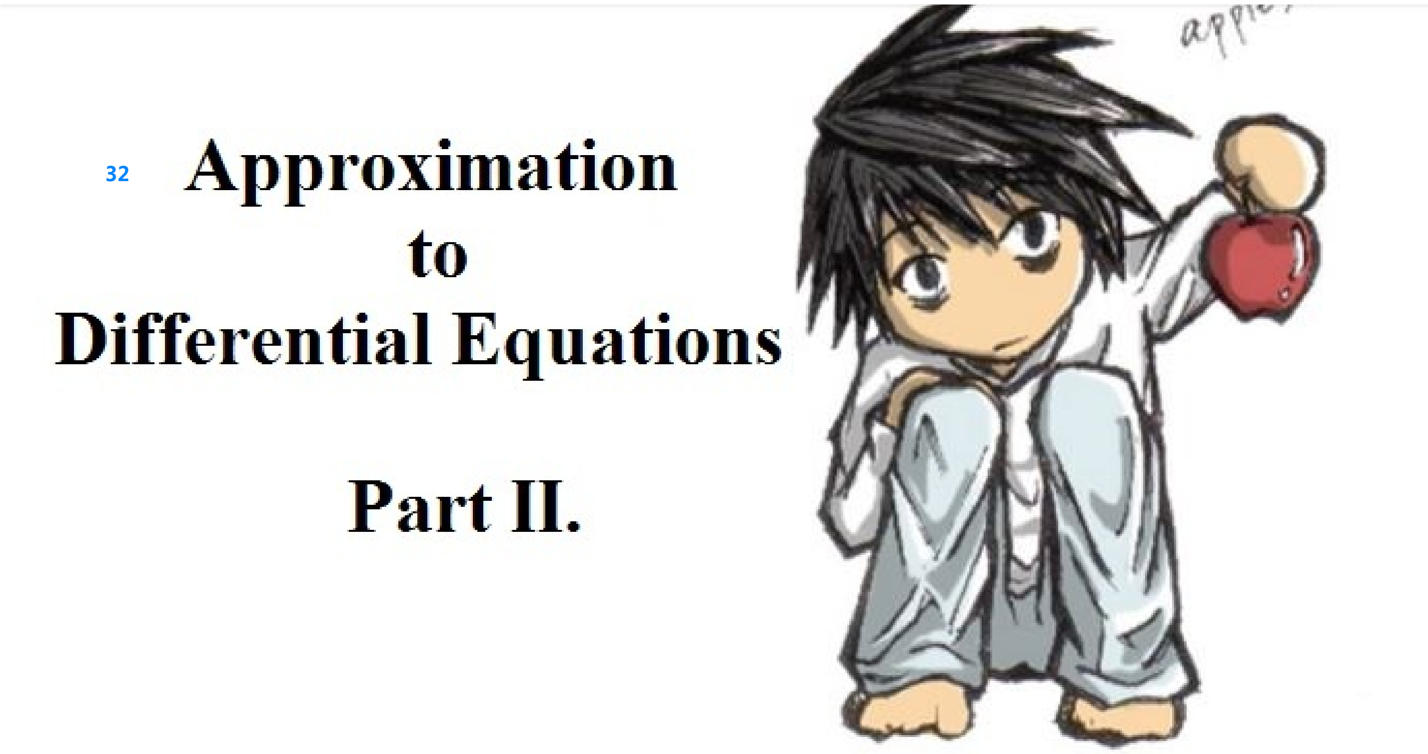


变分法近似解法 Part 2.----Strong Form Galerkin

Dr.Stein
计算力学

吐槽下自己已经不知道多少个月没有更新文章了，偷懒好刺激啊。不过不管有没有人看，还是决定认真先把这个系列更完。

2.Strong Form Galerkin(序号接着上篇文章)

上一篇Part 1.介绍了Rayleigh-Ritz法。一句话概括下就是：将泛函数中的待求函数设成带有未知系数的已知形式（如多项式），并将其带入原泛函数，从而将最小化泛函数的问题简化成我们熟悉的最小化函数问题来求解未知系数，最后就得出了待求函数的近似解。而这次文章以及下次文章要说到的强形式和弱形式（Strong form & Weak form Galerkin）法是从求解PDE出发的。**类似于Rayleigh-Ritz法的思路，我们可以把PDE的解近似为一系列基函数的叠加（需要满足边界条件）。**例如如果我们要解这样一个PDE：$A[w(x)]-f=0$,其中 $A[w(x)]$ 代表对待求函数w(x)的任意微分运算，例如 $A[w(x)]=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 。那么我们可以用公式写出这个PDE的近似解为：

$$\tilde{w}(x)=\phi_0(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\phi_j(x)$$

