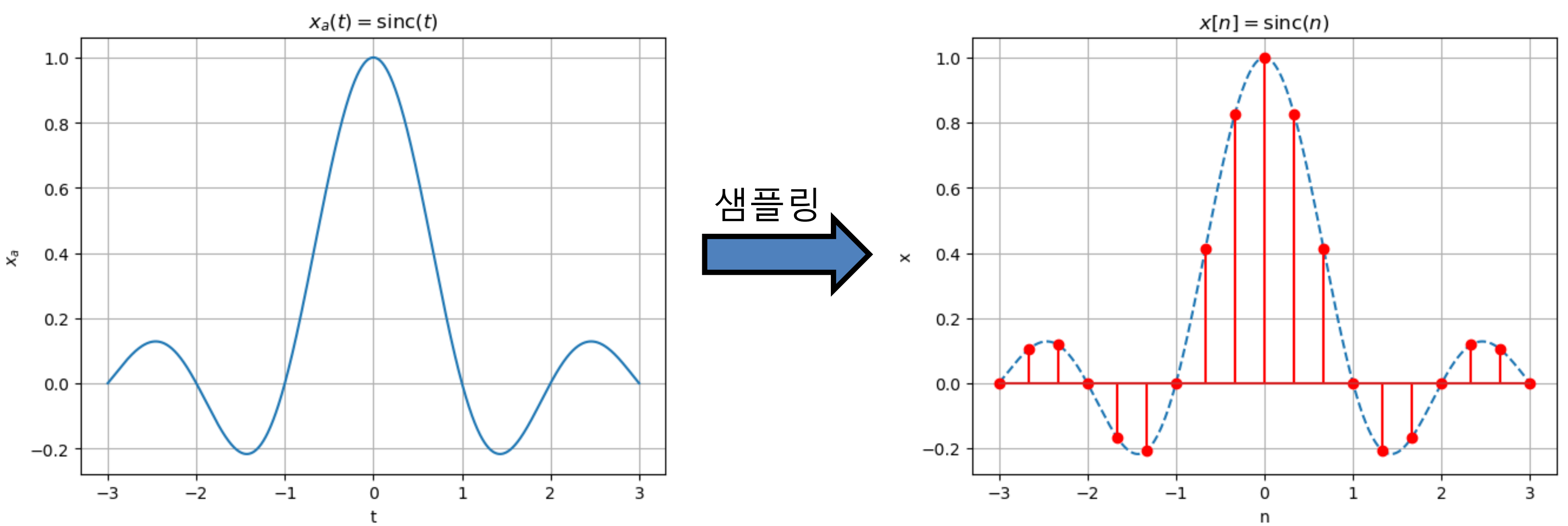
Lecture 04

이산 신호 및 시스템

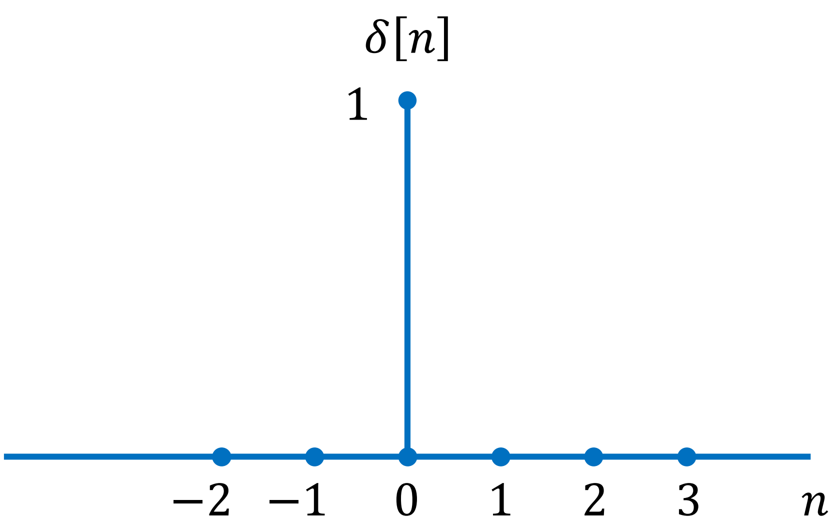
이산 신호

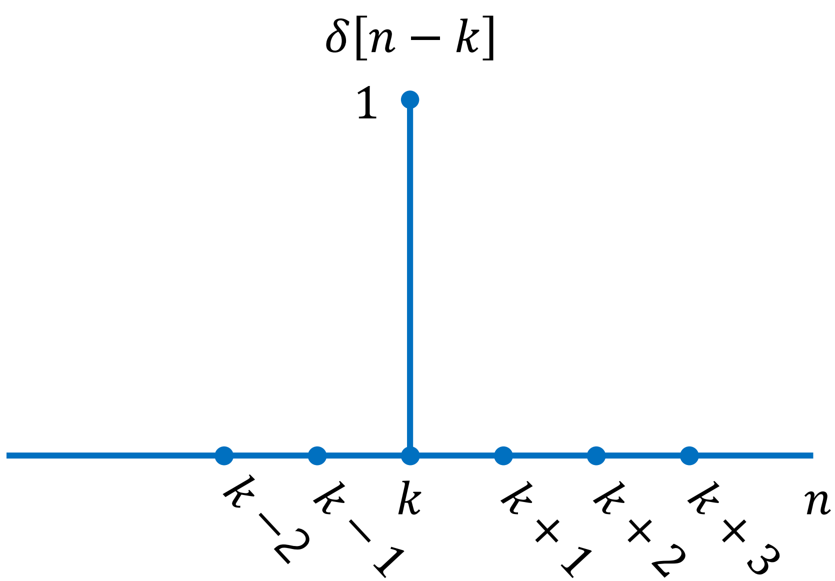
- 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호로 정의됨
- 연속 신호의 샘플링(**sampling**) 과정을 거쳐 얻게 됨
  - $x[n] = x_a(nT_s)$
  - $x[n]$은 $x_a(t)$를 T_s간격으로 샘플링 했을 때 n번째 샘플을 의미함



기본 이산 신호

- 단위 임펄스 함수(**Unit Impulse Function**)
  - 정의 : $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$
  - n이 정수가 아닌 경우 함수 값이 정의되지 않음





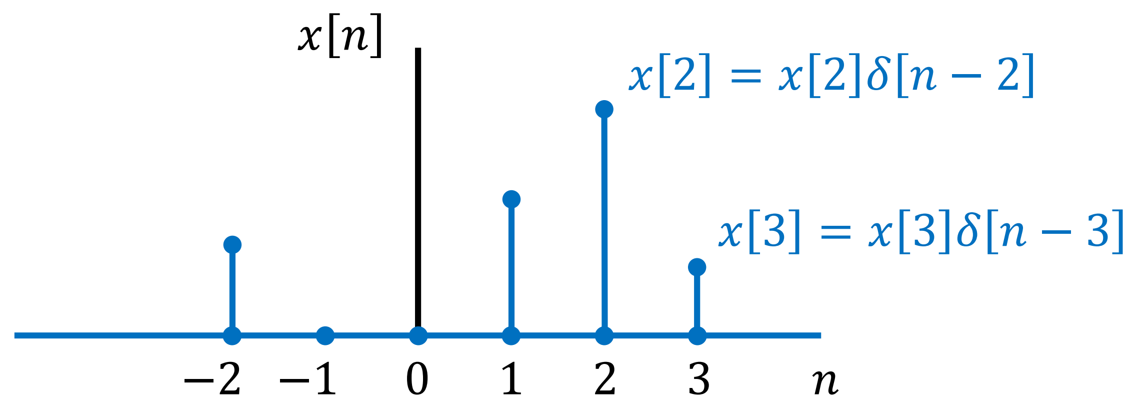
기본 이산 신호

- 단위 임펄스 함수(**Unit Impulse Function**)
  - 함수 $\delta[n]$는 임의의 이산 신호 $x[n]$에 대하여 다음과 같은 성질을 갖음

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$

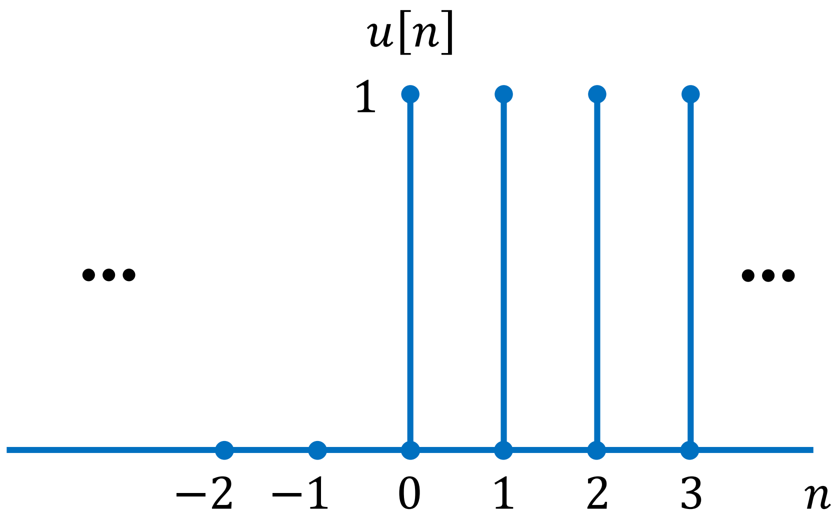
  - 임의의 이산 신호 $x[n]$을 임펄스 함수를 가지고 표현할 수 있음

