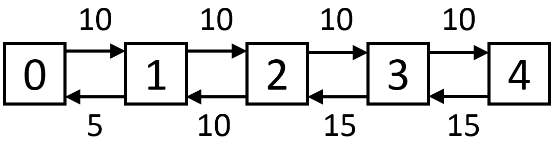
Lösning, Kösystem 30 maj 2015

Uppgift 1

a) Markovkedjan ser ut så här:



b) Vi ställer upp tillståndsekvationerna:

$$\begin{aligned}
5p_1 &= 10p_0 \\
10p_2 &= 10p_1 \\
15p_3 &= 10p_2 \\
15p_4 &= 10p_3
\end{aligned}$$

Genom att utnyttja att summan av alla sannolikheter är $= 1$ får vi lösningen

$$\begin{aligned}
p_0 &= 9/65 \\
p_1 &= 18/65 \\
p_2 &= 18/65 \\
p_3 &= 12/65 \\
p_4 &= 8/65
\end{aligned}$$

c) Antalet spärrade per timme blir:

$$10 \cdot 3600 \cdot p_4 \approx 4431$$

eftersom ankomstintensiteten alltid är 10 oberoende av i vilket tillstånd kedjan befinner sig.

d) Kan beräknas med definitionen av medelvärde:

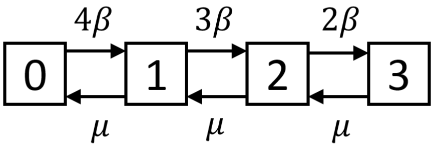
$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot (p_3 + p_4) = \frac{114}{65} \approx 1,75$$

e) Littles sats ger:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4}{10 \cdot (1 - p_4)} = \frac{122}{570} \approx 0,21$$

Uppgift 2

a) Börja med att rita Markovkedjan:



Därefter ställer vi upp tillståndsekvationerna:

$$\mu p_1 = 4\beta p_0$$
$$\mu p_2 = 3\beta p_1$$
$$\mu p_3 = 2\beta p_2$$

Om vi sätter $\alpha = \beta/\mu$ så får vi

$$p_1 = 4\alpha p_0$$
$$p_2 = 12\alpha^2 p_0$$
$$p_3 = 24\alpha^3 p_0$$

Att summan av alla sannolikheter ska bli = 1 ger

$$p_0 = \frac{1}{1 + 4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}$$

Sannolikheten för spärr blir

$$\frac{\beta p_3}{4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2 + \beta p_3} = \frac{6\alpha^3}{1 + 3\alpha + 6\alpha^2 + 6\alpha^3}$$

Om vi nu sätter in $\beta = \mu = 0,2 \Rightarrow \alpha = 1$ så får vi att sannolikheten för spärr blir

$$\frac{6}{1 + 3 + 6 + 6} = \frac{3}{8} = 0,375$$

b) Formeln för λ_{eff} ger

$$\lambda_{eff} = 4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2 = p_0\beta(4 + 12\alpha + 24\alpha^2)$$

Ett alternativ:

$$\lambda_{eff} = \mu(1 - p_0)$$

Om vi nu sätter in $\beta = \mu = 0,2 \Rightarrow \alpha = 1$ (enhet per minut på bägge) så får vi att

$$\lambda_{eff} = \frac{40}{205} \text{ per minut} = \frac{40 \cdot 60}{205} \text{ per timme} \approx 11,7 \text{ per timme}$$

c) Man använder Littles sats. Först konstaterar man att

$$E(N) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = p_0(4\alpha + 24\alpha^2 + 72\alpha^3)$$

Detta ger

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{\alpha + 6\alpha^2 + 18\alpha^3}{\beta(1 + 3\alpha + 6\alpha^2)}$$

Insättning ger nu svaret 12,5 minuter.

d) Sannolikheten blir antal per minut som kommer till ett tomt kösystem (bågen från 0 till 1) dividerat med den totala ankomstintensiteten. Det blir

$$\frac{4\beta p_0}{4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2 + \beta p_3} = \frac{1}{1 + 3\alpha + 6\alpha^2 + 6\alpha^3}$$

Insättning av $\alpha = 1$ ger svaret 1/16.

