Mathematica
数学实验

徐安农　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

Mathematica 数学实验/徐安农编著. —北京：电子工业出版社，2004.7
高等学校教材
ISBN 7-121-00146-2

Ⅰ. M…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 高等数学—实验—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. 013-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 071565 号

责任编辑：刘宪兰　特约编辑：联　霞
印　　刷：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×980　1/16　印张：15.5　字数：325.8 千字
印　　次：2004 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：6 000 册　定价：23.00 元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：（010）68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前　言

“数学实验”是自从我国著名科学家钱学森教授提出理工科的数学课程需要改革 10 年来大家公认的成功之路。由于电子计算机的出现，对数学科学的发展产生了重要的影响，从而也对高等数学教育提出了新的要求。从事高等数学教育的工作者在 10 年中进行了各种各样的探索，终于在开设数学实验课的问题上取得了共识。一致认为数学实验是引进现代教育技术最好的形式。

数学实验课的目的首先是加强“用数学”的教育，培养学生应用所学的数学知识解决实际问题的意识和能力。因此我们的每一节课都从提出问题开始，建立描述问题的数学模型，应用所学的数学知识去解决问题。

数学实验课的另一目的是将数学教学与现代教育技术结合起来，充分利用计算机技术、网络技术，以及成功的数学软件，培养学生进行数值计算和数据处理的能力。这正是新的数字时代对高素质人才所提出的要求。

正因为数学实验把数学知识、数学建模与计算机应用三者结合起来融为一体，既改变了过去数学教育注重知识传授而忽视应用的不足，又加进了现代内容。也正因为加进了现代内容，对数学教学的传统方式也提出了挑战。科学计算和演绎推理同样成为数学发展的重要手段。用归纳和实验手段来进行数学教育开辟了数学教学改革真正的新路。

数学实验还是一门新的课程，它的教学理念是以学生为主体，通过在计算机上做大量的实验，发现问题中存在的数学规律，提出猜想，进行证明和论证。讲授该课程的老师在教学过程中应处于指导地位。要充分调动学生的学习积极性，发挥学生的主观能动性，才能达到本课程教学的目的。

在我们的数学实验中，主要使用的数学软件是在世界上已经广为流传的 Mathematica，由于它的优越的性能，受到高等学校教师和学生的喜爱。

本书是在最近几年开设数学实验课的讲义基础上整理出来的，共分成 4 篇，第 1 篇是微积分，共 12 个实验，它们可以结合同济大学《高等数学》第五版的内容穿插在相应的教学内容中，比如在第 1 篇中的实验 1-1 和实验 1-2，在讲完微分学后的实验 1-4，等等。第 2 篇是线性代数，共 5 个实验，它们是配合线性代数课程的上机实验。第 3 篇是概率与数理统计，共 6 个实验，主要是配合浙江大学版《概率论与数理统计》教学的上机实验。这些实验和课程教学内容有机结合，并引进数学软件实现计算，因而必能大大

提高学生的学习积极性。为了方便使用，本书还在第 4 篇给出 Mathematica 软件的简要使用介绍和常用命令的分类检索，并配有电子课件，读者如果需要可以与编著者联系。

在本书即将出版之际，我要感谢郭锡伯教授。是他引发了我在数学实验方面的兴趣，并带领我在 1998 年参加写作了第一本关于数学实验的书。段班祥参与编写了附录部分内容。毕忠勤参与了实验中程序的编写。

还要特别感谢我的夫人秦丽丽。她无微不至地照料我的生活并仔细审读了全部书稿，完成了书稿的编排和打印工作。

尽管这套教材已经过多次试用，但其中仍难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正。希望这套立体化教材对开展数学实验课教学起到推动作用。

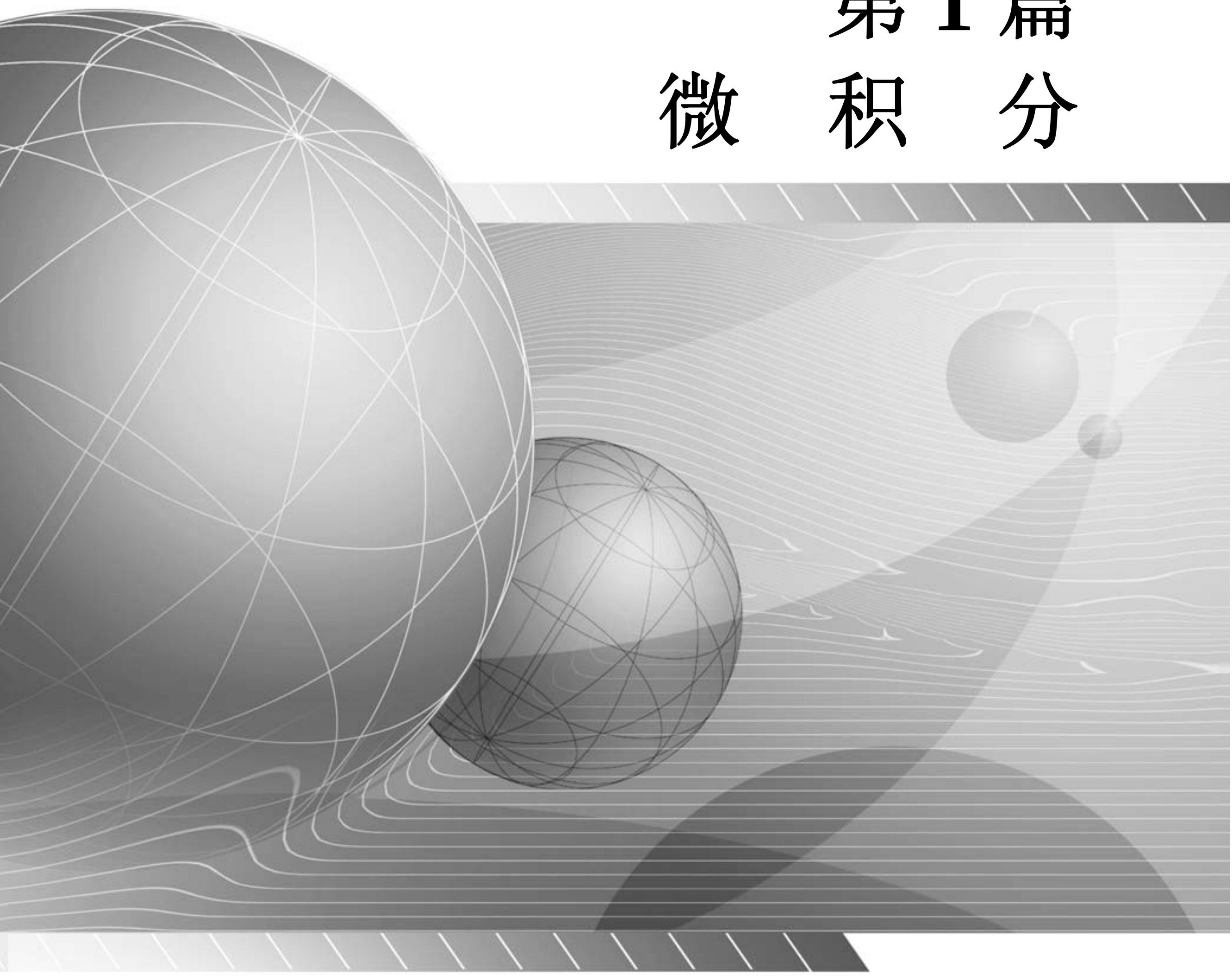
电子邮件地址：annongcn@yahoo.com　徐安农

2004 年 1 月

于桂林桔香园

目　录

第 1 篇
微　积　分



实验 1-1　函数与图形

一、问题的提出

函数是高等数学研究的主要对象，是描述自然界和社会生活中的一类具有对应规则的变量关系的最基本概念。因此深刻地理解函数的概念对学习微积分是非常必要的。通常，函数用解析式子表示（即包含自变量和因变量的用四则运算或复合组成的式子），我们称之为解析表达式。

例如：

$$y = x^3 - x + 1 ;\quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad ;\quad \rho = 2\sin\theta$$

都是一些解析表达式。

但函数的另外两种表示法（表列法和图形法）能让我们更直观地了解变量之间的对应关系。表列法明白地给出了对自变量的每一个值，因变量所对应的函数值。而函数的图形更能反映出函数的有界性、单调性、奇偶性以及周期性等。

利用 Mathematica 数学软件使多角度理解函数关系成为可能。

二、实验目的

（1）学习用 Mathematica 软件作常见函数的图形；

（2）通过作图，进一步加深对函数的理解，观察函数的性质；

（3）构造函数自变量与因变量的对应表，观察函数的变化。

三、实验内容

1．基本初等函数的图形

（1）幂函数 $y = x^{\mu}$，其中 μ 为实数，分别讨论 μ 为正整数、负整数、分数的情况。首先做 μ 为正整数的情况，分别取 μ =1, 2, 3, 4，在区间（−0.02, 1）上画图。

其程序如下：

```
t1=Plot[Evaluate[Table[x^n, {n, 1, 4}]], {x, –0.2, 1.},
   AxesLabel–>{"x", "y"}, PlotRange–>{–0.2, 1.02},
   AspectRatio–>Automatic]
```

运行上面程序得到图 1-1。

其中 Evaluate[ ]用于对多个函数的表画图，将所有图形放在一幅图中。再取 μ =−1, −2，在区间（−2, 2）上画图，改变程序中的参数。

```
t2=Plot[Evaluate[Table[x^(−n), {n, 1, 2}]], {x, −2, 2},
   AxesLable–>{"x", "y"}, PlotRange–>{−2, 2}
   AspectRatio–>Automatic]
```

运行后得到图 1-4。改变参数后类似可得图 1-2 和图 1-3。

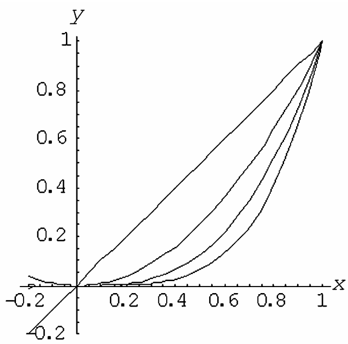


图 1-1

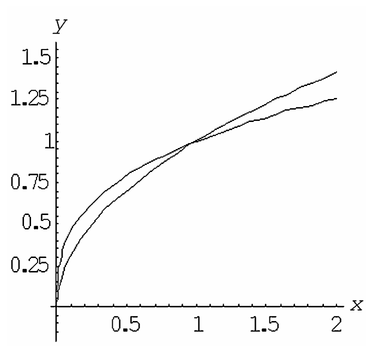


图 1-2

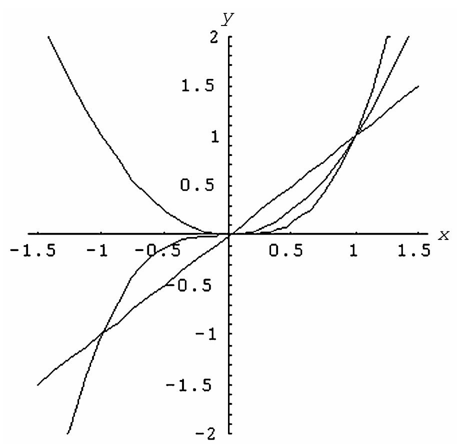


图 1-3

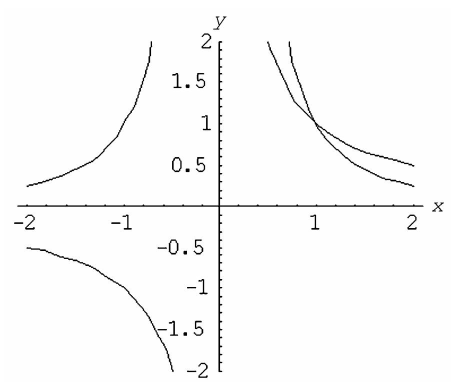


图 1-4

（2）指数函数，其程序如下：

```
t1=Plot[Evaluate[Table[n^x, {n, 2, 4}]], {x, −2, 2},
   AxesLabel–>{"x", "y"}, PlotRange–>{−1, 4}]
t2=Plot[Evaluate[Table[n^−x, {n, 2, 4}]], {x, −2, 2},
   AxesLabel–>{"x", "y"}, PlotRange–>{−1, 4}]
```

```
  Show[t1, t2]
```

运行后得图 1-5。

（3）对数函数，其程序如下：

```
t3=Plot[Evaluate[Table[Log[n, x], {n, 2, 3}]], {x, −1, 2},
  AxesLabel–>{"x", "y"},
     PlotRange–>{−1, 1}, AspectRatio–>{1, 1}]
t4=Plot[Evaluate[Table[Log[1/n, x], {n, 2, 3}]],
{x, −1, 2}, AxesLabel–>{"x", "y"}, PlotRange–>{−1, 1}]
  Show[t3, t4]
```

运行后得图 1-6。

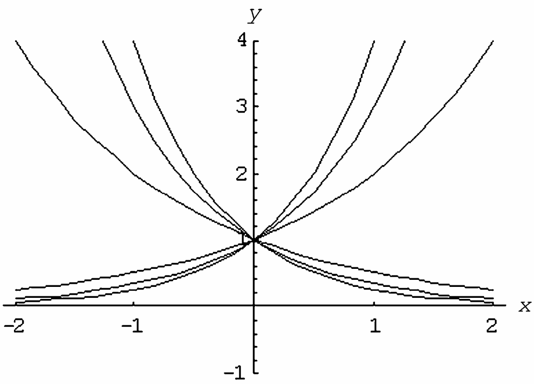


图 1-5

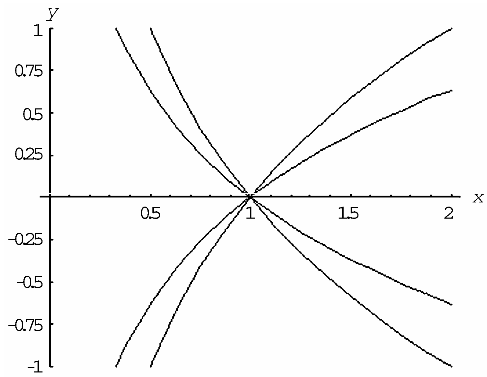


图 1-6

（4）三角函数，其 sin x 函数的画图程序如下：

```
Plot[Sin[x], {x, −2Pi, 2Pi}, PlotRange–>{−5, 5},
 AspectRatio–>Automatic, AxesLabel–>{"x", "sinx"}]
```

运行后得图 1-7。

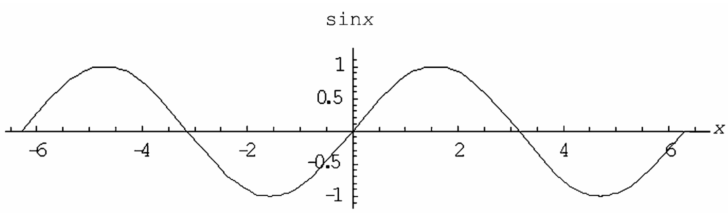


图 1-7

cos x 函数图形见图 1-8。

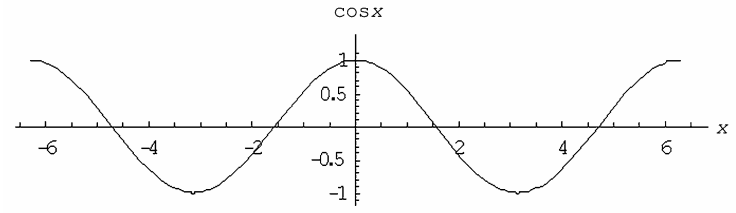


图 1-8

tan *x* 函数的画图程序如下：

```
Plot[Tan[x], {x, −2Pi, 2Pi}, PlotRange–>{−5, 5},
  AspectRatio–>Automatic]
```

要画出其他三角函数的图形，只要将程序中的函数名改写为所要画的函数名即可。其 tan*x*, cot*x*, sec*x*, csc*x* 图形分别见图 1-9 至图 1-12。

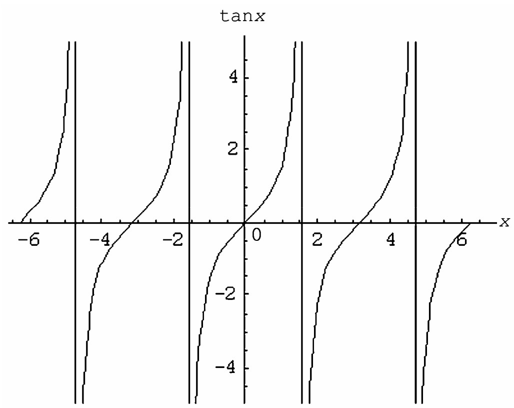


图 1-9

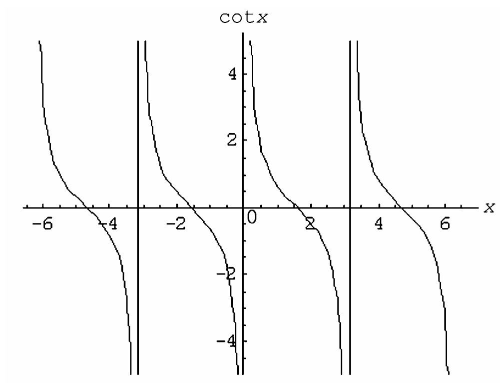


图 1-10

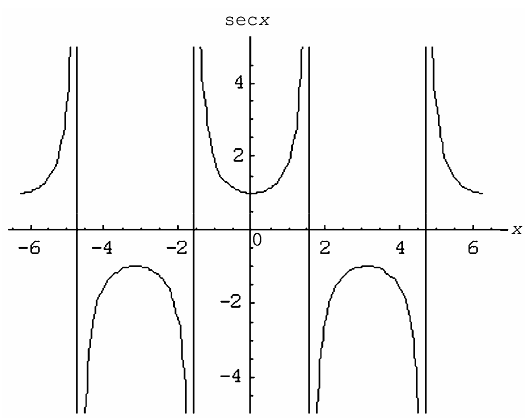


图 1-11

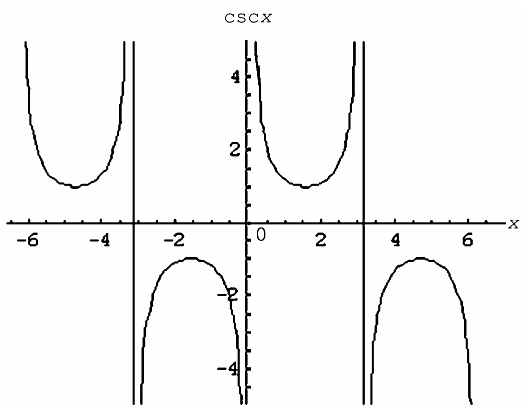


图 1-12

（5）反三角函数。

$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ 的图形分别见图 1-13、图 1-14 和图 1-15。下面仅给出画 arcsin$x$ 的程序如下：

```
Plot[ArcSin[x], {x, −1.2, 1.2}, PlotRange–>{−1.6, 1.6},
 AspectRatio–>Automatic, AxesLabel–>{"x", "arcsinx"}]
```

在输入函数时，一定要注意 Mathematica 要求区分大、小写，另外在参数项 AxesLabel 中的字体只能使用正体，当改变为斜体时，程序可能不能正常运行。

画其他函数的图形时要注意画图范围的指定应因函数而异。

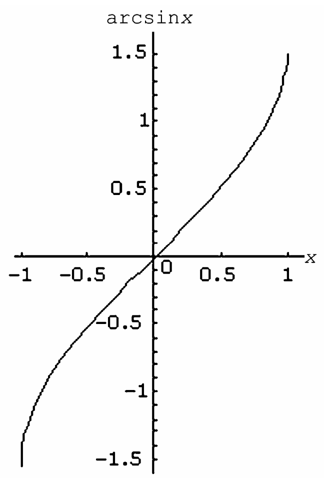


图 1-13

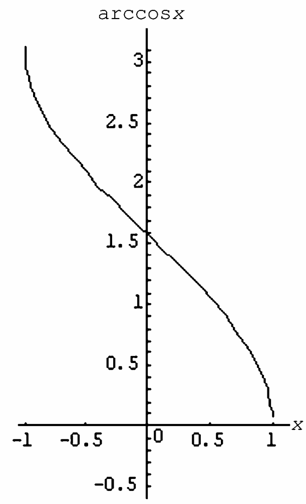


图 1-14

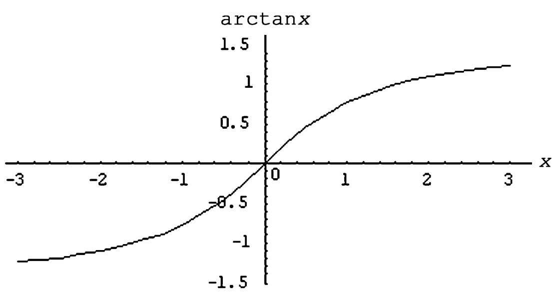


图 1-15

（6）双曲函数 $\sinh x, \cosh x$和 $\tanh x$ 图形分别见图 1-16 至图 1-18。

（7）反双曲函数 arsinh x, arcosh x 和 artanh x 分别见图 1-19 至图 1-21。

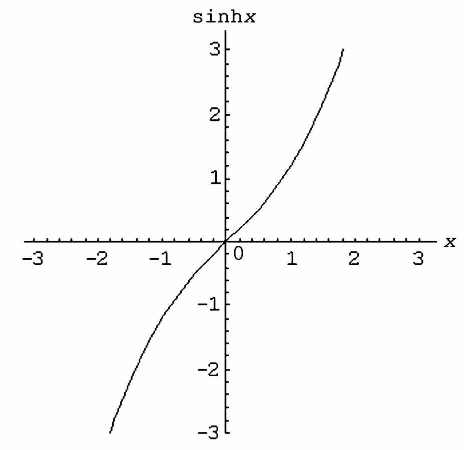


图 1-16

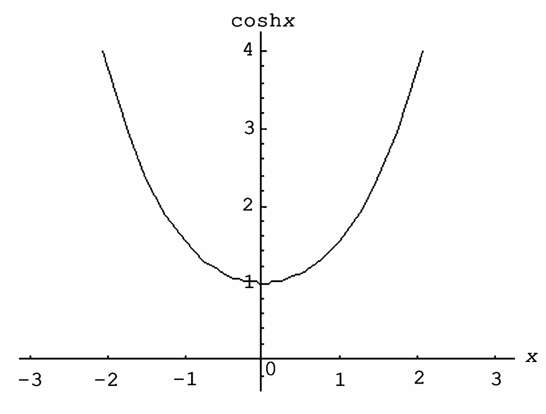


图 1-17

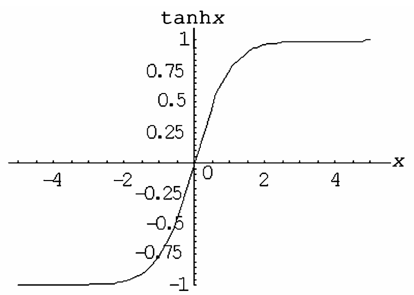


图 1-18

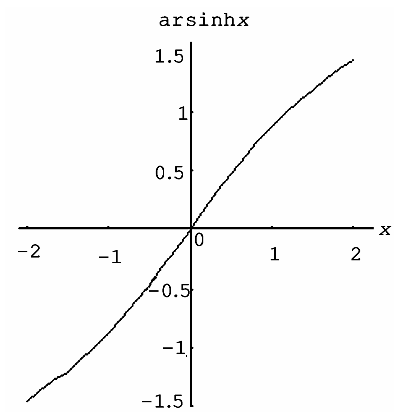


图 1-19

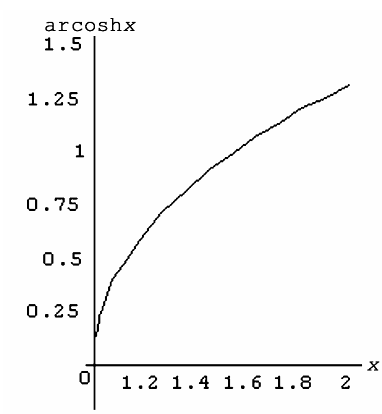


图 1-20

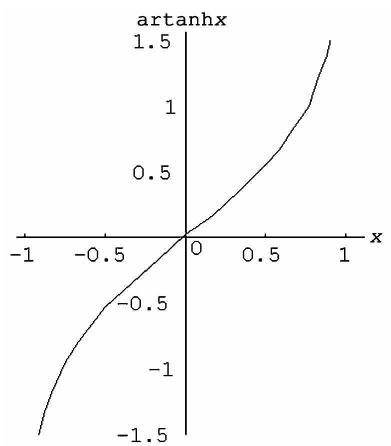


图 1-21

2．微积分中的几个常见的函数图形

(1) $\dfrac{\sin x}{x}$　(2) $x\sin\dfrac{1}{x}$　(3) $\sin\dfrac{1}{x}$　(4) $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$　(5) $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

其图形分别见图 1-22 至图 1-27。其中画函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 图形的程序如下：

```
Plot[Sin[x]/x, {x, −3Pi, 3Pi}, AspectRatio–>1/3,
 AxesLabel–>{"x", " sinx/x "}]
```

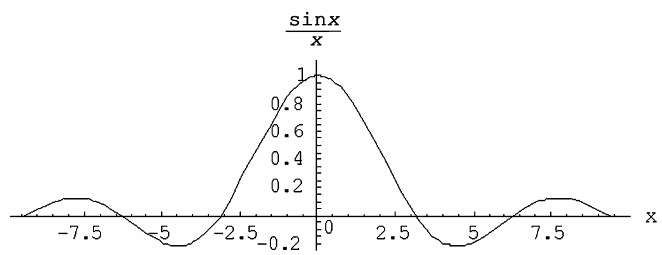


图 1-22

画函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 图形的程序如下：

```
Plot [x∗Sin[1/x], {x, −0.15, 0.15}, AspectRatio–>1/3,
 AxesLabel–>{"x", "xsin 1/x "}]
```

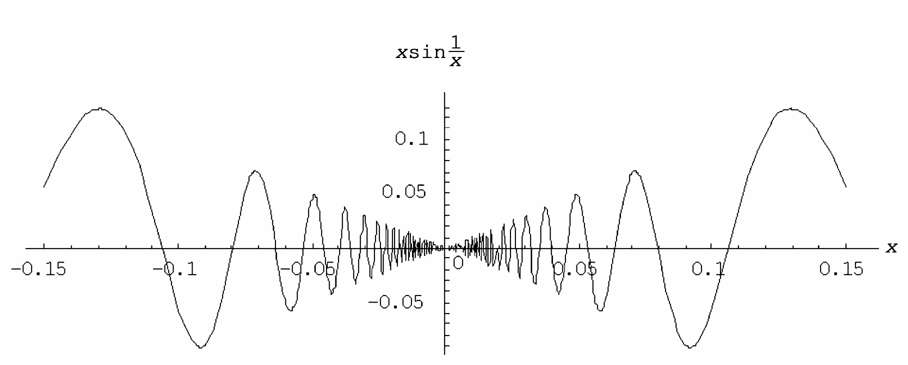


图 1-23

画函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 图形的程序如下：

```
t2=Plot[Sin[1/x], {x, −0.1, 0.1}, PlotPoints–>100]
```

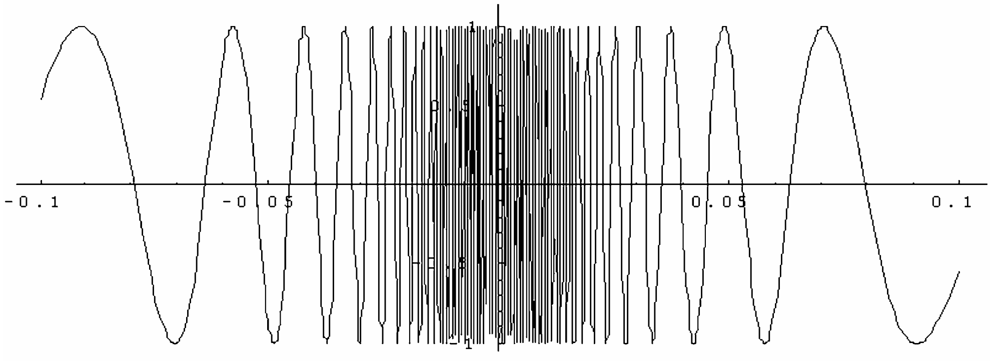


图 1-24

画函数 $e^{\frac{1}{x}}$ 图形的程序如下：

```
t1=Plot[Exp[1/x], {x, −0.15, 5}, AspectRatio–>1/1,
   AxesLabel–>{"x", "exp(1/x)"},
         AxesLabel–>{"x", "y"}, PlotRange–>{−1, 8}]
t2=Plot[Exp[1/x], {x, −5, 0.05}, AspectRatio–>1/1]
Show[t1, t2]
```

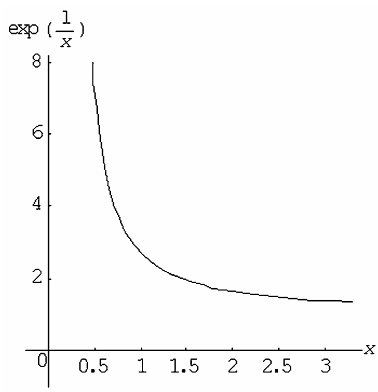


图 1-25

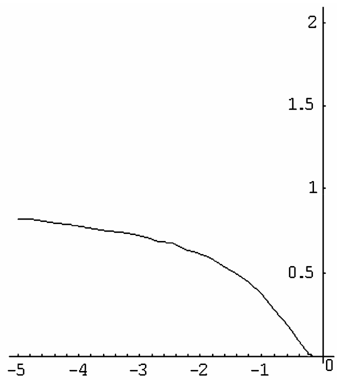


图 1-26

画函数 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 图形的程序如下：

```
t1=Plot[Exp[−x^2/2], {x, −3, 3}, AspectRatio–>1/3,
   AxesLabel–>{"x", "exp(− x^2 )"}, PlotRange–>{−0.2, 1.2}]
```

3．参数方程画图

画旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$（取 a=2）及画星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$的图形。

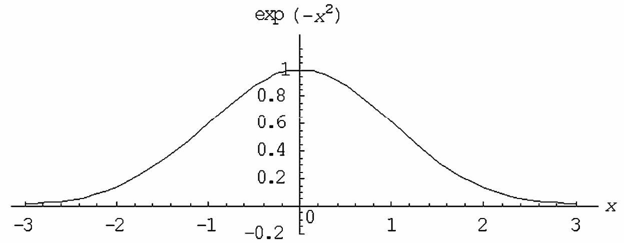


图 1-27

画旋轮线的程序如下：

```
ParametricPlot[{2*(t–Sin[t]), 2*(1–Cos[t])}, {t, 0, 2*Pi},
  AspectRatio–>Automatic]
```

程序运行后的图形如图 1-28 所示。请读者自己写出画星形线的程序，其图形参见图 1-29。

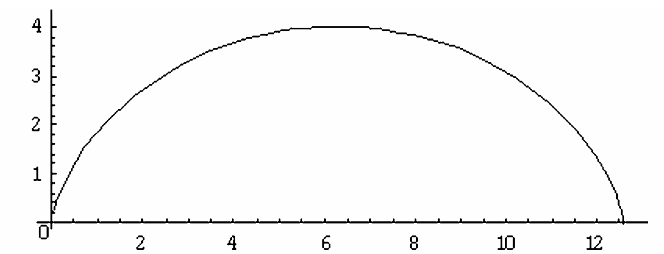


图 1-28

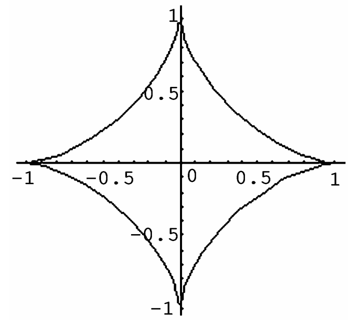


图 1-29

4．极坐标方程画图

画四叶玫瑰线的程序如下：

```
r[t_]:=2*Cos[2*t]
ParametricPlot[{r[t]*Cos[t], r[t]*Sin[t]}, {t, 0, 2*Pi},
  AspectRatio–>Automatic]
```

其所得图形如图 1-30 所示，画三叶玫瑰线的程序请读者自己写出，其图形参见图 1-31。

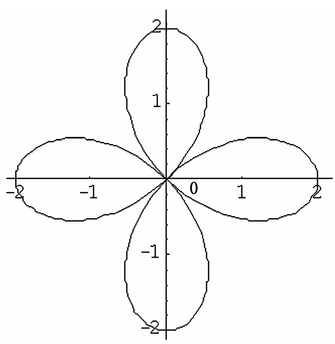


图 1-30

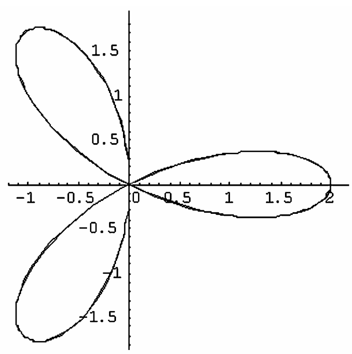


图 1-31

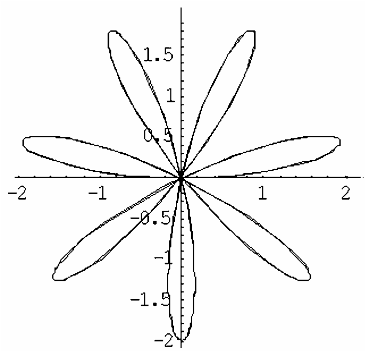


图 1-32

七叶玫瑰线的图形见图 1-32。

课堂练习

1）画出下列函数的图形。

(1) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $y=(1+\frac{1}{x})^{x+1}$

2）画出下列参数方程确定的函数图形。

(1) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$　$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

(2) $\begin{cases} x=\cos(t+\frac{\pi}{3}) \\ y=\sin t \end{cases}$　$x \in (-1.5,\ 1.5)$　$y \in (-1.5,\ 1.5)$

(3) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin(2t)^3 \end{cases}$　$x \in (-2, 2)$　$y \in (-2, 2)$

注意（3）题的曲线几乎画满区域$[-1, 1]\times[-1, 1]$，这是 100 年前 Peano 的一个例子。

3）画出下列极坐标方程的图形。

(1) $\rho=2\cos\theta$　　(2) $\rho=2\sin\theta$

(3) $\rho=2$　　(4) $\rho=2(1-\cos\theta)$

4）观察函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 在 x=0 左右邻域的趋向。

习题 1-1

画出下列函数的图形：

（1） $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$　　$x \in (0, 2\pi)$　　用文件名 File1 存盘

（2） $\begin{cases} x=t\cos 2t \\ y=\sin 2t \end{cases}$　　$0 \leqslant t \leqslant \pi$　　用文件名 File2 存盘

（3） $\rho=1-\cos\theta$　　$\theta \in (0, 2\pi)$　　用文件名 File3 存盘

（4） $\rho=1+\cos\theta$　　$\theta \in (0, 2\pi)$

（5） $f(x)=\sin\frac{1}{x}$　　$x \in (-2, 2)$

（6） $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$　　$x \in (-1, 2)$

（7） $y=\cosh x$　　$x \in (-2,2)$

实验 1-2　割圆术与数列极限

一、问题的提出

怎样计算圆周率π ？

在《九章算术》方田章圆田术中，中国古代数学家刘徽创造了割圆术，用来计算圆周率π 。刘徽的做法是用圆的正内接多边形面积来逼近圆的面积。将圆分割成正 6 边形、正 12 边形……直至正 3 072 边形。得到了的近似值 $\frac{157}{50}$, $\frac{3927}{1250}$ ΛΛ 他在书中写道：“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割则与圆合体而无所失矣。”中国古代数学家已经有了数列极限的思想。

二、实验目的

（1）用现代技术实现割圆术的计算；

（2）学会用数列极限求方程根的方法；

（3）画数列的散点图，观察数列的极限；

（4）求数列极限的近似值。

三、实验内容

1．割圆术

如图 1-33 所示，设 a_n 表示单位圆内接正 n 边形的一边， S_n 表示正 n 边形的面积，则

$$a_6 = 1 \qquad S_6 = 6 \times \frac{1}{2} \times a_6 \times \sqrt{1 - \left(\frac{a_6}{2}\right)^2}$$

$$a_{12} = \sqrt{\left(\frac{a_6}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_6}{2}\right)^2}\right)^2} \qquad S_{12} = 12 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{a_6}{2}$$

$$a_{6\times 2^n} = \sqrt{\left(\frac{a_{6\times 2^{n-1}}}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_{6\times 2^{n-1}}}{2}\right)^2}\right)^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_{6\times 2^{n-1}}}{2}\right)^2}}$$

$$S_{6\times 2^n} = 3 \times 2^{n-1} \times a_{6\times 2^{n-1}}$$

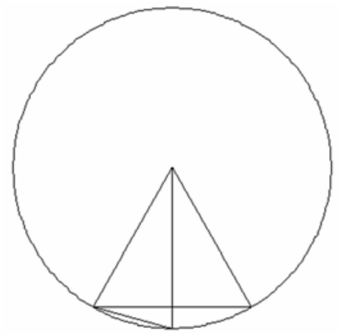


图 1-33

下面是实现割圆术的 Mathematica 程序。

```
a={1};s=N[{3*Sqrt[3]/2}, 18];n=31;
For[i=2, i≤n, i++,
  a=N[Append[a, Sqrt[2−2*Sqrt[1− (a[[i−1]]/2)^2]]], 18];
  s=N[Append[s, 3*2^(i−1)*a[[i]]], 18];
]
s1=Table[s[[i+1]] −s[[i]], {i, 1, n−1}];
Print["n","                    s", "                                  ", "s1"]
For[i=1, i≤n−1, i++,
  Print[i, "                    ", s[[i]], "                        ", s1[[i]]]]
```

运行后可得结果：

n	s	s1
1	2.59807621135331594	0.50775232987693321
2	3.10582854123024915	0.02680007205098905
3	3.13262861328123820	0.00672158976562901
4	3.13935020304686721	0.00168174784364243
5	3.14103195089050964	0.00042052139495244
6	3.14145247228546208	0.00010513562639557
7	3.14155760791185765	0.00002628423646076
8	3.14158389214831841	$6.57107973169\times10^{-6}$
9	3.14159046322805010	$1.64277122145\times10^{-6}$
10	3.14159210599927155	$4.1069288590\times10^{-7}$
11	3.14159251669215745	$1.0267322651\times10^{-7}$
12	3.14159261936538396	2.566830694×10^{-8}
13	3.14159264503369090	6.41707676×10^{-9}
14	3.14159265145076765	1.60426919×10^{-9}
15	3.14159265305503684	4.0106730×10^{-10}
16	3.14159265345610414	1.0026682×10^{-10}
17	3.14159265355637096	2.506671×10^{-11}
18	3.14159265358143767	6.26668×10^{-12}
19	3.14159265358770435	1.56667×10^{-12}
20	3.14159265358927102	3.9167×10^{-13}
21	3.14159265358966268	9.792×10^{-14}
22	3.14159265358976060	2.448×10^{-14}

23	3.14159265358978508	6.12×10^{-15}
24	3.14159265358979120	1.53×10^{-15}
25	3.14159265358979273	3.8×10^{-16}
26	3.14159265358979311	$1.\times10^{-16}$
27	3.14159265358979321	$2.\times10^{-17}$
28	3.14159265358979323	$0.\times10^{-18}$
29	3.14159265358979324	$0.\times10^{-18}$
30	3.14159265358979324	$0.\times10^{-18}$

在微积分的教程中，我们知道有哥西收敛原理。

【哥西收敛原理】　已知数列 x_n，如果对于任何给定的正数 m，都能找到一个序号 N，当 $n>N, k>N$ 时有 $|x_n-x_k|<10^{-m}$，则数列 x_n 收敛。

由程序给出的结果不难看出，当 N=7 时，有 $|x_n-x_k|<10^{-6}$，当 N=15 时，有 $|x_n-x_k|<10^{-10}$……可见正多边形面积的数列是收敛的。当取 n=30 时，可以得到 98 304 边形的面积 3.141 592 653 589 793 24，它与圆周率的精确值 3.141 592 653 589 793 238 5…比较有 17 位有效数字。事实上可以得到 π 的任意指定位数的近似值。

2．用数列方法求方程 $x^2+px+q=0$ 的正根 ξ

构造一个数列 $\{x_n\}$，设它的前项与后项之比收敛于所给方程的根，即

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=\xi$$

同时有 $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\approx\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\approx\xi$，代入方程，有

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}+p\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}+q=0$$

或

$$qx_{n+2}+px_{n+1}+x_n=0$$

改写成迭代格式

$$x_{n+2}=-\frac{1}{q}(px_{n+1}+x_n) \tag{1-1}$$

取 $x_0=0$，$x_1=-\dfrac{q}{p}$，由式（1-1）计算 $\{x_n\}$，再计算数列 $\{\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\}$ 可以得到 ξ 的一系列近似值。

【例 1-1】　求方程　$x^2+x-1=0$ 的正根。

【解】　编程如下：

```
n=Input[ ]
p=1;q=−1;
x={1., 1.};
For[i=3, i≤n, i++,
   x=Append[x, − (p∗x[[i−1]]+x[[i−2]]/q)
      ];
x
y=Table[x[[k]]/x[[k+1]], {k, 3, n−1}]
ListPlot[y, PlotStyle–>PointSize[0.01], PlotRange–>{−0.25, 1}]
```

取 $n=14$，运行后可得结果：

```
{1., 1., 2., 3., 5., 8., 14., 21.,
 34., 55., 89., 144., 233., 377., 610., 987.}
{0.666667, 0.6, 0.625, 0.615385, 0.619048, 0.617647, 0.618182,
 0.617978, 0.618056, 0.618026, 0.618037, 0.618033, 0.618034}
```

本例中得到的数列{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …}就是著名的 Fibonacci 数列，而它的前项与后项之比的数列极限是大家熟知的黄金分割点 0.618。见图 1-34。

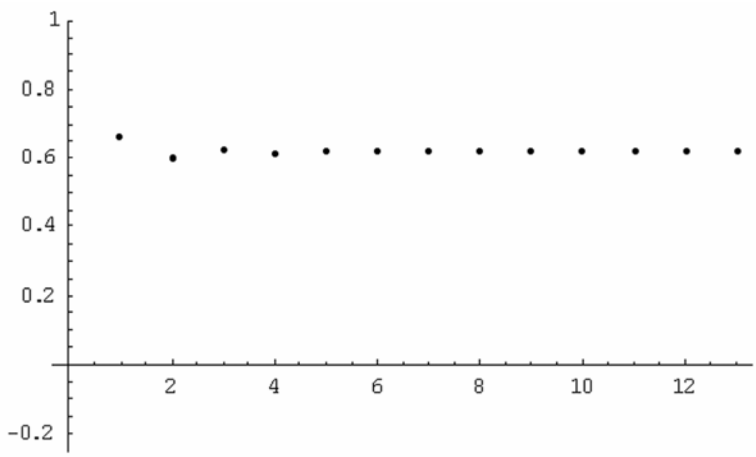


图 1-34

3．画数列的散点图

画数列的散点图可以非常直观地看出数列是否收敛，在 Mathematica 中有如下的命令：

```
ListPlot[list, PlotStyle–>PointSize[0.01]]
```

其中 list 是一个表。如果 list 是一个一维表，则以横轴表示序号 n，纵轴表示数列 x_n；如果 list 是一个二维表$\{x_n, y_n\}$，则以横轴表示 x_n，纵轴表示数列 y_n。

【例 1-2】　画出下列数列的散点图。

(1) $x_n = n^2$

【解】　编程如下：

```
x=Table[x^2, {x, 10}]
ListPlot[x, PlotStyle–>PointSize[0.02]]
```

运行后得图 1-35。

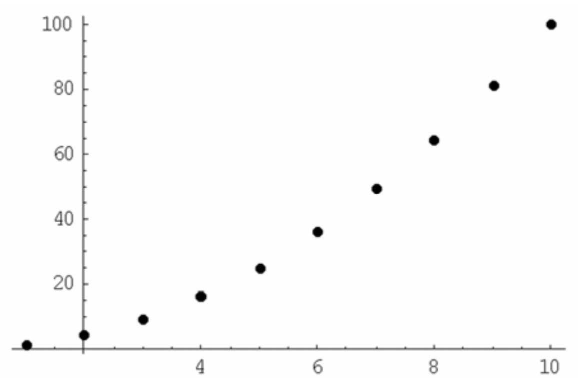


图 1-35

(2) $x_n = \sqrt{n}$

【解】　编程如下：

```
x=Table[Sqrt[x], {x, 10, 100, 10}]//N
ListPlot[x, PlotStyle–>PointSize[0.02]]
```

运行后得图 1-36。

(3) $x_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 + n - 10}{2n^3 - n + 8}$

【解】　编程如下：

```
x=Table[(n^3−3n^2+n−10)/(2n^3−n+8), {n, 1, 1000}]//N
ListPlot[x]
```

运行后得图 1-37。

4．求和式的近似值

【例 1-3】　求和式　$\mathrm{e} = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \Lambda + \dfrac{1}{n!} + \Lambda$　的近似值。

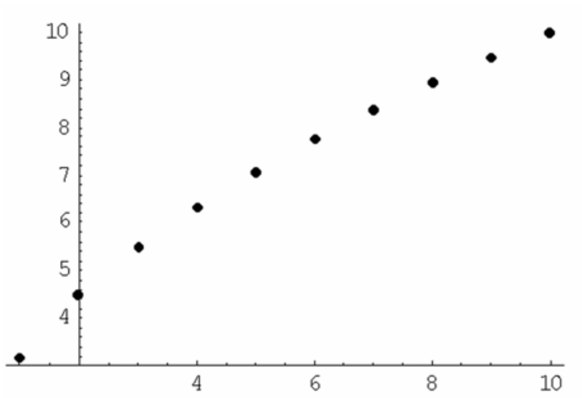


图 1-36

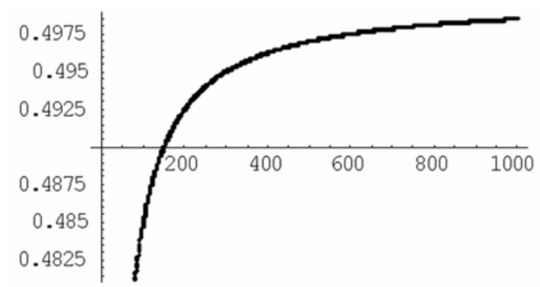


图 1-37

【解】　编程如下：

```
xn1=−1;xn=1.;m=10;
For[i=1, i<=50, i++,
    If[Abs[xn−xn1]>10^−m, xn1=N[xn, 18];xn=N[xn+1/i!, 18];
     Print[i, "               ", xn1, "           ", xn]]
     ]
```

运行可得结果：

1	1.	2.
2	2.	2.5
3	2.5	2.666666666666666
4	2.666666666666666	2.708333333333333
5	2.708333333333333	2.716666666666666
6	2.716666666666666	2.718055555555555
7	2.718055555555555	2.718253968253968
8	2.718253968253968	2.71827876984127
9	2.71827876984127	2.718281525573192
10	2.718281525573192	2.718281801146384
11	2.718281801146384	2.718281826198493
12	2.718281826198493	2.718281828286169
13	2.718281828286169	2.718281828446759
14	2.718281828446759	2.71828182845823

从结果可以看出，计算到第 14 次，已经达到精度要求，e 的近似值为

$$e = 2.71828182845823$$

习题 1-2

1）已知数列的通项公式为 $x_n=\sqrt[n]{2}$，试研究它的极限，并进一步检验对任何正数 a，都有 $\sqrt[n]{a}\to 1\quad(n\to\infty)$。

2）数列 x_n 的递推公式为 $x_1=2$，$x_n=\sqrt{2+\sqrt{x_{n-1}}}$，试求出数列充分多的项，观察它的极限是否存在。用 Mathematica 画出它的散点图。

3）用数列方法求方程 $x^2-x-1=0$ 的正根。

4）已知数列 $c_0=c_1=c_2=1$，$c_{n+1}=c_{n-1}+c_{n-2}\quad(n>2)$，求数列的前 50 项，以及其前项与后项比的前 49 项。

5）求 $x_n=1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\Lambda+\dfrac{1}{n^3}$ 当 $n\to\infty$ 时极限的近似值。

实验 1-3　差分方程与混沌

一、问题的提出

生物种群的繁衍过程千变万化，有的种群逐渐消失；有的种群会突然间大量繁殖，以至于出现灾害；也有的种群一直维持在一定的水平，人们能够预测种群的变化过程吗？

二、实验目的

（1）介绍用差分方程建立模型的方法；
（2）用 Mathematica 软件解差分方程；
（3）对差分方程解的进一步讨论——混沌现象。

三、实验内容

1．酵母培养物的实验

在度量酵母培养物的增长的实验中采集到一组数据如下：

时间（s）	0	1	2	3	4	5	6	7
生物量 p_n	9.6	18.3	29.0	47.2	71.1	119.1	174.6	257.3
生物量的变化 $p_{n+1}-p_n$	8.7	10.7	18.2	23.9	48.0	55.5	82.7	

我们用横轴表示 p_n，纵轴表示 $p_{n+1}-p_n$，然后画出它们的散点图。

```
ListPlot[{{9.6, 8.7}, {18.3, 10.7}, {29., 18.2}, {47.2, 23.9},
   {71.1, 48.}, {119.1, 55.5}, {174.6, 82.7}}, PlotstStyle–>PointSize[0.015],
  AxesLabel–>{"Pn", "ΔPn"}]
```

运行程序后得到图 1-38。

观察到散点近似分布在一条直线附近，也就是说 $p_{n+1}-p_n$ 与 p_n 近似成正比例。连接首尾两点，估计出直线的斜率约为 0.6。于是得到一个描述生物量变化的差分方程模型

$$p_{n+1}-p_n=0.6\cdot p_n$$

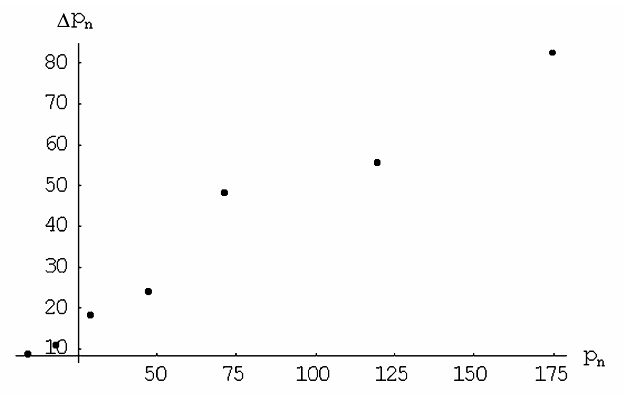


图 1-38

这个模型预测生物种群是永远增长的，其解是一个指数函数，即

$$p_1 = (1+0.6)p_0 \cdot p_2 = (1+0.6)^2 p_0 \cdot p_n = (1+0.6)^n p_0$$

但是在实际情况下资源总是有限的，只能支持有限的群体。当生物量增长接近极限时，增长就逐渐减慢。继续实验得到其后的数据如下：

时间（s）	0	1	2	3	4	5	6	7
p_n	9.6	18.3	29.0	47.2	71.1	119.1	174.6	257.3
$p_{n+1}-p_n$	8.7	10.7	18.2	23.9	48.0	55.5	82.7	82.7
时间（s）	8	9	10	11	12	13	14	15
p_n	350.7	441.0	513.3	559.7	594.8	627.4	640.9	651.1
$p_{n+1}-p_n$	93.4	90.3	72.3	46.4	35.1	34.6	11.4	10.3
时间（s）	16	17	18					
p_n	655.9	659.6	661.8					
$p_{n+1}-p_n$	4.8	3.7	2.2					

以时间为横坐标，生物量为纵坐标，画出生物量变化的图形，编程如下：

```
B={9.6, 18.3, 29.0, 47.2, 71.1, 119.1, 174.6, 257.3, 350.7, 441.0,
  513.3, 559.7, 594.8, 629.4, 640.6, 651.1, 655.9, 659.6, 661.8}
ListPlot[B, PlotStyle–>PointSize[0.015], AxesLabel–>{"t", "pn"}]
```

运行程序后得图 1-39。

从图 1-39 中 p_n 的变化可以看出，在前 8 次观察中生物量 p_n 几乎是按指数增长的，而随后逐渐减慢，当生物种群的群体数接近 665 时已不再增长，假定生物量的变化与 $(665-p_n)$ 也成正比例，于是有模型

$$p_{n+1} - p_n = k \cdot p_n (665 - p_n)$$

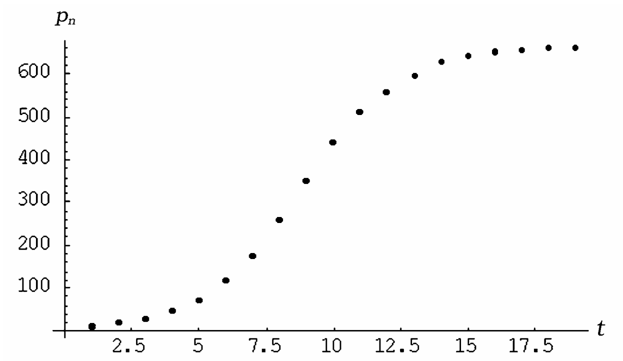


图 1-39

画出 $p_{n+1}-p_n$ 关于 $p_n(665-p_n)$ 的图形（见图 1-40），并用拟合的方法求出斜率大约为 0.000 82。

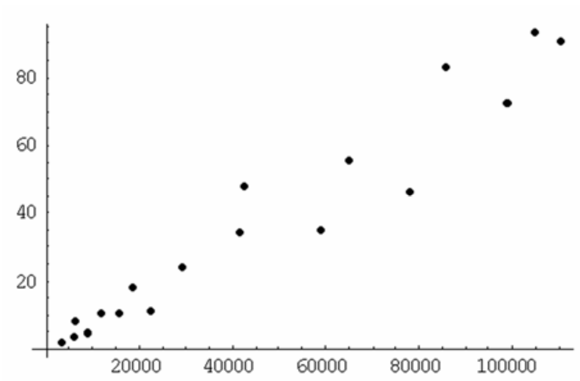


图 1-40

拟合的程序如下：

```
delta=Table[B[[i+1]] –B[[i]], {i, 1, 18}]
B1=(665–B)*B
B2=Table[{B1[[i]], delta[[i]]}, {i, 1, 18}]
Fit[B2, {1, x}, x]
```