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



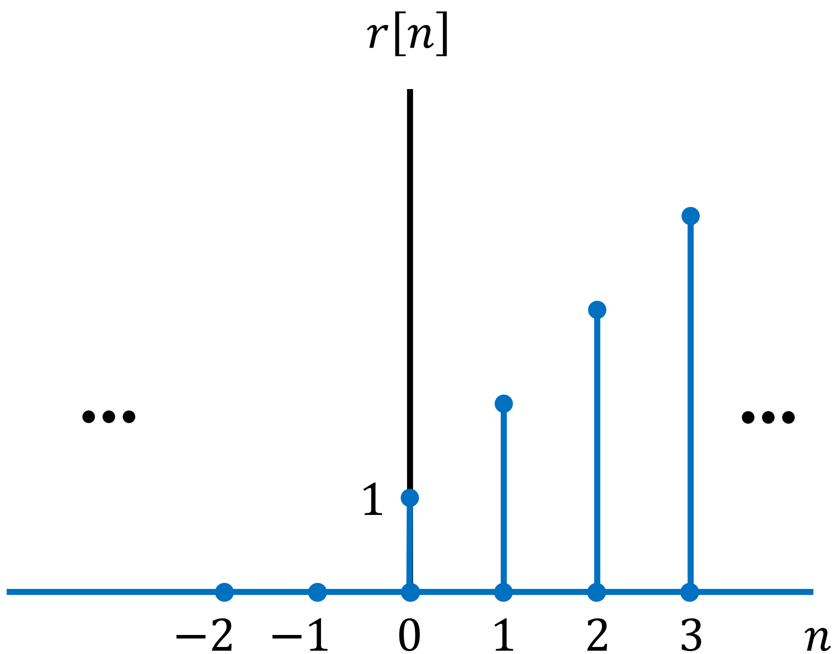
기본 이산 신호

- 단위 계단 함수(**Unit Step Function**)
  - 정의 : $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
    - $u[n] - u[n-1] = \delta[n]$
    - $\sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = u[n]$



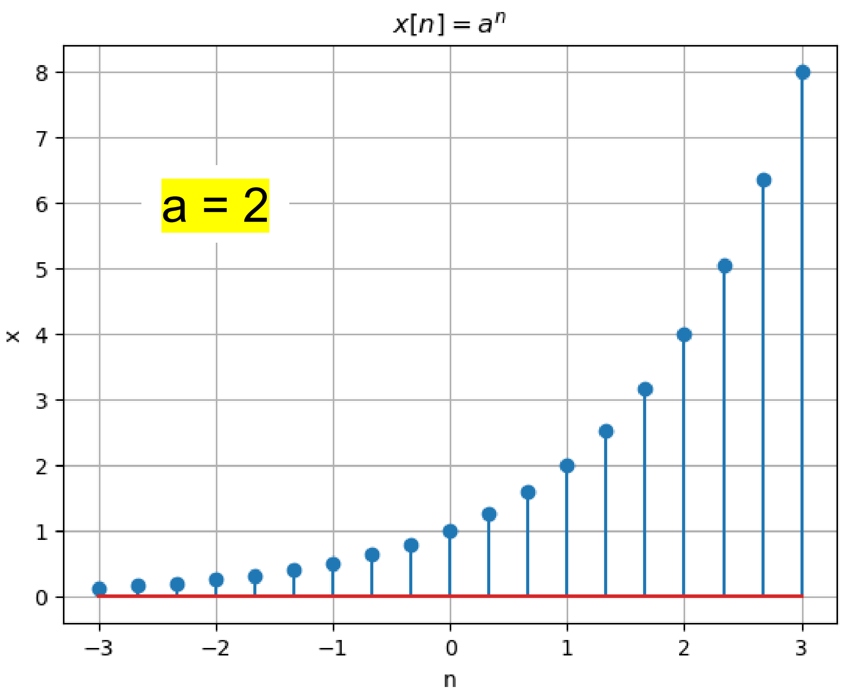
기본 이산 신호

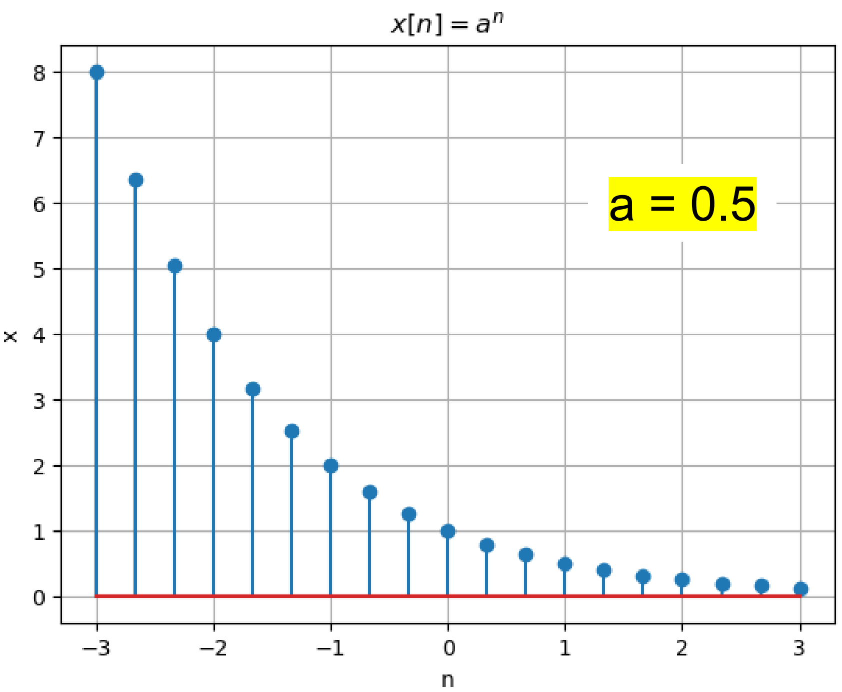
- 단위 램프 함수(**Unit Ramp Function**)
  - 정의 : $r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$



기본 이산 신호

- 지수 함수(**Exponential Function**)
  - 정의 : $x[n] = a^n, a > 0$





이산 신호 분류

- 에너지(**energy**) 신호와 전력(**power**) 신호
  - 에너지 : 신호의 크기를 제곱한 후 모두 정수 n에 대하여 더한 값

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

  - 에너지 신호 : **유한** E값을 갖고 있음
  - 신호의 **평균 전력**은 다음과 같이 정의됨

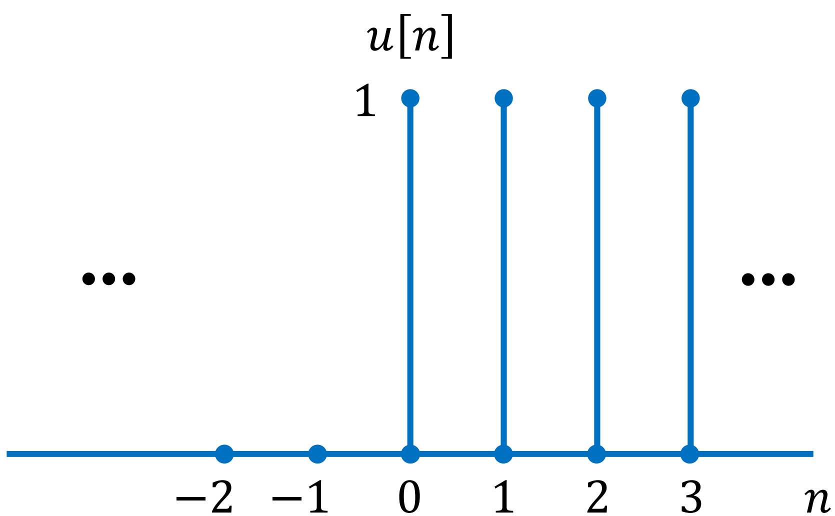
$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