Uppgift 3

a) Man använder de vanliga formlerna för M/M/1-system

$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Det ger:

$$\begin{aligned}
E(N_1) &= \frac{8}{10 - 8} = 4 \\
E(N_2) &= \frac{10}{15 - 10} = 2 \\
E(N_3) &= \frac{14}{15 - 14} = 14 \\
E(N_4) &= \frac{11}{12 - 11} = 11 \\
E(N_5) &= \frac{7}{14 - 7} = 1
\end{aligned}$$

b) Littles sats ger:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{4 + 2 + 14 + 11 + 1}{18} = \frac{16}{9} \approx 1,78$$

c) Tre vägar är möjliga:

$$\begin{aligned}
A &: 1 \rightarrow 4 \ \lambda_A = 4 \\
B &: 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \ \lambda_B = 2 \\
C &: 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \ \lambda_C = 2
\end{aligned}$$

För tiderna i kösystemen gäller:

$$E(T_i) = \frac{E(N_i)}{\lambda_i}$$

vilket ger:

$$\begin{aligned}
E(T_1) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\
E(T_4) &= \frac{11}{11} = 1 \\
E(T_3) &= \frac{14}{14} = 1 \\
E(T_5) &= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Medeltiden blir nu:

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}(E(T_1) + E(T_4)) +$$

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}(E(T_1) + E(T_3) + E(T_4)) +$$

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}(E(T_1) + E(T_3) + E(T_5)) =$$

$$= \frac{25}{14} \approx 1,79$$

d) Finns tre vägar:

$$\begin{aligned}
A &: 1 \to 4 \ \lambda_A = 4 \\
B &: 1 \to 3 \to 4 \ \lambda_B = 2 \\
A &: 2 \to 3 \to 4 \ \lambda_C = 5
\end{aligned}$$

Vi har också att

$$E(T_2) = \frac{1}{5}$$

Det ger

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}(E(T_1) + E(T_4)) +$$

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}(E(T_1) + E(T_3) + E(T_4)) +$$

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}(E(T_2) + E(T_3) + E(T_5)) =$$

$$= \frac{22}{11} = 2$$

e) Kösystem 2 och 3 kommer att överbelastas. Inga andra överbelastas eftersom den maximala utintensiteten från kösystem 3 är 15.

Uppgift 4

a) Man får ekvationssystemet:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lambda_A + 0,2\lambda_3 \\
\lambda_2 &= \lambda_B + 0,5\lambda_1 \\
\lambda_3 &= 0,5\lambda_1 + \lambda_4 \\
\lambda_4 &= \lambda_2
\end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{10}{8}\lambda_A + \frac{2}{8}\lambda_B \\
\lambda_2 &= \frac{5}{8}\lambda_A + \frac{9}{8}\lambda_B \\
\lambda_3 &= \frac{10}{8}\lambda_A + \frac{10}{8}\lambda_B \\
\lambda_4 &= \frac{5}{8}\lambda_A + \frac{9}{8}\lambda_B
\end{aligned}$$

(åtminstone så länge ingen nod är överbelastad). Insättning av $\lambda_A = \lambda_B = 4$ ger sedan

$$\begin{aligned}
E(N_1) &= \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{6}{12-6} = 1 \\
E(N_2) &= \frac{7}{14-7} = 1 \\
E(N_3) &= \frac{10}{20-10} = 1 \\
E(N_4) &= \frac{7}{14-7} = 1
\end{aligned}$$

Medeltiden i systemet för en godtycklig kund blir då:

$$E(T) = \frac{\sum E(N_i)}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{1}{2}$$

b) För en godtycklig kund blir det:

