

## Cours "Pratique de la fiabilité" – Sujet de Projet

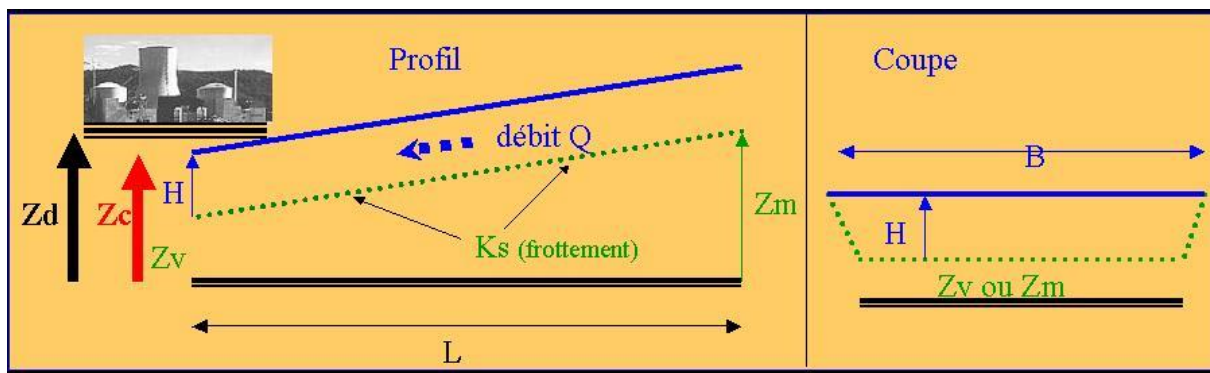
### I. PRÉSENTATION DU CAS D'ÉTUDE

#### I.1. CONTEXTE INDUSTRIEL

On étudie la situation de risque suivante :

- une installation industrielle est située en bordure d'une rivière,
- l'écoulement des crues (de débit aléatoire  $Q$ ) peut provoquer une hauteur d'eau importante  $H$ , susceptible d'inonder l'installation si la cote atteinte pendant un épisode de crue ( $Z_c$ ) dépasse par-dessus la digue de protection (supposée établie à la cote  $Z_d$ ),
- l'importance des dommages alors occasionnés dans l'installation dépend de la vulnérabilité du site au moment du débordement hypothétique.

Comme nous le verrons par la suite, de nombreuses sources d'incertitudes affectent cette situation.



Le problème décisionnel peut être décrit de la façon suivante :

- soit on souhaite justifier, avec un critère de type "sûreté", que grâce à la digue l'installation est "hautement protégée" contre le risque de surverse.
- soit on cherche à optimiser, avec un critère plus complet de type "sûreté + valeur nette", le dimensionnement de la parade de protection (la digue) face aux coûts d'investissements et de dommages potentiels induits par le débordement.

Dans le premier cas de figure, où l'enjeu premier est relatif à la sûreté, la variable d'intérêt est directement la hauteur de la surverse et on cherche à dimensionner la hauteur de la digue  $h_d$  de sorte à minimiser le risque de débordement.

Dans le second cas de figure, associé à un enjeu de nature plus économique, la variable d'intérêt est le coût total (investissement et maintenance de la digue et dommages liés aux éventuels débordements) sur une durée d'exploitation donnée de l'installation. On cherche ici, en plus de la satisfaction d'un niveau de sûreté minimal, à minimiser le coût total.

Dans les deux cas, les grandeurs à évaluer sont incertaines, conséquence directe des incertitudes pesant sur les données d'entrée.

Pour dimensionner au mieux la hauteur de la digue  $h_d$  selon les deux objectifs décisionnels précédents, deux sources de connaissances sont disponibles :

- d'une part, un historique de mesures jointes du débit  $Q$  et de la hauteur de la crue  $H$  (voir paragraphe I.2.),
- d'autre part, un modèle hydraulique simplifié et un modèle économique (voir paragraphes I.3. à I.6.).

## I.2. MESURES HISTORIQUES DE DÉBIT ET DE HAUTEUR DE CRUE

On dispose d'une base d'enregistrements historiques, sur 149 années (entre 1849 et 1997), des débits maxima annuels de crue  $Q$  et des hauteurs d'eau associées  $H$ , certaines données étant manquantes.

