

Lecture 04

불 대수

기본 논리식 표현

- 불 대수란?
 - AND, OR, NOT을 이용하여 표현함
- 표현법
 - 각각의 입력과 출력에 해당하는 기호는 보통 알파벳 대문자 또는 소문자로 나타냄
 - AND : 곱셈
 - OR : 덧셈
 - NOT : \bar{A} 또는 A'

입력	출력
A	F
0	\bar{A}
1	A

입력		출력
A	B	F
0	0	$\bar{A}\bar{B}$
0	1	$\bar{A}B$
1	0	$A\bar{B}$
1	1	AB

입력			출력
A	B	C	F
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	$\bar{A}BC$
1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	$A\bar{B}C$
1	1	0	$AB\bar{C}$
1	1	1	ABC

기본 논리식 표현

- 출력 함수를 구성할 때 여러 가지 논리식이 있을 수 있음

입력		출력
A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$\rightarrow F = \bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$$

- 주어진 논리식으로부터 진리표를 만들 수 있음
 - 예, $F = A + \bar{B}C$

입력			출력
A	B	C	$A + \bar{B}C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

불 대수 법칙

■ 불 대수 공리

P1 $A = 0 \text{ or } A = 1$

P3 $1 \cdot 1 = 1$

P5 $1 + 1 = 1$

P7 $1 + 0 = 0 + 1 = 1$

P2 $0 \cdot 0 = 0$

P4 $0 + 0 = 0$

P6 $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

■ 불 대수의 기본 법칙

■ 항등·누승·보간·이중 부정 법칙

1 $A + 0 = 0 + A = A$

2 $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$

3 $A + 1 = 1 + A = 1$

4 $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

5 $A + A = A$

6 $A \cdot A = A$

7 $A + \bar{A} = 1$

8 $A \cdot \bar{A} = 0$

쌍대성(duality) : 불 대수 공리나 기본 법칙에서 좌우 한 쌍에서 0과 1을 서로 바꾸고 \cdot 과 $+$ 도 서로 바꾸며 다른 한쪽이 얻어진 성질임

9 $\bar{\bar{A}} = A$

불 대수 법칙

■ 불 대수의 기본 법칙

- 교환 법칙(communitive law)

$$10 \quad A + B = B + A$$

$$11 \quad A \cdot B = B \cdot A$$

- 결합 법칙(associate law)

$$12 \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$13 \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- 분배 법칙(distributive law)

$$14 \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$15 \quad A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

- 드모르간의 정리(De Morgan's theorem)

$$16 \quad \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$17 \quad \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

불 대수 법칙

■ 불 대수의 기본 법칙

- 흡수 법칙(absorptive law)

$$18 \quad A + A \cdot B = A$$

$$19 \quad A \cdot (A + B) = A$$

- 합의 정리(consensus theorem)

$$20 \quad AB + BC + \bar{A}C = AB + \bar{A}C$$

$$21 \quad (A + B)(B + C)(\bar{A} + C) = (A + B)(\bar{A} + C)$$

- 드모르간 정리의 일반식

3항 드모르간 정리

$$\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}} = A + B + C$$

4항 드모르간 정리

$$\overline{A + B + C + D} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

$$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}} = A + B + C + D$$

일반식

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{A}_n$$

$$\overline{\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{A}_n} = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

불 대수 법칙

■ 불 대수의 기본 법칙 증명

- 전리표를 사용하거나 다른 기본 법칙을 사용하여 증명할 수 있음
- 예, 분배 법칙(15) $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ 증명

