

Lecture 09

z -변환과 디지털 시스템

z-변환



- 이산 신호 $x[n]$ 의 z -변환은 멱급수(**power series**)로 정의됨

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- z 는 복수 변수
 - $X(z)$ 가 항상 존재하지 않음
 - $X(z)$ 가 유한한 값을 갖는 모든 z 값을 $X(z)$ 의 수렴 영역(**ROC**: region of convergence)이라고 함
- 신호 $x[n]$ 의 z -변환의 표현은 다음과 같음

$$X(z) = Z\{x[n]\} \quad \text{또는} \quad x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)$$

z-변환



■ 예

- $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

↑
원점($n = 0$)의 위치

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	1	2	3	4	5
z^{-n}	$z^0 = 1$	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}$$

ROC: $z = 0$ 을 제외한 모든 z -영역

z-변환



■ 예

- $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

↑
원점($n = 0$)의 위치

n	-2	-1	0	1	2
$x[n]$	1	2	3	4	5
z^{-n}	z^2	z^1	$z^0 = 1$	z^{-1}	z^{-2}



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^2 + 2z + 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2}$$

ROC: $z = 0$ 과 $z = \infty$ 를 제외한 모든 z -영역

z-변환



■ 예

- $x[n] = \delta[n]$

n	...	-1	0	1	...
$x[n]$	0	0	1	0	0
z^{-n}	...	z^1	$z^0 = 1$	z^{-1}	...



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1$$

ROC: 모든 z -영역

z-변환



■ 예

- $x[n] = \delta[n - k]$

n	...	$k - 1$	k	$k + 1$...
$x[n]$	0	0	1	0	0
z^{-n}	...	$z^{-(k-1)}$	z^{-k}	$z^{-(k+1)}$...



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^{-k}$$

ROC: $z = 0$ 을 제외한 모든 z -영역

z-변환



- z-역변환을 구하는 과정이 매우 복잡함
 - 구간이 유한한 신호의 z-역변환은 z의 지수항이 갖고 있는 시간 정보를 가지고 있어서 간단하게 구할 수 있음
 - 예: $X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-5}$

z^{-n}	$z^0 = 1$	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}	z^{-5}
n	0	1	2	3	4	5
$x[n]$	1	-2	0	3	0	-1



$$x[n] = \{1, -2, 0, 3, 0, -1\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5]$$

↑
원점($n=0$)의 위치

z-변환



- z-변환과 z-변환의 수렴 영역 ROC를 반드시 명시해 야 함

- 예: $x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

기하급수

$$\text{만약 } |A| < 1 \text{ 이면 } 1 + A + A^2 + A^3 + \dots = \frac{1}{1-A}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad \text{ROC: } \left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

z-변환



- z-변환과 z-변환의 수렴 영역 ROC를 반드시 명시해 야 함

- 예: $y[n] = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\right)^n & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (2z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n$$