  - 전력 신호 : **유한** P값을 갖고 있음

에너지 E	전력 P
유한	0
무한	유한 혹은 무한

이산 신호 분류

- 에너지(**energy**) 신호와 전력(**power**) 신호
  - 예, $x[n] = u[n]$



이산 신호 분류

- 에너지(**energy**) 신호와 전력(**power**) 신호
  - 예, $x[n] = u[n]$
    - 에너지

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |1|^2 = \infty$$

    - $x[n]$는 에너지 신호 아님
    - 전력

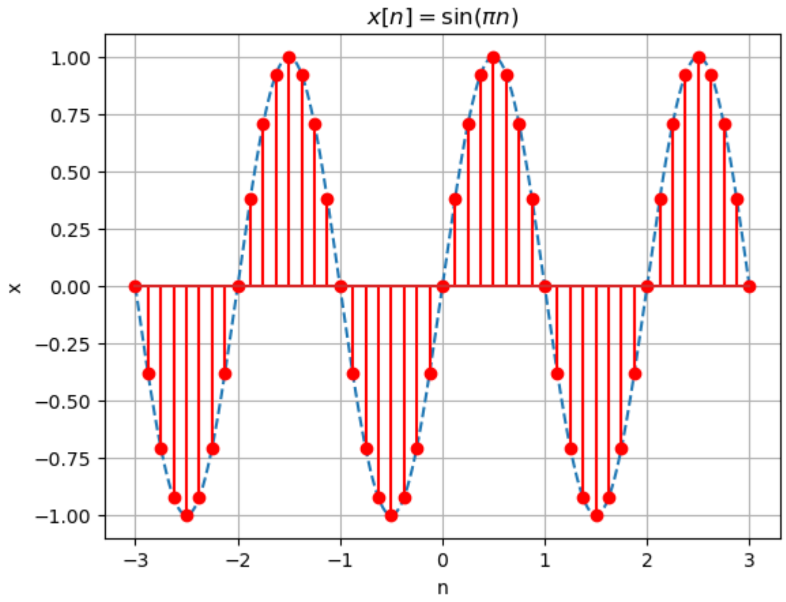
$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} |1|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

    - $x[n]$는 전력 신호임

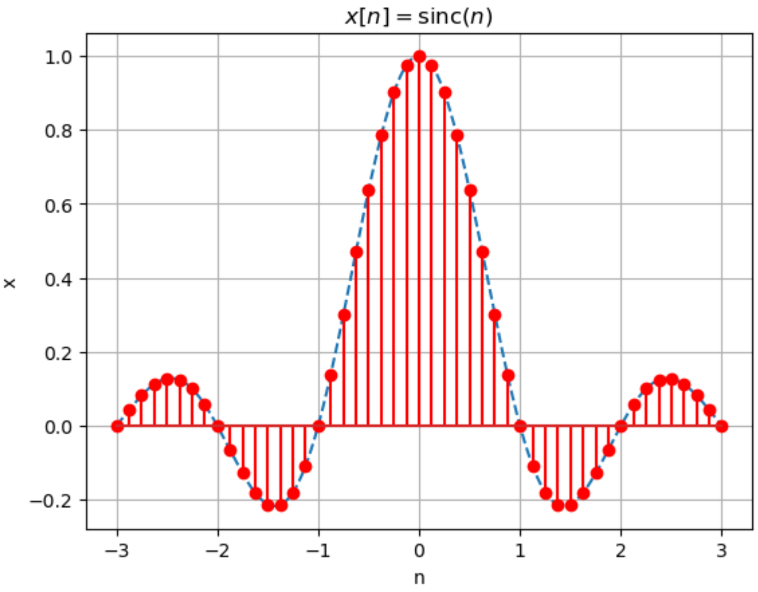
이산 신호 분류

- 주기 신호와 비주기 신호
  - 주기 신호 정의 : $x[n] = x[n + N]$

주기 신호

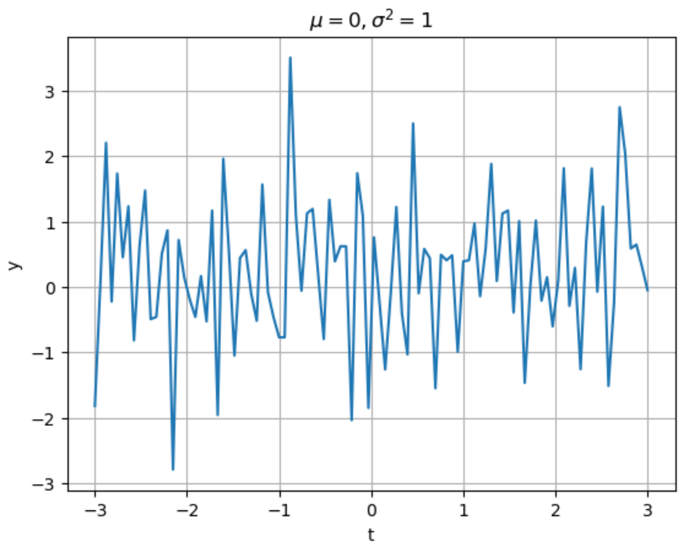


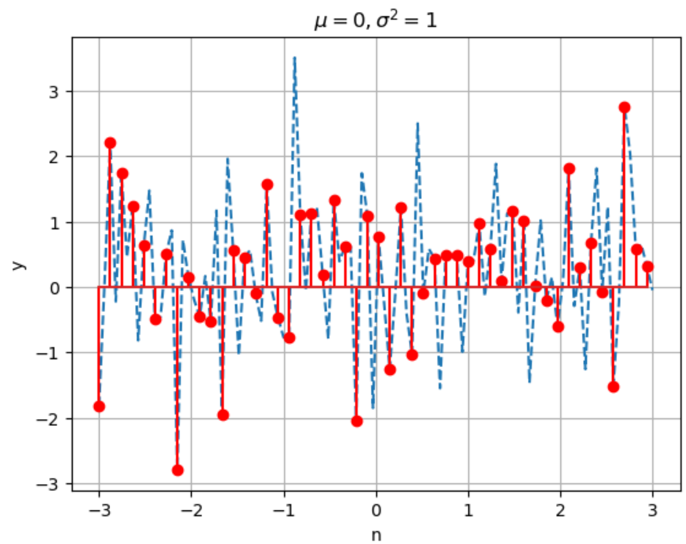
비주기 신호



이산 신호 분류

- 결정적(**deterministic**) 신호와 불규칙(**random**) 신호
  - 결정적 신호 : 수학식으로 명확하게 표현되거나 신호의 값을 **완전히** 예측할 수 있음
  - 불규칙 신호 : 신호의 값을 예측할 수 없음
    - 예, 백색 가우스 잡음(white Gaussian noise)

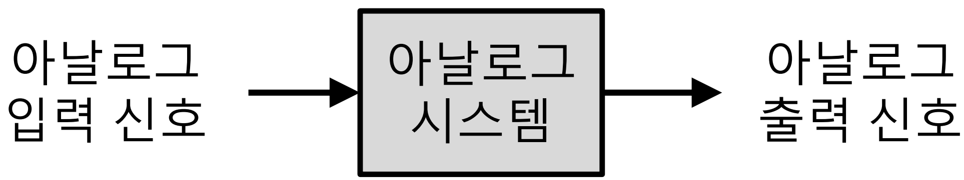




디지털 신호와 시스템

- 디지털 신호는 자연적으로 존재하는 신호가 아니라 아날로그 신호, 즉 **연속 신호**로부터 인위적인 작업을 통해 만들어짐

아날로그(연속) 시스템



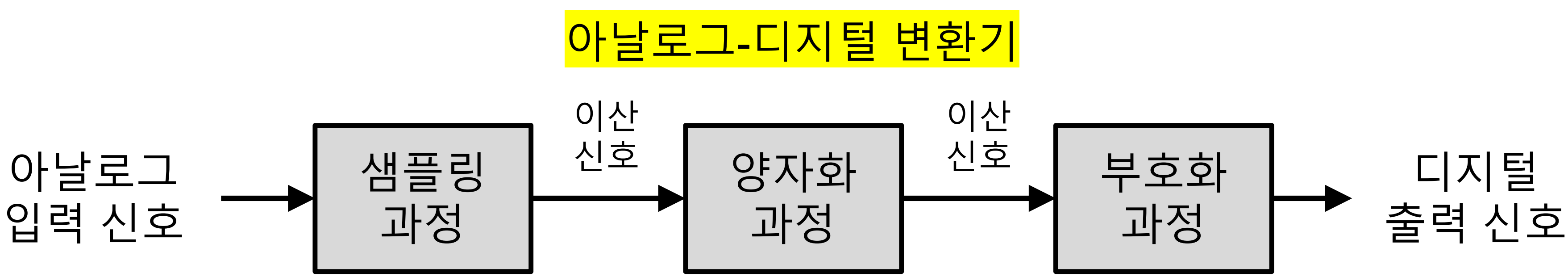
디지털 처리를 위한 아날로그 신호의 변환

디지털 신호와 시스템

- 디지털 신호 처리 시스템이 필요한 이유
  - 컴퓨터 프로그램에서 처리가 가능함
  - 손쉽게 수정이 가능함
  - 다양한 저장 매체에 쉽게 저장할 수 있음
  - 이동이 용이함
  - 복잡한 시스템을 쉽게 구현할 수 있음
  - …
- 디지털 시스템은 **음성** 신호 처리, **영상** 신호 처리 등 여러 분야에 널리 쓰임

