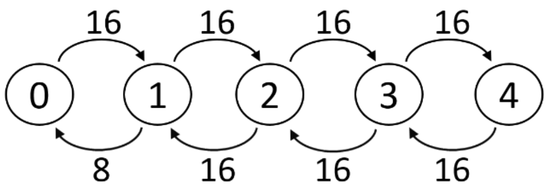
Lösningar, Kösystem 31 maj 2016

Uppgift 1

a) Markovkedjan ser ut så här:



b) Snittmetoden ger att

$$p_0 = \frac{1}{9}$$

och

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{2}{9}$$

Definitionen av medelvärde ger sedan att

$$E(N) = \sum_i ip_i = \frac{2}{9}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{20}{9}$$

c) Man använder Littles sats:

$$\lambda_{\text{eff}} = 16 \cdot (1 - p_4) = 16 \cdot \frac{7}{9}$$

vilket ger

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{5}{28} \approx 0{,}18$$

d) Medelantal upptagna betjänare är

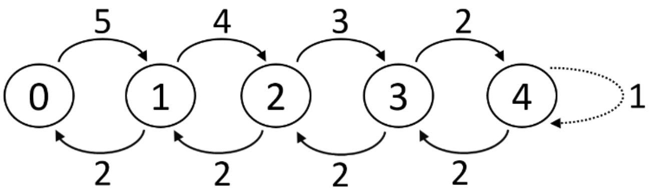
$$E(N_s) = p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = \frac{14}{9}$$

Andelen av tiden som en betjänare är upptagen blir då

$$\frac{E(N_s)}{2} = \frac{7}{9}$$

Uppgift 2

a) Markovkedjan ser ut så här:



Snittmetoden ger:

$$p_0 = \frac{2}{47}$$

$$p_1 = \frac{5}{47}$$

$$p_2 = \frac{10}{47}$$

$$p_3 = \frac{15}{47}$$

$$p_4 = \frac{15}{47}$$

Medelvärdet av antal kunder blir då:

$$E(N) = 4\sum_{i=1}^{4} ip_i = \frac{130}{47} \approx 2{,}8$$

b) Sannolikheten att en kund spärras blir

$$\frac{1 \cdot p_4}{5 \cdot p_0 + 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$$

c) Antalet som betjänas per tidsenhet blir

$$\lambda_{\text{eff}} = 5 \cdot p_0 + 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 = \frac{90}{47} \approx 1.9$$

d) Medeltiden som en kund tillbringar i hela kösystemet blir enligt Littles sats

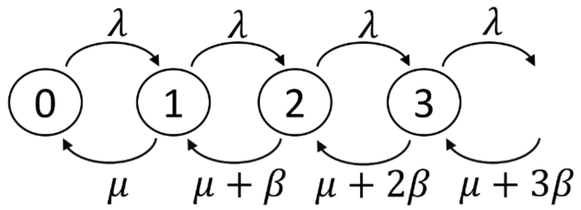
$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{130}{90}$$

Väntetiden i bufferten blir då

$$E(T_q) = E(T) - E(X) = \frac{17}{18} \approx 0{,}94$$

Uppgift 3

a) Markovkedjan ser ut så här



b) Snittmetoden (där nu $\mu = \beta$) ger att

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \rho p_1$$

$$\lambda p_1 = 2\mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\rho^2}{2} p_0$$

$$\lambda p_2 = 3\mu p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{\rho^3}{6} p_0$$

och så vidare. Allmänt gäller att

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0$$

Att summan av alla sannolikheter ska bli = 1 ger sedan att $p_0 = e^{-\rho}$ och slutligen att

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$

Medelantal kunder i systemet blir då

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = \rho e^{-\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} = \rho e^{-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!} = \rho e^{-\rho} e^{\rho} = \rho$$

c) Antalet hopp per tidsenhet i markovkedjan som beror på att en kund blir färdigbetjänad är

$$\mu(1 - p_0) = \mu(1 - e^{-\rho})$$

d) $1 - p_0 = 1 - e^{-\rho}$

e) Det blir samma markovkedja som för ett Erlangsystem, vilket ger att spärrsannolikheten blir $E_{30}(30) \approx 0{,}13$ enligt Erlangtabell.