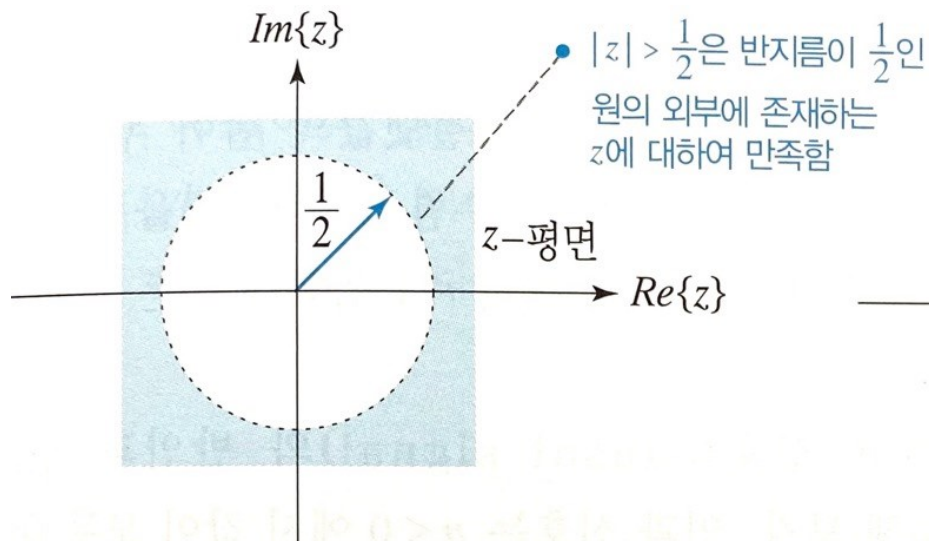
기하급수

$$\text{만약 } |A| < 1 \text{ 이면 } 1 + A + A^2 + A^3 + \dots = \frac{1}{1-A}$$

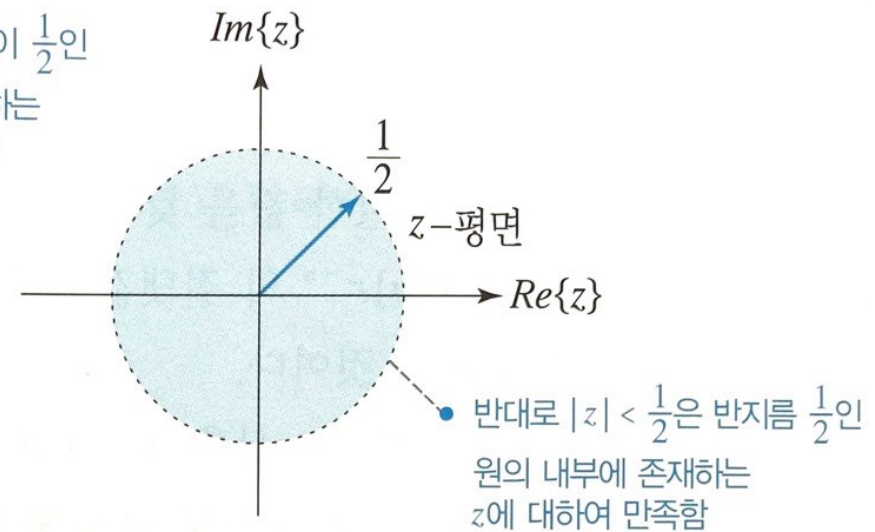
$$Y(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = -\frac{2z}{1-2z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{ROC: } |2z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

z-변환

- z-변환과 z-변환의 수렴 영역 ROC 를 반드시 명시해 야 함
 - 예: $x[n]$ 와 $y[n]$ 신호는 서로 다르지만 $X(z)$ 와 $Y(z)$ 는 같은 형태를 가짐. 단, ROC 가 다름



$X(z)$ 의 ROC



$Y(z)$ 의 ROC

z-변환



■ z-변환의 수렴

- z-변환 $X(z)$ 에서 z 를 자기의 극형식(**polar form**) $z = re^{j\theta}$ 로 대체함

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}$$

- 수렴 영역에서 $|X(z)| < \infty$ 를 만족해야 함

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| |e^{-j\theta n}|$$

- $|e^{-j\theta n}| = 1$ 이므로

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}|$$

z-변환



- z-변환의 수렴

- $x[n]$ 이산 신호를 인과 신호(**causal signal**)와 비인과 신호(**anticausal signal**)로 구분함

$$x_+[n] = x[n]u[n]$$

$$x_-[n] = x[n]u[-n-1]$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x_-[n]r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_+[n]}{r^n} \right|$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_-[-n]r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_+[n]}{r^n} \right|$$

z-변환



■ z-변환의 수렴

- $x[n]$ 이산 신호를 인과 신호(**causal signal**)와 비인과 신호(**anticausal signal**)로 구분함

$$|X(z)| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_-[-n]r^n|}_{\text{Left Sum}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_+[n]}{r^n} \right|}_{\text{Right Sum}}$$

