Econometría

4 | Fundamentos estadísticos

Momentos

Luis Chávez

Área de Formación Académica
Dat Company

2026

Momentos

Caracterización:

- Un momento (poblacional) es una característica descriptiva expresada como esperanza matemática.
- En general, el **momento alrededor del punto a de orden k** se denota por:

$$\mu_{k,a} = \mathbb{E}[(X-a)^k] \tag{1}$$

- Cuando $a = 0$ se tiene casos especiales.

DAT

Momentos

Definición 1

Sea X una v.a y $k \in \mathbb{N}$, el **momento centrado alrededor de la media** de orden k se define por:

$$\mu_k = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^k \tag{2}$$

Si X es una v.a discreta y continua, respectivamente, se tiene:

$$\mu_k = \sum_{x \in R_X} [x - \mathbb{E}(X)]^k p(x) \tag{3}$$

$$\mu_k = \int_{x \in R_X} [x - \mathbb{E}(X)]^k f(x) dx \tag{4}$$

Momentos

Definición 2

Sea X una v.a y $k \in \mathbb{N}$, el **momento no centrado** (momento centrado alrededor del origen) de orden k se define por:

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) \tag{5}$$

Si X es una v.a discreta y continua, respectivamente, se tiene:

$$m_k = \sum_{x \in R_X} x^k p(x) \tag{6}$$

$$m_k = \int_{x \in R_X} x^k f(x) dx \tag{7}$$

DAT

Momentos especiales

Casos especiales:

- Primer momento centrado alrededor del origen: esperanza matemática.
- Segundo momento centrado alrededor de la media: varianza.
- Tercer momento centrado alrededor de la media: asimetría.
- Cuarto momento centrado alrededor de la media: curtosis.

Más detalles en Moya and Saravia (2004).

Momentos especiales

Definición 3

Dada una v.a discreta X con tuplas $\{x, p(x)\}$, la **esperanza matemática** de X (μ_X) es

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x p(x) \tag{8}$$

En cambio, si X es una v.a continua con densidad $f(x)$,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{R_X} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{9}$$

DAT

Momentos especiales

Propiedades (esperanza)

Sea X es una v.a, a y b constantes. Luego,

1. $\mathbb{E}(a) = a$.
2. $\mathbb{E}[aG(X)] = a\mathbb{E}[G(X)]$.
3. $\mathbb{E}(aX \pm b) = a\mathbb{E}(X) \pm b$.
4. $X \geq 0, \ \exists \mathbb{E}(X) \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$.
5. $\exists \mathbb{E}(x) \Rightarrow |\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Momentos especiales

Ejemplo 1

Sea X una v.a que representa el número de días en que un trabajador llega tarde a su centro laboral durante una semana. Hallar $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(2X^2 + 3)$ si la distribución de probabilidad es:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.40	0.30	0.15	0.08	0.05	0.02

Momentos especiales

Ejemplo 2

Sea X el gasto en transporte diario con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10 - x}{50} & , \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & , \text{otros casos} \end{cases}$$

Hallar $\mathbb{E}(X)$.

Momentos especiales

Definición 4

El segundo momento alrededor de la media se conoce como **varianza** (σ_X^2):

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu_X^2 \tag{10}$$

Si X es una v.a discreta y continua, respectivamente, se tiene:

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 p(x) \tag{11}$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \tag{12}$$

DAT

Momentos especiales

Propiedades (varianza)

Sean las v.a X e Y, a y b constantes, entonces:

1. $\mathbb{V}(a) = 0$.
2. $\mathbb{V}(aX \pm b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
3. $\sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X$.
4. $\mathbb{V}(X \pm Y) = \mathbb{V}(X) \pm \mathbb{V}(Y) \Leftarrow X \perp Y$.

Momentos especiales

Ejemplo 3

Sea X el rendimiento mensual (en porcentaje) de un activo financiero, cuya distribución de probabilidad está dada por:

x	-2	3	8
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

Hallar $\mathbb{V}(X)$ y $SD(X)$.

Momentos especiales

Ejemplo 4

Sea X =horas de estudio de un estudiante, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{32} & \text{, si } 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{, otros casos} \end{cases}$$

Si $Y = 5 + 2X$, hallar $\mathbb{V}(Y)$.

Referencias I

Moya, R. and Saravia, G. (2004). *Probabilidad e Inferencia Estadística.* Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2 edition.