Année	Débit $Q$ (en $m^3/s$ )	Hauteur $H$ (en m)	Année	Débit $Q$ (en $m^3/s$ )	Hauteur $H$ (en m)	Année	Débit $Q$ (en $m^3/s$ )	Hauteur $H$ (en m)
1849	3854		1899	1730		1949	635	2.4
1850	1256	4.0	1900	1889		1950	733	2.8
1851	1649	4.5	1901	3320		1951	758	2.7
1852	1605	4.3	1902	352		1952	1368	4.5
1853	341	1.7	1903	885		1953	935	3.2
1854	1149	3.4	1904	759		1954	1173	3.7
1855	868	3.4	1905	731		1955	547	2.5
1856	1148	4.1	1906	1711		1956	669	2.6
1857	1227	4.1	1907	1906		1957	331	1.8
1858	1991	5.3	1908	1543		1958	227	1.4
1859	1255	4.1	1909	1307		1959	2037	5.4
1860	1366	3.9	1910	1275		1960	3224	6.6
1861	1100	3.8	1911	2706		1961	1525	4.0
1862	1837	5.4	1912	582	2.5	1962	766	2.7
1863	351	1.7	1913	1260	4.3	1963	1575	4.9
1864	1084	3.7	1914	1331	4.1	1964	1695	
1865	1924	4.9	1915	1283	3.9	1965	1235	
1866	843	3.3	1916	1348	4.1	1966	1454	
1867	2647	6.3	1917	1048	3.6	1967	2595	
1868	1248	4.0	1918	1348	4.1	1968	706	
1869	2417	5.5	1919	383	2.1	1969	1837	5.3
1870	1125		1920	1526	4.1	1970	1629	5.1
1871	903		1921	789	3.3	1971	1421	3.8
1872	1462		1922	811	3.1	1972	2204	5.9
1873	378		1923	1073	3.6	1973	956	3.1
1874	1230		1924	965	3.2	1974	971	3.4
1875	1149		1925	619	2.5	1975	1383	4.1
1876	1400	4.0	1926	3361	6.7	1976	541	2.5
1877	2078	5.8	1927	523	2.5	1977	703	2.5
1878	1433	4.1	1928	493	2.3	1978	2090	4.8
1879	917	3.4	1929	424	2.1	1979	800	3.1
1880	1530	4.7	1930	2017	4.7	1980	651	2.4
1881	2442	6.2	1931	1958	5.1	1981	1153	3.9
1882	2151	5.7	1932	3192	6.4	1982	704	2.5
1883	1909	5.2	1933	1556	4.9	1983	1771	4.5
1884	630	2.6	1934	1169	3.4	1984	1433	4.2
1885	2435	5.6	1935	1511	4.8	1985	238	1.5
1886	1920	5.5	1936	1515	4.4	1986	122	1.0
1887	1512	4.8	1937	2491	5.6	1987	1306	4.0
1888	1377	3.9	1938	881	2.9	1988	733	3.1
1889	3330	6.7	1939	846	3.3	1989	793	3.0
1890	1858	5.3	1940	856	3.2	1990	856	3.0
1891	1359	4.2	1941	1036	3.7	1991	1903	5.1
1892	714	2.6	1942	1830	5.3	1992	1594	4.5

1893	1528	4.2	1943	1391	4.5	1993	740	3.1
1894	1035	3.3	1944	1334	4.0	1994	3044	7.2
1895	1026	3.8	1945	1512	4.8	1995	1128	3.5
1896	1127	3.5	1946	1792	4.6	1996	522	2.5
1897	1839	4.7	1947	136	1.0	1997	642	2.5
1898	771		1948	891	3.1			

Tableau 1 : Valeurs historiques mesurées du débit  $Q$  et de la hauteur de crue  $H$

### I.3. MODÈLE HYDRAULIQUE ET SOURCES D'INCERTITUDES ASSOCIÉES

En plus des mesures historiques, on dispose d'un modèle d'équations hydrauliques permettant d'approcher la variable "hauteur d'écoulement maximale de la crue"  $H$  (que l'on exprime ensuite en "hauteur de surverse"  $S$ , par différence avec les cotes de référence du fond et de la digue). Cette hauteur dépend de diverses variables physiques, le nombre dépendant de la sophistication du modèle hydraulique choisi.