r 의 값이 매우 작아서
 $x_-[-n]r^n$ 의 합이 유한한
값을 가져야 함

$$ROC: r < r_1, r_1 < \infty$$

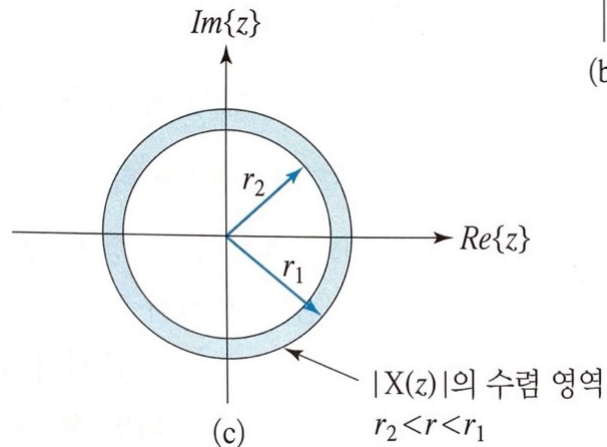
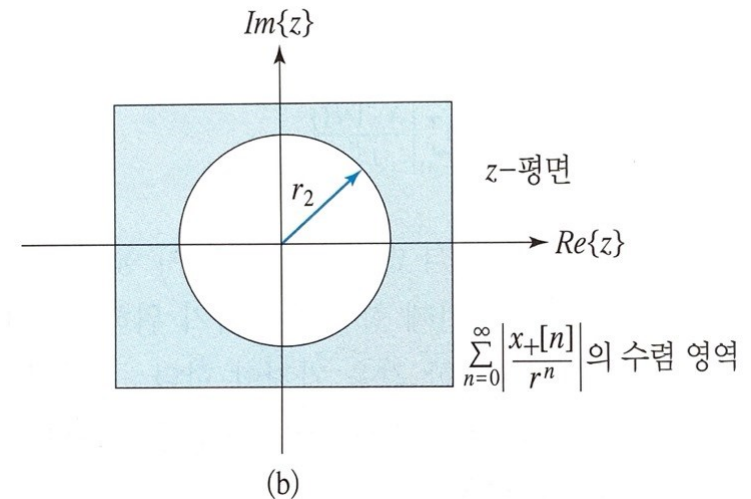
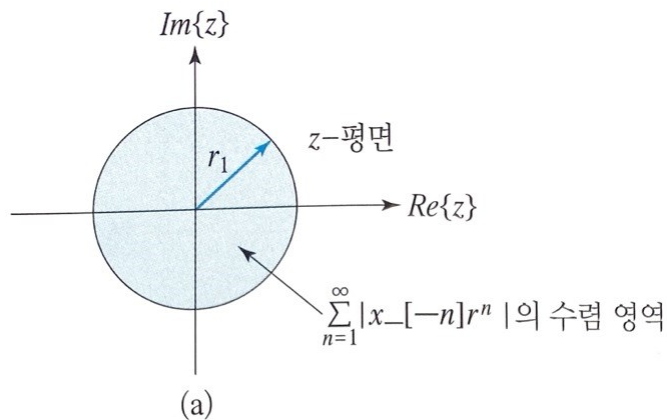
r 의 값이 매우 커서 $\frac{x_+[n]}{r^n}$ 의 합이
유한한 값을 가져야 함

$$ROC: r > r_2, r_2 < \infty$$

$$ROC: r_2 < r < r_1$$

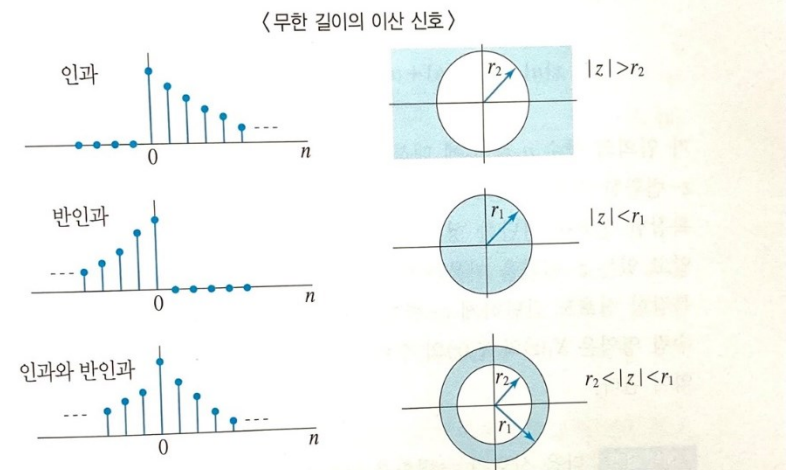
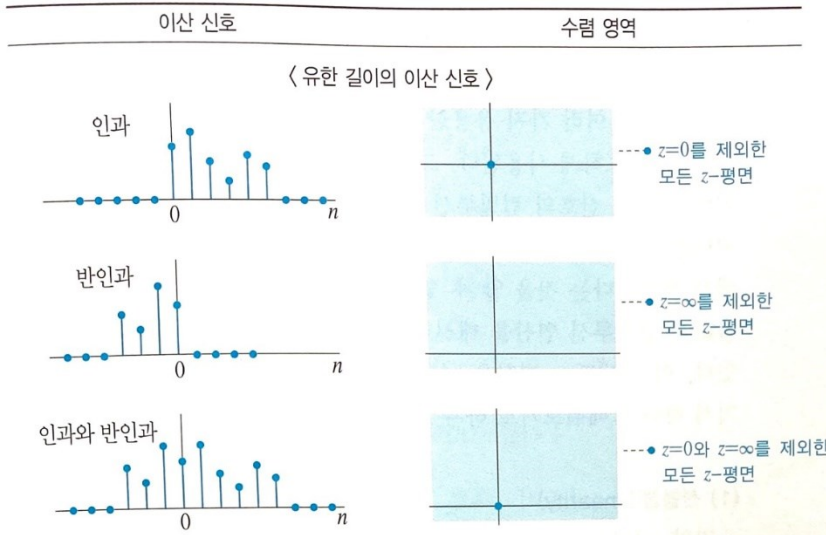
z-변환