진리표 사용

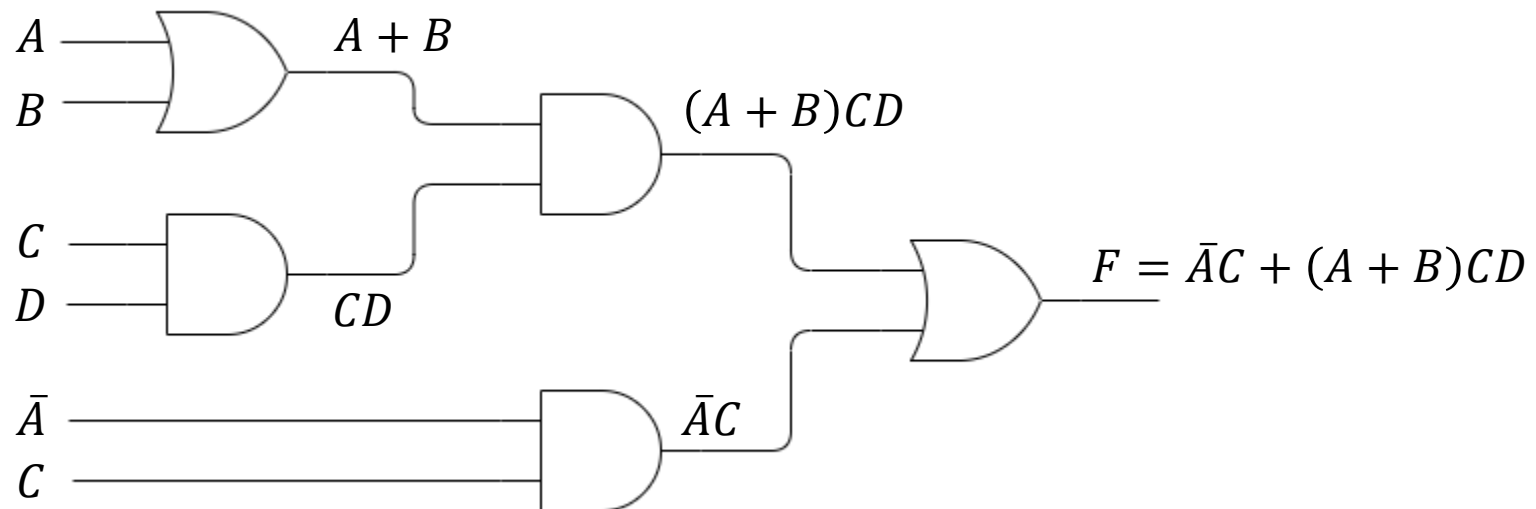
입력			왼쪽	오른쪽		
A	B	C	$A + BC$	$A + B$	$A + C$	$(A + B)(A + C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

3번 법칙 사용

$$\begin{aligned}
 (A + B) \cdot (A + C) &= AA + AC + BA + BC \\
 &= A + AC + AB + BC \\
 &= A \cdot (1 + B + C) + BC \\
 &= A \cdot 1 + BC \\
 &= A + BC
 \end{aligned}$$

논리회로의 논리식 변환

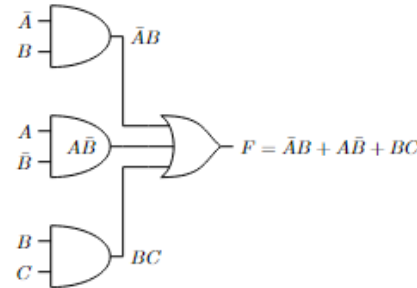
- 논리회로를 설계하거나 분석하기 위해 논리식으로 표현함
 - 예,
 - 입력 : A, B, C, D
 - 출력 : F