运行后得出拟合函数为：

```
−0.316032+0.000814536x
```

模型近似为

$$p_{n+1}=p_n+0.00082\cdot p_n\cdot(665-p_n)$$

由 $p_0=9.6$ 得到模型的预测值。我们将模型的预测值与观察值作出图形，见图 1-41。

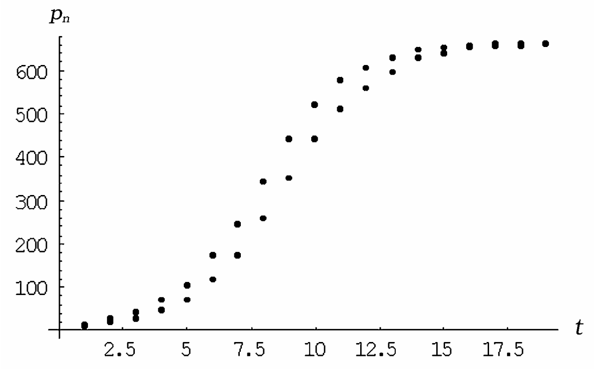


图 1-41

可以看出该模型很好地抓住了观察值的趋势，也就是说，假设的模型

$$p_{n+1} = p_n + 0.00082 \cdot p_n \cdot (665 - p_n)$$

是合理的。

2．混沌

下面就一般的种群繁殖模型来讨论，假定有模型

$$p_{n+1} - p_n = k \cdot p_n(b - p_n)$$

称这个模型为逻辑斯缔方程（Logistic equation）。将方程改写为

$$p_{n+1} = p_n + kp_n b - kp_n^{\ 2}$$

设 $k = 0.0001,\ b = 10000,\ p_0 = 50$，在计算机上算出其 20 代的繁衍情形。其程序如下：

```
p={50};
For[i=1, i≤20, i++, p=Append[p, 2*p[[i]] –0.0001*p[[i]]^2];
]
p
ListPlot[p, PlotStyle–>PointSize[0.015]]
{50, 99.75, 198.505, 393.07, 770.689, 1481.98, 2744.34,
 4735.53, 7228.54, 9231.9, 9941., 9999.65, 10000., 10000.,
 10000., 10000., 10000., 10000., 10000., 10000., 10000.}
```

上面程序中最后一串数据描绘出了数据的散点图，如图 1-42 所示。

由图 1-42 可以看到，种群稳定增长到 10 000 就不再变化了，因此称这个值为方程的稳定值。

【定义 1-1】　由方程 $p_{n+1} = p_n + kp_n b - kp_n^{\ 2}$ 得到的数列 p_n，如果当 $n \to \infty$ 时有极限 q，则称 q 为方程的稳定值。

如果方程有稳定值，$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = q$，则有

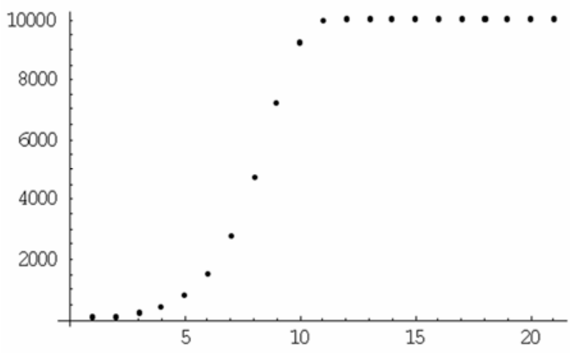


图 1-42

$$q = q + kbq - kq^2$$

或

$$q^2 = bq$$

即

$$q = b$$

一般地，讨论方程

$$p_{n+1} = (1+r)(p_n - p_n{}^2)$$

对 $p_0 = 0.2$ ，以及 $r = 1.9$, 2.4 , 2.55 , 2.7 来做实验并求出数列的前 50 项，然后作图。其程序如下：

```
pn={0.2};x=1.9;
For[i=1, i≤50, i++,
  pn=Append[pn, (1+x)*(pn[[i]] –pn[[i]]^2)];]
pn
ListPlot[pn, PlotJoined–>True]
```

运行后，得到 r =1.9 情况下的图形，如图 1-43 所示。改变参数 r 的值，令 r=2.4、r=2.55 和 r=2.7，重新运行程序，依次得到图 1-44 至图 1-46。

```
{0.2, 0.464, 0.721242, 0.583051, 0.704997, 0.603131,
  0.694156, 0.61568, 0.686192, 0.624464, 0.680075,
  0.630961, 0.675262, 0.635921, 0.671424, 0.63978,
  0.668338, 0.64282, 0.665847, 0.645235, 0.66383,
  0.647163, 0.662194, 0.64871, 0.660868, 0.649952,
  0.659791, 0.650954, 0.658918, 0.651761, 0.658209,
  0.652413, 0.657634, 0.652939, 0.657168, 0.653365,
0.65679, 0.653709, 0.656483, 0.653988, 0.656234,
0.654213, 0.656033, 0.654396, 0.65587, 0.654544,
0.655737, 0.654663, 0.65563, 0.65476, 0.655543}
```

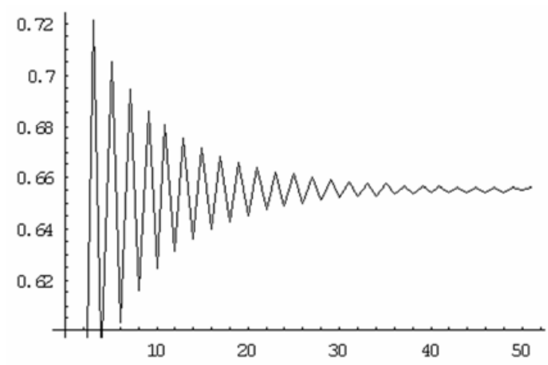


图 1-43　(r=1.9)

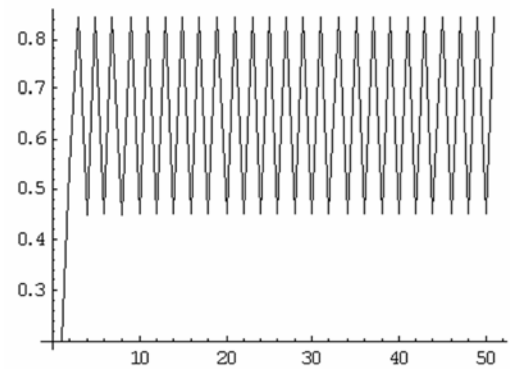


图 1-44　(r=2.4)

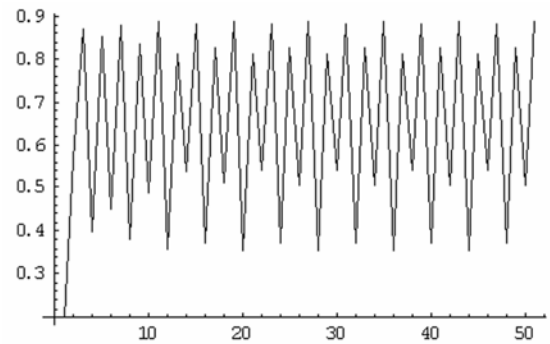


图 1-45　（r=2.55）

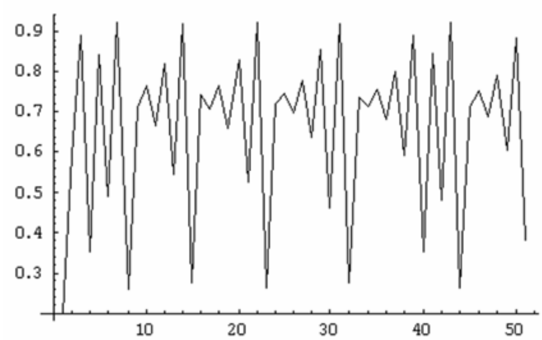


图 1-46　(r=2.7)

由上述图形可见：

当 r=1.9 时，数列收敛于 0.65，即方程有一个稳定点；

当 r=2.4 时，数列经过不长的时间后，就在 0.842154 和 0.451963 这两个值之间上下振荡，称之为 2–循环；

当 r=2.55 时，数列的值在 0.812656, 0.540474, 0.881685, 0.370325 这 4 个值处重复振荡，称之为 4–循环；

当 r=2.7 时，几乎看不出什么规律了，也许要算得更多，也许根本不会有循环，它变得那样不可捉摸！

方程 $p_{n+1}=(1+r)(p_n-{p_n}^2)$ 的解对于参数 r 的微小变化，可能绝不相同。同样，当考查解对初始值 p_0 的依赖性时，也会发现类似的情况。

这种方程的解敏感地依赖于参数或初值的现象，在数学上称之为“混沌”。人们形象地比喻说：南美洲蝴蝶翅膀大并微微颤动，引起了非洲的一场大地震。

混沌现象的存在警示人们，可能会发生这种情况，许多人们认为理解了的东西会突然变得“无法控制”，比如克隆一只恐龙将会怎样？如果让机器人真的拥有了人的智能又

会怎样？

习题 1-3

1）对任何 n 求下列差分方程的解。

(1) $x_{n+1}=3x_n, x_0=1$　　　　(2) $x_{n+1}=(3/4)x_n, x_0=64$

2）假设世界人口每年增长 3%，求 25 年后世界的人口总数以及人口翻一番所需的时间。若增长率为 4%，结果如何？

3）假设世界食物产量的年增长率为 1%，10 年后能增长到多少？

4）迭代给定的差分方程 10 次，并对这些数值作图。

(1) $a_{n+1}=2.5a_n-0.25a_n^2$，$a_0=9$

(2) $b_{n+1}=b_n-0.2b_n^3$，$b_0=0.9$

5）对方程 $p_{n+1}=(1+r)(p_n-p_n{}^2), a_0=0.2$ 作进一步的实验，通过实验找一个 r，使之有 8-循环。

6）求下列差分方程的平衡值。

(1) $a_{n+1}=a_n{}^2-5a_n+6$

(2) $b_{n+1}=b_n^3-5b_n^2+4b_n$

实验 1-4　方程近似根的求法

一、问题的提出

在科学研究和工程计算中常常遇到求高次代数方程或其他各种类型方程的根的问题。比如在《九章算术》中，少广章有题云："今有积一百八十六万八百六十七尺，问为立方几何？"用现代记号就是求方程 $x^3 = 1860\,867$ 的根。在计算机上怎样开立方？怎样将开立方转换成加、减、乘、除运算？本实验要研究的就是方程根的数值解法。

二、实验目的

（1）介绍迭代法的思想，以及迭代法收敛的必要条件和充分条件；
（2）学会牛顿迭代法的编程计算；
（3）介绍弦位法。

三、实验内容

1．迭代法

迭代法是计算数学中一种基本而重要的方法。在求解方程近似根问题中的做法是，先将方程 $f(x)=0$ 转化为等价的方程 $x=\varphi(x)$，并据此构造迭代格式

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

对某个选定的初始值 x_0 进行迭代，得到一个数列 $\{x_n\}$，如果数列 $\{x_n\}$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

则 x^* 就是方程 $x=\varphi(x)$ 的根，亦即满足 $f(x)=0$ 。

并不是每个迭代公式构造的数列都有极限。为了保证收敛，我们给出下面的定理 1-1。

【定理 1-1】　如果在区间 $[a,b]$ 上，$\varphi(x)$ 连续可导，且满足 $|\varphi'(x)|\leqslant q<1$，则迭代格式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 收敛，亦即有数列 $\{x_n\}$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的精确解。

在数值实验中，常常用相邻两次迭代的结果之差的绝对值变得越来越小来判断迭代过程的收敛性。当 $[x_{n+1}-x_n]$ 小于指定的精度时，就取 $\frac{1}{2}(x_n+x_{n+1})$ 作为方程根的近似值。

【例 1-4】　求方程 $x^3 = 1860\,867$ 的根。

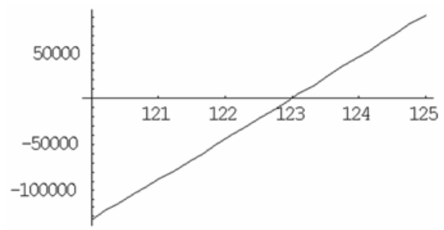


图 1-47

【解】 先画出函数的图形，其程序如下：

```
f[x_]:=x^3–1860867
Plot[f[x], {x, 120, 125}]
```

由程序运行结果可得图 1-47。

由图 1-47 可见，方程在区间（120，125）之间有一根。

将方程转化为

$$x=\frac{1\,860\,867}{x^2}$$

或

$$x=\frac{1}{2}(x+\frac{1\,860\,867}{x^2})$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1\,860\,867}{x^2})$$

有

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{2\times1\,860\,867}{x^3})$$

在区间（120, 125）内有$|\varphi'(x)|<1$，因此迭代方程

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1\,860\,867}{x_n{}^2})$$

收敛。取初值 x_0=120，计算迭代 13 次的的程序是：

```
x0=120.;eps=10^(–7);
For[i=1, i≤13, i++,
  x1=(x0+1860867/x0^2)/2;
  If[Abs[x1–x0]>eps, x0=x1, Break[]];
  Print[x1];
]
```

其运行结果是：

```
124.613    122.224    123.395    122.804    123.098    122.951
123.025    122.988    123.006    122.997    123.002    122.999
123.
```

2．牛顿迭代法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f(a)\cdot f(b)<0$，并且 $f'(x), f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都不变号，在这样的假设下，方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个实根 $x*$。

过曲线 AB 弧的某一端，比如 A，做切线交 x 轴于 x_1，x_1可以作为 $x*$的一个近似

值，如图 1-48 所示。过 A 点的切线方程为

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

切线与 x 轴的交点为

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

为提高精确度，再过 $(x_1, f(x_1))$ 做切线，交 x 轴于 x_2， x_2 是比 x_1 更好的近似值。

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

依次构造迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1-2}$$

式（1-2）称为牛顿迭代公式。为了保证切线与 x 轴的交点都落在区间 $[a,b]$ 内，应选取函数值与二阶导数符号相同的端点作为初始点。如图 1-48 中， $f''(x)<0$，故取 $(a, f(a))$ 为初始点。

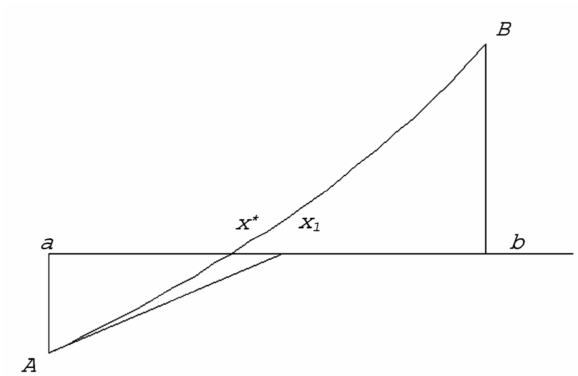


图 1-48

记 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$，有

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

在 $x = x^*$ 处

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

因此在 $x = x^*$ 充分小邻域内有 $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$，亦即牛顿迭代法是收敛的。

【例 1-5】　用牛顿迭代法求方程 $x^3 - x + 1 = 0$ 的实根，精确到 10^{-4} 。

【解】　其程序如下：

```
f[x_]:=x^3–x+1;
```

```
Plot[x^3–x+1, {x, –2, 2}]
D[f[x], x]
D[f[x], {x, 2}]
```

运行结果所画图形如图 1-49 所示，并得出各阶导数为

$-1+3x^2$

$6x$

在区间 $[-2,-1]$ 上 $f''(x)>0$，取 $x_0=-2$，运行如下程序：

```
f[x_]:=x^3–x+1;
x0=–2.;delta=10^(–4);imax=10;
For[i=1, i≤imax, i++, x1=x0–f[x0]/f'[x0];
 Print[x1];
 If[Abs[x1–x0]>delta, x0=x1, Break[]]
]
```

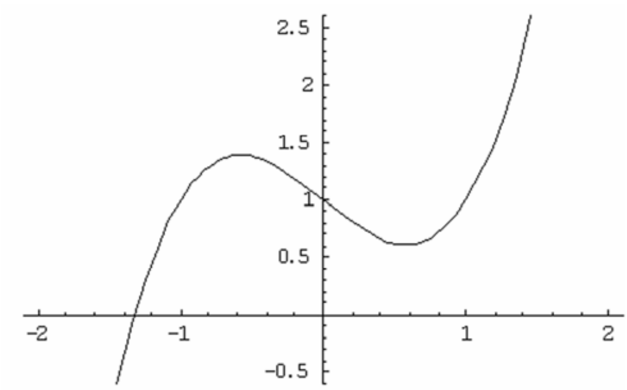


图 1-49

得到满足精度要求的结果为：

–1.54545　–1.35961　–1.3258　–1.32472　–1.32472

用牛顿迭代法仅迭代了 5 步就达到精度要求。Mathematica 关于牛顿迭代法已经有了内存函数 FindRoot[ ], 使用的格式是

```
FindRoot[f[x]==0, {x, x0}]
```

【例 1-6】　续例 1-5，用 Mathematica 命令求解方程，其程序为：

```
FindRoot[x^3–x+1==0, {x, –2}]
{x–>–1.32472}
```

3．弦位法

牛顿迭代法在使用中有一定的局限性。当在根的邻域内导数的值非常小时，有可能

由于误差的原因，使得牛顿迭代法得不出正确结果。同一原因，当方程有两个非常接近的根或二重根时，牛顿迭代法也可能失效。在这种情况下可以改用弦位法。

弦位法是用连接 A, B 的弦与 x 轴的交点 $x1$ 作为 $x*$的第一近似值，如图 1-50 所示，再连接 B 与（$x1, f(x1)$）点，和 x 轴交于 $x2$，……依次进行下去，得到 $x*$的一列近似值。

弦位法的算法如下：

定义函数 $f(x)$，置初值 $\varepsilon, \delta, \max i, x_0$，对 $n = 0, 1, 2, \Lambda$，$\max i$ 循环计算

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

若 $f(x_{n+1}) \leqslant \delta$ 或 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$，取 $x* = x_{n+1}$ 终止。其中 max$i$ 仍是为避免陷入死循环而设置的最大循环次数。

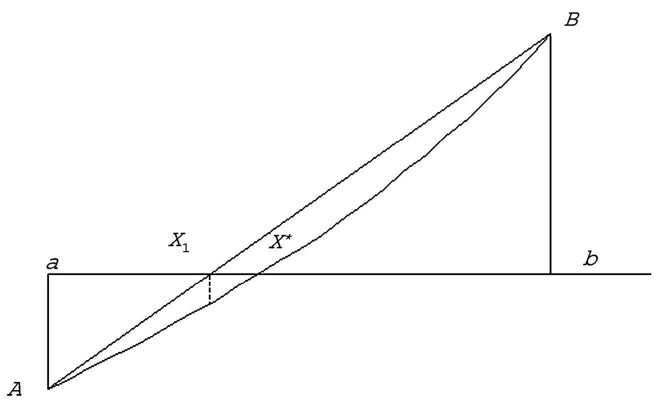


图 1-50

【例 1-7】 求方程 $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$ 在（0, 1）中的一个根。

【解】 键入如下程序段：

```
f[x_]:=x^3+1.1x^2+0.9x–1.4;
dalta=10^(–7);eps=10^(–7);maxi=100;x0=1;x1=2;
For[i=1, i≤maxi, i++, x2=x1–f[x1](x1–x0)/(f[x1] –f[x0]);
   If[Abs[x2–x1]>eps, If[Abs[f[x2]]>dalta, x0=x1;x1=x2, i=maxi],
     i=maxi]];
Print[x2]
```

运算结果为：

```
0.670657
```

弦位法在 Mathematica 中的内存函数与牛顿迭代法区别在于，要给出一个初始区间。其命令格式为：

```
FindRoot[f[x], {x, x0, x1}]
```

直接用内存函数求解方程，键入如下命令：

```
FindRoot[x^3+1.1x^2+0.9x−1.4= =0, {x, 0, 1}]
```

运行所得结果为：

```
{x–>0.670657}
```

可以先画出方程右边函数的图形（见图 1-51）。

从图 1-51 可以看出，函数根的大约位置为（0，1）区间，把它们定为程序中的初始区间。

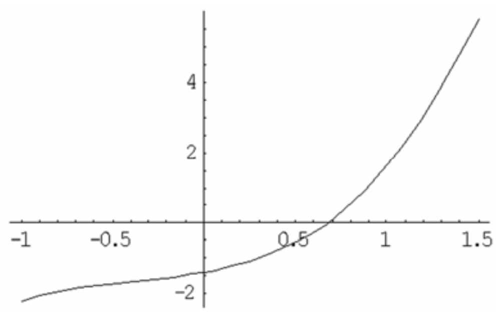


图 1-51

习题 1-4

1）用迭代法求下列方程的实根。

(1) $x^3-3x^2+6x-1=0$

(2) $x^5+5x+1=0$

(3) $x\lg x=1$

(4) $x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1=0$

先画出函数的图形，确定根的隔离区间。自己构造一个收敛的迭代公式编程计算，然后再与 Mathematica 的内存函数计算的结果进行比较。

2）用牛顿迭代法或弦位法求以下方程的近似根。

(1) $\tan x=\tanh x$

(2) $x^3-x-0.2=0$

(3) $x^5+x^4+x^3+x^2+x=51$

(4) $x\sin x-0.5=0$

实验 1-5　驳船的长度问题

一、问题的提出

有一艘宽度为 5 米的驳船欲驶过某河道的直角湾，河道的宽度如图 1-52 所示。试问：要驶过直角湾，驳船的长度不能超过多少米？（精确到 0.01 米）

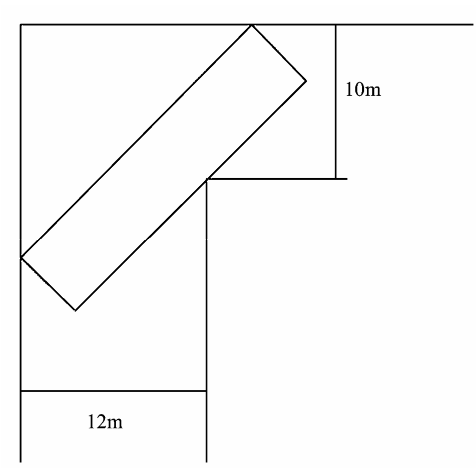


图 1-52

二、实验目的

（1）掌握一元函数求极值的驻点法；
（2）学习 Mathematica 求极值的命令。
（3）在计算机上动态观察驳船长度随角度变化的情况。

三、实验内容

1．建立一元函数的极值模型

设驳船长度为 L，要使驳船能驶过直角湾，假定驳船外侧与河道的边沿刚好接触，则河道内侧的角点到驳船内侧的距离不能大于 5 米，否则无法通过。因而问题归结为求 L 的最小值。设驳船外侧与横轴的夹角为 x，则

$$L = 10/\sin x - 5\tan x + 12/\cos x - 5/\tan x$$

首先画出函数的图形，键入如下命令

```
f[x_]:=10/Sin[x]+12/Cos[x] –5*Tan[x] –5/Tan[x];
Plot[f[x], {x, 0, Pi/2}, PlotRange–>{–10, 100}]
```

运行程序后得图 1-53。

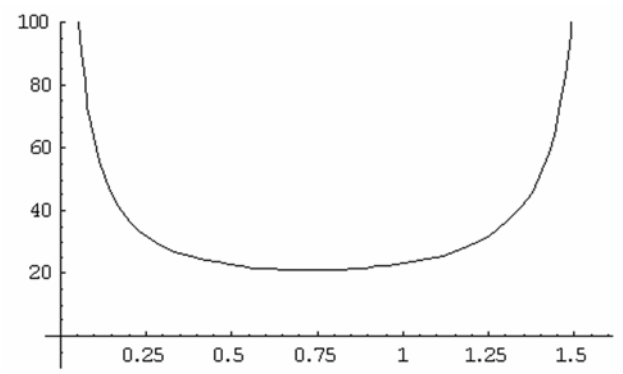


图 1-53

由图 1-53 可知，函数有惟一极值点，大约在 0.75 附近。为说明这一点，可以画出导函数的图形，键入如下命令：

```
Plot[f'[x], {x, 0, Pi/2}, PlotRange–>{–60, 60}]
```

运行后得到图 1-54。

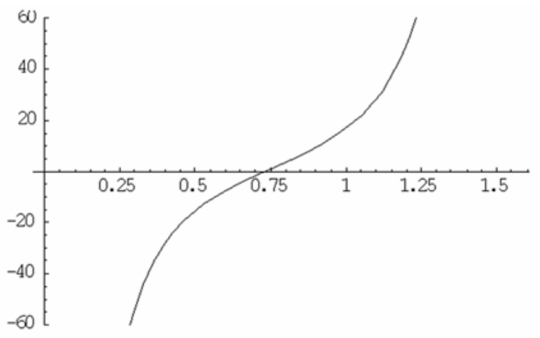


图 1-54

由一元微分学知道，取极值的必要条件是一阶导数等于零，键入如下命令，对函数求导得：

```
f[x_]:=10/Sin[x]+12/Cos[x] –5*Tan[x] –5/Tan[x]
f '[x]
```

运行后得：

$-10\text{Cot}[x]\ \text{Csc}[x] + 5\ \text{Csc}[x]^2 - 5\ \text{Sec}\ [x]^2 + 12\ \text{Sec}[x]\ \text{Tan}[x]$

令导数等于零，求得驻点为：

```
r=NSolve[f'[x]==0, x]
{{x–>–0.449069 – 0.583988 i}, {x–>–0.449069 + 0.583988 i}, {x–>0.731998}}
```

得到惟一驻点并计算出函数的最大值：

```
r[[3]]
f[x]/.x–>r[[3]]
```

```
0.731998
21.0372
```

以上数据表明函数在 $x = 0.731998$ 处取得极大值 21.0372。

2．更有效的内部命令 FindMinimum[ ]

FindMinimum[ ]的命令格式是：

```
FindMinimum[f[x], {x, x0}]
```

可以用这个命令来直接求实验内容题目 1．的解：

```
FindMinimum[f[x], {x, 1}]
{21.0372, {x–>0.731998}}
```

运行结果表示在 $x = 0.731998$ 处函数取得极大值 21.0372。

3．在计算机上动态观察驳船长度随角度变化的情况

在 Mathematica 中输入下面的程序：

```
f[x_]:=10/Sin[x]+12/Cos[x] –5*Tan[x] –5/Tan[x];
t1=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{0, 0}, {0, 30}}]}];
t2=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{0, 30}, {30, 30}}]}];
t3=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{12, 0}, {12, 20}}]}];
t4=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{12, 20}, {30, 20}}]}];
x1=0.731998;
For[1=16, 1≤26, 1+=0.2,
 t5=Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[{{0, 30–1*Sin[x1]}, {1*Cos[x1], 30}}]}];
 t6=
  Graphics[{RGBColor[1, 0, 0],
    Line[{{0, 30–1*Sin[x1]}, {5*Sin[x1], 30–1*Sin[x1] –5*Cos[x1]}}]}];
 t7=
  Graphics[{RGBColor[1, 0, 0],
    Line[{{5*Sin[x1], 30–1*Sin[x1] –5*Cos[x1]},
      {1*Cos[x1]+5*Sin[x1], 30–5*Cos[x1]}}]}];
 t8=
  Graphics[{RGBColor[1, 0, 0],
    Line[{{1*Cos[x1], 30}, {1*Cos[x1]+5*Sin[x1], 30–5*Cos[x1]}}]}];
 Show[t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, AspectRatio–>Automatic];
]
```

运行程序后，得到 6 个图形（见图 1-55），选中所有图形，按下 Ctrl+Y 组合键，即可进行动画演示。

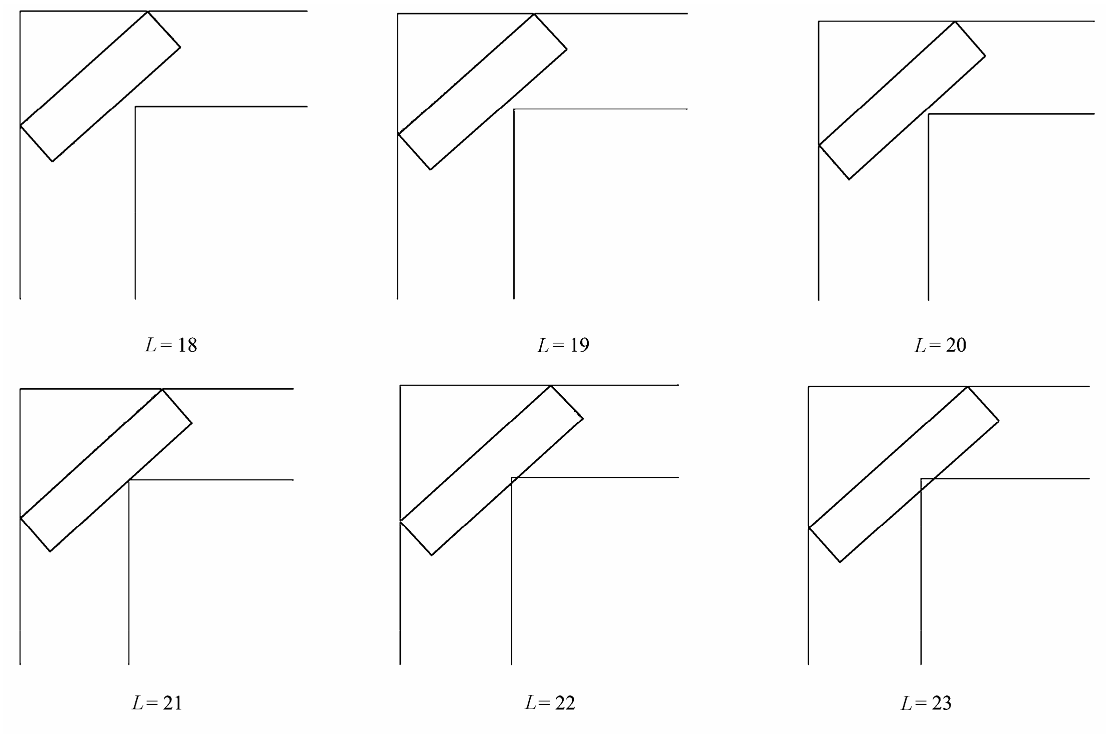


图 1-55

若想终止动画演示，可用鼠标单击空白处。

由以上可以清楚地看到，当驳船长度从 18 米开始后，每增加 1 米，则驳船另一侧逐渐接近河道的角点，当超过 22 米时，驳船已无法通过。

将上面的程序稍加改变，可以动态模拟驳船通过直角湾的情景，即：

```
f[x_]:=10/Sin[x]+12/Cos[x] –5*Tan[x] –5/Tan[x];
t1=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{0, 0}, {0, 30}}]}];
t2=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{0, 30}, {30, 30}}]}];
t3=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{12, 0}, {12, 20}}]}];
t4=Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Line[{{12, 20}, {30, 20}}]}];
x1=0.731998;
For[1=18, 1≤23, 1+=1.,
  t5=Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[{{0, 30–1*Sin[x1]},
{1*Cos[x1], 30}}]}];
  t6=Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[{{0.30–1*Sin[x1]},
```

```
                    {5*Sin[x1], 30–1*Sin[x1] –5*Cos[x1]}}]}];
  t7=Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[{{5*Sin[x1],
                    30–1*Sin[x1] –5*Cos[x1]}, {1*Cos[x1]+ 5*Sin[x1],
                    30–5*Cos[x1]}}]}];
  t8=Graphics[{RGBColor[1, 0, 0],
                    Line[{{1*Cos[x1], 30},
 {1*Cos[x1]+ 5*Sin[x1], 30–5*Cos[x1]}}]}];
   Show[t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, AspectRatio–>Automatic];
  ]
```

请读者在计算机上做实验来观察驳船通过的情形。

习题 1-5

1）一条 1m 宽的通道与另一条 2m 宽的通道相交成直角，一个梯子需要水平绕过拐角，试问梯子的最大长度是多少？

2）如果水平河道宽度为 15m，而竖直河道宽度为 10m，可通过的驳船最大长度又是多少呢？如果驳船的宽度为 7m，情况又是怎么样呢？你能否建立一个更一般的模型来讨论各种可能的情况？

3）铁皮罐头的经济尺寸问题：

设圆柱形铁皮罐头的体积为 V，高为 h，底面半径为 r，若 V 给定，问高与半径的比 $\dfrac{h}{r}$ 应等于多少，才能使罐头的表面积最小？

如果你留意一下超市上的各种罐头，会发现罐头的高与半径的比大致在 2 到 3.8 之间，其中的道理何在呢？

（提示：在实际生产中，下料时，还需要计算剩余边角料，假如罐头上下底的圆片按外切正方形计算，则 $\dfrac{h}{r}$ 大约在 2.55；假如罐头上下底的圆片按外切正六边形计算，则 $\dfrac{h}{r}$ 大约在 2.21。）

实验 1-6　空中电缆的长度计算

一、问题的提出

两座高压输电的铁塔相距 100m，假定两座塔高度相等。在铁塔上悬挂着一根电缆，允许电缆在中间下垂 10m，试计算在这两座铁塔之间所用电缆的长度。

二、实验目的

（1）学习定积分的近似计算方法；
（2）掌握在 Mathematica 中计算定积分的命令 Integrate, Nintegrate 的用法；
（3）计算空中电缆的长度。

三、实验内容

1．定积分的近似计算方法

在实际问题中遇到的定积分，有时被积函数不能得到解析表达式，而只能得到一张数据表；有时即使得到了解析表达式，但求不出初等的原函数，所以，在理论上很有价值的牛顿-莱布尼兹公式在实际问题中却不能奏效，因此有必要研究定积分的近似计算方法。

由定积分的几何意义可知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值等于由 $x=a$，$x=b$，及 $y=0$，$y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积。将区间$[a, b]$中插入分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \Lambda < x_n = b$$

将区间$[a, b]$分成 n 个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \Lambda, n-1)$，它们的长度分别为

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, 2, \Lambda, n-1)$$

在每个小区间上做一个小矩形，如果各个小区间的长度相等并取区间的右端点的函数值为高，则所得到的阶梯形图形的面积为

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i(b-a)/n) \tag{1-3}$$

该式可以作为定积分的一个近似值。公式（1-3）称为右矩形公式。

如果取区间的左端点的函数值为高，则所得到的阶梯形图形的面积为

$$\sigma_n^{(2)}=\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i(b-a)/n) \tag{1-4}$$

该式可以作为定积分的另一个近似值公式。式（1-4）称为左矩形公式。

如图 1-56 所示，浅灰色阶梯形为左矩形，它是函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 在[−3, 3]上积分的一个近似值。

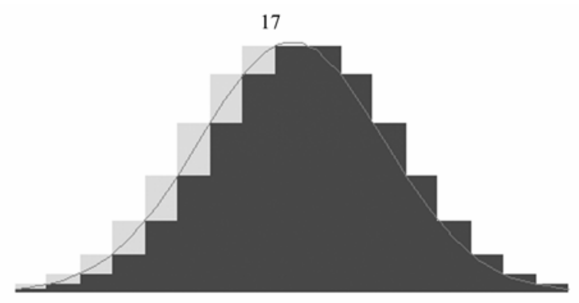


图 1-56

如果取区间的中点的函数值为高，则所得到的阶梯形图形的面积为

$$\sigma_n^{(3)}=\frac{(b-a)}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+i(b-a)/n) \tag{1-5}$$

该式也可以作为定积分的一个近似值。式（1-5）称为梯形公式。

【例 1-8】 计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 的近似值。

【解】 首先画出函数的图形，将区间[0, 1]2 等分，4 等分…… 2^n 等分，并分别用左矩形法、右矩形法、梯形法来计算定积分的近似值。

下面的程序可以画出用梯形法逼近定积分的过程。

```
g1=Plot[x^2, {x, 0, 1}, DisplayFunction–>Identity]
a1=Table[{x, x^2}, {x, 0, 1, 1/2}];
g2=Graphics[Line[a1]]
g3=Table[Graphics[Line[{a1[[i]], {a1[[i, 1]], 0}}]], {i, 2, 3}]
Show[g1, g2, DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

用梯形法分为 2 等分、4 等分、8 等分及 16 等分逼近定积分的过程如图 1-57 所示。

下面来计算它们的数值。用左矩形法逼近定积分，其程序为：

```
（*左矩形*）
f[x_]:=x^2;
```

```
n=Input["n="]
s=0.;a=0.;b=1.;h=(b–a)/n;
For[i=1, i≤n–1, i++,
  s=s+(i/n)^2;
]
s=(s+f[a]+f[b])*h
```

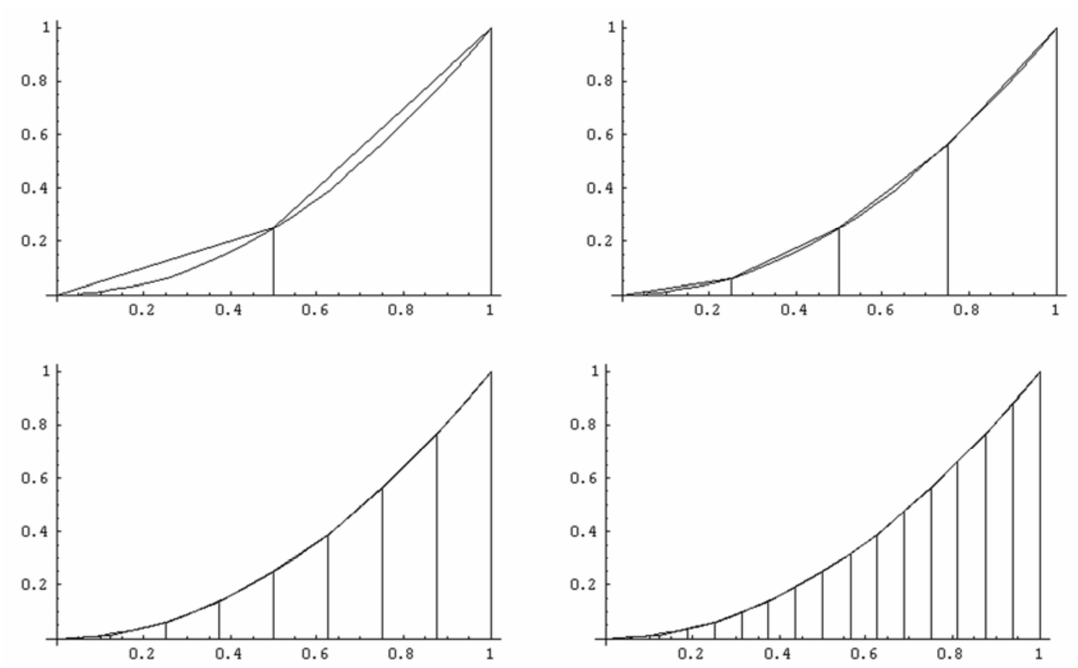


图 1-57

运行时，系统提示输入等分区间数 *n*，确认后即输出计算结果。比如输入 *n*=10，则输出为 0.385；输入 *n*=100，则输出 0.33835……

用梯形法逼近定积分，其程序为：

```
(*梯形法*)
f[x_]:=x^2;
n=Input["n="]
s=0.;a=0.;b=1.;h=(b–a)/n;
For[i=1, i≤n–1, i++,
  s=s+(i/n)^2;
]
s=(s+f[a]+f[b]/2)*h
```

运行程序，当输入 n=10 时，输出为 0.335；输入 n=100 时，则输出 0.33335，……可以看出梯形法精度比矩形法要高。不同 n 值下的计算结果如表 1-1 所示。

表 1-1　不同 n 值下的计算结果

n	10	20	50	100	1000
左矩形法	0.304	0.313625	0.324192	0.328549	0.33283549
右矩形法	0.385	0.35875	0.3434	0.33835	0.3338335
梯形法	0.335	0.33375	0.3334	0.33335	0.3333335

【例 1-9】　用梯形法计算函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间[−3, 3]上的定积分的近似值。

【解】　下面来改进例 1-8 中的程序，首先定义一个 n 的函数，然后用 Print[ ]语句输出 n（5～50），其间隔为 5 的计算结果。其程序如下：

```
f[x_]:=E^(–x^2/2)/Sqrt[2Pi];
a=3;delta=0.0001;n0=50;
s[n_]:=2a/n*((f[–a]+f[a])/2+Sum[f[–a+i*2a/n], {i, 1, n–1}])//N;
Print[Table[s[n], {n, 5, 50, 5}]]
```

输出为

```
{0.994538, 0.996531, 0.996951, 0.997103, 0.997173,
 0.997212, 0.997235, 0.99725, 0.997261, 0.997268}
```

在概率论中可以知道本例中的函数就是标准正态分布的概率密度函数。上面证明的结论就是所谓的 3−σ 原则——正态分布的随机变量落在（$\mu-3\sigma, \mu+3\sigma$）内的概率大约为 0.997。

2．计算定积分命令 Nintegrate[f[x], {x, a, b}]

Mathematica 中计算定积分的命令为：

```
NIntegrate[f[x],{x,a,b} ]
```

【例 1-10】　计算定积分 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 的近似值。

【解】　程序如下：

```
f[x_]:=E^(–x^2/2)/Sqrt[2Pi];
NIntegrate[f[x], {x, –3, 3}]
```

计算结果为

```
0.9973
```

【例 1-11】　计算定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值。

【解】　被积函数称为迪拉克函数，在 x=0 处没有定义，因此要补充定义。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

计算程序如下：

```
f[x_]:=If[x≠0, sin[x]/x, 1];
NIntegrate[f[x], {x, –Pi, Pi}]
```

输出结果为：

```
3.70387
```

可以看到，Mathematica 有很强的定积分计算功能，使用起来非常方便。但是不应满足于使用现成的命令，而应当了解隐藏在命令后面的原理。事实上，Mathematica 的每一个命令都是一段十分精彩的程序，系统中有许多“.m”文件，这就是命令的原理。

关于系统的内核，通常很难看到。但是还是可以在程序包中学得很多的编程技巧。

3．计算实验开头所述空中电缆的长度

在微分方程课程中将推导悬链线满足的方程是 $y=a\cosh\frac{x}{a}$，而计算弧长则有定积分公式

$$s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

首先要确定函数中的参数 a 。已知条件曲线的最低点 $(0, y(0))$ 和最高点 $(50, y(50))$ 的高度差为 10m，所以，应有 $y(50)=y(0)+10$ ，即

$$a\cosh\frac{50}{a}=a+10$$

用 Mathematica 的求根命令解出 a 的值，即

FindRoot[xCosh[$\frac{50}{a}$]–10–x==0, {x, 130}]

运行结果为：

```
{x–>126.632}
```

利用已经计算出来的参数定义函数，并画出它的图形，其程序如下：

```
a=126.6324;
f[x_]:=a*Cosh[x/a]
```

```
t2=Plot[f[x], {x, –50, 50}, PlotRange–>{0, 160}]
t1=Line[{{–53, 0}, {–50, 137.5}}];
t3=Line[{{53, 0}, {50, 137.5}}];
t4=Line[{{47, 0}, {50, 137.5}}];
t5=Line[{{–47, 0}, {–50, 137.5}}];
Show[t2, Graphics[{t1, t3, t4, t5}]];
```

由程序结果得图 1-58。

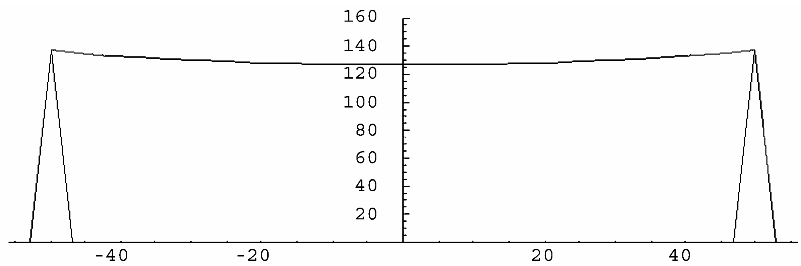


图 1-58

然后来计算悬链线的弧长，即

```
NIntegrate[Sqrt[1+f '[x]^2], {x, –50, 50}]
```

运行结果为：

```
102.619
```

我们也可以用近似积分法来做。用梯形法的程序如下：

```
a=126.6324;
f1[x_]=a*Cosh[x/a];
f[x_]:=Sqrt[1+f1'[x]^2];
n=Input["n="]
s=0.;a=–50.;b=50.;h=(b–a)/n;
For[i=1, i≤n–1, i++, s=s+f[a+i*h];
    ]
s=(s+(f[a]+f[b])/2)*h
100
102.619
```

当取 n=100 时，结果为 102.619。

习题 1-6

1）某旅游景点从山脚到山顶有一缆车索道。全长为 1471 m ，高为 380m，缆绳悬

挂在上行站到下行站的行程中的 8 个铁塔上，这 8 个铁塔依山势走向而距离不等，从上行站到第一铁塔大水平距离为 $D0$，高为 $H0$；从第一铁塔到第二铁塔的水平距离为 $D1$，高为 $H1$……从第 8 个铁塔到下行站的水平距离为 $D8$，高为 $H8$。具体数据见下表：

$D0$	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	$D6$	$D7$	$D8$
220	200	140	120	100	120	140	200	220
$H0$	$H1$	$H2$	$H3$	$H4$	$H5$	$H6$	$H7$	$H8$
50	45	40	38	34	38	40	45	50

每一段缆绳下垂的最低点不低于其两端铁塔中较低塔顶悬挂绳处 1m，试估算整个索道工程所用的缆绳总长度。

2）用 Integrate[ ]或 Nintegrate[ ]计算下列定积分的值。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$

3）计算椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的弧长。（取 a=3, b=5）

4）计算摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1+\cos t)\end{cases}$　$t\in(0,2\pi)$ 一拱的弧长。

5）求心脏线 $\rho=a(1+\cos\varphi)$ 的周长。

6）求 $\rho^2=a^2\cos\varphi$ 所围成图形的面积。

7）求抛物线 $y^2=4x$ 与直线 $x=1$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体体积。

实验 1-7　微分方程求解及计算机模拟

一、问题的提出

如图 1-59 所示，正方形 *ABCD* 的四个顶点各有一人。在某一时刻（设为 $t_0=0$），四人同时出发以匀速 v 按顺时针方向走向下一个人。如果他们始终保持对准目标，则最终将按螺旋状曲线汇合于中心点 *O*。试求每一个人的行进轨迹。

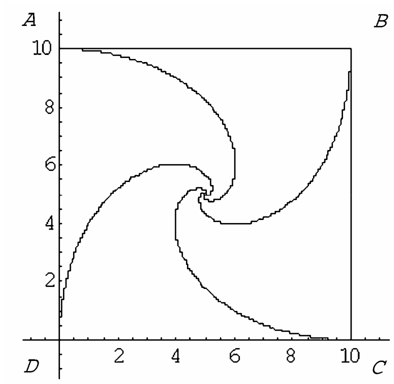


图 1-59

二、实验目的

（1）学习用 Mathematica 求解微分方程；

（2）学习求解微分方程的 Euler 方法；

（3）学习计算机模拟微分方程求解的基本过程与方法。

三、实验内容

1．求解微分方程的 Mathematica 命令

（1）求精确解命令 Dsolve[方程，y[x], x]。

【例 1-12】　求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x y$ 。

【解】　求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x y$ 的命令和运行结果如下：

```
DSolve[y'[x]==E^x*y[x], y[x], x]
```

{{y[x] –> $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ c[1]}}

取任意常数 $c=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$，画出这个微分方程的积分曲线，键入以下命令：

```
t=Table[c*E^(E^x), {c, –3, 3}]
Plot[Evaluate[t], {x, –1, 1.5}]
```

程序运行后得到积分曲线如图 1-60 所示。

【例 1-13】　求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$ 。

【解】　求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$ 的命令和运行结果如下：

```
DSolve[y'[x]+2*x*y[x]==x*Exp[-x^2], y, x]
```

$\{\{y[x] \to \frac{1}{2}e^{-x^2}x^2+e^{-x^2}c[1]\}\}$

程序运行后得到微分方程的通解为

$$y=\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+ce^{-x^2}$$

取任意常数 $c=-3, -1, 1, 3$，画出这个微分方程的积分曲线，键入以下命令：

```
t=Table[c*E^(-x^2)+x^2*E^(-x^2)/2, {c, -3, 3, 2}]
Plot[Evaluate[t], {x, -2, 2}]
```

程序运行后得到图 1-61。

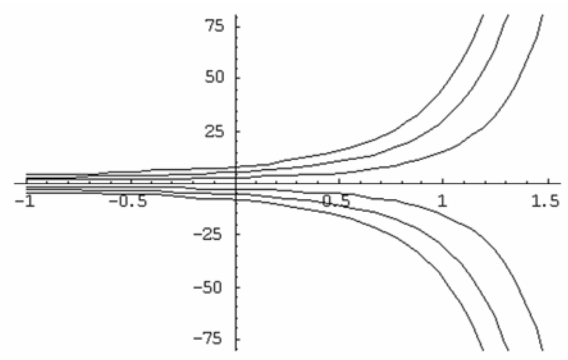


图 1-60

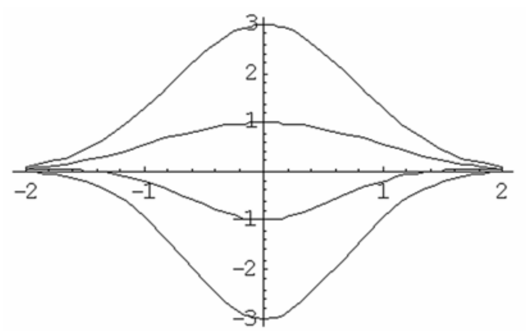


图 1-61

【例 1-14】　求微分方程 $xy'+2y-e^x=0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=2e$ 下的特解。

【解】　其命令和运行结果如下：

```
DSolve[{x*y'[x]+2*y[x]==Exp[x], y[1]==2*E}, y[x], x]
```

$\{\{y[x] \to \frac{2e-e^x+e^x x}{x^2}\}\}$

（2）求微分方程的近似解。

求微分方程的近似解命令为：

NDSolve[方程，y[x],{x, x0, x1}]

【例 1-15】　求微分方程 $\begin{cases} xy'-x^2y\sin x+1=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$ 在区间[1，4]上的数值解，并画出解的图形。

【解】　其程序如下：

```
sol=NDSolve[{x*y'[x] –x^2*y[x]*Sin[x]+1==0, y[1]==1},
   y[x], {x, 1, 4}];
f[x_]:=Evaluate[y[x]/.sol];
Plot[f[x], {x, 1, 4}, PlotRange–>All]
```

由程序运行结果得出解为：

```
{{y[x] –>InterpolatingFunction[{{1., 4.}},<>] [x]}}
```

注意，这里得到的解是以一个规则给出的。但是它执行后可得到一个纯函数或一个插值函数，从而也可以进行函数的各项操作。譬如可以作出它的图形，画出的积分曲线如图 1-62 所示。

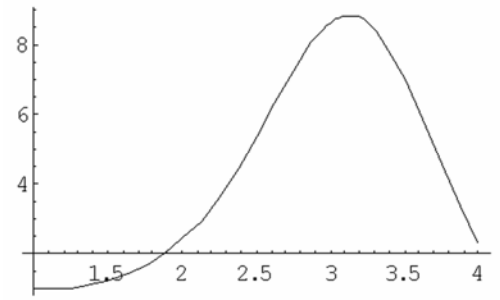


图 1-62

2．求解微分方程的 Euler 折线法

为求初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在区间 $[x_0, x_n]$ 上的数值解。首先在区间 $[x_0, x_n]$ 中插入节点 $x_0 < x_1 < x_2 < \Lambda < x_{n-1} < x_n$。用差商近似代替微商，即

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

从而可使微分方程转化为一个代数方程，即

$$\frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} = f(x_k, y(x_k)) \qquad (k = 0, 1, 2, \Lambda, n-1)$$

记 $x_{k+1} = x_k + h$，则有 $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k))$。

从 x_0 开始，计算出 $y(x)$ 在各节点处的近似值 $y_1, y_2, \Lambda, y_{n-1}$，将各个点 (x_k, y_k) 连接得到微分方程的近似积分曲线。

【例 1-16】　求微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 在区间 $[0, 1]$ 上的数值解，步长 $h = 0.1$。

【解】　其程序如下：

```
txy={{0, 1}};
h=0.1;n=11;
For[k=1, k<n, k++, xk=txy[[k]][[1]];yk=txy[[k]], [[2]];
```

```
    txy=Append[txy, {xk+h, yk+h(yk–2xk/yk)}]];
  txy
```

其程序运行结果为：

```
{{0, 1}, {0.1, 1.1}, {0.2, 1.19182}, {0.3, 1.27744},
 {0.4, 1.35821}, {0.5, 1.43513}, {0.6, 1.50897},
 {0.7, 1.58034}, {0.8, 1.64978}, {0.9, 1.71778}, {1., 1.78477}}
```

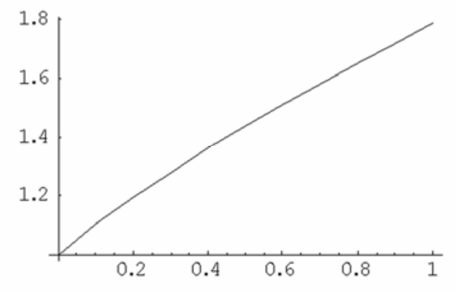


图 1-63

画出近似解的图形，键入命令：

