(y, v) = \int_0^2 y''v'' + 10y'v' + 4yv + v\,dx - 10v(0) = 0$$

也就是弱形式。和SFG一样，想要求解近似解，我们也需要先将其设成一个已知形式，这里我们依然使用多项式。这里弱形式的优势就显现出来了，现在多项式只需要保证二次导数不为零，同时只有两个Essential B.C.需要满足，因此多项式最少是二次的。如果设一个二次多项式，那么一共会有三个系数，为了满足两个Essential B.C,最终只剩下一个未知待解系数。为了得到更精确的解，这里我们设一个三次多项式，即含有两个未知系数。

$$\tilde{y}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

带入两个Essential B.C.解得：

$$\tilde{y}(x) = 4 - 2x + a_2(x^2 - 4) + a_3(x^3 - 8)$$

上式中，$4 - 2x$ 是 ϕ_0，a_2 是 c_1，$x^2 - 4$ 是 ϕ_1，a_3 是 c_2，$x^3 - 8$ 是 ϕ_2。这样就可以把 $\tilde{y}(x)$ 统一成 $\tilde{y}(x) = \phi_0 + c_i\phi_i$ 的形式。

现在我们将弱形式 $H(y, v)$ 中的所有 y 替换成 $\tilde{y}(x)$, 所有 v 替换成 ϕ_i (不算 ϕ_0)。这样我们可以得到两个式子：

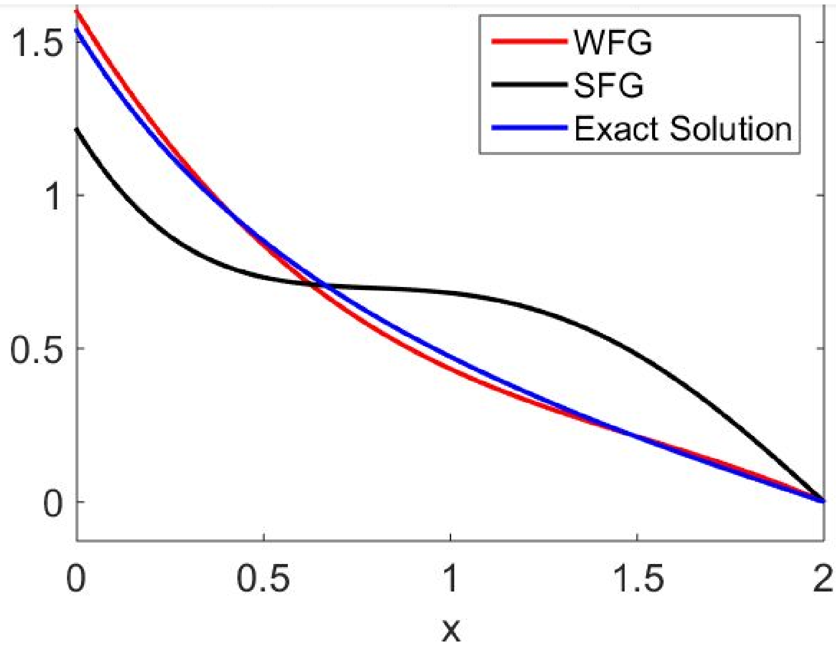
$$H[\tilde{y}(x), \phi_1] = 0$$
$$H[\tilde{y}(x), \phi_2] = 0$$

这两个方程中仅有 c_1，c_2 两个未知量，是可解的。最终解得 $c_1 = 1.0682$，$c_2 = -0.2341$。

所有通过Weak Form Galerkin得到的近似解为：

$$\tilde{y}(x) = -0.234x^3 + 1.068x^2 - 2x + 1.600$$

同样，用Matlab将这次结果和精确解以及上一篇文章中的SFG的结果进行对比。可以发现这次逼近了精确解很多。这是由于这次使用了两个未知系数而上次SFG只用了一个。我试过如果SFG也用两个未知系数，其结果会比WFG更精确（对于这个例子）。但是我们仍然可以看出弱形式的优势，对于这个例子，弱形式在使用更低次的多项式的情况下，依然比强形式的结果逼近精确解（弱形式使用了三次多项式，强形式使用了四次多项式）。



