

## 9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln

### Definition

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ .  $\Delta := \Delta_{z_1, z_2, z_3} := \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 : t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$

$\Delta$  heißt ein **Dreieck** ( $\Delta$  ist kompakt)

$$\gamma_1(t) := z_1 + t(z_2 - z_1) (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_2(t) := z_2 + (t - 1)(z_3 - z_2) (t \in [1, 2])$$

$$\gamma_3(t) := z_3 + (t - 2)(z_1 - z_3) (t \in [2, 3])$$

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) = \partial\Delta$ .

Wir setzen (ausnahmsweise):  $L(\partial\Delta) = L(\gamma)$  und  $\int_{\partial\Delta} f(z)dz := \int_{\gamma} f(z)dz$ . ( $f \in C(\partial\Delta)$ )

### Satz 9.1 (Lemma von Goursat)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in H(D)$ .

Ist  $\Delta \subseteq D$  ein Dreieck, so gilt:  $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

### Beweis

Sei  $\Delta = \Delta_{z_1, z_2, z_3}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma$  wie oben.

Fall 1:  $z_1 = z_2$

Fall 1.1:  $z_3 = z_1 : \gamma(t) = z_3 \forall t \in [0, 3]$ . Dann:  $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3 = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} 0 + \int_{\gamma_2} 0 + \int_{\gamma_3} 0 = 0$ .

Fall 1.2:  $z_3 \neq z_1$ .  $\gamma_1(t) = z_1, \gamma'_1 = 0$ , also  $\int_{\gamma_1} = 0$ ,  $\gamma_2^- \sim \gamma_3 \Rightarrow \int_{\gamma_3} = \int_{\gamma_2^-} \stackrel{8.3}{=} -\int_{\gamma_2} \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_2} = 0$ .

Fall 2:  $\Delta$  ist ein echtes Dreieck ( $z_1 \neq z_2 \neq z_3, z_3 \neq z_1$ ). Verbinde die Mittelpunkte der Kanten von  $\Delta$  durch Geraden.

Wir erhalten 4 Dreiecke<sup>1</sup>  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ .

Es existieren stückweise glatte Wege  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  mit  $\text{Tr}(\alpha_j) = \partial\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ).<sup>2</sup>

Die Summe der Integrale in entgegengesetzten Richtungen längs der Kanten von  $\Delta_4 = 0$ .

Also:

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$$

<sup>1</sup>Die Skizze taucht hier leider nicht auf, ich versuchs mal zu erklären: Verbindet man alle Seitenhalbierenden miteinander, so entstehen in einem Dreieck vier kleine Dreiecke. Diese nummeriert man nun gegen den Uhrzeigersinn mit 1,2,3, das mittlere aber nennt man 4.

<sup>2</sup>gegen den Uhrzeigersinn

## 9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln

Somit:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \underbrace{\left| \int_{\partial\Delta_j} f(z) dz \right|}_{=: a_j}$$

O.B.d.A:  $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_4\} \cdot \Delta^{(1)} := \Delta_1$ . Fazit:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz|$  und  $L(\partial\Delta^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$  <sup>3</sup>

Verfahre mit  $\Delta^{(1)}$  genauso wie mit  $\Delta$ . Wir erhalten ein Dreieck  $\Delta^{(2)} \subseteq \Delta^{(1)} \subseteq \Delta : |\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz|, L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^{(1)})$ .

Also:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^2 |\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz|$  und  $L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2^2} L(\partial\Delta)$ .

Induktiv erhaelt man eine Folge  $(\Delta^{(n)})$  von Dreiecken mit:

$\Delta \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \dots, |\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^n |\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz|$  und  $L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) (n \in \mathbb{N})$

8.9  $\Rightarrow \exists z_0 \in D : z_0 \in \Delta^{(n)} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Definiere:  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & , z \neq z_0 \\ f'(z_0) & , z = z_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in H(D) \Rightarrow \varphi \in C(D)$ . Es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0) = \\ &= \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{=: f_1(z)} + \underbrace{(\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)}_{=: f_2(z)} \quad \forall z \in D. \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0)$  <sup>4</sup>.  $\exists m \in \mathbb{N} : \Delta^{(m)} \subseteq U_\delta(z_0)$ .  
Für  $z \in \partial\Delta^{(m)} : |z - z_0| \leq \frac{1}{2^m} L(\partial\Delta)$  <sup>5</sup> und  $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$ .