```
ListPlot[txy, PlotJoined–>True]
```

程序运行后可得图 1-63。

3．计算机模拟追逐问题

算法：设甲追逐乙（甲表示四个顶点中的每一个人，而乙表示依顺时针方向的下一人）。在 t 时刻甲的坐标为 (x_1, y_1)，乙的坐标为 (x_2, y_2)，当经过时间 dt 时，甲在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的坐标为

$$(x_1 + v\,\mathrm{d}t\cos\alpha\,,\, y_1 + v\,\mathrm{d}t\sin\alpha)$$

其中

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}$$

微分方程模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\cos\alpha \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\alpha \end{cases}$$

由此设计算法如下：

（1）赋初值。终止时间 t=12，时间间隔 dt=0.02，行进速度 v=1 及各点的起始位置为 (A(0,10), B(10,10), C(10,0), D(0,0))。

（2）循环次数 n=t/dt。

（3）对 $j = 1, 2, \Lambda\ , n$ 进行循环计算。对 $i = 1, 2, 3, 4$ 进行循环计算。

$$\begin{cases} x_{i+1,j} = x_{i,j} + v\cdot\mathrm{d}t\cdot\dfrac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2}} \\ y_{i+1,j} = y_{i,j} + v\cdot\mathrm{d}t\cdot\dfrac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2}} \end{cases}$$

（4）将四个顶点中的每个人各个时刻对应的点用小直线段连接起来并画在同一张图中，由此得到四人的行进轨迹。

计算程序为：

```
t=12.;dt=0.02;v=1;n=t/dt;
robit={{{0, 10}}, {{10, 10}}, {{10, 0}}, {{0, 0}}};
For[j=1, j≤n, j++, For[i=1, i≤4, i++, xx1=robit[[i, j, 1]];
   yy1=robit[[i, j, 2]];
   If[i≠4, xx2=robit[[i+1, j, 1]];
     yy2=robit[[i+1, j, 2]], xx2=robit[[1, j, 1]];
     yy2=robit[[1, j, 2]]];
   dd=Sqrt[(xx2–xx1)^2+(yy2–yy1)^2]//N;
   xx1=xx1+v*dt*(xx2–xx1)/dd;
   yy1=yy1+v*dt*(yy2–yy1)/dd;
   robit[[i]]=Append[robit[[i]], {xx1, yy1}]]];

g1=ListPlot[robit[[1]], PlotJoined–>True, DisplayFunction–>Identity];
g2=ListPlot[robit[[2]], PlotJoined–>True, DisplayFunction–>Identity];
g3=ListPlot[robit[[3]], PlotJoined–>True, DisplayFunction–>Identity];
g4=ListPlot[robit[[4]], PlotJoined–>True, DisplayFunction–>Identity];
g5=ListPlot[{{0, 10}, {10, 10}, {10, 0}, {0, 0}}, PlotJoined–>True,
   DisplayFunction–>Identity];
Show[{g1, g2, g3, g4, g5}, DisplayFunction–>$ DisplayFunction,
  AspectRatio–>Automatic]
```

程序运行后得到图 1-59。

习题 1-7

1）求解微分方程 $(x^2-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy-\sin x=0$ 的通解。

2）求方程 $\begin{cases} x^2+2xy-y^2+(y^2+2xy-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$ 的特解，并画出解的图形。

3）某水池有 2 000m^3 的水，其中已含盐 2kg，若以每分钟 6m^3 的速度向池中注入含盐率为 0.5kg/m^3 的盐水，同时又以每分钟 4m^3 的速度从水池流出搅拌均匀的盐水。问：经过多少时间，池中盐水的含盐量达到 0.2kg/m^3。试建立这个过程所满足的微分方程模型。

（1）用 Euler 方法求解；

（2）用计算机计算出每隔 10 分钟池水的体积、含盐量及含盐率的变化情况，并与 Euler 折线作比较。

参考程序如下：

```
time=0;tt=0;valume=2000;total=2;rate=N[total/valume, 7];
Print[" 时间 ", "水的体积     ", "含盐量         ",
    "含盐率 "];
While[rate<0.2, time=time+1;valume=valume+2;
    total=total+3–4rate;
    rate=total/valume;
    If[time≥10, Print[tt+time, "          ", valume, , "          ",
      total, , "          ", rate];
    tt=tt+time;time=0]];
Prine[tt+time, "          ", valume, , "          ", total,
"          ", rate]
```

实验 1-8　空间图形的画法

一、问题的提出

在空间解析几何中我们介绍了各种空间曲面和空间曲线，若从方程去了解图形的形状主要依赖于平行截痕法。有了计算机数学软件，就可以绘制出精美的三维图形，并有效地加强几何直观性，这对形成空间想像力很有好处，特别是对多元微积分中一些很难在黑板上讲解清楚的问题，可以提供几何上的帮助。

二、实验目的

（1）学习空间曲面的画法；
（2）学习空间曲线的画法；
（3）学习空间立体的画法。

三、实验内容

1．绘制空间曲面

Mathematica 的三维画图命令主要有：

```
Plot3D[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]
ParametricPlot3D[{x[u, v], y[u, v], z[u, v]}, {u, u1, u2}, {v, v1, v2}]
```

【例 1-17】　绘制函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的图形。

【解】　其程序如下：

```
f[x_, y_]:=x*y/(x^2+y^2)
Plot3D[f[x, y], {x, –1, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>50]
```

由程序可得图 1-64。

这个函数在零点的极限不存在。在图 1-65 中画出了曲面与平面 $y=x$，$y=2x$，$y=3x$ 的交线，可以看出，当动点 M 沿着直线 $y=kx$ 趋于原点时，函数值的极限与 k 有关。

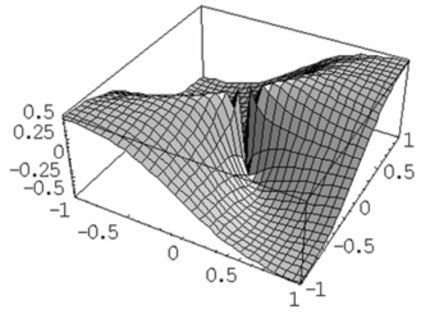


图 1-64

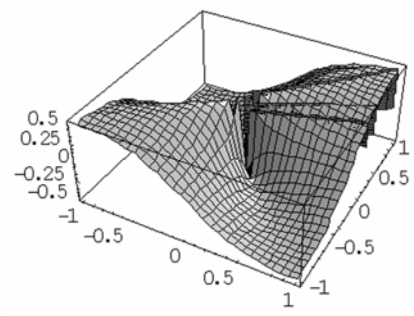


图 1-65

【例 1-18】　画出函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ 的图形。

【解】　键入如下命令：

```
Plot3D[x^2*y/(x^2+y^2), {x, –1, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>30]
```

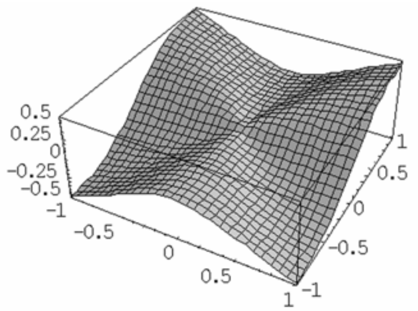


图 1-66

其运行后得图 1-66。由图 1-66 可以看出：

在原点函数极限存在且等于 0，因此只要在原点补充定义函数的值为 0 就成为一个连续的曲面。

【例 1-19】　在一条曲线上不连续的函数

$$f(x,y)=\frac{y^2+x}{y^2-x}$$

【解】　键入如下命令：

```
Plot3D[(y^2+x)/(y^2–x), {x, –1, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>70]
```

其运行结果见图 1-67。

【例 1-20】　画球面 $f(x,y)=1-x^2-y^2$ 的图形。

【解】　依题意键入如下命令：

```
Plot3D[Sqrt[1–x^2–y^2], {x, –1, 1}, {y, –1, 1}]
```

运行以后画出的图形（见图 1-68）只有上半球面，而且很不完整。这是因为，在画图区域内有的点如（0.8, 0.8）处的函数没有定义。因此可以采用分片定义和加大采样点数的办法来解决，即：

```
t01=Plot3D[Sqrt[1–x^2–y^2], {x, –1, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>50]
t02=Plot3D[–Sqrt[1–x^2–y^2], {x, –1, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>50]
Show[t01, t02, BoxRatios–>{1, 1, 1}]
```

但是得到的图形仍是残缺不全的（见图 1-69）。而采用参数方程画图能得到高质量的图形（见图 1-70），即运行如下命令：

```
ParametricPlot3D[{Cos[u]*Sin[v], Sin[u]*Sin[v], Cos[v]},
 {u, 0, 2Pi}, {v, 0, Pi}, PlotPoints–>50]
```

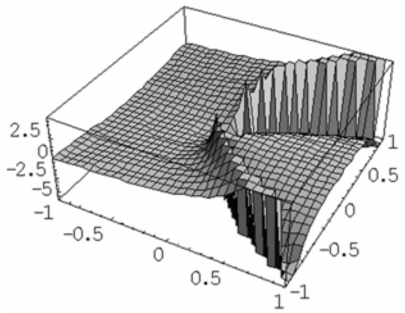


图 1-67

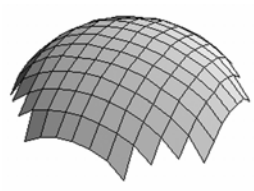


图 1-68

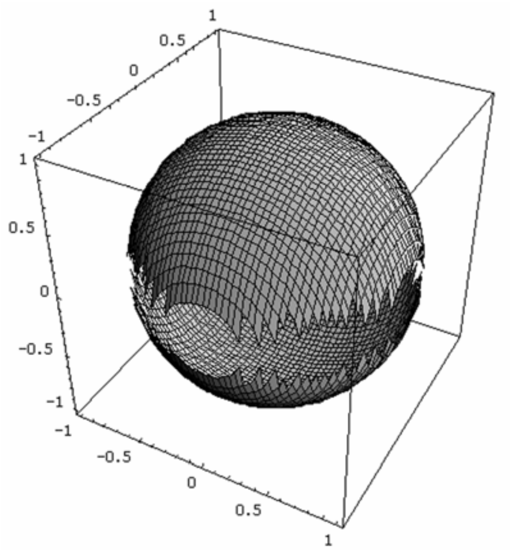


图 1-69

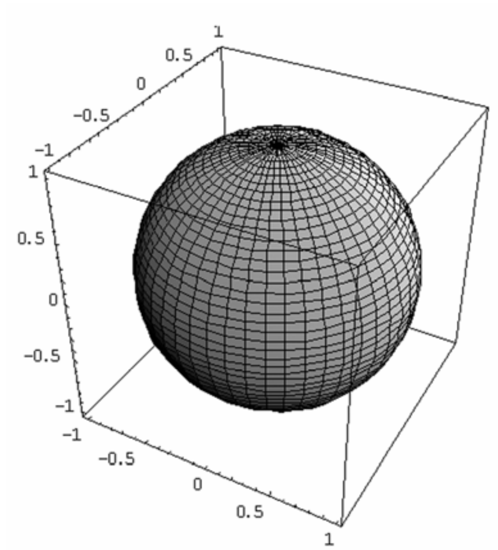


图 1-70

从图 1-70 可以看出，这时全部图形完整地画出来了。许多二次曲面用参数方程画图都能得到较好的效果。

【例 1-21】　画函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的图形。

【解】　首先将方程化为参数方程，即

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \qquad\qquad u\in(0,3), v\in(0,2\pi) \\ z = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \end{cases}$$

其程序如下：

```
ParametricPlot3D[{u*Cos[v], u*Sin[v], Exp[−u^2/2]}, {v, 0, 2Pi},
```

```
{u, 0, 4}, PlotPoints–>20, BoxRatios–>{1, 1, 0.4}, Boxed–>False,
Axes–>False]
```

程序运行后得到图 1-71。

【例 1-22】 画双曲抛物面 $z=\dfrac{x^2-y^2}{2}$ 的图形。

【解】 将双曲抛物面 $z=\dfrac{x^2-y^2}{2}$ 化参数方程为

$$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=(u^2-v^2)/2 \end{cases} \quad u\in(-2,2),\ v\in(-2,2)$$

其程序如下：

```
ParametricPlot3D[{u, v, (u^2–v^2)/2},
 {v, –2, 2}, {u, –2, 2}, Plotpoints–>30,
 BoxRatios–>{1, 1, 0.4}]
```

程序运行后得图 1-72。

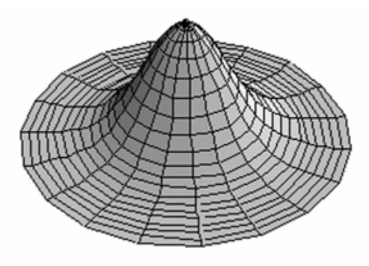


图 1-71

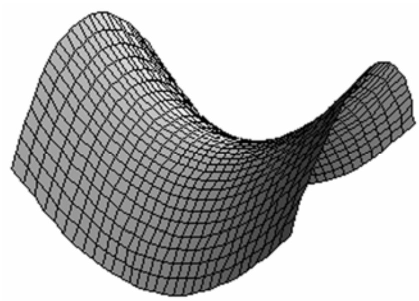


图 1-72

【例 1-23】 画单叶双曲面 $\begin{cases} x=\sec u\sin v \\ y=\sec u\cos v \\ z=\tan u \end{cases}$ $u\in(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}),\ v\in(0,2\pi)$ 的图形。

【解】 其程序如下：

```
ParametricPlot3D[{Sec[u]sin[v], Sec[u]*Cos[v], Tan[u]},
 {u, –Pi/4, Pi/4}, {v, 0, 2Pi}, BoxRatios–>{1, 1, 1}, PlotPoints–>30,
 Boxed–>False, Axes–>False]
```

程序运行后可得图 1-73。

【例 1-24】 画双叶双曲面图形。

【解】　其程序如下：

```
t1=ParametricPlot3D[
   {Sqrt[u^2–1]*Sin[v],
     Sqrt[u^2–1]*Cos[v], 2u}, {u, 1, 5},
   {v, 0, 2Pi}, ViewPoint–>{4, 0.2, 1.8},
   DisplayFunction–>Identity]
t2=ParametricPlot3D[
   {Sqrt[u^2–1]Sin[v], Sqrt[u^2–1]Cos[v],
     2u}, {u, –5, –1}, {v, 0, 2Pi},
   ViewPoint–>{4, 0.2, 1.8},
   DisplayFunction–>Identity]
Show[t1, t2, DisplayFunction–>$DisplayFunction,
  ViewPoint–>{–1.522, –2.574, 2}, Boxed–>False, Axes–>False]
```

程序运行后可得图 1-74。

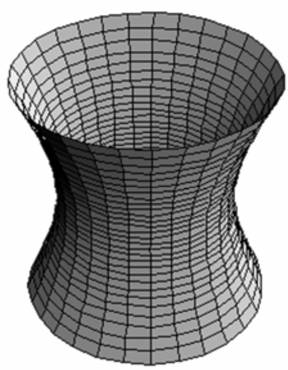


图 1-73

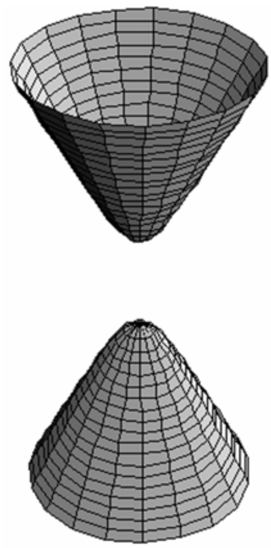


图 1-74

2．空间曲线的绘制

设曲线的参数方程为 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in (t_1, t_2)$ 。

Mathematica 画曲线的命令格式为：

```
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, t1, t2}}
```

【例 1-25】　画圆柱螺旋线。

【解】　其程序如下：

```
ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], 0.4*t},
 {t, 0, 10Pi}, BoxRatios–>{1, 1, 1},
 PlotPoints–>150, Axes–>False,
 Boxed–>False,
 ViewPoint–>{3.495, –1.746, 1.673}]
```

程序运行后可得图 1-75。

【例 1-26】　画曲面 $x^2+y^2=x$　$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的交线。

【解】　首先将交线方程化为参数式，在联立方程中消去 z，求得 xoy 平面的投影柱面方程 $x^2+y^2=x$，将该方程参数化为 $x=\dfrac{1+\cos t}{2}$，$y=\dfrac{\sin t}{2}$，然后代入球面方程再求得 z 的参数式

$$z=\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t}=\sin\frac{t}{2}$$

其程序如下：

```
ParametricPlot3D[
 {(1+Cos[t])/2, Sin[t]/2, Sin[t/2]},
 {t, 0, 2Pi}, BoxRatios–>{1, 1, 1},
 PlotPoints–>150,
 ViewPoint–>{3.495, –1.746, 1.673}]
```

运行程序后可得图 1-76。

3．空间立体图的画法

空间立体图通常有几片曲面围成，Mathematica 软件在三维空间中收集指定的图形元素组合成三维图形，位置在先的将遮蔽后面的图形。不过可以利用参数设置使图形尽可能真实地反映空间立体的原貌。

【例 1-27】　画出由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 所围成的空间四面体。

【解】　其程序如下：

```
dp1={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
dp2={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}};
dp3={{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}};
```

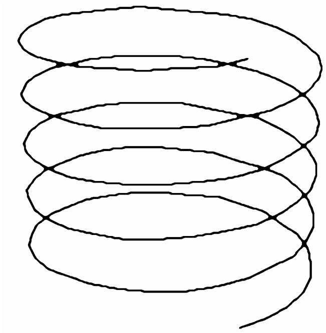


图 1-75

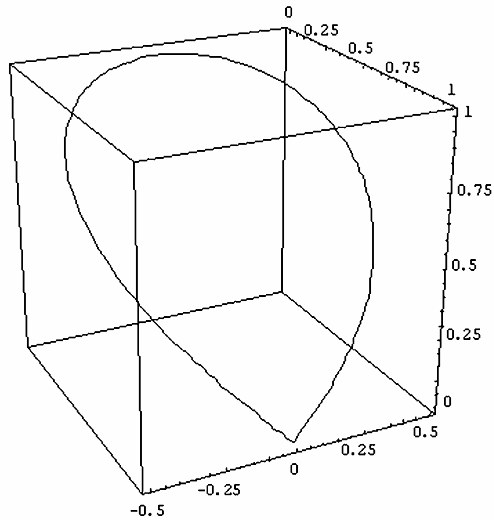


图 1-76

```
Show[
 Graphics3D[{Polygon[dp1], Polygon[dp2],
   Polygon[dp3]}],
 ViewPoint–>{1.535, –3., 2.067}]
```

程序运行后可得图 1-77。

【例 1-28】　画出由马鞍面 $z = xy$ 与平面 $x + y = 1,\ z = 0$ 所围成的立体图。

【解】　其程序如下：

```
z=If[u+v≤1, u*v];
dpt1=ParametricPlot3D[{u, v, z}, {u, 0, 1}, {v, 0, 1}, PlotPoints–>50,
   Axes–>False, DisplayFunction–>Identity];
z1=If[v<u*(1–u), v, 0];
dpt2=ParametricPlot3D[{u, 1–u, z1}, {u, 0, 1}, {v, 0, 0.3},
   DisplayFunction–>Identity];
dpt3=
 Graphics3D[{AbsoluteThickness[1.8], Line[{{1.02, 0, 0}, {0, 1.02, 0}}]}]
 dpt4=ParametricPlot3D[
    {t, 1–t, t*(1–t)}, {t, 0, 1},
    DisplayFunction–>Identity];
 Show[{dpt3, dpt1, dpt2, dpt4},
  BoxRatios–>{1, 1, 0.6},
  ViewPoint–>{3.806, –2.458, 1.5},
```

```
Boxed–>False,
DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

程序运行后可得图 1-78。

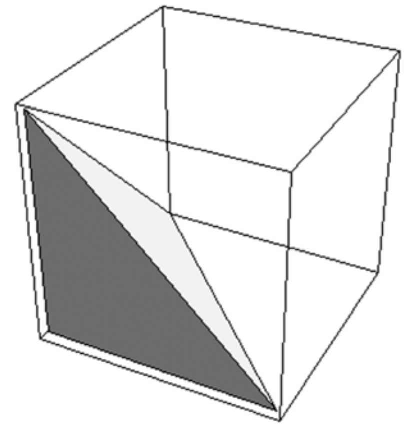


图 1-77

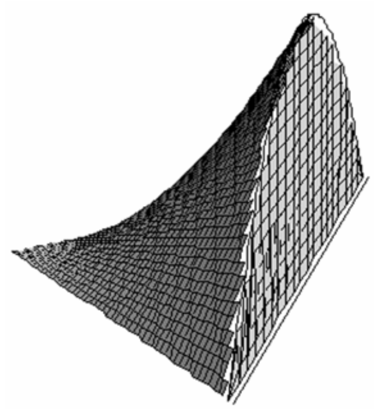


图 1-78

【例 1-29】 画出维维安尼立体图。

【解】 首先作出球面及圆柱面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=x$ 的图形，然后用 Show[ ]命令将两幅图合并在一起。如图 1-79 所示，可以看到其上半球面与圆柱面的叠加。但是由于 Mathematica 没有透视功能，因此看不到球面内部的情况，圆柱面也同样带有多余的部分。为了使图形更直观，可以先将球面函数定义在圆柱面的内部，然后仅画出这一片球面，对圆柱面也作同样的处理，最后将两片曲面合并在一起。

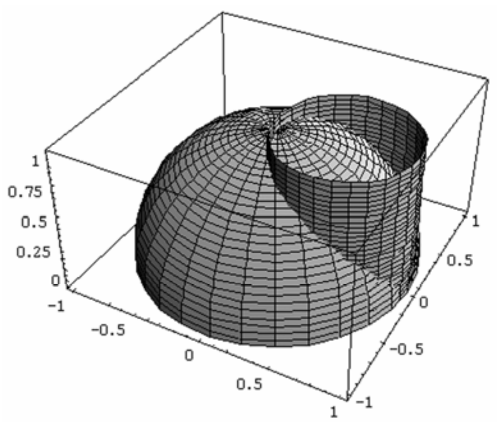


图 1-79

其画图的程序如下：

```
z=If[(x–1/2)^2+y^2<=1/4, Sqrt[1–x^2–y^2]];
t1=Plot3D[z, {x, 0, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>50
   ViewPoint–>{0.5, –4.650, 1.163}, DisplayFunction–>Identity];
z1=If[v≤Sqrt[(1+Cos[Pi+u])/2], v, 0];
t2=ParametricPlot3D[{(Cos[u]+1)/2, Sin[u]/2, z1},
   {u, 0, 2Pi}, {v, 0, 1}, PlotPoints–>50,
   DisplayFunction–>Identity];
```

```
t3=ParametricPlot3D[{(Cos[t]+1)/2, Sin[t]/2, Sin[t/2]},
   {t, 0, 2Pi}, PlotPoints–>50, DisplayFunction–>Identity]
Show[{t1, t2, t3}, BoxRatios–>{1, 1, 1},
  DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

程序运行后得图 1-80。

这时画出的图形（见图 1-80）看起来更加清楚。关于其中使用的参数设置可以借助 Mathematica 的帮助文件了解它们的使用方法。

【例 1-30】 画出由曲面 $z=2-x^2-y^2,\ x^2+y^2=1$ 围成的空间立体图形。

【解】 其程序如下：

```
tt1=ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], 2–Sin[t]^2}, {t, 0, 2Pi},
  PlotPoints–>100, DisplayFunction–>Identity]
z2=If[v<=2–Sin[u]^2, v];
tt7=ParametricPlot3D[{Cos[u], Sin[u], z2}, {u, 0, 2Pi},
  {v, 0, 2}, PlotPoints–>100, DisplayFunction–>Identity]
z3=If[x^2+y^2≤1, 2–y^2];
tt8=Plot3D[z3, {x, –1, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>100,
  DisplayFunction–>Identity]
Show[tt1, tt7, tt8, DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

运行后得到图 1-81。

在 Griphics 3D 软件包中有一些功能更加强大的函数绘图命令，它们属于外部命令，在使用时，要首先调用 Griphics 3D 软件包。

【例 1-31】 画出由曲面 $z=3-x^2-y^2$，$z=x^2+y^2$ 所围成的图形。

【解】 其程序如下：

```
<<Graphics 'Graphics'
Clear[x, y, z1, z2]
z1=3–2x^2–y^2;
z2=x^2+2y^2;
x=r∗Cos[u];
y=r∗Sin[u];
tu=ParametricPlot3D[{{x, y, z1}, {x, y, z2}}, {u, 0, 2Pi}, {r, 0, 1}]
Shadow[tu]（∗画出它在各坐标面上的投影∗）
```

程序运行后可分别得到图 1-82 和图 1-83。

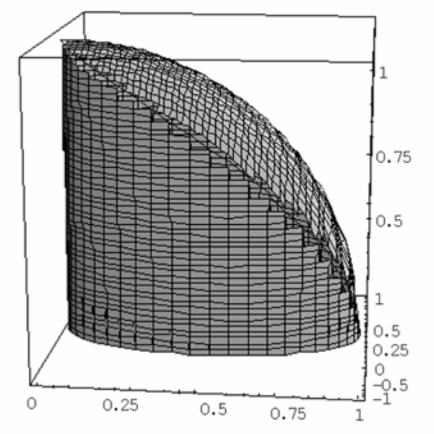


图 1-80

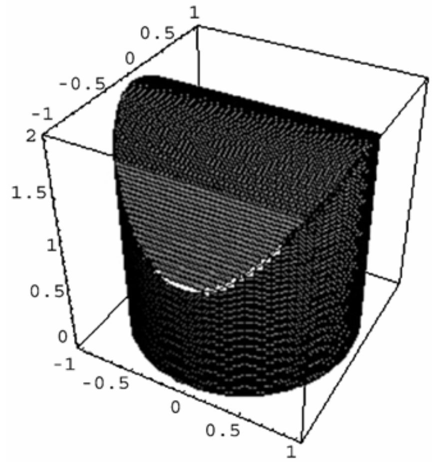


图 1-81

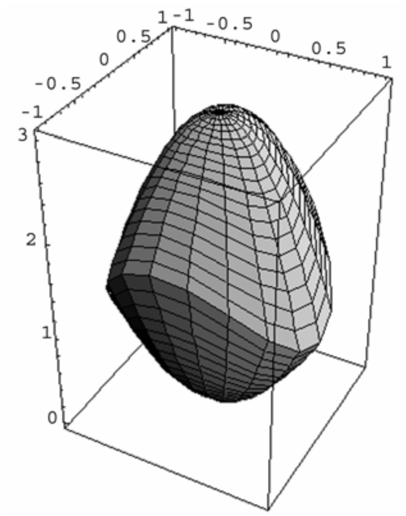


图 1-82

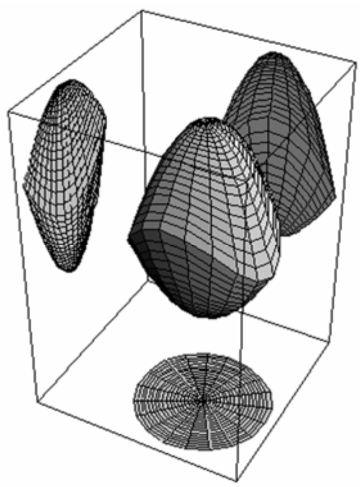


图 1-83

习题 1-8

1）画出下列函数的曲面图形，并选择适当的参数使得图形比例适度，大小美观。

(1) 平面 $\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = d - au - bv \end{cases}$　　（a, b, c, d 为常数，请自设定数值）

(2) 椭球面$\begin{cases} x = a\cos u\sin v \\ y = b\cos u\cos v \\ z = c\sin u \end{cases}$　　$u \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}),\ v \in (0, 2\pi)$

(3) 抛物柱面$\begin{cases} x = au^2 \\ y = bu \\ z = v \end{cases}$　　$u \in (-a_1, a_2),\ v \in (b_1,\ b_2)$

(4) 正螺面$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = Ru \end{cases}$　　$u \in (a_1, a_2),\quad v \in (0, 2\pi)$

(5) 环面$\begin{cases} x = (R + r\cos u)\cos v \\ y = (R + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$　　$u \in (0, 2\pi),\quad v \in (0, 2\pi)$

(6) 圆锥面$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases}$　　$u \in (-a, a),\ v \in (0, 2\pi)$

2）作出函数 $z = \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ 的图形。

3）作球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + 2y + 3z = 6$ 的交线图形。

实验 1-9　函数的等量线及有关的作图问题

一、问题的提出

函数的等量线在实际中有广泛的应用。例如，在地理学中的等高线，气象学中的气象图等。Mathematica 系统有这种图形的绘制命令，另外在研究隐函数作图以及微分方程的积分曲线图形时也要用到等量线。

二、实验目的

（1）掌握等量线的绘制方法；
（2）学习一元隐函数的图形画法；
（3）学习微分方程积分曲线的画法。

三、实验内容

1．介绍等量线的作图方法

在数学中，二元函数 $f(x,y)$ 在几何中表示曲面，可以用平行于 XOY 坐标面的平面 $z=c$ 与曲面相截，其交线在 XOY 平面上的投影曲线 $f(x,y)=c$，称其为函数 $f(x,y)$ 的一条等量线。等量线从某种角度可以看出函数变化的规律。

等量线的作图命令为 ContourPlot，其基本格式为：

ContourPlot[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, 可选项]

其中，可选项主要有：

Contours–>8	等量线的条数
PlotPoints–>50	采样点数
PlotRange–>{zmin, zmax}	绘图范围
ContourShading–>False	去掉阴影

【例 1-32】　作出函数 $f(x,y)=xy^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的等量线。

【解】　首先定义二元函数，为了解函数的曲面图形与等量线的关系，先画出函数的三维图形。键入以下命令，运行后可得图 1-84。

```
f[x_, y_]:=x*y^2*Exp[–x^2, –y^2];
Plot3D[f[x, y], {x, –3, 3}, {y, –3, 3}, ViewPoint–>{3.5, –1., 2.277},
  PlotPoints–>50, PlotRange–>All, BoxRatios–>{1, 1.5, 0.8},
  Boxed–>False, Axes–>False]
```

下面用基本的等量线命令来作图，键入如下命令：

```
ContourPlot[f[x, y], {x, –3, 3}, {y, –3, 3}]
```

运行后得到等量线图 1-85。

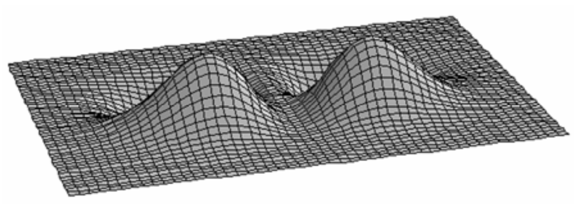


图 1-84

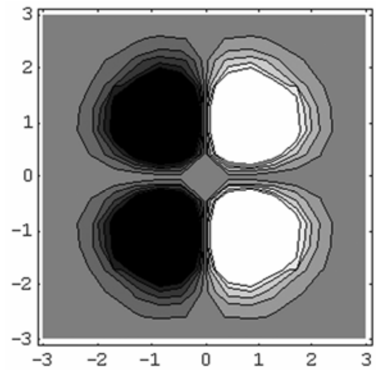


图 1-85

在系统默认的情况下，等量线条数为 10，采样点数为 15，并自动加上阴影。我们可以通过改变参数的设定来获得更理想的图形。例如，增加采样点数、去掉阴影，由此可键入以下命令：

```
ContourPlot[f[x, y], {x, –3, 3}, {y, –3, 3}, PlotPoints–>50,
  ContourShading–>False]
```

运行程序后可得图 1-86。也可限制 z 坐标的范围、增加或减少等量线的条数等，如键入以下命令：

```
ContourPlot[f[x, y], {x, –3, 3}, {y, –3, 3}, PlotRange–>{0.0, 0.2},
  Contours–>8, PlotPoints–>50, ContourShading–>False]
```

运行后得到图 1-87。

2. 梯度线的绘制

二元函数 $f(x,y)$ 的梯度 ∇f 在定义域上定义了一个方向场，如果曲线 L 上任一点的切线方向向量与该点的梯度方向相同，则称其为 $z=f(x,y)$ 的梯度线。

$$\nabla f=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0))$$

设从点 $M_0(x_0,y_0)$ 开始，沿梯度方向前进 λ 得到点 $M_1(x_1,y_1)$，则

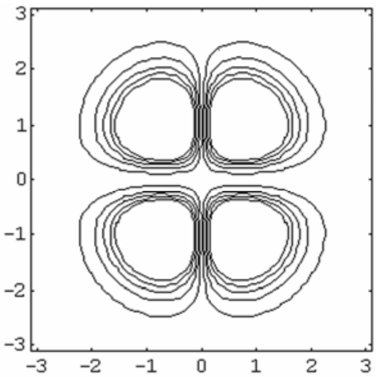


图 1-86

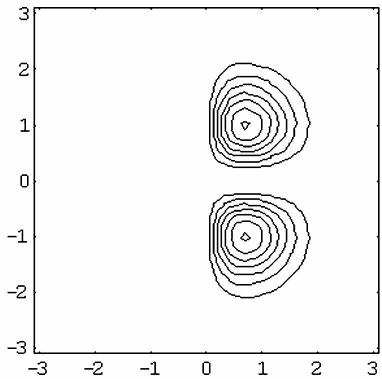


图 1-87

$$x_1 = x_0 + \lambda \frac{f_x(x_0, y_0)}{\sqrt{f_x^{\ 2}(x_0, y_0) + f_y^{\ 2}(x_0, y_0)}}$$

$$y_1 = y_0 + \lambda \frac{f_y(x_0, y_0)}{\sqrt{f_x^{\ 2}(x_0, y_0) + f_y^{\ 2}(x_0, y_0)}}$$

再从 $M_1(x_1, y_1)$ 出发，沿 $M_1(x_1, y_1)$ 点的梯度方向前进一步 λ 得到点 $M_2(x_2, y_2)$，依次得到一列点，将这些点用短线段连接起来就得到梯度线的图形。

【例 1-33】　作函数 $z = x^2 - y^2$ 的等量线和梯度线。

【解】　先定义函数和它的偏导数，再定义初值 $x_0 = 1,\ y_0 = 1, \lambda = 0.01$，用循环语句依次计算 (x_n, y_n)，将得到的点集用 ListPlot 命令画出梯度线图形。

3．一元隐函数的图形画法

方程 $F(x, y) = c$ 所确定的隐函数的图形即是二元函数 $z = F(x, y)$ 取值为 c 的那一条等量线。因此可以利用画等量线的方法来作出隐函数的图形。但是也要注意它们的区别，要适当地变换确定隐函数的方程，选择二元函数 $z = F(x, y)$ 的某个合适的值，并将等量线的条数定为 1，同时要去掉等量线图形的阴影。

【例 1-34】　作出由方程 $xy = \mathrm{e}^{x+y}$ 确定的隐函数的图形。

【解】　其程序如下：

```
ContourPlot[x*y–Exp[x+y], {x, –2, 0.5}, {y, –2, 0.5},
  PlotRange–>{–1, 1}, PlotPoints–>50, ContourShading–>False,
  Contours–>1]
```

运行结果如图 1-88 所示。

4．作微分方程的积分曲线

在微分方程的通解中含有任意常数 c，而且经常以隐函数形式给出。因此利用等量线

的方法可以方便地作出微分方程的积分曲线。

【例 1-35】　求解微分方程 $(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$，并作出其积分曲线。

【解】　键入如下命令：

```
DSolve[y'[x]==(2x–5y+3)/(2x+4y–6), y[x], x]
```

其运行结果为：

$$\{\{y[x]\to x+C[1]-\frac{9}{2}(-1+y)\,\mathrm{Log}[-3+x+2y]\}\}$$

我们将其解整理为

$$y=x-\frac{9}{2}(y-1)\ln(x+2y-3)+c$$

在　$3\leqslant c\leqslant 3$ 时作出积分曲线，键入如下命令：

```
ContourPlot[y–x+9(y–1)Log[x+2y–3]/2, {x, 0, 3}, {y, 0, 3}
PlotRange–>{–3, 3}, PlotPoints–>50, ContourShading–>False,
Contours–>7]
```

运行后得到在[0, 3]区间上的积分曲线如图 1-89 所示。

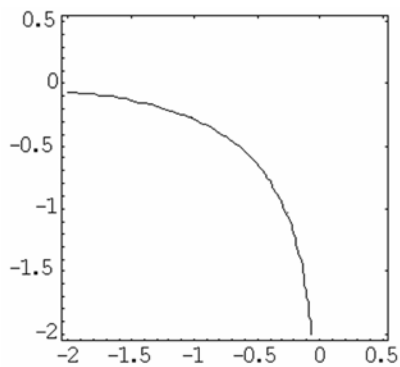


图 1-88

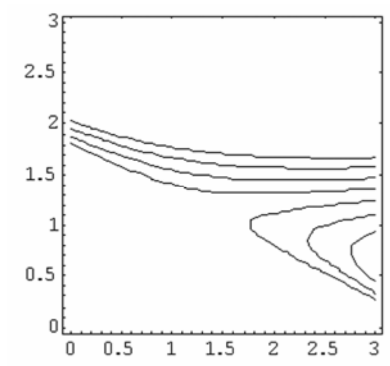


图 1-89

习题 1-9

1）作出下列二元函数的等量线：

(1)　$f(x,y)=\dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$；　　(2)　$f(x,y)=xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$

2）作出下列隐函数的图形：

(1) $x^4+y^4=16$ ；　　(2) $x^5+2y^2+y-x+x^3+3x^7=0$

3）作出下列微分方程的积分曲线：

(1) $(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$

(2) $(y-x+1)\mathrm{d}x-(y+x-5)\mathrm{d}y=0$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=-\mathrm{e}^{-x^2}y^3$

其中（3）题的参考解及运行结果为：

```
DSolve[y'[x]==x*y–Exp[–x^2]*y^3, y[x], x]
```

{{y[x] –> $\dfrac{x^2 y}{2}$ +C[1] – $\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y^3Erf[x]}}

```
ContourPlot[y–Sqrt[Pi]y^3*Erf[x]/2–x^2*y/2, {x, –3, 3},
 {y, 0–3, 3}, PlotRange–>{–3, 3}, PlotPoints–>50,
 ContourShading–>False, Contours–>7]
```

程序运行后生成图形见图 1-90。

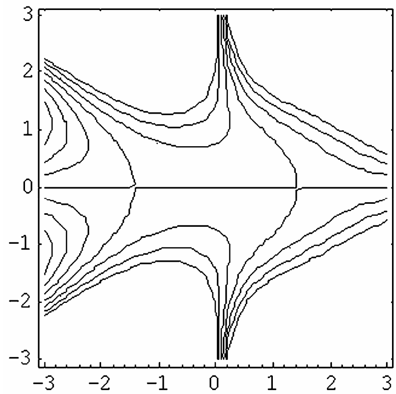


图 1-90

实验 1-10　二、三重积分的计算

一、问题的提出

重积分的计算在微积分的教学中历来是一个难点。其原因主要在于学生缺乏空间想像力，往往画不出积分的区域图形，这样就给累次积分的定限带来了困难。本实验将利用 Mathematica 作出积分区域的空间图形，并介绍确定投影区域的方法。在正确定出积分限的基础上，使用 Mathematica 计算重积分的值。

二、实验目的

（1）学习积分区域的画法；
（2）学习投影区域的求法；
（3）用 Mathematica 计算三重积分。

三、实验内容

1．二重积分的计算

用 Matjematica 计算二重积分的命令为：

```
Integrate[f[x,y],{x,a,b},{y,y1[x],y2[x]}]
Nintegrate[f[x,y],{x,a,b},{y,y1[x],y2[x]}]
```

【例 1-36】　计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域。

【解】　首先将二重积分化为二次积分，即

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y$$

键入如下语句：

```
Integrate[x*y, {x, 1, 2}, {y, 1, x}]
```

运行后得结果：

$$\frac{9}{8}$$

有时用 Integrate[ ]命令求不出结果，可能是因为没有初等原函数。此时可以改用 Nintegrate[ ]，以求积分的近似值。

【例 1-37】 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{5-2x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $4x^2+y^2-2y=0$ 所围成。

【解】 因为积分区域可以写为

$$\left\{-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\ 1-\sqrt{1-4x^2}\leqslant y\leqslant 1=\sqrt{1-4x^2}\right\}$$

键入以下语句：

```
Integrate[Sqrt[5−2x^2−y^2], {x, –0.5, 0.5},
 {y, 1–Sqrt[1–x^2], 1+Sqrt[1–x^2]}]
```

执行后发现，系统给不出结果，即

$$\int_{-0.5}^{0.5}\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5-2x^2-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}+\sqrt{1-x^2}\sqrt{5-2x^2-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}+5\arctan\left[\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2\sqrt{5-2x^2-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{-5+2x^2+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right]-2x^2\arctan\left[\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{5-2x^2-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{-5+2x^2+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right]\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5-2x^2-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}+\sqrt{1-x^2}\sqrt{5-2x^2-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}-5\arctan\left[\frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2\sqrt{5-2x^2-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{-5+2x^2+\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right]+2x^2\arctan\left[\frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{5-2x^2-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{-5+2x^2+\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right]\right)\right)\mathrm{d}x$$

改用数值积分法的程序如下：

```
NIntegrate[Sqrt[5–2x^2–y^2], {x, –0.5, 0.5}
```

```
{y, 1–Sqrt[1–x^2], 1+Sqrt[1–x^2]}]
```

这一次得出了结果：

```
3.53886
```

2．三重积分的计算

三重积分的积分区域通常是由几片曲面所围成的空间立体。在实验 1-8 中已经介绍了基本的画法。由于 Mathematica 在作图中往往将置于前面的曲面遮住后面的曲面，因此影响了图形的直观性。为了能更清楚地看出图形的本来面目，需要将曲面进行分割，只画出我们感兴趣的那一部分。因此可以使用条件语句来分片定义曲面函数。

【例 1-38】　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\ \mathrm{d}v$，其中，$\Omega$ 由 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$y=1$，$z=0$ 所围成。

【解】　其程序如下：

```
s=ParametricPlot3D[{u, v, u^2+v^2}
   {u, –1, 1}, {v, –0.2, Sqrt[2]},
   PlotRange–>{0, 2}]
t=ParametricPlot3D[{u, u^2, v}, {u, –1, 1},
   {v, 0, 2}]
m=ParametricPlot3D[{u, 1, v}, {u, –1, 1},
   {v, 0, 2.2}]
n=ParametricPlot3D[{u, v, 0}, {u, –1, 1}
   {v, –0.2, 1}]
Show[s, t, m, n]
```

由其运行结果可得图 1-91。

这样画出的图形虽然不够直观。但是已经能够看出积分曲域是以 $z=x^2+y^2$ 为顶，以 $z=0$ 为底，以 $y=x^2$，$y=1$ 为侧面的立体。投影区域为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 所围平面区域，因此有

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{x^2+y^2}z^2\mathrm{d}z$$

再键入：

```
Integrate[z^2, {x, –1, 1}, {y, x^2, 1}, {z, 0, x^2+y^2}]
```

运行后即得积分值为：

$$\frac{7712}{27027}$$

【例 1-39】　求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} zx^2 \mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $z=6-x^2-y^2$，$z=x^2+2y^2$ 所围成。

【解】　首先作出积分区域 Ω 的图形，键入程序如下：

```
z=If[6–2u^2–v^2 ≥u^2+2v^2, 6–2u^2–v^2];
s1=ParametricPlot3D[{u, v, z}, {u, –2, 2}, {v, –2, 2}, PlotPoints–>70]
z1=If[u^2+2v^2≤6–2u^2–v^2, u^2+2v^2]
t1=ParametricPlot3D[{u, v, z1}, {u, –1.5, 1.5}, {v, –1.5, 1.5},
   PlotPoints–>70]
Show[t1, s1, Axes–>False, Boxed–>False]
```

运行后得到图 1-92。

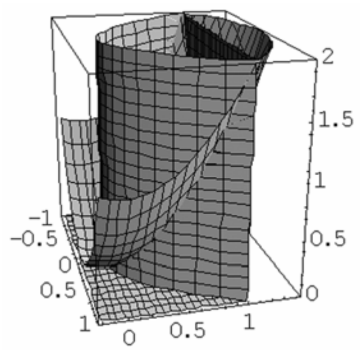


图 1-91

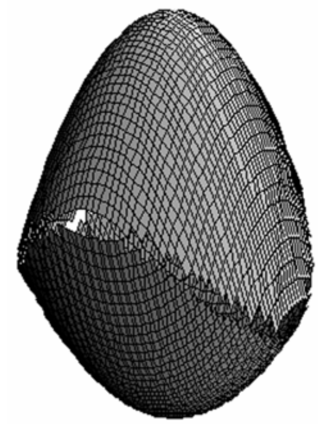


图 1-92

从图 1-92 中可以看出，这个区域是以 $z=6-x^2-y^2$ 为顶、以 $z=x^2+2y^2$ 为底的一个立体图，它在 xOy 坐标面上的投影就是这两个曲面的交线在 xOy 面上的投影曲线所围成的区域。下面来求它的投影区域。先求投影曲线，键入如下命令：

```
Eliminate[{z==6–2x^2–y^2, z==x^2+2y^2}, z]
```

运行后得 $2-\mathrm{y}^2==\mathrm{x}^2$，即

$$x^2+y^2=2$$

故有 $\iiint\limits_{\Omega} zx^2 \mathrm{d}V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \mathrm{d}x \int_{x^2+2y^2}^{6-2x^2-y^2} zx^2 \mathrm{d}z$

再键入命令：

```
Integrate[z*x^2, {y, –Sqrt[2], Sqrt[2]}, {x, –Sqrt[2–y^2], Sqrt[2–y^2]},
 {z, x^2+2y^2, 6–2x^2–y^2}]
```

运行程序后得到结果：

$$\frac{11\pi}{2}$$

【例 1-40】 化三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 是由 $x^2+y^2=1$ 及 $z=0, z=2-x^2$ 所围成的闭区域。

【解】 先画出积分区域的图形，即键入程序如下：

```
z2=If[v<=2–Cos[u]^2, v];
tt7=ParametricPlot3D[{Cos[u], Sin[u], z2}, {u, 0, 2Pi}, {v, 0, 2},
  PlotPoints–>100, DisplayFunction–>Identity]
z3=If[x^2+y^2≤1, 2–x^2];
tt8=Plot3D[z3, {x, –1, 1}, {y, –1, 1}, PlotPoints–>100,
  DisplayFunction–>Identity]
Show[tt7, tt8, DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

其运行结果如图 1-93 所示。

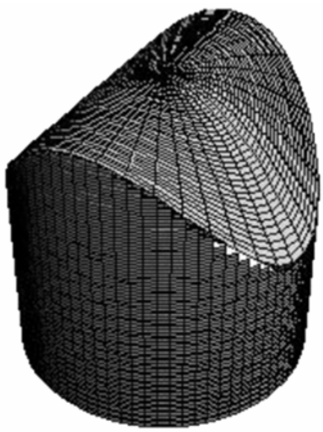


图 1-93

由图 1-93 可以看出：积分区域 Ω 在坐标面 xOy 上的投影区域是

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$$

该区域顶面为 $z=2-x^2$，底面为 xOy 平面，因此有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{2-x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

习题 1-10

1）计算以下二次积分：

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x}^{x^2+1} xy\mathrm{d}y$

(2) $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1+x}^{1-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

2）计算以下二重积分：

(1) $\iint\limits_{D}(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由抛物线 $y=2x^2$ 及 $y=1+x^2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由抛物线 $y^2=2x+6$ 及 $y=x-1$ 所围成的闭区域；

(3) $\iint\limits_{d} \sin(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0$，$y=1$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域。

3）计算重积分：

(1) $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\left(4\sqrt{1-r^2}\right)r\mathrm{d}r$

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\dfrac{1}{(1+x+y+z)^2}\mathrm{d}z$

(3) $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在 $x^2+y^2=ax$ 内部的曲面面积。

实验 1-11　无穷级数与函数逼近

一、问题的提出

无穷级数是函数逼近理论中的重要内容之一，所谓函数逼近是指对所给定的函数寻找一系列较简单的函数去无限接近它。逼近有两类，一类是局部性逼近，而另一类是全局性逼近。在传统的课堂教学中，这两种概念很难讲清楚，而在本实验中将利用计算机的图形功能作出直观演示。

二、实验目的

（1）通过计算机演示级数前 n 项和的变化趋势，理解级数和的概念；
（2）学习 Mathematica 关于函数展开成幂级数的命令和方法；
（3）研究幂级数的收敛域；
（4）观察傅里叶级数逼近函数的情况。

三、实验内容

1．级数部分和的变化趋势

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和称为级数的部分和。如果部分和 $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 当 $n \to \infty$ 时的极限存在，则称该级数收敛，并称极限值为级数的和。下面通过实例用图形来演示部分和数列当 n 变大时的趋势，以观察它的极限。

【例 1-41】　观察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的部分和数列当 n 增大时的变化趋势，并求级数的和。

【解】　先定义部分和函数，再生成从 1～100 的部分和序列，画出该数列的图形观察数列的变化趋势。键入如下语句：

```
s[n_]:=Sum[1/k^2, {k, 1, n}];
data=Table[s[n], {n, 100}]
ListPlot[data]
```

其运行后得到：

{1., 1.25, 1.36111, 1.42361, 1.46361, 1.49139, 1.5118, 1.52742,
1.53977, 1.54977, 1.55803, 1.56498, 1.57089, 1.576, 1.58044, 1.58435,
1.58781, 1.59089, 1.59366, 1.59616, 1.59843, 1.6005, 1.60239,
1.60412, 1.60572, 1.6072, 1.60857, 1.60985, 1.61104, 1.61215,
1.61319, 1.61417, 1.61509, 1.61595, 1.61677, 1.61754, 1.61827,
1.61896, 1.61962, 1.62024, 1.62084, 1.62141, 1.62195, 1.62246,
1.62296, 1.62343, 1.62388, 1.62432, 1.62473, 1.62513, 1.62552,
1.62589, 1.62624, 1.62659, 1.62692, 1.62724, 1.62754, 1.62784,
1.62813, 1.62841, 1.62867, 1.62893, 1.62919, 1.62943, 1.62967,
1.6299, 1.63012, 1.63034, 1.63055, 1.63075, 1.63095, 1.63114,
1.63133, 1.63151, 1.63169, 1.63186, 1.63203, 1.6322, 1.63236,
1.63251, 1.63266, 1.63281, 1.63296, 1.6331, 1.63324, 1.63337,
1.63351, 1.63363, 1.63376, 1.63388, 1.63401, 1.63412, 1.63424,
1.63435, 1.63446, 1.63457, 1.63468, 1.63478, 1.63488, 1.63498}

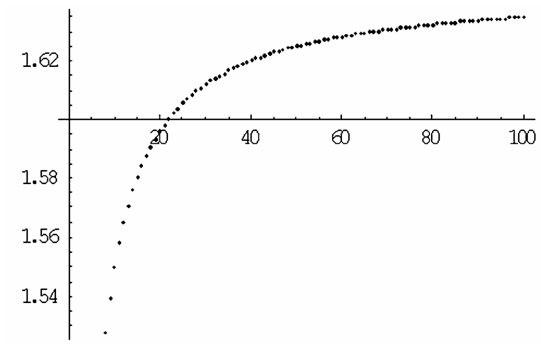


图 1-94

部分和数列的图形见图 1-94。

然后用级数求和的命令求出例 1-41 中级数的和。键入命令：

Sum[1/k^2, {k, Infinity}]

运行后得运行结果为：

$$\frac{\pi^2}{6}$$

【例 1-42】　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 的和。

【解】　直接利用求和命令：

Sum[(−1)^(n+1)/n, {n, Infinity}]

其运行后得结果：

Log[2]

2．将函数展开成泰勒公式

Mathematica 将函数展开成泰勒公式的命令如下：

Series[expr,{x,x0,n}]

它是可以展开函数直到 n 次幂的泰勒公式。

【例 1-43】　求 $f(x)=\cos x$ 的 4 次麦克劳林展开式。

【解】　键入如下命令：

```
Series[Cos[x], {x, 0, 4}]
```

其运行后得结果：

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O[x]^5$$

【例 1-44】　求 $f(x)=e^x$ 的 5 次麦克劳林展开式。

【解】　键入命令如下：

```
Series[Exp[x], {x, 0, 5}]
```

其运行后得结果：

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+O[x]^6$$

注意在系统给出的结果中，最后一项是皮亚诺形式的余项，这样给出的式子不能直接参加运算或执行其他操作，需要用一个命令转换成为一般表达式。其命令为：

```
Normal[expr]
```

【例 1-45】　求函数 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的 4 阶的幂级数，并画出它的图形。

【解】　键入如下命令：

```
Series[Exp[− (x^2/2)], {x, 0, 5}]
dat=Normal[%]
Plot[dat, {x, –3, 3}, AxesOrigin–>{0, 0}]
```

其运行后得结果：

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O[x]^6$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}$$

在使用 Normal[ ]命令后得到的表达式中已经没有了余项，这就像一个普通的表达式一样可以画出它的图形。见图 1-95。

细心的读者可能会发现，这里得到的图形与原来函数的图形有很大的差别。我们把两个图形放在一起（见图 1-96），可以看到两个图形在[−1, 1]区间内吻合得很好，而当自变量超出[−1, 1]时，图形很快分叉，也就是说，函数的泰勒级数对某个固定的 n 只能在 x=0 的较小的邻域内与函数有较好的逼近。

再多取几项，可以使得逼近的区域更大一些。令 n=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16，求各个近似多项式，把它们的图形放在一起，即键入如下的语句：

