大型实对称矩阵分块迭代求逆算法

张国亮[1]，沈 慧[1]，石 峰[2]，霍迎秋[1*]
（1.西北农林科技大学信息工程学院，陕西 杨凌 712100；
2.西安卫星测控中心，陕西 西安 710000）

摘 要：为提高大型实对称矩阵数值求逆算法的运行速度，设计了一种分块迭代求逆算法，对算法做了详细的理论推导与分析。实现了四种常见的数值求逆算法，即Jacobi数值方法、QR分解法、LU分解法和高斯-约旦法，并分别与分块迭代求逆算法进行了对比分析。实验结果表明，在保证算法精度的情况下，分块迭代求逆算法极大的提高了算法的运行速度。当计算大小为700x700的实对称矩阵的逆矩阵时，相对于LU分解法，加速比为4倍；相对于QR分解法，加速比为26倍。

关键词：实对称矩阵；分块迭代求逆；QR分解法；雅克比法；高斯-约旦法

0 引言

矩阵求逆算法广泛应用在卫星导航定位[1]、误差控制码、雷达脉冲压缩[2]、信号压缩和图像处理[3]等许多工程技术领域。在保证算法精度满足实际需要的同时，尽最大可能降低求逆算法的计算复杂度，加快算法的运行速度，一直以来都是工程实践追寻的目标。目前，主要的矩阵求逆算法有Jacobi数值方法[4]，QR分解法[5,6]，LU分解法[7,8]，高斯-约旦法（全选主元法）[9]，极小多项式求逆[10]，基于初等变换的迭代公式法[11]和Cholesky分解求逆[12,13]等。大部分算法在对大型实对称矩阵求逆时，运行速度较慢，不能够很好的满足工程实际中实时性要求高的需求。因此，针对大型实对称矩阵设计数值求逆算法，在保证精度满足工程实际所需数量级前提下，提高算法运行速度，具有重要的实际应用意义。

文章详细推导了分块迭代求逆算法，给出了算法的具体实现流程，并基于matlab语言设计了算法；同时实现了常用的4种数值求逆算法，即Jacobi数值方法，QR分解法，LU分解法，高斯-约旦法等；将文章的算法与其他4种求逆算法进行了对比分析，实验结果表明，分块迭代求逆算法表现了优异的性能，在工程实践中具有很高的应用价值。

1 分块迭代法求实对称矩阵的逆

矩阵分块法是一种常用的简化矩阵运算的方法，针对大型实对称矩阵计算逆矩阵时，可以用分块、迭代的方法来实现，以此达到简化矩阵求逆运算，提高算法运行速度的目的。具体推导过程如下：

设一个阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{n\times n}$，令它的分块形式为：

$$\boldsymbol{W}_t=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{t-1} & \boldsymbol{r}_t\\ \boldsymbol{r}_t^T & p_t\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中，t为迭代次数，$t\leq n$。当$t=n$时，$W_t=A$。W_{t-1}为矩阵A的前$t-1$阶方阵。r_t为矩阵A的第t列元素的前$t-1$行，r^T_t为矩阵A的第t行的前$t-1$列元素，即r_t的转置， p_t为矩阵A的第t行t列元素。

可以考虑使用W_{t-1}的逆矩阵$W_{t-1}{}^{-1}$递推W_t的逆矩W_t^{-1}阵，可设

$$\boldsymbol{Q}_t=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{t-1} & \boldsymbol{q}_t\\ \boldsymbol{q}_t^T & \alpha_t\end{bmatrix} \tag{2}$$

则有

$$\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{Q}_t=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{t-1} & \boldsymbol{r}_t\\ \boldsymbol{r}_t^T & p_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{t-1} & \boldsymbol{q}_t\\ \boldsymbol{q}_t^T & \alpha_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{t-1} & 0_t\\ 0_t^T & 1\end{bmatrix} \tag{3}$$

