

Lecture 08

라플라스 변환과 아날로그 시스템

라플라스 변환

- 특정 $x(t)$ 에 대하여 $X(f)$ 가 존재하지 않은 경우가 있음
 - 예, $x(t) = e^{2t}u(t)$

$$\begin{aligned}X(\Omega) &= \int_0^{\infty} e^{2t} e^{-j\Omega t} dt \\&= \int_0^{\infty} e^{(2-j\Omega)t} dt \\&= \frac{1}{2-j\Omega} e^{2t} e^{-j\Omega t} \Big|_0^{\infty} \\&= \infty\end{aligned}$$

- 연속 시간 푸리에 변환을 확장한 개념인 라플라스 변환 (**Laplace transform**)을 도입함

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

라플라스 변환

- 라플라스 변환 : $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$
 - $s = \sigma + j\Omega$, $\Omega = 2\pi f$
 - s 는 복수 변수
 - $\sigma = 0$ 인 경우 $s = j\Omega$ 에서의 $X(s)$ 값이 $x(t)$ 의 연속 시간 푸리에 변환과 동일함
- 라플라스 변환은 보통 다음과 같이 표시함

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

$$x(t) \leftrightarrow X(x)$$

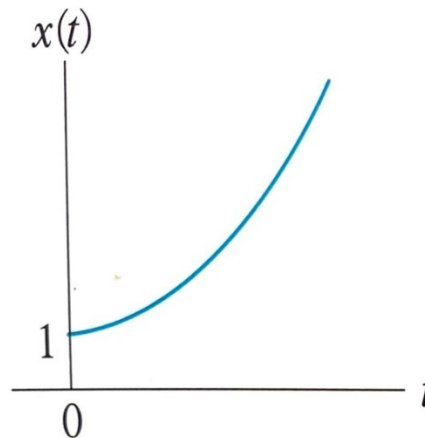
라플라스 변환

- 예, $x(t) = e^{2t}u(t)$
 - $X(\Omega) = \infty$

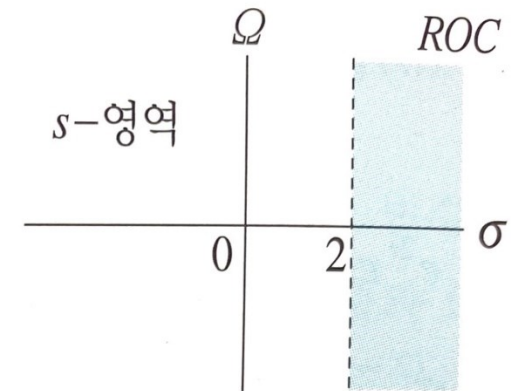
ROC(region of convergence, 수렴영역)

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_0^{\infty} e^{2t} e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{(2-s)t} dt \\
 &= \frac{1}{2-s} e^{(2-s)t} e^{-j\Omega t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{s-2} \quad \text{if } 2 - \sigma < 0
 \end{aligned}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \text{ROC: } \text{Re}\{s\} > 2$$