```
f[x_]=Exp[−x^2/2]
g[n_]:=D[f[x], {x, n}]/.x–>0;
s[n_, x_]:=Sum[g[k]*x^k/k!, {k, 0, n}]
```

```
t=Table[s[n, x], {n, 2, 16, 2}]
Plot[Evaluate[t], {x, –3, 3}]
```

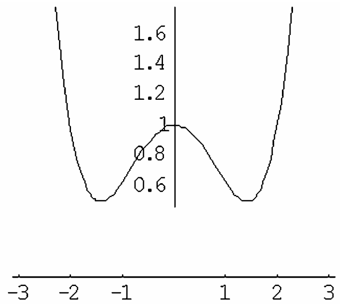


图 1-95

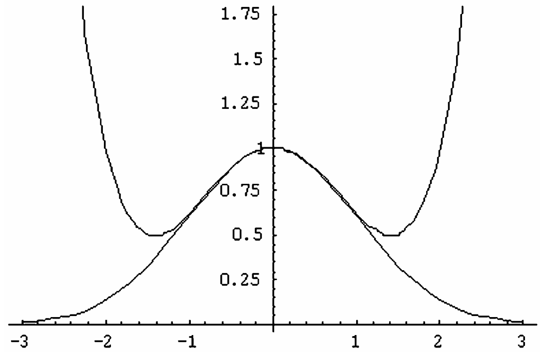


图 1-96

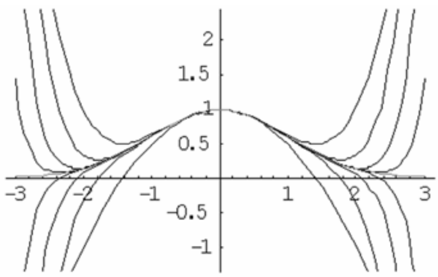


图 1-97

运行后可得到 8 个表达式，在图 1-97 中对应了 8 条曲线，可以看出当 n 增大时，泰勒展开式与函数逼近的区域也在增大。在这段程序中，可以直接按照泰勒展开定理来求出各阶的展开式，也可以用 InputForm[ ]命令来看一看 Mathematica 的 Series 命令的内部结构。

【例 1-46】　求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的泰勒展开式。

【解】　键入命令如下：

```
Series[Sin[x], {x, Pi/4, 5}]
```

运行后得到以 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的幂构造的一个幂级数：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2\sqrt{2}}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{6\sqrt{2}}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{24\sqrt{2}}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{120\sqrt{2}}+O\left[x-\frac{\pi}{4}\right]^6$$

【例 1-47】　求 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的直到 5 次的幂级数展开式。

【解】　键入如下命令：

```
Series[Log[x+Sqrt[1+x^2]], {x, 0, 10}]
Normal[%]
```

其运行后得到结果：

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\frac{35x^9}{1152}$$

3．幂级数的收敛域

【例 1-48】　$f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 的收敛域为（−1, 1），画出函数和它的 7 阶幂级数的图形。

【解】　键入如下语句：

```
tt1=Plot[1/(1–x), {x, –2, 2}, DisplayFunction–>Identity]
Series[1/(1–x), {x, 0, 7}];
d1=Normal[%];
tt2=Plot[d1, {x, –2, 2}, DisplayFunction–>Identity]
Show[tt1, tt2, PlotRange–>{–10, 10}, DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

从图 1-98 中可以看到，即使是 7 阶的展开式，在[–1, 1]以外的区域里，函数与 7 阶幂级数展开式的图仍然相差悬殊。因此当我们将函数展开成幂级数以后，一定不要忘了确定它的收敛域。

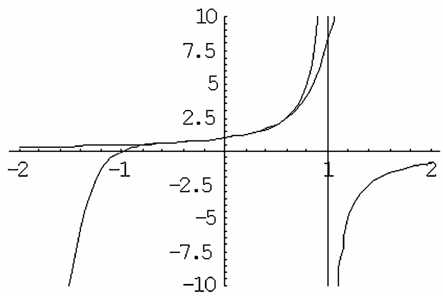


图 1-98

4．傅里叶级数逼近函数的演示

连续的周期函数可以生成一个傅里叶级数，而按傅里叶系数公式生成的傅里叶级数的部分和将很好地逼近函数。可以通过一些例题来演示这些结论。

【例 1-49】　设周期为 2π 的函数在 (–π, π) 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\leqslant x<0\\ 1 & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

试将其展开成傅里叶级数。

【解】　先定义函数，并作出函数的图形，键入如下语句：

```
f[x_]:=Which[x<–2Pi, –1, –2Pi≤x<–Pi, 1, –Pi≤x<0, –1,
   0<=x<Pi, 1, Pi≤x<2Pi, –1, x≥2Pi, 1];
t1=Plot[f[x], {x, –3Pi, 3Pi}]
```

运行后得到图 1-99。

由傅里叶公式可知

$$a_n=0$$

$$b_n=(1-(-1)^n)\frac{2}{n\pi}$$

再求函数的傅里叶级数，取

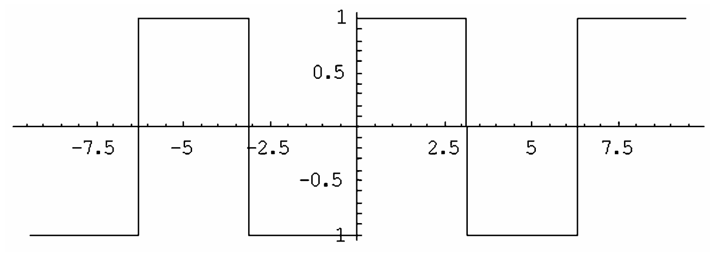


图 1-99

$n=1,\ 5,\ 10,\Lambda$，30 的表达式，并画出它们的图形。其程序如下：

```
For[i=1, i ≤30, i+=5,
 bn=(1– (–1)^n)∗2/n/Pi;
 f[x_]:=Sum[bn∗Sin[n∗x], {n, 1, i}];
 t2=Plot[f[x], {x, –3Pi, 3Pi}, PlotStyle–>{RGBColor[1, 0.3, 0.5]}
   AspectRatio–>1/3];
 Show[t1, t2]
]
```

运行后得到图 1-100。

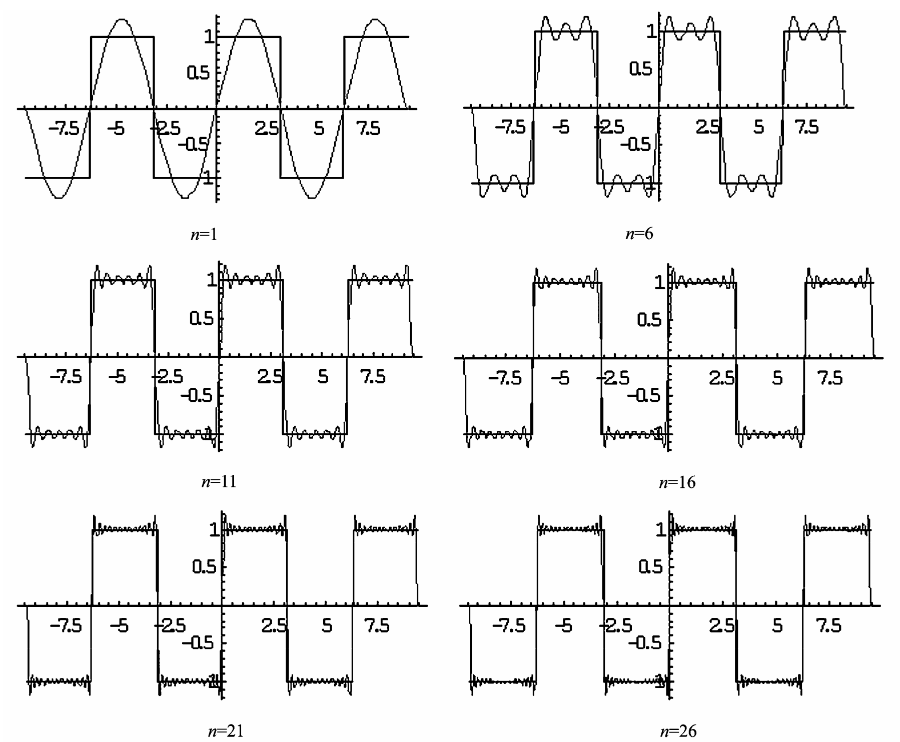


图 1-100

若在细胞组上全部选定，按 Ctrl-Y 组合键，就能够观看到傅里叶级数逼近函数的过程。

习题 1-11

1）将下列函数展开成幂级数：

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=-4$ 处展开；

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 。

2）计算积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 的近似值。

3）计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$ 的和。

4） $z^2y''+2y'+(z^2-n^2)y=0$ 的解——Bessel 函数在天体物理中有重要的应用。零阶 Bessel 函数可定义为下列幂级数的和函数，即

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

利用 Mathematica 作出幂级数前 5 项的部分和的图形，并与内存函数 BesselJ$[0,z]$进行比较。

其参考程序如下：

$$\text{j0[x\_]:=}\sum_{\text{n=0}}^{\infty}\frac{\text{(-1)\^{}n * x\^{}(2n)}}{\text{2\^{}(2n)(n!)\^{}2}}$$

```
t1=Plot[BesselJ[0, x], {x, 0, 10}, AxesOrigin–>{0, 0}]
t2=Plot[j0[x], {x, 0, 10}, AxesOrigin–>{0, 0},
   PlotStyle–>RGBColor[1, 0, 0]]
Show[t1, t2]
```

实验 1-12　最小二乘法

一、问题的提出

在科学研究和实际工作中，常常要对表现函数关系的一组数据进行处理，并找出能反映函数的解析表达式，这通常称为经验公式。建立经验公式以后，就可以对实验数据以外的情况进行预测。给定两个变量 x, y 的一组数据 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，通过数学建模可以提出 x, y 之间大致满足某种类型的函数关系 $y=f(x,a)$，其中 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 是待定的参数，决定参数的原则通常是使拟合函数在 x_i 处的值与实验值的偏差平方和最小，即

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i,a)]^2$$

取得最小值。这种在方差意义下对数据实现拟合的方法称为“最小二乘法”。

二、实验目的

（1）利用散点图对函数的类型作出判断；
（2）介绍在计算机上求最小二乘解的方法；
（3）了解可化为线性拟合的几种曲线类型。

三、实验内容

1．给定一组数据作为散点图

【例 1-50】　在某化工生产过程中，为研究温度 x(℃) 对收率（产量）y(%) 的影响，可测得一组数据如表 1-2 所示，画出散点图。

表 1-2

温度 x(℃)	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
收率 y(%)	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

【解】　为了确定函数的类型，先以 x 为横坐标，y 为纵坐标，画出数据的散点图。键入如下语句：

```
x=Table[100+10*i, {i, 0, 9}]
y={45, 51, 54, 61, 66, 70, 74, 78, 85, 89};
xy=Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, 1, 10}]
{{100, 45}, {110, 51}, {120, 54}, {130, 61}, {140, 66},
 {150, 70}, {160, 74}, {170, 78}, {180, 85}, {190, 89}}
ListPlot[xy]
```

运行后得到图 1-101。

从图 1-101 中可以看出这些点近似地落在一条直线周围，可以认为在 y 与 x 之间存在着线性关系，之所以不完全落在直线上，是因为观察数据本身存在的误差。

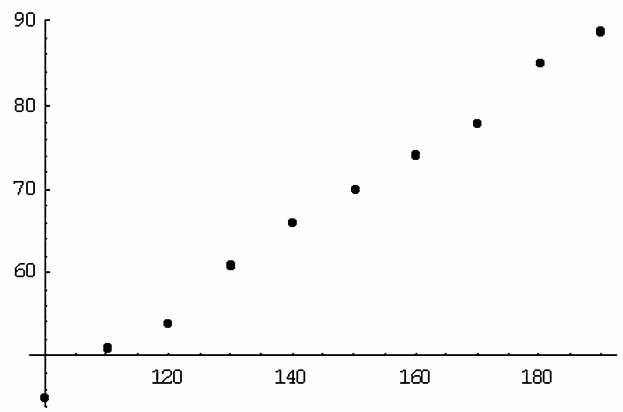


图 1-101

2．在计算机上求最小二乘解

设 $y=f(x)=ax+b$，其中 a,b 是待定的系数。将方差表示成

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[(ax_i+b)-y_i]^2 \tag{1-6}$$

式中，$Q(a,b)$ 看做 a,b 的二元二次多项式。按照二元函数求极值的理论，其最小值应满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{n}((ax_i+b)-y_i)x_i=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}((ax_i+b)-y_i)=0\end{cases} \tag{1-7}$$

在 NoteBook 中键入下面的语句：

```
x=Table[100+10*i, {i, 0, 9}];
y={45, 51, 54, 61, 66, 70, 74, 78, 85, 89};
```

```
q[a_, b_]:=Sum[(a+b*x[[k]] –y[[k]])^2, {k, 1, 10}]
Solve[{D[q[a, b], a]==0, D[q[a, b], b]==0}, {a, b}]
```

这里 Solve[ ]是对式（1-7）求解，运行后得到结果：

```
{{a–>–2.73939, b–>0.48303}}
```

即

$$y = f(x) = 0.48303x - 2.73939 \tag{1-8}$$

式（1-8）就是得到的经验公式。

为了观察经验公式的误差，键入

```
q[0.48303, –2.73939]
```

运行后得结果 7.22424，人们通常用这个数或它的平方根 2.6878 来衡量拟合的好坏。

综合以上所述，首先画出数据组的散点图，根据散点图的特点，确定拟合函数为一条直线，然后将方差定义为一个二元函数$Q(a,b)$，再用求方程组解的命令去解式（1-7），得到最小二乘解a,b，从而解得拟合函数式（1-8），即经验公式。

如果在某个实际问题中数据点落在某一条曲线周围，则要根据曲线的形状来确定拟合函数的类型。比如考虑用 x 的 n 次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \Lambda + a_nx^n$$

这称之为多项式拟合。仍然用最小二乘法，考虑 n+1 元函数

$$Q(a_0, a_1, \Lambda, a_n) = \sum_{i=1}^{n}[P_n(x_i) - y_i]^2$$

取最小的必要条件，令 n+1 元函数对各个参数的偏导数等于 0，解一个 n+1 元的方程组，可求得这些参数的最小二乘解。

3．可以化为线性拟合的曲线拟合问题

在许多场合下，拟合函数不具有线性形式，但是由实际经验或相关的学科理论，能够提供拟合函数的可取类型，而且可以通过适当的变量代换将拟合函数线性化，同样可以建立经验公式。

（1）模型

$$y = a\mathrm{e}^{bx}$$

可以用$Y = \ln y,\ X = x$的变量代换将函数化为

$$Y = \ln a + bX$$

（2）模型

$$y = a + b\ln x$$

可以用$Y = y,\ X = \ln x$的变量代换将函数化为线性情况。

（3）模型

$$\psi(y) = a + bx$$

可以令 $z = \psi(y)$ 将其化为 z 和 x 之间的线性拟合。

【例 1-51】　研究粘虫的生长过程，可测得一组数据如表 1-3 所示。

表 1-3

温度 t	11.8	14.7	15.4	16.5	17.1	18.1	19.8	20.3
历期 N	30.4	15.0	13.8	12.7	10.7	7.5	6.8	5.7

其中历期 N 为卵块孵化成幼虫的天数。昆虫学家认为在 N 与 t 之间有以下关系

$$N = \frac{k}{t - c}$$

试求最小二乘解。

【解】　令

$$y = \frac{1}{N},\ x = t,\ a = -\frac{c}{k},\ b = \frac{1}{k}$$

由此得

$$y = \frac{t - c}{k} = -\frac{c}{k} + \frac{1}{k}t = a + bx$$

在 Mathematica 的 Notebook 中键入如下语句：

```
t={11.8, 14.7, 15.4, 16.5, 17.1, 18.1, 19.8, 20.3};
w={30.4, 15.0, 13.8, 12.7, 10.7, 7.5, 6.8, 5.7};
y=1/w
x=t
xy=Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, 1, 8}]
q[a_, b_]:=Sum[(a*x[[k]]+b–y[[k]])^2, {k, 1, 8}]
Solve[{D[q[a, b], a]==0, D[q[a, b], b]==0}, {a, b}]
```

运行后得到结果：

```
  {{a–>0.016481, b–>–0.175433}}
A={a, b}/.%
k=1/A[[1, 2]]
c=–k*A[[1, 1]]
60.6758
10.6445
```

拟合曲线方程为

$$N = \frac{60.6758}{t - 10.6445}$$

再画出其散点图及拟合函数的图形，键入如下语句：

```
data=Table[{t[[i]],w[[i]]},{i,8}];
t1=ListPlot[data,PlotStyle  {PointSize[0.02]}]
f[x_]:=k/(x-c);
t2=Plot[f[x],{x,11,25},AxesOrigin  {11,0}]
Show[t1,t2]
```

由程序运行结果可得图 1-102。

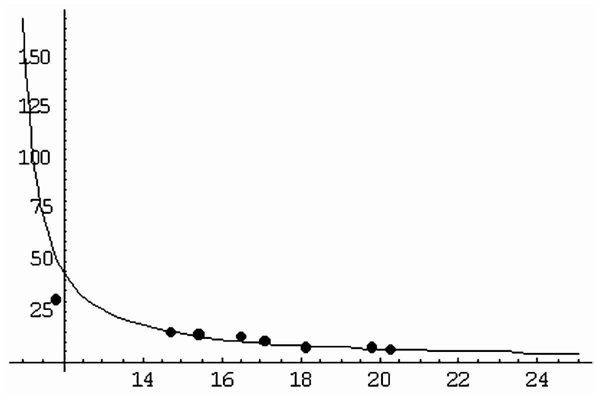


图 1-102

习题 1-12

1）为测定刀具的磨损速度，每隔一小时测量一次刀具的厚度，由此得到以下数据：

时间 t	0	1	2	3	4	5	6	7
厚度 y	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8

试根据这组数据建立 y 与 t 之间的拟合函数。

2）一种合金在某种添加剂的不同浓度下进行实验，得到如下数据：

浓度 x	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
抗压强度 y	25.2	29.8	31.2	31.7	29.4

已知函数 y 与 x 的关系适合如下模型，即

$$y = a + bx + cx^2$$

试用最小二乘法确定系数 a,b,c，并求出拟合曲线。

3）在研究化学反应速度时，得到下列数据：

x_i	3	6	9	12	15	18	21	24
y_i	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	8.9	6.5

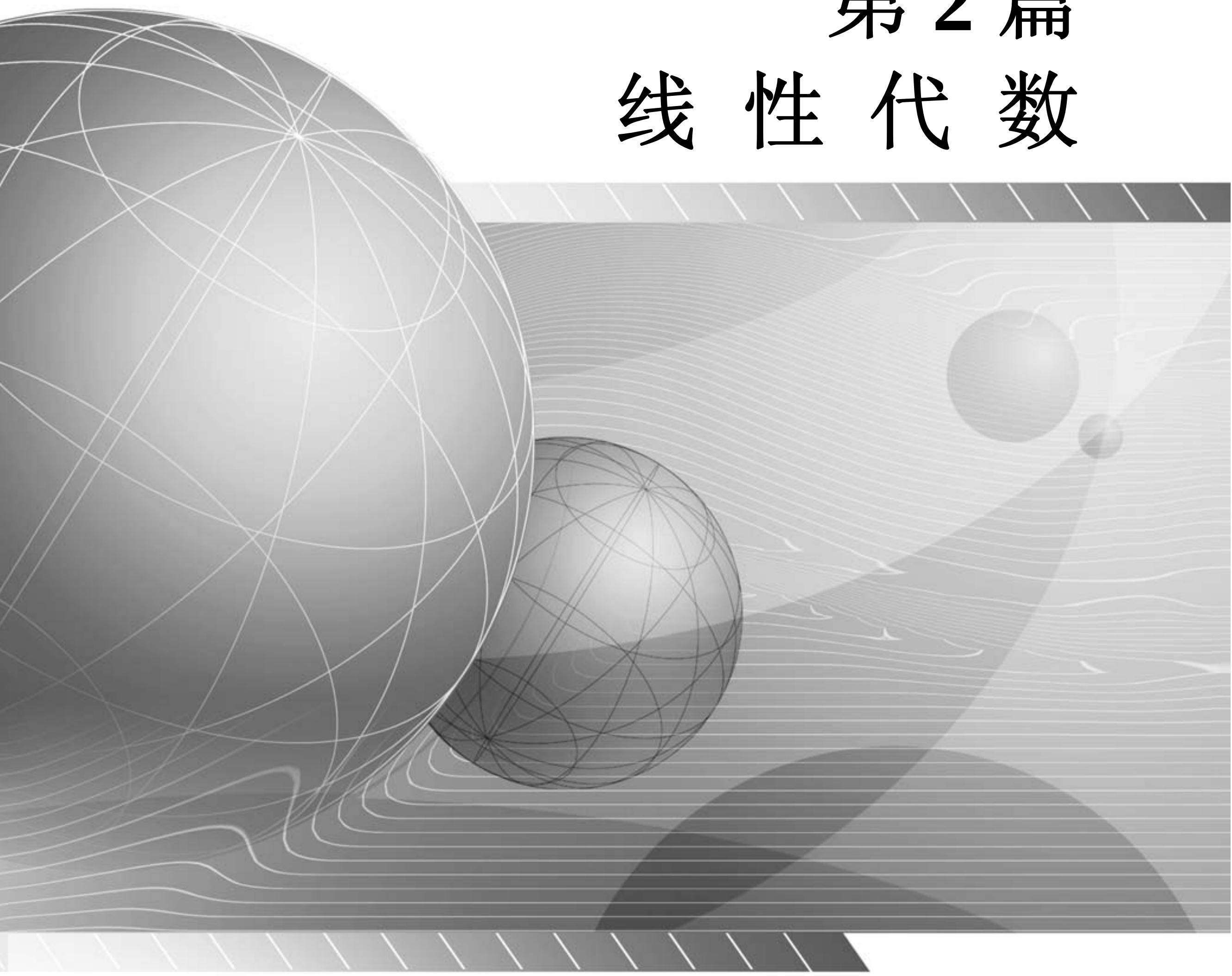
其中 x_i 表示实验中做记录的时间， y_i 表示在相应时间内反应混合中物质的量，试根据这组数据建立经验公式。

4）据统计，中国 1973 年～1982 年自行车产销量的数据如下：

年度（年）	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
产量（辆）	486.8	519.6	623.2	668.1	742.7	854.0	1009.5	1302.4	1754.3	2420.0
销量（辆）	443.2	453.1	561.4	620.0	682.0	809.6	954.5	1186.0	1582.0	2214.0

试建立销量对产量之间的关系方程，并预测当 1983 年产量为 2758.2 时其销量的值。

第 2 篇
线 性 代 数



实验 2-1　矩阵的初等变换

一、问题的提出

矩阵是线性代数的最重要的工具，线性代数的基本问题，包括求解线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型的标准化等都要用矩阵来进行运算。一个 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是指如下的 m 行 n 列的数表，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & A_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换是线性代数计算理论中最基本的方法，在矩阵求秩、矩阵求逆、向量的线性相关性、求最大线性无关组等都离不开它。但是初等变换又仅仅是对数的加法和乘法，只是要同时对矩阵的一行或一列的所有元素进行运算，学生往往容易出现计算的低级错误，事实上这种小代数运算如果交给计算机去做，既快捷又准确。

在 Mathematica 软件中，可将矩阵看做一个二维数组，在运算中，矩阵的每一行可看做是一个向量，向量是一维数组。对于向量和矩阵，Mathematica 中定义了各种运算和操作的命令，因而给在计算机上求解线性代数问题提供了方便。

二、实验目的

（1）介绍矩阵的输入；

（2）学习矩阵的基本运算；

（3）学习矩阵的初等变换。

三、实验内容

1．矩阵的输入

可以从键盘上直接输入矩阵，格式是

$$\mathrm{A} = \{\{\mathrm{a}_{11}, \mathrm{a}_{12}, \Lambda\ , \mathrm{a}_{1n}\}, \{\mathrm{a}_{21}, \mathrm{a}_{22}, \Lambda\ , \mathrm{a}_{2n}\}, \Lambda\ , \{\mathrm{a}_{m1}, \mathrm{a}_{m2}, \Lambda\ , \mathrm{a}_{mn}\}\}$$

其中，矩阵用花括号括起来，每一行再用花括号括起来，行与行之间用逗号分隔。

【例 2-1】 输入矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

【解】 键入如下语句并运行：

```
A={{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}
MatrixForm[A]
```

{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

注意：提取矩阵元素 a_{ij} 用 A[[i, j]]，提取矩阵的一行用 A[[i]]。这样可以方便地进行调用与修改，如：

```
A[[1]]
A[[3,3]]
```

{1,2,3}

9

```
A[[3,3]]=0            （*重新设置 a33 = 0 *）
MatrixForm[A]         （*再显示矩阵 A*）
```

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}$$

在矩阵论中有一些特殊矩阵，如单位阵、对角阵等，利用以下命令可以使输入更快捷，即：

```
A=Array[a, {3, 3}];              (*构造以 a[i, j]为元素的 3×3 矩阵*)
```

$$\begin{pmatrix}a[1,1]&a[1,2]&a[1,3]\\a[2,1]&a[2,2]&a[2,3]\\a[3,1]&a[3,2]&a[3,3]\end{pmatrix}$$

```
E3=IdentityMatrix[3];            (*构造 3 阶单位矩阵*)
```

{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

```
DiagonalMatrix[{1, 2, 3}]        (*构造以{1, 2, 3}为对角元素的对角矩阵*)
```

{{1, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 3}}

```
Table[1/(i+j−1), {i, 4}, {j, 4}];
MatrixForm[%]                    (*构造 4 阶赫尔伯特矩阵*)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

2．矩阵的基本运算

可得矩阵 ***A*** 的行可看做是一个向量，用 A[[i]]获取第 *i* 行，用 Map[#[[I]]&,A]获取第 *i* 列。Mathematica 的大部分函数可以作用于向量和矩阵。加法用“+”表示，乘法用“.”表示，这里要注意的是：“.”不满足交换律。

【例 2-2】　求两个矩阵的和。

【解】　键入如下语句并运行：

```
A=Array[a, {3, 3}];
B=Array[b, {3, 3}];
A+B;
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} a[1,1]+b[1,1] & a[1,2]+b[1,2] & a[1,3]+b[1,3] \\ a[2,1]+b[2,1] & a[2,2]+b[2,2] & a[2,3]+b[2,3] \\ a[3,1]+b[3,1] & a[3,2]+b[3,2] & a[3,3]+b[3,3] \end{pmatrix}$$

【例 2-3】　数乘矩阵。

【解】　键入如下语句并运行：

```
k*A;
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} ka[1,1] & ka[1,2] & ka[1,3] \\ ka[2,1] & ka[2,2] & ka[2,3] \\ ka[3,1] & ka[3,2] & ka[3,3] \end{pmatrix}$$

【例 2-4】　矩阵相乘。

【解】　键入如下语句并运行：

```
A={{a1, a2, a3}};
B={{b1}, {b2}, {b3}};
Print["A"=, MatrixForm[A]]
Print["B"=, MatrixForm[B]]
Print["A.B"=, MatrixForm[A.B]]
```

```
Print["B.A"=, MatrixForm[B.A]]
```

A=(a1 a2 a3)

$$B=\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

A.B=(a1b1+a2b2+a3b3)

$$B.A=\begin{pmatrix} a1b1 & a2b1 & a3b1 \\ a1b2 & a2b2 & a3b2 \\ a1b3 & a2b3 & a3b3 \end{pmatrix}$$

3．矩阵的初等变换

矩阵的初等变换在线性代数的计算中有十分重要的应用。矩阵的初等变换分为行变换和列变换，这里主要讨论行变换，列变换可以通过矩阵转置来解决。矩阵的行变换有三种：

（1）交换矩阵的两行向量的位置；

（2）用一个非零数乘矩阵的某一行；

（3）把矩阵的某一行乘以一个实数并加到矩阵的另一行上去。

【例 2-5】　用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 化为行标准型。

【解】　键入如下语句并运行：

```
A={{–1, 0, 1, 2}, {3, 1, 0, –1}, {0, 2, 1, 4}};
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A[[2]]=A[[2]]+3*A[[1]];
A[[3]]=A[[3]] –2*A[[2]];
A[[3]]=A[[3]]/( –5);
A[[2]]=A[[2]] –3*A[[3]];
A[[1]]=A[[1]] –A[[3]];
A[[1]]=( –1)*A[[1]];
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

在线性代数理论中，我们已经知道初等变换与初等矩阵的关系，对一个矩阵施行行变换相当于让矩阵左乘一个相应的初等矩阵。为了应用的方便，下面可以编写一个程序包来定义这些运算。程序包的名字是 Mtelch.m，其程序为：

```
BeginPackage["Mtelch`"]
Rijk::usage = "Rijk[A,i,j,k]对 A 作消法变换"
Rij::usage = "Rij[A,i,j]交换 A 的 i,j 行"
Rik::usage = "Rik[A,i,k]将 A 的第 i 行乘以 k"
Cijk::usage = "Cijk[A,i,j]"
Cij::usage = "Cij[A,i,j]"
Cik::usage = "Cik[A,i,k]"

Begin["`Provate`"]
Rijk[A_List, i_Integer?Positive, j_Integer?Positive,
    k_] := (d = Dimensions[A]; m = d[[1]];
    If[i > m, Print["error:i>", m]; Return[]];
    If[j > m, Print["error:j>", m]; Return[]];
    If[i == j, Print["error:i=j"]; Return[]];
    B = IdentityMatrix[m];
    B[[j, i]] = k;
    Simplify[B.A])
Rij[A_List, i_Integer?Positive, j_Integer?Positive] := (d = Dimensions[A];
    m = d[[1]];
    If[i > m, Print["error:i>", m]; Return[]];
    If[j > m, Print["error:j>", m]; Return[]];
    If[i == j, Print["error:i=j"]; Return[]];
B = IdentityMatrix[m];
B[[i, i]] = 0; B[[j, j]] = 0; B[[i, j]] = 1; B[[j, i]] = 1;
    B.A)
Rik[A_List, i_Integer?Positive, k_] := (d = Dimensions[A]; m = d[[1]];
```

```
        If[i > m, Print["error:i>", m]; Return[]];
        B = IdentityMatrix[m];
        B[[i, i]] = k;
        Simplify[B.A])
    Cijk[A_List, i_Integer?Positive, j_Integer?Positive,
        k_] := (d = Dimensions[A]; m = d[[2]];
        If[i > m, Print["error:i>", m]; Return[]];
        If[j > m, Print["error:j>", m]; Return[]];
        If[i == j, Print["error:i=j"]; Return[]];
        B = IdentityMatrix[m];
        B[[i, j]] = k;
        Simplify[A.B])
    Cij[A_List, i_Integer?Positive, j_Integer?Positive] := (d = Dimensions[A];
        m = d[[2]];
        If[i > m, Print["error:i>", m]; Return[]];
        If[j > m, Print["error:j>", m]; Return[]];
        If[i == j, Print["error:i=j"]; Return[]];
        B = IdentityMatrix[m];
        B[[i, i]] = 0; B[[j, j]] = 0; B[[i, j]] = 1; B[[j, i]] = 1;
        A.B)
    Cik[A_List, i_Integer?Positive, k_] := (d = Dimensions[a]; m = d[[2]];
        If[i > m, Print["error:i.", m]; Return[]];
        B = IdentityMatrix[m];
        B[[i, i]] = k;
        Simplify[A.B])
    End[ ]

    Protect[Rijk, Rij, Rik, Cijk, Cij, Cik]
    EndPackage[ ]
```

【例 2-6】　用自编的程序包解例 2-1 的问题。

【解】　键入如下语句并运行：

```
<<Mtelch.m
A={{–1, 0, 1, 2}, {3, 1, 0, –1}, {0, 2, 1, 4}};
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A1=Rijk[A, 1, 2, 3];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A2=Rijk[A1, 2, 3, –2];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

```
A3=Rik[A2, 3, –1/5];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

```
A4=Rijk[A3, 3, 2, –3];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

```
A5=Rijk[A4, 3, 1, –1];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

```
A6=Rik[A5, 1, –1];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

至此已经将矩阵化为行阶梯型矩阵。

在 Mathematica 中有一个自带的化矩阵为行阶梯型的命令 RowReduce[ ]。

【例 2-7】　续例 2-6。

【解】　键入如下语句并运行：

```
A={{–1, 0, 1, 2}, {3, 1, 0, –1}, {0, 2, 1, 4}};
A1=RowReduce[A];
MatrixForm[A1]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

习题 2-1

1）将矩阵化为行标准型

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

分别用三种方法：①直接用行变换；②利用 Mtelch.m 程序包；③用 RowReduce 命令。

2）写出下列方程组的增广矩阵，并将其化为行标准型。

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$$

3）在计算机上验证上三角矩阵的乘积仍然是上三角矩阵。

4）验证主对角元全为零的上三角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的平方 $\boldsymbol{A}^2$ 也是主对角元全为零的上三角矩阵。

5）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$。

6）验证对于任何 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵。

实验 2-2　向量组的线性相关性分析

一、问题的提出

向量组的线性相关性是线性代数理论中的一个基本又重要的概念。首先列举有关的主要知识。

1．向量组的线性相关性的定义

【定义 2-1】　设$\boldsymbol{\alpha}_i \in F^n,\ k_i \in F$(数域)　$(i=1,2,\Lambda ,m)$，则向量

$$\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \Lambda + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_m$在数域 F 上的一个线性组合。或称$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示。

【定义 2-2】　如果对 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$，有 m 个不全为零的数 $k_1,\ k_2,\ \Lambda ,k_m \in F$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \Lambda + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

成立，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关；否则，称$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关。

【定义 2-3】　如果在向量组$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_m$中存在$r$个向量$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\ \boldsymbol{\alpha}_{i2},\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$，满足

（1）$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\ \boldsymbol{\alpha}_{i2},\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性无关；

（2）$\boldsymbol{T}$中任何一个向量都可以用$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\ \boldsymbol{\alpha}_{i2},\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性表示。

则称$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\ \boldsymbol{\alpha}_{i2},\Lambda ,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$为 $\boldsymbol{T}$ 的一个最大无关组。最大无关组所含向量的个数r称为向量组$\boldsymbol{T}$的秩。

2．向量组线性相关或无关的背景

在三维实向量空间，若两个非零向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1 ,a_2 ,a_3)\ ,\ \boldsymbol{\beta}=(b_1 ,b_2 ,b_3)$$

共线，则有$\boldsymbol{\beta}=l\boldsymbol{\alpha}\ \ (l\in R)$，这等价于：存在不全为零的两个数$k_1,\ k_2$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=0$；若$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$不共线，则$\forall l\in R$，有$\boldsymbol{\beta}\neq l\boldsymbol{\alpha}$，它等价于：只有当$k_1,\ k_2$全为零时，才有$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=0$。

若三个非零向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$共面，则其中至少有一个向量可以用其他两个向量线性表示，它等价于：存在三个不全为零的数$k_1,\ k_2,k_3$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$；若向量

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$不共面，则任何一个向量都不能用其他两个向量线性表示，即只有当k_1, k_2, k_3全为零时，才有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$。

二、实验目的

（1）学会利用 Mathematica 判断向量组线性相关或线性无关的方法；
（2）求向量组或矩阵的秩；
（3）求向量组的最大线性无关组；
（4）将一个向量表示成最大无关组的线性组合。

三、实验内容

1．判断向量组线性相关或线性无关

利用 Mathematica 判断向量组线性相关或线性无关的方法如下：

首先将向量组 $\boldsymbol{T}$ 的每个向量以列的方式排成矩阵，即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \Lambda \quad \boldsymbol{\alpha}_m)$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_i = \left(a_{1i} \quad a_{2i} \quad \Lambda \quad a_{ni}\right)^{\mathrm{T}}$（$i$=1, 2, ⋯, m）是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量。

（1）将 $\boldsymbol{A}$ 化为最简行阶梯形矩阵；

（2）如果最简行阶梯形矩阵中非零行向量的数目$r = m$，则 $\boldsymbol{T}$ 中 m 个向量线性无关；如果存在全为零的行，则向量组线性相关。

2．求矩阵的秩

$\boldsymbol{A}$ 的最简行阶梯形矩阵中非零行向量的数目r即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也就是向量组 $\boldsymbol{T}$ 的秩。

3．求最大线性无关组

在最简行阶梯形矩阵中可以看出 r 个线性无关的列向量$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \Lambda, \boldsymbol{\beta}_r$；根据$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \Lambda, \boldsymbol{\beta}_r$所在位置可确定矩阵$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \Lambda \quad \boldsymbol{\alpha}_m)$中对应的列向量，即得到 $\boldsymbol{T}$ 的最大线性无关向量组。

4．将一个向量表示成最大线性无关组的线性组合

将一个向量表示成最大线性无关组的线性组合，相当于解向量方程组

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{\alpha}_i \qquad i = 1, 2, \Lambda, r$$

【例 2-8】　给定向量组 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1\ \ -1\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1\ \ 2\ \ 1\ \ -1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0\ \ 1\ \ 1\ \ -1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1\ \ 3\ \ 2\ \ 1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_5=(2\ \ 6\ \ 4\ \ -1)^{\mathrm{T}}$$

试问向量组是否线性相关，求向量组的秩。

【解】　键入如下语句并运行：

```
A={{−1, 1, 0, 1, 2}, {−1, 2, 1, 3, 6}, {0, 1, 1, 2, 4}, {0, −1, −1, 1, −1}};
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
A1=RowReduce[A];
Print["U=", MatrixForm[%]]
```

$$\mathrm{U}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以看出在矩阵 $\boldsymbol{U}$ 中有一个全为零的行，因此向量组线性相关；$\boldsymbol{U}$ 中的非零行数为 3，因此矩阵的秩等于 3。

【例 2-9】　求例 2-8 中向量组的一个最大线性无关组，并将其他向量用最大线性无关组线性表示。

【解】　由于 1, 2, 4 列是 $\boldsymbol{U}$ 的最大线性无关组，因此$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是原向量组 $\boldsymbol{T}$ 的最大线性无关组。

由方程组

$$\begin{cases} x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_3 \\ y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_5 \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4 \end{cases}$$

事实上从矩阵 $\boldsymbol{U}$ 中列向量的线性关系也可以得到对应的原向量的线性关系，如

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$$

$$\boldsymbol{\beta}_5=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4$$

由此也可得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4 \end{cases}$$

习题 2-2

1）求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1\quad 2\quad -1\quad 0\}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2\quad 4\quad -2\quad 0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1\quad 3\quad 1\quad 2)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1\quad 1\quad 3\quad 5)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_5=(1\quad 1\quad -3\quad -2)^{\mathrm{T}}$$

的秩和一个最大线性无关组，并将其他向量表示成为最大线性无关组的线性组合。

2）设向量组

$$\xi_1=(1\quad -1\quad 2\quad 4\}^{\mathrm{T}},\ \xi_2=(0\quad 3\quad 1\quad 2)^{\mathrm{T}},\ \xi_3=(3\quad 0\quad 7\quad 14)^{\mathrm{T}},$$
$$\xi_4=(1\quad -1\quad 2\quad 0)^{\mathrm{T}},\ \xi_5=(2\quad 1\quad 5\quad 6)^{\mathrm{T}}$$

（1）证明ξ_1，ξ_2线性无关；

（2）求一个包含ξ_1，ξ_2的最大线性无关组。

3）求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

实验 2-3　方阵的行列式及矩阵求逆

一、问题的提出

行列式是线性代数中的重要工具，首先需复习它的递归定义

二阶行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的值定义为$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

n 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

在 Mathematica 中有一个内部命令 Det[A]，它可以很方便地计算出行列式的值。在手工运算的情况下，常将行列式化为上三角行列式，利用三角行列式的值等于对角线上元素的乘积的性质来计算。但是仅仅会计算行列式的值还不够，在本次实验中，还要介绍按行列式的递归定义设计的算法程序，以使读者加深对行列式的理解。

二、实验目的

（1）学习计算行列式的几种方法；

（2）学习用行列式的方法判定矩阵是否可逆；

（3）学习求方阵的逆。

三、实验内容

1．用递归定义计算行列式的 Mathematica 程序

运用递归定义编写程序并运行如下：

```
mydet[A_, 2]=A[[1, 1]]*A[[2, 2]] –A[[2, 1]]*A[[1, 2]];
mydet[A_, n_]:=
```

$$\sum_{i=1}^{n} \text{A[[1, i]]*mydet[Delete[Transpose[Delete[Transpose[A], i]], 1], n–1]*(–1)^(1+i)}$$

【例 2-10】　计算 4 阶赫尔伯特矩阵的行列式。

【解】　先运行上面的行列式定义，然后键入以下语句：

```
B=Table[1/(i+j–1), {i, 4}, {j, 4}];
 mydet[B, 4]
```

运行得到结果：

$$\frac{1}{6048000}$$

2．将行列式化为上三角行列式计算

利用行的初等变换命令将所求方阵化为对角形，如果方阵是非奇异性的，这时所化得的对角形上对角线的元素全不为零，且行列式的值等于对角线上元素的乘积；如果方阵是奇异性的，则对角线上必定出现零元素，因而行列式的值为零。

【例 2-11】　计算行列式的值

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

【解】　键入如下语句并运行。

```
A={{1, 1, –1, 2}, {–1, –1, –4, 1}, {2, 4, –6, 1}, {1, 2, 4, 2}};
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

```
<<Mtelch.m(*调入前节所介绍的、自编的关于初等变换的软件包*)

A=Rijk[A, 1, 2, 1];
```

```
A=Rijk[A, 1, 3, –2];
A=Rijk[A, 1, 4, –1];
A=Rij[A, 2, 4];
A=Rijk[A, 2, 3, –2];
A=Rijk[A, 3, 4, –5/14];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{57}{14} \end{pmatrix}$$

$$\text{mydetA}=-\prod_{i=1}^{4}\text{A[[i, i]]}$$

计算结果为：

57

3．计算行列式的内部命令 Det[ ]

【例 2-12】　直接使用命令 Det[ ]求例 2-11 中行列式的值。

【解】　键入如下语句：

```
A={{1, 1, –1, 2}, {–1, –1, –4, 1}, {2, 4, –6, 1}, {1, 2, 4, 2}};
MatrixForm[%]
Det[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

重新得到结果：

57

4．求非奇异矩阵的逆

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆，并表示成为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。$\boldsymbol{A}$ 存在逆矩阵，称 $\boldsymbol{A}$ 可逆。$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异，即 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于零。

求矩阵的逆有多种方法，最常用的手工求逆方法是用初等变换方法。将方阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位阵合并成一个 n 行、$2n$ 列的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E})$，对 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 进行仅限于行的初等变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵，此时，右边的单位矩阵，化为了 $\boldsymbol{A}$ 的逆。

在计算机上也可以用相同的方法求非奇异矩阵的逆，如在 Mathematica 中有一个命令 RowReduce[ ]，它的作用是求所给矩阵的行最简形式，可以巧妙地利用这个命令来求逆。

【例 2-13】 求方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}$$

的逆。

【解】 键入如下语句：

```
B={{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 0}};
E3=IdentityMatrix[3];
M1=Array[m, {3, 3}];
For[i=1, i≤3, i++,
 M1[[i]]=Join[B[[i]], E3[[i]]]]
Print["M1=", MatrixForm[M1]]
```

运行后得到结果：

$$\mathrm{M1}=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

再键入以下语句并运行：

```
M2=RowReduce[M1];
MatrixForm[%]
M3=M2[[{1, 2, 3}, {4, 5, 6}]]
Print["Inverse[B]=", MatrixForm[M3]]
```

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\0&1&0&\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\0&0&1&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Inverse[B]}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

5．Mathematica 求逆的内部命令

Mathematica 中已经定义了内部的求矩阵逆的函数 Inverse[ ]。在实际计算时可以直接应用它。

【例 2-14】　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

的逆。

【解】　键入如下命令并运行：

```
B={{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 0}};
Print[" B^-1 =", Inverse[B]//MatrixForm]
```

$$\mathrm{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{16}{9} & \dfrac{8}{9} & -\dfrac{1}{9}\\ \dfrac{14}{9} & -\dfrac{7}{9} & \dfrac{2}{9}\\ -\dfrac{1}{9} & \dfrac{2}{9} & -\dfrac{1}{9}\end{pmatrix}$$

习题 2-3

1）求下列矩阵的逆。

(1) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2）解下列矩阵方程。

(1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

3）求下列线性变换的逆变换。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

实验 2-4　线性方程组的解法

一、问题的提出

线性方程组可以用矩阵表示为 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{M}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{b}=(b_1\quad b_2\quad \cdots\quad b_m)^{\mathrm{T}}$ 分别是 n 维和 m 维向量。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

在线性代数理论中，分别讨论过齐次线性方程组和非齐次线性方程组。

齐次线性方程组至少有零解，而有非零解方程组的充分必要条件是，系数矩阵的秩少于自变量的个数。

对齐次线性方程组 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=0$，不妨假定系数矩阵的秩小于自变量的个数，即 $r(\boldsymbol{M})<n$，此时存在 $n-r$ 个基础解向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，由此构成了齐次线性方程组的基础解系，而方程组的任意一个解都可以表示成为基础解系的线性组合。

一个非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，在解方程的过程中，如果系数矩阵的秩等于自变量的个数，则方程组有惟一解；当系数矩阵的秩小于自变量的个数时，则有无穷多组解。

非齐次线性方程组的通解等于它的一个特解加上对应齐次方程组的通解。

二、实验目的

（1）学习齐次线性方程组的解法；

（2）学习非齐次线性方程组的解法；

（3）了解线性代数在工程中的应用。

三、实验内容

1．齐次线性方程组 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=0$ 的解法

在 Mathematica 中有一个命令 NullSpace[ ]，使用它能够求得齐次线性方程组的基础解系。

【例 2-15】　求齐次方程组$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$的解。

【解】　很明显，该方程组系数矩阵的秩等于 1，它小于未知数的个数。

首先构造方程组，编写如下程序：

```
M={{1, 2}, {1, 2}};
X={x1, x2};
Print[M.X=={0, 0}]
```

运行后得到结果：

```
{x1+2x2, x1+2x2}=={0, 0}
```

用 NullSpace[ ]命令作用于 $\boldsymbol{M}$，键入如下命令：

```
NullSpace[M]
```

运行后得到结果：

```
{{–2, 1}}
```

令 $\boldsymbol{\xi}$ 表示它的基础解向量，可以验证，这个向量乘以任何常数所得的新向量都是原方程组的解，键入下述命令并运行。

```
ξ=%[[1]]
M.(kξ)
   {–2, 1}
      {0, 0}
```

【例 2-16】　求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_4=0\\ 4x_1+5x_2+6x_3+x_4=0\\ 7x_1+8x_2+9x_3=0\end{cases}$的解。

【解】　编写如下程序并运行。

```
M={{1, 2, 3, 2, }, {4, 5, 6, 1}, {7, 8, 9, 0}};
M1=NullSpace[M]
{{8, –7, 0, 3}, {1, –2, 1, 0}}
ξ1=M1[[1]]
ξ2=M1[[2]]
{8, –7, 0, 3}
{1, –2, 1, 0}
      Print["X=", "c1"ξ1´+"c2"ξ"2´]
         X=c2{1, –2, 1, 0}'+c1{8, –7, 0, 3}'
```

2．非齐次线性方程组 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解法

首先利用实验 2-2 的方法，求出系数矩阵和增广矩阵的秩，以确定方程组是否有解，假定有解：

（1）当系数矩阵的秩等于自变量个数时，方程组有惟一解。

【例 2-17】　解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 2x-y+4z=7 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

【解】　首先将方程组表示成为矩阵形式，即编写如下程序：

```
M={{1, 2, 3}, {2, –1, 4}, {0, –1, –1}};
b={8, 7, 1};
M.{x, y, z}==b
```

运行后得结果：

```
{x+2y+3z, 2x–y+4z, –y+z} == {8, 7, 1}
```

在这种情况下，可以用逆矩阵求解，键入如下命令：

```
Inverse[M].b
```

运行后得结果：

```
{0, 1, 2}
```

当方程个数不等于自变量个数时，无法使用逆矩阵的方法，这时可以利用 Mathematica 中的命令 LinearSolve[ ]，例如：

```
LinearSolve[M, b]
```

得运行结果：

```
{0, 1, 2}
```

（2）当系数矩阵的秩小于自变量的个数时，非齐次线性方程组有无穷多组解。

非齐次线性方程组的通解可以表示成非齐次线性方程组的一个特解与对应的齐次方程组的通解的和。在这种情况下 LinearSolve[ ]给出非齐次线性方程组的一个特解。

【例 2-18】　求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=1 \\ 2x\ \ +x_2+3x_3=1 \end{cases}$$

的通解。

【解】　编写如下程序：

```
M={{1, 3, 4}, {2, 1, 3}};
b={1, 1};
```

```
η=LinearSolve[M, b]
```

运行后得结果：

$$\{\frac{2}{5},\frac{1}{5},0\}$$

再利用 NullSpace[ ]命令求出对应齐次线性方程组的基础解系，键入以下命令并运行：

```
NullSpace[M];
ξ=%[[1]]
```

运行后得结果：

{–1, –1, 1}

然后将非齐次线性方程组的通解表示成为叠加的形式，键入命令：

```
Print["X=", η, "+k", ξ]
```

运行后得：

$$X=\{\frac{2}{5},\frac{1}{5},0\}+k\{-1,-1,1\}$$

【例 2-19】　求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=4 \\ 4x_1-6x_2+2x_3-2x_4=4 \\ 3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9 \end{cases}$$

的通解。

【解】　先将方程表示成矩阵形式，即编写程序：

```
M={{2, –1, –1, 1}, {1, 1, –2, 1}, {4, –6, 2, –2}, {3, 6, –9, 7}};
b={2, 4, 4, 9};
X={x1, x2, x3, x4};
M.X==b
```

运行后得：

{2x1–x2–x3+x4, x1+x2–2x3+x4,
　4x1–6x2+2x3–2x4, 3x1+6x2–9x3+7x4} == {2, 4, 4, 9}

再求出它的一个特解，键入以下命令：

```
η=LinearSolve[M, b]
```

运行后得结果：

{4, 3, 0, –3}

用 NullSpace[ ]命令求出对应齐次线性方程组的基础解系，即键入以下命令：

```
ξ=NullSpace[M]
```

运行后得：

```
{{1, 1, 1, 0}}
```

写出通解的语句：

```
Print["X=",  η, "+k", ξ]
```

运行后得：

```
X={4, 3, 0, –3} + k{{1, 1, 1, 0}}
```

3．应用

（1）生产计划的安排。

【例 2-20】 某工厂生产 A，B，C 三种产品。每一种产品都必须经过 M，N 两部机器的制作，生产每吨不同的产品需要使用两部机器所需的时间如表 2-1 所示。

表 2-1　（单位：h）

机器	产品 A	产品 B	产品 C
M	2	3	4
N	2	2	3

机器 M 每星期最多使用 80h，而机器 B 每星期最多使用 60h，如果不希望机器有空闲时间，每周应安排每一种产品的生产数额是多少？

【解】 设 x_1, x_2, x_3 表示每周内三种产品 A，B，C 分别生产的吨数，于是机器 M 在一周内被使用的实际时间为 $2x_1+3x_2+4x_3$，假定机器 M 被充分利用，因而有

$$2x_1+3x_2+4x_3=80$$

同样，可以得到关于机器 N 的关系式

$$2x_1+2x_2+3x_3=60$$

此时问题转化为解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=80\\2x_1+2x_2+3x_3=60\end{cases}$$

用前面讲过的方法求解，编写程序并运行。

```
M={{2, 3, 4}, {2, 2, 3}};
b={80, 60};
η=LinearSolve[M, b]

 {10, 20, 0}
ξ=NullSpace[M][[1]]

 {–1, –2, 2}
```

```
Print["X=", η, "+", "k", ξ]
  X={10, 20, 0}+k{−1, −2, 2}
```

取 $k=5$，得方程组的解为

```
k=5;
Print["X=", η+k*ξ]
  X={5, 10, 10}
```

（2）闭合经济问题。

【例 2-21】　有一个木工、一个电工、一个油漆工，三人协商彼此装修他们的房子，并达成如下的协议：

a. 每人总共工作 10 天（包括给自己家干活）；

b. 每人的日工资根据市价确定在 60～80 元之间；

c. 每人的总支出与每人的总收入相等。表 2-2 是他们协商后制定出的工作天数的分配方案。

表 2-2

	木工	电工	油漆工
在木工家工作的天数	2	1	6
在电工家工作的天数	4	5	1
在油漆工家工作的天数	4	4	3

试确定三个工人各自的日工资数为多少？

【解】　设日工资数木工为 x_1、电工为 x_2、油漆工为 x_3。根据题意，木工的总收入等于总支出，因而有 $2x_1+x_2+6x_3=10x_1$；类似建立电工、油漆工日工资数的平衡方程，可得

$$\begin{cases}2x_1+x_2+6x_3=10x_1\\4x_1+5x_2+x_3=10x_2\\4x_1+4x_2+3x_3=10x_3\end{cases}$$

经整理，得

$$\begin{cases}-8x_1+x_2+6x_3=0\\4x_1-5x_2+x_3=0\\4x_1+4x_2-7x_3=0\end{cases}$$

此时问题归结为解齐次线性方程组，利用前面讲过的方法，编写程序：