■ z-변환의 수렴



z-변환

■ 신호의 특성과 수렴 영역과의 관계



z-변환의 성질

- 선형성(linearity)

- 만약 $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$ 와 $x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$ 라면

$$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

- a_1 과 a_2 는 임의의 상수
- $X(z)$ 의 수렴 영역은 $X_1(z)$ 와 $X_2(z)$ 의 수렴 영역의 교집합 즉 각 수렴 영역의 중복 영역이 됨

- 예, $x[n] = (\cos \omega_0 n)u[n] = \underbrace{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]}$

오일러 공식(Euler's identity)

$$X(z) = \frac{1}{2}Z\{e^{j\omega_0 n}u[n]\} + \frac{1}{2}Z\{e^{-j\omega_0 n}u[n]\}$$

z-변환의 성질

■ 선형성(linearity)

■ 예, $x[n] = (\cos \omega_0 n)u[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]$

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{2}Z\{e^{j\omega_0 n}u[n]\} + \frac{1}{2}Z\{e^{-j\omega_0 n}u[n]\}$$

■ $a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, ROC: |z| > |a|$ 의 알고 있는 결과를 이용하므로

$$e^{j\omega_0 n}u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}, ROC: |z| > 1$$

$$e^{-j\omega_0 n}u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}, ROC: |z| > 1$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}} = \frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, ROC: |z| > 1$$

z-변환의 성질

- 시간 이동성(time shift)

- 만약 $x[n]$ 을 k 만큼 시간 이동하면 z -변환은 다음과 같음

$$x[n - k] \xleftrightarrow{Z} z^{-k} X(z)$$

- 증명: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - k] z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] z^{-(l+k)}$ ← $n - k = l$ 로 변수 치환함

$$\begin{aligned} &= z^{-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] z^{-l} \\ &= z^{-k} X(z) \end{aligned}$$

- $z^{-k} X(z)$ 의 수렴 영역은 $X(z)$ 의 수렴 영역과 같지만, $k > 0$ 일 경우는 $z = 0$ 이, $k < 0$ 일 경우는 $z = \infty$ 가 수렴 영역에서 제외되어야 함

z-변환의 성질

- z-영역에서의 척도 조절성(scaling property)

- 만약 $x[n]$ 의 z-변환은 다음과 같으면

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z), ROC: r_1 < |z| < r_2$$

- 임의의 상수 a 에 대하여 다음과 같은 성질을 만족함

$$a^n x[n] \xrightarrow{Z} X(a^{-1}z), ROC: |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

- 증명:

$$Z\{a^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

- 수렴 영역 $ROC: r_1 < |a^{-1}z| < r_2 \Leftrightarrow |a|r_1 < |z| < |a|r_2$

z -변환의 성질

- z -영역에서의 미분

- 만약 $x[n]$ 의 z -변환은 $X(z)$ 이면 z -영역에서의 미분은 다음과 같음

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

- 증명:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \\ &\Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1} Z\{nx[n]\} \Rightarrow nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} \end{aligned}$$

- 수렴 영역은 변하지 않음

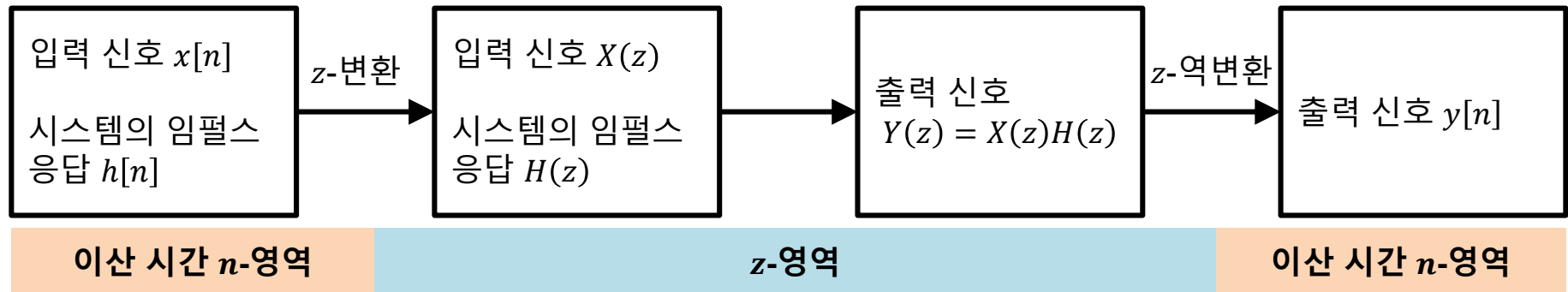
z-변환의 성질

■ 두 신호의 컨벌루션

- 만약 $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$ 이고 $x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$ 이면