(a) $x(t)$



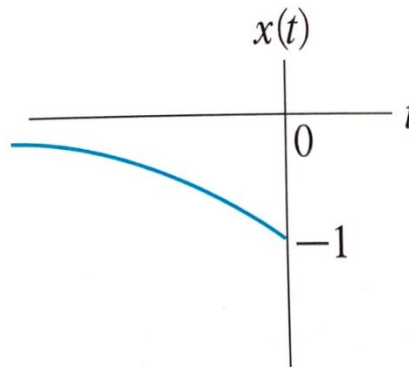
(b) 라플라스 변환의 ROC

라플라스 변환

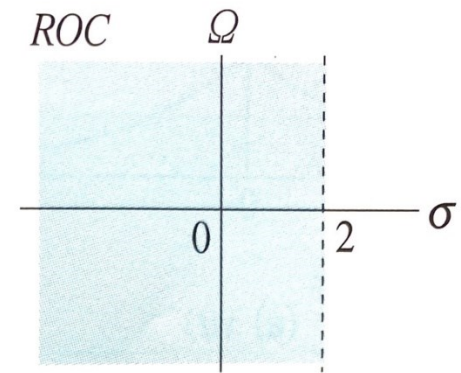
■ 예, $x(t) = -e^{2t}u(-t)$

$$\begin{aligned} X(s) &= -\int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-st} dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^{(2-s)t} dt \\ &= \left. \frac{-1}{2-s} e^{(2-s)t} \right|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{s-2} \quad \text{if } 2 - \sigma > 0 \end{aligned}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad ROC: Re\{s\} < 2$$



(a) $x(t)$



(b) 라플라스 변환의 ROC

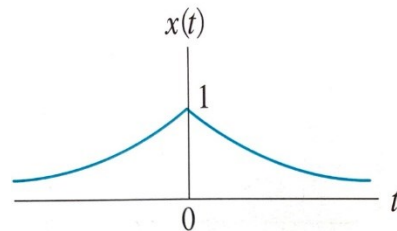
$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad ROC: Re\{s\} > Re\{-a\}$$

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad ROC: Re\{s\} < Re\{-a\}$$

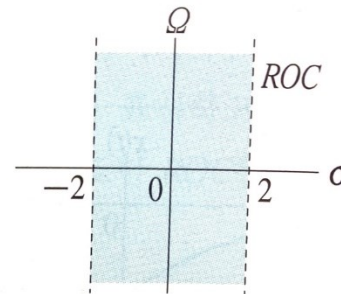
라플라스 변환

- 예, $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2-s} e^{(2-\sigma)t} e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2-s} e^{-(2+\sigma)t} e^{-j\Omega t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} \quad \text{if } 2-\sigma > 0 \text{ and } 2+\sigma > 0 \\
 X(s) &= -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}, \quad \text{ROC: } -2 < \text{Re}\{s\} < 2
 \end{aligned}$$