```
M={{−8, 1, 6}, {4, −5, 1}, {4, 4, −7}};
NullSpace[M]
```

运行后得结果：

```
{{31, 32, 36}}
```

由此方程组的解可表示成：

```
Print["X=", "k",ξ]
  X=k{31, 32, 36}
```

显然取 $k=2$ 符合题目要求，键入语句并运行：

```
k=2;
Print["X=", kξ]
  X={62, 64, 72}
```

所以问题的解答为：木工的日工资为 62 元，电工的日工资为 64 元，油漆工的日工资为 72 元。

习题 2-4

1）求解下列齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$

2）求下列齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0 \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0 \end{cases}$

3）求解下列非齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_1+2x_3+2x_4+6x_5=23 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12 \end{cases}$

实验 2-5　矩阵的特征值和特征向量

一、问题的提出

在线性变换理论中，矩阵的特征值有重要的应用。给定方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个实数 λ 和一个向量 $\boldsymbol{\xi}$，满足 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$，则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，而 $\boldsymbol{\xi}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ 的特征向量。

求特征值，通常的做法是解一个 n 阶代数方程 $|\lambda E - \boldsymbol{A}| = 0$，该代数方程称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。在阶数比较高（n>5）时，一般求不出精确解。因此除对于阶数比较低的矩阵，或特殊的稀疏矩阵，可以求出精确解以外，求矩阵的特征值和特征向量是一个较复杂的问题。

二、实验目的

（1）学习用解特征方程的方法求矩阵的特征值；
（2）学习用 Mathematica 的内部命令求矩阵的特征值和特征向量；
（3）了解特征值的应用；
（4）学会用正交矩阵方法化方阵为对角矩阵。

三、实验内容

1．用解特征方程的方法求矩阵的特征值

【例 2-22】　求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值与特征向量。

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【解】　编程如下：

```
M={{1, 1/2, 0}, {0, 1/2, 1}, {0, 0, 0}};
E3=IdentityMatrix[3];
Solve[Det[k*E3−M]==0, k]
```

运行结果为：

$\{\{k\text{–>}0\}, \{k\text{–>}\frac{1}{2}\}, \{k\text{–>}1\}\}$

再解相应的齐次线性方程组并解出特征向量。编程并运行：

```
k=0;
ξ1=NullSpace[k∗E3–M][[1]]
{1, –2, 1}
k=1/2;
ξ2=NullSpace[k∗E3–M][[1]]
{–1, 1, 0}
k=1;
ξ3=NullSpace[k∗E3–M][[1]]
{1, 0, 0}
P={ξ1, ξ2, ξ3}//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2．用 Eigenvalues[ ]内部命令求矩阵的特征值和特征向量

Eigenvalues[ ]内部命令包括：

（1）Eigenvalues[ ] 用于求矩阵的特征值；

（2）Eigenvectors[ ] 用于求矩阵的特征向量；

（3）Eigensystem[ ] 用于同时求出矩阵的特征值和特征向量。

【例 2-23】　求矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

【解】　键入命令并运行：

```
Eigenvalues[M]
```

$$\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

```
Eigenvectors[M];
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Eigensystem[M]
```

$$\left\{\left\{0,\frac{1}{2},1\right\},\{\{1,-2,1\},\{-1,1,0\},\{1,0,0\}\}\right\}$$

3．应用

1）狐兔问题

【例 2-24】 假设新开辟的国家公园没有兔子和狐狸，现引进兔子和狐狸各 1 000 只，n 个月以后兔子和狐狸的数量分别记做 R_n 和 F_n，假定有

$$\begin{cases} R_{n+1} = 1.1R_n - 0.2F_n \\ F_{n+1} = 0.2R_n + 0.6F_n \end{cases}$$

试问：经过一段时间后，兔子和狐狸的数量有什么变化？

【解】 设 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$

则有

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} R_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} R_2 \\ F_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{M}^2\cdot\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 710 \\ 640 \end{pmatrix}$$

……

$$\boldsymbol{b}_n = \begin{pmatrix} R_n \\ F_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^n\cdot\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

可以看出，当 n 充分大时，$\boldsymbol{b}_n$ 逐渐趋于一个稳定的值，在 Notebook 窗口键入 32 个 $\boldsymbol{M}$ 连乘，再乘以 $\boldsymbol{b}$，即

```
M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.b
```

运行得结果：

```
{{666.67}, {333.341}}
```

可见经过 32 个月以后，兔子和狐狸的数目稳定在 666 只与 333 只，大约为 2∶1 的比例关系。

2）商品的市场占有率问题

【例 2-25】 有 R 和 S 两家公司经营同类产品，相互竞争。每年 R 公司有 1/4 的顾客保留下来，而 3/4 的顾客转向 S 公司；S 公司有 2/3 的顾客保留下来，而 1/3 的顾客转向 R 公司。当产品开始制造时，R 公司占有 3/5 的市场份额，S 公司占有 2/5 的市场份额。

试问，两年后，两家公司所占的市场份额各有哪些变化？五年以后又怎样？十年以后又怎样？如果希望市场的分配份额保持原状，开始时的市场份额应是怎样的比例？

【解】 设初始份额为 $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$，$a_0$ 为 R 公司的份额，b_0 为 S 公司的份额。则一年后有

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

键入以下命令：

```
M={{1/4, 1/3}, {3/4, 2/3}};
b={3/5, 2/5};
M.b//N
```

运行后得出一年后的份额为：

```
{0.283333, 0.716667}
```

两年后的份额为：

```
M.M.b//N
{0.309722, 0.690278}
```

五年后的份额为：

```
M.M.M.M.M.b//N
{0.307691, 0.692309}
```

十年后的份额为：

```
M.M.M.M.M.M.M.M.M.M.b//N
{0.307692, 0.692308}
```

可见若干年后 R 公司和 S 公司的市场份额将由开始时的 3/2 变化为 0.31/0.69。

为了使得两家公司市场份额的分配数据不变，设初始份额为 $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$，则有

$$a_0 + b_0 = 1$$

并且

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

经整理得

$$\begin{pmatrix} -3/4 & 1/3 \\ 3/4 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

可见这是一个齐次线性方程组，由此编写程序并运行：

```
M1={{–3/4, 1/3}, {3/4, –1/3}};
η=NullSpace[M1][[1]]
```

$$\left\{\frac{4}{9}, 1\right\}$$

取比例常数 k 为 $\dfrac{9}{13}$，在 Notebook 中运算：

```
k=9/13
```

```
k*η//N
    {0.307692, 0.692308}
```

由结果看出这是使市场稳定的初始分配份额。

读者还可以对不同的初始市场份额在计算机上做实验，看看经过若干年后，是否都会稳定在 0.31/0.69 上？

3）在上述问题中利用特征值

在狐兔问题的计算中算式 $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}\cdots\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{b}$ 显得很笨拙，能否用 $\boldsymbol{M}$ 的 k 次幂来代替呢？不行，因为在 Mathematica 中M^2表示的运算是对 $\boldsymbol{M}$ 的每个元素进行平方运算，因此 $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}\neq$ M^2，要计算 k 个 $\boldsymbol{M}$ 的连乘积，可以利用特征根和特征向量，首先求出方阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征根和特征向量，将 $\boldsymbol{M}$ 对角化，即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元为 $\boldsymbol{M}$ 的特征根，而 $\boldsymbol{P}$ 的各列为 $\boldsymbol{M}$ 的对应于每个特征根的特征向量。于是可以得出

$$\underbrace{\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}\Lambda\ \boldsymbol{M}}_{n}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{n}\boldsymbol{P}^{-1}$$

【例 2-26】　设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1.1 & -0.2\\ 0.2 & 0.6\end{pmatrix}$，求 32 个 $\boldsymbol{M}$ 的连乘积，并求 32 个月后，兔子和狐狸的数目。

【解】　依题意编程并运行如下：

```
M={{1.1, –0.2}, {0.2, 0.6}};
MatrixForm[%]
Eigensystem[M]
```

$$\begin{pmatrix}1.1 & -0.2\\ 0.2 & 0.6\end{pmatrix}$$

```
{{1., 0.7}, {{0.894427, 0.447214}, {, 0.447214, 0.894427}}}
```

进一步运算，接着键入如下命令并运行：

```
P={{0.8944, 0.4472}, {0.4472, 0.8944}};
b={1000, 1000};
```

$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.7\end{pmatrix}$;

```
M1=P.(Λ^32).Inverse[P]//N
M1.b
```

```
{{1.33333, –0.666659}, {0.666659, –0.333319}}
{666.67, 333.341}
```

4．求将实对称矩阵化为对角矩阵的正交变换矩阵

首先求矩阵的特征值和对应的特征向量，然后将特征向量用施密特正交法化为单位正交向量组，而后得到正交变换矩阵。

在 Mathematica 中有一个外部函数 GramSchmidt[ ]命令，该命令在标准程序包集的线性代数程序包的子集中，使用时要首先调入 Orthogonalization.m。

【例 2-27】　已知线性无关的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\{1,1,0,0\},\boldsymbol{\alpha}_2=\{1,0,1,0\},\boldsymbol{\alpha}_3=\{-1,0,0,1\},\boldsymbol{\alpha}_4=\{1,-1,-1,1\}$$

试将向量组正交并单位化。

【解】　先调入外挂的程序包，然后使用 GramSchmidt[ ]命令，即：

```
<<LinearAlgebra`Orthogonalization`
 A={{1,1,0,0},{1,0,1,0},{-1,0,0,1},{1,-1,-1,1}};
 GramSchmidt[A];
MatrixForm[%]
```

运行程序后得：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

其矩阵中各列是将原向量组正交、单位化后的各个向量。

习题 2-5

1）求下列矩阵的特征值与特征向量：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$　　　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

2）已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$$

的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=12$，求 x 的值，并求其特征向量。

3）将下列矩阵化为对角矩阵：

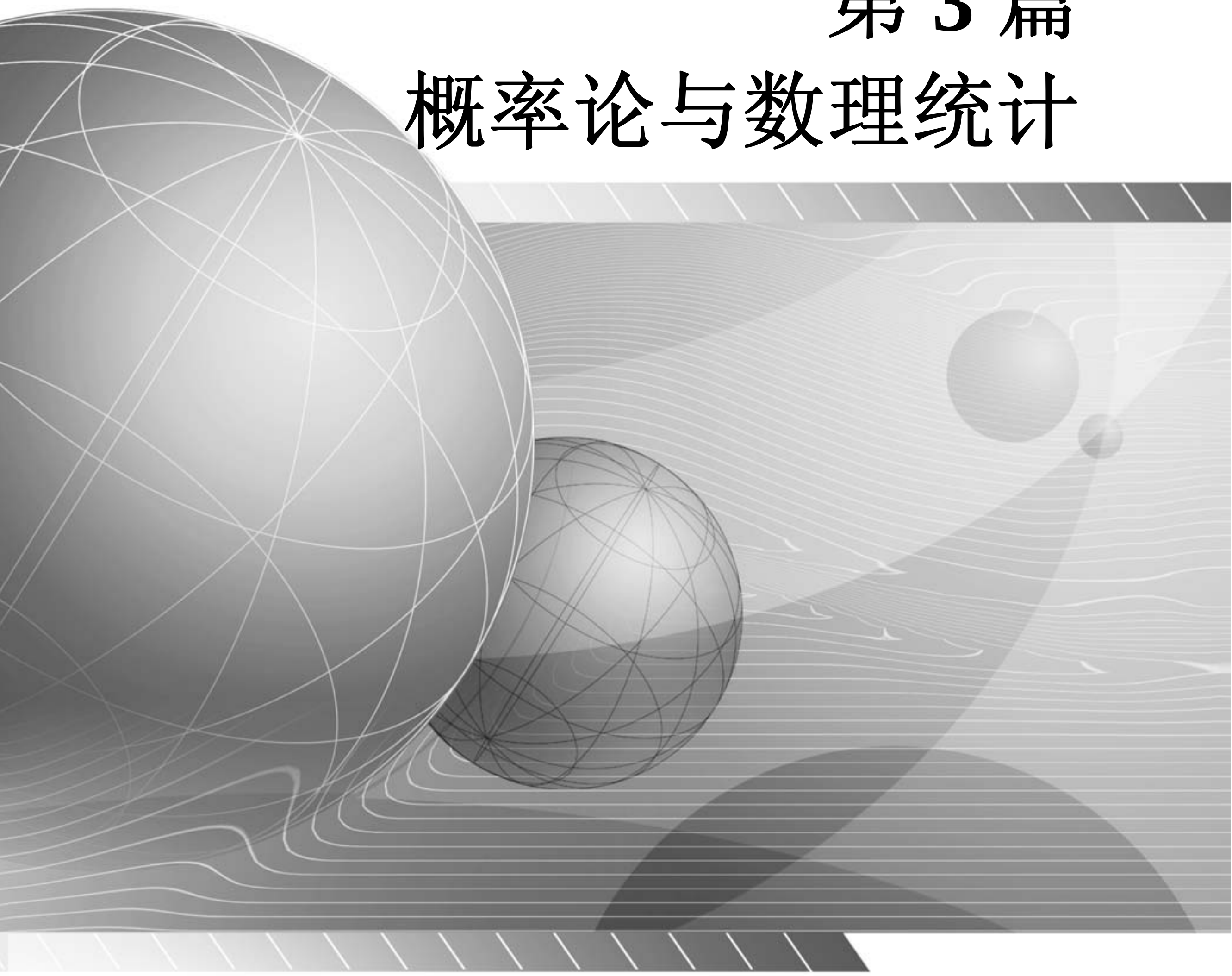
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4）判断下列矩阵是否为正交矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

第 3 篇

概率论与数理统计



实验 3-1　随机变量的分布

一、问题的提出

在研究随机现象中，随机变量的分布率、分布函数以及它的各种数字特征的计算是经常遇到的问题。在离散型随机变量的计算中主要用到组合数和求和运算等；在连续型随机变量的计算中，常常遇到定积分、广义积分，特别是一些非初等积分的计算。这些计算在传统的概率统计课程中，主要是靠查表计算，而作为现代的概率统计工作者，使用计算机来进行这些计算应该是基本功。在 Mathematica 中，有一个外部程序包，里面给出了绝大多数随机变量分布的计算方法。在这次实验中，将介绍其中的主要计算方法。

二、实验目的

（1）学习随机变量的分布率和分布函数的计算；
（2）学习频率图和分布函数的图形画法；
（3）学习随机变量的期望和方差计算；
（4）学习其他数字特征的计算。

三、实验内容

1．随机变量的分布率和分布函数的计算

在 Statistics 程序包中的 DiscreDistributions.m 定义了下列函数：

二项分布	BinomialDistribution[n,p]
泊松分布	PoissonDistribution[λ]
几何分布	GeometricDistribution[p]
离散的均匀分布	DiscreteUniformDistribution[n]
贝努力分布	BernoulliDistribution[p]
正态分布	NormalDistribution[μ, σ]
指数分布	ExponentiaDistribution[λ]
均匀分布	UniformDistribution[min,max]

t 分布　　StudentTDistribution[n]

χ^2 分布　　ChiSquareDistribution[n]

F 分布　　FratioDistribution[n_1 , n_2]

Γ 分布　　GammaDistribution[r,λ]

【例 3-1】　二项分布的分布率和分布函数的计算。

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (0<p<1),\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

研究 $n=10,\ p=0.3$ 情况下的二项分布。

【解】　首先求出二项分布的分布率，编写程序如下：

```
<<Statistics'DiscreteDistributions'
bdist=BinomialDistribution[10,0.3]
```

（∗调用统计软件包，定义 **bdist** 为一个二项分布的随机变量∗）

```
t1=Table[PDF[bdist,i],{i,0,10}]     (*计算它的分布率*)
```

程序运行结果为：

0.0282475,0.121061,0.233474,0.266828,0.200121,0.102919,

0.0367569,0.00900169,0.0014467,0.000137781,5.9049×10^{-6}}

然后画出散点图，调用绘图命令：

```
ListPlot[t1,PlotStyle–>PointSize[0.02]]
```

程序运行后得到图 3-1。

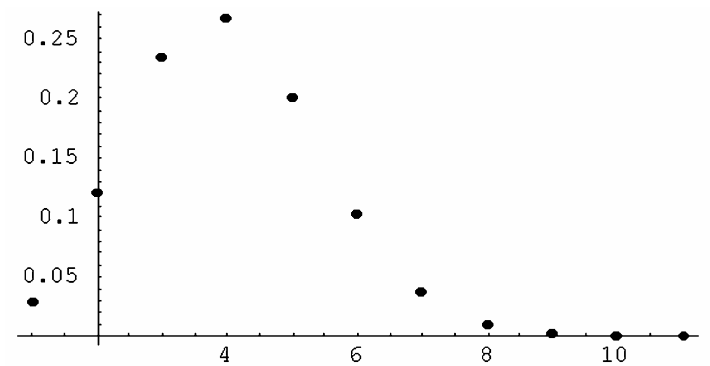


图 3-1

再画条形图，使用外部程序中的 BarChart[ ]命令：

```
<<Graphics'Graphics'   (*调用绘图软件包*)
Barchart[t1]    （*画条形图*）
```

程序运行后得到图 3-2。

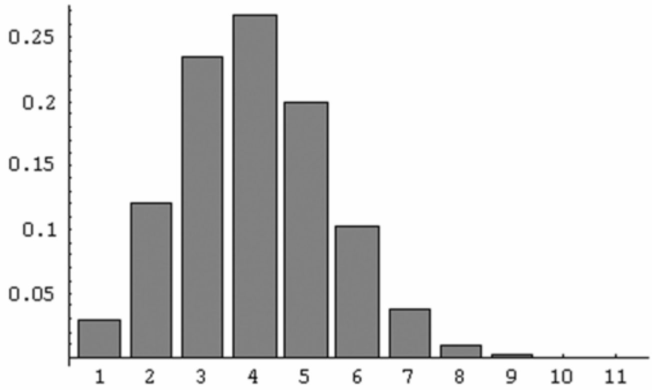


图 3-2

再进行分布函数的计算，键入命令：

```
Table[CDF[bdist,i],{i,0,10}]    (*求出分布函数在各个点上的取值*)
```

程序运行后得：

```
{0.0282475,0.149308,0.382783,0.649611,
  0.849732,0.952651,0.989408,0.99841,0.999856,0.999994,1}
```

最后画出分布函数的图形，即

```
ListPlot[t2,PlotStyle–>PointSize[0.02],PlotJoined–>True]
```

程序运行后得图 3-3。

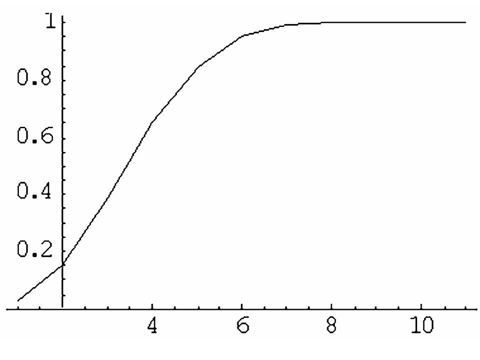


图 3-3

【例 3-2】　研究期望值为 5 的泊松分布。

取参数 $\lambda = 5$，$\xi \sim P(5)$，$P\{\xi = k\} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

【解】　编写如下程序并运行。

```
p=PoissonDistribution[5]
p1=Table[PDF[p,i],{i,0,15}]//N
```

{0.00673795,0.0336897,0.0842243,0.140374,0.175467,
0.175467,0.146223,0.104445,0.065278,0.0362656,0.0181328,
0.00824218,0.00343424,0.00132086,0.000471736,0.000157245}

画出分布的图形，即：

ListPlot[p1,PlotStyle–>PointSize[0.02]]

运行后得图 3-4。

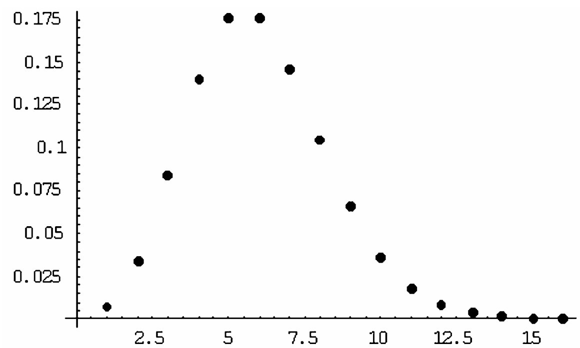


图 3-4

最后画条形图，即：

<<Graphics'Graphics'

BarChart[p1]

运行后得图 3-5。

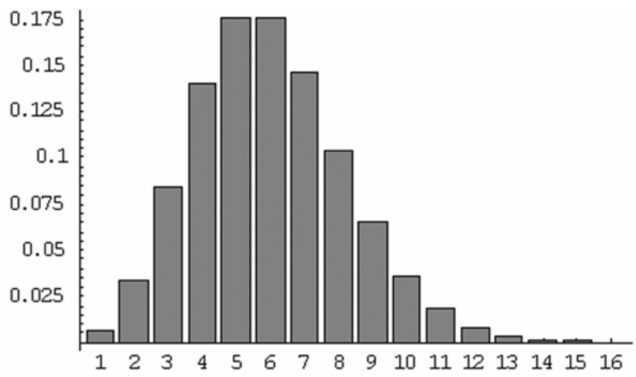


图 3-5

【例 3-3】　研究标准正态分布。

【解】　依题意，在 Notebook 环境下进行交互式运算：

<<Statistics'NormalDistribution'　　（*调用外部程序*）

ndist=NormalDistribution[0,1]　　（*定义变量 ndist 为标准正态分布的随机变量*）

```
pdf=PDF[ndist,x]            (*求出分布函数*)
```

运行后得到：

$$\frac{-e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

画出正态分布密度函数的图形（见图 3-6）：

```
Plot[pdf,{x,–3,3}]
```

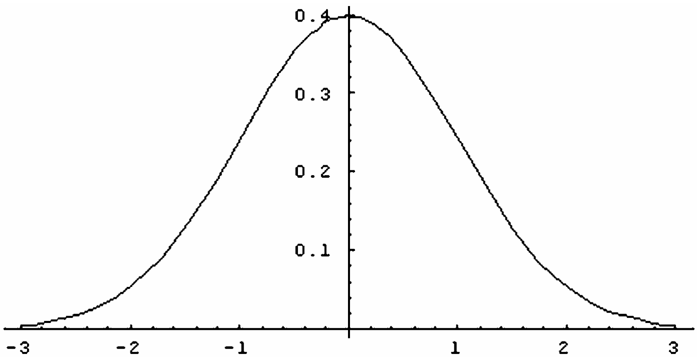


图 3-6

打印出正态分布函数的数表：

```
Table[CDF[ndist,i]//N,{i,–3,3,0.1}]
```

{0.0013499, 0.00186581, 0.00255513, 0.00346697, 0.00466119, 0.00620967, 0.00819754, 0.0107241, 0.0139034, 0.0178644, 0.0227501, 0.0287166, 0.0359303, 0.0445655, 0.0547993, 0.0668072, 0.0807567, 0.0968005, 0.11507, 0.135666, 0.158655, 0.18406, 0.211855, 0.241964, 0.274253, 0.308538, 0.344578, 0.382089, 0.42074, 0.460172, 0.5, 0.539828, 0.57926, 0.617911, 0.655422, 0.691462, 0.725747, 0.758036, .788145, 0.81594, 0.841345, 0.864334, 0.88493, 0.9032, 0.919243, 0.933193, 0.945201, 0.955435, 0.96407, 0.971283, 0.97725, 0.982136, 0.986097, 0.989276, 0.991802, 0.99379, 0.995339, 0.996533, 0.997445, 0.998134, 0.99865}

【例 3-4】 已知 $\xi \sim N(8,0.5)$，求 $P\{\xi$ 剟$10\}$，$P\{7<\xi \quad 9\}$。

【解】 在 Notebook 环境下进行交互式运算：

```
<<Statistics'NormalDistribution'   (*调用外部程序*)
n=NormalDistribution[8,0.5]        (*定义随机变量*)
CDF[n,10]                          (*计算 P{ξ≤10}*)
   0.999968
CDF[n,9] –CDF[n,7]                 (*计算 P{7<ξ≤9}*)
   0.9545
```

2．计算随机变量的期望值和方差

【例 3-5】 求参数 $\lambda = 5$ 的泊松分布的期望值和方差。

【解】 在 Notebook 环境下进行交互式运算：

```
<<Statistics'DescriptiveStatistics'  (*调用外部程序包*)
p=PoissonDistribution[5] ;           (*定义随机变量*)
Mean[p]                              (*计算数学期望值*)
Variance[p]                          (*计算方差*)
```

运算结果为：

```
5
5
```

【例 3-6】 求参数 $\lambda = 5$ 的 χ^2 分布的期望值和方差。

【解】 在 Notebook 环境下进行交互式运算：

```
<<Statistics'ContinuousDistributions'
Plot[PDF[ChiSquareDistribution[5],x],{x,0,15},PlotRange–>{0,0.2}]
<<Statstics'DescriptiveStatistics'
Print["E(ξ)= ",Mean[ChiSquareDistribution[5]]]
Print["D(ξ)= ",Variance[ChiSquareDistribution[5]]]
```

运行后得到图 3-7。

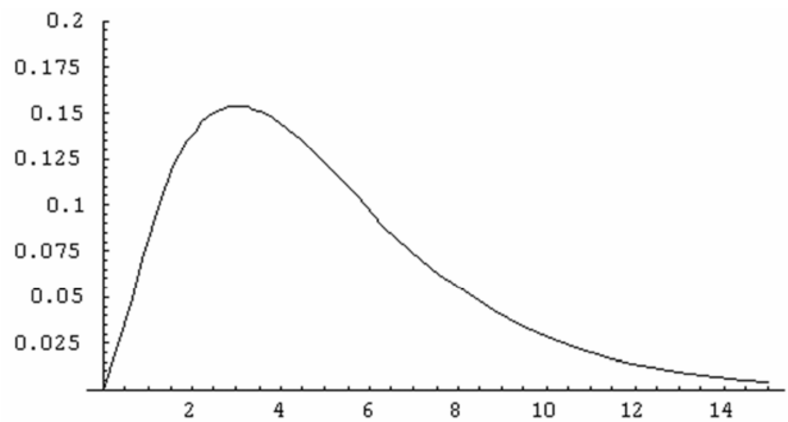


图 3-7

求出期望值和方差：

```
E(ξ)=5
D(ξ)=10
```

3．其他数字特征的计算

在 DescriptiveStatistics.m 中含有一元统计基本计算的函数，如表 3-1 所示。

表 3-1　一元统计基本计算函数

SampleRange[data]	求表 data 的极差
Median[data]	求 data 的中值
Mean[data]	求平均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
Variance[data]	求方差（无偏估计）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
VarianceMLE[data]	求方差 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
StandardDeviationMLE[data]	求标准差 $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$
CentralMoment[data,k]	求 k 阶中心矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k$
StandardErrorOfSampleMean[data]	求 $\frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{n}}$

在 MultiDescriptiveStatistics.m 中含有实现多元统计的基本计算函数，读者可以利用“随机帮助”自己去查阅，如键入如下命令：

```
<<Statistics'MultiDescriptiveStatistics'
Names["Statistics'MultiDescriptiveStatistics'*"]
```

运行后系统列出下列大量的外部函数：

```
{AssociationMatrix,ConvexHullArea,ConvexHullMedian,Correlation,
Covariance,CovarianceMatrixMLE,CovarianceMatrixOfSampleMean,
CovarianceMLE,Decorrelate,DispersionMatrix,EllipsoidQuantile,
EllipsoidQuartiles,EstimateDOF,GeneralizedVariance,
KendallRankCorrelation,MedianMethod,MultivariateKurtosis,
MultivariateKurtosisExcess,MultivariateMeanDeviation,
MultivariateMedianDeviation,MultivariateMode,
MultivariatePearsonSkewness1,MultivariatePearsonSkewness2,
MultivariateSkewness,MultivariateTrimmedMean,PolytopeQuantile,
PolytopeQuartiles,PrincipalComponents,ScaleMethod,SimplexMedian,
SpatialMedian,SpearmanRankCorrelation,TotalVariation}
```

【例 3-7】　一元统计分析。

【解】　在 Notebook 环境下进行交互式运算：

```
<<Statistics'DescriptiveStatistics'
data={6.5,3.8,6.6,5.7,6.0,6.4,5.3};
Print["数据长度        ",Length[data]](*数据长度*)
Print["最小值          ",Min[data]](*最小值*)
Print["最大值          ",Max[data]](*最大值*)
Print["极差            ",SampleRange[data]](*极差*)
Print["中值            ",Median[data]](*中值*)
Print["平均值          ",Mean[data]](*平均值*)
Print["方差            ",Variance[data]](*方差*)
```

运行后得结果：

```
数据长度      7
最小值        3.8
最大值        6.6
极差          2.8
中值          6.
平均值        5.75714
方差          0.962857
```

习题 3-1

1）求出以下分布的分布密度函数及分布函数：

（1）$\chi^2(5)$ 分布　　　　（2）$F(1,\ 8)$ F 分布

2）计算参数 $\lambda=5$ 时的指数分布的期望值和方差。

3）求二项分布 $N(n,p)$ 的期望值和方差。

4）设总体服从 $X\sim N(12,\ 4)$，今抽取容量为 5 的样本 $x_1, x_2, \cdots, x_5$，求样本均值 $\bar{X}$ 大于 13 的概率。

5）设总体服从 $X\sim N(52,\ 6.3^2)$，今抽取容量为 36 的样本 $x_1, x_2, \cdots, x_{36}$，求样本均值 $\bar{X}$ 落在 50.8～53.8 之间的概率。

实验 3-2　随机变量的模拟

一、问题的提出

在研究随机现象时将会涉及各种各样的随机变量，因此模拟随机现象中最主要的是模拟随机变量。随机变量主要分成离散型随机变量和连续型随机变量。

模拟随机变量指的是，按照随机变量的分布，取得它的一个样本。模拟的依据是大数定律，即在多次实验中，随机时间 A 的频率具有稳定性，其稳定值就是随机事件发生的概率。这在计算机上需做大量的重复实验，用事件的频率近似事件的概率，用频率的分布近似随机变量的概率分布。

二、实验目的

（1）进行投球模型的模拟；

（2）了解均匀分布随机数的产生；

（3）了解几个重要的离散型分布随机数的产生；

（4）了解连续型分布随机数的产生。

三、实验内容

1．投球模型

【例 3-8】 生日问题：假设存在一个 n 个人的团体，研究在一年中该团体至少有两个人生日相同的概率。

【解】 设该团体中每个人的生日在一年 365 天中的任意一天是等可能的。则 n 个人生日的出现方式有 365^n 种，即所有可能的样本点总数。讨论所求事件的对立事件，即每个人的生日各不相同的事件出现所包含的样本点数为

$$C_{365}^{n} n! = 365 \times 364 \times \mathrm{L} \ \times (365 - n + 1)$$

依古典概型，有

$$P(n) = \frac{365 \times 364 \times \mathrm{L} \ \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

则，所求事件的概率为

$$P(n)=1-\frac{365\times 364\times \mathrm{L}\ \times(365-n+1)}{365^n}$$

在 Notebook 环境下，定义函数 $P(n)$，即：

$$\text{p[n\_]:=}1-\left(\left|\prod_{i=365-n+1}^{365} i\right|\right)\Big/365\text{\^{}n};$$

分别计算 $n=30,\ 50,\ 70$ 的情况，其程序与运行结果如下：

```
Table[p[n]//N,{n,30,70,20}]
{0.706316,0.970374,0.99916}
```

用计算机进行模拟实验：任取(1 365)上的 30 个数，然后统计有两个人生日相同的实验数目，并计算在 100 次实验中的频率值。编写程序并运行如下：

```
t=0;m=0;n=0;
Label[begin];y=0;x=Table[Random[Integer,{1,365}],{30}];F
or[i=1,i≤29,i++,    For[j=i+1,j≤30,j++,If
[x[[j]]==x[[i]],y=1,Break];]];n=n+y,m=m+1,If
[m≤100,Goto[begin]]
h=n
Print["The F[",m–1, "]=",N[n/(m–1)]]
 69
 The F[100]=0.69
```

可以看出，在最初的 100 次实验中，事件 A 出现了 69 次，频率为 0.69，它和概率 0.706, 316 是很接近的。如果重复做实验，可能每次得到的频率有所不同，但是将稳定在 0.70 的附近。

2．均匀分布随机数的产生

（1）乘同余法产生（0, 1）区间上的均匀分布随机变量的随机数，其程序如下：

```
m=10^10;k=7;
x=Table[0,{50}];x[[1]]=1
For[i=2,i≤50,i++,
   x[[i]]=Mod[k*x[[i–1]],m]]
x/m/N
h=Length[x]
```

其中：m——模数，k——乘子，x_0——种子。

这里取 $m=10^{10}, k=7, x_0=1$。

运行以上程序的结果为：

{1. '*^–10, 7. '*^–10, 4.9'*^–9, 3.43'*^–8, 2.401'*^–7, 1.6807'*^–6, 0.0000117649', 0.0000823543', 0.0005764801', 0.0040353607', 0.0282475249', 0.1977326743', 0.3841287201', 0.6889010407', 0.8223072849', 0.7561509943', 0.2930569601', 0.0513987207', 0.3597910449', 0.5185373143', 0.6297612001', 0.4083284007', 0.8582988049', 0.0080916343', 0.0566414401', 0.3964900807', 0.7754305649', 0.4280139543', 0.9960976801', 0.9726837607', 0.8087863249', 0.6615042743', 0.6305299201', 0.4137094407', 0.8959660849', 0.2717625943', 0.9023381601', 0.3163671207', 0.2145698449', 0.5019889143', 0.5139224001', 0.5974568007', 0.1821976049', 0.2753832343', 0.9276826401', 0.4937784807', 0.4564493649', 0.1951455543', 0.3660188801', 0.5621321607'}

50

由此得到 50 个（0, 1）区间上的随机数。

（2）混合同余法生成（0, 1）区间上的均匀分布的随机数，即：

```
x0=Input["x0="]
m=100;
b=15;
Linearcong[x_]:=Mod[b*x+7,m]
data=Table[LinearCong[x]/m//N,{x,x0,49+x0}]
h=Length[data]
```

{0.22,0.37,0.52,0.67,0.82,0.97,0.12,0.27,0.42,0.57,0.72,0.87,0.02,0.17,0.32,0.47,0.62,0.77,0.92,0.07, 0.22,0.37,0.52,0.67,0.82,0.97,0.12,0.27,0.42,0.57,0.72,0.87,0.02,0.17,0.32,0.47,0.62,0.77,0.92,0.07, 0.22,0.37,0.52,0.67,0.82,0.97,0.12,0.27,0.42,0.57}

从上述结果发现，这一生成器很快陷入循环。现画出数据的图形（见图 3-8）：

```
ListPlot[data,PlotJoined–>True,GridLines–>Automatic]
```

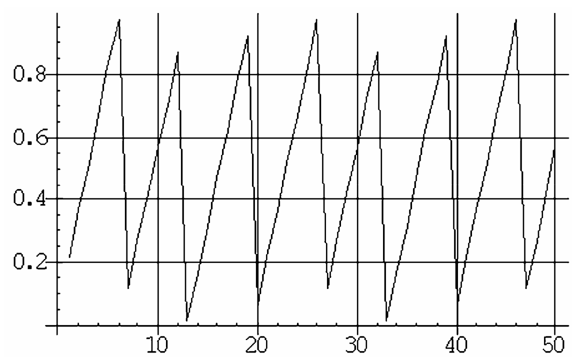


图 3-8

由图 3-8 容易看出数据在 20 个数后产生循环。

将模 m 和乘子 b 取得大一些，可以使生成器不致陷入循环。如取 $m=2^{16}$，b=27 421，$x_0=2$，则有结果：

{0.418518, 0.836929, 0.255341, 0.673752, 0.0921631, 0.510574, 0.928986, 0.347397, 0.765808, 0.184219, 0.602631, 0.0210419, 0.439453, 0.857864, 0.276276, 0.694687, 0.113098, 0.531509, 0.949921, 0.368332, 0.786743, 0.205154, 0.623566, 0.0419769, 0.460388, 0.878799, 0.297211, 0.715622, 0.134033, 0.552444, 0.970856, 0.389267, 0.807678, 0.226089, 0.644501, 0.062912, 0.481323, 0.899734, 0.318146, 0.736557, 0.154968, 0.57338, 0.991791, 0.410202, 0.828613, 0.247025, 0.665436, 0.083847, 0.502258, 0.92067}

（3）用 Random[ ]产生（a, b）区间上的一组均匀分布随机数。

在以下程序中使用的 Frequencies[ ]是在统计包 Statistics 的 m 文件 DataManipulation.m 中定义的，它是将 100 的随机数分组统计频数，从而得到一个二元数组；BarChart[ ]是在图形包 Graphics 的 Graphics.m 中定义的，它用于画出条形图。

在 Notebook 环境下键入以下程序段：

```
    Random[]    (*产生一个(0.1)之间的随机数*)
    data=Table[Random[Integer,{0,9}],{100}];
    (*产生 100 个(0,9)之间的随机整数*)
<<Graphics'Graphics'
<<Statistics'DataManipulation'
freq=Frequencies[data];
BarChart[freq]
```

运行后得到以下数组和图 3-9。

{{5,0},{9,1},{8,2},{8,3},{15,4},{8,5},{8,6},{13,7},{15,8},{11,9}}

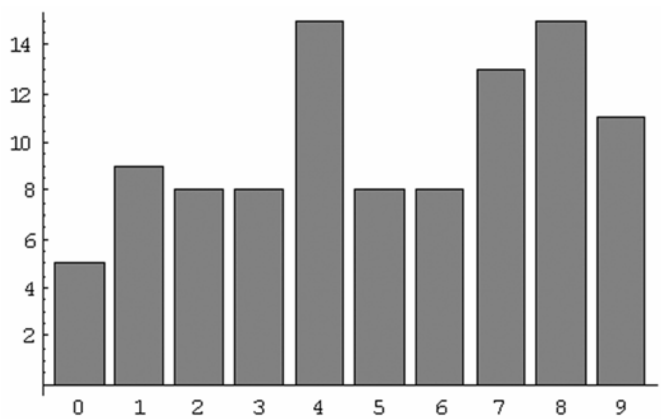


图 3-9

3．几个重要的离散型分布随机数的产生

（1）二项分布

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad(0<p<1),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

【例 3-9】　产生一组二项分布的随机数。

【解】　编写程序如下：

```
<<Statistics'DiscreteDistributions'
bdist=BinomialDistribution[10,0.3](*定义随机变量 bdist 满足 n=10,
  p=0.3 的二项分布*)
BinomialDistribution[10,0.3]
RandomArray[bdist,15]
```

运行后得：

```
{3,1,3,3,5,2,1,2,6,5,1,1,3,3,2}
```

（2）泊松分布。

【例 3-10】　产生一组泊松分布的随机数。

【解】　编写如下程序并运行。

```
<<Statistics'DiscreteDistributions'
p=PoissonDistribution[5]
RandomArray[p,10]
PoissonDistribution[5]
{3,5,13,7,5,5,3,5,5,7}
```

（3）一般的离散型分布为

$$P\{X=x_i\}=p_i\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots)$$

令 $p(0)=0,p(n)=\sum_{i=1}^{n}p_i,\ n=1,\ 2,\ \cdots$，将$\{p(n)\}$看做（0, 1）区间的分点，若每产生一个（0, 1）区间上均匀分布的随机数 r，且 $p(n-1)<r<p(n)$，则令 X 取值 x_n。因为

$$P\{p(n-1)<r<p(n)\}=p(n)-p(n-1)=p_n\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

记

$$p_n=P\{X=x_n\}=P\{p(n-1)<r<p(n)\}$$

【例 3-11】　随机变量 X 有以下分布：

$X=x_i$	0	1	2
$P\{X=x_i\}$	0.2	0.5	0.3

构造一组（0, 1）区间上的随机数 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_N$，令

$$x_i = \begin{cases} 0 & 0 < r_i \leqslant 0.2 \\ 1 & 0.2 < r_i \leqslant 0.7 \\ 2 & 0.7 < r_i \end{cases}$$

则 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 是所求分布的一组随机数。

【解】　编写如下程序并运行。

```
A=Table[Random[Real,{0,1}],{10}]
X=Table[0,{10}];
For[i=1,i≤0.2,i++,
   If[A[[i]] ≤0.2,X[[i]]=0];
   If[0.2<A[[i]] ≤0.7,X[[i]]=1];
   If[A[[i]]–>0.7,X[[i]]=2]
   ]
X
```

得到一组随机数：

```
{0.0223822,0.807901,0.00865191,0.952325,0.349406,0.232884,0.138509,0.580901,0.328348,
0.765295}
{0,2,0,2,1,1,0,1,1,2}
```

4．连续型分布

（1）指数分布随机数的产生。

用反函数法：因为指数分布概率密度函数为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$，由

$$r_i = \int_0^{y_i} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda y_i}$$

可得

$$y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)$$

由于 r_i 和 $1 - r_i$ 同为（0, 1）区间上的均匀分布随机数，故上式可以简化为

$$y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i$$

即先产生一组（0, 1）区间上的均匀分布随机数，再利用反函数公式得到指数分布随机数，编写程序并运行如下：

```
a1=Table[Random[Real,{0,1}],{10}]
{0.627901,0.0337125,0.0999451,0.761467,
 0.468693,0.836975,0.736413,0.71154,0.745067,0.638876}
b1=–Log[a1]/5
{0.0930745,0.677977,0.460627,0.0545017,0.151562,
```

0.0355923,0.0611928,0.0680649,0.0588563,0.0896089}

（2）正态分布随机数的产生。

先构造两组（0, 1）区间上的均匀分布的随机数 r_1, r_2，再利用公式

$$\begin{cases} x_1 = (-2\ln r_1)^{1/2}\cos(2\pi r_2), \\ x_2 = (-2\ln r_1)^{1/2}\sin(2\pi r_2) \end{cases}$$

由此得到的 x_1, x_2 是相互独立的，且服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 的随机数，再由公式 $y_i = \sigma x_i + \mu$ 可得到服从一般正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数，即由

```
m1=Table[Random[Real,{0,1}],{100}];
m2=Table[Random[Real,{0,1}],{100}];
m11=Sqrt[–2 Log[m1]]*Cos[2*Pi*m2]
m22=Sqrt[–2* Log[m1]]*Sin[2*Pi*m2]
```

可以得到两组相互独立的服从标准正态分布的随机数。为节省篇幅，这里就不再列出。

在最新版本的 Mathematica 中有更方便的方法，如使用 Random[dist]可以产生分布为 dist 的随机数。

【例 3-12】　产生一组二项分布 $B\{10，0.3\}$的随机数。

【解】　编写如下程序：

```
<<Statistics`DiscreteDistributions`
bdist=BinomialDistribution[10,0.3];
RandomArray[bdist,20]
```

运行后得结果为：

```
BinomialDistribution[10,0.3]
{1,3,4,5,1,3,6,3,6,7,6,2,2,1,3,4,2,5,4,2}
```

习题 3-2

1）用不同的方法产生（0, 1）区间上的均匀分布的随机数。

2）产生一组 500 个满足 $B\{10,\ 0.2\}$ 的随机数。

3）产生一组 1 000 个满足 $N(4,\ 9)$ 的随机数。

4）设随机变量的分布率如下表所示：

$X = x_i$	0	1	2	3
$P\{X = x_i\}$	0.2	0.3	0.3	0．2

试产生一组 20 个服从该分布的随机数。

实验 3-3　频率图近似模拟

一、问题的提出

抽取一个随机变量的样本，虽然我们并不知道这个随机变量属于何种分布，但可以将数据分组，统计落在不同区间的频数，以计算频率，并画出频率的图形，由此可对随机变量的分布有一些感性的认识。

二、实验目的

（1）了解数据分组统计；

（2）了解离散随机变量的一组观察数据的频率直方图的画法；

（3）学习连续随机变量的一组观察数据的频率直方图的画法。

三、实验内容

1．对给定的数据分组进行统计

先编写下面的程序并运行，可得到图 3-10。

```
<<Statistics`DataManipulation`
a1=Table[Random[Real,{0,100}],{1000}];
a2=BinCounts[a1,{0,100,10}];
{105,81,91,99,96,113,116,95,95,109}
<<Graphics`Graphics`
BarChart[a2]
```

在这里，我们产生的是在（0, 100）区间之间均匀分布的随机数，从图 3-10 中可以看出，落在 (0, 10], (10, 20], L , (90, 100] 各个区间里的点数分别为：

{105,81,91,99,96,113,116,95,95,109}

它们并不都等于 100，而是有的大些，有的小些，这并不足为奇，因为我们讨论的本来就是随机变量。

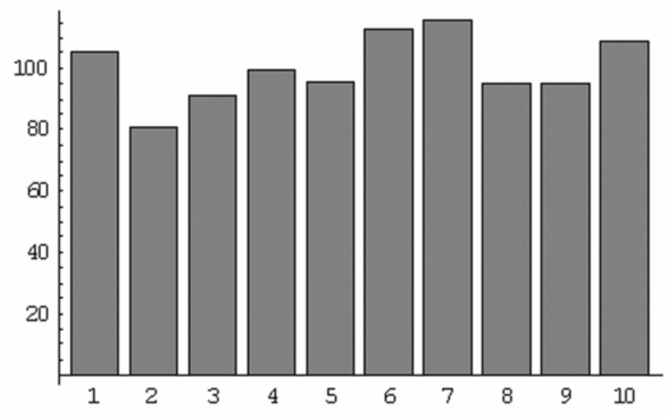


图 3-10

2．对于离散随机变量的一组观察数据的频率直方图的画法

【例 3-13】 掷两颗骰子，计算点数之和。

【解】 编写如下程序：

```
rollEm:={Random[Integer,{1,6}],Random[Integer,{1,6}]};
A=Table[rollEm,{100}];
b=Table[0,{100}];
For[i=1,i≤100,i++,
   b[[i]]=A[[i,1]]+A[[i,2]]
   ]
b
```

运行后得到如下数据：

{6,7,9,8,7,5,10,7,8,5,9,6,10,6,12,5,7,10,9,5,5,11,5,11,9,5,5,5,5,3,5,9,2,6,7,6,2,3,2,4,7,5,8,9,6,8,4,6,9,5,8,4,11,4,8,7,8,8,6,9,10,7,8,4,8,7,6,7,2,5,5,5,4,9,6,8,7,7,4,10,4,7,11,8,3,8,7,10,12,4,11,6,8,8,5,7,10,4,6,8}

分组统计频数和计算频率，由此得：

```
bo1=BinCounts[b,{1,12,1}]
bo2=bo1/100//N
BarChart[bo1]
 {4,3,10,17,12,15,16,9,7,5,2}
 {0.04,0.03,0.1,0.17,0.12,0.15,0.16,0.09,0.07,0.05,0.02}
```

由结果可得图 3-11。

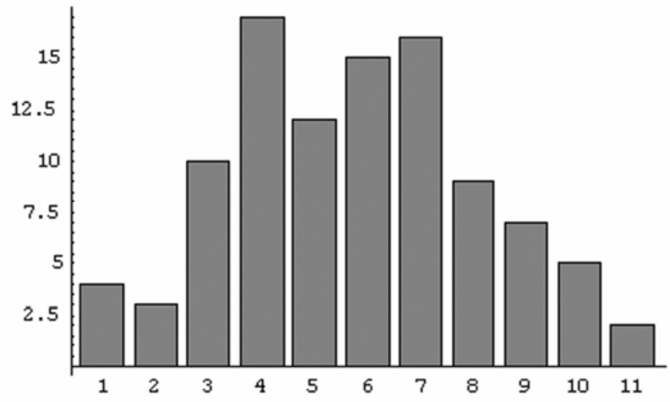


图 3-11

直接计算概率为：

i	2	3	4	5	6	7	8	9
$P\{X=i\}$	0.0127	0.055	0.11	0.11	0.139	0.167	0.139	0.11
i	10	11	12					
$P\{X=i\}$	0.08	0.056	0.027					

由此画出其分布图形如图 3-12 所示。

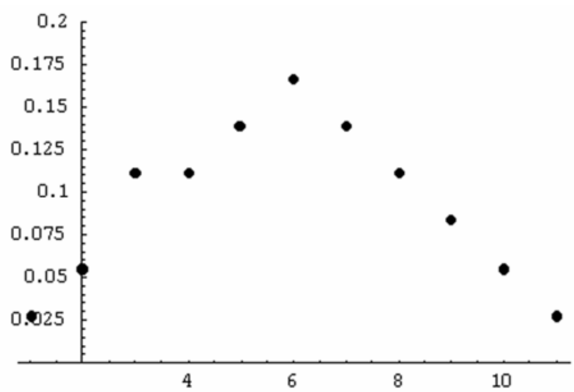


图 3-12

从图 3-12 可以看出：所掷两个骰子点数之和取 7 的概率为最大，而取 2 或 12 的概率为最小。

3．对于连续随机变量的一组观察数据的频率直方图的画法

【例 3-14】　用一台自动包装机打包，假设每包的标准重量为 100 公斤，现从某日

生产的产品中随机抽取 130 包，测得重量如表 3-2 所示。

表 3-2　随机抽取 130 包的重量

101.1	100.6	101.1	101.7	102.4	102.7	103.2	103.7
99.6	99.1	98.6	98.1	97.6	97.1	96.8	97.3
97.7	97.8	98.2	98.3	98.3	98.4	103.1	102.8
102.0	102.5	102.3	101.9	101.2	101.1	99.6	99.7
99.9	99.9	99.1	98.6	102.2	102.1	102.3	100.8
101.7	101.6	102.0	100.8	100.8	100.6	101.5	101.3
101.4	100.9	101.0	102.6	98.6	101.0	100.9	100.8
100.7	100.6	100.7	100.8	101.5	101.4	101.3	101.2
99.4	99.5	99.5	99.4	99.3	99.2	99.1	99.6
100.6	102.0	100.9	100.2	100.3	100.4	100.5	100.3
100.0	100.0	99.9	99.8	99.7	99.6	100.1	100.2
100.3	100.4	100.5	100.3	101.4	102.0	102.1	102.2
100.0	100.0	100.3	100.5	100.4	100.2	100.1	100.2
100.0	102.0	99.9	99.8	98.8	98.9	100.1	100.2
98.6	98.7	98.8	100.3	99.6	98.7	98.4	98.3
99.0	98.6	99.5	99.4	99.3	99.1	102.0	100.1
100.2	100.3						

将区间[96, 104]分成 16 个等分区间，每个区间的大小为 0.5（kg），计算 130 个数据落在各个子区间内的频数和频率。

【解】　编写程序如下：

```
<<Statistics'DataManipulation'
data={101.1,101.6,101.1,101.7,102.4,102.7,103.2,103.7,99.6,99.1,98.6,98.1,97.6,97.1,96.8,97.3,
97.7,97.8,98.2,98.3,98.3,98.4,103.1,102.8,102.0,102.5,102.3,101.9,101.2,101.1,99.6,99.7,99.9,99.9,
99.1,98.6,102.2,102.1,102.3,100.8,101.7,101.6,102.0,100.8,100.8,100.6,101.5,101.3,101.4,100.9,
101.0,102.6,98.6,101.0,100.9,100.8,100.7,100.6,100.7,100.8,101.5,101.4,101.3,101.2,99.4,99.5,
99.5,99.4,99.3,99.2,99.1,99.6,100.6,102.0,100.9,100.2,100.3,100.4,100.5,100.3,100.0,100.0,99.9,
99.8,99.7,99.6,100.1,100.2,100.3,100.4,100.5,100.3,101.4,102.0,102.1,102.2,100.0,100.0,100.3,
100.5,100.4,100.2,100.1,100.2,100.0,102.0,99.9,99.8,98.8,98.9,100.1,100.2,98.6,98.7,98.8,100.3,
99.6,98.7,98.4,98.3,99.0,98.6,99.5,99.4,99.3,99.1,102.0,100.1,100.2,100.3};
Length[data]
b1=BinCounts[data,{96,104,0.5}]
```

b2=b1/130

运行后得结果为：

130

{0,1,2,3,7,10,13,18,23,15,13,11,7,3,2,1}

$$\{0,\frac{1}{130},\frac{1}{65},\frac{3}{130},\frac{7}{130},\frac{1}{13},\frac{1}{10},$$
$$\frac{9}{65},\frac{23}{130},\frac{3}{26},\frac{1}{10},\frac{11}{130},\frac{7}{130},\frac{3}{130},\frac{1}{65},\frac{1}{130}\}$$

最后画出条形图（见图 3-13）。

```
<<Graphics'Graphics'
BarChart[b1,PlotRange–>{0,30}]   (*画出频数图*)
```

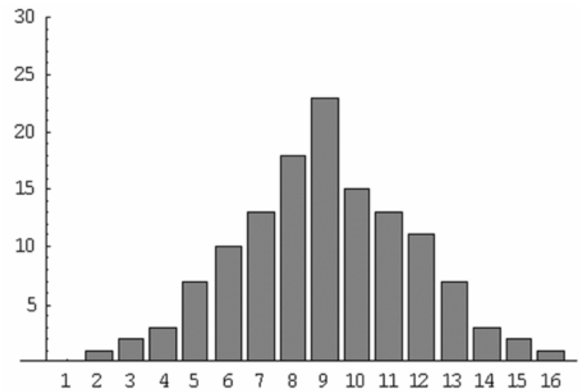


图 3-13

频数图或频率图可以近似看做随机变量分布的概率密度图，从图 3-13 可以看出该图很像是正态分布的概率密度。因此可以认为，该随机变量近似服从正态分布。

习题 3-3

1）在某细纱机上进行断头率测定，该细纱机上的实验锭子总数为 440，测得断头总次数为 292 次。锭子的断头次数记录如表 3-3 所示。

表 3-3　锭子的断头次数记录

每锭断头次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8
实验锭子数	263	112	38	19	3	1	1	0	3

