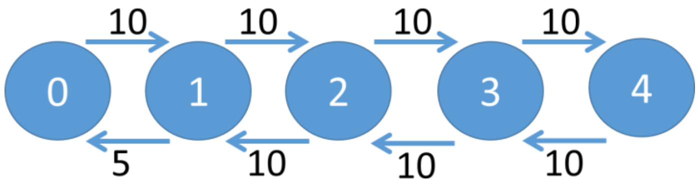
Lösning Kösystem maj 2017

Uppgift 1

a) Tillståndsdiagrammet ser ut så här:



b) Snittmetoden ger att

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{9} \\ p_i = \frac{2}{9} \text{ för } i \geq 1 \end{cases}$$

Sannolikheten för spärr blir samma som att systemet är fullt eftersom ankomstintensiteten inte beror på systemets tillstånd, så sannolikheten för spärr är

$$p_4 = \frac{2}{9}$$

c) Använd Littles sats. Medelantal kunder i bufferten är

$$E(N_b) = 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

och

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda \cdot \big(1 - P(\text{spärr})\big) = 10 \cdot \frac{7}{9} = \frac{70}{9}$$

Det ger att medeltiden i bufferten blir

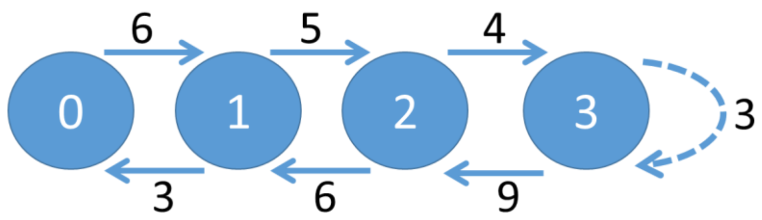
$$E(T_b) = \frac{E(N_b)}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35} \approx 0{,}086$$

d) Tiden blir först tiden för att en av de två som betjänas ska bli färdig, sedan ytterligare en sådan tid och sedan kundens egen betjäningstid vilket blir

$$\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Uppgift 2

a) Tillståndsdiagrammet ser ut så här:



b) Snittmetoden ger

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{27}{146} \\ p_1 = \dfrac{54}{146} \\ p_2 = \dfrac{45}{146} \\ p_3 = \dfrac{20}{146} \end{cases}$$

vilket ger medelvärdet

$$E(N) = \sum kp_k = \frac{102}{73} \approx 1{,}4$$

c) Sannolikheten för spärr blir

$$\frac{\lambda_3 p_3}{\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3} = \frac{5}{56} \approx 0{,}089$$

d) Medelantal betjänade under en minut blir

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \frac{612}{146} \approx 4{,}2$$

så medelantalet under en timme blir

$$60 \cdot \frac{612}{146} \approx 252$$

e) Antag att T_i = medeltiden innan två radiokanaler blir upptagna för första gången om man startar i tillstånd i. Vi är intresserade av T_0. Man får ekvationssystemet

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{1}{6} + T_1 \\ T_1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} T_0 \end{cases}$$

vilket ger att

$$T_0 = \frac{7}{15}$$

Uppgift 3

a) Medelantalen blir:

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{12}{15 - 12} = 4$$

$$E(N_2) = \frac{6}{8 - 6} = 3$$

$$E(N_3) = \frac{6}{8 - 6} = 3$$

$$E(N_4) = \frac{7}{8 - 7} = 7$$

$$E(N_5) = \frac{5}{8 - 5} = \frac{5}{3}$$

och summan är

$$E(N) = 18\frac{2}{3} \approx 18.7$$

b) Medeltiden blir

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{14}{9} \approx 1,6$$

c) Finns två vägar som passerar genom nod 3:

A: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

B: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

Sannolikheten att någon som passerar nod 3 tar väg A respektive B är

$$p_A = \frac{1}{6}$$

$$p_A = \frac{5}{6}$$

Medeltiden blir då:

$$E(T_1) + E(T_2) + p_A E(T_4) + p_B E(T_5) = \frac{23}{18} \approx 1,3$$

d) Nod 1, 2 och 3 påverkas inte av att β ändras. Om vi sätter $x = \beta\lambda_3$ så blir

$$E(N_4) + E(N_5) = \frac{6 + x}{8 - (6 + x)} + \frac{6 - x}{8 - (6 - x)} = 2\left(\frac{18}{4 - x^2} - 1\right)$$

vilken är som minst när $x = 0 \Rightarrow$ minst antal kunder när $\beta = 0 \Rightarrow$ minst tid då $\beta = 0$.

Naturligtvis kan inte $x \geq 2$ för då blir nod 4 överbelastad.