其中I_{t-1}为（$t-1$）阶单位矩阵。

由（3）式可以导出下面四个方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{W}_{t-1}\boldsymbol{Q}_{t-1}+\boldsymbol{r}_t\boldsymbol{q}_t^T=\boldsymbol{I}_{t-1} & (4)\\ \boldsymbol{W}_{t-1}\boldsymbol{q}_t+\boldsymbol{r}_t\alpha_t=0_t & (5)\\ \boldsymbol{r}_t^T\boldsymbol{Q}_{t-1}+p_t\boldsymbol{q}_t^T=0_t^T & (6)\\ \boldsymbol{r}_t^T\boldsymbol{q}_t+p_t\alpha_t=1 & (7)\end{cases}$$

由（5）式可知

$$\boldsymbol{q}_t=-\alpha_t\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t \tag{8}$$

将（8）式代入（7）式可知

$$\alpha_t=\frac{1}{p_t-\boldsymbol{r}_t^T\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t} \tag{9}$$

将（9）式代入（8）式可知

$$\boldsymbol{q}_t=\frac{-\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t}{p_t-\boldsymbol{r}_t^T\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t} \tag{10}$$

将（10）式代入（4）式可知

$$\boldsymbol{Q}_{t-1}=\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}-\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t\boldsymbol{q}_t^T+\frac{\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t(\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r})^T}{p_t-\boldsymbol{r}_t^T\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t} \tag{11}$$

为了简化（9）式、（10）式、（11）式，设 （12）

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_t=-\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t\\ \beta_t=p_t-\boldsymbol{r}_t^T\boldsymbol{W}_{t-1}^{-1}\boldsymbol{r}_t=p_t+\boldsymbol{r}_t^T\boldsymbol{b}_t\end{cases} \tag{13}$$

则（9）式、（10）式、（11）式可依次简化为

通讯作者：霍迎秋（1978- ），男，河北唐山人，博士，实验师，研究方向：压缩感知、并行计算。
作者简介：张国亮（1991- ），男，山西吕梁人，本科生，研究方向：并行计算。沈慧（1993- ），女，新疆阜康人，本科生，研究方向：并行计算。石峰（1977- ），男，江苏铜山人，学士，工程师，研究方向：软件工程。

$$\alpha_t = \frac{1}{\beta_t} \tag{14}$$

$$q_t = \frac{1}{\beta_t} b_t \tag{15}$$

$$Q_{t-1} = W_{t-1}^{-1} + \frac{1}{\beta_t} b_t b_t^T \tag{16}$$

将（14）式、（15）式和（16）式代入（3）式，得出W_t的求逆公式为：

$$W_t^{-1} = Q_t = \begin{bmatrix} W_{t-1}^{-1} & 0_t \\ 0_t^T & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta_t}\begin{bmatrix} b_t b_t^T & b_t \\ b_t^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{t-1}^{-1} + \frac{1}{\beta_t}(b_t b_t^T) & \frac{1}{\beta_t} b_t \\ \frac{1}{\beta_t} b_t^T & \frac{1}{\beta_t} \end{bmatrix} \tag{17}$$

利用（17）式，分块矩阵A_t的逆矩阵A_t^{-1}可以由A_{t-1}^{-1}递推计算，当递推到$t=n$时，便可以求出矩阵A的逆A_t^{-1}。

2 分块迭代求逆算法的详细步骤

给定任意一个n阶实对称矩阵$A \in R^{n \times n}$，可采用分块迭代法求解矩阵的逆矩阵，算法详细步骤如下所示，其中t为迭代次数（$1 \leqslant t \leqslant n$）。

