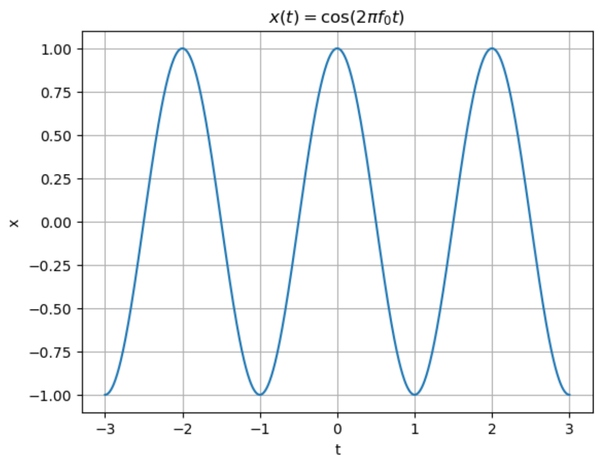
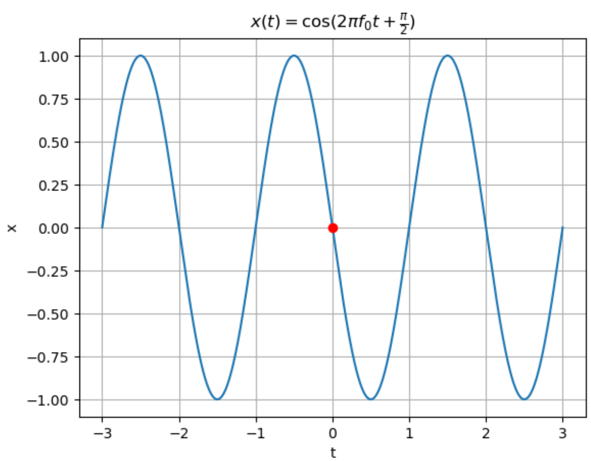
Lecture 07

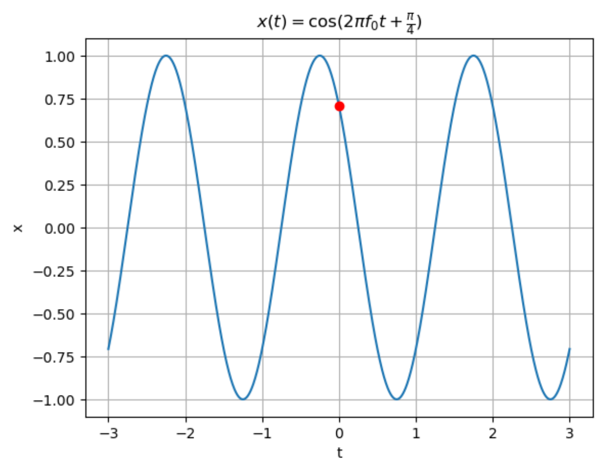
불규칙 신호 및 시스템

불규칙 신호 정의



- 결정적(**deterministic**) 신호
  - 모든 시간에서의 신호 값이 항상 고정 값임
  - 예, $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
- 불규칙(**random**) 신호
  - 특정 시간에서의 신호 값을 명확하게 정의할 수 없고 대신 확률을 이용하여 정의됨



