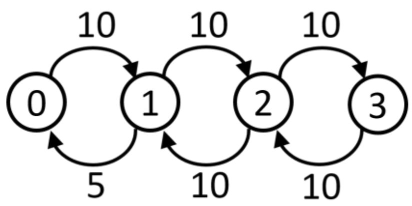
Lösningar Kösystem 1 juni 2020

Uppgift 1

a) Markovkedjan ser ut så här:



b) Ankomstintensiteten beror inte på tillståndet ⇒ P(spärr)= p_3

$$10p_0 = 5p_1 \Rightarrow p_1 = 2p_0$$
$$10p_1 = 10p_2 \Rightarrow p_2 = 2p_0$$
$$10p_2 = 10p_3 \Rightarrow p_3 = 2p_0$$

Att summan av alla sannolikheter ska vara = 1 ger sedan att

$$p_0 = \frac{1}{7}$$

och slutligen

$$P(spärr) = p_3 = 2p_0 = \frac{2}{7}$$

c) Littles sats kan användas.

$$E(N) = \sum ip_i = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = \frac{12}{7}$$

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - p_3) = 10 \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) = \frac{50}{7}$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{12}{50} = 0{,}24$$

d) Medeltiden mellan två busy periods är

$$\frac{1}{\lambda} = 0{,}1$$

Om b är medellängden av en busy period så får man

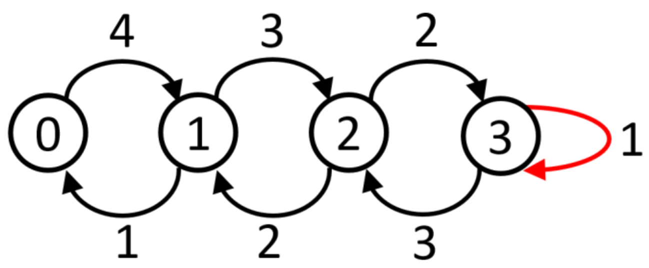
$$p_0 = \frac{1}{7} = \frac{0{,}1}{0{,}1 + b} \Rightarrow b = 0{,}6$$

e) Sannolikheten att det bara betjänas en kund från det att en busy period börjar tills den slutar är detsamma som sannolikheten att man hoppar tillbaka från tillstånd 1 till tillstånd 0 innan någon mer kund kommer. Den sannolikheten är

$$\frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1} = \frac{5}{5 + 10} = \frac{1}{3}$$

Uppgift 2

a) Markovkedjan:



b) Använder man snittmetoden så får man:

$$4p_0 = p_1$$
$$3p_1 = 2p_2$$
$$2p_2 = 3p_3$$

Om man använder att summan av alla sannolikheter måste vara $=$ 1 så ger det:

$$p_0 = \frac{1}{15}$$

$$p_1 = \frac{4}{15}$$

$$p_2 = \frac{6}{15}$$

$$p_3 = \frac{4}{15}$$

c) Spärrsannolikheten blir:

$$\frac{1 \cdot p_3}{4 \cdot p_0 + 3 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3} = \frac{4p_0}{4p_0 + 12p_0 + 12p_0 + 4p_0} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

d) $\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3 = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 = \frac{28}{15} \approx 1{,}87$

Kan också beräknas som $\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \lambda_{eff}$ eftersom alla som kommer in i systemet också betjänas i detta fall.

e) Sätt $T_k =$ medeltiden innan systemet blir tomt när man kommer till tillstånd k. Då får man ekvationssystemet:

$$T_3 = \frac{1}{3} + T_2$$

$$T_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}T_1$$

$$T_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}T_2 + \frac{1}{4}T_0$$

$$T_0 = 0$$

Löser man det får man svaret

$$T_3 = \frac{14}{3} \approx 4{,}7$$

Uppgift 3

a)

$$E(N_1) = \frac{2}{4-2} = 1$$

$$E(N_2) = \frac{3}{4-3} = 3$$

$$E(N_3) = \frac{3}{6-3} = 1$$

$$E(N_4) = \frac{4}{8-4} = 1$$

b) Littles sats:

$$\frac{\sum E(N_k)}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{6}{5}$$

c) Finns två vägar, 1 till 4 och 2 till 4. Medeltiden längs dessa vägar vägs samman:

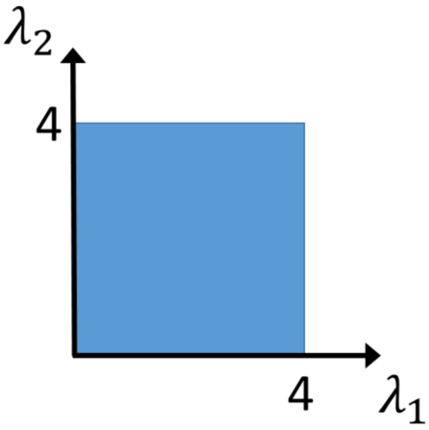
$$P(14)\left(\frac{E(N_1)}{\lambda_1} + \frac{E(N_4)}{\lambda_4}\right) + P(24)\left(\frac{E(N_2)}{\lambda_2} + \frac{E(N_4)}{\lambda_4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4} = \frac{9}{8}$$

d) $E(N_2)$ är oförändrad

$$E(N_4) = \frac{5}{8-5} = \frac{5}{3}$$

$$E(N_3) = \frac{4{,}5}{6 - 4{,}5} = 3$$

e)