算法主要步骤：

（1）判断矩阵行列式是否为0，如为0，则矩阵无逆矩阵，算法结束；

（2）计算矩阵A的第一个元素$a_{1,1}$的倒数值，即为分块矩阵A_1的逆矩阵A_1^{-1}的值；

（3）构建向量A_t和标量P_t，构建t次迭代时的分块矩阵A_t（$2 \leqslant t \leqslant n$）；

（4）根据公式（12）和公式（13）计算b_t和β_t；

（5）根据公式（17）计算矩阵A_t的逆矩阵A_t^{-1}；

（6）判断t是否等于n，如果等于n，$A^{-1}=A_t^{-1}$，算法结束；

（7）否则，t=t+1，转第（3）步；

经过n次迭代，即可求出矩阵A的逆矩阵。

3 求逆算法运行结果比较

为了对比分析求逆算法的计算时间和精度，文章基于matlab语言设计了迭代求逆算法，同时实现了Jacobi数值方法，QR分解法，LU分解法和高斯-约旦法4种常用的数值求逆算法。算法设计与运行的硬件环境：Core i5-3470 GPU 3.20GHz，内存4GB，软件环境：Lenovo Win7家庭普通版，MATLAB R2010a。

利用MATLAB函数unifrnd()，tril()和triu()，生成一个数值大小在-1000到1000之间n的阶实对称矩阵A。分别利用上述五种求逆算法计算同一实对称矩阵的逆矩阵；利用matlab的计时函数tic和toc统计每种算法的运行时间（单位：秒）；MATLAB的求逆函数inv()很难应用到具体的工程实践之中，但是计算精度非常高，因此将每种求逆算法的计算结果与函数inv()的计算结果作比较，利用函数mse()计算两者的均方差，依此来判断算法的计算精度。实验结果如表1、表2所示。

表1 5种求逆算法运行时间对比结果（单位：秒）

算法 \ 阶数	100 × 100	200 × 200	300 × 300	500 × 500	700 × 700
分块迭代	0.031357	0.073808	0.221613	1.133412	3.505854
Jacobi数值法	13.994638	361.092292	—	—	—
QR分解	0.100044	0.603213	3.090152	20.779338	79.325675
LU分解	0.111989	0.453669	1.239138	4.601483	12.389254
高斯-约旦法	1.041800	7.994885	26.869527	124.545361	352.294099

表2 5种求逆算法计算精度对比结果

算法 \ 阶数	100 × 100	200 × 200	300 × 300	500 × 500	700 × 700
分块迭代	2.2291e-028	4.1168e-027	4.2411e-027	7.0844e-027	1.8666e-023
Jacobi数值法	1.3455e-034	1.6361e-034	—	—	—
QR分解	3.6372e-034	5.5261e-034	1.6138e-032	1.1614e-031	1.2245e-030
LU分解	3.5464e-034	1.1556e-032	2.9542e-031	3.2241e-032	6.8176e-030
高斯-约旦法	4.4513e-035	1.2549e-034	2.8054e-033	7.1141e-033	4.9965e-031

通过对表1的实验结果分析发现，五种求逆算法针对同一实对称矩阵求逆时分块迭代求逆算法耗时最短，LU分解法次之，Jacobi数值法耗时最长。当矩阵维数大于300x300时，Jacobi数值求逆算法运行时间超过40分钟，记为“—”，其计算时间太长，不能满足工程实际的需要；随着矩阵维数的增大，每个求逆算法的运行时间也相应增加，但是分块迭代求逆算法仍然是最快的算法；当矩阵大小为700x700时，分块迭代法相对于LU分解法，加速比为4倍，相对于QR分解法，加速比为26倍，相对于运算时间最长的高斯-约旦法，加速比为114倍。由此推算，在处理维数更大的矩阵时加速比会更高。

通过对表2的实验结果分析发现，五种求逆算法的计算精度，高斯-约旦法精度最高，达10^{-35}；QR分解法与LU分解法次之，精度达10^{-34}；分块迭代法精度达到10^{-28}；随着矩阵维数的增大，精度最低为10^{-23}，虽有所降低，但是足够满足工程实际的需要。