Un modèle simplifié analytique peut donner un premier ordre de grandeur de la hauteur maximale de la crue  $H$  en travaillant sur des informations simplifiées sur le tronçon du cours d'eau situé en amont de l'installation, comme la pente moyenne  $\frac{Z_m - Z_v}{L}$ , le débit de la crue  $Q$  et un coefficient  $K_s$  "moyen" de frottement sur la rivière, le célèbre "coefficient de Strickler"<sup>1</sup> :

$$H = \left( \frac{Q}{K_s \sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}} B} \right)^{3/5} \quad \text{Equation (1)}$$

que l'on peut exprimer en hauteur de surverse :

$$S = Z_c - Z_d = Z_v + H - h_d - Z_b \quad \text{Equation (2)}$$

où :

- $Z_d$  et  $Z_c$  désignent respectivement la cote de la digue et la cote maximale de la crue (en m NGF, c'est-à-dire au-dessus du niveau de la mer),
- $S$  désigne la surverse (en m), c'est-à-dire la différence entre la cote maximale de la crue et la cote de la digue,
- $H$  désigne la hauteur d'eau maximale (en m),
- $Q$  désigne le débit maximal du cours d'eau (en m<sup>3</sup>/s),
- $L$  désigne la longueur du tronçon de cours d'eau étudié (en m),
- $B$  désigne la largeur du cours d'eau (en m),
- $Z_m$  et  $Z_v$  désignent la cote du fond du cours d'eau (en m NGF) respectivement en amont et en aval du tronçon,
- $K_s$  désigne le coefficient de frottement du lit du cours d'eau,
- $h_d$  désigne la hauteur de la digue (en m),
- $Z_b$  désigne la cote de la berge (en m NGF).

<sup>1</sup> A noter que ce coefficient  $K_s$  est en réalité plutôt de type "conductivité" que "résistance", dans le sens où plus il est fort, plus la vitesse et le débit d'écoulement est important pour une hauteur d'eau donnée