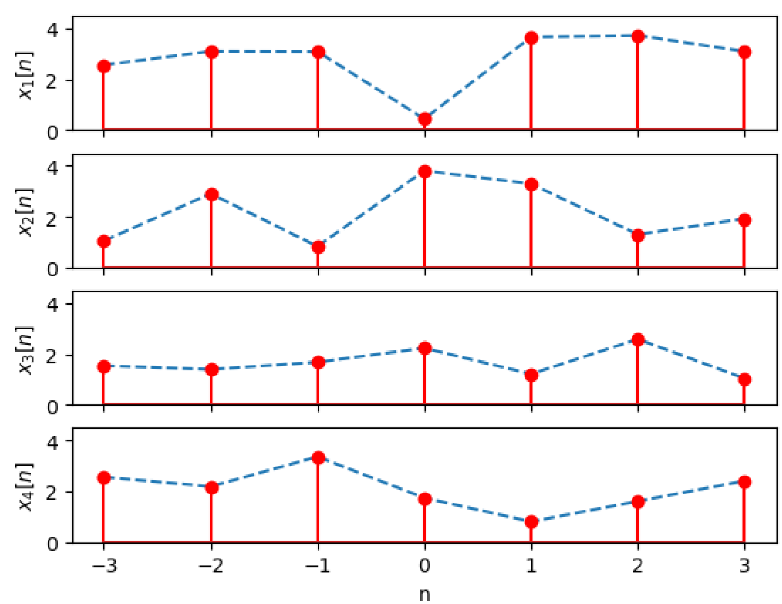


예, $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$
위상 값이 고정 값이 아니라 임의로 선택되므로, 선택되는 ϕ값에 따라 $x(t)$ 신호가 변하게 됨

불규칙 신호 정의

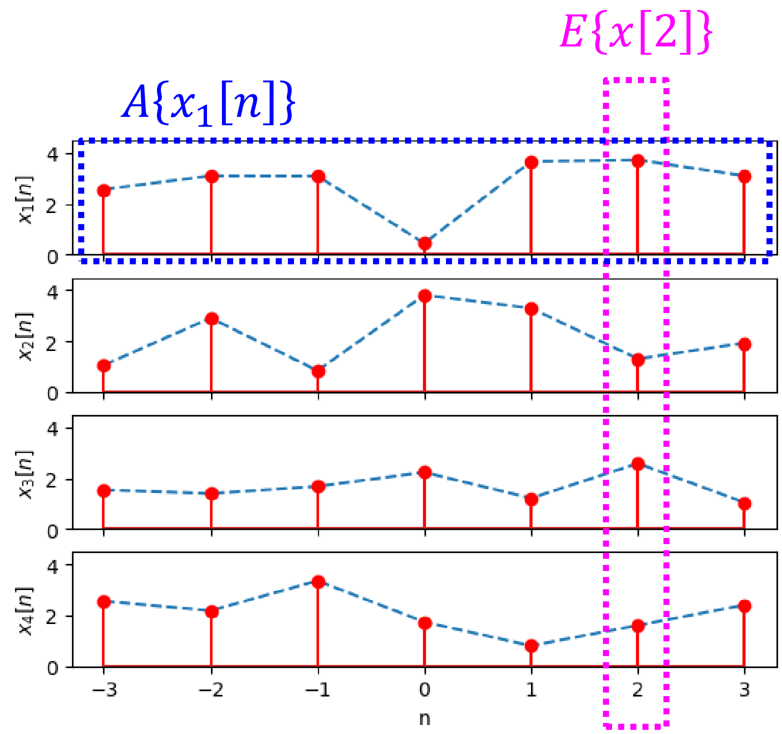
- 불규칙 신호
  - 렌덤 프로세스(random process)의 표본 함수(sample function)로 정의됨
  - 렌덤 프로세스 : 각 시간에서 정의된 확률 특성에 의하여 신호 값이 결정되는 신호들에 대한 전체 집합으로 정의됨
  - 예,
    - 7개의 샘플을 가지는 신호를 생성함
    - 신호 값은 고정 값이 아니라 0부터 4까지의 각각의 값이 나올 확률이 $\frac{1}{5}$인 것임