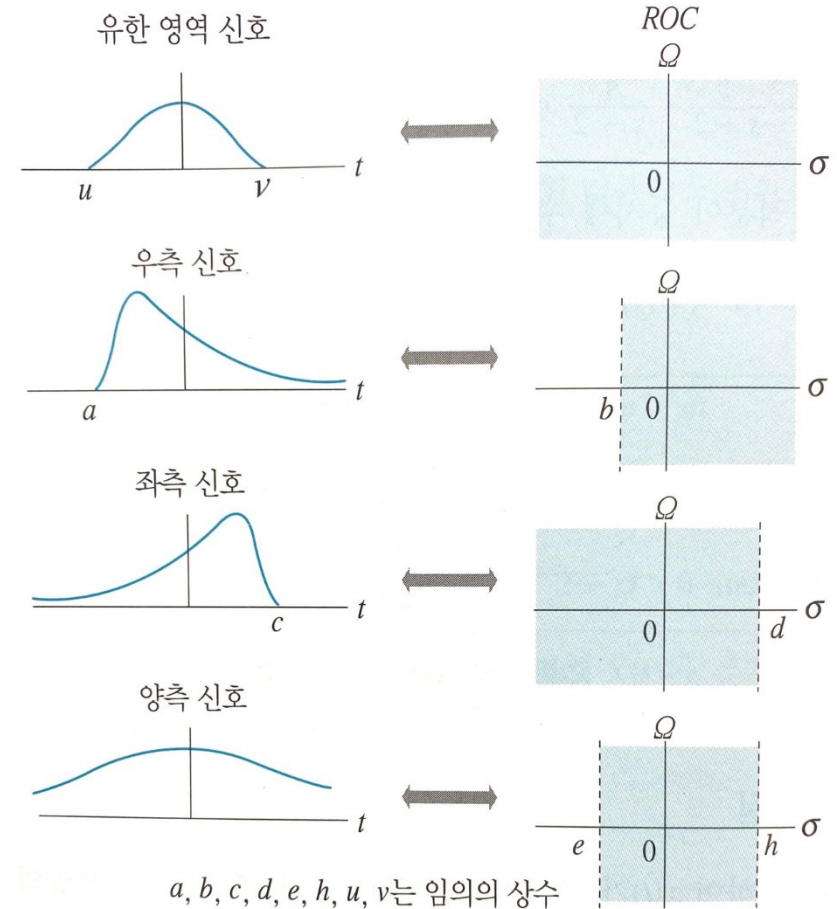
(a) $x(t)$



(b) 라플라스 변환의 ROC

수렴 영역 성질

$x(t)$ 의 존재 영역	ROC의 형태
$u < t < v$ 영역에서만 $x(t)$ 존재 (유한 영역 신호)	모든 s -영역
$t > a$ 영역에서만 $x(t)$ 존재 (우측 신호)	$\text{Re}\{s\} > b$ (s -평면의 오른쪽 영역)
$t < c$ 영역에서만 $x(t)$ 존재 (좌측 신호)	$\text{Re}\{s\} < d$ (s -평면의 왼쪽 영역)
$x(t)$ $-\infty$ 부터 ∞ 까지 존재 (양측 신호)	$e < \text{Re}\{s\} < h$ (s -평면의 수직띠 영역)



라플라스 변환 성질

■ 선형성

- $X_1(s) = L\{x_1(t)\}, X_2(s) = L\{x_2(t)\}$

- a_1, a_2 는 임의의 상수

$$\rightarrow x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow X(s) = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

- 예, $x(t) = \cos(\Omega_0 t) u(t) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} u(t)$

$$\frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\Omega_0} \right), ROC: Re\{s\} > 0$$

$$\frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + j\Omega_0} \right), ROC: Re\{s\} > 0$$

$$\cos(\Omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\Omega_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + j\Omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}, ROC: Re\{s\} > 0$$

라플라스 변환 성질



■ 시간 이동 성질

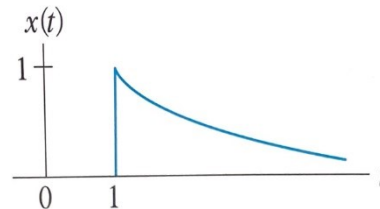
- $x(t)$ 를 시간 축에서 a 만큼 이동시킨 $x(t - a)$ 의 라플라스 변환은 $e^{-as}X(s)$ 가 되고 ROC 는 변하지 않음

$$x(t - a) \leftrightarrow e^{-as}X(s), \text{ ROC: } X(s) \text{의 ROC}$$

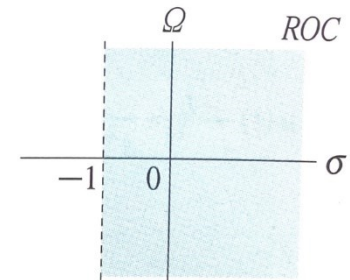
- 예, $x(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)$

$y(t) = e^{-t}u(t)$ 라 할 때 $x(t) = y(t-1)$ 이므로 시간 이동 성질을 이용함

$$X(s) = e^{-s}Y(s) = \frac{e^{-s}}{s+1},$$
$$\text{ROC: } \operatorname{Re}\{s\} > -1$$



(a) $x(t)$



(b) 라플라스 변환의 ROC

라플라스 변환 성질



■ s -영역 이동 성질

- $X(s)$ 를 s -영역에서 a 만큼 이동시킨 $X(s - a)$ 에 대응하는 시간 영역 신호는 다음과 같음

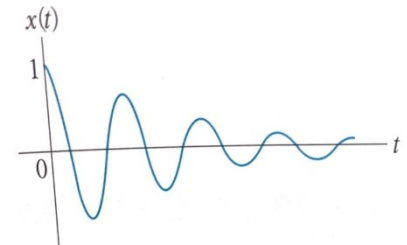
$$e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s - a), \text{ ROC: } X(s) \text{의 ROC를 } a \text{이동}$$