논리식의 회로 구성

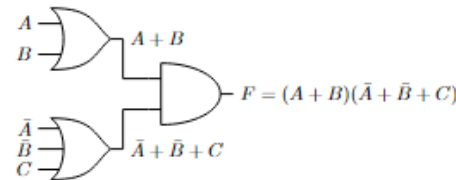
■ AND-OR 회로

- 예, $F = \bar{A}B + A\bar{B} + BC$



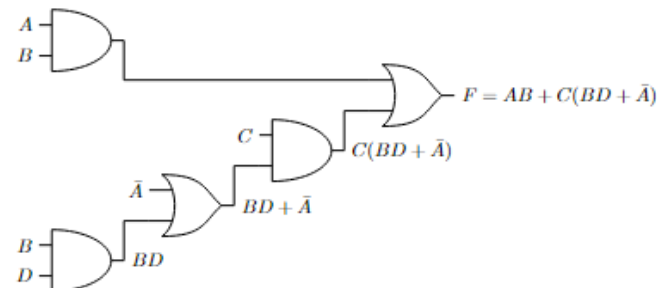
■ OR-AND 회로

- 예, $F = (A + B)(\bar{A} + \bar{B} + C)$



■ 복합 회로

- 예, $F = AB + C(BD + \bar{A})$



불 대수식의 표현 형태

- 불 대수식을 표현하는 2가지 기본 형태가 있음
 - 곱의 합(SOP: Sum Of Product) : AND-OR 결합 형태
 - 합의 곱(POS: Product Of Sum) : OR-AND 결합 형태
- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
 - 입력 측인 1단계가 AND 항(곱의 항)으로 구성되고, 출력 측인 2단계는 OR 항(합의 항)으로 만들어진 논리식임
 - 예,
$$F = A$$
$$F = A + \bar{B} + C$$
$$F = A\bar{B}$$
$$F = AB + \bar{C}$$
$$F = ABC\bar{D} + \bar{A}BCD + AB\bar{C}D + ABCD$$

불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)

- 표준 곱의 항 : 모든 입력을 포함하는 항임
- 표준 곱의 항 : 최소항이라고 함
 - 예, A, B, C, D 4개의 입력을 포함하는 경우
 $ABC\bar{D}, \bar{A}BCD, ABCD$ 등 \rightarrow 표준 곱의 항 또는 최소항
 $ABC, AB\bar{C}, B\bar{C}$ 등 \rightarrow 최소항 아님

- 최소 SOP : SOP로 나타낸 함수 중에서 최소 곱의 항들로 나타낸 것임
 - 예, 아래 식들은 모두 같은 결과를 만들어내는 논리식임

1	$\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC + ABC$	
2	$\bar{A}B + A\bar{B} + ABC$	
3	$\bar{A}B + A\bar{B} + AC$	} 최소 SOP
4	$\bar{A}B + A\bar{B} + BC$	

불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
 - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

$$A = 0 \text{ AND } B = 1 \text{ OR}$$

$$A = 1 \text{ AND } B = 0 \text{ OR}$$

$$A = 1 \text{ AND } B = 1 \text{ 일 때 } F = 1 \text{ 임}$$

$$\bar{A} = 1 \text{ AND } B = 1 \text{ OR}$$

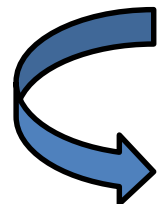
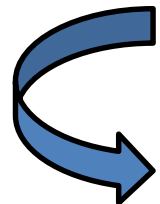
$$A = 1 \text{ AND } \bar{B} = 1 \text{ OR}$$

$$A = 1 \text{ AND } B = 1 \text{ 일 때 } F = 1 \text{ 임}$$

$$\bar{A}B = 1 \text{ OR } A\bar{B} = 1 \text{ OR } AB = 1 \text{ 일 때 } F = 1 \text{ 임}$$

$$F = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$$

입력		출력
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
 - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{A}B + A\bar{B} + AB \\
 &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 &= \sum m(1,2,3)
 \end{aligned}$$

입력		출력	최소항	기호
A	B	F		
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}$	m_0
0	1	1	$\bar{A}B$	m_1
1	0	1	$A\bar{B}$	m_2
1	1	1	AB	m_3

$$F = \sum m(0,1,3,5,7)$$

입력			출력	최소항	기호
A	B	C	F		
0	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	1	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	0	$AB\bar{C}$	m_4
1	0	1	1	$AB\bar{C}$	m_5
1	1	0	0	ABC	m_6
1	1	1	1	ABC	m_7

불 대수식의 표현 형태

- 곱의 합(SOP)과 최소항(minterm)
 - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

$$F = \sum m(0,1,3,5,7)$$

$$\bar{F} = \sum m(2,4,6)$$



입력			출력	최소항	기호
A	B	C	F		
0	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	1	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4
1	0	1	1	$A\bar{B}C$	m_5
1	1	0	0	$AB\bar{C}$	m_6
1	1	1	1	ABC	m_7