    → 각각의 7-샘플 신호를 불규칙 신호라 함



불규칙 신호 특성

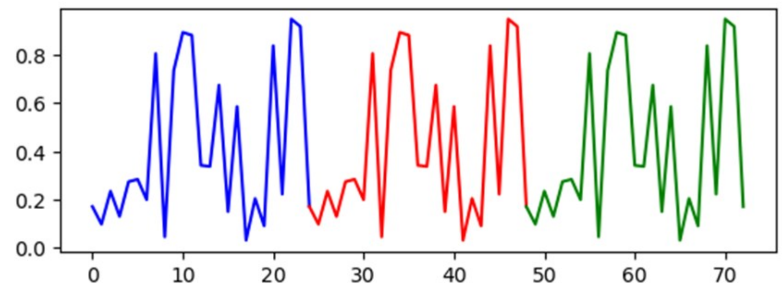
- 불규칙 신호 파악을 위해 통계적 특성이 의미가 있음
  - 앙상블(**ensemble**) 평균
    - 특정 시간에서의 값에 대한 평균을 의미함, $E\{x[2]\}$
  - 시간에 대한 평균
    - 모든 시간에서의 값에 대한 평균으로서 구함, $A\{x_i[n]\}$
  - 분산(**variance**)
    - $E\{(x[n] - E\{x[n]\})^2\}$
  - 자기 상관 함수(**autocorrelation**)
    - $R_X(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$

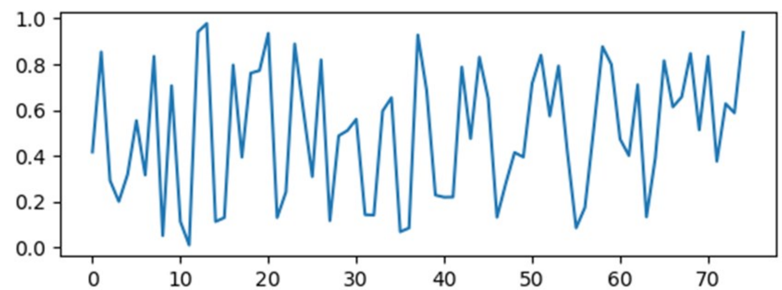


불규칙 신호 특성

- 불규칙 신호 파악을 위해 통계적 특성이 의미가 있음
  - 자기 상관 함수의 성질
    - ① $|R(\tau)| \le R(0)$: $\tau = 0$에서 최댓값을 가짐
    - ② $R(-\tau) = R(\tau)$: 좌우 대칭 성질
    - ③ $R(0) = E[x^2(t)]$: $R(0)$는 $x(t)$의 전력
    - ④ $x(t)$가 주기 신호이면 $R(\tau)$도 동일한 주기를 가짐
    - ⑤ $x(t)$가 비주기 신호이면 $\lim_{|\tau|\to\infty} R(\tau) = E^2[x(t)]$
  - $R(\tau) = \delta(\tau)$를 만족하면 불규칙 신호를 **백색(white) 불규칙 신호**라 함

주기와 비주기 불규칙 신호





스펙트럼 성질

- 불규칙 신호의 스펙트럼 정의
  - 불규칙 신호는 랜덤 프로세스의 표본 함수에 불과하고 불규칙 신호의 푸리에 변환은 특정 표본 함수에 국한된 결과만 보여줌
  - 불규칙 신호의 스펙트럼에 평균의 의미가 포함되어야 함
  - 불규칙 신호 $x(t)$의 **전력 밀도 스펙트럼**(power density spectrum 또는 power spectral density) $S_X(f)$를 다음과 같이 정의함

$$X_T(f) = \int_{-T}^{T} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\{|X_T(f)|^2\}}{2T}$$