Uppgift 4

a) Man får

$\lambda_1 = \lambda_5 = 20$

$\lambda_2 = 8$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 6$

$vilket\ ger$

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{20}{30 - 20} = 2$$

$$E(N_2) = \frac{8}{10 - 8} = 4$$

$$E(N_3) = E(N_4) = \frac{6}{10 - 6} = 1.5$$

$$E(N_5) = \frac{20}{40 - 20} = 1$$

b) Enligt Littles sats blir

$$E(T) = \frac{\sum E(N_i)}{\lambda} = \frac{10}{10} = 1$$

c) Medelantalet gånger blir

$$\frac{\lambda_3}{\lambda} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

d) Använd beting

$P(\text{passerar nod } 1 k \text{ gånger}) = 0.5^k$ där $k \ \geq 1$

$P(\text{besöker ej nod 3| passerar nod } 1 k \text{ gånger}) = 0.6^k$

$P(\text{besöker ej nod 3})=$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(\text{besöker ej nod 3| passerar nod } 1 k \text{ gånger})\ P(\text{passerar nod } 1 k \text{ gånger})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 0.5^k \cdot 0.6^k = \sum_{k=1}^{\infty} 0.3^k = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$$

Uppgift 5

Börja med att ta fram medelvärdet och andramomentet av betjäningstiden genom att derivera laplacetransformen:

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{(1+s)^2} = -\frac{2}{(1+s)^3} \to -2 \text{ då } s \to 0 \Rightarrow E(X) = 2$$
$$\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{(1+s)^2} = \frac{6}{(1+s)^4} \to 6 \text{ då } s \to 0 \Rightarrow E(X^2) = 6$$

a) Sannolikheten att betjänaren upptagen $= \rho = \lambda E(X) = 0.25 \cdot 2 = 0.5$

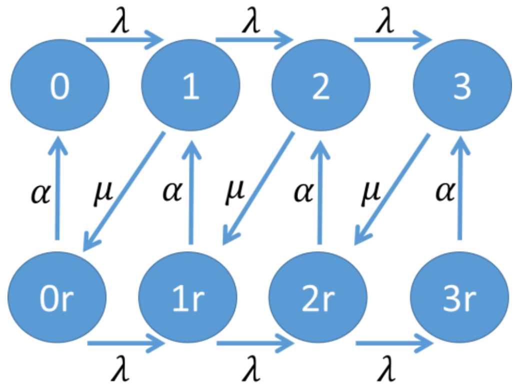
b) Insättning i formel ger
$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 E(N^2)}{2(1-\rho)} = 0.5 + \frac{0.25^2 \cdot 6}{2 \cdot (1-0.5)} = 0{,}875$$

c) Antalet i bufferten är antalet i hela systemet minus antalet i betjänaren. Detta och Littles sats ger svaret
$$\frac{E(N)-\rho}{\lambda} = 1{,}5$$

d) Först ska en kund komma och sedan betjänas, vilket ger att medeltiden blir
$$\frac{1}{\lambda} + E(X) = 4 + 2 = 6$$

Uppgift 6

a) Markovkedjan blir

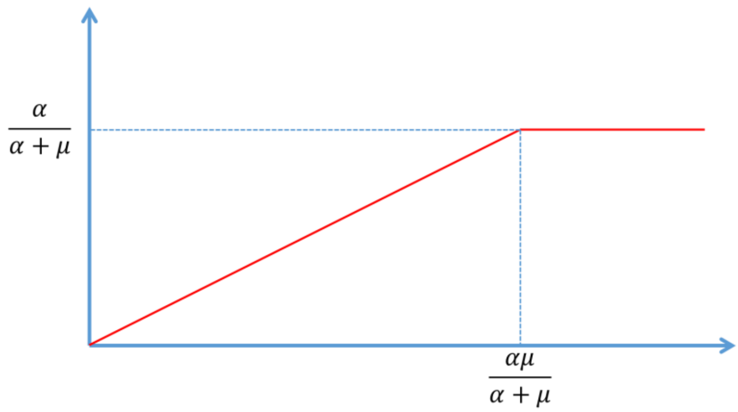


Om det står ett r efter talet i Markovkedjan så anger talet antalet kunder och r:et att betjänaren vilar

b) Tiden mellan ankomster ska vara i medelvärde vara större än medelvärdet för betjäning + återhämtning vilket ger

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda < \frac{\alpha\mu}{\alpha + \mu}$$

c) Ser ut så här:



d) Räknar man betjäningstid + återhämtningstid som en betjäningstid så kan man använda resultat från uppgift 5c. Det ger att medeltiden i bufferten blir

$$\frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.4 \cdot 6}{2 \cdot (1 - 0.8)} = 6 \text{ sekunder}$$

e) Totala tiden blir tiden i buffert (från d) + betjäningstid så medelvärdet blir

$6 + 1 = 7$ sekunder