- 예, $x(t) = e^{-2t} \cos(\Omega_0 t)u(t)$

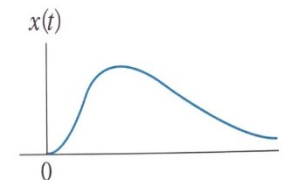
s -영역에서 코사인 신호의 라플라스 변환을 -2 이동

$$\cos(\Omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}, \text{ ROC: } \text{Re}\{s\} > 0$$

$$e^{-2t} \cos(\Omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+2}{(s+2)^2 + \Omega_0^2}, \text{ ROC: } \text{Re}\{s\} > -2$$



(a) $x(t) = e^{-2t} \cos(\Omega_0 t) u(t)$ 신호



(b) $x(t) = t e^{-t} u(t)$ 신호

라플라스 변환 성질

■ 척도 조절

- $x(t)$ 에 대한 라플라스 변환을 $X(s)$ 라 하고 ROC 를 R 이라 할 때, 시간 영역 및 s -영역에서의 척도 조절 성질은 다음과 같음

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ ROC: } R \text{를 } a \text{만큼 척도 조절}$$

■ 미분 성질

- $x(t)$ 에 대한 라플라스 변환을 $X(s)$ 라 할 때, 다음 성질을 가짐

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s), \text{ ROC: } X(s) \text{의 } ROC \text{를 포함}$$

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}, \text{ ROC: } X(s) \text{의 } ROC$$

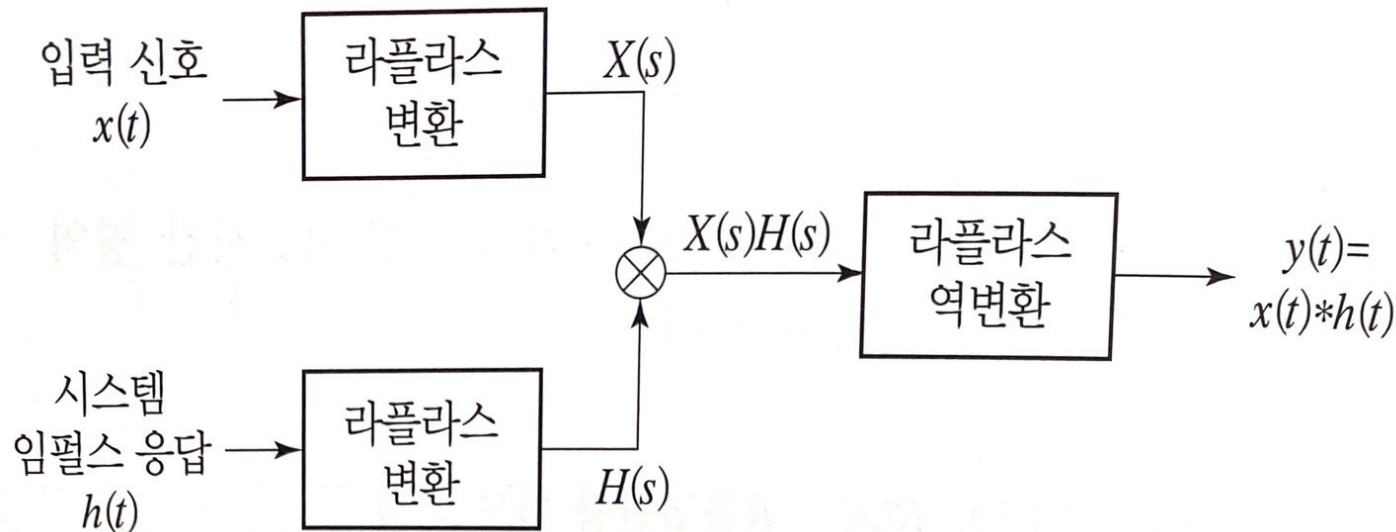
라플라스 변환 성질



■ 컨벌루션 성질

- $x_1(t)$, $x_2(t)$ 의 라플라스 변환이 각각 $X_1(s)$, $X_2(s)$ 이고 ROC 를 R_1 , R_2 라 할 때,

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s), ROC: R_1 \cap R_2 \text{를 포함}$$