스펙트럼 성질

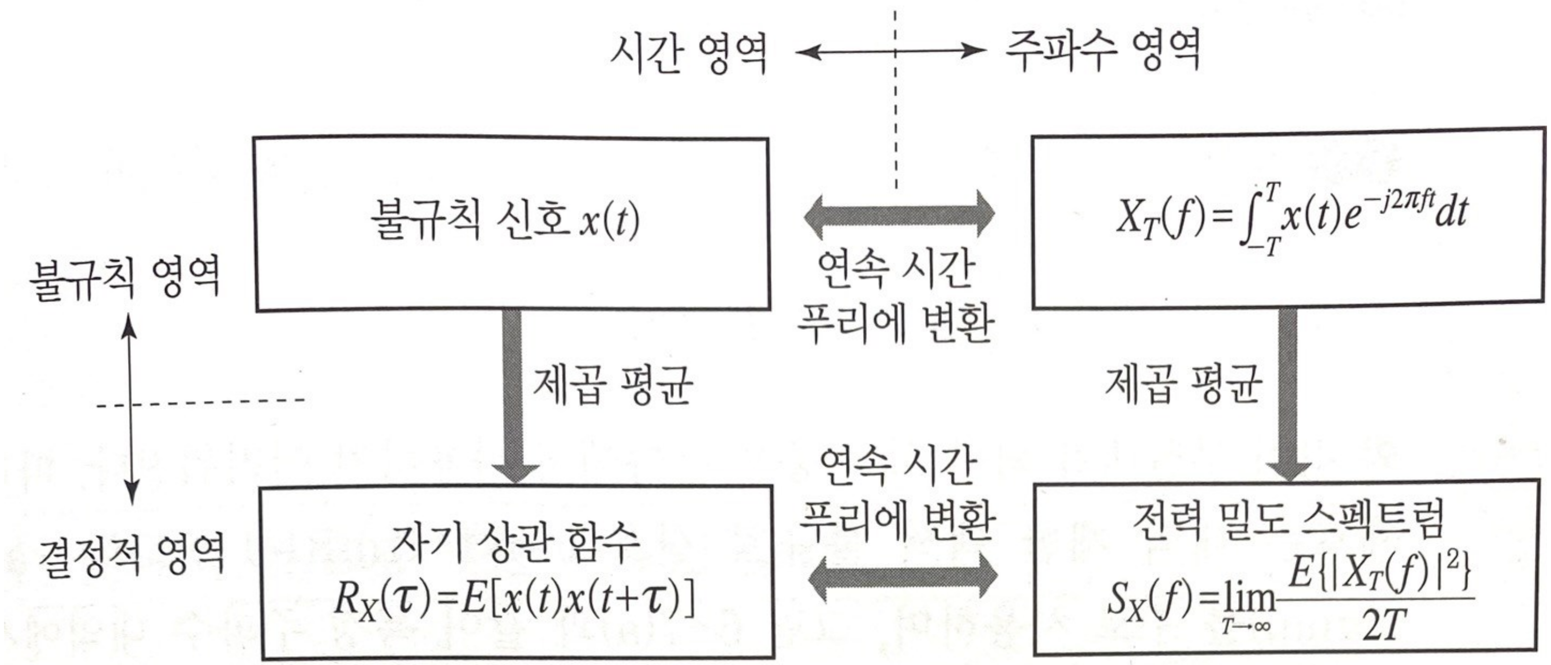
- 불규칙 신호의 스펙트럼 성질
  ① $S_X(f) \geq 0$
  ② $S_X(-f) = S_X(f)$
  ③ $S_X(f)$는 실수
- 연속 푸리에 변환을 적용하면 전력 밀도 스펙트럼 $S_X(f)$과 자기 상관 함수 $R_X(\tau)$의 관계를 유도할 수 있음