问各锭子的断头次数是否服从泊松分布？

2）在 20 天里，从维尼纶正常生产时的生产报表上看到的维尼纶纤度的 100 个数据如表 3-4 所示。

表 3-4　维尼纶纤度数据

1.36	1.49	1.43	1.41	1.37	1.40	1.32	1.42	1.47	1.39
1.41	1.36	1.40	1.34	1.42	1.42	1.45	1.35	1.42	1.39
1.44	1.42	1.39	1.42	1.42	1.30	1.34	1.42	1.37	1.36
1.37	1.34	1.37	1.37	1.44	1.45	1.32	1.48	1.40	1.45
1.39	1.46	1.39	1.53	1.36	1.48	1.40	1.39	1.38	1.40
1.36	1.45	1.50	1.43	1.38	1.43	1.41	1.48	1.39	1.45
1.37	1.37	1.39	1.45	1.31	1.41	1.44	1.44	1.42	1.47
1.39	1.36	1.39	1.40	1.38	1.35	1.42	1.43	1.42	1.42
1.42	1.40	1.41	1.37	1.46	1.36	1.37	1.27	1.37	1.38
1.42	1.34	1.42	1.42	1.41	1.41	1.44	1.48	1.55	1.37

试判断纤度是否服从正态分布。（可将区间（1.265, 1.565）分成 10 部分，其间隔为 0.03。）

3）投一枚硬币，直到出现正面。该枚硬币在第 k 次投掷时首次出现正面的频数 n_k 如表 3-5 所示。

表 3-5　第 k 次投掷时首次出现正面的频数 n_k

k	1	2	3	4	5	6	≥7
n_k	280	147	86	38	15	13	7

问：你是否相信该枚硬币“出正面”的概率等于 1/2？

实验 3-4　蒙特-卡洛方法

一、问题的提出

蒙特-卡洛（Monte-Carle）原是一个赌场的名字，这里只是引用它作为应用偶然性机制解决数学问题的代名词。

（1）假定鱼塘位于一块面积已知的农田里（见图 3-14），随机地向农田内扔石头，可能有的石头落在水塘之中，有的落在水塘之外。若溅水的所扔石头数为 k，则 k 与所扔石头总数 n 的比可以看做是水塘面积与整个农田面积的比的近似值。因此将农田总面积乘以比值 k/n 就得到鱼塘的面积。当然，这里 n 的数值应当相当大。

这种用偶然性机制来测量面积的方法就是蒙特-卡洛方法。

（2）现在假定在 [a,b] 区间上定义了一个非负连续函数 $f(x)$（见图 3-15），则曲边梯形 $ABCD$ 的面积可以表成

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

可以用蒙特-卡洛方法来估计这一面积的近似值。

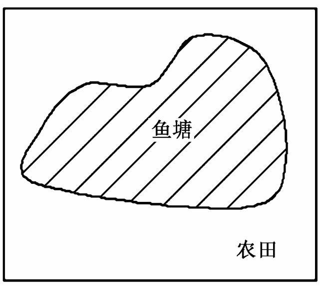


图 3-14

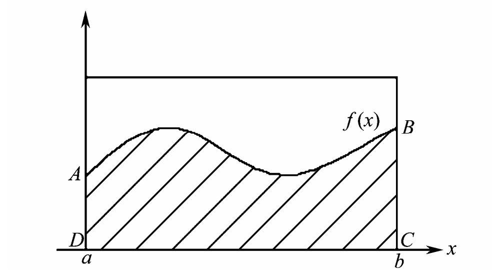


图 3-15

二、实验的理论和方法

我们随机取 n 个数对 (x_i, y_i)　　$(i=1, 2, \cdots, n)$，其中　$a<x_i<b$, $0<y_i<b-a$，对于每个 i 值，如果 $y_i<f(x_i)$，则 (x_i, y_i) 点落在曲边梯形 $ABCD$ 内，这种点的数字 k 与总数 n 之比 k/n 即表示曲边梯形 $ABCD$ 的面积与总面积 $(b-a)^2$ 之比。于是有

$$S_{ABCD}=\frac{k}{n}(b-a)^2$$

（1）设（X, Y）服从区间 $[a, b; 0, b-a]$上的均匀分布，则(X, Y)落在矩形中某个区域 D 内的概率 $P(D)$为

$$P(D)=\frac{S(D)}{S(\Omega)}=\frac{S(D)}{(b-a)^2}$$

（2）根据概率的统计定义，事件“（X, Y）落在 D 内”的频率为 k/n，当 n 越来越大的时候，其值会逐渐稳定在某个数 p 的附近，p 即为这个事件的概率。因此可以将 k/n 近似地看做概率的近似值。

$$S(D)\approx\frac{k}{n}(b-a)^2$$

三、实验内容

求在区间[0, π]上正弦曲线与横轴所围的面积。

依题意，先写出画图的 Mathematica 程序如下：

```
p1=Graphics[Plot[Sin[x],{x,0,Pi},PlotStyle–>RGBColor[1,0,0],DisplayFunction–>Identity]]
p2=Line[{{0,Pi},{Pi,Pi}}]
p3=Line[{{Pi,0},{Pi,Pi}}]
P=Table[Point[{Random[Real,{0,Pi}],Random[Real,{0,Pi}]}], {i,1,1000}];
Show[p1,Graphics[P],Graphics[p2],Graphics[p3],Axes–>True,
  DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

说明：程序中的变量 P 是指构造 1000 个分布在矩形$[0,\pi;\ 0,\pi]$中随机点的坐标。

该程序运行后画出矩形、正弦曲线和随机点的图形，如图 3-16 所示。

编写模拟求面积的程序如下：

```
a=0;b=Pi;
f[x_]:=Sin[x]
k=0;n=Input["n="]
For[i=1,i≤n,i++,
   x=a+(b–a)∗Random[Real,{0,1}];
   y=(b–a)∗Random[Real,{0,1}];
   If[y<=f[x],k=k+1]
   ]
k/n
```

```
s=(b−a)^2*k/n;
Print["S=",N[s,6]]
```

50000

$\frac{5057}{25000}$

S= 1.99642

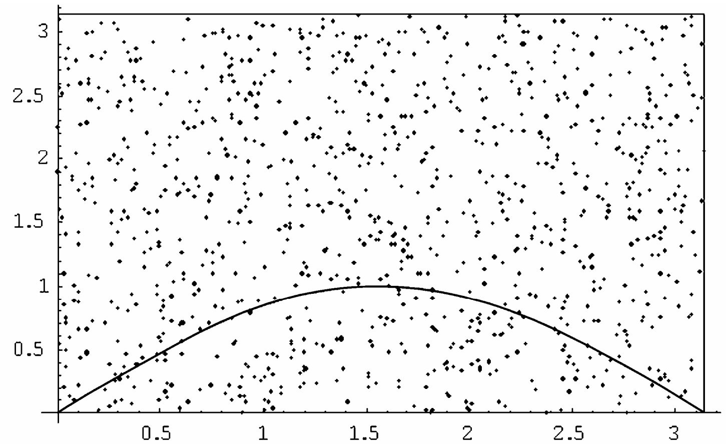


图 3-16

运行上面的程序，输入不同的 n 值（n 应当取得大一些），重复几次，可以得出所求面积的近似值在 2 的周围变化。

习题 3-4

1）如何用蒙特-卡洛方法求单位圆（见图 3-17）的面积？给出一种求π的近似值的概率方法。

2）如何用蒙特-卡洛方法求半径为 a 的球的体积？叙述你的想法，并试着用 Mathematica 语言编写一个程序在计算机上进行实验。

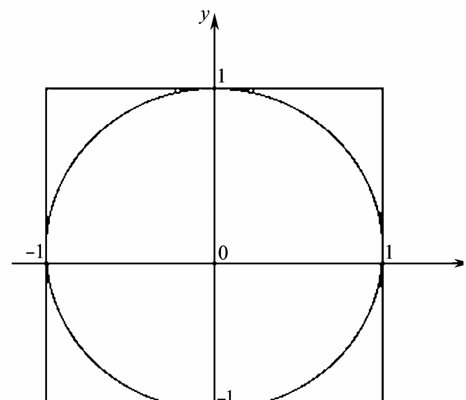


图 3-17

实验 3-5　区间估计与假设检验

一、问题的提出

区间估计与假设检验是数理统计中重要的内容，也是计算量很大的问题，从前在这方面的教学中都是使用计算器和查表，非常麻烦。现在可以直接使用 Mathematica 中专门的统计软件包 Statistics 在计算机上方便而快捷地进行计算。

二、实验目的

（1）了解对总体数学期望的区间估计；
（2）了解对总体方差的区间估计；
（3）了解对总体数学期望的假设检验；
（4）了解对总体方差的假设检验；
（5）学习离散随机变量的分布假设检验。

三、实验内容

1．总体数学期望的区间估计

1）单个总体数学期望的区间估计

首先要调用外部程序 ConfidenceIntervals.m，该程序在统计软件包 Statistics 中。

（1）假定有单个总体其总体分布服从正态分布，且方差已知，求总体数学期望的置信区间。

因为 $X \sim N\{\mu,\sigma^2\},\sigma^2$ 为已知，所以有

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,\ 1)$$

取 $\alpha=0.05$，则置信区间为 $(\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$。

因方差已知，求总体数学期望的置信区间的函数为 MeanCI[data,KnownVariance–>

var]，其中参数 var 是方差的值，置信度默认为 0.05。可以用改变参数的方法设置置信度，其参数为 ConfidenceLevel。

如果已知标准差，则函数中的参数 KnownVariance 可改为使用 KnownStandard Deviation。

【例 3-15】 已知某炼铁厂的铁水含碳量（%）服从正态分布，其方差 $\sigma = 0.108$，共抽得 5 炉铁水的数据如下：

序号	1	2	3	4	5
铁水含碳量（%）	4.28	4.4	4.42	4.35	4.37

求平均含碳量的置信区间（置信度为 0.05）。

【解】 依题意编写程序并运行如下：

```
<<Statistics'ConfidenceIntervals'
datal={4.28,4.4,4.42,4.35,4.37};
MeanCI[datal,KnownVariance–>0.108^2](*已知方差*)
    {4.26934,4.45866}
```

（2）假定有单个总体其总体分布服从正态分布，且方差未知，求总体数学期望的置信区间。

当方差未知时，可用方差的无偏估计量代替它，因而有

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t(n-1)$$

所以，置信区间为 $(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}})$；因方差未知，求总体期望的置信区间函数为 MeanCI[data]。

同样，如果已知标准差，则求总体数学期望的置信区间函数的参数 KnownVariance 可改为使用 KnownStandardDeviation。

【例 3-16】 假定新生男婴的体重服从正态分布，且方差未知，当抽得一个容量为 12 的样本为 3100, 2520, 3000, 3000, 3600, 3160, 3560, 3320, 2880, 2600, 3400, 2540 时，试求新生男婴平均体重的置信区间。

【解】 依题意编写如下程序并运行：

```
data2={3100,2520,3000,3000,3600,3160,3560,3320,2880,2600,3400,2540};
MeanCI[data] (*未知方差*)
{2818.2,3295.13}
```

2）两个总体数学期望之差的区间估计

假定有两个服从正态分布的随机变量，已知方差分别为 var1，var2，通过数据表求两个总体数学期望之差的置信区间（基于正态分布）。

这类问题可利用统计量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

计算。所以，置信区间为 $\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$。

已知方差分别为 var1, var2，求两个总体数学期望之差的置信区间的函数为：

```
MeanDifferenceCI[data1,data2,KnownVariance–>{var1,var2}]
```

如果方差未知，则基于 t 分布有

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

置信区间为

$$(\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

其函数为 MeanDifferenceCI[data1,data2]。

以上两个函数有两个可选项：

（1）方差 KnownVariance 改为使用标准差 KnownStandardDeviation 来代替。

（2）在函数 MeanDifferenceCI[data1,data2]中如果添加选项 EqualVariances–>True 时，表示方差相等；当其参数值为默认时则为 False。

【例 3-17】　为估计磷肥对某种农作物的增产作用，需做对比试验。经调查，发现十块田不施肥的产量分别为 560, 590, 560, 570, 580, 570, 600, 550, 570, 550 公斤；另外十块田施肥的产量分别为 620, 570, 650, 600, 630, 580, 570, 600, 600, 580 公斤。

假设在两种情况下的产量都服从正态分布，且方差相同，求施肥与不施肥田的平均亩产量之差的置信区间。

【解】　依题意编写程序并运行如下：

```
data1={560,590,560,570,580,570,600,550,570,550};
data2={620,570,650,600,630,580,570,600,600,580};
MeanDifferenceCI[data2,data1,EqualVariances–>True] (*假定方差相等*)
{9.22553,50.7745}
MeanDifferenceCI[data2,data1] (*不假定方差相等*)
```

{8.91354,51.0865}

2．总体方差的区间估计

1）单个总体方差的区间估计

假定总体分布服从正态分布，且总体数学期望μ为未知，求总体方差σ^2的置信区间。

利用$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$\sigma^2$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right)$$

因为总体数学期望μ未知，则求总体方差σ^2的置值区间的函数为 VarianceCI[data]。如果用无偏估计样本方差 variance，则需用函数 ChiSquareCI[variance,dof]，其中参数 dof 为自由度（n–1）。

【例 3-18】　试求例 3-16 中新生男婴平均体重方差的置信区间$(\alpha = 0.05)$。

【解】　依题意编程并运行如下：

```
VarianceCI[{3100,2520,3000,3000,3600,3160,3560,3320,2880,2600,3400,2540}]
{70687.2,406072.}
```

2）两个总体方差比的区间估计

利用统计量$\dfrac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$，可以得出$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} \right)$$

求两个总体方差比的区间估计的函数为 VarianceRatioCI[data1,data2]。如果已知两个无偏估计样本方差之比 ratio，则用函数 FratioCI[ratio,numdof,dendof]，其中参数 numdof 和 dendof 分别为分子和分母的自由度。

【例 3-19】　假定有两个服从正态分布的总体，其参数均为未知，依此取容量为 13 和 10 的两个独立样本，测得样本方差为$s_1^2 = 8.41$，$s_2^2 = 5.29$，求两总体方差比的置信区间$(\alpha = 0.05)$。

【解】　依题意编程并运行如下：

```
FRatioCI[8.41/5.29,12,9]
     {0.410988, 5.46228}
```

3．总体数学期望的假设检验

总体数学期望的假设检验首先要调用外部程序包 HypothesisTests.m，该文件在统计软件包 Statistics 中。

1）单个总体数学期望的假设检验

已知方差 var 检验总体数学期望的函数为 MeanTest[data, μ , KnownVariance–>var, SignificanceLevel–>0.05, TwoSided–>True, FullReport–>True]]，其中参数 SignificanceLevel 是可选项，它给出显著性水平；参数 TwoSided–>True 表示双侧的概率，其默认值是 False（单侧）；而参数 FullReport 为 True 时则给出详细的结果。

【例 3-20】　某食品厂使用自动装罐机生产罐头，其罐头每罐标准重量是 500 克，标准差为 10 克，现抽取 10 罐，测得重量分别为 495, 510, 505, 498, 530, 492, 502, 512, 497, 506。假定罐头重量服从正态分布，其检验的显著性水平取 0.05，问机器工作是否正常？

【解】　依题意编程并运行如下：

```
data3={495,510,505,498,503,492,502,512,497,506};
MeanTest[data3,500,KnownVariance–>10^2,SignificanceLevel–>0.05,
 TwoSided–>True,FullReport–>True]
```

运行结果为：

```
{FullReport–> Mean    TestStat    Distribution
              502.    0.632456    NormalDistribution[]′
TwoSidedPValue–>0.527089,
Fail to reject null hypothesis at significance level–>0.05}
```

由于系统给出样本均值 $\bar{x}=502$ ，其统计量的值 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\approx 0.632456$ ，双侧概率 $P\{|U|<u\}=0.527089$ ，所以在显著性水平 0.05 情况下，接受假设，即机器工作正常。

2）两个总体数学期望之差的假设检验

两个总体数学期望之差的假设检验函数为：

```
MeanDifferenceTest[data1,data2,diff,KnownVariance–>{var1,var2}]
MeanDifferenceTest[data1,data2,diff] (*方差未知*)
```

其中，第一个函数适用于方差已知的情况，此时统计量服从正态分布；第二个函数适用于方差未知的情况，此时统计服从 t 分布。当两个总体方差相等时，可以将参数 EqualVariances 设为 True。

【例 3-21】　卷烟一厂向化验室送去 A, B 两种烟草，化验其尼古丁含量是否相同。化验室从 A, B 两种烟草中各抽取重量相同的 5 例进行化验，测得尼古丁含量分别如下所示（单位：mg）。

A：24, 27, 26, 21, 24；

B：27, 28, 23, 31, 26。

假设尼古丁含量服从正态分布，且 A 种烟草的方差为 5，B 种烟草的方差为 8，问两种烟草的尼古丁含量是否有差异？

【解】　假设 $\mu_1 = \mu_2$，编写程序如下：

```
data4={24,27,26,21,24};
data5={27,28,23,31,26};
MeanDifferenceTest[data4,data5,0,EqualVariances–>True,
  SignificanceLevel–>0.05, TwoSided–>True,FullReport–>True]
```

运行结果为：

```
{FullReport–> MeanDiff    TestStat    Distribution
              –2.6        –1.56502    StudentTDistribution[8]′
TwoSidedPValue–>0.15621,
Fail to reject null hypothesis at significance level–>0.05}
```

由于系统给出样本均值之差 $x_1 - x_2 = -2.6$，统计量的值 $z = -1.56502$，双侧概率为 $P\{|z| < 0.975\} = 0.15621$ >0.05，所以可以接受假设，即认为两种烟草的尼古丁含量无差异。

4．总体方差的假设检验

（1）由抽样数据检验总体的方差是否等于某给定值 var，利用 χ^2 统计量来计算。

【例 3-22】　检验例 3-20 中罐头重量的标准差是否为 10 克 $(\alpha = 0.05)$？

【解】　依题意编写程序如下：

```
data3={495,510,505,498,503,492,502,512,497,506};
VarianceTest[data3,100,TwoSided–>True,SignificanceLevel–>0.05,
 FullReport–>True]
```

运行结果为：

```
{FullReport–> Variance    TestStat    Distribution
              42.2222     3.8         ChiSquareDistribution[9]′
TwoSidedPValue–>0.151848,
Fail to reject null hypothesis at significance level–>0.05}
```

由于系统给出的双侧概率为 0.151848，大于 0.05，所以可以接受假设，即认为标准差等于 10 克。

（2）两个总体方差比的假设检验。

两个总体方差比的假设检验可以利用 F 统计量，即

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

在 Mathematica 中两个总体方差比的假设检验函数为：

```
VarianceRatioTest[data1,data2,ratio,TwoSided–>True,SignificanceLevel–>0.05,FullReport–>True]
```

当方差相等时，可令参数 ratio 的值等于 1。

【例 3-23】　某车间甲、乙两台机器加工同一种轴，现测量甲、乙加工的轴的直径（单位：mm），抽取样本结果如下所示。

甲：20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9；

乙：19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2。

设轴的直径均服从正态分布，检验甲、乙两台机器的加工精度有无显著差异（显著性水平为 $\alpha=0.05$）。

【解】　假定两个总体的方差相等，令 ratio 的值等于 1，编写程序如下：

```
(*test9*)
data1={20.5,19.8,19.7,20.4,20.1,20.0,19.0,19.9};
data2={19.7,20.8,20.5,19.8,19.4,20.6,19.2};
VarianceRatioTest[data1,data2,1,TwoSided–>True,SignificanceLevel–>0.05,
 FullReport–>True]
```

运行结果为：

```
{FullReport–> Ratio      TestStat   Distribution
              0.545618   0.545618   FRatioDistribution[7,6]′
TwoSidedPValue–>0.446195,
Fail to reject null hypothesis at significance level–>0.05}
```

由于双侧概率为 0.446195，大于 0.05，所以可以接受假设，即甲、已两台机器的加工精度无显著差异。

5．分布假设检验

给定一组数据，假设它们来自某个离散型总体，提出原假设

$$H_0: P\{X=x_i\}=p_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots$$

根据皮尔逊定理，可以选取

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2(m-k-1)$$

作为检验 H_0 是否成立的统计量。对给定的显著性水平 α，若

$$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(m-k-1)$$

则拒绝 H_0，否则接受 H_0。

【例 3-24】　某工厂在 5 年中发生了 63 次事故，按发生事故的时间（在星期几）进行分类如下：

星期 i	1	2	3	4	5	6
事故次数	9	10	11	8	13	12

试问事故的发生与时间（星期几）是否有关($\alpha = 0.05$)?

【解】　设 X 表示事故发生的日期，由题意要检验的假设为

$$H_0: P\{X = i\} = 1/6 \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

编程并运行：

```
ni={9,10,11,8,13,12};
n=63;
pi=1/6;
kafang=∑_{i=1}^{6}(ni[[i]]–n*pi)^2/(n*pi)//N
```

运行结果为：

```
1.66667
```

取 $\alpha = 0.05$，继续运算：

```
f[x_]:=CDF[ChiSquareDistribution[5],x]
NSolve[f[x]==0.95,x]
{{x–>11.0705}}
```

因 kafangd 的值大于 11.07，故不能拒绝 H_0，所以认为事故的发生与时间（星期几）没有明显的关系。

对于连续型随机变量的总体，其零假设为 H_0、总体 X 的分布密度为 $f(x)$ 的情况在 Statistics 中也没有给出相应的函数。

习题 3-5

1）设某零件长度服从正态分布，现随机抽取其中的 16 个，并分别测得长度如下：

2.14	2.10	2.13	2.15	2.13	2.12	2.13	2.10
2.15	2.12	2.14	2.10	2.13	2.11	2.14	2.11

求总体均值的置信区间：①已知 $\sigma = 0.01$；② σ 未知。

2）用铂球测定引力系数（单位：$10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$）后得一组观察值如下：

6.661　6.661　6.676　6.667　6.664

设测定值总体服从正态分布，且 μ,σ^2 均为未知。试求 μ,σ^2 的置信区间 $(\alpha=0.05)$。

3）假设某种零件重量为 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\ \mu=15,\ \sigma^2=0.05$，技术革新后，分别抽取了 6 个样品，测得重量分别为（单们为 g）：

14.7　15.1　14.8　15.0　15.2　14.6

假定方差不变，试问平均重量是否仍为 15g $(\alpha=0.05)$。

实验 3-6　回 归 分 析

一、问题的提出

回归分析方法是数据处理中最常用的方法，我们希望通过科学研究或工程实验中得到的数据找出变量之间的某种近似关系，并对这个关系式作出评价，如果具有可信度的话，就可以用来进行预测。

本实验首先介绍在经济领域常见的线性回归分析，然后对于更复杂的情况加以讨论。

二、实验目的

（1）学会一元线性回归分析的计算机算法；

（2）学会多元线性回归分析的计算机算法；

（3）学习非线性回归分析的计算机算法。

三、实验内容

1．线性回归分析

线性回归分析的程序在 Mathematica 的统计程序包 Statistics 中，其文件为 LinearRegression.m。

线性回归分析的函数为 Regress[data,funs,vars]，其中 data 为数据表，funs 为基函数表，vars 为基函数中的自变量表。

【例 3-25】　研究粘虫的生长过程，测得一组数据如表 3-6 所示。

表 3-6　粘虫生长过程的平均温度和历期

平均温度 T	11.8	14.7	15.4	16.5	17.1	18.1	19.8	20.3
历　　期 N	30.4	15.0	13.8	12.7	10.7	7.5	6.8	5.7

表 3-6 中历期 N 为卵块孵化成幼虫的天数，T 为历期内每日平均温度的算术平均值。

昆虫学家认为 N 与 T 之间有以下关系，即

$$N = \frac{k}{T-c} + \varepsilon$$

试求出 k, c 的估计值。

【解】

先进行一个变换，令 $\frac{1}{N} = \frac{T-c}{k}$，记 $Y = \frac{1}{N}$，$b = \frac{1}{k}$，$a = -kc$，则有

$$y = bT + a$$

即 y 与 T 成线性关系。

进入 Mathematica 系统，从统计软件包中调出线性回归分析命令，编写如下程序：

```
<<Statistics'LinearRegression'
data={{11.8,0.032895},{14.7,0.066667},{15.4,0.072464},
   {16.5,0.078740},{17.1,0.093458},{18.1,0.1333333},
   {19.8,0.147059},{21.3,0.175439}}
ListPlot[data]
Regress[data,{1,x},x]
```

运行后得以下数据和图 3-18。

```
{{11.8',0.032895'},{14.7',0.066667'},{15.4',0.072464'},
 {16.5',0.07874'},{17.1',0.093458'},{18.1',0.1333333'},
 {19.8',0.147059'},{21.3',0.175439'}}
```

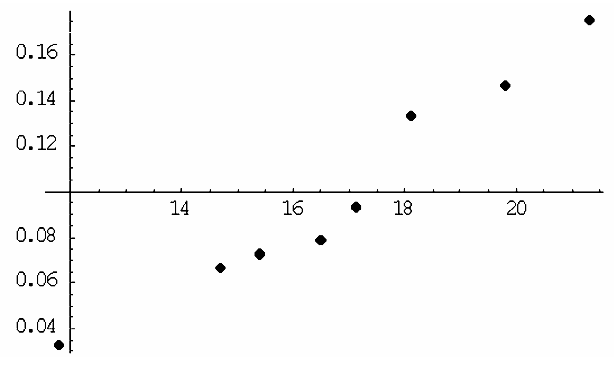


图 3-18

{ParameterTable–>

""	"Estimate"	"SE"	"TStat"	"PValue"
1	-0.162067'	0.024101'	-6.724563'	0.000526',
x	0.015565'	0.001412'	11.022869'	0.000033'

RSquared–>0.952943',AdjustedRSquared–>0.9450993',

EstimatedVariance–>0.000125',

ANOVATable→

""	"DF"	"SumOfsq"	"MeanSq"
"Model"	1	0.015136'	0.015136'
"Error"	6	0.000747'	0.000125'
"Total"	7	0.015884'	""

"FRatio"	"PValue"
121.503638'	0.000033'
""	""
""	""

}

说明：在上述参数表 ParameterTable 的 Estimate 列中，第一行给出了回归常数 $\hat{a}$，第二行给出了回归系数 $\hat{b}$，即 $\hat{a}$ = -0.162067, $\hat{b}$=0.015565；而在表的 TStat 列中，第二行给出了统计量

$$t=\frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}}\sqrt{L_{xx}}$$

的观察值，即

$$t=11.022869$$

参数表下面的 Rsquared 是相关系数 r 的平方值，即

$$r^2=0.952943$$

再下面是方差分析表 ANOVATable，其中；第一列（数字）的 DF 表示自由度；第二列（数字）的 SumOfsq 表示平方和，它的第一行为回归平方和，即 U=0.015136，它的第二行为残差平方和，即 Q=0.000747；它的第三行为总离差平方和，即 Lyy=0.015884；第三列（数字）的 MeanSq 的第二行表示方差的无偏估计，即 $\hat{\sigma}^2=0.000125$；第四列（数字）的 Fratio 是 F 统计量的观察值，即

$$F=(n-2)\frac{U}{Q}=(n-2)\frac{r^2}{1-r^2}=121.503638$$

再键入程序并运行：

```
a=-0.162067;
b=0.0155649;
k=1/b
c=-k*a
Print["N=", k, "/(T-", c, ")"]
t=11.0229;
StudentTCI[b,b/t,6]
```

64.2471

10.4123

N=64.2471/(T-10.4123)

程序运行后输出的最后一行是曲线方程，即 $N = \dfrac{64.2471}{T - 10.4123}$，输出回归系数 $\hat{b}$ 的置信度为 95%的置信区间{0.0121097, 0.0190201}。

2．多元回归分析

【例 3-26】 在某项钢材的实验中测得的数据如表 3-7 所示。

表 3-7　某项钢材实验中测得的数据

含碳量 x_1	回火温度 x_2	伸长率 y	含碳量 x_1	回火温度 x_2	伸长率 y
57	535	19.25	58	490	17.25
64	535	17.50	57	460	16.75
69	535	18.25	64	435	14.75
58	460	16.25	69	460	12.00
58	460	17.00	59	490	17.75
58	460	16.75	64	467	15.50
58	490	17.00	69	490	15.50
58	490	16.75			

假定 y 关于 x_1, x_2 有二元线性关系，试求其回归方程并检验回归的显著性。

【解】 依题意编写程序并运行如下：

```
<<Statistics'LinearRegression'
data={{57,535,19.25},{58,490,17.25},{64,535,17.50},{57,460,16.75},{69,535,18.25},{64,435,
14.75},{58,460,16.25},{69,460,12.00},{58,460,17.00},{59,490,17.75},{58,460,16.75},{64,467,
15.50},{58,490,17.00},{69,490,15.50},{58,490,16.75}};
Regress[data,{x1,x2},{x1,x2}]
```

运行结果为：

```
{ParameterTable–>
          Estimate     SE           TStat      PValue
    1     10.5144      4.28014      2.45656    0.030228
    x1    -0.216215    0.0480261    -4.50203   0.000724093
    x2    0.0398858    0.00723227   5.51498    0.000133023
RSquared–>0.789661,AdjustedRSquared–>0.754605,
EstimatedVariance–>0.697185,ANOVATable–>
```

	DF	SumOfSq	MeanSq	FRatio	PValue
Model	2	31.4088	15.7044	22.5254	0.0000865993
Error	12	8.36622	0.697185		
Total	14	39.775}			

其回归方程为：

$$y = 10.5144 - 0.216215x_1 + 0.0398858x_2$$

从 Pvalue 值可以看出线性回归的效果是显著的。

3. 非线性拟合与非线性回归

【例 3-27】　由实验得出的一组数据如表 3-8 所示。

表 3-8　实验数据

x_1	x_2	y
1.0	1.0	0.126
2.0	1.0	0.219
1.0	2.0	0.076
2.0	2.0	0.126
0.1	0.0	0.186

假定有关系式 $y = \dfrac{acx_1}{1 + ax_1 + bx_2}$ 存在，试求回归方程。

【解】　根据题意编写程序并运行如下：

```
<<Statistics'NonlinearFit'
data={{1.0,1.0,.126},{2.0,1.0,.219},
{1.0,2.0, .076},{2.0,2.0, .126},{.1, .0, .186}};
NonlinearFit[data,
theta1 theta3 x1/(1+theta1 x1+theta2 x2),
{x1,x2},{theta1,theta2,theta3}]
         2.44277 x1
1+3.13151 x1+15.1594 x2
```

上面的公式为系统给出的回归方程。继续键入如下命令：

```
NonlinearRegress[data,theta1 theta3 x1/(1+theta1 x1+theta2 x2),{x1,x2},{theta1,theta2,theta3}]
```

运行后系统给出详细结果如下：

```
{BestFitParameters–>{theta1–>3.13151,
  theta2–>15.1594, theta3–>0.780063},ParameterCITable–>
                    Estimate            Asymptotic SE          CT
```

theta1	3.13151	0.808417	{-0.346832,6.60984}
theta2	15.1594	0.631224	{12.4434,17.8753}
theta3	0.780063	0.151797	{0.126932,1.43319}

EstimatedVariance–>0.0000217763,ANOVATable–>

	DF	SumOfSq	MeanSq
Model	3	0.120041	0.0400138
Error	2	0.0000435527	0.0000217763,
Uncorrected Total	5	0.120085	
Corrected Total	4	0.0126272	

$$\text{AsymptoticCorrelationMatrix}\text{–>}\begin{pmatrix} 1. & 0.287015 & -0.99183 \\ 0.287015 & 1. & -0.182021 \\ -0.99183 & -0.182021 & 1. \end{pmatrix},$$

FitCurvatureTable–>

		Curvature
Max	Intrinsic	0.037467
Max	Parameter - Effects	12.8161
95.%	Confidence Region	0.22843

习题 3-6

1）已知某商品的价格与日销售量之间的一组数据如表 3-9 所示。

表 3-9 商品价格与日销售量的一组数据

价格（元）	1.0	2.0	2.0	2.3	2.5	2.6	2.8	3.0	3.3	3.5
销量（500g）	5.0	3.5	3.0	2.7	2.4	2.5	2.0	1.5	1.2	1.2

试求回归方程并做出显著性检验报告。

2）一册书的成本费与印刷的总册数有关，其统计数据如表 3-10 所示。

表 3-10 书的相关统计数据

X_i（千册）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i（元）	10.15	5.52	4.08	2.85	2.11	1.62	1.41	1.30	1.21	1.15

其中 X_i 为印刷册数，Y_i 为一册书的成本费。检验成本费与印刷册数的倒数 $\dfrac{1}{X}$ 之间是否存在显著的线性相关关系，如果存在，试求 Y 对 X 的回归方程。

第 4 篇
数学软件 Mathematica

Mathematica 是 1988 年美国 Wolfram Research 公司开发成功的综合数学软件包。在 10 年间，由美国物理学家 Stephen Wplfram 领导下的一个小组将其版本从 Ms doc 386 V12 升级到 V2.0 Fo Windows，又升级到 V3.0 For Windows，如今 V4.0 For Windows 版本已经在世界上广为流行。据称，在美国，每年有几千万人使用着 Mathematica 的不同版本。

Mathematica 最早是用于量子力学研究的，后来主要用于工程计算领域。它能够处理一些基本的数学计算，比如求极限、求微分、求积分、解微分方程等，特别是 Mathematica 面向的使用对象是具有一定的数学知识但并不具有很多的计算机知识的研究工作者。因此目前在科研和高等学校中也有着广泛的应用。

Mathematica 是第一个将数值计算、符号运算和图形显示结合在一起的数学软件。和其他数学软件如“MATLIB”，“Mathcad”相比较，Mathematica 显得格外小巧，而且，功能也毫不逊色。Mathematica 的主要特点包括：

（1）Mathematica 是人-机对话式的软件，使用者在 Mathematica 的 Notbook 环境下输入表达式命令后，系统可以立即进行处理，然后返回结果。用户不必关心中间的计算过程。其交互性能非常好。

（2）Mathematica 在进行数值计算时，能尽可能地保持计算的精确度。它对整数运算的结果不受字段长的限制，而对实数运算结果则可以按使用者的需要，给出任意位的有效数字。

（3）Mathematica 的符号运算功能是最突出的。当使用者输入一个表达式后，系统在大量的对应法则中去寻找最好的等价结果。比如，Mathematica 可以进行多项式的因式分解，求函数的导函数，求不定积分等。

（4）Mathematica 不仅可以进行基本的计算，还可以进行图形处理，用 Mathematica 可以绘出精美的二三维图形。Mathematica 也能对声音进行处理，也就是说，它可以让一个函数产生一个声音，并且输出表示该声音的波形。

下面，分别来介绍这个软件的主要功能。

4.1　Mathematica 入门

4.1.1　Mathematica 的启动

正确安装 Mathematica 4.0 的软件，会在相应的文件夹 Mathematica 4 中出现 Mathematica.exe 的徽章图标 ，在开始菜单里将鼠标移向“程序”，就会看见该文件夹。通常为了方便，可以将其快捷方式拖到桌面上。每次用鼠标双击该图标，就会出现如图 4-1 所示的窗口，表示 Mathematica 已经启动。

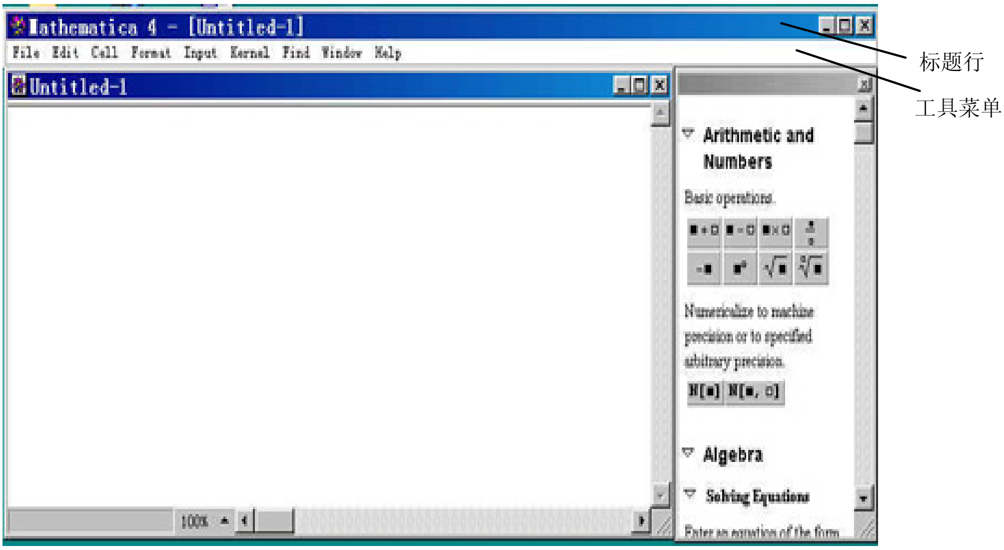


图 4-1　Mathematica 主界面窗口

Mathematica 主界面窗口和一般的 Windows 软件窗口很相似，它也可以进行拖动、放大、缩小操作。要退出系统，只要单击右上角的关闭按钮。也可以选择“File”菜单，再选“Exit”菜单项即可。

4.1.2　Mathematica 的工作环境

在主窗口上方是工作条，第一行为标题行，显示所使用的 Notebook 文件名，初次打开时开始显示为 Untitleb–1。第二行为工具菜单（也称工具条）。Notebook 窗口与工作条是独立的，可以关闭 Notebook 窗口，只留下工具条，也可以打开多个工作窗口，而这些窗口也可以是分开的，在 Windows 菜单中可以设置窗口的排列方式。

1．工具条(见图 4-2)

图 4-2　工具条

工具条上有 9 个菜单项。单击菜单项会弹出下拉式菜单。下面重点讲解其中 8 个菜单项的常用的命令。

（1）File 菜单是文件管理菜单。它的主要功能是新建文件、打开或关闭文件以及保存文件等功能。在它的第三个区里有一个选项板“Palettes”，当鼠标指向它时，会弹出下一级子菜单。

（2）Edit 为编辑命令菜单。常用的命令有 cut 剪切、copy 复制、paste 粘贴、select All 全选以及 Undo 取消等。

（3）Cell 为“细胞”菜单，“细胞”是指工作窗输入的一组命令及其输出的一组结果，在其左边用“]”标识。该菜单主要是设置细胞的风格，但是在这个菜单的第三区中列出了关于动画和声音的命令。

（4）Format 是格式菜单。Mathematica 支持多种输入格式，如支持汉字输入。使用时，首先要选定“细胞”，将鼠标在标记“]”处点黑，然后在 Format 菜单中单击“Choose Font”，之后系统会弹出字体对话框，将默认字体 Courier New 改为所需要的中文字体即可。还可以对“细胞”的背景颜色、是否加框等加以设置。

（5）Kernel 是执行计算菜单。当输入完表达式后，选取 kernrl 菜单中的 Evaluate cells 项，就可对鼠标所停留处的“细胞”执行计算任务。通常使用快捷方式 Shift+Enter。

（6）Find 为搜索与替换菜单。

（7）Windows 是窗口设置菜单。它可以将同时打开的窗口层叠、垂直或水平摆放，以方便使用。如 Stack Windows 层叠、Tile Windows wide 垂直排列、Tile Windows Tall 水平排列。

（8）Help 是帮助菜单，使用时可打开“help Browser”项，以获得系统帮助文件。Mathematica 的帮助文件是一个名副其实的使用手册，使用者可以在其中了解系统所有函数、命令的使用格式和功能。当使用时，只要在窗口内输入命令项，系统就可显示该命令的使用方法及相关信息。

2．Notebook 窗口

启动 Mathematica，用鼠标单击工作窗，此时工作窗上方的标题栏呈高亮方式，表明工作窗已经激活。这时就可以从键盘向系统发出命令了。如在 Notebook 窗口输入命令，输入计算式 N[Pi,100]，然后同时按下 Shift+Enter 键，系统即可进行运算并输出结果，此时屏幕显示如图 4-3 所示。

在第一次执行命令时，Mathematica 的执行速度会慢一些，并显示“Running…Untitled–1”等信息。当使用者输入一个表达式或一个命令后，系统将输入数据记录在案，并使用“In[n]”编号，而输出结果用“Out[n]”编号，第 n 个计算结果和第 n 个输出内容相对应。如果要同时执行几个“细胞”，则用鼠标在“]”处选中，再按“Shift+Enter”键。

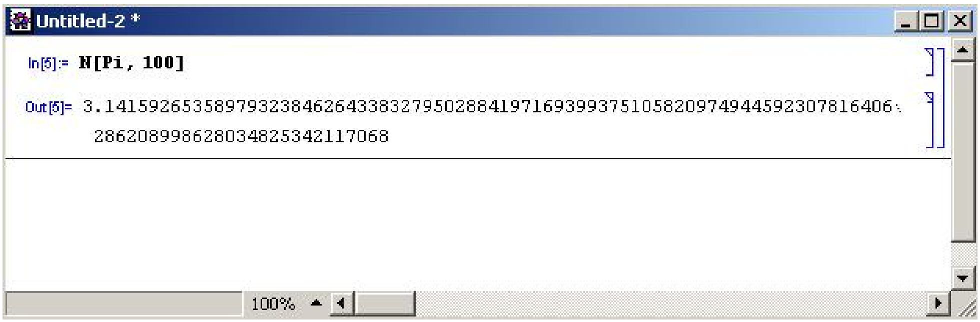


图 4-3　显示计算结果窗口

4.1.3　Mathematica 的语法要求

（1）系统的函数（命令）要求区分英文大小写，且第一个字母要大写，而自变量要求放在方括号“[　]”内。

（2）注释语句要放在（*　*）中间。在运行时系统不执行这部分内容。

（3）变量名最好用小写，以避免与系统变量冲突，比如大写 C 和 D 都不能用做变量名。

（4）若输入键盘上没有的字符或数学记号，可以单击 File 菜单中 Palettes 项里的“Basic Input”，以打开特殊符号表单。

（5）乘法记号为“*”，两个式子相乘中间要键入“*”，但也可用空格，Mathematica 的空格用法很特殊，要加以注意。

（6）Mathematica 的标点符号必须是在英文状态下输入。在一行指令后加上“ ; ”，表示运算但不显示结果。“（　）”仅用来改变运算次序。“{　}”则用于命令中的选项或表示集合。

（7）当一行命令过长时，可以用“Enter”键换行，一般在标点符号后换行即可。

4.1.4　Mathematica 的帮助系统

（1）若使用系统提供的帮助菜单，可以选“Help”菜单，再选“Help Browser”菜单项即可（见图 4-4）。

当要查找关于“Plot”的用途与用法时，可以在窗口上方“GOTO”后面的白色区域内输入“Plot”。并单击“GOTO”按钮，此时出现如图 4-5 所示的窗口。

在该窗口中，可以得到关于“Plot”的语法说明、基本例子、可参考的内容以及更全面的例子。在帮助窗口中还可以当场执行例子并看到运算的结果。如图 4-6 所示。

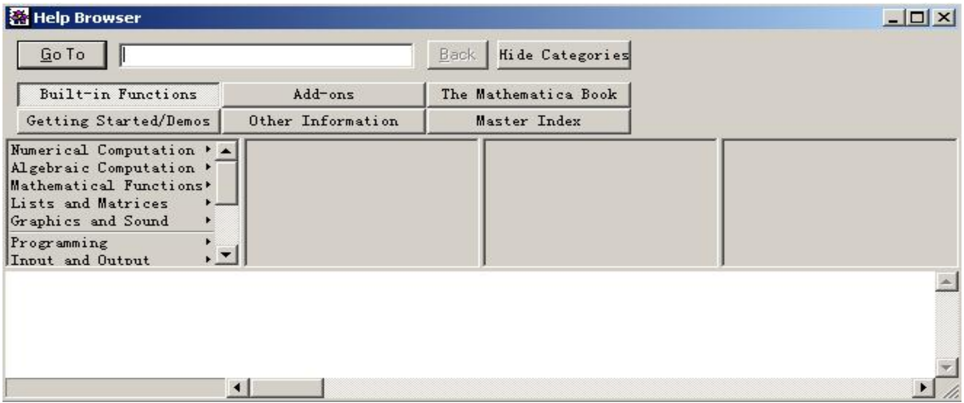


图 4-4 Help Browser 窗口 1

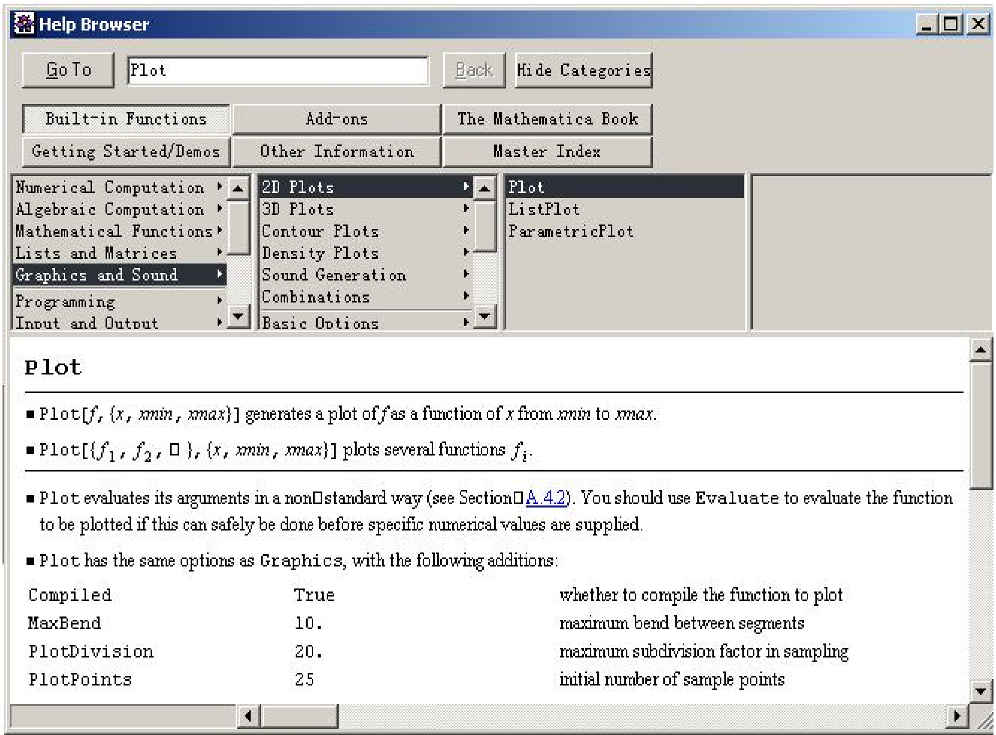


图 4-5 Help Browser 窗口 2

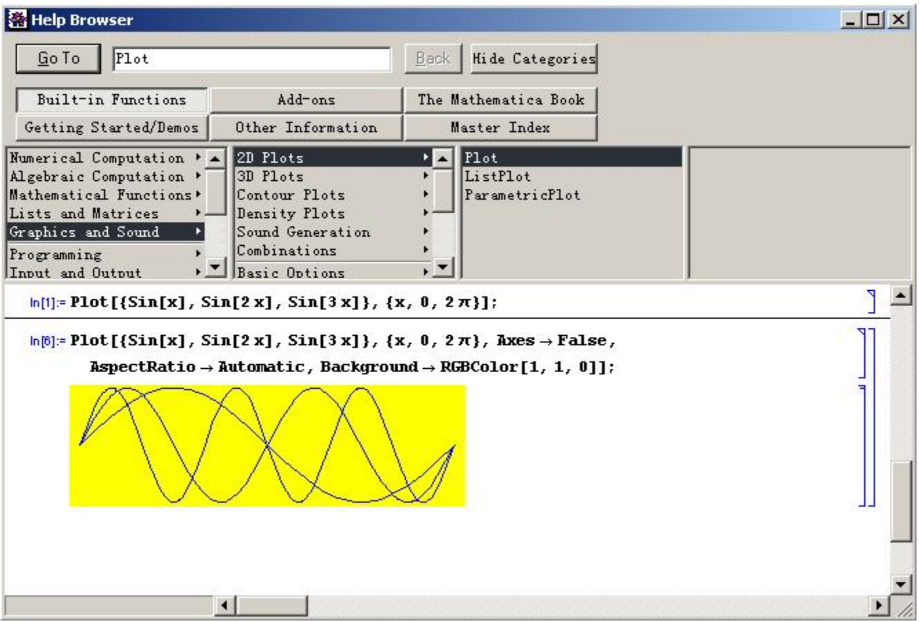


图 4-6　Help Browser 窗口 3

（2）在 Notebook 窗口中输入“?P*”并执行它，系统会列出所有以 P 打头的变量、常量以及函数等，如图 4-7 所示。

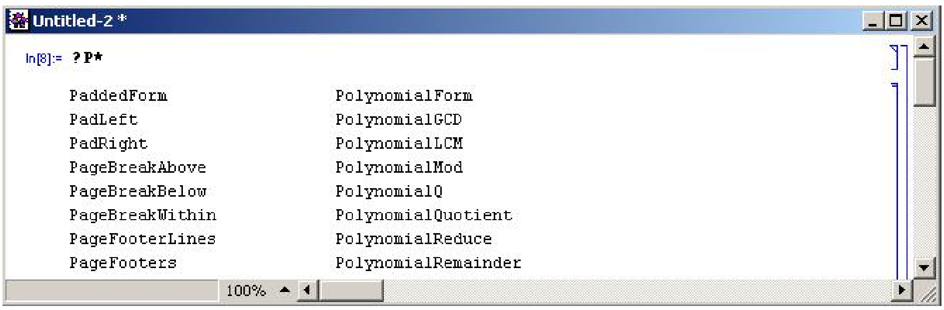


图 4-7　显示查询结果窗口 1

如果输入完整的命令“？Plot”，系统还将给出较完整的语法解释，如图 4-8 所示。

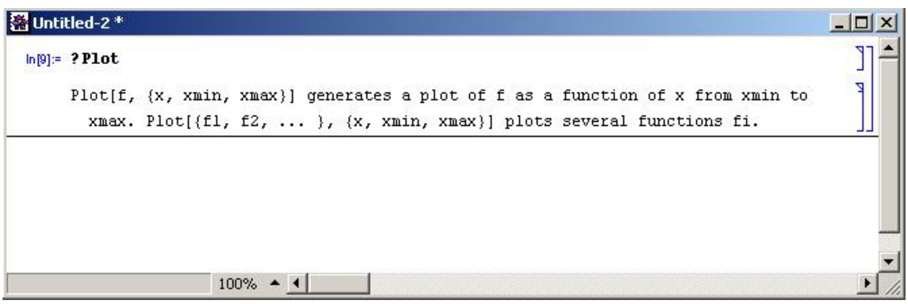


图 4-8　显示查询窗口 2

如果需要更详细的内容，可以在 Notebook 窗口中输入“？？Plot”，系统会提示更全面的信息，如图 4-9 所示。

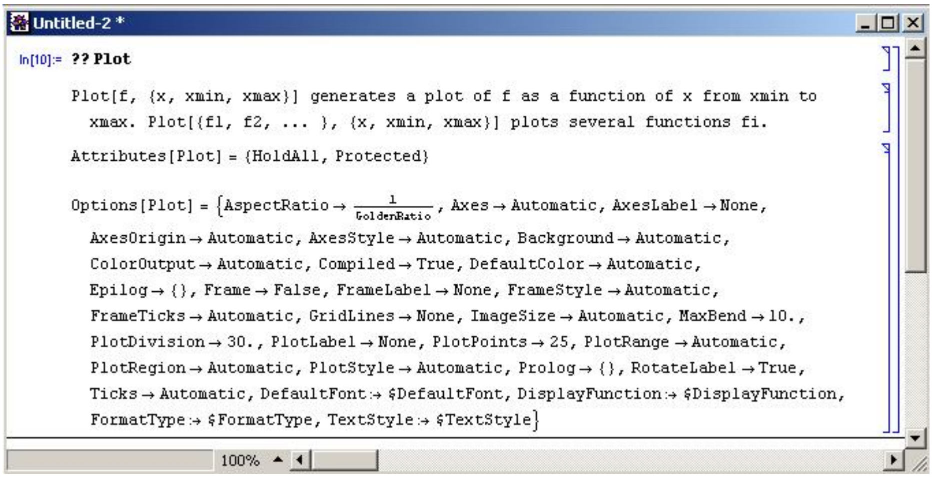


图 4-9　显示查询窗口 3

4.1.5　Mathematica 的选项板

单击“File”菜单，将光标移到“Palettes”选项，在弹出的子菜单中再单击“BasicCalculations”项，此时屏幕会出现一个基本命令选择窗口。Mathematica 的命令分为七大类并完全排列在其中。单击项目前的“▷”可打开命令项，拾取命令项后，会在工作窗内显示该命令。如图 4-10 所示。

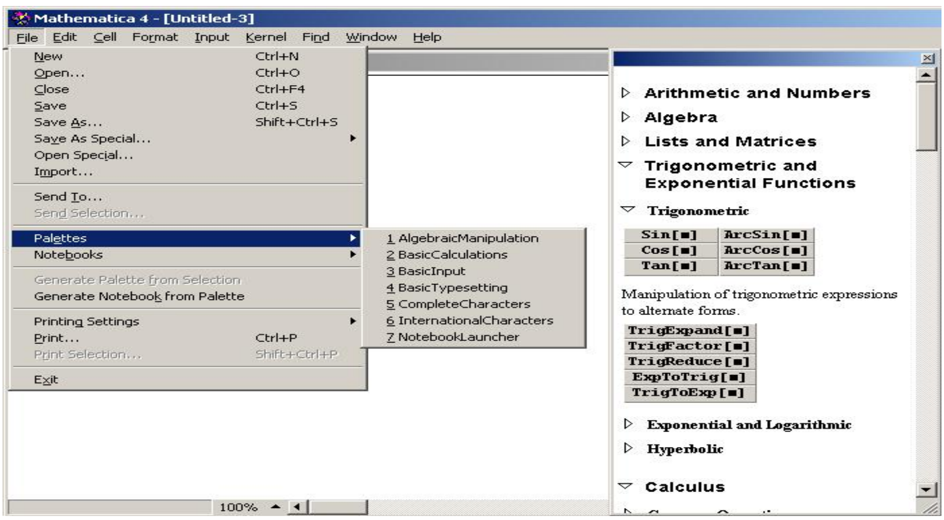


图 4-10　基本命令选择窗口

Mathematica 的其他选项板还有数学常量、方幂、角标、求和、连乘积、各种积分符号及希腊字母等，这些均可以在“Pattettes”菜单下获得。值得注意的是，在数学公式选项板中的积分、求和、求连乘积的符号也都是可以完成相应运算的，如单击“Basic Input”选项，系统会出现数学符号窗口，以帮助完成各种数学表达式的输入和希腊字母的输入功能。如图 4-11 所示。

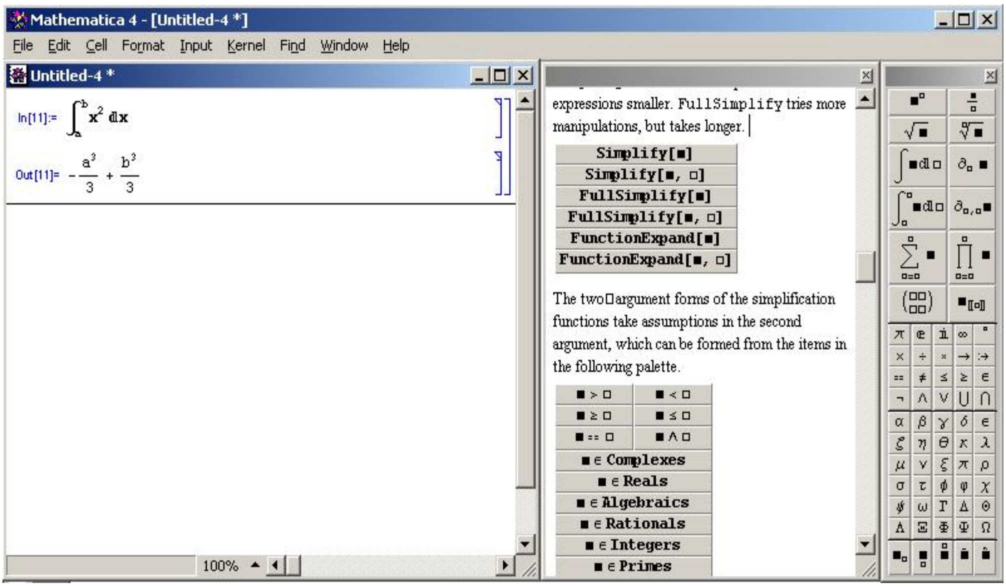


图 4-11　数学符号窗口

4.1.6　Mathematica 文件的存取

1．文件的存储

Mathematica 保存操作者所做的工作，在“File”菜单中选取“Save As...”选项，系统会弹出如图 4-12 所示的对话框。

和大多数软件一样，在文件名处键入所要保存文件的文件名，并选择好打算保存文件的存储位置，按回车键即可完成文件的保存。

在 Mathematica 中保存的文件以“.nb”（Notebook 的缩写）为后缀，这是系统默认的 Mathematica 语言程序文件。

Mathematica 也提供了转存为其他格式文件的功能，这只要选取“File”菜单，再选“Save As Special”选项，在弹出的菜单条中选择所需要的格式即可。此时，调用这些特殊格式的文件要在相应的软件中用“Open”方式打开。

图 4-12　“另存为”对话框

2. 文件的打开

当需要继续先前所做的工作时，选取“File”菜单，再选择“Open”菜单项，在弹出的对话框中输入正确的路径和文件名，按回车键后即可打开所需的文件。

Mathematica 允许同时打开多个文件，但只显示最后打开的文件，可以在“Window”菜单项中去选择所需打开的文件，如图 4-13 所示。

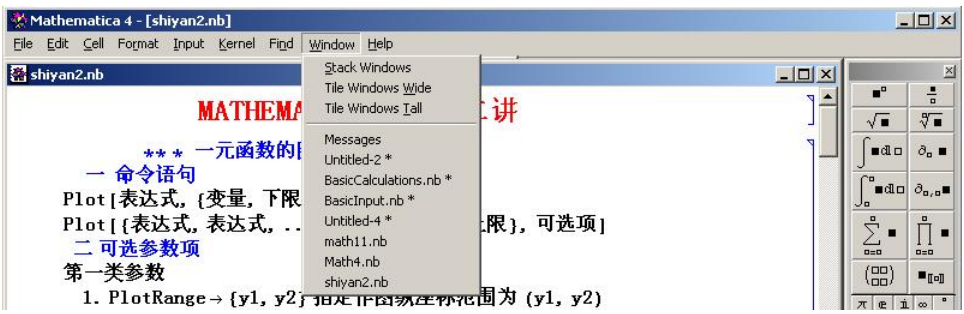


图 4-13　选择“Window”菜单项

4.1.7　Mathematica 的扩展

Mathematica 的一个重要特点就是其可扩展性。解决某些专门领域的计算需会使用外挂的 Mathematica 软件包。例如，为了进行数理统计的运算，就需要调用统计软件包。所谓软件包，就是由专家编写好的一些程序文件，一般都用后缀“.m”，“.m”文件相当于定义了一个新的功能函数，但它不在 Mathematica 的内核中，要使用的时候必须首先调入。

例如，要制作动画，则要先调入 Animation 软件包，其执行的格式为：