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$$

- 이 성질을 이용하여 시스템을 더 간단하게 해석할 수 있음



- 시스템의 임펄스 함수 $h[n]$ 의 z-변환 $H(z)$ 를 전달 함수(**transfer function**)라고 함

z-변환의 성질

- 두 신호의 컨벌루션

- 예, $x[n] = \{1, -2, 1\}$, $h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

↓ z-역변환

$$y[n] = \{1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$

z-역변환

- 적분 기반 z-역변환의 정의

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) z^{n-1} dz$$

- 적분 계산이 어렵기 때문에 다음과 같은 두 가지 방법을 이용할 수 있음
 - ① 멱급수 전개(**power series expansion**)
 - ② 부분 분수 전개(**partial fraction expansion**)

- 멱급수 전개 방법

- $X(z)$ 와 수렴 영역을 함께 주어진다면 다음과 같은 형태로 전개시킴

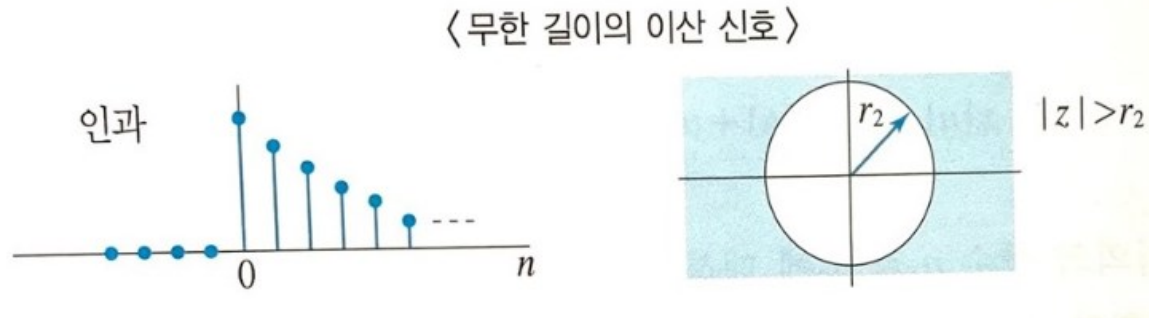
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

- $x[n] = c_n$ 을 유도할 수 있음

z-역변환

■ 멱급수 전개 방법

- 예, $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$
- 만약 수렴 영역 $|z| > 1$ 이면 $x[n]$ 은 무한 길이의 인과 신호라는 것을 예상할 수 있음



→ 전개하려는 멱급수에서는 z 에 대한 지수항이 음이 되도록 만들어야 함

z-역변환

■ 멱급수 전개 방법

- 예, $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$, 수렴 영역 $|z| > 1$

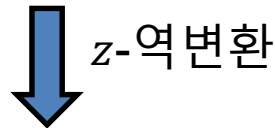
$$\begin{array}{r}
 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \dots \\
 \hline
 z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} z^2 \\ z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2}z - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}z^{-1} \\ \hline \frac{7}{4} - \frac{3}{4}z^{-1} \\ \hline \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

z-역변환

- 멱급수 전개 방법

- 예, $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$, 수렴 영역 $|z| > 1$

$$X(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \dots$$



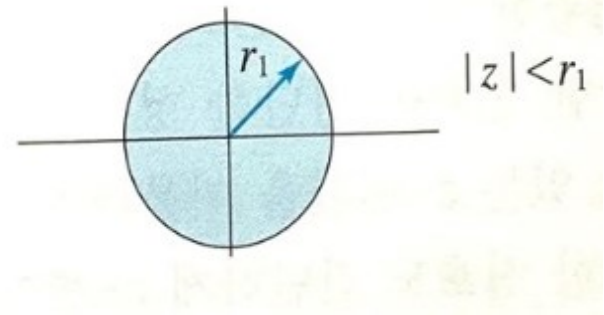
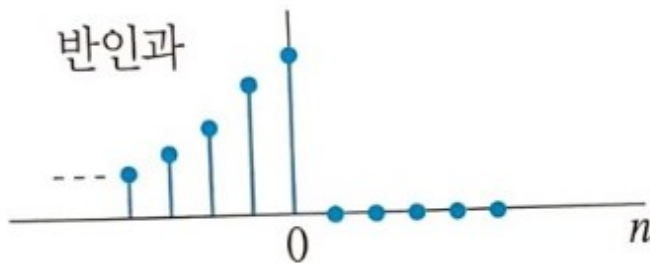
$$x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots \right\}$$