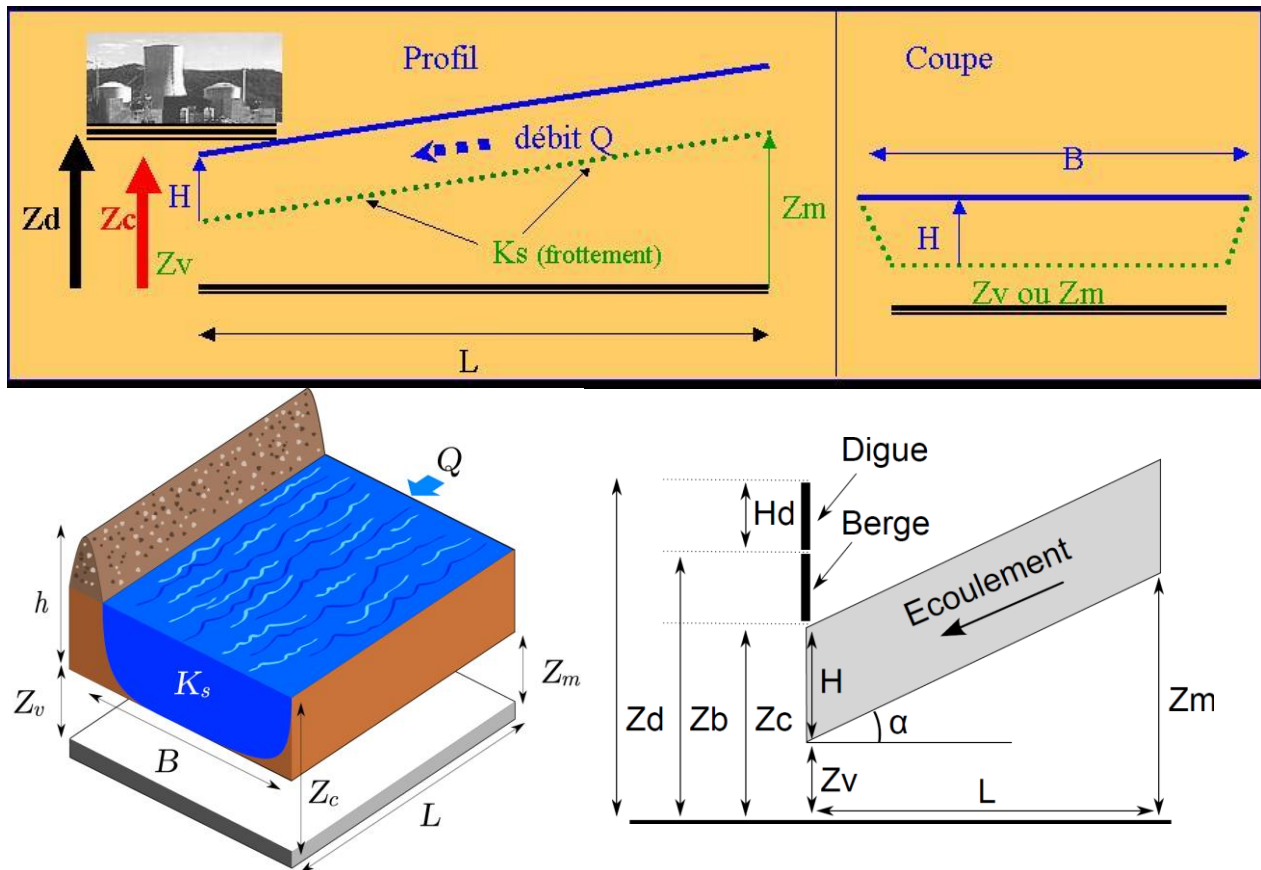


Figure 1 : Exemple de la digue

#### I.4. IDENTIFICATION DES SOURCES D'INCERTITUDES EN ENTRÉE DU MODÈLE HYDRAULIQUE

Parmi les variables d'entrée du modèle (présenté au travers des équations (1) et (2)), les incertitudes sont nombreuses :

- de par la nature intrinsèquement aléatoire de certains phénomènes : pour des raisons météorologiques, climatiques et sédimentaires, le débit  $Q$  et la nature du fond du cours d'eau évoluent au fil du temps (modifiant les cotes  $Z_m$ ,  $Z_v$  et le coefficient de frottement  $K_s$ , voire la largeur  $B$ ). Si l'évolution est en partie déterministe et prédictible à court terme et à une échelle plutôt locale, il est traditionnel de la considérer comme aléatoire, typiquement pour l'étude du risque pluri-annuel.
- du fait d'un manque de connaissance (dite parfois "épistémique") :
  - les relevés topographiques du cours d'eau (et de la digue) sont toujours partiels, ce qui affecte la connaissance de  $Z_m$ ,  $Z_v$ , voire de  $B$  et  $Z_b$ .
  - les données disponibles pour caractériser les distributions de probabilité des grandeurs aléatoires sont limitées et incomplètes (voire bruitées par des erreurs de mesure), ce qui génère une incertitude de méconnaissance de type "statistique". Cela affecte classiquement la statistique du débit, mais théoriquement aussi celle des autres variables.
  - par ailleurs, dans le modèle simplifié, le coefficient de frottement  $K_s$  est en fait un paramètre de modélisation très composite sans signification physique directe, qui d'une certaine manière "intègre" toute sorte de détails de modélisation non représentés (comme l'hétérogénéité du fond et de l'écoulement, la turbulence...) : il faut donc choisir sa valeur à dire d'expert et/ou à partir de la mesure (partielle et bruitée) d'autres grandeurs physiques.

Pour le cas d'étude, on simplifiera le problème en considérant que certaines variables sont connues avec précision (la longueur du tronçon  $L$ , la largeur du cours d'eau  $B$  et la cote de la berge  $Z_b$ ), tandis que les variables incertaines  $Q$ ,  $K_s$ ,  $Z_m$ ,  $Z_v$  (et donc  $H$ ,  $Z_c$ ,  $S$ ) seront typiquement considérées comme sources d'incertitude principales et modélisées comme des variables aléatoires.

### I.5. DONNÉES DE RÉFÉRENCE POUR LE MODÈLE ET LES INCERTITUDES HYDRAULIQUES

Les hypothèses de référence pour les diverses variables du problème sont les suivantes.