Dann:  $|f_2(z)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)}) \forall z \in \partial\Delta^{(m)}$ . Also:  $|\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z) dz| \stackrel{8.4}{\leq} \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2$ .

$f_1$  hat auf  $D$  die Stammfunktion  $f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2 \stackrel{8.6}{\Rightarrow} |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_1(z) dz| = 0$ .

Dann:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^m |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z) dz| = 4^m |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z) dz| \leq 4^m \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2 = 4^m \varepsilon (\frac{1}{2^m} L(\partial\Delta))^2 = 4^m \varepsilon \frac{1}{4^m} L(\partial\Delta)^2 = \varepsilon L(\partial\Delta)^2$ .

Fazit:  $\forall \varepsilon > 0$  gilt:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2$ . ■

**Hilfssatz 1:**

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$  und  $f \in C(U_r(z_0))$ . Für jedes Dreieck  $\Delta \subseteq U_r(z_0)$  gelte:  $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ . Dann besitzt  $f$  auf  $U_r(z_0)$  eine Stammfunktion.

**Beweis**

Definiere:  $F : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  wie folgt: Für  $z \in U_r(z_0)$  sei  $\gamma_z(t) := z_0 + t(z - z_0)$  ( $t \in [0, 1]$ ).  
 $F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$ .

<sup>3</sup>Diese Gleichheit folgt aus geometrischen Überlegungen an Dreiecken.

<sup>4</sup>Folgt aus der Stetigkeit.

<sup>5</sup> $\max_{w, z \in \Delta} |w - z| \leq L(\partial\Delta)$

Sei  $z_1 \in U_r(z_0)$ . Sei  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  so, dass  $\Delta_{z_0, z_1, z_1+h} \subseteq U_r(z_0)$ .

$\gamma_0(t) := z_1 + th (t \in [0, 1])$ .

$\gamma_1 := \gamma_{z_1+h}^-$

$$\text{Vorraussetzungen} \Rightarrow 0 = \underbrace{\int_{\gamma_{z_1}} f(w)dw}_{=F(z_1)} + \int_{\gamma_0} f(w)dw + \underbrace{\int_{\gamma_1} f(w)dw}_{=-F(z_1+h)} \Rightarrow F(z_1+h) - F(z_1)$$

$$= \int_{\gamma_0} f(w)dw;$$

$$\int_{\gamma_0} f(z_1)dw = \int_0^1 f(z_1)h dt = f(z_1)h.$$

Also:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{\gamma_0} (f(w) - f(z_1))dw \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1))h dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1)) dt \right| \leq \int_0^1 |f(z_1+th) - f(z_1)| dt \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(z_1+th) - f(z_1)| \leq \varepsilon$  für  $0 < |h| < \delta$  und für  $t \in [0, 1] \Rightarrow$

$\left| \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \right| \leq \varepsilon$  für  $0 < |h| < \delta$ . D.h.  $F$  ist in  $z_1$  komplex differenzierbar und  $F'(z_1) = f(z_1)$  ■

*Folgerung:*

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f \in H(D)$ . Ist  $z_0 \in D$ , so existiert ein  $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $f$  besitzt auf  $U_\delta(z_0)$  eine Stammfunktion.

## Beweis

9.1 und Hilfssatz 1 ■

## Definition

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$

- (1)  $G$  heißt **sternförmig** :  $\iff \exists z^* \in G$  mit:  $S[z, z^*] \subseteq G$  I.d. Fall heißt  $z^*$  ein **Sternmittelpunkt** von  $G$ .

Beachte: sternförmig  $\implies$  **Wegzusammenhang**.

- (2) Ist  $G$  offen und sternförmig, so heißt  $G$  ein **Sterngebiet**

## Beispiel

- (1) Konvexe Mengen sind sternförmig
- (2)  $\mathbb{C}, U_\epsilon(z_0)$  sind Sterngebiete.  $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \dot{U}_\epsilon(z_0)$  sind Gebiete, aber keine Sterngebiete.
- (3)  $\mathbb{C}_-$  ist ein Sterngebiet. Jedes  $z^* \in (0, \infty)$  ist ein Sternmittelpunkt von  $\mathbb{C}_-$ .