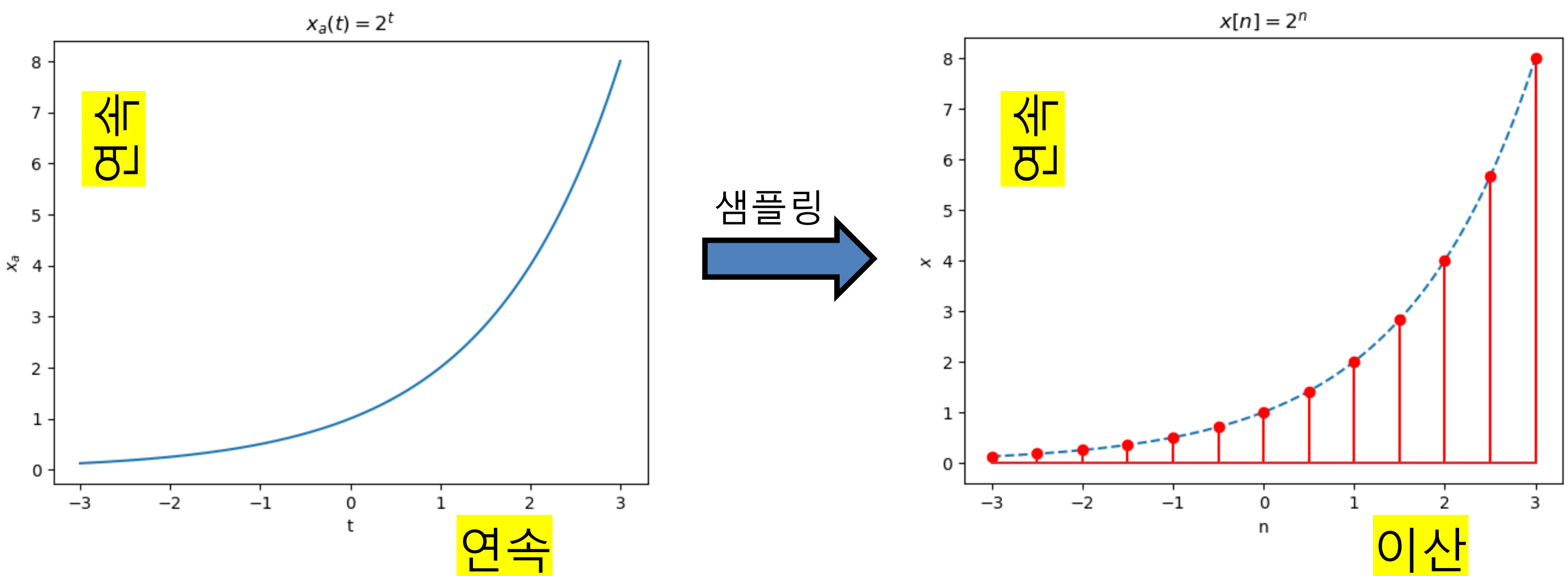
디지털 신호와 시스템

- 아날로그-디지털 변환(**ADC**: analog-to-digital conversion)
  - 샘플링
  - 양자화
  - 부호화



디지털 신호와 시스템

- 아날로그-디지털 변환(**ADC**: analog-to-digital conversion)
  - **샘플링** : 일정한 간격을 가지고 규칙적으로 연속 신호로부터 샘플을 취함으로써 **연속 신호** $x_a(t)$를 $\underbrace{\textbf{이산 신호}\ x[n] = x_a(nT)}_{\text{discrete-time signal}}$로 변환하는 과정임



디지털 신호와 시스템

- 아날로그-디지털 변환(**ADC**: analog-to-digital conversion)
  - **양자화** : 유한한 데이터 처리를 위한 디지털 처리를 위해서는 이산 신호를 **이산 시간과 이산 값**을 갖는 신호로 다시 변환하는 과정임