Uppgift 4

Man kan börja med att lösa ekvationssystemet:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + 0{,}5\lambda_2 + 0{,}5\lambda_3$$

$$\lambda_2 = \alpha_2 + 0{,}5\lambda_1$$

$$\lambda_3 = 0{,}5\lambda_1$$

Det ger:

$$\lambda_1 = 32$$

$$\lambda_2 = 24$$

$$\lambda_3 = 16$$

a)

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{32}{36 - 32} = 8$$

$$E(N_2) = \frac{24}{28 - 24} = 6$$

$$E(N_3) = \frac{16}{20 - 16} = 4$$

b)

$$\frac{E(N_1) + E(N_2) + E(N_3)}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{9}{10}$$

c)
$$\frac{\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\lambda_2}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\lambda_3}{\alpha_1+\alpha_2}=\frac{72}{20}=3{,}6$$

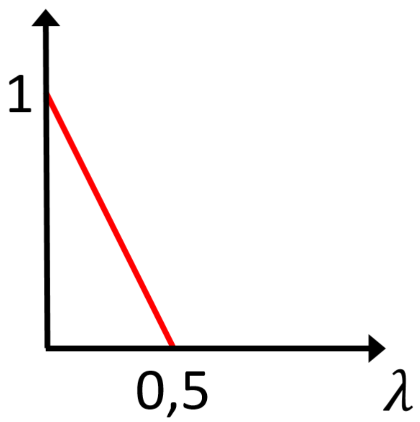
d) Man kan sätta $\alpha_1 = 1$ och $\alpha_2 = 0$ i ekvationssystemet ovan. Då får man $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ så en kund som kommer till könätet via 1 passerar nod 2 i snitt två gånger och nod 2 och 3 en gång vardera. Då blir tiden (om vi använder de ursprungliga värdena på α_1 och α_2):

$$2\frac{E(N_1)}{\lambda_1}+\frac{E(N_2)}{\lambda_2}+\frac{E(N_3)}{\lambda_3}=1$$

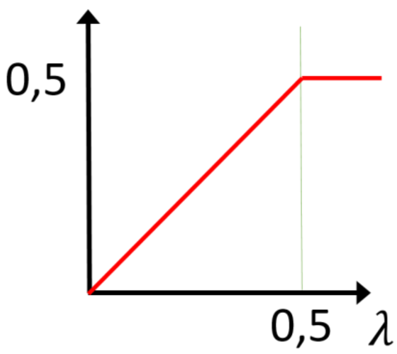
e) I ekvationssystemet i början av uppgiften sätter man $\alpha_1 = 0$ och $\alpha_2 = 1$. Löser man detta så får man $\lambda_3 = 0{,}5$ vilket medför att $\lambda_A = 0{,}25$ så sannolikheten blir allts 0,25.

Uppgift 5

a)



b)



c) 0,5 eftersom betjänaren klarar av 0,5 kunder per sekund.

d) Bufferten kommer att bete sig som bufferten i ett M/G/1-system där betjäningstiden är en summa av en exponentialfördelning med medelvärde 1 och en konstant tid = 1. Denna betjängingstid har samma varians som exponentialfördelningen (se ledningen). Variansen hos en exponentialfördelning är

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1$$

i detta fall. Om då X är summan av exponentialfördelningen och den konstanta tiden så får vi

$$V(X) = 1$$

och

$$E(X) = 2 \Rightarrow E^2(X) = 4$$

vilket medför att

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 5$$

Den vanliga formeln för medelantal i bufferten ger sedan svaret:

$$\frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0{,}4^2 \cdot 5}{2(1-0{,}8)} = 2$$

e) Medeltiden i bufferten blir

$$\frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} = 5$$

Till det ska läggas en medelbetjäningstid som är
$=$ 1 för att få medeltiden i systemet så svaret blir 6. Observera att man inte ska lägga till 2, för den tiden består ju av b

Uppgift 6

a) De måste vara lika. Om de inte vore det så skulle antalet kunder i en av noderna hela tiden öka och det är inte mjöligt eftersom det finns ett konstant antal kunder i systemet.

b) Man får ekvationssystemet

$$E(N_1)\mu_1 = E(N_2)\mu_2 = E(N_3)\mu_3$$
$$E(N_1) + E(N_2) + E(N_3) = 100$$

vilket har lösningen

$$E(N_1) = \frac{600}{11}$$

$$E(N_2) = \frac{300}{11}$$

$$E(N_3) = \frac{200}{11}$$

c) Varje kund roterar runt i könätet oberoende av alla andra kunder. Sannolikheten att en kund befinner sig i nod 1 är då:

$$\frac{\mu_1^{-1}}{\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1}} = \frac{6}{11}$$

Sannolikheten att det finns k kunder i nod 1 blir då:

$$\binom{100}{k}\left(\frac{6}{11}\right)^k\left(\frac{5}{11}\right)^{100-k}$$