```
<<Graphics'Animation'
```

注意：在 Animation 这个命令前后要加撇号，然后才可以使用制作动画的命令，如 Animate[plot,{t,tmin,tmax}]命令，其中参数 t 用于从 tmin 到 tmax 播放图形 plot，使画面连续；ShowAnimation[{q1,q2,⋯}]命令是把图形变成连续的画面。

外挂的 Mathematica 软件包主要有：

代数	Algebra	分析	Calculus
几何	Geometry	图形	Graphics
线性代数	LinearAlgebra	统计	Statistics

4.2　用 Mathematica 画函数的图形

4.2.1　基本一元函数作图

基本一元函数作图的命令格式为：Plot[f[x], {x, xmin, xmax}，可选项]

其中，f[x]代表一个函数表达式，x 表示函数的自变量，xmin 和 xmax 分别表示所要画的图形中 x 取值的上、下限。可选项是对图形参数的设定，如果不写可选项，则系统按内定的参数输出图形。例如：

```
Plot[Sin[x],{x,–2Pi,2Pi},AspectRatio–>Automatic]
```

其输出图形如图 4-14 所示。

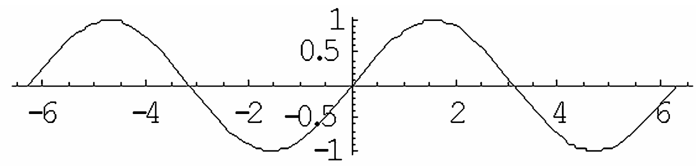


图 4-14

命令中的 AspectRatio–>Automatic 表示按实际比例作图。在不加这个参数时，系统按 0.618∶1 作图。

Mathematica 可以很好地处理奇点。

【例 4-1】　画 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 在区间[–1, 1]上的图形，这里 $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$，但是系统可以略过 x=0 的点，而在它的邻域内画出函数的图形。

【解】　键入命令如下：

```
Plot[Exp[1/x],{x,–1,2},PlotRange–>{–1,5}]
```

命令运行后输出图形如图 4-15 所示。

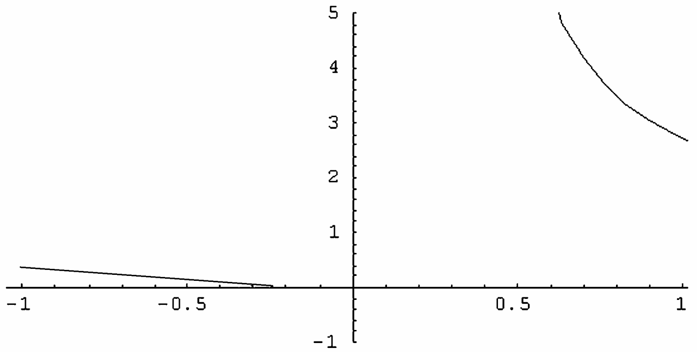


图 4-15

Mathematica 可以同时画多个函数的图形。其命令格式为：

```
Plot[{f1[x],f2[x],…},{x,xmin,xmax}]
```

注意，其中多个函数应该使用同一个自变量 x。

【例 4-2】　画出 $\sin x$, $\dfrac{1}{2}\sin 2x$, $\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在区间[0, 2π]上的图形。

【解】　键入命令如下：

```
Plot[{Sin[x],Sin[2*x]/2,Sin[3*x]/3},{x,–2*Pi,2*Pi}]
```

命令运行后输出图形如图 4-16 所示。

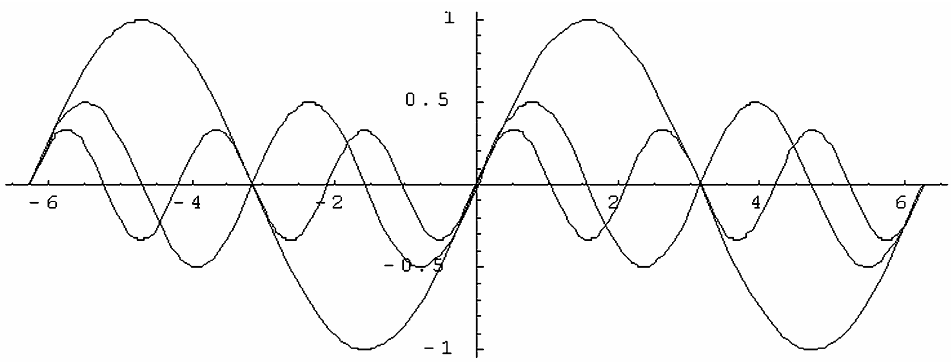


图 4-16

【例 4-3】　画出幂函数在区间[0, 1]上的图形。

【解】　键入命令如下：

```
Plot[Evaluate[Table[x^n,{n,4}]],{x,0,1},
 AspectRatio–>Automatic]
```

命令运行后得到图形 4-17。

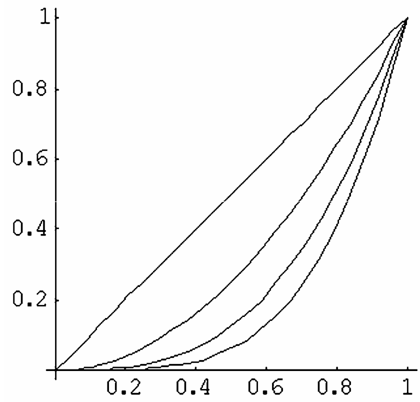


图 4-17

4.2.2　参数方程作图

参数方程的命令格式为：

ParametricPlot[{x[t],Y[t]},{t,tmin,tmax}]

【例 4-4】　画出旋轮线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in (0,\ 2\pi)$$

的图形。

【解】　依题意键入命令如下：

```
ParametricPlot[{2*(t–Sin[t]),2*(1–Cos[t])},{t,0,2*Pi},
 AspectRatio–>Automatic]
```

命令运行后得到图形 4-18。

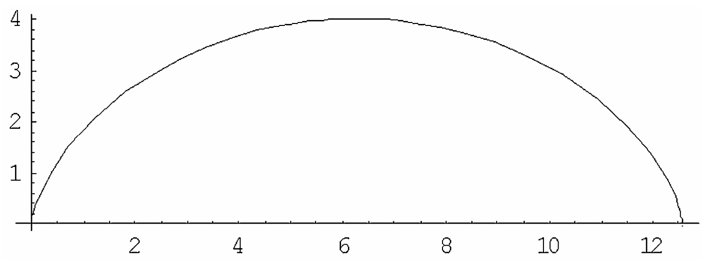


图 4-18

4.2.3　极坐标方程作图

首先要定义极坐标下的函数，再按极坐标与直角坐标的关系式

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

利用参数方式绘图。

【例 4-5】　画四叶玫瑰线　$r = 2\cos 2\varphi$ 的图形。

【解】　键入命令如下：

```
r[t_]:=2*Cos[2*t]
ParametricPlot[{r[t]*Cos[t],r[t]*Sin[t]},
 {t,0,2*Pi},AspectRatio–>Automatic]
```

其运行结果见图 4-19。

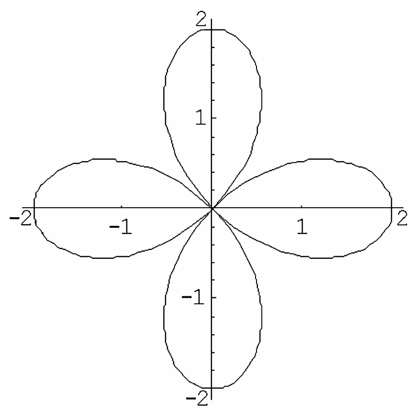


图 4-19

4.2.4　二维作图的可选参数

1．第一类参数

第一类参数是与图形显示有关的参数，主要有 AspectRatio, Frame 和 PlotRange 三个参数：

（1）AspectRatio 用来改变图形显示的横坐标与纵坐标的比例，其默认值是 0.618∶1。因此，当要显示图形真实比例时，应指定其参数值为 Automatic。在例 4-1 中我们已经使用了这个选项。读者不妨去掉这个选项，观察图形有什么变化。

（2）Frame 用来指定图形是否加边框，默认值是 False 。如果要加边框，可取 Frame 参数为 True 。

【例 4-6】　画出函数 $y = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 在区间（–0.5, 0.5）之间的图形。

【解】　键入命令如下：

```
Plot[x*Sin[1/x],{x,–0.5,0.5},Frame–>True]
```

其中，Axes label 指出坐标轴的标记，它可以按所画图形中的实际变量命名。

该命令的运行结果见图 4-20。

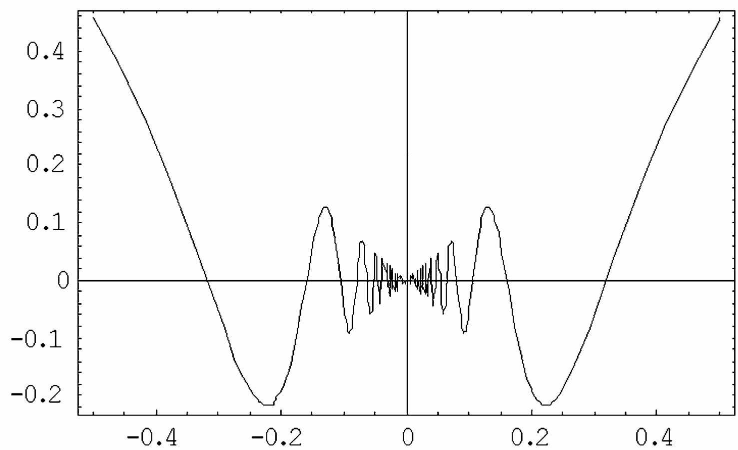


图 4-20

【例 4-7】　画出函数 $f(x)=e^{\sin x}$ 在区间[0, 4π]上的图形。

【解】　键入命令如下：

```
Plot[Exp[Sin[x]],{x,0,4Pi},AxesLabel–>{"x","Exp[Sin[x]] "}]
```

命令运行后得到图 4-21，此时，横轴表示自变量 x，纵轴表示函数 $e^{\sin x}$ 。

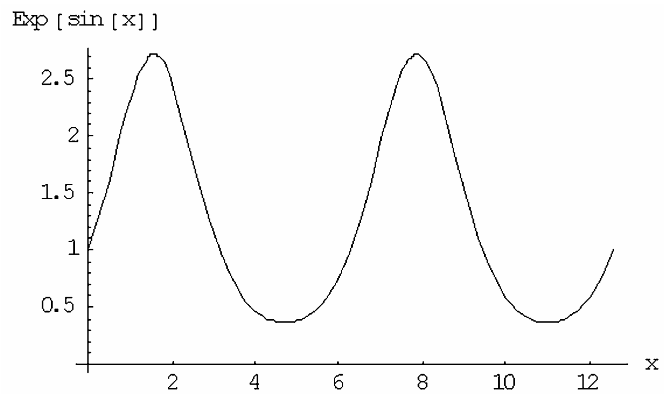


图 4-21

（3）PlotRange 用于指定图形在纵坐标方向上的范围。可取的值为{ymin,ymax}，All, Automatic。其中{ymin, ymax}用于指定范围，All 用于显示全部图形，Automatic 用于进行自动控制。

【例 4-8】 画正切函数在区间[–5, 5]范围内的图形。

【解】 键入命令如下：

```
Plot[Tan[x],{x,–2Pi,2Pi},PlotRange–>{–5,5},AspectRatio–>Automatic]
```

命令运行后得到图 4-22。

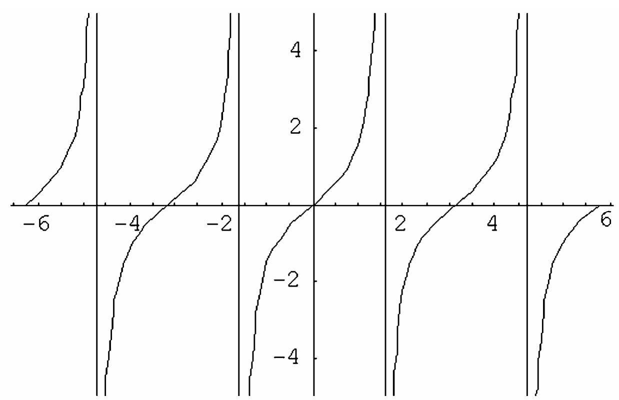


图 4-22

2．第二类参数

第二类参数是用于对图形的修饰与加工。下面只介绍其中最常用的 PlotStyle、Thickness、Dashing 和 PlotPoints 四个参数。

（1）PlotStyle 参数说明用什么方式画图形。它的值有好几个，这里仅介绍 RGBColor[r,q,b]，这个值用于说明图形的颜色。其中，r, g, b 是三个在区间[0,1]之间的实

数，分别说明红（Red）、绿（Green）、兰（Blue）的强度。不同 r, g, b 的取值搭配能形成不同的颜色。

【例 4-9】　用三原色画贝塞尔函数的图形。

【解】　键入命令如下：

```
Plot[{BesselJ[0,x],BesselJ[1,x],BesselJ[2,x]},{x,0,10},
  PlotStyle–>{RGBColor[0,1,0],RGBColor[0,0,1],RGBColor[1,0,0]}]
```

命令运行后得结果如图 4-23 所示。

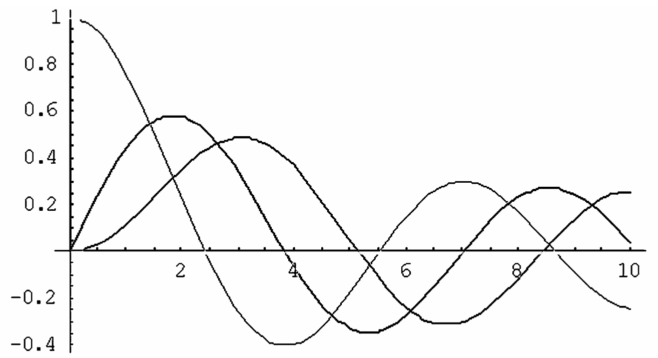


图 4-23

（2）Thickness[t]参数用于描述线的宽度。其中，t 是一个实数，以图形宽度为基准，比如 t=0.01，表明线宽为图形宽度的 1/100。

（3）Dashing[{d1,d2,⋯}]参数用于画虚线，其中，d1, d2 等都是区间[0, 1]之间的实数，它们主要说明虚线的分段方式。

【例 4-10】　用虚线画出指数函数的图形。

【解】　键入命令如下：

```
Plot[Exp[x],{x,–5,2},
  PlotStyle–>{Dashing[{0.02,0.02}],
    Thickness[0.01]}]
```

命令运行后得图形 4-24。

（4）PlotPoints 参数用于说明采样点的基本点数。系统默认的采样点的基本点数为 12。在某些场合下需要增加采样点的数目才能完整地描绘出图形的实际情况，此时可以通过这项参数来进行设置。

【例 4-11】　画函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的图形。

【解】　$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 x=0 的邻域内，曲线在区间（–1, +1）之间频繁地振动，当

采样点较少时，图形会显得不完整（见图 4-25（a）），而当采样点数增加为 100 时，图形残缺不全的情况有所改善（见图 4-25（b））。

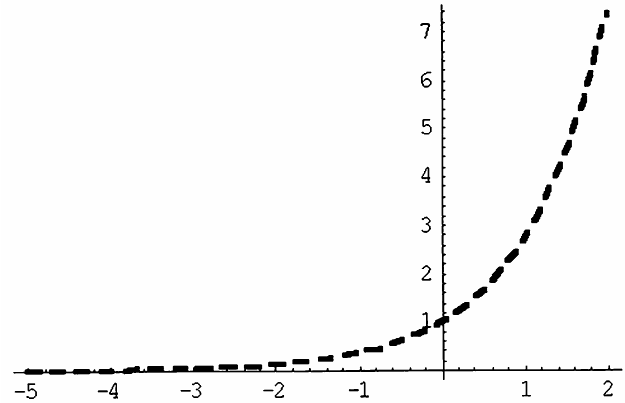


图 4-24

其命令如下：

```
t1=Plot[Sin[1/x],{x,–0.1,0.1}]
t2=Plot[Sin[1/x],{x,–0.1,0.1},PlotPoints–>100]
```

命令运行后输出的图形如图 4-25 所示。

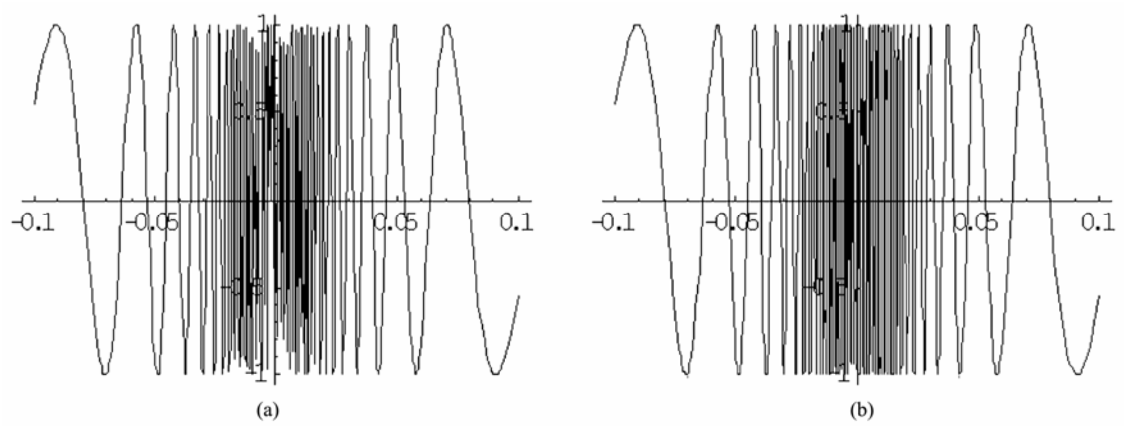


图 4-25

4.2.5　三维图形命令

三维图形命令如下：

```
Plot3D[f[x,y],{x,xmin,xmax,},{y,ymin,ymax}]
ParametricPlot3D[{x[u,v],y{u,v},z{u,v}},{u,u1,u2},
```

```
{v,v1,v2}]
```

进行三维绘图时也可以选择一些参数来生成图形对象中不同的图形元素。下面仅介绍其中几个最常用的参数。

（1）Lighting 光照参数。如果光照参数设为 False，则显示黑白效果。此参数的系统默认值为 True，这时系统将以照明模拟效果代替内在颜色。

（2）ViewPoint–>{x0,y0,z0}参数用于表示视点的位置。在 Input 菜单中有一个 3D ViewPoint Selector 选项，单击它后，系统会打开一个选择对话框，调整其中的各个选项，然后按 Paste 键，可以得到合适的观察角度。

（3）Boxed 参数用于指定显示或取消边框。当其设为 False 时，其图形取消边框。

（4）Axes 参数用于指定是否显示坐标轴。当其设为 False 时，图形上将不显示坐标轴。

【例 4-12】　画函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的图形。

【解】　键入命令如下：

```
ParametricPlot3D[
 {u*Cos[v],u*Sin[v],Exp[–u^2/2]},
 {v,0,2Pi},{u,0,4},PlotPoints–>20,
 BoxRatios–>{1,1,0.4},Boxed–>False,
 Axes–>False]
```

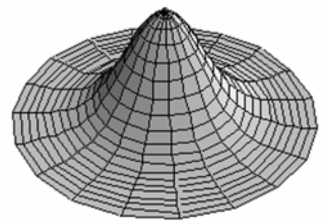


图 4-26

其输出图形如图 4-26 所示。

习题 4-2

1）试着选定合适的区间及可选项作出下列函数的图形：

(1) $y=\cot x$;　(2) $y=\arctan x$;

(3) $y=1+\ln(x+2)$;　(4) $y=\cos x+\mathrm{e}^x$;

(5) $y=x^3+3x^2-12x+14$;　(6) $y=\sin(\tan x)-\tan(\sin x)$;

(7) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$　(8) $y=1+\dfrac{36x}{(1+3x)^2}$;

2）画出下列参数方程给出的函数图形：

(1) $\begin{cases}x=4\cos t,\\ y=3\sin t;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=\cos(1+\cos t)\\ y=\sin(1+\cos t);\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x = t(1-\sin t), \\ y = t\cos t; \end{cases}$

3）在一张图上画出 $\sin x$,$\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$,$\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ 的图形，并指出哪一条曲线描绘了哪一个函数，说明它们的周期。

4）画出函数 $\dfrac{e^x - \sqrt{x+1}}{x}$ 在区间(–1, +1)上的图形，并研究这个函数在 x=0 处的极限。

5）画出函数 $x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-1\right)$ 在区间 (0, 10 000) 上的图形，并研究这个函数在 $x \to \infty$ 时的极限。

6）作出函数 $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 和函数 $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ 的图形，观察它们的增减性。

7）作函数 $y = x\cos x$ 的图形，问当 $x \to +\infty$ 时，函数是否为无穷大？为什么？

4.3 用 Mathematica 进行函数计算

4.3.1 四则运算与运算次序

在 Mathematica 中的和、差、积、商、乘方运算分别用“+”、“–”、“∗”或空格、“/”、“^”来表示。其运算次序与一般规则一致，即先乘方，后乘除，最后是加减。要改变次序可以调用小括号“( )”。

例如：

```
(2+3–4)∗5/6
```

$\dfrac{5}{6}$

当输入整数进行运算时，系统返回分数，并保持精确度，如要得到近似值可以用近似运算命令“N[ ]”。

例如，接着键入命令：

```
N[%]
0.833333
```

“%”表示前一次运算输出的结果。为了得到更多位数的近似值，可以加上参数指定

位数。

例如，再键入命令：

```
N[Pi,18]
3.14159265358979324
```

其中“Pi”表示π，在 Mathematica 中常用的数学常数有：

π——用 Pi 表示；

e——用 E 表示；

∞——用 Infinity 表示。

Mathematica 中的变量名用字母或数字组成，其第一个字母用小写。例如 data1, list2，等等。

变量的赋值用“＝”表示。例如，data=25。

在 Mathematica 中的变量如果赋了值，在以后的表达式中就一直以该值出现，这一点常常被初学者忽略，造成计算结果出错。

例如：

```
x=Pi/3;
y=Sin[x]//N
0.866025
t=x^2+1
```

$$1+\frac{\pi^2}{9}$$

显然，系统最后输出的数值，是将 x 看做π/3 的结果，而不是一个表达式。要第二次再使用一个变量，就必须清除原来的值，可用“Clear”命令，其格式为：

Clear[变量]或 Clear[变量 1，变量 2]

也可以用格式：

变量名=.

表示意将原来的定义取消。

4.3.2　Mathematica 的内部函数

Mathematica 中所有基本初等函数都已定义，如表 4-1 所示。

表 4-1　Mathematica 中的基本函数

	函数名	输入格式	函数名	输入格式
三角函数与反三角函数	sinx	Sin[x]	arcsinx	ArcSin[x]
	cosx	Cos[x]	arccosx	ArcCos[x]
	tanx	Tan[x]	arctanx	ArcTan[x]
	cotx	Cot[x]	arccotx	ArcCot[x]
	secx	Sec[x]	arcsecx	ArcSec[x]
	cscx	Csc[x]	arccscx	ArcCsc[x]
双曲函数与反双曲函数	sinhx	Sinh[x]	arcsinhx	ArcSinh[x]
	coshx	Cosh[x]	arccoshx	ArcCosh[x]
	tanhx	Tanh[x]	arctanhx	ArcTanh[x]
指数函数	e^x	Exp[x]	$\ln x$	Log[x]
	a^x	a^x	$\log a^x$	Log[a,x]
其他	$\sqrt{x}$	Sqrt[x]	max{a,b,c}	Max[a,b,c]
	$\|x\|$	Abs[x]	min{a,b,c}	Min[a,b,c]

4.3.3　自定义函数

Mathematica 允许用户使用自己定义的函数，定义方法有初等函数的定义和分段函数的定义两种。

1．初等函数的定义

例如：

```
f[x_]:=x^3+Exp[x]
f[3]
```

运行后系统返回结果：

```
27+E^3
```

注意，自变量后面一定要加下划线。

2．分段函数的定义

用 If 或 which 命令可以定义分段函数，如定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 1 \\ 2-x & x>1 \end{cases}$$

可以键入命令：

```
f[x_]:=If[x≤1,x^2,2−x]
```

或命令：

```
f[x_]:=which[x≤1,x^2,x>1,2−x]
```

在自定义函数时，自变量后面的下划线是不可少的。类似可以定义多变量函数。例如：

```
u[x_,y_]:=Sqrt[x^2+y^2]
```

要想知道刚刚所定义的函数是否正确，可键入 u[x,y]，按回车键后系统自动输出表达式，即：

```
u[x,y]
```

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

在 Mathematica 中，函数的概念与传统的函数概念是有区别的。前者将函数理解为对输入/输出的一种法则。比如可以输入圆心和半径，而输出圆的图形。

【例 4-13】　定义一个函数，画出以原点 $O(0,0)$ 为圆心，r 为半径的圆。

【解】　键入命令如下：

```
myPlot[r_]:=
  ParametricPlot[{r*Cos[t],r*Sin[t]},
   {t,0,2*Pi},AspectRatio–>Automatic]
Map[myPlot,{1,2,3,4,5}]
Show[%]
```

这里的“Map”命令表示将函数用于后面的表，该程序运行后得到一组同心圆，如图 4-27 所示。

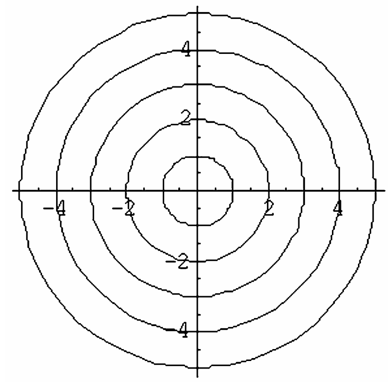


图 4-27

4.3.4　Mathematica 中的特殊函数

Mathematica 中的特殊函数包括正交多项式和数学物理函数。

1．正交多项式

正交多项式在 Mathematica 中的对应函数如下所示：

正交多项式	Mathematica 中对应的函数
勒让德多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$	LegendreP[n,x]
切比雪夫多项式 Tn(x)= $\cos(\arccos nx)$	ChehyshevT[n,x]

2．数学物理函数

数学物理函数在 Mathematica 中的对应函数如下所示：

数学物理函数	Mathematica 中对应的函数
贝塞尔函数	BesselJ[n,z]
Gamma 函数	Gamma[z]
β—函数 $\beta(a, b)=\frac{\tau(a)\tau(b)}{\tau(a+b)}=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$	Beta[a,b]

但是在使用数学物理函数的时候，要注意在不同的数学书中，这些函数的定义可能有所出入。

【例 4-14】　调入拉格朗日函数 P1(x)~P6(x)。

【解】　键入命令如下：

```
TableForm[Table[LegendreP[n,x],{n,6}]]
```

运行后系统给出结果：

$$x$$
$$-\frac{1}{2}+\frac{3x^2}{2}$$
$$-\frac{3x}{2}+\frac{5x^3}{2}$$
$$\frac{3}{8}-\frac{15x^2}{4}+\frac{35x^4}{8}$$
$$\frac{15x}{8}-\frac{35x^3}{4}+\frac{63x^5}{8}$$
$$-\frac{5}{16}+\frac{105x^2}{16}-\frac{315x^4}{16}+\frac{231x^6}{16}$$

现画出它们的图形，键入其相应命令如下：

```
For[i=1,i<=6,i++,
t[i]=Plot[LegendreP[i,x],{x,–1,1}],DisplayFunction–>Identity]
Show[t[1],t[2],t[3],t[4],DisplayFunction–>$DisplayFunction]
```

运行后得到如图 4-28 所示的图形。

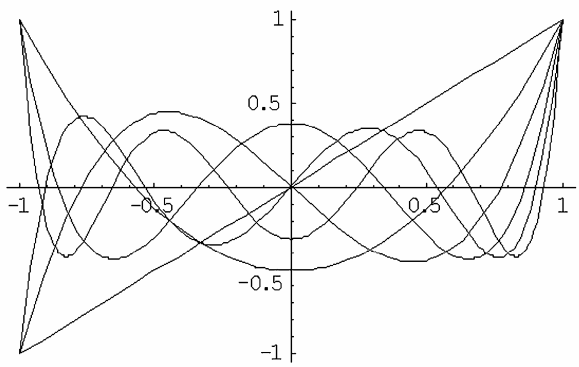


图 4-28

习题 4-3

1）计算 e^{10} 的近似值，取小数点后的 18 位。

2）计算下列函数的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{5}$

(3) e^5　　(4) $\arctan(0.125)$

(5) $\sqrt{3125}$　　(6) $\ln(2.0375)$

3）定义如下的分段函数：

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x<0; \\ 1+x & x \ldots 0 \end{cases}$$

并求出 $f(-1), f(2)$和$f(0)$ 的函数值。

4）定义一个函数：

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x^2-y^2 & x^2+y^2 \ldots 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

4.4　用 Mathematica 解微积分

4.4.1　求极限

1．Mathematica 中对应的求极限函数 Limit[ ]

Limit[ ]使用的基本格式为：

Limit[ ]

Limit[f[x],x–>x0]或 Limit[f[x],x–>Infinity]

【例 4-15】　求出下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-30)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

【解】　按题序分别键入如下命令并运行：

```
Limit[x^2*Log[x],x–>0]

Limit[(E^x–E^(–x)–2x)/(x–Sin[x]),x–>0]
```

```
Limit[((2x–30)^20∗(3x+2)^30)/(2x+1)^50,x–>Infinity]
Limit[(Tan[x]-Sin[x])/x^3,x–>0)
```

其运行结果为：

0

2

$\frac{205891132094649}{1073741824}$

$\frac{1}{2}$

在计算极限时要注意以下几点：

（1）当左、右极限不相同时要指明方向。

【例 4-16】　验证 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$　　$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

【解】　键入如下命令并运行：

```
Limit[E^(–1/x),x–>0,Direction–>+1]
Limit[E^(–1/x),x–>0,Direction–>–1]
```

运行结果为：

∞（右极限）

0（左极限）

（2）在无穷振荡点处极限不存在，但 Mathematica 可以给出取值范围，如键入如下命令：

```
Limit[Sin[1/x],x–>0]
```

运行后系统返回：

```
Interval[{–1,1}]
```

这是因为函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 x=0 的邻域里，其图形在区间（–1, 1）内无限次振荡，故极限不存在。系统给出了振荡的范围。

（3）有时需要将所求极限式子进行转换，才能求出正确结果，如以下命令：

```
Limit[(–1)^(2n),n–>Infinity]
Limit[((–1)^2)^n,n–>Infinity]
```

Limit[$(-1)^{2n}$],n–>∞]

1

对第一行命令中的公式，因为系统不会做，所以只是将它重新回复出来；而在第二行命令中的公式运算后，系统得出了正确结果。

（4）当数列用递推公式给出时，可以用近似方法求其极限。

【例 4-17】 求数列 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, L，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 的极限。

【解】 依题意写出如下命令：

```
x={Sqrt[2]//N};
For[i=2,i≤10,i++,x=Append[x,Sqrt[2+x[[i–1]]]];
  ]
x
```

运行后得到如下结果：

```
{1.41421,1.84776,1.96157,1.99037,
 1.99759,1.9994,1.99985,1.99996,1.99999,2.}
```

可以看出该数列的极限为 2。

2．外部程序包中的求极限命令

Mathematica 的外部程序包中还有一个功能更强的、同名的求极限命令。要使用这个命令，需要先调入程序包 Calcalus，其调用的方式见例 4-18。

【例 4-18】 求极限 $\lim \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 。

【解】 依题意写出如下命令并运行：

```
Limit[(1+1/n)^(n^2)/Exp[n],n–>∞]
```

Limit[$\mathrm{e}^{-\mathrm{n}}\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}^2}$,n–>∞]

```
<<Calculus 'Limit'
Limit[(1+1n)^(n^2)/Exp[n],n–>∞]
```

$\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

由例 4-18 可以看到，在使用系统内部的 Limit 命令时，因系统求不出该极限，所以返回原表达式；而当调入了外部的 Limit 命令后，系统求出了这个复杂的极限。

4.4.2 求导数和求微分

1．求一元函数导数和微分

求一元函数导数和微分的相应命令如下：

D[f[x],x]	求导数
D[f[x],{x,n}]	求高阶导数
Dt[f[x]]	求微分

【例 4-19】　求下列函数的导数。

（1） $f(x)=\sin 2x\cos 3x$　　　　（2） $f(x)=\dfrac{1}{2^n n\,!}(x^2-1)^n$

（1）

【解】　键入如下命令：

```
D[Sin[2x]*Cos[3x],x]
```

运行后得：

```
2Cos[2x] Cos[3x]–3Sin[2x] Sin[3x]
```

（2）

【解】　键入如下命令：

```
n=4;
f[x_,n_]:=(x^2–1)^n/2^n/n!
D[f[x,n],{x,n}];
Expand[%]
```

运行后得：

$$\frac{3}{8}-\frac{15\mathrm{x}^2}{4}+\frac{35\mathrm{x}^4}{8}$$

此外，Mathematica 也能做复合函数求导，见例 4-20。

【例 4-20】　设 $z=x^2+y^2$, $y=x^3\sin x$，求复合函数的导数。

【解】键入如下命令并运行：

```
f[x_,y_]:=x^2+y^2;y=x^3*Sin[x];
D[f[x,y],x,NonConstants–>{y}]
```

注意在第二行的命令中添加了一个选项 NonConstants–>{y}，即把 y=x^3*Sin[x]带入到 f[x,y]中，然后求导。其结果为：

$$2\mathrm{x}+2\mathrm{x}^6\mathrm{Cos[x]Sin[x]}+6\mathrm{x}^5\mathrm{Sin[x]}^2$$

2．求高阶导数

【例 4-21】　求函数 $y=\arctan x$ 的二阶导数。

【解】　依题意写出如下命令：

```
f[x_]:=ArcTan[x];
D[f[x],{x,2}]
```

运行结果为：

$$-\frac{2\mathrm{x}}{(1+\mathrm{x}^2)^2}$$

【例 4-22】　求 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\sin x$ 的微分。

【解】　根据题意键入如下命令：

```
f[x_]:=E^x*Sin[x]
Dt[f[x]]
```

运行结果为：

$$e^{x}Cos[x]Dt[x]+e^{x}Dt[x]sin[x]$$

3．求由参数方程确定的函数的导数

首先自定义一个函数 ParametricD[ ], 它带有三个参变量 x, y, t，其结果是 $\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$，即：

```
ParametricD[x_,y_,t_]:=D[y,t]/D[x,t]
```

【例 4-23】　求由参数方程 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ 所确定的函数的导数。

【解】　键入命令如下：

```
ParametricD[Cos[t],Sin[t],t]
```

运行后得：

```
–Cot[t]
```

4．求隐函数的导数

【例 4-24】　求由 $x^2+2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数。

【解】　首先自定义一个函数，再利用这个函数求隐函数的导数，即：

```
ImplyD[f_,x_,y_]:=Solve[D[f,x]==0,y′[x]]
ImplyD[x^2+y[x]^2,x,y]
```

运行后得：

$$\left\{\left\{y'[x]\to-\frac{x}{y[x]}\right\}\right\}$$

4.4.3　求多元函数的偏导数和全微分

1．求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

求偏导数的命令格式如下：

D[f[x,y],x]	对 x 的一阶偏导数
D[f[x,y],y]	对 y 的一阶偏导数
D[f[x,y],{x,2}]	对 x 的二阶偏导数

D[f[x,y],{y,2}]　　对 y 的二阶偏导数

D[f[x,y],x,y]　　先对 x 后对 y 的二阶混合偏导数

【例 4-25】　已知 $f(x,y)=x^2y+y^3$，求其一阶偏导数和二阶偏导数。

【解】　键入其相应命令如下：

```
f[x_,y_]:=x^2*y+y^3
D[f[x,y],x]
D[f[x,y],y]
D[f[x,y],{x,2}]
D[f[x,y],x,y]
D[f[x,y],{y,2}]
```

运行后得结果如下：

2xy

x^2+3y^2

2y

2x

6y

2．求全微分和全导数

求全微分和全导数的命令格式为：

```
Dt[f[x,y]]
Dt[f[x,y[x]],x]
```

【例 4-26】　已知 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，求它的全微分和全导数。

【解】　根据题意写出相应命令如下：

```
f[x_,y_]:=Sqrt[x^2+y^2]
Dt[Sqrt[f[x,y]]]
Dt[f[x,y[x]],x]
```

运行后得出结果为：

$$\frac{2x\mathrm{Dt}[x]+2y\mathrm{Dt}[y]}{4(x^2+y^2)^{3/4}}$$

$$\frac{2x+2y[x]y'[x]}{2\sqrt{x^2+y[x]^2}}$$

4.4.4　求不定积分和定积分

求不定积分不像求导数那样有确定的法则，虽然也有诸如换元积分、分部积分的方

法，但是许多积分用这些方法是求不出来的，Mathematica 能求出积分表上的大部分积分，也可以求出绝大多数的定积分。其积分的命令如下：

```
Integrate[f[x],x]
Integrate[f[x],{x,a,b}]
NIntegrate[f[x],{x,a,b}]
```

【例 4-27】　求下列积分：

(1) $\int x^n \mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x}{(x-2)(x+3)}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

(5) $\int_a^b x^2 \mathrm{d}x$　　(5) $\int_0^{2\pi} \cos(\sin x)\mathrm{d}x$

【解】　在 Notebook 中输入以下命令：

```
Integrate[x^n,x]
Integrate[1/(x^2–1),x]
Integrate[x/(x–2)/(x+3),x]
Integrate[Sin[Log[x]],x]
```

其运行结果为：

$$\frac{\mathrm{x}^{1+\mathrm{n}}}{1+\mathrm{n}}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}[-1+\mathrm{x}]-\frac{1}{2}\mathrm{Log}[1+\mathrm{x}]$$

$$\frac{2}{5}\mathrm{Log}[-2+\mathrm{x}]+\frac{3}{5}\mathrm{Log}[3+\mathrm{x}]$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{xCos}[\mathrm{Log}[\mathrm{x}]]+\frac{1}{2}\mathrm{xSin}[\mathrm{Log}[\mathrm{x}]]$$

【例 4-28】　计算定积分 $\int_a^b x^2 \mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{2\pi} \cos(\sin(x))\mathrm{d}x$ 。

【解】　根据题意写出如下命令：

```
Integrate[x^2,{x,a,b}]
Integrate[Cos[Sin[x]],{x,0,2Pi}]
```

运行结果为：

$$-\frac{\mathrm{a}^3}{3}+\frac{\mathrm{b}^3}{3}$$

$$2\pi\,\mathrm{BesselJ}[0,1]$$

在某些情况下，Integrate[ ]不能给出结果，而用 NIntegrate[ ]可以得到近似的数值结果。

【例 4-29】　计算 $\int_0^1 \sin(\sin x)\mathrm{d}x$。

【解】　写出相应命令并运行：

```
Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]
NIntegrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]
```

$\int_0^1 \mathrm{Sin[Sin[x]]dx}$

0.430606

显然，在第一种情况下，系统不能算出结果；而在第二种情况下系统给出了近似值。

习题 4-4

1）求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin x}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)}{\mathrm{e}^{-x}}$　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+2x\mathrm{arctg}x}{\mathrm{e}^x-x\pi}$

2）设 a 是大于 1 的实数，取 $x_1>\sqrt{a}$，作数列$\{x_n\}$为

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n}{1+x_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在？

3）求下列函数的导数：

(1) $y=\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$　　(2) $y=\sqrt{x}x^{\sqrt{x}}$

(3) $y=4(\sin x)^{x^2}$　　(4) $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1+x^2}\arcsin x-2x$

4）求隐函数的导数：

$$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

5）设函数由参数方程 $\begin{cases} x=\cot+\tan\dfrac{t}{2} \\ y=2^t+\arcsin t^2 \end{cases}$ 给出，求 y''。

6）求下列不定积分：

(1) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$

(3) $\int\dfrac{x^3-2x^2+x-1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$　　(4)$\int \mathrm{e}^x\sin 2x\,\mathrm{d}x$

7）求下列定积分：

(1) $\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$　　(4) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

4.5　用 Mathematica 的相应功能解方程

4.5.1　在 Mathematica 中用于解方程 $f(x)=0$ 的命令

在 Mathematica 中用于解方程 $f(x)=0$ 的命令如下：

（1）Solve[f[x]= =0,x]

（2）Nsolve[f[x]==0,x]

（3）Roots[f[x]==0,x]

（4）Reduce[f[x]==0,x]

（5）FindRoot[f[x]==0,{x,x0}]

（6）FindRoot[f[x]==0,{x,x0,x1}]

1．Solve[ ]

Solve 可以给出 4 次以下方程的精确解，尽管有时给出的结果十分复杂。

【例 4-30】　求方程 $2ab+2ax+2bx-3abx+2a^2-3ax^2+abx^2-3x^3+4x^3+bx^3+x^4=0$ 的解。

【解】　键入如下命令并运行：

```
Solve[2ab+2ax+2bx–3abx+2 x^2 –3a x^2 –3b x^2 +ab x^2 –
    3 x^3 +a x^3 +b x^3 + x^4 ==0,x]
{{x–>1},{x–>2},{x–>–a},{x–>–b}}
```

【例 4-31】　求方程 $x^3+x^2+ax+b=0$ 的解。

【解】　键入如下命令并运行：

```
Solve[x^3+x^2+a*x+b==0,x]
```

$$\{\{x\to -\frac{1}{3}-\frac{2^{1/3}(-1+3a)}{3(-2+9a+\sqrt{4(-1+3a)^3+(-2+9a-27b)^2}-27b)^{1/3}}+\frac{(-2+9a+\sqrt{4(-1+3a)^3+(-2+9a-27b)^2}-27b)^{1/3}}{3\,2^{1/3}}\},$$

$$\{x\to -\frac{1}{3}+\frac{(1+i\sqrt{3})(-1+3a)}{3\,2^{2/3}(-2+9a+\sqrt{4(-1+3a)^3+(-2+9a-27b)^2}-27b)^{1/3}}-\frac{(1+i\sqrt{3})(-2+9a+\sqrt{4(-1+3a)^3+(-2+9a-27b)^2}-27b)^{1/3}}{6\,2^{1/3}}\},$$

$$\{x\to -\frac{1}{3}+\frac{(1+i\sqrt{3})(-1+3a)}{3\,2^{2/3}(-2+9a+\sqrt{4(-1+3a)^3+(-2+9a-27b)^2}-27b)^{1/3}}-\frac{(1+i\sqrt{3})(-2+9a+\sqrt{4(-1+3a)^3+(-2+9a-27b)^2}-27b)^{1/3}}{6\,2^{1/3}}$$

2．NSolve[ ]

对于 5 次及 5 次以上的方程已经没有公式解，Solve[ ]只能给出以 Roots 表示的抽象解。这时改用 NSolve[ ]能求出近似值。

【例 4-32】　求 5 次方程 $x^5+x^2-x+3=0$ 的根。

【解】　键入命令如下：

```
Solve[x^5+x^2–x+3==0,x]
```

运行后得：

```
{{x–>Root[3–#1+#1^2+#1^5&,1]},
 {x–>Root[3–#1+#1^2+#1^5&,2]},{x–>Root[3–#1+#1^2+#1^5&,3]},
 {x–>Root[3–#1+#1^2+#1^5&,4]},{x–>Root[3–#1+#1^2+#1^5&,5]}}
```

改用 NSolve[ ]，即：

```
NSolve[x^5+x^2–x+3==0,x]
```

这时系统给出了近似解：

```
{{x–>–1.45775},{x–>–0.200224–1.1821i},{x–>–0.200224+1.1821i },
 {x–>0.929097–0.753965i},{x–>0.929097+0.753965i}}
```

3．Roots[ ]

Roots 的用法与其他求根的命令有所不同，其输出的结果是逻辑表达式。

【例 4-33】　求方程 $x^3+3x–2=0$ 的根。

【解】　键入如下命令并运行：

Roots[x^2+3x–2==0,x]

$$x==\frac{1}{2}(-3-\sqrt{17})||x==\frac{1}{2}(-3+\sqrt{17})$$

因为结果是两个逻辑表达式的“或”，为了转化成 x–>a 的形式，可以使用 ToRules 函数，即：

{ToRules[%]}

$$\{\{x\to\frac{1}{2}(-3-\sqrt{17})\},\{x\to\frac{1}{2}(-3+\sqrt{17})\}\}$$

4．Reduce[ ]

Reduce 函数可以给出方程的全部解。试比较用 Slove 和 Reduce 求解 $ax^2+bx+c=0$ 。

用函数 Solve 求解并运行如下：

$$\text{Solve}[ax^2+bx+c==0,x]$$

$$\{\{\{x\to\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\},\left\{x\to\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\}$$

用 Reduce 函数求解并运行如下：

$$\text{Reduce}[ax^2+bx+c==0,x]$$

$$x==\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\&\&a\neq 0||x==\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\&\&a\neq 0||$$

$$a==0\&\&b==0\&\&c==0||a==0\&\&x==-\frac{c}{b}\&\&b\neq 0$$

比较上述结果可见，Reduce 函数详细讨论了各种可能的情况，而 Solve 函数只考虑了 a≠0 的一种情况。

5．切线法

切线法命令的格式为：

FindRoot[eqn,{x,x0}]

对于没有初等函数解的方程，Solve 函数可能解不出来，这时可以用 FindRoot[ ]函数求方程的近似解。用 FindRoot[ ]函数时，Mathematica 是根据牛顿迭代法的原理来求根的近似值。因此初值 x0 要选择得与真值相近。

【例 4-34】　求解方程 $\cos x=x$ 。

【解】　键入其命令并运行如下：

Solve[cos[x]==x,x]

FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]

```
Solve[cos[x]==x,x]
{x–>0.739085}
```

从运行情况可以看出，第一个命令没有得到结果，而第二个命令得到了方程的解为0.739085。

注意：用以上的方法得到的解是形式解的集合，它不能直接在以后的运算中使用，如果希望在计算中使用方程的根，可以将这些形式解的值存入一个数表中，其数表中的元素就可以带入到各种表达式中去进行计算了。

【例 4-35】　将方程 $x^5+x^2-x+1=0$ 的根存入一个数表。

【解】　编写程序并运行如下：

```
NSolve[x^5+x^2–x+1==0,x]
{{x–>–1.32472},{x–>–1.i},{x–>1.i},
 {x–>0.662359–0.56228i},{x–>0.662359+0.56228i}}
a=x/.%
{–1.32472,–1.i,1.i,0.662359–0.56228i,0.662359+0.56228i}
a[[1]]
–1.32472
```

将上面所求得的解转化为集合，然后就可以用提取表元素的方法随意引用。

6．割线法

如果用牛顿迭代法求不出根，则可选用割线法求近似值。割线法的命令格式为：

```
FindRoot[eqn,{x,x0,x1} ]
```

其中，(x0,x1)为根的间隔区间，即在该区间里有且仅有方程的一个根。

【例 4-36】　求方程 $x^3+3x^2-3x+9=0$ 的根。

【解】　先用切线法编写程序并运行：

```
FindRoot[x^3+3x^2–3x+9==0,{x,0}]
FindRoot::cvnwt:Newton's method failed to
    converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.
{x–>–0.381416}
```

此时，系统提示出错，并给出一个并不存在的根。

使用下述画图命令并运行：

```
Plot[2x^3+6x^2–6x+18,{x,–5.5}]
```

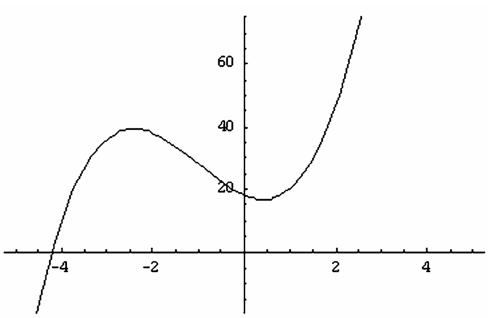


图 4-29

由图 4-29 可看出方程在 $x=-4$ 附近有一个根。

再使用割线法编写程序并运行：