원점($n = 0$)의 위치

z-역변환

■ 맥급수 전개 방법

- 예, $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$
- 만약 수렴 영역 $|z| < 0.5$ 이면 $x[n]$ 은 무한 길이의 반인과 신호라는 것을 예상할 수 있음



→ 전개하려는 맥급수에서는 z 에 대한 지수항이 양이 되도록 만들어야 함

z-역변환

■ 멱급수 전개 방법

- 예, $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$, 수렴 영역 $|z| < 0.5$

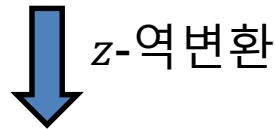
$$\begin{array}{r}
 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \dots \\
 \hline
 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 - 3z + 2z^2 \\ \hline 3z - 2z^2 \\ \hline 3z - 9z^2 + 6z^3 \\ \hline 7z^2 - 21z^3 + 14z^4 \\ \hline \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

z-역변환

- 멱급수 전개 방법

- 예, $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$, 수렴 영역 $|z| > 1$

$$X(z) = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \dots$$



$$x[n] = \{\dots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, 0\}$$

↑
원점($n = 0$)의 위치

z-역변환

■ 부분 분수 전개 방법

- $X(z)$ 와 수렴 영역을 함께 주어지면 다음과 같은 형태로 전개시킴

$$X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) + \cdots + a_kX_k(z)$$

- $X_1(z), \dots, X_k(z)$ 의 역변환 $x_1[n], \dots, x_k[n]$ 을 찾은 다음 $x[n]$ 을 구할 수 있음

$$x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n] + \cdots + a_kx_k[n]$$

- 이 방법은 $X(z)$ 가 다음과 같이 유리 함수의 형태로 주어졌을 때 유효하게 사용됨

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_Nz^{-N}}$$

z-역변환

■ 부분 분수 전개 방법

- 예, $X(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$, 수렴 영역 $|z| > 1$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1 z}{z-1} + \frac{A_2 z}{z-0.5} = \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{z-0.5}$$

↓ z-역변환

$$x[n] = 2u[n] - (0.5)^n u[n]$$

주요 신호의 z -변환

$x[n], n \geq 0$	$X(z)$	수렴 영역 $ z > R$
$\delta[n]$	1	0
$\delta[n - m]$	z^{-m}	0
$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$	1
n	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	1
n^2	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$	1
a^n	$\frac{z}{z - a}$	$ a $
na^n	$\frac{az}{(z - a)^2}$	$ a $

주요 신호의 z -변환

$x[n], n \geq 0$	$X(z)$	수렴 영역 $ z > R$
$(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$ a $
$\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+m)a^n}{m!}$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$ a $
$\cos \omega_0 n$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	1
$\sin \omega_0 n$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	1
$a^n \cos \omega_0 n$	$\frac{z(z - a \cos \omega_0)}{z^2 - 2za \cos \omega_0 + a^2}$	$ a $
$a^n \sin \omega_0 n$	$\frac{za \sin \omega_0}{z^2 - 2za \cos \omega_0 + a^2}$	$ a $
$\exp[-anT]$	$\frac{z}{z - \exp[-aT]}$	$ \exp[-aT] $

주요 신호의 z -변환

$x[n], n \geq 0$	$X(z)$	수렴 영역 $ z > R$
nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	1
$nT \exp[-anT]$	$\frac{Tz \exp[-aT]}{(z - \exp[-aT])^2}$	$ \exp[-aT] $
$\cos n\omega_0 T$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	1
$\sin n\omega_0 T$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	1
$\exp[-anT] \cos n\omega_0 T$	$\frac{z(z - \exp[-aT] \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \exp[-aT] \cos \omega_0 T + \exp[-2aT]}$	$ \exp[-aT] $
$\exp[-anT] \sin n\omega_0 T$	$\frac{z(z - \exp[-aT] \sin \omega_0 T)}{z^2 - 2z \exp[-aT] \cos \omega_0 T + \exp[-2aT]}$	$ \exp[-aT] $

단방향 z -변환

- 배운 z -변환은 모든 시간 영역($-\infty < n < \infty$)에서 정의됨
→ 양방향(**bilateral**) z -변환이라고 부름
- 인과 신호의 경우, $n \geq 0$ 영역에서만 존재하므로 z -변환은 다음과 같음