라플라스 변환 표

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	All s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} < -a$

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
$\frac{-t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} < -a$
$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-at} \cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at} \sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}$	$Re\{s\} > -a$

라플라스 역변환

- 라플라스 역변환(inverse Laplace transform)

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

- 복수 적분은 이해하기 매우 어려운 내용이므로 구했던 라플라스 변환 결과를 이용하여 라플라스 역변환을 구함

- 예, $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{s+1} \leftrightarrow e^{-t}u(t) \\ \frac{-1}{s+2} \leftrightarrow -e^{-2t}u(t) \end{array} \right\} x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

LTI 시스템 분석

- 배웠던 LTI 시스템 분석 방법
 - **시간 영역** : 임펄스 응답 $h(t)$ 로 시스템을 정의하고 입력 신호와 $h(t)$ 의 컨볼루션 연산으로 출력 신호를 구함
 - **주파수 영역** : 주파수 응답 $H(f)$ 로 시스템을 정의하고 입력 신호의 스펙트럼 $X(f)$ 와 $H(f)$ 의 곱을 통하여 출력 신호의 스펙트럼을 구함
 - 시스템이 구체적으로 어떤 물리적인 동작을 실행하는지를 알기에는 부족함
- 라플라스 변환을 이용하면 LTI 시스템을 구체적으로 분석할 수 있음

LTI 시스템 분석

- 예, 주어진 시스템의 임펄스 응답 $h(t) = e^{-t}u(t)$

- 라플라스 변환 : $H(s) = \frac{1}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1$
- 라플라스 변환의 컨벌루션 성질에 따르면

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{X(s)}{s+1} \Rightarrow (s+1)Y(s) = X(s) \Rightarrow sY(s) + Y(s) = X(s)$$

- 라플라스 역변환을 적용하고 미분 성질을 이용하면

$$L^{-1}\{sY(s) + Y(s)\} = L^{-1}\{X(s)\}$$

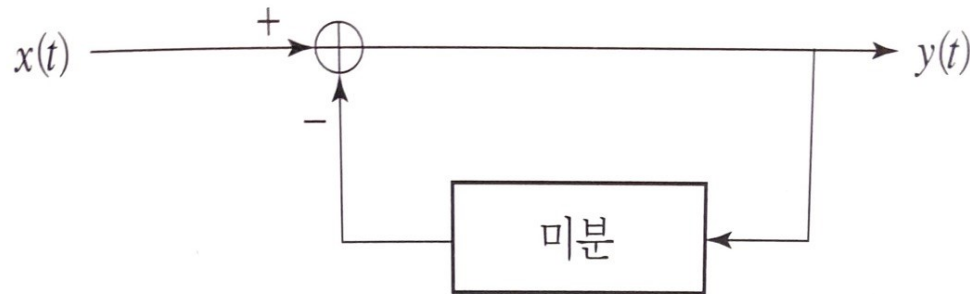
$$L^{-1}\{sY(s)\} + L^{-1}\{Y(s)\} = x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