其中 $\phi_j(x)$ 是已知的基函数(basis functions), c_j 是待解的未知系数。 $\phi_0(x)$ 是用来满足非其次边界条件的，下面会结合例子说明。

很显然，除非精确解恰巧和我们设的近似解形式相同，不然近似解是和精确解有偏差的。换句话说，如果我们把近似解 $\tilde{w}(x)$ 带入原PDE，那么将不会等于0，会带来一些残差或余量。用公式表示就是 $A[\tilde{w}(x)]-f=R\neq 0$ 。**这样问题就转化为求解出 c_j 使得余量R在求解域上尽可能小（尽可能接近0），这样我们的近似解越逼近于精确解。**

这时候我们需要使用加权余量法(Method of Weighted Residual)。这种方法的基本思想是，既然不能找到准确解使余量R在整个求解域上都完全等于零，那么我们至少要找到一个近似解使余量R在求解域上的某种平均等于零。说到某种平均第一反应会是将R在求解域上积分，即令

合理的做法是令R的加权积分为零，写成公式即：

$$\int R(x)\Phi_i(x)dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

32 其中 Φ_i 是权函数(weighted function)。权函数的选择有多种方法，这里介绍的同时也是有限元中常用的一种是Galerkin method。该方法将近似解中的基函数 ϕ_i 直接当做权函数 Φ_i (一个用大写的phi一个用小写的phi，有没有一种钦定的感觉)。这样做的好处是，独立等式的数量（即 ϕ_i 的数量）和待解 c_j 的数量相同，这样就能确保未知系数 c_j 唯一且可解。解出 c_j 后带入 $\tilde{w}(x)$ 就可以得到近似解啦。

还是用上一篇文章的Example. 2为例，这次使用Strong Form Galerkin。以仅用一个未知系数为例。

Example. 2

$$I[y(x);x] = \int_0^2 [0.5(y'')^2 + 5(y')^2 + 2y^2 + y]dx - 10y(0)$$

Essential Boundary Conditions: $y(2) = 0$； $y'(0) = -2$

Natural Boundary Conditions: $y'''(0) = -10$； $y''(2) = 0$

求解最小化泛函数 I 的解 $y(x)$。

解：

首先大家可以用变分法证明下最小化泛函数 I 的解和下面这个PDE的解是等价的。

$y'''' - 10y'' + 4y + 1 = 0,\ \ 0 < x < 2$ ，（加上上述题目中的边界条件）

基本思路是写出 I 的一阶变分 $\delta I = \int_0^2 [y''\delta(y'') + 10y'\delta(y') + 4y\delta y + \delta y]dx$,然后再分部积分，即可得到 $\delta I = \int_0^2 (y'''' - 10y'' + 4y + 1)\delta y\, dx + Boundary\ \ terms$。【注1】

总之现在问题就变成使用Strong Form Galerkin求解一个带有边界条件的PDE。回顾下文章开头，第一步是设出PDE的近似解，我们一般采用多项式形式。这里要注意，使用Strong Form Galerkin的时候，设的近似解既要满足Essential boundary condition又要满足Natural Boundary condition。也就是说在本例中，四个边界条件都需要满足。假设我们只用一个未知系数，那么这个多项式必须要是四次的，即：

$$\tilde{y} = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

因为为了满足边界条件我们可以列出四个等式，然后上式有五个未知系数，等于最终我们只有一个未知系数。现在我们将边界条件带入近似解：

$$\tilde{y}(2) = 0;\ \ \tilde{y}'(0) = -2;\ \ \tilde{y}'''(0) = -10;\ \ \tilde{y}''(2) = 0,$$

可以解得：

$$\tilde{y}(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - \frac{68}{3} + a_4(x^4 - 24x^2 + 80),$$

上式中， $-\frac{5}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - \frac{68}{3}$ 是 ϕ_0 ，然后 a_4 是 c_1；最后 $(x^4 - 24x^2 + 80)$ 是 ϕ_1。