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{10}{8} = 1,25$$

c) Från kösystem 3 kan det komma maximalt $0,2\mu_3 = 4$. Det ger

$$\lambda_A + 4 < \mu_1 \Rightarrow \lambda_A < 8$$

d) Om man ser på lösningen till ekvationssystemet i a-delen av uppgiften så ser man att medelantalet gånger en kund som kommer via kösystem 1 passerar nod i är koefficienten framför λ_A i lösningen för λ_i. Det ger svaret

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{E(N_1)}{\lambda_1} + \frac{5}{8} \cdot \frac{E(N_2)}{\lambda_2} + \frac{10}{8} \cdot \frac{E(N_3)}{\lambda_3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{E(N_4)}{\lambda_4} = 0,51$$

Uppgift 5

a) Beräkna först medelvärde och andramoment av betjäningstiden:

$$\frac{df^*}{ds} = -0,5e^{-s} - 1,5e^{-3s} \to -2 \text{ då } s \to 0 \Rightarrow E(X) = 2$$

$$\frac{d^2f^*}{ds^2} = 0,5e^{-s} + 4,5e^{-3s} \to 5 \text{ då } s \to 0 \Rightarrow E(X^2) = 5$$

Det ger att $\rho = \lambda E(X) = 0,4 \cdot 2 = 0,2$ Insättning i formel ger nu:

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)} = 0,8 + \frac{0,5^2 \cdot 5}{2(1-0,8)} = 2,8$$

b) Man subtraherar medelbetjäningstiden från medeltiden i hela kösystemet:

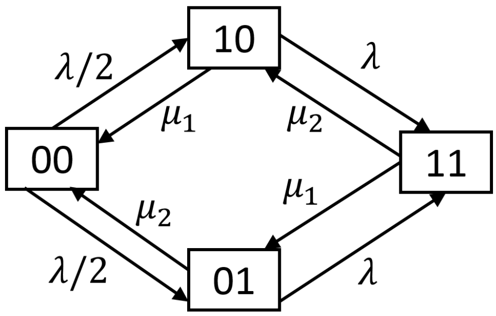
$$\frac{E(N)}{\lambda} - E(X) = 5$$

c) Man får ekvationen

$$E(X) + \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} < 3 \Rightarrow 2 + \frac{\lambda \cdot 5}{2(1-2\lambda)} < 3 \Rightarrow \lambda < \frac{2}{9}$$

Uppgift 6

a) Markovkedjan ser ut så här:



b) Eftersom bägge betjänarna då alltid kommer att arbeta blir det $\mu_1 + \mu_2$.

c) Flöde-in flöde-ut ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
2p_{00} &= 2p_{10} + p_{01} \\
4p_{10} &= p_{00} + p_{11} \\
3p_{11} &= 2p_{10} + 2p_{01} \\
3p_{01} &= p_{00} + 2p_{11}
\end{aligned}$$

som kompletterat med $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$ har lösningen

$$\begin{aligned} p_{00} &= \frac{2}{7} \\ p_{01} &= \frac{2}{7} \\ p_{10} &= \frac{1}{7} \\ p_{11} &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Eftersom ankomstintensiteten alltid är λ oberoende av tillstånd så blir spärrsannolikheten

$$p_{11} = \frac{2}{7}$$

d) Enklast är att använda Littles sats:

$$\lambda eff = \lambda(1 - p_{11}) = \frac{10}{7}$$

$$E(N) = 1 \cdot (p_{01} + p_{10}) + 2 \cdot p_{11} = 1$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{7}{10}$$

e) Utintensitet från betjänare 1:

$$\mu_1(p_{10} + p_{11}) = 2 \cdot (\frac{1}{7} + \frac{2}{7}) = \frac{6}{7}$$

Från betjänare 2:

$$\mu_2(p_{01} + p_{11}) = 1 \cdot (\frac{2}{7} + \frac{2}{7}) = \frac{4}{7}$$

Observera att summan av dessa båda blir λ_{eff}.