综上所述，在实际工程中应用最广的QR分解法和LU分解法，实验中表现了优异的性能，分块迭代法性对于这两种求逆算法精度虽然有所降低，但是运行速度得到了极大的提高，尤其在对大型实对称矩阵求逆时，这种优势更加明显。因此，分块迭代求逆算法具有很高的实际应用价值。

4 结语

文章给出了分块迭代求逆算法的详细推导过程，列出了算法的详细计算步骤，并基于matlab实现了分块迭代法、Jacobi数值法、QR分解法、LU分解法及高斯-约旦法等五种求逆算法。对5个随机产生的大型实对称矩阵进行求逆运算，统计每种算法的运行时间和计算精度，实验结果表明，分块迭代法表现了优异的性能，尤其是算法的运行时间得到了极大的提高，较之QR分解法和LU分解法，加速比最高可达26倍和4倍，并且随着矩阵维数的增大加速比会更大。因此，在涉及到大型实对称矩阵求逆的工程实际中，分块迭代求逆算法具有重要的实际应用价值。

[参考文献]

[1]曾德贵.矩阵求逆及其在北斗双星定位系统上的应用[J].信息与电脑，2010(4)：31-32.
[2]宋一鑫，姚振东.RMMSE雷达脉冲压缩快速算法中矩阵求逆的FPGA实现[J].成都信息工程学院学报，2009，24(5)：435-439.
[3]郑作勇，张瑞霞.GPU上循环的快速求逆算法[J].计算机工程与科学，2012，34(7)：84-88.
[4]王解先，冯宝新.Jacobi数值方法在实矩阵求逆中的应用[J].大地测量与地球动力学，2010，30(1)：74-76.
[5]倪涛，丁海峰，阮黎婷，等.基于QR分解算法的任意阶复矩阵求逆的DSP实现[J].电子科技，2010，23(4)：99-101.
[6]王建锋.求逆矩阵的快速方法[J].大学数学，2004，20(1)：121-122.
[7]黑志坚.一种矩阵求逆方法[J].哈尔滨工业大学学报，2004，36(10)：1351-1353.
[8]冉瑞生，黄廷祝.三对角矩阵的逆[J].哈尔滨工业大学学报，2006，38(5)：815-817.
[9]庄战友.关于矩阵求逆的几种方法[J].数学教学与期刊，2009：97-98.
[10]殷云星，赵清.极小多项式在矩阵求逆中的应用[J].科学技术与工程，2009，9(5)：1217-1218.
[11]董永胜.一种求逆矩阵的迭代方法[J].长春工程学院学报：自然可科学版，2005，6(4)：63-64.
[12]潘晓，徐友云，甘小莺.基于Cholesky分解的可配置矩阵求逆FPGA实现[J].信息技术，2009(6)：141-143.
[13]张贤达.矩阵分析与应用[M].北京：清华大学出版社，2004.

Block Iterative Inverse Algorithm for a Iarge-scale Real Matrix

ZHANG Guoliang[1], SHEN Hui[1] , SHI Feng[2] , HUO Yingqiu[1]
(1.College of information engineering, Northwest A & F University, Yangling 712100, China
2.China Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710000, China)

Abstract: In order to improve the running speed of the numerical inversion algorithm of real symmetric matrix, design a block iterative inversion algorithm to deduced and analysis the algorithm in detailed. And design four kinds of common numerical inversion algorithm, such as the Jacobi numerical method, QR decomposition method, LU decomposition method and Gauss Jordan method, compared with the block iterative inversion algorithm. The experimental results show that block iterative inversion algorithm improves the running speed of the algorithm greatly, while the precision maintains almost the same. When calculating the inverse matrix of the 700x700 matrix, the speedup is 4 times compared with the LU decomposition method, the speedup is 26 times compared with the QR decomposition method.

Key words: Real Symmetric Matrix; Block Iterative Inverse; Jacobi Algorithm; QR Algorithm; Gauss-Jordon Elimination