discrete-time discrete-valued signal

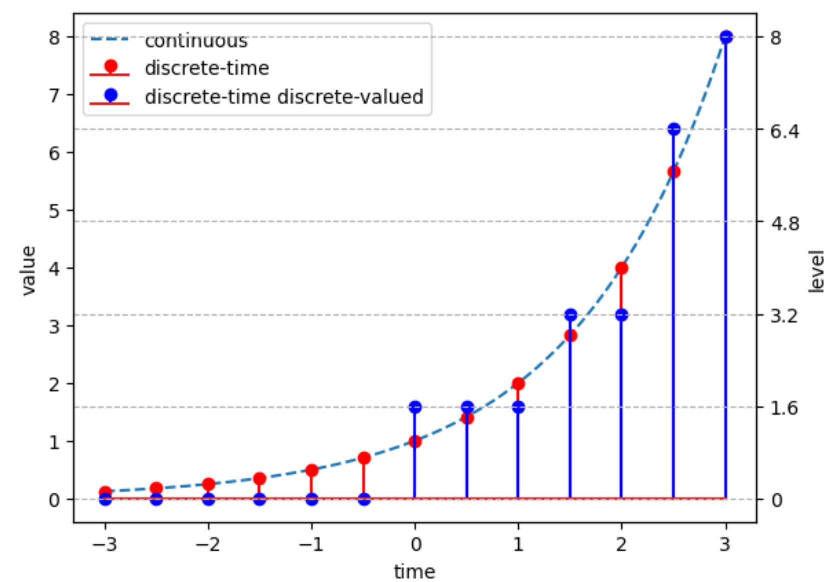
연속 신호

샘플링

이산 시간과 연속 값 신호

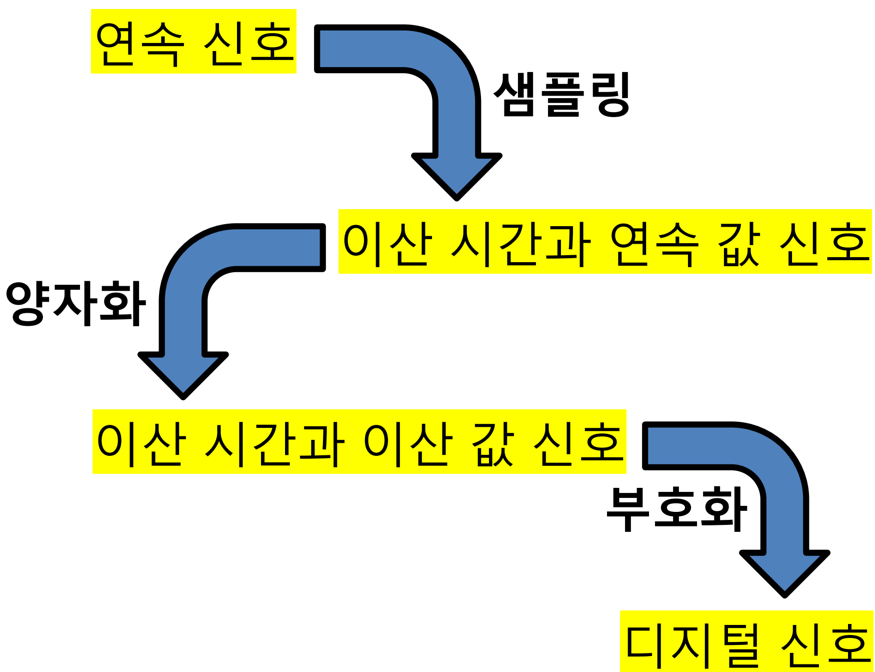
양자화

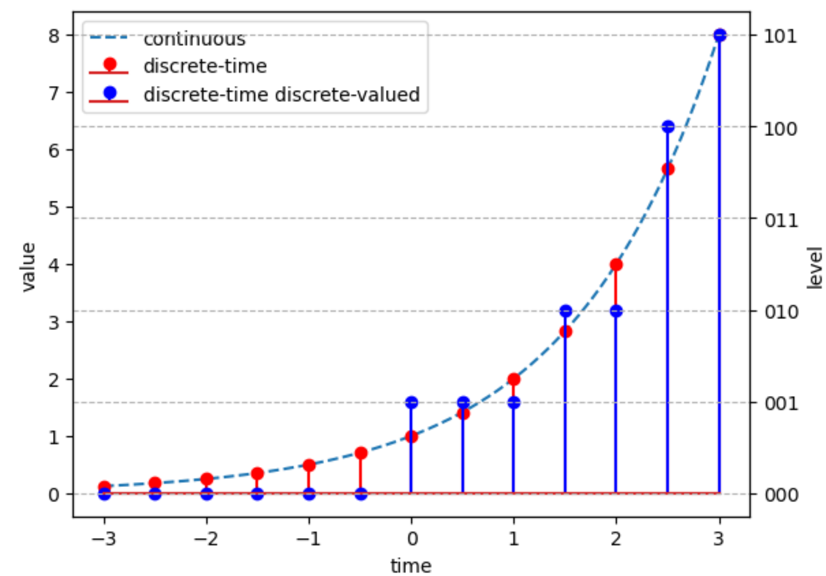
이산 시간과 이산 값 신호



디지털 신호와 시스템

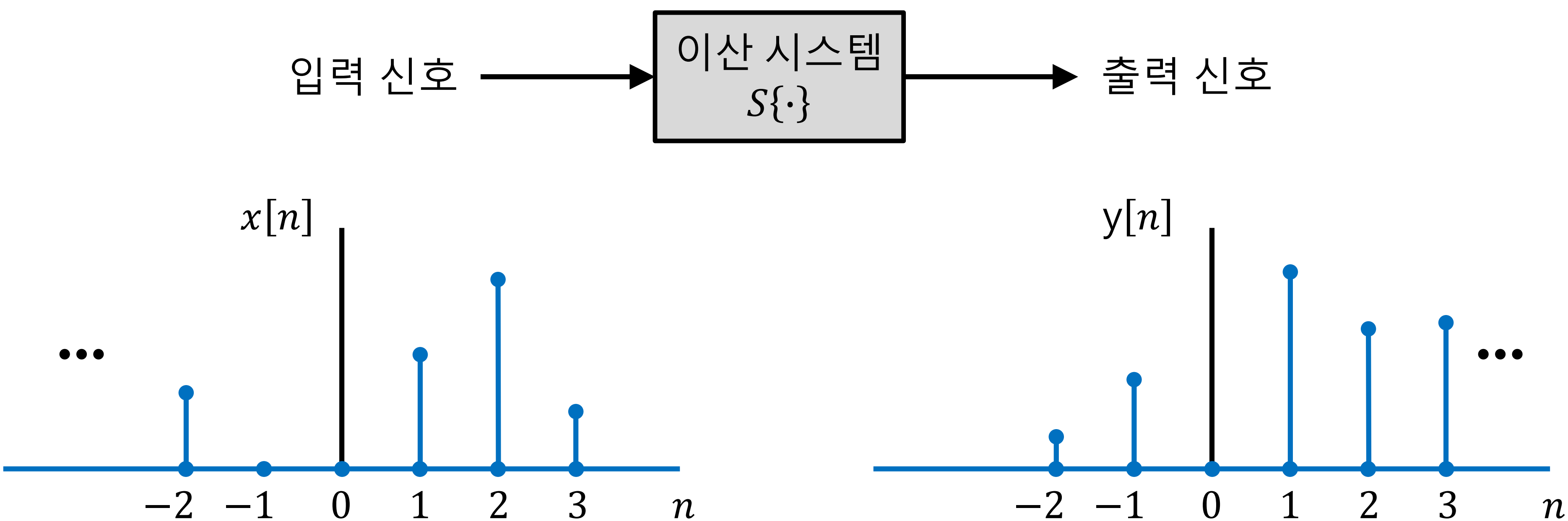
- 아날로그-디지털 변환(**ADC**: analog-to-digital conversion)
  - **부호화** : 각 양화자 구간에 하나의 이진수를 대응시키는 과정임





이산 시스템

- 입력 이산 신호에 어떤 동작이나 연산을 수행하여 다른 이산 신호를 만들어 내는 장치나 알고리즘임
  - 정의 : $y[n] = S\{x[n]\}$

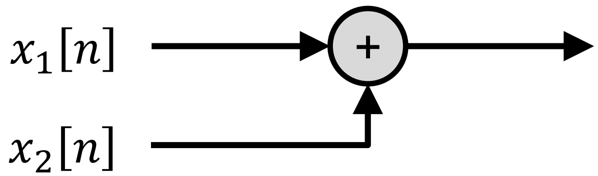


이산 시스템

- 예, $x[n] = \begin{cases} |n| & -2 \le n \le 2 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$
  - $y[n] = x[n]$
    - 시스템의 출력은 시스템의 입력과 같음
  - $y[n] = x[n-2] = \begin{cases} |n-2| & -2 \le n-2 \le 2 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases} = \begin{cases} |n-2| & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \text{다른 경우} \end{cases}$
    - 입력 $x[n] = \{\dots, 0, 0, 2, 1, \mathbf{0}, 1, 2, 0, 0, \dots\}$
    - 출력 $y[n] = \{\dots, 0, 0, 0, 0, \mathbf{2}, 1, 0, 1, 2, 0, 0, \dots\}$
    - 입력 신호를 두 샘플만큼 지연시켜 출력됨
  - $y[n] = \frac{1}{2}\{x[n-1] + x[n]\} = \left\{\dots, 0, 0, 1, \frac{3}{2}, \mathbf{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0, \dots\right\}$
    - 입력 신호의 직전 값과 현재 값의 평균값을 출력됨

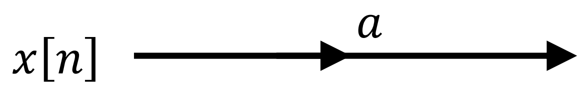
이산 시스템의 구성 요소

덧셈기



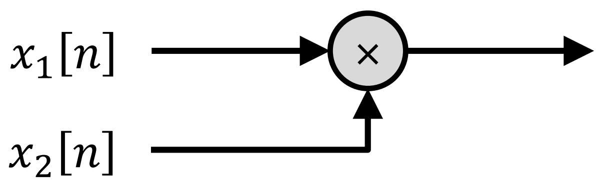
$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