Variable aléatoire	Type de loi	Paramètre 1	Paramètre 2
$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	Gumbel	1013 (mode)	558 (échelle)
$K_s$ (coefficient)	Normale	30 (espérance)	7.5 (écart-type)
$Z_v$ (m NGF)	Triangulaire	50 (espérance)	1 (demi-étendue)
$Z_m$ (m NGF)	Triangulaire	55 (espérance)	1 (demi-étendue)

Tableau 2 : Distributions retenues pour les variables d'entrée considérées comme aléatoires

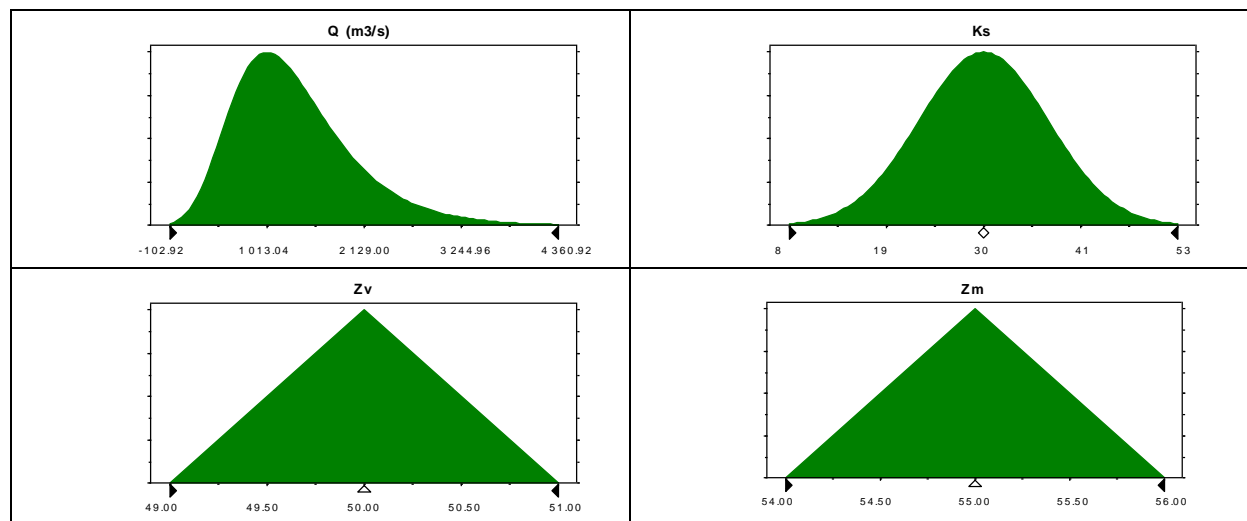


Figure 2 : Densités de probabilité des variables aléatoires d'entrée du modèle

Pour le débit  $Q$ , la loi de Gumbel est classique en matière de "statistiques extrêmes" de phénomènes naturels. Pour le coefficient  $K_s$ , la loi normale est retenue a priori car ce paramètre s'apparente à un mélange d'incertitudes physiques de type "mesure". Pour les cotes de fond du cours d'eau  $Z_m$  et  $Z_v$ , les lois triangulaires illustrent une incertitude dans des limites maximales supposées connues (pour des raisons géomorphologiques), avec une probabilité non uniforme, mais plutôt centrée sur l'état moyen, et symétrique.

Globalement, il s'agit d'un modèle stationnaire dans le sens où, sur une durée typique de plusieurs dizaines d'années, les caractéristiques statistiques des différentes variables sont supposées ne pas changer, ce qui est un choix de modélisation simple, évidemment critiquable et améliorable (par exemple effet du changement du climat et de l'évolution sédimentaire, pour des raisons naturelles) ; mais bien entendu, au sein de cette même période, les réalisations sont différentes d'une année à l'autre car il s'agit de variables aléatoires.

Les caractéristiques des variables en entrée du modèle prises déterministes sont les suivantes.

<b>L</b>	Longueur tronçon (m)	5000
<b>B</b>	Largeur cours d'eau (m)	300
<b>Z<sub>b</sub></b>	Cote berge (m NGF)	55.5

Tableau 3 : Valeurs fixes retenues pour les variables d'entrée considérées comme déterministes

Ces données sont fictives, mais les ordres de grandeurs sont ceux d'un fleuve français.