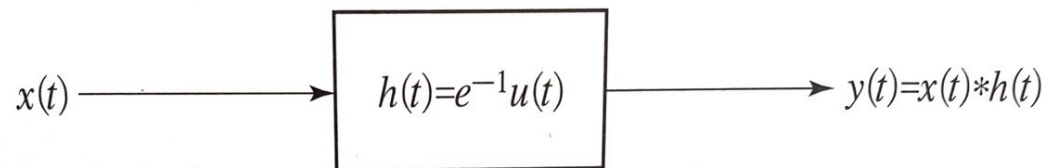
$$y(t) = x(t) - \frac{dy(t)}{dt}$$

LTI 시스템 분석

- 예, 주어진 시스템의 임펄스 응답 $h(t) = e^{-t}u(t)$



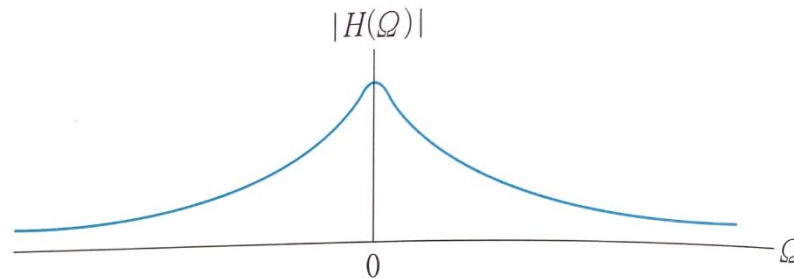
(a) 라플라스 변환을 이용하여 연속 LTI 시스템의 동작을 미분 방정식으로 표현



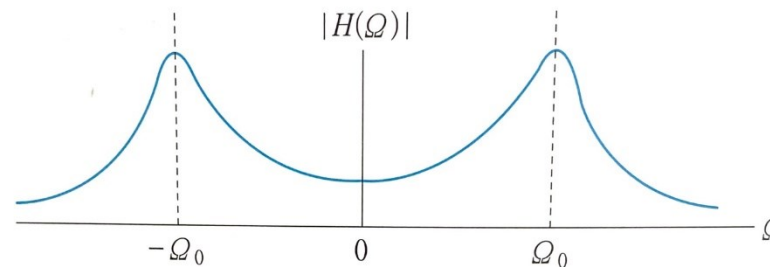
(b) 연속 LTI 시스템의 동작을 입력 신호와 시스템 임펄스 응답과의 컨볼루션으로 표현

LTI 시스템 분석

- 주파수 영역에서 $|H(\Omega)|$ 의 그래프를 통해서 시스템을 분석할 수 있음



(a) 저주파 강조 시스템



(b) Ω_0 중심 대역을 강조하는 시스템

LTI 시스템 분석

- $H(\Omega) = H(s = \sigma + j\Omega) \Big|_{\sigma=0}$ 이므로 라플라스 변환을 이용하여 대략적인 $|H(\Omega)|$ 모양을 구할 수 있음

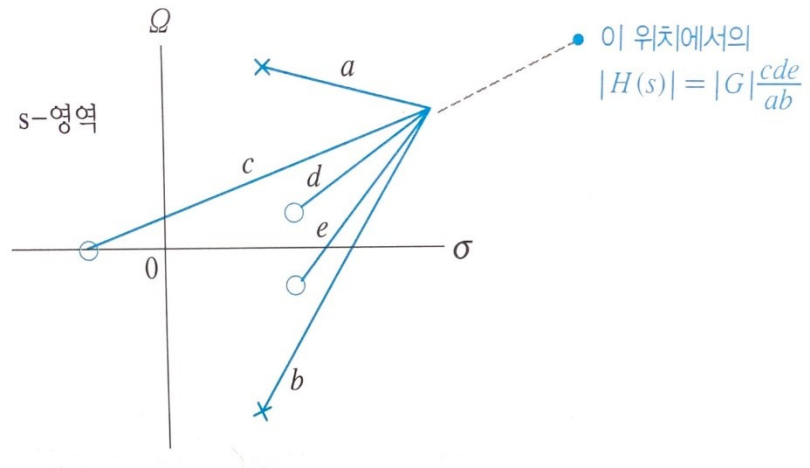
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = G \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{k=1}^P (s - \alpha_k)}$$

$$|H(s)| = \left| G \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{k=1}^P (s - \alpha_k)} \right| \quad \begin{array}{l} \beta_i \text{는 영점(zero)} \\ \alpha_k \text{는 극점(pole)} \end{array}$$