상수 곱셈기



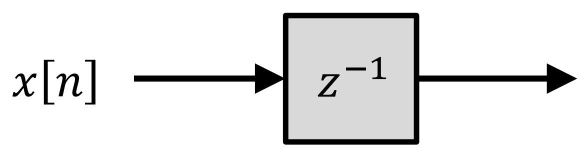
$y[n] = ax[n]$

신호 곱셈기



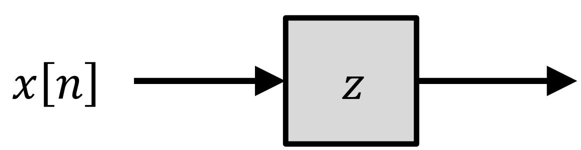
$y[n] = x_1[n]x_2[n]$

단위 시간 지연기



$y[n] = x[n-1]$

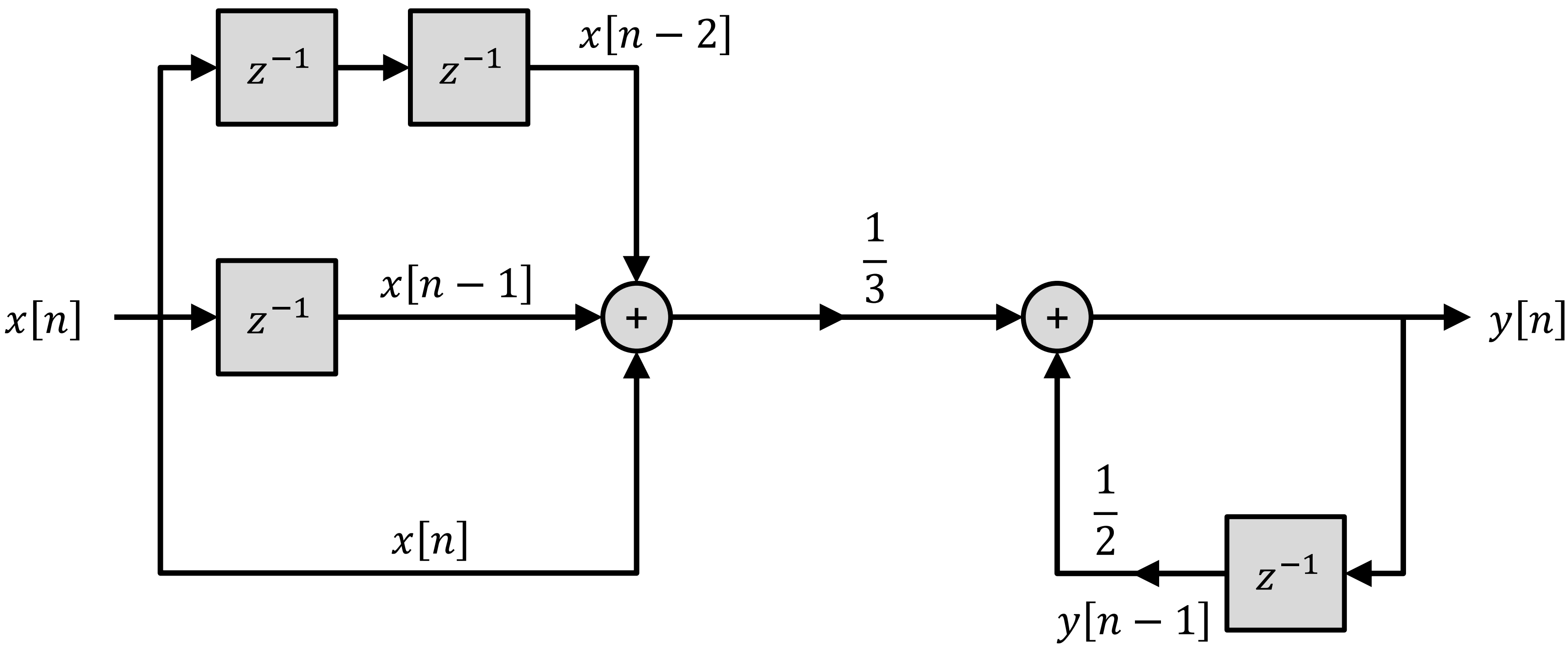
단위 시간 선행기



$y[n] = x[n+1]$

이산 시스템의 구성 요소

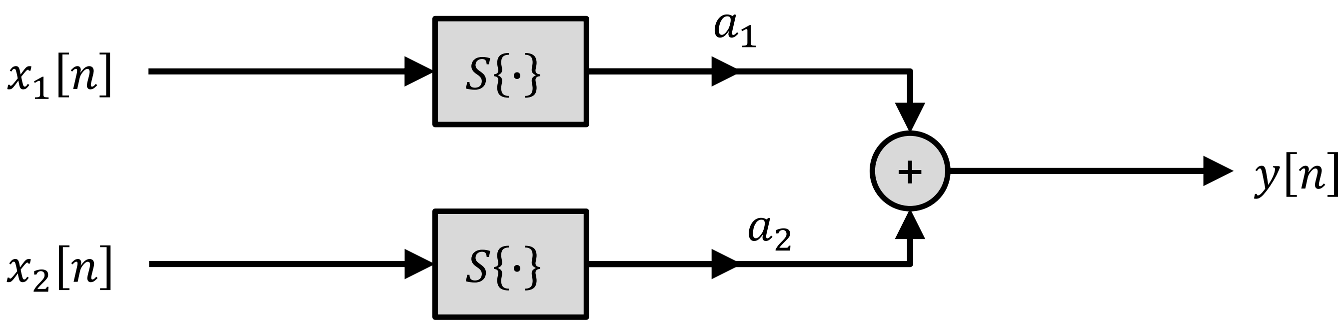
- 예, $y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-2] + x[n-1] + x[n]\} + \frac{1}{2}y[n]$

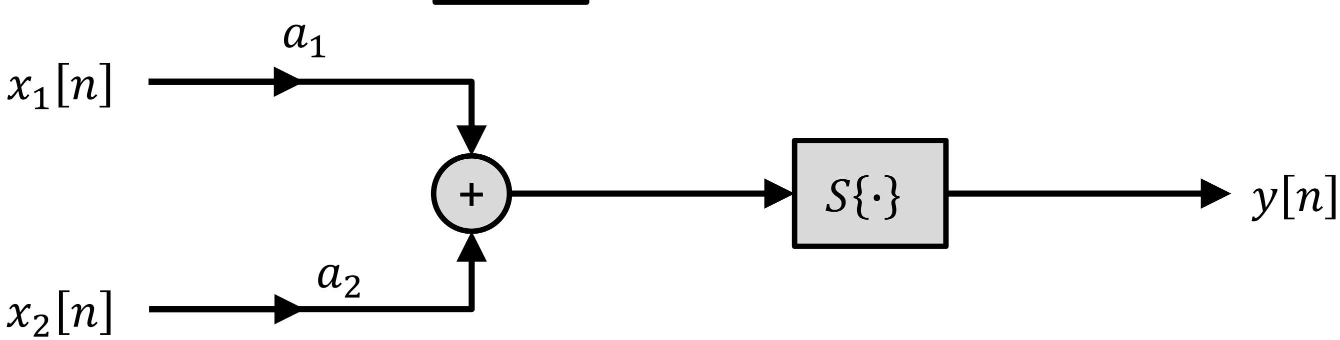


이산 시스템 분류

- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 선형 시스템 : 중첩의 원리(**superposition principle**)를 만족하는 시스템임

$$S\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1S\{x_1[n]\} + a_2S\{x_2[n]\}$$

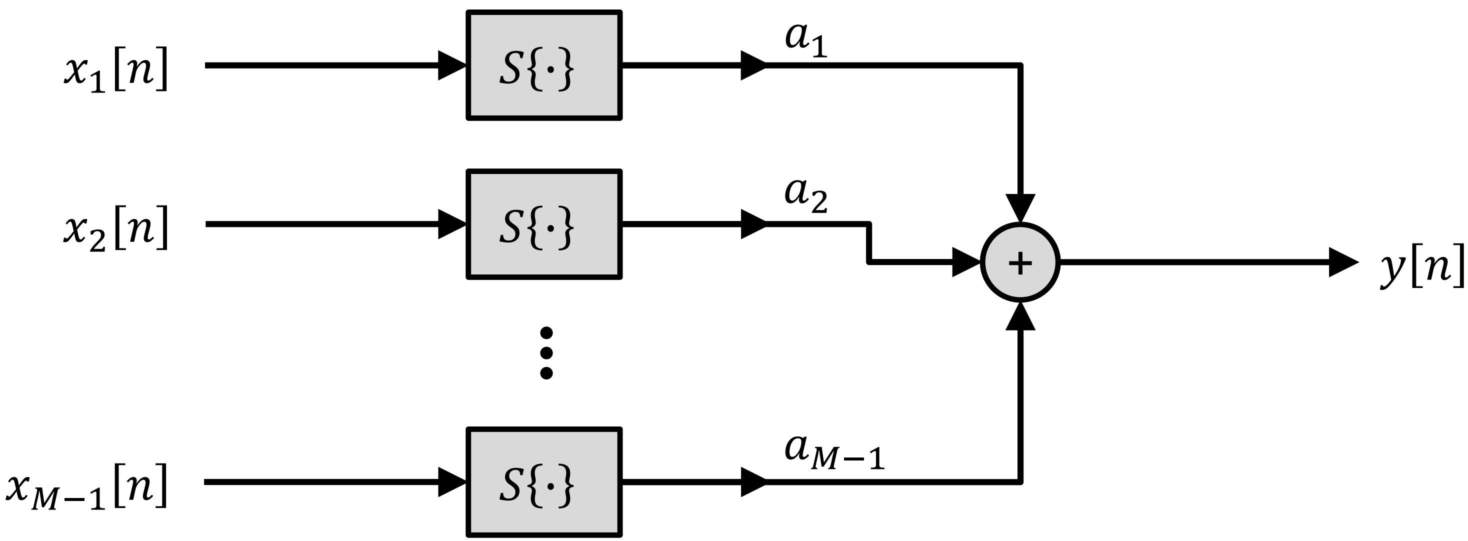




이산 시스템 분류

- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 선형 시스템을 이용하여 복잡한 신호 $x[n]$을 분석할 수 있음

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M-1} a_k x_k[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_k[n]$$



이산 시스템 분류

- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 예, $y[n] = 2x[n]$

$$y_1[n] = 2x_1[n],\ y_2[n] = 2x_2[n]$$

$$S\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = 2\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = 2a_1x_1[n] + 2a_2x_2[n]$$

$$a_1y_1[n] + a_2y_2[n] = a_1\{2x_1[n]\} + a_2\{2x_1[n]\} = 2a_1x_1[n] + 2a_2x_2[n]$$

선형 시스템

이산 시스템 분류

- 선형(**linear**)과 비선형(**nonlinear**) 시스템
  - 예, $y[n] = 2x[n] + 3$

$$y_1[n] = 2x_1[n] + 3,\ y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

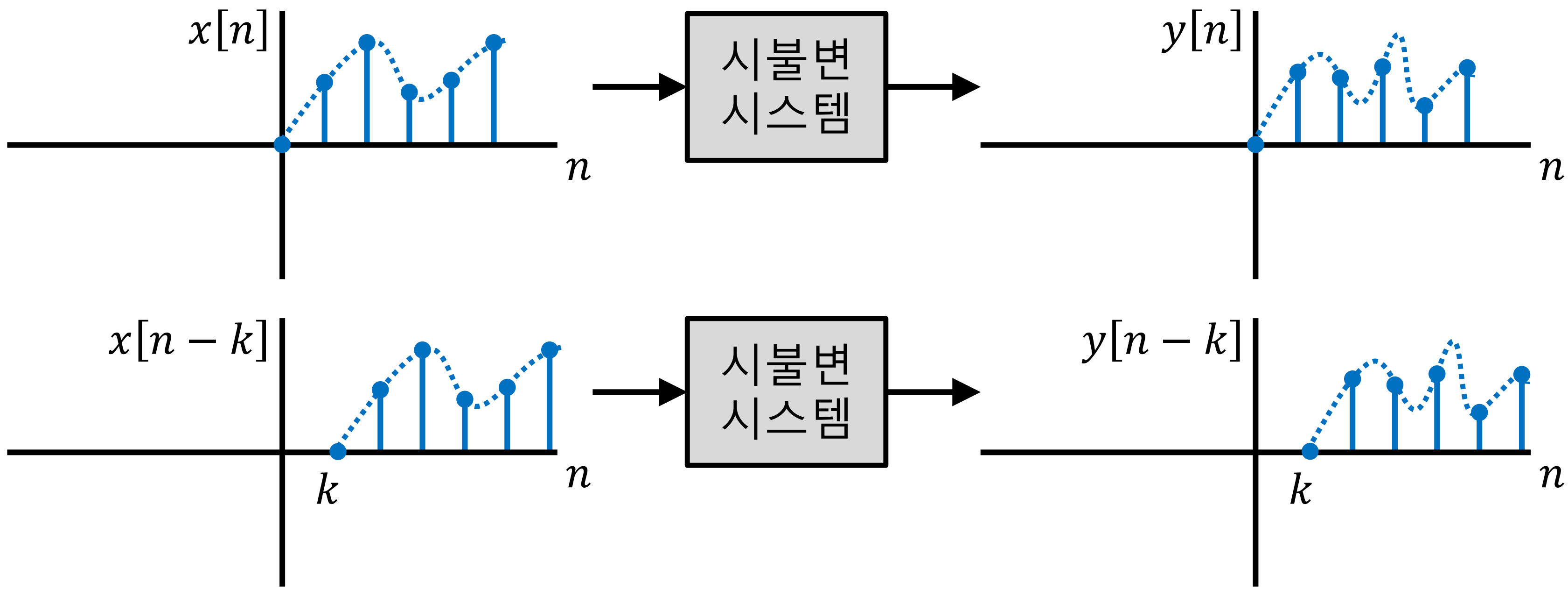
$$S\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = 2\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} + 3 = 2a_1x_1[n] + 2a_2x_2[n] + 3$$