## I.6. MODÈLE ÉCONOMIQUE ET INCERTITUDES ASSOCIÉES

En s'intéressant également à une évaluation des dommages potentiels et à l'optimisation des coûts d'investissement, on introduit une modélisation schématique des coûts induits, à savoir :

- les coûts de dommages sur l'installation pour une surverse donnée. Représentant à la fois les dommages matériels à l'installation et les pertes de productible (l'installation étant rendue indisponible par l'inondation), ils sont typiquement croissants avec la surverse jusqu'à un palier (où tout est inondé), mais gardent une composante incertaine même si la surverse est parfaitement connue (représentant l'aléa sur l'état de l'installation au moment, inconnu, de la crise).
- les coûts de dommages à la digue elle-même pour une crue donnée. Déterministes, représentant l'endommagement de la digue, ils croissent avec la surverse jusqu'à un endommagement complet et dépendent du coût de la digue elle-même.
- les coûts d'investissement/maintenance de la digue, déterministes et croissants naturellement avec la hauteur de la digue.

On considérera que le coût d'investissement croît avec la hauteur de la digue  $h_d$ , pour deux raisons :

1. le coût au mètre linéaire de digue croît avec sa hauteur,
2. la longueur nécessaire à endiguer croît également avec la cote de la digue, jusqu'à une longueur maximale.

Quant au coût de maintenance, il est supposé être proportionnel au coût d'investissement de l'ordre de 1% annuel. On raisonnera généralement sur une période de 30 ans : même si la digue a une durée de vie probablement nettement supérieure, cette durée paraît être un bon ordre de grandeur pour optimiser le risque.

On notera :

- $S$  la surverse (en m),  $Z_d$  la cote de la digue (en m NGF) et  $h_d$  la hauteur de la digue (en m),
- $\ell_d$  la longueur de la digue nécessaire pour protéger uniformément à une hauteur moyenne donnée,
- $C_i$  le coût d'investissement de la digue pour une hauteur donnée  $h_d$  et  $C_m$  le coût de maintenance annuel correspondant,
- $C_t$  le coût total de la digue (investissement et maintenance cumulée sur la période considérée) pour une hauteur donnée  $h_d$ ,
- $C_s$  le coût de dommage au site,
- $C_g$  le coût de dommage à la digue, fonction de la surverse  $S$  et du coût d'investissement  $C_i$  (pour une année),
- $C_d$  le coût total de dommage (pour une année),
- $C_c$  le coût complet, incluant, sur une période donnée, l'investissement/maintenance ainsi que les coûts de dommage à la digue et à l'installation industrielle,
- $T$  la durée sur laquelle est étudié le problème.

On a donc :

$$C_t(T) = C_i(h_d) + T \cdot C_m(h_d) \text{ sur la durée } T \quad \text{Equation (3)}$$

$$C_d = C_s + C_g = C_s(S) + C_g(S, h_d) \text{ sur une année} \quad \text{Equation (4)}$$

$$C_c(T) = C_t(T) + \sum_{j=1}^T C_{d,j}(S_j, h_d) \text{ sur la durée } T \text{ (j est l'indice de l'année)} \quad \text{Equation (5)}$$

$$C_{c,\text{moyenné}} = \frac{C_c(T)}{T} \quad \text{Equation (6)}$$

Voici les valeurs numériques (purement virtuelles) proposées :

Surverse par rapport à la digue $S$ (en m)	Coût de dommage $C_s(S)$ au site (en M€)	Coût de dommage $C_g$ à la digue (% par rapport au coût d'investissement $C_i$ )
-0.1	0	0%
0	0	10%
0.5	150	50%
1	1500	100%
1.5	2000	100%
> 2	2000	100%

Tableau 4 : Valeurs retenues pour les coûts liés à la surverse

Le tableau ci-dessous donne les coûts de construction de la digue en fonction de sa hauteur et de sa longueur.

Hauteur de la digue $h_d$ (en m)	Coût du linéaire (en €/m)	Longueur de la digue $\ell_d$ (en m)	Coût d'investissement $C_i$ (en k€)
0	-	-	-
0.1	100	1 000	100
0.5	150	1 500	225
1	424	2 437	1 034
2	1 200	3 959	4 750
3	2 205	5 000	11 023
4	3 394	5 000	16 971
5	4 338	5 000	21 692
6	5 302	5 000	26 509
7	6 282	5 000	31 408
8	7 275	5 000	36 377
9	8 282	5 000	41 409
10	9 300	5 000	46 498

Tableau 5 : Valeurs retenues pour les coûts liés à la construction et la maintenance de la digue

La croissance du coût linéaire est supposée plus forte que linéaire car si la hauteur de la digue augmente, sa largeur également. La longueur de la digue  $\ell_d$  croît avec  $h_d$  moins vite que linéairement et plafonne à 5 km, supposé être le périmètre maximal de protection de la digue.