불 대수식의 표현 형태

- 합의 곱(POS)과 최대항(maxterm)

- 입력 측인 1단계는 OR 항(합의 항)으로 구성되고, 출력 측인 2단계는 AND 항(곱의 항)으로 만들어진 논리식임

- 예,

$$F = A$$

$$F = A + \bar{B} + C$$

$$F = A(B + C)$$

$$F = (A + B)(\bar{A} + C)$$

$$F = (A + B + \bar{C} + D)(\bar{A} + \bar{B} + C + D)(A + B + C + D)$$

- 표준 합의 항 : 모두 입력을 포함하는 항임
- 표준 합의 항 : 최대항이라고 함
 - 예, A, B, C, D 4개의 입력을 포함하는 경우
 $A + B + C + D$ 는 최대항임, $A + B + C$ 는 최대항 아님

불 대수식의 표현 형태

- 합의 곱(POS)과 최대항(maxterm)
 - 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

SOP

$$F = \bar{A}B + AB$$

$$F = m_1 + m_3$$

$$F = \sum m(1,3)$$

입력		출력	최소항
A	B	F	
0	0	0	$m_0 = \bar{A}\bar{B}$
0	1	1	$m_1 = \bar{A}B$
1	0	0	$m_2 = A\bar{B}$
1	1	1	$m_3 = AB$

POS

$$F = (A + B)(\bar{A} + B)$$

$$F = M_0 + M_2$$

$$F = \prod M(0,2)$$

입력		출력	최대항
A	B	F	
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \bar{B}$
1	0	0	$M_2 = \bar{A} + B$
1	1	1	$M_3 = \bar{A} + \bar{B}$

불 대수식의 표현 형태

■ 최소항과 최대항의 관계

입력			출력		최소항	기호	최대항	기호	관계
A	B	C	F	F'					
0	0	0	1	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0	$A + B + C$	M_0	$M_0 = \overline{m_0}$
0	0	1	1	0	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1	$A + B + \bar{C}$	M_1	$M_1 = \overline{m_1}$
0	1	0	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2	$A + \bar{B} + C$	M_2	$M_2 = \overline{m_2}$
0	1	1	1	0	$\bar{A}BC$	m_3	$A + \bar{B} + \bar{C}$	M_3	$M_3 = \overline{m_3}$
1	0	0	0	1	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4	$\bar{A} + B + C$	M_4	$M_4 = \overline{m_4}$
1	0	1	1	0	$A\bar{B}C$	m_5	$\bar{A} + B + \bar{C}$	M_5	$M_5 = \overline{m_5}$
1	1	0	0	1	$AB\bar{C}$	m_6	$\bar{A} + \bar{B} + C$	M_6	$M_6 = \overline{m_6}$
1	1	1	1	0	ABC	m_7	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$	M_7	$M_7 = \overline{m_7}$

불 대수식의 표현 형태

- 최소항과 최대항의 관계

$$\begin{aligned} F &= \sum m(0,1,3,5,7) \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC \\ &= \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC} \\ &= \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{\bar{A}\bar{B}C} \cdot \overline{\bar{A}BC} \cdot \overline{A\bar{B}C} \cdot \overline{ABC} \\ &= \overline{(A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})} \\ &= \prod M(0,1,3,5,7) \end{aligned}$$

$$F = \sum m(0,1,3,5,7) = \overline{\sum m(2,4,6)} = \overline{\prod M(2,4,6)} = \prod M(2,4,6)$$

논리식의 간소화

- 불 대수 법칙을 이용해서 논리식을 간소화할 수 있음

- 예,

$$\begin{aligned} F &= \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC \\ &= (\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC) + (A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C) + ABC \\ &= \bar{A}B(\bar{C} + C) + A\bar{B}(\bar{C} + C) + ABC \\ &= \bar{A}B \cdot 1 + A\bar{B} \cdot 1 + ABC \\ &= \bar{A}B + A\bar{B} + ABC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= A + \bar{A}B \\ &= (A + \bar{A})(A + B) \\ &= 1 \cdot (A + B) \\ &= A + B \end{aligned}$$