$$\begin{aligned} a_1y_1[n] + a_2y_2[n] &= a_1\{2x_1[n] + 3\} + a_2\{2x_2[n] + 3\} \\ &= 2a_1x_1[n] + 2a_2x_2[n] + 3a_1 + 3a_2 \end{aligned}$$

비선형 시스템

이산 시스템 분류

- 시변(**time-varying**)과 시불변(**time-invariant**) 시스템
  - 시불변 : 시스템의 특성이 시간에 따라 변하지 않음
  - 시변 : 시스템의 특성이 시간에 따라 변함



이산 시스템 분류

- 시변(**time-varying**)과 시불변(**time-invariant**) 시스템
  - 예, $y[n] = x[n] - x[n-2]$

$$y[n-k] = x[n-k] - x[n-k-2]$$

$$S\{x[n-k]\} = x[n-k] - x[n-k-2]$$

시불변 시스템

이산 시스템 분류

- 시변(**time-varying**)과 시불변(**time-invariant**) 시스템
  - 예, $y[n] = n\,x[n]$

$$y[n-k] = (n-k)x[n-k]$$

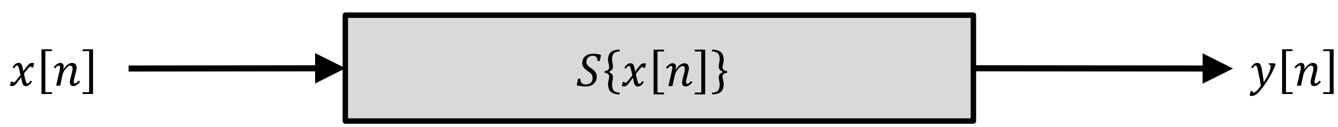
$$S\{x[n-k]\} = nx[n-k]$$

시변 시스템

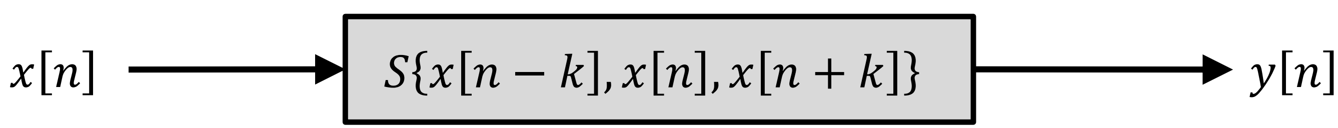
이산 시스템 분류

- 기억(**memory**)과 무기억(**memoryless**) 시스템
  - 무기억 : 현재의 출력 값이 오직 현재의 입력 값에만 의존함
    - 예, $y[n] = 2x[n]$
  - 기억 : 현재의 출력 값이 과거나 미래의 입력 값에 의존함
    - 예, $y[n] = x[n] + 2x[n+1] + x[n-3]$