$$= |G| \frac{\prod_{i=1}^R |s - \beta_i|}{\prod_{k=1}^P |s - \alpha_k|}$$

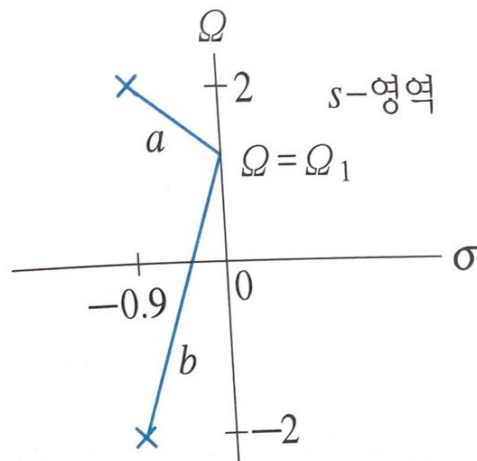
$$|H(s_0)| = |G| \frac{\prod_{i=1}^R (s_0 \text{와 영점 } \beta_i \text{까지의 거리})}{\prod_{k=1}^P (s_0 \text{와 극점 } \alpha_k \text{까지의 거리})}$$

특정 s_0 에서의 값

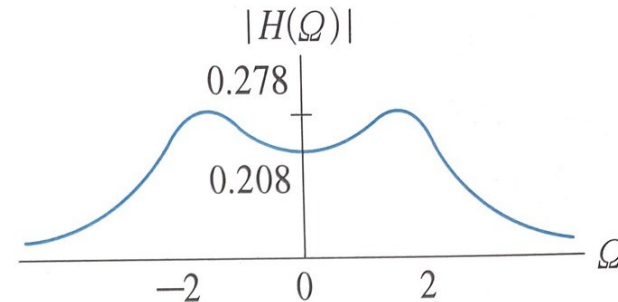


LTI 시스템 분석

- 예, $H(s) = \frac{1}{(s+0.9)^2+4}$
 - 극점 : $s = -0.9 \pm j2$
 - $|H(\Omega)| = \frac{1}{ab}$, $\Omega = \pm 2$ 일 때 a 또는 b 가 0.9로 최솟값이 되어 $\Omega = \pm 2$ 부근에서 ab 값이 매우 작아지고 $|H(\Omega)|$ 가 큰 값을 가짐. $\Omega = 0$ 에서 $|H(0)| \approx 0.208$ 임.



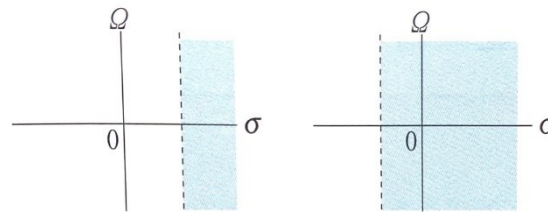
(a) 예제 7.16 시스템의 극점 위치



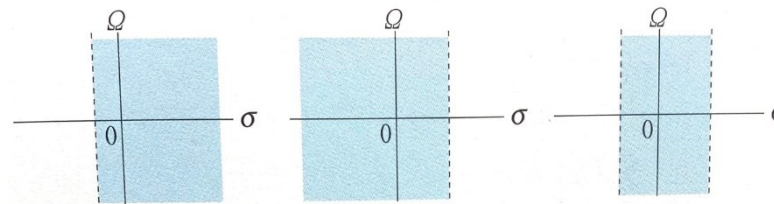
(b) 예제 7.16 시스템의 주파수 응답 크기

LTI 시스템 분석

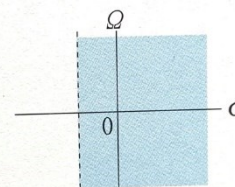
■ 시스템의 성질과 전달 함수의 수렴 영역



(a) 인과적 시스템



(b) 안정적 시스템



(c) 안정 인과적 시스템