Uppgift 4

a) Först beräknar man ankomstintensiteten till vart och ett av kösystemen genom att ställa upp ett ekvationssystem

$$\lambda_1 = \lambda + 0.8\lambda_2 + 0.2\lambda_3$$
$$\lambda_2 = 0.5\lambda_1$$
$$\lambda_3 = 0.5\lambda_1$$

vilket har lösningen

$$\lambda_1 = 2\lambda$$
$$\lambda_2 = \lambda$$
$$\lambda_3 = \lambda$$

Därefter kan man beräkna medelantal kunder i varje kösystem

$$E(N_k) = \frac{\lambda_k}{\mu_k - \lambda_k}$$

Littles sats ger sedan

$$E(T) = \frac{E(N_1) + E(N_2) + E(N_3)}{\lambda} = \frac{2}{1-2\lambda} + \frac{1}{2-\lambda} + \frac{1}{0.5-\lambda} = \frac{4}{1-2\lambda} + \frac{1}{2-\lambda}$$

b) Medelantalet gånger en kund passerar kösystem 2 blir

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} = 1$$

c) Medeltiden som en kund betjänas i ett kösystem är medelbetjäningstiden gånger medelantalet gånger kunde passerar kösystemet vilket ger svaret

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot E(X_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda} \cdot E(X_2) + \frac{\lambda_3}{\lambda} \cdot E(X_3) = 4{,}5$$

d) Sannolikheten blir

$$\frac{\lambda_A}{\lambda} = \frac{(1 - p_{21})}{\lambda} = 0{,}2$$

Uppgift 5

a) Sannolikheten att betjänaren är upptagen blir

$$\lambda E(X) = 0{,}4$$

b) Först räknar vi ut $E(X^2)$ genom att utnyttja att

$$5 = \frac{10 \cdot E(X^2)}{2(1-0{,}4)} \Rightarrow E(X^2) = 0{,}06$$

Sedan ger insättning i formel svaret

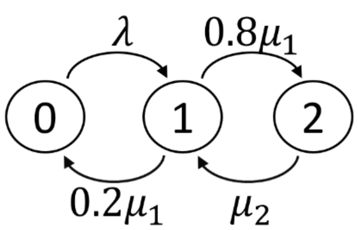
$$E(T) = E(X) + \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} = 0{,}04 + \frac{20 \cdot 0{,}06}{2 \cdot (1-0{,}8)} = 3{,}04$$

c) Om Y är längden av en busy period så får man

$$\rho = \frac{E(Y)}{E(Y) + 1/\lambda} \Rightarrow \rho E(Y) + \frac{\rho}{\lambda} = E(Y) \Rightarrow E(X) = (1-\rho)E(Y) \Rightarrow E(Y) = \frac{E(X)}{(1-\rho)}$$

Uppgift 6

a) Markovkedjan som beskriver könätet ser ut så här



Tillstånd 0 betyder att könätet är tomt, tillstånd 1 att en kund befinner sig i kösystem 1 och tillstånd 2 att en kund befinner sig i kösystem 2. Om vi sätter $\mu_1 = \mu_2 = 1$ och använder snittmetoden får vi

$$p_0 = \frac{1}{1+9\lambda}$$

$$p_1 = \frac{5\lambda}{1+9\lambda}$$

$$p_2 = \frac{4\lambda}{1+9\lambda}$$

Sannolikheten att en kund spärras blir

$$p_1 + p_2 = \frac{9\lambda}{1+9\lambda}$$

b) Medelantalet kunder i könätet blir

$$E(N) = 1 \cdot (p_1 + p_2) = \frac{9\lambda}{1+9\lambda}$$

c) Det blir för nod 1

$$\mu_1 p_1 = \frac{5\lambda}{1 + 9\lambda}$$

och för nod 2

$$\mu_2 p_2 = \frac{4\lambda}{1 + 9\lambda}$$

d) Littles sats ger

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{p_1 + p_2}{\lambda p_0} = 9$$