$R = y'''' - 10y'' + 4y$，可见R是a_4和x的函数。

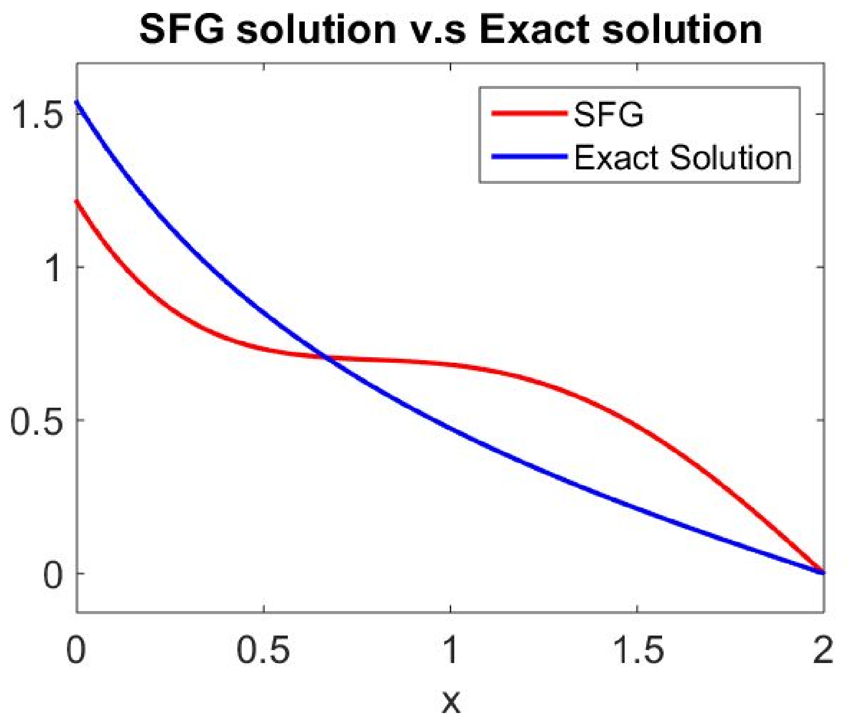
最后计算加权积分：

$$\int_0^2 [(\tilde{y}'''' - 10\tilde{y}'' + 4\tilde{y} + 1)(x^4 - 24x^2 + 80)]dx = 0$$

上式仅有一个未知数a_4，可以解得其值为0.2985，所以最终求得的近似解是：

$$\tilde{y}(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - \frac{68}{3} + 0.2985(x^4 - 24x^2 + 80)$$

我用Matlab简单画了下上述近似解和精确解的比较，有没有很失望啊。这是由于我们只用了一个未知系数，如果用两个甚至更多的话，近似解是十分逼近精确解的，有兴趣的可以自行尝试~



【注1】

下面两个等式是由分部积分得来的：

$$\int_0^2 [y'' \delta y'']dx = \int_0^2 [y'''' \delta y]dx - y''' \delta y\Big|_0^2 + y'' \delta y'\Big|_0^2$$

$$\int_0^2 [10y' \delta y']dx = 10(-\int_0^2 [y'' \delta y]dx + y' \delta y\Big|_0^2)$$

注1之前的那个式子是把所有积分项合并，然后其余边界项统一称为Boundary terms得到的。

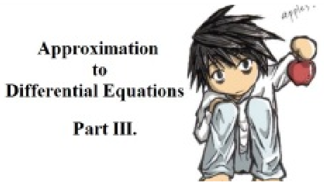
编辑于 2016-09-26

有限元分析（FEA）　应用数学　数学

文章被以下专栏收录

Dr. Stein's Lab

推荐阅读



变分法近似解法 Part 3.---Weak Form Galerkin

Dr.St... 发表于Dr. S...

变分法

刚刚我在读书小组做了一个报告，截图上来，有错误的地方希望能指正！

浅斟低唱

变

Qu

13 条评论 切换为时间排序

写下你的评论...

夏然 1 年前

首评！

赞

王卿 1 年前

由一阶变分到分部积分那里没看懂

赞

王卿 1 年前

什么时候更新弱形式啊。受益匪浅

赞

Dr.Stein (作者) 回复 夏然 1 年前

ˋ(˚∀˚)ˎ

赞 查看对话

Dr.Stein (作者) 回复 王卿 1 年前

已添加注释，需要一些分部积分的数学知识

赞 查看对话

kingh 1 年前

what is MAE short for?

赞

Dr.Stein (作者) 回复 kingh 1 年前

Mechanical & Aerospace Engineering

1 查看对话

张嘉宁 1 年前

博主有空开一个关于XFEM的专题呗(求之不得脸)

赞

XFEM仅略知一二，实验室有一个搞断裂力学的哥们比较熟，应该会有机会听他的seminar介绍，如果我熟悉了会分享的~

赞 查看对话

32

霜之哀伤的持剑人 1 年前

怎么用两个系数还是没懂

赞

Dr.Stein (作者) 回复 霜之哀伤的持剑人 1 年前

把\tilde(y)设为5次多项式（六个系数），代入四个边界条件后可化简为两个未知系数:\tilde(y)=\phi0(x)+a5*(\phi1(x))+a6*(\phi2(x))。然后求残差R，只不过现在R包含a5和a6。虽然现在有两个未知数，但是我们也有两个加权积分的等式：\int(R*\phi1)=0和\int(R*\phi2)=0。两个方程解两个未知数a5和a6。

1 查看对话

Nassco 9 个月前

赞~

赞

Zaza 12 天前

写得很好，看懂了。理解没错的话，余量R等于近似函数代入PDE。不过文中余量公式好像漏了最后的常数1，你看看

赞