```
FindRoot[x^3+3x^2–3x+9==0,
 {x,–5,–4}]
{x–>–4.21736}
```

方程得到正确的解。

4.5.2　求解联立方程

Solve[ ]函数也可用来求解方程组，其格式为：

```
Solve[{f1[x,y]==0,f2[x,y]==0},{x,y}]
```

【例 4-37】　求解 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$。

【解】　编写程序并运行如下：

```
Solve[{a1*x+b1*y==c1,a2*x+b2*y==c2},{x,y}]
```

$\{\{x\to -\frac{-b2c1+b1c2}{-a2b1+a1b2}, y\to -\frac{-a2c1+a1c2}{a2b1-a1b2}\}\}$

一般的线性方程也可以用矩阵形式表示，如：

```
{{3,1}},{2,–5}.{x,y}=={7,8}
{3x+y,2x–5y}=={7,8}
Solve[%,{x,y}]
```

$\{\{x\to\frac{43}{17}, y\to -\frac{10}{17}\}\}$

对于非线性方程组，由 Solve 函数求得的解要用 First[ ]函数来得到解。

【例 4-38】　求解 $\begin{cases} x^2+y^2=xy \\ x+y+xy=1 \end{cases}$。

【解】　根据题意键入命令如下：

$\text{First[solve[\{}x^2+y^3==xy, x+y+xy==1\text{\},\{x,y\}]]}$

运行结果为：

{x–>

$\frac{4}{3}-xy-$

$\left(72^{1/3}\right)\Big/$

$(3(-47+99xy-27xy^2+3\sqrt{3}\sqrt{31-214xy+345xy^2-166xy^3+27xy^4})$^

$(1/3))+$

$(22^{1/3}\text{xy})/$

$(\text{-47+99xy-27xy}^2\text{+3}\sqrt{3}\sqrt{\text{31-214xy+345xy}^2\text{-166xy}^3\text{+27xy}^4})\text{^}$

$(1/3)\text{-}\dfrac{1}{32^{1/3}}$

$((\text{-47+99xy-27xy}^2\text{+3}\sqrt{3}\sqrt{\text{31-214xy+345xy}^2\text{-166xy}^3\text{+27xy}^4})\text{^}$

$(1/3)),$

y–>

$-\dfrac{1}{3}-(2^{1/3}(-7+6\text{xy}))/$

$(3(-47+99\text{xy}-27\text{xy}^2+3\sqrt{3}\sqrt{31-214\text{xy}+345\text{xy}^2-166\text{xy}^3+27\text{xy}^4})\text{^}$

$(1/3))+\dfrac{1}{32^{1/3}}$

$((-47+99\text{xy}-27\text{xy}^2+3\sqrt{3}\sqrt{31-214\text{xy}+345\text{xy}^2-166\text{xy}^3+27\text{xy}^4})\text{^}$

$(1/3))\}$

4.5.3　解微分方程

解微分方程的主要命令有：

（1）DSolve[degn,y[x],x]　　求微分方程的通解；

（2）DSlove[{degn,y[x_0]== y_0 }, $y[x], x$]　　求满足 $y(x_0)=y_0$ 的特解；

（3）NDSolve[{degn,y[x0]==y0},y,{x,x0,x1}]　　求微分方程满足初始条件并在指定范围内的数值解。

【例 4-39】　解微分方程 $y'-xy=3x$ 。

【解】　键入命令如下：

```
DSolve[y'[x]–x∗y[x]==3∗x,y[x],x]
```

其运行结果为：

$\{\{y[x]\to -3+e^{\frac{x^2}{2}}c[1]\}\}$

【例 4-40】 求微分方程 $\begin{cases} y'=ay \\ y(0)=5 \end{cases}$ 的特解。

【解】　键入命令并运行如下：

```
DSolve[{y´[x]==ay[x],y[0]==5},y[x],x]
```

$\{\{y[x]\to 5e^{ax}\}\}$

【例 4-41】　求微分方程 $\begin{cases} y^{(3)}+y''+y'=-y^3 \\ y(0)=1,\ y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}$ 的数值解。

【解】　编写程序并运行：

```
solution=
 NDSolve[{ y^(3) [x]+y" [x]+y′ [x]==–y[x]^3 ,y[0]==1,
    y'[0]==y" [0]==0},y,{x,0,20}];
Plot[Evaluate[y[x]/.solution],{x,0,20}];
```

运行后得到方程在(0, 20)之间的解的积分曲线如图 4-30 所示。

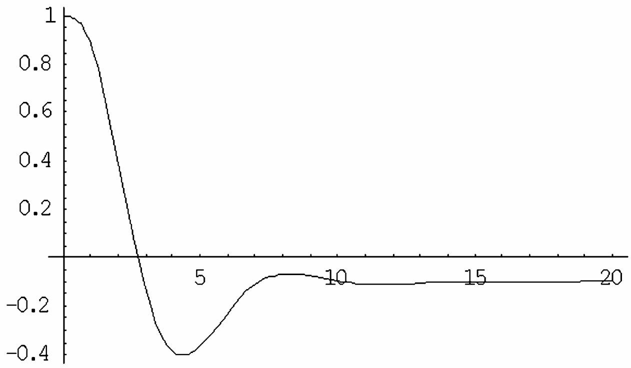


图 4-30

习题 4-5

1）求方程 $x^3-6x^2-2x+12=0$ 的全部解。

2）求方程 $\cot x=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{2}$ 最接近于零的两个正根。

3）求方程 $\cos x=x^2$ 的全部根。

4）解方程 $x^5-2x+1=0$。

5）解微分方程 $y'=x-y^2$。

6）解微分方程 $y'+y=1$。

4.6　用 Mathematica 的相应功能进行向量、矩阵运算

在 Mathematica 中，有序数组被称为“表”（list）。“表”既可以表示成集合，也可以表示成向量和矩阵。Mathematica 中的许多函数都可以作用在表上。

4.6.1　向量和矩阵的输入

使用键盘输入一个表时，用{　}将表的元素括起，元素之间用逗号分隔。

【例 4-42】　输入一组数据 0, 16, 64, 144, 256，并把这个数组定义为变量 data。

【解】　其命令如下：

```
data={0,16,64,144,256}
```

运行后系统输出：

```
{0,16,64,144,256}
```

【例 4-43】　输入矩阵 $M=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$。

【解】　键入命令如下：

```
M={{2,5,–1}，{0,–1,3}，{1,2,–2}}
```

运行后系统输出：

```
{{2,5,–1}，{0,–1,3}，{1,2,–2}}
```

注意：矩阵的每一行用{　}括起，行与行之间用逗号分开。

对于某些有规律的表，Mathematica 提供了函数 Table[ ]和 Nestlist[ ]。

【例 4-44】　已知数列通项 $x_n = n^2$，请给出数列的前 10 项。

【解】　根据题意写出命令并运行如下：

```
Table[n^2,{n,1,10}]
{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100}
```

【例 4-45】　给出 30 以内的奇数。

【解】　根据题意写出命令并运行如下：

```
Table[n,{n,1,30,2}]
{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29}
```

【例 4-46】　给出 5, $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[8]{5}$, L , $\sqrt[2^n]{5}$, L 。

【解】　根据题意写出命令并运行如下：

```
NestList[Sqrt,5,20]//N
{5.,2.23607,1.49535,1.22284,1.10582,1.05158,
 1.02547,1.01265,1.00631,1.00315,1.00157,1.00079,1.00039,
 1.0002,1.0001,1.00005,1.00002,1.00001,1.00001,1.,1.}
```

此外，特殊矩阵的输入命令还有：

Table[f[i,j],{i,m}.{j,n}]　　　　生成以 f 的计算值为元素的 *m* 行 *n* 列矩阵

Array[a,{m,n}]	生成以 a[i,j]为元素的 *m* 行 *n* 列矩阵
IdentityMatrix[n]	生成 *n* 阶单位阵
DiagonaMatrix[List]	生成以表中元素为对角元的对角矩阵

【例 4-47】　生成三阶 Hilbert 矩阵。

【解】　依题意键入命令如下：

```
Table[1/(i+j–1),{i,3},{j.3}]
MatrixForm[%]
```

运行后得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

【例 4-48】　生成四阶单位阵。

【解】　键入命令并运行如下：

```
IdentityMatrix[4]
{{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,01,0},{0,0,0,1}}
```

【例 4-49】　生成一个以 1, 2, 3, 4, 5 为对角元的对角矩阵，并用矩阵形式表示。

【解】　根据题意键入命令如下：

```
DiagonalMatrix[{1,2,3,4,5}];
MatrixForm[%]
```

运行后得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4.6.2　获得表的元素

在 Mathematica 中获得表的元素的规则如下：

若 $\boldsymbol{A}$ 是一个向量，则 A[i]表示向量的第 i 个元素。若 $\boldsymbol{M}$ 是一个 m 行 n 列矩阵，则用 M[[i]]表示矩阵的第 i 行。

用 M[[i,j]]表示第 i 行、第 j 列交叉点处的元素。

用 Transpose[m][[j]]表示 $\boldsymbol{M}$ 的第 j 列。

用 M[[{i1,i2},{j1,j2}]]表示：取 $\boldsymbol{M}$ 的第 $i1$、$i2$ 行，$j1$、$j2$ 列构成的子矩阵。

【例 4-50】 构造一个 3×3 的矩阵，再取出它的元素。

【解】 根据题意编写程序并运行如下：

```
M=Array[a,{3,3}];
MatrixForm[%]
M[[2]]
M[[3,2]]
Transpose[M][[3]]
M[[{1,3},{2,3}]]
```

$$\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] \end{pmatrix}$$

{a[2,1], a[2,2], a[2,3]}	取出第 2 行
a[3,2]	取出第 3 行、第 2 列的元素
{a[1,3], a[2,3], a[3,3]	取出第 3 列
{{a[1,2],a[1,3]},{a[3,2],a[3,3]}}	取出由第 1、3 行，第 2、3 列构成的子矩阵

4.6.3　表的维数和矩阵的加、减法

1．表的维数

用 Dimensions[list]给出向量或矩阵的维数。

【例 4-51】 求向量 $\boldsymbol{a}$=(1, 2, 3, 4)和矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$的维数。

【解】 依题意编写程序如下：

```
T={1,2,3,4}
m={{1,2,3},{4,5,6}}
Dimensions[T]
Dimensions[m]
```

运行后得出：

```
{4}          (*向量的维数为 4*)
{2，3}       (*矩阵是 2 行 3 列*)
```

2．矩阵的加、减法

在 Mathematica 中，矩阵可以表述成表，而相同维数的表可以相加，它的和是两表对

应元素相加所得的同维的表。

例如：

```
{a1,a2,a3}+{b1,b2,b3}
```

运行后得：

```
{a1+b1,a2+b2,a3+b3}
```

m_1 =Array[a,{3,2}];

m_2 =Array[b,{3,2}];

MatrixForm[$m_1 + m_2$]

$$\begin{pmatrix} a[1,1]+b[1,1] & a[1,2]+b[1,2] \\ a[2,1]+b[2,1] & a[2,2]+b[2,2] \\ a[3,1]+b[3,1] & a[3,2]+b[3,2] \end{pmatrix}$$

4.6.4　向量和矩阵的乘法

1．向量的内积

向量内积的命令格式为：

```
{a1,a2,a3}.{b1,b2,b3}
```

运行后得：

```
a1b1+a2b2+a3b3
```

2．矩阵的乘积

【例 4-52】　计算下列矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c1 & c2 \\ d1 & d2 \\ e1 & e2 \end{pmatrix}$$

【解】　编写命令并运行如下：

m_1 ={{a1,a2,a3},{b1,b2,b3}}

m_2 ={{c1,c2},{d1,d2},{e1,e2}}

$m_1 . m_2$

$$\begin{pmatrix} a1c1+a2d1+a3e1 & a1c2+a2d2+a3e2 \\ b1c1+b2d1+b3e1 & b1c2+b2d2+b3e2 \end{pmatrix}$$

注意：这里的乘法使用“.”是 Mathematica 特有的，这种乘法不满足交换律，当向量与矩阵相乘用“.”时，Mathematica 能自动把向量看做行向量或列向量。

例如，矩阵 ***m*** 左乘向量 ***v*** 时，***v*** 被看做列向量，而矩阵 ***m*** 右乘向量 ***v*** 时，***v*** 被看做行向量。

4.6.5　关于矩阵的几个常用函数

Mathematica 中关于矩阵的几个常用函数如下：

Inverse[M]	求 ***M*** 的逆矩阵
Transpose[M]	求 ***M*** 的转置矩阵
Det[M]	方阵 ***M*** 的行列式
Eigenvalues[M]	求矩阵 ***M*** 的特征值

【例 4-53】　演示以上几个函数的用法。

（1）求矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的逆矩阵；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$的转置矩阵；

（3）求（2）题中矩阵的行列式；

（4）求（2）题中矩阵的逆矩阵。

【解】　依题意编写程序并运行如下：

Inverse[{{a,b},{c,d}}]

$\{\{\frac{d}{-bc+ad}', -\frac{b}{-bc+ad}\}'\{-\frac{c}{-bc+ad}' \frac{a}{-bc+ad}\}\}$

m={{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}};

m1=Transpose[m]

{{1,4,7},{2,5,8},{3,6,9}}

Det[m]

0

Inverse[m]

Inverse::sing:

Matrix{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}} is singular.

Inverse[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]

由系统给出的提示可以看出，所计算的矩阵是奇异（singular）的。

【例 4-54】　计算非奇异矩阵 $\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

【解】　依题意编写如下程序并运行：

```
m2={{2,–2,0},{–2,1,–2},{0,–2,0}};
Inverse[m2]
```

$\{\{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\},\{0,0,-\frac{1}{2}\},\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\}\}$

【例 4-55】　求例 4-54 中矩阵的特征值。

【解】　键入命令并运行如下：

```
Eigenvalues[m2]
{–2,1,4}
```

由系统给出的结果可知，运行后得到矩阵 $\boldsymbol{M}_2$ 的三个特征值分别为–2, 1, 4。

【例 4-56】　求方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2-6x_4=9\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$ 的解。

【解】　编写程序并运行如下：

```
A={{2,1,–5,1},{1,–3,0,–6},{0,2,–1,2},
  {1,4,–7,6}}
b={8,9,–5,0}
Inverse[A].b//N
{3.,–4.,–1.,1.}
```

习题 4-6

1）构造一个以 1, –2, 3, 1 为对角元的对角矩阵。

2）生成矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$，并将结果用矩阵形式给出。

3）取出第 2）题中矩阵的第 2 行、第 3 行与第 2 列交叉点元素、第 1 列以及由第 1 行和第 2 行，第 2 列和第 3 列构造的子矩阵。

4）计算下列矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

5）求矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

6）假设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足如下关系

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$ 。

4.7　Mathematica 编程初步

在第 4 篇的前面几节里，已经分别介绍了各种各样的操作，包括函数的使用、数学计算等内容，但是要完成一个指定的计算任务，往往还需要由自己来编制一些程序。Mathematica 中提供了一般的程序流程完成的方式，包括顺序结构、条件结构和分支结构。下面就 Mathematica 的程序编制讲解一些初步的知识。

4.7.1　全局变量和局部变量

Mathematica 在工作时会自动启动一个程序，叫做“Mathematica Kernel”，它是负责计算和存储计算结果的程序。无论打开多少个窗口，计算中总是只有一个 Kernel 在运行。因此我们平常使用的变量都是全局变量，这些变量有这样的特点：一旦赋值它会作用于以后的计算，因而容易造成混乱。所以在复杂的程序设计中需要引进一些局部变量。在编写程序和函数时，如果用到了中间变量，一定要使用局部变量。坚决避免用全局变量作为函数或者程序的中间变量，否则很有可能出现不易发觉的错误。

怎样把局部变量与全局变量隔离开?

在 Mathematica 中，使用 Module 结构可以解决这个问题，Module 结构不但是分隔局部变量的机制，更重要的还是定义复杂函数或过程的机制，Mathematica 中 Module 结构的使用形式如下：

```
Module[ {局部变量列},表达式列 ]
```

其中，“{局部变量列}”说明一个或者多个局部变量，后面的“表达式列”可以使用这些局部变量。对这些局部变量的操作不会影响到 Module 结构外的同名变量。

“表达式列”中的各表达式用分号分隔，整个 Module 结构返回表达式列中最后一个表达式的值。

Module 结构不但能调用 Mathematica 中的函数，还能调用自定义的函数。

下面用一些例子详细说明 Module 结构的用法。

【例 4-57】　定义一个函数，其自变量为一个数组，求出这个数组的最大值、最小值、平均值和方差。

【解】　根据题意编写程序如下：

```
f[x_List]:=Module[{M,m,E,D,t},M=Max[x];m=Min[x];
                  E=Apply[Plus,x]/Length[x];
                  t=(x–E)^2;
                  D=Sqrt[Apply[Plus,t]]/Length[x];
                  {M,m,E,D}];
f [{1,2,3,4,5,6,7,8}];
```

其运行结果为：

```
{8., 1., 4.5, 0.810093}
```

如果只用简单的一行自定义函数，而不采用 Module 结构的话，是无法完成例 4-57 中的多个输出要求的。

【例 4-58】　给定平面三个点的坐标定义一个函数，求这三个点组成的三角形的面积（公式为 $s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$）。

【解】　依题意编写程序并运行如下：

```
s[x_List,y_List,z_List]:=
  Module[{a,b,c},
      a=Prepend[x,1];b=Prepend[y,1];c=Prepend[z,1];
      Abs[Det[{a,b,c}]/2]
      ];
s[{1,2},{0.4,5},{3,7.6}]
```

运算结果为 4.68。

【例 4-59】　求拉格朗日中值定理中的 c，使 $f'(c)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$

【解】　编写程序并运行如下：

```
Lagrange[f_,a_,b_]:=
     Module[{v,u,t,c,s,q,w={}},
```

```
                    v=Variables[f][[1]]          (*求 f 的自变量*);
                    u=D[f,v];t=((f/.v–>b)– (f/.v–>a))/(b–a);
                    s=Solve[u==t,v];
                    For[i=1,i<=Length[s],i++,
                      If[N[(v/.s[[i]])]>a&&N[(v/.s[[i]])]<b,
                         w=Append[w,v/.s[[i]]] (*如果求出的点落在(a,b)内,则把它加入 w *)
                           ];
                         ];
                      w
                    ];
Lagrange[x^2+3x+2,1,8]
```

运行结果为：

```
{4.5}
Lagrange[t+ArcTan[t],0,1]
```

最后结果为：

```
{0.522723}
```

【例 4-60】　构造一个函数，求出正整数 n 的全部素因子。

【解】　编写程序如下：

```
feima[n_]:=Module[{w={},i=2,u},
                  u=n;
                  While[i<u,
                    If[Mod[u,i]==0,u=u/i;
                  AppendTo[w,i];i=1];i++];
                  AppendTo[w,u]];
feima[2^2^5+1]
```

运行后得结果为：

```
{641, 6700417}
```

这是有名的费尔马问题，形式如 $2^{2^n}+1$ 的数是否一定是素数，程序的结果说明，当 n=5 时，它有两个因子，因此命题不成立。

4.7.2　循环结构

1.While[条件，表达式]

While[条件，表达式]中的“条件”是一个逻辑表达式，执行时系统先对条件求值，

如得到结果为 True，则求它的表达式值，然后重复上述过程，直到条件不满足为止，循环结束。

【例 4-61】 求平方小于 100 的最大的整数。

【解】 编写程序并运行如下：

```
Clear[x];
x=0;
While[x^2<=100,x=x+1];
Print["x=",x−1]
```

运行结果为：

```
x=10
```

2．For[i=1，i<=imax ,n++,表达式]

在 For[ ]循环中，“i”表示循环变量，“i=1”表示循环变量从初值 1 开始，“i<=imax”表示循环变量所能取的最大范围，“i+”表示步进变量，“n++”表示将 n 的值增加一个单位；“n+=2”表示将 n 的值增加两个单位。

【例 4-62】 求出前 10 个自然数的和 L 与前 10 个自然数的乘积 S。

【解】 依题意编写程序并运行如下：

```
L=0;S=1;
For[i=1,i<=10,i++,
    L=L+i;
    S=S*i;
   ]
Print["L=",L]
Print["S=",S]
```

运行结果为：

```
L=55,  S=3628800
```

【例 4-63】 计算 1+1/3+1/5+…+1/10 的值。

【解】 编写程序并运行如下：

```
S=0;
For[i=1,i<=10,i+=2,
    S=S+1/i;
   ]
Print["S=",N[S,10]]
```

运行结果为：

```
S=1.787301587
```

【例 4-64】　求 Fibonacci 数列的第 40 项。

【解】　编写程序并运行如下：

```
fibonacci={1,1};
For[i=1,i<=38,i++,
    fibonacci=Append[fibonacci,fibonacci[[i]]+
                fibonacci[[i+1]]]
  ]
Print["fibonacci[[40]]=",fibonacci[[40]]]
```

运行结果为：

```
fibonacci[[40]]=102334155
```

【例 4-65】　求自然对数的底 e 的近似值。

【解】　编写程序并运行如下：

```
e=1;t=1;
For[k=1,k<=10,k++,
    t=k*t;
    e=e+1/t
   ];
N[e,10]
```

运行结果为：

```
2.718281801
```

3. Do[表达式，循环描述]

Do[ ]循环是一种数步式的循环方式，它需要在“循环描述”中指定步数。

【例 4-66】　将 $t=t^2+1$ 从 t=1 开始执行 3 次。

【解】　编写程序并运行如下：

```
Clear[t]
t=1;
Do[t=t^2+1,{3}]
Print["t=",t]
```

运行结果为：

```
t=26
```

【例 4-67】　将 $x=\dfrac{1}{1+kx}$ 中的 k 从 2～4 进行循环迭代。

【解】　编写程序并运行如下：

```
Clear[x,t,k]
    t=x;
     Do[t=1/(1+k*t),{k,2,4}]
     t
```

运行结果为：

```
(1 + 4/(1 + 3/(1 + 2*x)))^(–1)
```

4．FixedPoint[函数，初值]

FixedPoint[ ]命令是将已给函数从给定的初值开始进行迭代，如果这个迭代格式存在不动点的话，则一直迭代到计算出不动点。

【例 4-68】　求证线性函数 $0.2x+5$ 无论从哪一个点出发，经过多次迭代都将收敛于同一个数，即存在不动点。

【解】　定义函数并使用 FixedPoint[ ]命令：

```
f[x_]:=0.2 x+5;
FixedPoint[f,0]
```

其运行结果为 6.25。

在这里是令初值为 0，读者若有兴趣，可以改变初值来做实验，观察其迭代的结果是否都一样。

5．表达式//.替换规则

【例 4-69】　用 t+1 替换 x^2+2x-1 中的 x 直到不变为止。

【解】　使用表达式//.替换规则：

```
Clear[t,x]
x^2+2*x–1//.x–>t+1
```

其运行结果为：

$-1+2\ (1+t)+(1+t)^2$

6．Nest[函数，表达式，整数 n]

Nest[函数，表达式，整数 n]将表达式代入函数，作用于给定的次数 n。

【例 4-70】　将表达式 x^2+x+1 代入函数 $f(x)=x^2$，一共代入 3 次。

【解】　使用 Nest[ ]命令如下：

```
f[x_]:=x^2;
Nest[f,x^2+x+1,3]
```

其运行结果为：

$(1 + x + x^2)^8$

4.7.3　分支结构

1．If [条件，表达式]

使用 If [条件, 表达式]命令时，系统首先检查“条件”，当“条件”为 True 时，求“表达式”的值；当“条件”为 False 时，返回 Null。

使用 If [条件, 表达式 1, 表达式 2]时，当“条件”为 True 时，求“表达式”1 的值；当“条件”为 False 时，求“表达式 2”的值。

使用 If [条件, 表达式 1, 表达式 2, 表达式 3]时，当“条件”为 True 时，求“表达式 1”的值；当“条件”为 False 时，求“表达式 2”的值；当“条件”表达式求不出 True 或 False 时，以“表达式 3”的值作为结果。

【例 4-71】　If[ ]命令示例。

【解】　键入命令如下：

```
y=Input[ ]
If[x!=Integer,y=1,y=2,y=3];
y
```

解释：运行程序后，系统等待从键盘上输入一个数，如果输入的是整数，则系统返回 1；如果输入的不是整数，则系统返回 2；如果输入的是个不可识别的符号，则系统返回 3。

2．Which[条件 1，表达式 1，条件 2，表达式 2,⋯]

【例 4-72】　用 Which 命令定义分段函数。

【解】　键入命令如下：

```
f[x_]:=Which[x>0,x+1,x<0,exp[x]];
            Print["f[2]=",f[2]]
            Print["f[−1]=",f[−1]]
            Print["f[0]=",f[0]]
```

运行结果为：

```
f[2]=3
f[−1]=exp[−1]
f(0)=Null
```

3．Switch[判别表达式，模式 1，表达式 1，模式 2，表达式 2,⋯]

【例 4-73】　构造一个函数，当 x 被 3 整除时，函数值为 a，当 x 关于 3 的模为 1

时，函数值为 *b*，当 *x* 关于 3 的模为 2 时，函数值为 *c*。

【解】　该函数的定义方式为：

```
h[x_]:=Switch[Mod[x,3],0,a,1,b,2,c]
```

读者可以使用这个函数来计算当变量取不同值时的函数值。

4.7.4　转向结构

转向结构包括以下命令项：

Break[ ]　用在 For, While（Do 不能使用）语句中，表示结束包含这个 break 表达式的最近循环，且以 Null 作为该结构的值。

Continue[ ]　立即结束包含这个 Continue 的循环，执行下一次循环。

Return　从函数的求值过程中退出。

Return[ ]　退出函数的求值，以 Null 作为当前函数值。

Return[expr]　退出函数的求值，以 expr 作为当前函数值。

Mathematica 转向结构典型的使用结构为:

```
While(或 For)[…,
      …,…;
         If[…,Continue[ ] ];
      …,…;
         If[…,…,Break[ ] ];
      …,…
     ]
```

【例 4-74】　求 20～300 之间不能被 5 整除的所有数。

【解】　编写程序并运行如下：

```
w={ };
For[i=50,i<=300,i++,
   If[Mod[i,5]==0,Continue[]];w=Append[w,i];
   ];
w
```

为节省篇幅，此处不输出结果。

【例 4-75】　求 20～500 之间不能被 8 整除的第 10 个数。

【解】　编写程序并运行如下：

```
w={};
For[i=50,i<=300,i++,
```

```
        If[Mod[i,8]!=0,w=Append[w,i]];If[Length[w]==10,Break[]]
    ];
w,i
```

运行结果为：

```
60
```

转向结构中的 Goto[标志]和 Lable[标志]用于在复合表达式中实现执行的控制转移。Lable[标志]是一个位置的标识，本身什么也不做；而 Goto[标志]将执行立即转移到具有同一标志的 Lable 位置去。

其典型使用方式为：

```
Module[…,
        …;
        Lable[a];
        …;
          If[…,Goto[a]];
        …]
```

【例 4-76】 Goto[标志]的作用在于越过某些语句去执行指定的语句。

【解】 Goto[ ]命令示例如下：

```
x=1;y=3;
If[y>x,Goto[aa]];
y=78;
Label[aa];y
```

其程序运行结果为 3 ，而不是 78，说明在执行程序过程中条件满足“y>x”，因此执行跳转到标志为“aa”的语句。

习题 4-7

1）用 Do 循环同时计算 50, 60, 70 的平方根。

2）用迭代法计算费波那奇数。

3）运用循环语句编写一个用牛顿迭代法求方程根的程序，使其返回由所有计算出来的近似值作为元素的表。

4）利用 FindRoot[ ]命令编写一个程序，在运行中允许输入不同的初值，并且对每一个初值进行迭代计算近似值，直到其中一个初值最后收敛为止，然后返回这一个初值。

附录 A
常用 Mathematica 命令分类检索

A.1　微积分

1．常数变量

Mathematica 中的常数变量如表 A-1 所示。

表 A-1　常数变量表

常 数 变 量	含　　意
Integer	任意长度的整数
Rational	有理数
Real	实数
Complex	复数
Pi	圆周率π
E	自然对数的底 e≈2.7182818…
Degree	度与弧度的转换
GoldRatio	黄金分割点 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$
FulerGamme	
Catalan	
Khinchin	
I	虚数单位
Infinify	∞
Indeterminate	

2．函数

Mathematica 中的数学函数如表 A-2 所示。

表 A-2　数学函数表

函　数　名	含　　意
Abs[x]	求 x 的绝对值
Exp[x]	求 e 的 x 次幂
Log[x]	求 x 的自然对数 Ln(x)
Log[b,x]	求以 b 为底的 x 的对数
Sin[x]	求 x 的正弦函数
Cos[x]	求 x 的余弦函数
Tan[x]	求 x 的正切函数
ArcSin[x]	求 x 的反正弦函数

续表

函　数　名	含　　意
Arc Cos[x]	求 *x* 的反余弦函数
Arc Tan[x]	求 *x* 的反正切函数
Random[ ]	产生一个 0～1 之间的随机数
Max[x,y,z…]	取 x, y, z,…之间的最大值
Min[x,y,z…]	取 x, y, z,…之间的最小值
FactorInteger[n]	求出整数 *n* 的所有素数因子
Round[x]	求 *x* 的整数部分
Mod[n,m]	取模运算

3．求极限

Mathematica 中的求极限命令如表 A-3 所示。

表 A-3　求极限命令表

求极限命令格式	含　　意
Limit[expr,x->x0]	求 *x* 逼近 *x*0 时 expr 的极限
Limit[expr,x->x0,Direction->1]	求 *x* 沿数轴正方向逼近 *x*0 时 expr 的极限
Limit[expr,x->x0,Direction->-1]	求 *x* 沿数轴负方向逼近 *x*0 时 expr 的极限

4．画图形

Mathematica 中的绘图命令如表 A-4 所示。

表 A-4　绘图命令

绘 图 命 令	命 令 功 能
Plot[f,{x,xmin,xmax}]	画出函数 *f*(*x*)在所给范围内的图形
Plot[{f1,f2,…},{x,xmin,xmax}]	画出多个函数 *f*(*x*)在所给范围内的图形
ListPlot[{x1,y1},{x2,y2},…]	画出点(*x*1,*y*1),(*x*2,*y*2),…的散点图
ListPlot[{y1,y2,…}]	画出 *x* 值为 1, 2 时 *y*1, *y*2 的图形
ParametricPlot[{fx,fy},{t,tmin,tmax}]	画一个参数图
ParametricPlot[{{fx,fy},{gx,gy},…}{t,tmin,tmax}]	画多个参数图
ParametricPlot3 D[{fx,fy,fz},{t,tmin,tmax}]	画参数 *t* 的空间曲线图
ParametricPlot3D[{fx,fy,fz},{t,tmin,tmax},{u,umin,umax}]	画参数 *t*, *u* 的空间曲线图
ParametricPlot3D[{{fx,fy,fz},{gx,gy,gz}…}]	同时画出一系列空间图形
ContourPlot[f,,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]	按照 *x*, *y* 的值作 *f* 的等值线图
CensityPlot[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]	作 *f* 的等密度图

5．求导与求积分

Mathematica 中的求导和求积分命令如表 A-5 所示。

表 A-5　求导和求积分命令

命令名称及格式	命令的功能
D[f[x],x]	求函数 $f(x)$的导数
D[f[x],{x,n}]	求函数 $f(x)$的高阶导数
D[f[x,y],x,y]	求二元函数 $f(x,y)$对 x,y 的二阶混合偏导数
Dt[f] 全微分 df	
Sum[f,{i,imax}]	求和运算
Nsum[f,{I,imin,imax}]	求和运算的近似值
Product[f,{I,imin,imax}]	求乘积运算
NProduct[f,{I,imin,imax}]	求乘积运算的近似值
Integrate[f,{x,xmin,xmax}]	积分运算
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax}]	积分运算的近似值
Integrate[f,{x,xmin,xmax}]	计算函数 f 关于变量 x 在(xmin, xmax)之间的定积分
Integrate[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]	计算关于函数 f 的多重积分

6．幂级数

Mathematica 中关于幂级数的命令如表 A-6 所示。

表 A-6　幂级数命令

命令名称及格式	命令的功能
Series[expr,{x,x0 ,n}]	求在 $x=x0$ 点处的 x^n 项幂级数的展开表达式
Series[expr,{x,x0 ,n x},{y,y0,ny}]	求多元函数的幂级数展开表达式
Normal[expr]	把一个幂级数变为一般表达式去掉高阶无穷小
Series1/.x->Series	把幂级数 2 代入幂级数 1，合成一个新的幂级数
ComposeSeries[Series1,Series2,…]	把幂级数 Series1 代入幂级数 Series2
InveerseSeries[Series,x]	反演幂级数

7．解方程

Mathematica 中关于解方程的命令如表 A-7 所示。

表 A-7　解方程命令

命令名称及格式	命令的功能
Root[f,k]	求多项式函数 $f(x)=0$ 的第 k 个根
RootReduce[expr]	尽量化简 Roots 函数表达式
ToRadicals[expr]	尽量把 Roots 函数表达式转换成为更清晰的形式
Solve[f[x]==0,x]	求多项式方程的解(存在形式解)
Solve[eghs]	求其中的全部变量
Solve[eghs,{x1,x2,…}]	对指定的变量 xi 求解
Nsolve[lhs==rhs,x]	用数值方法求多项式方程的解
Nsolve[lhs1==rhs1,lhs2==rhs2,…{x,y,…}]	用数值方法求联立多项式方程的解
FindRoot[lhs==rhs,{x,x0}]	用数值方法求多项式方程的解
FindRoot[{lhs1==rhs1,lhs3==rhs2,…},{x,x0},{y,y0}…]	用数值方法求联立多项式方程的解

8．优化

Mathematica 中求极值的命令如表 A-8 所示。

表 A-8　求极值的命令

命令名称和格式	命令的功能
FindMinimun[f,{x,x0}]	求函数在 $x0$ 附近的最小值
ConstrainedMin[f,{inequalities},{x,y,…}]	求函数 f 满足条件的最小值
ConstrainedMax[f,{inequalities},{x,y,…}]	求函数 f 满足条件的最大值

A.2　线性代数

1．向量与矩阵的输入

Mathematica 中向量与矩阵的输入命令如表 A-9 所示。

表 A-9　向量与矩阵的输入命令

命令名称与格式	命令的功能
Table[f,{i,m},{j,m}]	构造 ***mn*** 的矩阵，函数 f 是关于 i 和 j 的函数，f[i,j]为第 i 行第 j 列的元素
Array[f,{m,m}]	构造 ***mn*** 的矩阵，其第 i 行和第 j 列的元素是表达式 f[i,j]
DiagonalMatrix[list]	以集合 list 中的元素构造对角矩阵
IdentityMatrix[n]	构造 ***nn*** 的单位矩阵

2．矩阵元素的提取

Mathematica 中关于矩阵元素的提取命令如表 A-10 所示。

表 A-10　矩阵元素的提取命令

命令名称与格式	命令的功能
List[[i]]或 Part[list,i]	给出集合 list 的第 *i* 个元素
List[[i,j]]或 Part[list,i,j]	给出矩阵 list 的第 *i* 行、第 *j* 列的元素
First[list]	取出集合 list 中的第一个元素
Last[list]	取出集合 list 中的最后一个元素
Part[list,n]或 List[n]	取出集合 list 中的第 *n* 个元素
Part[list,-n] 或 List[-n]	取出集合 list 中的倒数第 *n* 个元素
Part[list,{n1,n2,⋯}] List[[n1,n2,⋯]]	取出集合 list 中的 *n*1, *n*2 等元素组成一个集合
Take[list,n]	取出集合 list 中的前 *n* 个元素
Take[list,-n]	取出集合 list 中的后 *n* 个元素
Take[list,{m,n}]	取出集合 list 中从第 *m* 个元素到第 *n* 个元素
Part[list,i,j,⋯]或 List[[i,j,⋯]]	取出集合 list 中的第 *i* 个元素中的第 *j* 个元素
Rest[list]	删除集合 list 中第一个元素后的集合
Drop[list,n]	删除集合 list 中前 *n* 个元素后的集合
Drop[list,-n]	删除集合 list 中后 *n* 个元素后的集合
Drop[list,{m,n}]	删除集合 list 中从第 *m* 个到第 *n* 元素后的集合
Prepend[list,element]	在集合 list 的起始位置添入元素 element
Append[list,element]	在集合 list 的末尾位置添入元素 element
Insert[list,element,i]	在集合 list 的第 *i* 个元素的位置添入元素 element
Insert[list,element,-i]	在集合 list 的倒数第 *i* 个元素的位置添入元素 element
Insert[list,element,{i,j,…}]	在由集合元素组成的集合 list 中添入元素 element
Delete[list,i]	删除集合 list 第 *i* 位置上的元素
Delete[list,{i,j,⋯}]	删除由集合元素组成的集合 list 的元素
ReplacePart[list,element,i]	用 element 替代集合 list 中的第 *i* 个位置上的元素
ReplacePart[list,element,-i]	用 element 替代集合 list 中的倒数第 *i* 个位置上的元素
ReplacePart[list,element,{i,j,⋯}]	用 element 替代集合元素的集合 list 中的元素

3．矩阵的运算

Mathematica 中的矩阵运算命令如表 A-11 所示。

表 A-11　矩阵运算命令

命令名称和格式	命令的功能
Det[m]	求方阵的行列式值
Transpose[m]	将矩阵 ***M*** 转置
MatrixPower[m,n]	求矩阵 ***M*** 的次幂
MatrixExp[m]	进行矩阵 ***M*** 的指数运算
Eigenvaluse[m]	求矩阵 ***M*** 的特征值组
Eigenvectors[m]	求矩阵 ***M*** 的特征向量组
Eigenvaluestem[m]	求矩阵 ***M*** 的{特征值，特征向量}形式组

A.3　概率论与数理统计

1．排列与组合

Mathematica 中关于排列与组合的命令如表 A-12 所示。

表 A-12　排列与组合的命令

命令名称与格式	命令的功能
n!	$1\cdot 2\cdots n$
(2n+1)!! 2n!!	$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)$ $2\cdot 4\cdots 2n$
Binomial[n,m]	组合数
Multinomial[n1,n2,⋯]	分组组合数 $\dfrac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
Pochhamer[a,n]	选排列 $a\cdot(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$

2．常用分布

Mathematica 中定义了概率论中的各种分布命令如表 A-13 所示。

表 A-13　概率分布命令

DiscreDistributions.m

命令名称和格式	命令的功能
BinomialDistribution[n,p]	二项分布
PoissonDistribution[λ]	泊松分布
GeometricDistribution[p]	几何分布
DiscreteUniformDistribution[n]	离散的均匀分布
BernoulliDistribution[p]	伯努利分布

续表

命令名称和格式	命令的功能
NormalDistribution[μ,σ]	正态分布
ExponentiaDistribution[λ]	指数分布
UniformDisteibution[min,max]	均匀分布
StudentTDistribution[n]	t 分布
ChiSquareDistribution[n]	χ^2 分布
FratioDistribution[n_1,n_2]	F 分布
GammaDistribution[r,λ]	Γ分布

3．一元统计函数

Mathematica 中关于一元统计的各种函数如表 A-14 所示。

表 A-14　一元统计函数

函 数 名 称	函数的功能
Random[ ]	产生（0, 1）之间的均匀随机数
Random[type,Range]	在指定范围内产生所指类型的随机数
Random[Integer]	产生 0 或 1
SeedRandom[n]	以 n 为随机数的种子
SampleRange[data]	求极差
Median[data]	求中值
Mean[data]	求平均值
Variance[data]	求方差（无偏估计）
StandardDeviation[data]	求标准差（无偏估计）
VarianceMLE[data]	求方差
StandardDeviationMLE[data]	求标准差
CentraMoment[data,k]	求 k 阶中心矩
Domain[dist]	求分布 dist 的定义域
PDF[dist,x]	求 dist 的分布密度函数在 x 的值
CDF[dist,x]	求 dist 的分布函数在 x 的值
Quantile[dist,q]	求 x，使 CDF[dist,x]达到 q
Mean[dast]	求分布的期望
Variance[diat]	求分布的方差
StandardDeviation[dist]	求分布的标准差
ExpectedValue[f,dist,x]	求 E[f(x)]
CharacteristicFunction[dist,t]	求分布的特征函数
Random[dist]	求具有分布的伪随机数

4．多元统计函数

Mathematica 中关于多元统计的函数如表 A-15 所示。

表 A-15　多元统计函数

函 数 名 称	函数的功能
Covariance[xlist,ylist]	求 x, y 的协方差的无偏估计
CovarianceMLE[xlist,ylist]	求 x, y 的协方差
Correlation[xlist,ylist]	求 x, y 的相关系数

5．区间估计与假设检验

Mathematica 中关于区间估计与假设检验的命令在程序文件 ConfidenceIntervals.m 中，其名称如表 A-16 所示。

表 A-16　区间估计与假设检验的命令

命令名称及格式	命令的功能
MeanCI[data,KnownVariabce->var]	方差为已知，对数学期望区间进行估计
MeanCI[data]	方差为未知，对数学期望的区间进行估计
NormalCI[mean,sd]	按样本均值，方差为已知，对数学期望的区间进行估计
StudendTCI[mean,se.dof]	按样本均值，方差为未知，对数学期望的区间进行估计

6．Mathematica 编程语言

1）Flow Control 流程控制

Do[expr,{i,imax}]　重复计算 expr，I 从 1～imax，步长为 1。

Do[expr,{i,imin,imax,di}]　重复计算 expr，I 从 imin～imax，步长为 di。

Do[expr,{n}]　计算表达式 expr 共 *n* 次。

While[test,body]　只要 test 为真时就重复执行 body。

For[start,test,incr,body]　以 start 为起始值，重复计算 body 和 incr，直到 test 为 False 为止。

Nest[f,expr,n]　对表达式 f 运用了共 *n* 次。

FixedPoint[f,expr]　以 expr 开始，重复运用 f，一直到结果不再变化为止。

FixedPoint[f,expr,SameTest->Comp]　如果把条件 Comp 运用于两次连续的结果上并得出 true，就结束程序执行。

Lhs:=rhs/;text　当 test 为 Ture 时，使用定义。

If[test,then,else]　若 test 为 Ture，则执行 then，否则执行 else。

Which[test1,value1,test2，…]　依次计算 test 的值，返回第一个为 ture 的 testi 对应的

valuei。

If[test,then,else,unknow]　若 test 为 Ture 则执行 then，若 test 为 False 时则执行 else，不清楚时则执行 unknow。

Switch[expr,form1,value1,form2,⋯]　先计算 expr 的值，然后依次与 formi 比较，返回第一个匹配的 formi 对应的 valuei，如果没有与之匹配的则返回 Null。

Switch[expr,form1,value1,form2,⋯,def]　先计算 expr 的值，然后依次与 formi 比较，返回第一个匹配的 formi 对应的 valuei，如果没有与之匹配的，则返回 def。

Break[ ]　退出最近的一层循环。

Continue[ ]　转入当前循环的下一步。

Return[expr]　退出函数中的所有过程及循环，并返回 expr。

Lable[name]　定义一个名为 name 的标号。

Goto[name]　直接跳转到当前过程中的 name 标号处。

Throw[expr]　退出最近的一层没有完成的 Catch，并返回 expr。

Catch[expr]　计算 expr，直到执行了 Throw[value]并返回 value。

Catch[expr,form]　计算 expr，直到执行了 Throw[value,tag]，其中 tag 与 form 匹配。

Catch[expr,form,f]　计算 expr，直到执行了 Throw[value,tag]，其中 tag 与 form 匹配，然后就返回 f[value,tag]，而不是返回 value。

2）Functional Programing　　函数的程序运用

Function[x,body]　一个纯函数，其变量可以用任何提供的变量代替。

Function[{x1,x2,⋯},body]　具有多个变量的纯函数。

Body&　一个纯函数，变量可以用#1 和#2 等来指定。

Map[f,expr]或者 f/@expr　对 expr 表达式的第一层的项运行函数 f。

MapAll[f,expr]或者 f//@expr　对 expr 表达式的所有项运行函数 f。

Map[f,expr,level]　对 level 层运行函数 f。

MapIndexed[f,expr]　对 expr 表达式运行函数 f，以函数的第二变量形式给出每个变量的标号。

MapIndexed[f,expr,level]　对规定层上的项运行函数 f，给出每项的标号集合。

MapThread[f,{expr1,expr2,⋯}]　对 expr1 和 expr2 等表达式的相应元素运行函数 f。

MapThread[f,{expr1,expr2,⋯},lev]　对规定层上的 expri 中的项运行函数 f。

Scan[f,expr]　依次计算对 expr 中的每个元素运用函数 f 的值。

Scan[f,expr,lev]　对规定层的 expr 的项运用函数 f 的值。

Apply[f,{a,b,c,⋯}]　得到函数 f[a,b,c,⋯]。

Apply[f,expr]或者 f@@expr　对表达式的最高层应用函数 f。

Apply[f,expr,level]　对表达式的指定层应用函数 f。

FoldList[f,x,{a,b,⋯}]　形成集合{x,f[x,a],f[f[x,a],b]⋯}。

Fold[f,x,{a,b,⋯}]　得到上面函数 FoldList 的最后一个元素。

Nese[f,x,n]　对 *x* 嵌套运用函数 f　*n* 次。

NestList[f,x,n]　产生一个集合：{x，f[x]，f[f[x]],⋯}直到迭代 *n* 次为止。

FixedPoint[f,x]　重复运用函数 f，直到结果不变。

FixedPointList[f,x]　产生一个集合：{x，f[x]，f[f[x]],⋯}直到结果不变为止。

FixedPoint[f,x,SameTest->comp]　重复运用函数 f，直到两个连续结果运用 comp 为止。

Array[f,n]　构造集合{f[1],f[2],⋯}。

Array[f,{n1,n2,…}]　构造一个 n1 · n2 · ⋯的迭代集合。

NestList[f,x,n]　构造集合{x,f[x],f[f[x]],⋯}，式中函数 f 迭代到 *n* 层。

FoldList[f,x,{a,b,⋯}]　构造集合{x,f[x,a],f[f[x,a],b]⋯}。

ComposeList[{f1,f2,⋯},x]　构造集合{x,f1[x],f2[f1[x]],⋯}。

Composition[f,g,⋯]　求函数 f, g, ⋯的复合函数。

InverseFunction[f]　求函数 f 的反函数。

Through[p[f1,f2][x],q]　若 p=q，则给出 p[f1[x],f2[x]]。

Operate[p,f[x]]　给出 p[f][x]。

Operate[p,f[x],n]　在函数 f 的 n 层上应用 p。

MapAll[p,expr,Heads->true]　在 expr 的所有项应用 p，包括头部。

Sort[expr]　把集合中的元素或者其他表达式元素变为标准顺序。

Sort[expr,pred]　判断元素是否按 Pred 条件顺序排列。

OrderedQ[expr]　若 expr 按标准顺序排列则为真，否则为假。

Order[expr1,expr2]　根据标准顺序的规定，若 expr1 在 expr2 之前则为真，否则为假。

Flatten[expr]　将函数中的嵌套展平。

Flatten[expr,n]　将函数中的第 *n* 层展平。

Flatten[expr,n,h]　用 h 头部来展平函数。

FlattenAt[expr,i]　展平表达式中的第 *i* 个元素。

Distribute[f[a+b+⋯,⋯]]　将函数 f 运用到求和的各个项上。

Distribute[f[args]]　将函数 f 运用到具有头部 g 的项上。

Distribute[expr,g,f]　只有当头部为 f 时才进行分配。

Distribute[expr,g,f,gp,fp]　将函数 f 运用到 g 上，然后分别用 fp 和 gp 来代替函数 f 和 g。

3）Pattern Matching　模型匹配

Case[list,form]　找出集合中与 form 相匹配的元素。

Case[expr,lhs->rhs]]　在 expr 中找出与 list 相匹配的元素，并根据变换规则输出结果。

Case[expr,lhs->rhs,lev]　在规定的层上测试 expr 项。

Case[expr,form,lev,n]]　找出前 *n* 个与 form 相匹配的元素。

Count[list,form]　给出集合中与 form 相匹配的元素的个数。

Count[list,form]　在规定的层上求出与 form 相匹配的项的总数。

Position[list,form,{1}]　给出集合中与 form 相匹配的元素位置。

Position[list,form,lev]　找出在规定的层上与 form 相匹配的元素位置。

Position[list,form,lev,n]　找出前 *n* 个与 form 相匹配的元素的位置。

Select[list,test]　当 test 为 true 时，找出集合中的元素。

DeleteCases[expr,form]　删除 expr 中与 form 相匹配的元素。

DeleteCases[expr,form,lev]　在规定的层上删除与 form 相匹配的元素。

ReplaceList[expr,lhs->rhs]　找出各种符合 lhs 的元素。

_　表示任何单个表达式。

x_　表示名为 x 的单个表达式。

__　表示一个或者多个表达式。

x__　表示名为 x 的一个或者多个表达式。

4）Rule Application 变换法则

Expr/.lhs->rhs　对 expr 运用变换法则。

Expr/.{lhs1->rhs2,lhs2->rhs2,…}　对 expr 各项运用一系列变换法则。

Expr/.{rule1,rule2,…}　给出依次使用变换规则集合而得出的结果集合。

Expr//.rules　重复使用变换法则直到结果不变。

5）String Manipunations 字符处理

StringLength[s]　给出字符串中字符的个数。

S1<>s2<>…或者 StringJoin[s 1,s2,…]　连接多个字符串。

StringReverse[s]　颠倒字符串中字符的顺序。

StringTake[s,n]　提取 s 中前 *n* 个字符。

StringTake[s,{n}]　提取 s 中第 *n* 个字符。

StringTake[s,{n1,n2}]　提取 s 中的第 *n*1 到第 *n*2 的字符。

StringDrop[s,n]　删除 s 中的前 *n* 个字符。

StringDrop[s,{n}]　删除 s 中的第 *n* 个字符。

StringDrop[s,{n1,n2}]　删除 s 中的第 *n*1 到第 *n*2 的字符。

StringInsert[s,snew,n]　在 s 中第 *n* 个位置处插入字符串 snew。

StringPosition[s,sub]　给出 sub 的位置信息。

StringPosition[s,sub,k]　给出前 *k* 个 sub 的位置信息。

StringPosition[s,{sub1,sub2,…}]　给出出现 subi 的位置信息

StringToStream[s]　变换字符串为输入形式以便搜索查阅。

StringReplace[s,{s1->sp1,s2->sp2,…}]　替换字符串。

StringReplacePart[s,,snew,{m,n}]　在指定的位置上用 snew 替换 s 中的部分字符串。

StringReplacePart[s,snew,{{m1,n1},{m2,n2},…}]　在多处指定的位置上用 snew 替换 s 中的部分字符串。

StringReplacePart[s,{snew1,snew2,…},{{m1,n1},{m2,n2},…}]　在{mi,ni}处插入 snewi。

6）Scoping 局部变量

Module[{x,y,…},body]　具有局部变量的模块。

Module[{x=x0,y=y0,…},body]　局部变量有初始值的模块。

Module[vars,rhs/;cond]　条件与表达式共享局部变量。

Block[{x,y,…},body]　用局部变量等来计算，在计算开始时局部变量受全局变量影响。

Block[{x=x0,y=y0,…},body]　给定局部变量 body 的初始值 。

7）Debugging 跟踪函数

Trace[expr]　生成计算表达式 expr 时的所有中间数据构成的列表。

Trace[expr,form]　只是跟踪调试与 form 匹配的部分表达式的计算过程。

Trace[expr,f[_]]　跟踪所有关于函数 f 的调用。

Trace[expr,,I=_]　跟踪所有对变量 i 的赋值。

Trace[expr,_=_]　跟踪所有的赋值操作。

Trace[expr,Message[_]]　显示表达式计算过程中生成的所有信息。

Trace[expr,f]　跟踪与变量 f 有关的计算。

Trace[expr,f[g]]　跟踪与变量 f 和 g 有关的计算。

TracePrint[expr,…]　跟踪 expr 的计算，打印出表达式。

TraceDialog[expr,…]　跟踪 expr 的计算，模拟对话的形式来输出所遇到的表达式。

TraceScan[f,expr,…]　跟踪 expr 的计算，对遇到的每个表达式的 HoldForm 运用函数 f。

数学实验报告

实验序号：　　　　　　　　　　　　　　　　日期：200　　年　　月　　日

班级		姓名		学号	
实验名称					
问题背景描述：					
实验目的：					
实验原理与数学模型：					
实验所用软件及版本：					

主要内容（要点）：
实验过程记录（含基本步骤、主要程序清单及异常情况记录等）：

实验过程记录（含基本步骤、主要程序清单及异常情况记录等）：

实验结果报告与实验总结：
思考与深入：
教师评语：

参考文献

1　同济大学应用数学系. 微积分（上下册）. 北京：高等教育出版社，2000

2　杨钰，何旭洪，赵昊彤. Mathematica 应用指南. 北京：人民邮电出版社，1999

3　丁大正. 科学计算强档 Mathematica 4 教程. 北京：电子工业出版社，2002

4　谢云荪，张志让. 数学实验. 北京：科学出版社，2000

5　徐全智，杨晋浩. 数学建模. 北京：高等教育出版社，2003

6　Richard J.Gaylord，Samuel N.Kamin，Paul R.Wellin 著. 数学软件 Mathematica 入门. 邵勇译. 北京：高等教育出版社，2001

7　电子科技大学应用数学系. 数学实验简明教程. 成都：电子科技大学出版社，2001

8　柴俊，丁福永，戴浩晖. 数学实验教程. 北京：科学出版社，2003