무기억 시스템

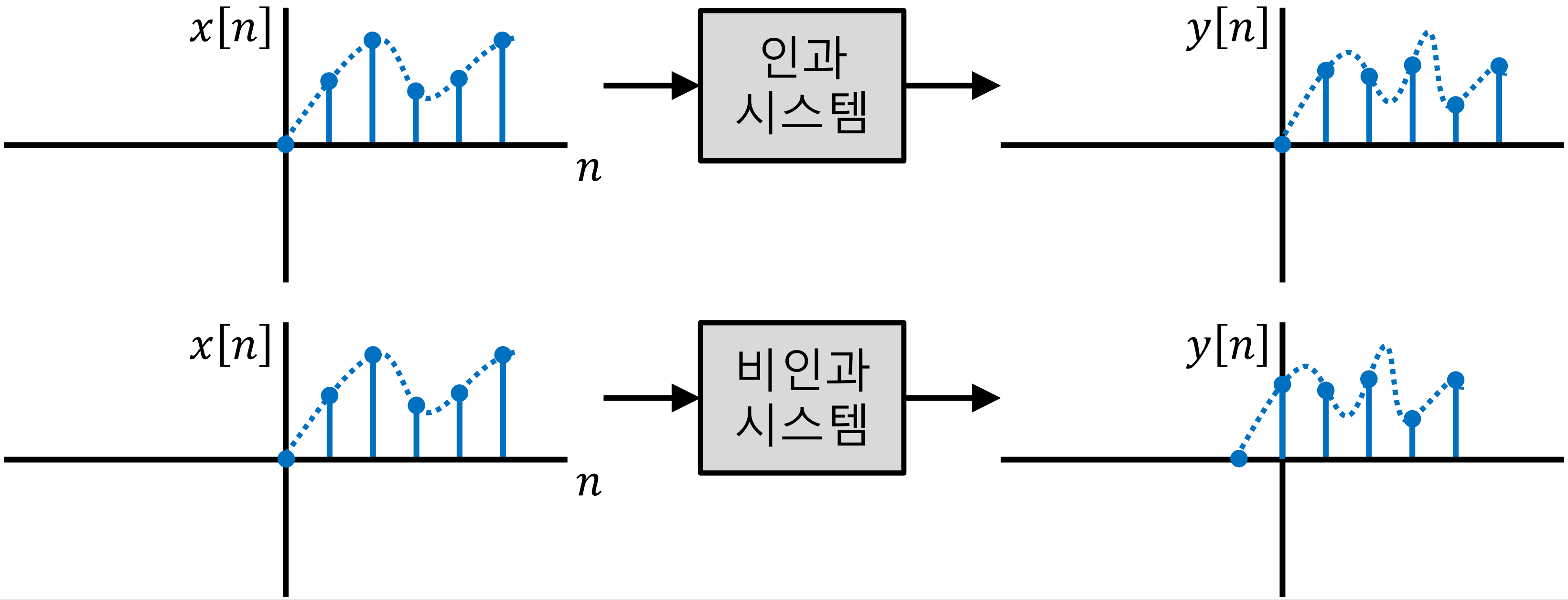


기억 시스템



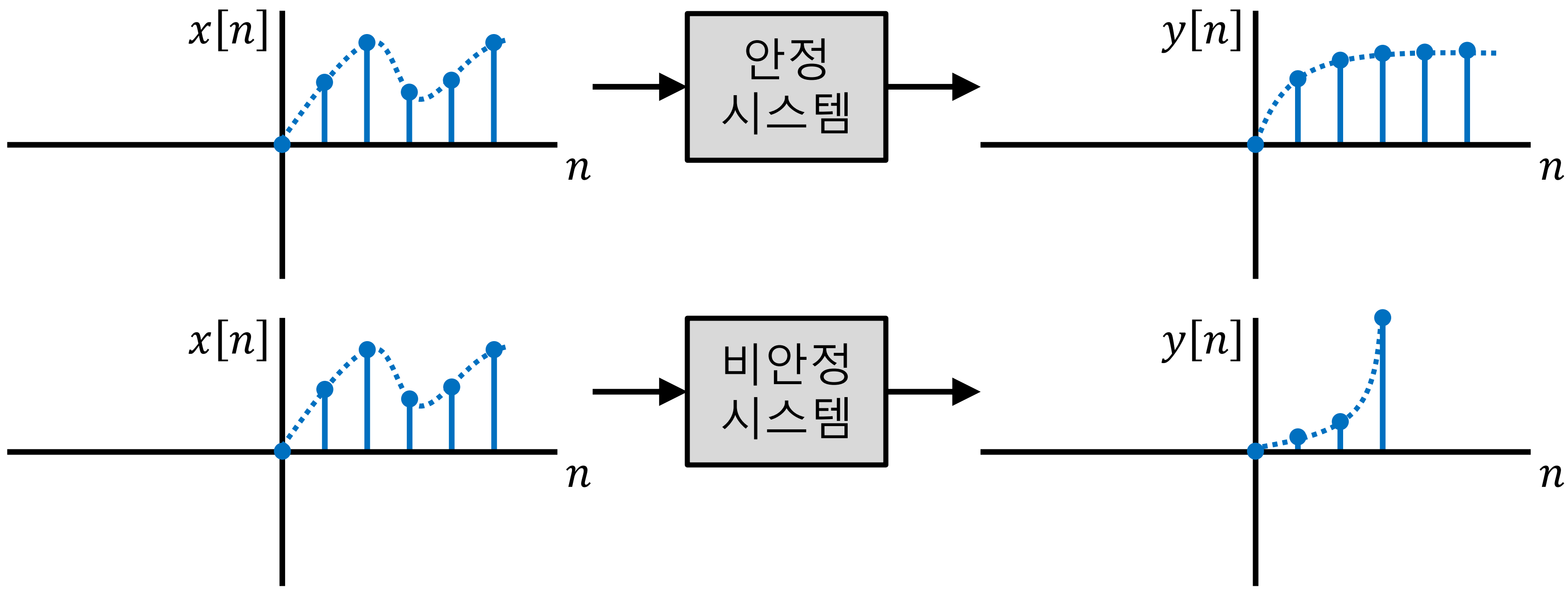
이산 시스템 분류

- 인과(**causal**)과 비인과(**noncausal**) 시스템
  - 인과 : 어떤 시각 n에서의 출력이 과거나 현재의 입력 값에만 의존하고 미래의 값과는 무관함
  - 비인과 : 입력 값이 존재하지 않은 구간에 출력을 내보냄



이산 시스템 분류

- 안정(**stable**)과 비안정(**unstable**) 시스템
  - 안정 : 유한 입력 유한 출력(**BIBO: Bounded Input Bounded Output**) 안정도를 만족함
  - 비안정 : BIBO 안정도를 만족하지 않음



이산 선형 시불변 시스템

- LTI(**Linear Time-Invariant**) 시스템이라고 부름
  - 시간에 따라 변화하지 않은 시스템
  - 중첩의 원리(**superposition principle**)를 만족하는 시스템
    - 가산성(additivity) : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
    - 균일성(homogeneity) : $f(ax_1) = af(x_1)$

$$S\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 S\{x_1[n]\} + a_2 S\{x_2[n]\}$$

- 시스템의 임펄스 응답(**impulse response**)
  - 정의 : $h[n] = S\{\delta[n]\}$

$\delta[n]$ → 이산 시스템 → $h[n]$

이산 선형 시불변 시스템

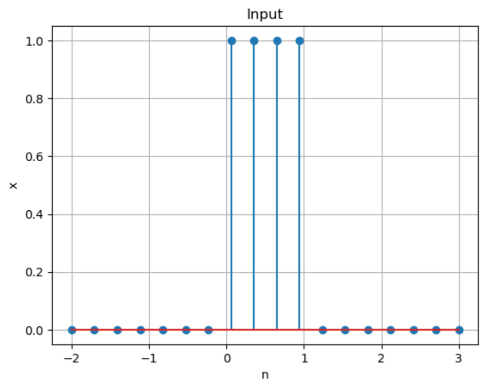
- LTI 시스템의 응답

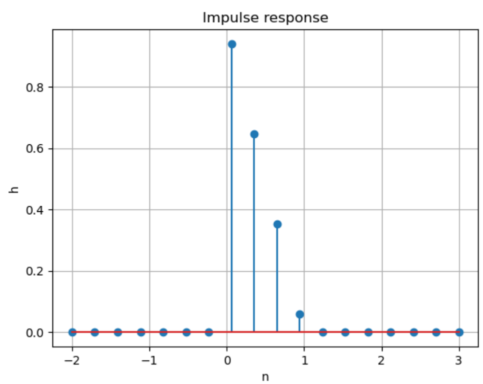
$$
\begin{aligned}
y[n] &= S\{x[n]\} \\
&= S\{\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\} \\
&= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]S\{\delta[n-k]\} \\
&= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&= x[n] * h[n]
\end{aligned}
$$

컨벌루션 합(**convolution sum**)

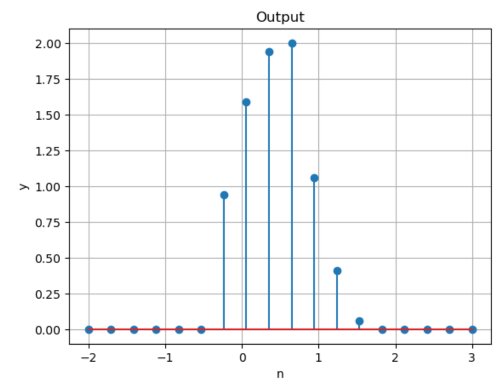
이산 선형 시불변 시스템

- LTI 시스템의 응답



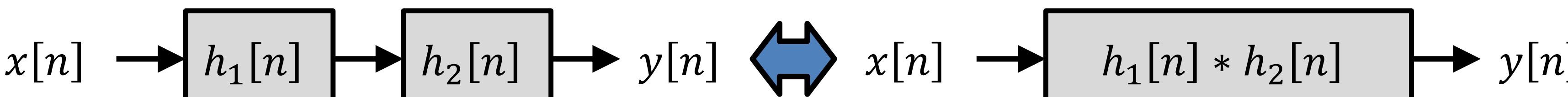


$$y[n] = x[n] * h[n]$$

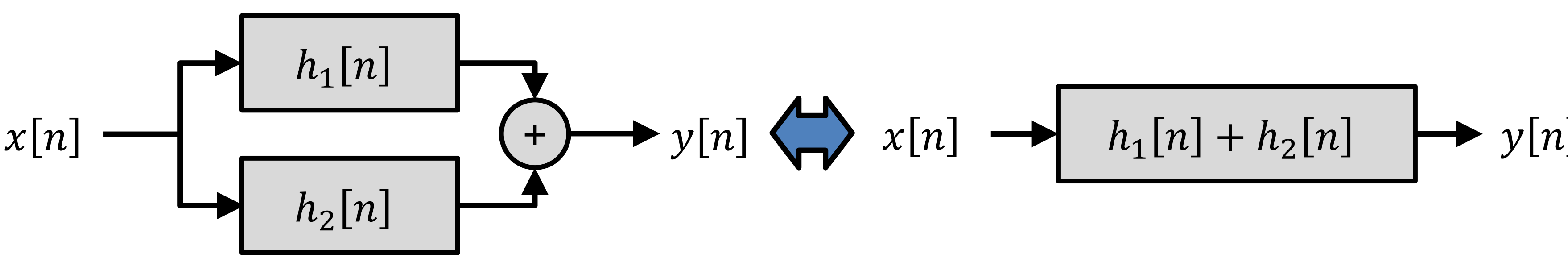


이산 선형 시불변 시스템

- 컨벌루션의 성질
  - 교환 법칙 : $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
  - 결합 법칙 : $\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$



  - 분배 법칙 : $x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$



이산 선형 시불변 시스템

- 컨벌루션의 성질
  - 인과 LTI 시스템 : 어느 시각 $n = n_0$에서의 출력은 $n \le n_0$의 입력 신호 값에 의해서만 결정됨

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0 - k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_0 - k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n_0 - k]$$

$$= \{h[0]x[n_0] + h[1]x[n_0 - 1] + h[2]x[n_0 - 2] + \cdots\} + \{h[-1]x[n_0 + 1] + h[-2]x[n_0 + 2] + h[-3]x[n_0 + 3] + \cdots\}$$

  - 시스템이 인과 LTI 성질을 갖기 위해서 $\{h[-1]x[n_0 + 1] + h[-2]x[n_0 + 2] + h[-3]x[n_0 + 3] + \cdots\} = 0$

$$h[n] = 0, n < 0$$

이산 선형 시불변 시스템

- 컨벌루션의 성질
  - 안정 LTI 시스템

$$|y[n]| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$h[k]$와 $x[n-k]$를 곱하면 음수, 양수의 경우가 모두 발생함. 이 값을 더하는 값보다 절댓값을 취해서 모두 양수 값을 만들고 더하는 것이 당연히 금

$$\leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

입력이 Bounded 되어 있으므로 유한한 값을 가져야 함

차분 방정식의 표현법

- 이산 시스템을 모델링할 때 많이 사용됨

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  - N개의 계수 a_k와 $(M+1)$개의 계수 b_k는 상수이며 시스템의 특정에 의해 결정됨
  - 해를 구하기 위해서 다음과 같이 N개의 초기 조건이 필요함

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$$

  - 초기 조건을 이용하여 $y[0], y[1], y[2], \dots, y[n]$을 순서대로 구할 수 있으므로 $y[n]$의 하나의 식으로 표현하지 못함

→ 차분 방정식의 **균일해**(homogeneous solution)와 **특수해**(particular solution)를 구하는 해석적인 방법이 필요함

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

차분 방정식의 표현법

- 균일해
  - 입력 신호 $x[n] = 0$이라고 가정하여 구함

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- 특수해
  - 입력 신호 $x[n]$이 주어졌을 때 차분 방정식의 근이며 입력 $x[n]$의 형태에 따라 결정됨

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$$