### Satz 9.2 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete)

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Sterngebiet, es sei  $f \in H(G)$  und es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ . Dann:

- (1)  $f$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion  $F$ .

$$(2) \int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$$(3) \text{ Ist } \gamma \text{ geschlossen, so ist } \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Bemerkung:** Für beliebige Gebiete ist 9.2 i.a. falsch.

Beispiel:  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$  (s. 8.7)

### Beweis

(1) Sei  $z^*$  ein Sternmittelpunkt von  $G$ . Definiere  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  wie folgt: für  $z \in G$  sei  $\gamma_z(t) := z^* + t(z - z^*)$  ( $t \in [0, 1]$ ).  $\text{Tr}(\gamma_z) = S[z, z^*] \subseteq G$ .  $F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$ .  $f \in H(G) \xrightarrow{9.1} \int_{\partial \Delta} f(w) dw = 0$  für jedes Dreieck  $\Delta \subseteq G$ . Fast wörtlich wie in HS 1 zeigt man:  $F \in H(G)$  und  $F' = f$  auf  $G$ .

(2) folgt aus (1) und 8.5

(3) folgt aus (1) und 8.6 ■

### Bezeichnung

Seien  $G$  und  $f$  wie in 9.2.  $z^* \in G$  sei ein Sternmittelpunkt von  $G$ . Für  $z \in G$  setze:  $F(z) := \int_{z^*}^z f(w) dw := \int_{\gamma} f(w) dw$ , wobei  $\gamma$  **irgendein** stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ , Anfangspunkt von  $\gamma = z^*$  und Endpunkt von  $\gamma = z$  ist.

Wegen 9.2(2) ist  $F$  wohldefiniert. Der Beweis von 9.2(1) zeigt:  $F \in H(G)$  und  $F' = f$  auf  $G$ .

### Beispiel

<sup>6</sup>  $G = \mathbb{C}_-$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z^* = 1$ ,  $F(z) := \int_1^z \frac{1}{w} dw$

Dann:  $F'(z) = \frac{1}{z} = \text{Log}' z \quad \forall z \in G$

Dann existiert  $c \in \mathbb{C}$ :  $F(z) = \text{Log} z + c \quad \forall z \in G$ .  $F(1) = 0 = \text{Log} 1 \implies c = 0$

Also:  $\text{Log} z = \int_1^z \frac{1}{w} dw$  ( $z \in \mathbb{C}_-$ )

### Hilfssatz 2

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$ ,  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$  und  $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ). Weiter sei  $z_1 \in U_r(z_0)$ ,  $\rho > 0$  so, daß  $\overline{U_\rho(z_1)} \subseteq U_r(z_0)$  und  $\gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ). Ist  $g \in H(D \setminus \{z_1\})$ , so gilt:

$$\int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma_0} g(w) dw$$

### Beweis

O.B.d.A  $\text{Re } z_0 = \text{Re } z_1$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  seien stückweise glatte Wege. Wähle  $R > r$  so, dass  $U_R(z_0) \subseteq D$ .

$G_1 := U_R(z_0) \setminus \{z_1 + t : t \leq 0\}$ .  $G_1$  ist ein Sterngebiet,  $\text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G_1$ .  $\gamma_1$  ist geschlossen,  $g \in H(G_1)$ . 9.2  $\implies \int_{\gamma_1} g(w) dw = 0$ . Analog:  $\int_{\gamma_2} g(w) dw = 0$ . Also:

$$0 = \int_{\gamma_1} g(w) dw + \int_{\gamma_2} g(w) dw = \int_{\gamma} g(w) dw + \int_{\gamma_0^-} g(w) dw = \int_{\gamma} g(w) dw - \int_{\gamma_0} g(w) dw \quad \blacksquare$$

---

<sup>6</sup>Dieses Beispiel trägt die Nummer 9.3

**Satz 9.4 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)**

$D \subseteq \mathbb{C}$  sei offen,  $z_0 \in D, r > 0$  und  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ . Weiter sei  $f \in H(D)$  und  $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ).

Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

**Bemerkungen**

(1) Die Werte von  $f$  in  $U_r(z_0)$  sind festgelegt durch die Werte von  $f$  auf  $\partial U_r(z_0)$

(2) Für  $z = z_0$ :  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot e^{it}) dt$  (Mittelwertgleichung)

**Beweis**

Sei  $z_1 \in U_r(z_0)$ . Sei  $\epsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq U_r(z_0)$  und

$|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon \quad \forall w \in U_\delta(z_1)$ .

Sei  $0 < \rho < \delta$ ;  $\gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ).

Für  $w \in \text{Tr}(\gamma_0)$ :  $|w - z_1| = \rho < \delta$ , also  $|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon$ .

Also:  $|\frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1}| \leq \frac{\epsilon}{\rho} \quad \forall w \in \text{Tr}(\gamma_0)$ .

$$8.4 \implies \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw \right| \leq \frac{\epsilon}{\rho} L(\gamma_0) = \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

Definiere  $g : D \setminus \{z_1\} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $g(w) := \frac{f(w)}{w - z_1}$ .

Dann:  $g \in H(D \setminus \{z_1\})$ .

Somit:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw &= \int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma_0} g(w) dw \\ &= \int_{\gamma_0} \frac{f(z_1) + f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw \\ &= f(z_1) \cdot \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{dw}{w - z_1}}_{\stackrel{8.7}{=} 2\pi i} + \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw}_{=: A} \\ &= 2\pi i f(z_1) + A \end{aligned}$$

$$\implies \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw - 2\pi i f(z_1) \right| = |A| \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} 2\pi\epsilon.$$

$$\epsilon > 0 \text{ beliebig} \implies f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw \quad \blacksquare$$

**Beispiel**

Berechne  $I = \int_{\gamma} \frac{e^{\sin z} + \cos(e^z)z^2}{z} dz, \gamma(t) = e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )

$$f(z) := e^{\sin z} + \cos(e^z)z^2$$

$$9.4 \implies I = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

**Satz 9.5**

$\gamma$  sei ein stückweise glatter Weg in  $\mathbb{C}$ , es sei  $D := \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$  ( $D$  offen). Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $F_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$F_n(z) := \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} dw,$$

wobei  $\varphi \in C(\text{Tr}(\gamma))$ .

Dann ist  $F_n \in H(D)$  und  $F'_n = nF_{n+1}$  auf  $D$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

**Beweis**

Sei  $z_0 \in D$ . Wir zeigen:  $F_n$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und  $F'_n(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$ .

o.B.d.A:  $z_0 = 0$ . Dann ist  $0 \in D$ , also  $0 \notin \text{Tr}(\gamma)$ . Sei  $w \in \text{Tr}(\gamma)$  und  $z \in D \setminus \{0\}$ :

Nachrechnen:

$$\frac{1}{(w-z)^n} - \frac{1}{w^n} = \frac{z}{(w-z)^n w^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1} (w-z)^k$$

$$h(z, w) := \frac{1}{(w-z)^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1} (w-z)^k - \frac{n}{w}$$

Dann folgt (Nachrechnen!):

$$\frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z, w) dw$$

Weiter gilt  $\exists r > 0 : U_r(z_0) \subseteq D$ . Sei  $\epsilon > 0$ .  $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \text{Tr}(\gamma)$  ist kompakt und  $h$  ist auf  $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig stetig. Dann existiert ein  $\delta > 0 : \delta < \frac{r}{2}$  und  $|h(z_1, w) - h(z_2, w)| \leq \epsilon$   $\forall z_1, z_2 \in U_{\delta}(0) \forall w \in \text{Tr}(\gamma)$ .