总之近似解法这个系列算是告一段落。后面我想到的话题有：的，包括编写简单的有限元程序。(2)固体力学，如弹塑性力学。(3)如何用COMSOL软件用弱形式的方法求解问题。如果有其他好的建议可以在评论处留言，如果是我力所能及的话题我会尽力在专栏中更新的~

发布于 2016-09-26

有限元分析（FEA） 应用数学 数学

浅斟低唱 QuYIn Qu

23

21 条评论 切换为时间排序

写下你的评论...

曹孟德 1 年前

想看讲一讲边界元，无限元还有有限体积法以及等几何分析，是不是要求太多...

赞

pei shiyuan 1 年前

漂亮！功力深厚~

1

挑灯看剑 1 年前

鼓励鼓励，楼主好厉害

赞

大齐小李 1 年前

大神专栏不要停啊，等着追呢！

赞

Dr.Stein (作者) 回复 大齐小李 12 个月前

感谢支持，最近有些忙，不过不会断更的～

赞 查看对话

Nassco 9 个月前

非常想看weak form与FEM结合的讲解～！！我觉得你写的非常好～谢谢了！

1

吴泊成 7 个月前

讲得太好了，瞬时通透了，崇拜啊。大神怎么不接着写了？好期待你的新文章

赞

刘鑫 7 个月前

求更新啊～对(1)和(3)感兴趣

赞

Dr.Stein (作者) 回复 吴泊成 7 个月前

感谢支持，今年忙着毕业，会继续更新的

赞 查看对话

Dr.Stein (作者) 回复 刘鑫 7 个月前

会继续更哒

赞 查看对话

冯树飞 6 个月前

Good！期待博主的后续更新

赞

求更comsol中weak form的流程，多做几个算例

赞

23

Redfield 3 个月前

期待继续更新

赞

石代嗯 2 个月前

您好，我请教您一个问题：未知函数y=f(权函数w)，对于积分式中权既有写为deltay，也有直接写为w，那么，这两种积分式需要什么条件，会完全等效？另外，对于本质边界条件，当写成deltay时候，由于是固定边界，deltay在边界上直接等于0，分部积分后的边界项就直接等于0，但是，如果写成w形式，那么，对于本质边界，分部积分后的边界项，就不能直接等于0？谢谢！非常期待您帮我解除这个疑惑。

赞

Dr.Stein (作者) 回复 石代嗯 2 个月前

deltay是精确的写法，因为是基于变分法，写成w是一种近似，因为理论上deltay是任意的，有无穷多个，而w只是一组有限多的基底。文章中也提到了，基函数的性质是在本质边界条件的点处为零，所以和deltay等于0是一致的。

赞 查看对话

石代嗯 回复 Dr.Stein (作者) 2 个月前

非常感谢您的回答，与这个问题相关，我提了一个问题，您帮我看一下，我不知道是不是我搞错了，谢谢！链接：zhihu.com/question/2645...

赞 查看对话

石代嗯 回复 Dr.Stein (作者) 2 个月前

deltay不等于0呢？对于本质边界，两种积分式是不是就不等价？写成变分形式的那种积分式更科学吗？

赞 查看对话

Dr.Stein (作者) 回复 石代嗯 2 个月前

对于本质边界，deltay肯定等于0，两种形式等价，如果deltay不等于0，一般是自然边界。变分形式是数学上更合理的写法，但是实际数值运算时难以操作,所以会近似的用权函数替代。

赞 查看对话

汪洋 1 个月前

太厉害了。大神。能不能继续讲。好渴望！！！！

赞

阿阿阿阿无环 1 个月前

大神，认认真真的把你5个帖子打印下来研究了好几天，真的是跪着看知乎，这学期开有限元课程本来很绝望，看完了五个帖子以后感觉终于能听懂课，看懂笔记了，感谢感谢

赞

1 2 下一页