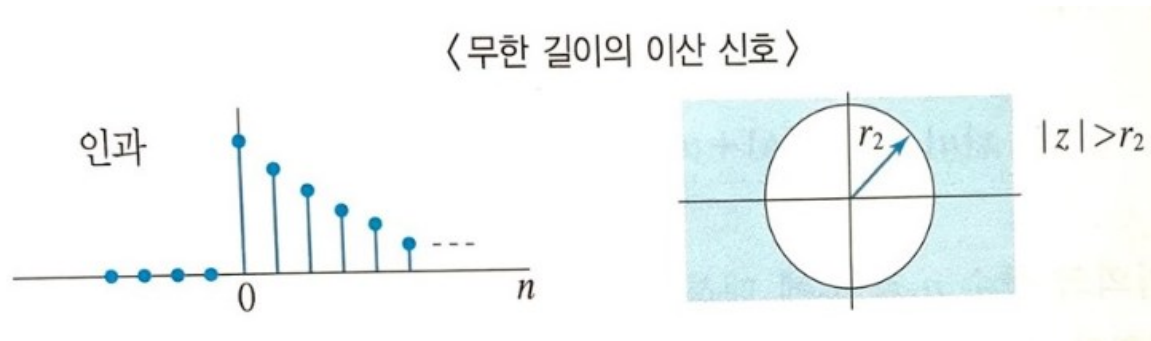
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- 위와 같은 형태를 단방향(**unilateral**) z -변환이라고 부름
- 단방향 z -변환은 다음과 같이 표현됨

$$x[n] \xleftrightarrow{Z^+} X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

단방향 z -변환

- $x[n]$ 의 단방향 z -변환은 $x[n]u[n]$ 의 양방향 z -변환과 같음
- 단방향 z -변환의 수렴 영역은 복수평면에서 반드시 원의 외부가 되므로 단방향 z -변환을 설명할 때 수렴 영역을 특별히 언급할 필요가 없음



- 양방향 z -변환의 성질과 단방향 z -변환의 성질은 시간 이동성을 제외하고는 거의 같음

단방향 z -변환

- 시간 이동성(shifting property)

- 시간 지연(time delay)

만약 $x[n] \xleftrightarrow{Z^+} X^+(z)$ 이면

$$x[n-k] \xleftrightarrow{Z^+} z^{-k} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^k x[-n]z^n \right], k > 0$$

만약 $x[n]$ 이 인과 신호일 경우, 즉 $x[n] = 0, n < 0$ 인 경우

$$x[n-k] \xleftrightarrow{Z^+} z^{-k} X^+(z)$$

단방향 z -변환

- 시간 이동성(shifting property)

- 시간 선행(time advance)

만약 $x[n] \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$ 이면

$$x[n+k] \xleftrightarrow{z^+} z^k \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right], k > 0$$

- 단방향 z -변환을 이용하면 차분 방정식을 쉽게 풀 수 있음

- ① 주어진 차분 방정식의 z -변환식을 구함
- ② 구하고자 하는 출력의 z -변환을 찾아냄
- ③ 시간 영역에서의 출력을 구하려면 찾아낸 z -변환을 역변환하면 됨

단방향 z -변환

- 단방향 z -변환을 이용하면 차분 방정식을 쉽게 풀 수 있음

- 예, $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \delta[n]$, $y[-1] = 3$

차분 방정식 양변에 단방향 z -변환을 취하면 다음과 같음

$$Z^+\left\{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]\right\} = Z^+\{\delta[n]\}$$

좌변에 단방향 z -변환의 선형성과 시간 이동성을 적용하면

$$Y^+(z) - \frac{1}{2}z^{-1}\{Y^+(z) + y[-1]z\} = 1$$

주어진 초기 조건 $y[-1] = 3$ 을 삽입해서 다시 정렬하면

$$Y^+(z) = \frac{5}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$Y^+(z)$ 의 역변환을 취하면 $y[n] = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$ 이 됨

LTI 시스템의 특성

■ z-변환의 극점(**pole**)과 영점(**zero**)

- 대부분의 z-변환은 유리 함수의 형태로 표현됨

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- 영점 : 유리 함수로 표현되는 $X(z)$ 에서 $X(z) = 0$ 이 되는 z 의 모든 값
- 극점 : 유리 함수로 표현되는 $X(z)$ 에서 $X(z) = \infty$ 이 되는 z 의 모든 값
- $X(z)$ 의 식에서 a_0 와 b_0 가 0이 아니라고 하면 다음과 같이 작성할 수 있음

$$X(z) = \frac{b_0 z^{-M} z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \dots + b_M/b_0}{a_0 z^{-N} z^N + (a_1/a_0) z^{N-1} + \dots + a_N/a_0}$$