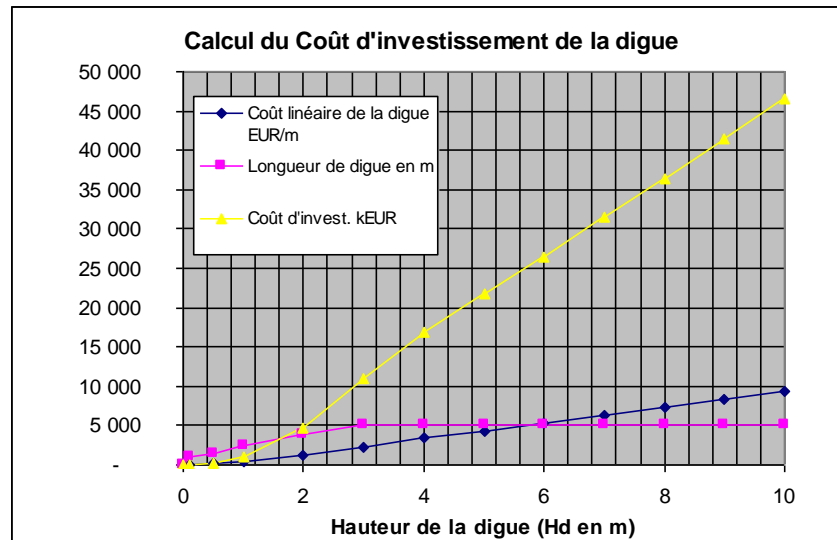


Figure 3 : Calcul du coût d'investissement de la digue  $C_i$  en fonction de sa hauteur  $h_d$

## II. PREMIÈRE APPROCHE DE RÉOLUTION DU CAS D'ÉTUDE – DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR DE LA DIGUE À PARTIR DES RELEVÉS DE MESURE HISTORIQUES

A partir des seuls relevés de mesure historiques présentés dans le tableau 1 en paragraphe I.2, proposez une hauteur de digue  $h_d$  de façon à "minimiser le risque d'inondation", c'est-à-dire la probabilité que  $H - h_d$  soit positive.

## III. DEUXIÈME APPROCHE DE RÉOLUTION DU CAS D'ÉTUDE – DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR DE LA DIGUE À PARTIR DU MODÈLE HYDRAULIQUE

A partir du modèle hydraulique simplifié représenté par les équations (1) et (2) en paragraphe I.3 et des hypothèses de travail précisées dans les paragraphes I.4 et I.5, proposez une hauteur de digue  $h_d$  de façon à "minimiser le risque de surverse", c'est-à-dire la probabilité que  $S$  définie par l'équation (2) soit positive. Le résultat obtenu pourra être comparé avec celui identifié uniquement à partir de l'exploitation des relevés de mesure historiques (première approche de résolution).

## IV. TROISIÈME APPROCHE DE RÉOLUTION DU CAS D'ÉTUDE – DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR DE LA DIGUE À PARTIR DU MODÈLE ÉCONOMIQUE

A partir du modèle hydraulique et du modèle économique représenté par les équations (3) à (6) en paragraphe I.6 et des hypothèses de travail précisées dans le même paragraphe, proposez une hauteur de digue  $h_d$  de façon à minimiser le "risque économique lié à la surverse", c'est-à-dire minimiser par exemple le coût  $C_{c,moyenné}$  défini par l'équation (6). Le résultat obtenu pourra être comparé avec ceux identifiés par les deux autres approches de résolution.

Un rapport de Projet devra être rédigé par les étudiants. Pour chacune des trois approches à traiter, la démarche retenue devra être clairement expliquée et les résultats obtenus devront être argumentés et justifiés. Le choix des outils logiciels est laissé à la discrétion des étudiants (les codes informatiques pourront être joints au rapport). Une restitution du travail de chaque étudiant, sous la forme d'une présentation orale, est à prévoir.