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

스펙트럼 성질

- 연속 푸리에 변환을 적용하면 전력 밀도 스펙트럼 $S_X(f)$과 자기 상관 함수 $R_X(\tau)$의 관계를 유도할 수 있음

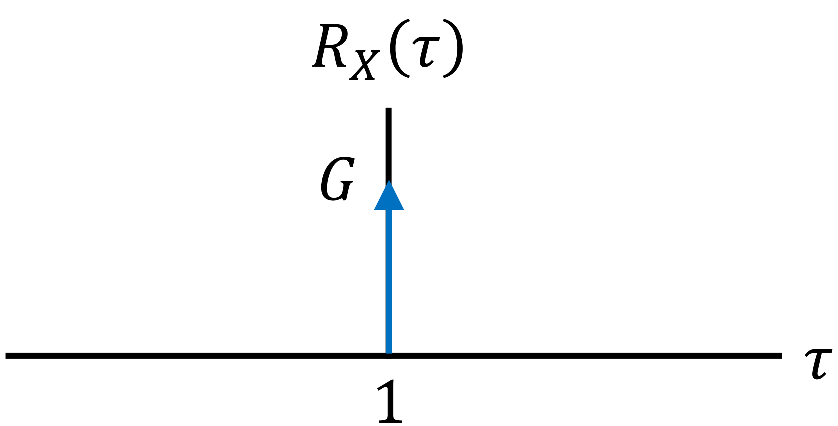


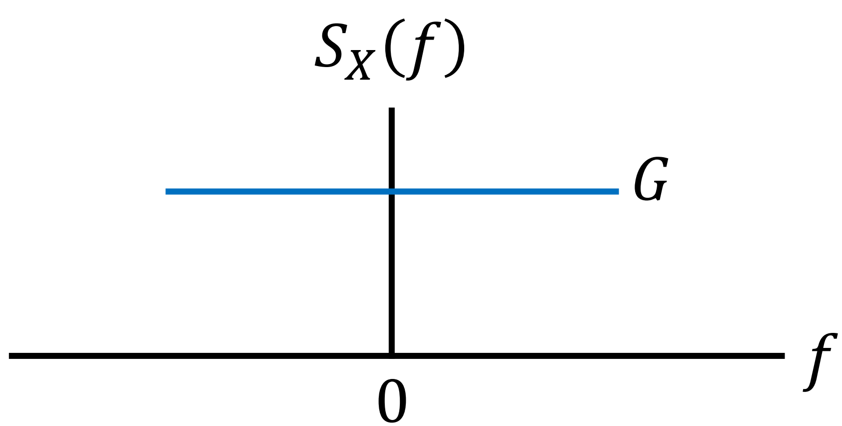
스펙트럼 예제

- 백색 불규칙 신호의 경우 $R_X(\tau) = G\delta(\tau)$

$\rightarrow$ 전력 밀도 스펙트럼 $S_X(f) = G$

$\rightarrow$ 백색 불규칙 신호를 모두 주파수에서 동일한 전력 밀도를 가지는 신호로 정의할 수 있음





시스템 출력

- 주어진 불규칙 신호 $x(t)$로부터 시스템의 출력 신호 $y(t)$의 통계적 특성을 구할 수 있음
  - 연속 신호와 시스템의 경우

    ① 평균 : $E[y(t)] = E[x(t) * h(t)] = X_{ave}H(f = 0)$
    X_{ave}는 $x(t)$의 평균

    ② 분산 : $E\left[y^2(t) - E[y(t)]\right]^2$
    $E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau - u)h(\tau)h(u)d\tau du$

    ③ 자기 상관 함수 : $R_Y(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)] = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$

    ④ 전력 밀도 스펙트럼 : $S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$

시스템 출력

- 주어진 불규칙 신호 $x(t)$로부터 시스템의 출력 신호 $y(t)$의 통계적 특성을 구할 수 있음
  - 이산 신호와 시스템의 경우

    ① 평균 : $E\{y[n]\} = E\{x[n]\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = E\{x[n]\}H(\hat{f} = 0)$
    X_{ave}는 $x(t)$의 평균

    ② 전력 : $E\{y^2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X[n-k]h[n]h[k]$

    ③ 자기 상관 함수 : $R_Y[k] = R_X[k] * h[k] * h[-k]$

    ④ 전력 밀도 스펙트럼 : $S_Y(\hat{f}) = S_X(\hat{f})\left|H(\hat{f})\right|^2$

출력 신호의 예제

- 입력 신호 : 백색 불규칙 신호 $x(t)$
- 시스템 : 저역 통과 필터와 대역 통과 필터