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}$$

$N - M$ 의 음수/양수에 따라
 $|N - M|$ 개의 극점/영점 더 존재함

→ M개의 영점

→ N개의 극점

LTI 시스템의 특성

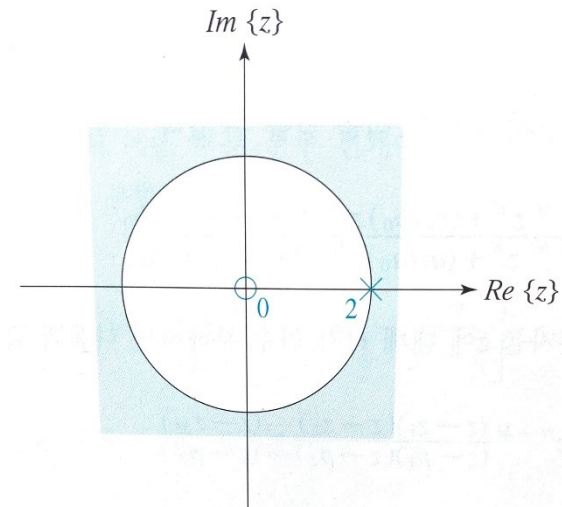
- z -변환의 극점(**pole**)과 영점(**zero**)
 - 극점과 영점은 복수평면에 그 위치(**pole-zero plot**)를 나타낼 수 있음
 - 극점은 \times 를, 영점은 o 를 사용해서 그 위치를 표시하게 됨
 - 예, $y[n] = 2^n u[n]$

$$z\text{-변환은 } X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}, \text{ ROC: } |z| > 2$$

영점 $z = 0$

극점 $z = 2$

극점에서는 $X(z) = \infty$ 가 되므로
수렴 영역 내에는 존재할 수 없음



LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
 - LTI 시스템의 입출력과 전달 함수와의 관계

$$Y(z) = X(z)H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- LTI 시스템은 N 차 상계수 차분 방정식으로 표현될 수 있음

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- 양변에 z -변환을 취하면

$$Y(z) = - \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

a_k 와 b_k 의 값에 따라
영점과 극점이 결정됨

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계

- 영점만 갖는 시스템

만약 $a_k = 0, 1 \leq k \leq N$ 이면 전달 함수가 다음과 같음

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$$

$z = 0$ 에 존재하는 극점을 무시하면 M 개의 영점만 존재하게 되므로 영점만 갖는 시스템(**all zero system**)이라고 정의함

대응하는 임펄스 응답을 구해보면 유한한 구간에서만 값을 갖게 되므로 이 시스템은 FIR(**Finite Impulse Response**) 시스템이 됨

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계

- 극점만 갖는 시스템

만약 $b_k = 0, 1 \leq k \leq M$ 이면 전달 함수가 다음과 같음

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{z^N}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} \quad a_0 \equiv 0$$

$z = 0$ 에 존재하는 영점을 무시하면 N 개의 극점만 존재하게 되므로 극점만 갖는 시스템(**all pole system**)이라고 정의함

극점이 존재하는 이유는 과거의 출력 신호 성분이 피드백되어 다시 입력으로 사용된 것이므로 이 시스템은 IIR(**Infinite Impulse Response**) 시스템이 됨

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
 - 예, 주어진 차분 방정식으로부터 시스템의 임펄스 응답을 구함

$$y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + 3x[n]$$

양변에 z -변환을 취하면

$$Y(z) = \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) + 3X(z)$$

전달 함수는 다음과 같음

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{3z}{z - \frac{1}{3}}$$

영점 $z = 0$ 에서 영점과 $z = \frac{1}{3}$ 에서 극점을 갖으므로 극점만 갖는 IIR 시스템이 됨. $H(z)$ 의 z -역변환을 취하면

$$h[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

LTI 시스템의 특성

- 시스템 전달 함수와 극점, 영점과의 관계
 - 예, 주어진 전달 함수로부터 차분 방정식을 구함

$$H(z) = \frac{5z + 2}{z^2 + 3z + 2}$$

$H(z)$ 을 z^{-1} 의 다항식의 비로 다시 표현하면

$$H(z) = \frac{5z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 의 형태와 시간 이동성을 활용하므로 차분 방정식을 구할 수 있음

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 5x[n-1] + 2x[n-2]$$