Es ist  $h(0, w) = 0 \forall w \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow |h(z, w)| \leq \epsilon \forall z \in U_{\delta}(0) \forall w \in \text{Tr}(\gamma)$

$M := \max_{w \in \text{Tr}(\gamma)} |\varphi(w)|; w \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow |w| = |w - 0| \geq \frac{r}{2}$

$$\Rightarrow |w|^n \geq \frac{r^n}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{|w|^n} \leq \frac{2^n}{r^n}$$

$$\Rightarrow \frac{|\varphi(w)|}{|w|^n} |h(z, w)| \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon \forall z \in U_{\delta}(0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left| \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z, w) dw \right|}_{= \left| \frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) \right|} \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon L(\gamma) = \epsilon \left( \frac{M 2^n}{r^n} L(\gamma) \right) \forall z \in U_{\delta}(0) \quad \blacksquare$$

**Satz 9.6**

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in H(D)$ . Dann:

(1)  $f' \in H(D)$

(2)  $f$  ist auf  $D$  beliebig oft komplex differenzierbar

(3) **Cauchysche Integralformeln für Ableitungen**

Ist  $z_0 \in D, r > 0, \overline{U_r(z_0)} \subseteq D$  und  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ), so gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \forall z \in U_r(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

### Beweis

Sei  $z_0, r, \gamma$  wie in (3).

$$F_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^n} dw \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma), n \in \mathbb{N}$$

9.4  $\Rightarrow f = F_1$  auf  $U_r(z_0)$ ;

9.5  $\Rightarrow F_1 \in H(U_r(z_0))$  und  $F_1' = F_2$  auf  $U_r(z_0)$ . Also:  $f' = F_2$  auf  $U_r(z_0)$ . 9.5  $\Rightarrow F_2 \in H(U_r(z_0))$ , also  $f' \in H(U_r(z_0))$ .  $z_0 \in D$  beliebig  $\Rightarrow$  (1).

$f' = F_2$  auf  $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

$f'' = F_2' = 2F_3$  auf  $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

Weiter mit Induktion und 9.5

■

### Satz 9.7 (Satz von Morera)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in C(D)$

Dann:

$$f \in H(D) \iff \int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0 \text{ für jedes Dreieck } \Delta \subseteq D$$

### Beweis

"  $\Rightarrow$  " : 9.1

"  $\Leftarrow$  : Sei  $z_0 \in D, r > 0$  und  $U_r(z_0) \subseteq D$ . Dann mit HilStammfunktionsatz 1 und den Voraussetzungen  $\Rightarrow \exists F \in H(U_r(z_0)) : F' = f$  auf  $U_r(z_0)$

9.6  $\Rightarrow f \in H(U_r(z_0))$ . Da  $z_0 \in D$  beliebig  $\Rightarrow f \in H(D)$

■

**Hilfssatz 3** Seien  $G_1$  und  $G_2$  Gebiete in  $\mathbb{C}$  und es sei  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ .

Dann ist  $G_1 \cup G_2$  ein Gebiet.

### Beweis

$G_1 \cup G_2$  ist offen. Sei  $\varphi : G_1 \cup G_2 \rightarrow \mathbb{C}$  lokal konstant.  $\varphi_j := \varphi|_{G_j}$  ( $j = 1, 2$ )

$G_j$  Gebiet  $\Rightarrow \varphi_j$  ist auf  $G_j$  konstant.  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \Rightarrow \varphi$  ist auf  $G_1 \cup G_2$  konstant.

■

### Definition

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet.

$G$  heißt ein **Elementargebiet** (EG) :  $\iff \forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$  auf  $G$ .

### Beispiel

(1) Aus 9.2: Sterngebiete sind Elementargebiete

(2)  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist kein Elementargebiet, denn die Funktion  $\frac{1}{z}$  hat auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine Stammfunktion (siehe 8.7).

**Satz 9.8**

Seien  $G_1$  und  $G_2$  Elementargebiete,  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$  und es sei  $G_1 \cap G_2$  zusammenhängend. Dann ist  $G_1 \cup G_2$  ein Elementargebiet.

**Bemerkung:** (1) Sind  $G_1$  und  $G_2$  Gebiete, so muß  $G_1 \cap G_2$  nicht zusammenhängend sein.

(2) Es gibt Elementargebiete, die keine Sterngebiete sind.

**Beweis**

Hilfssatz 3  $\Rightarrow G_1 \cup G_2$  ist ein Gebiet.

Vorraussetzungen  $\Rightarrow G_1 \cap G_2$  ist ein Gebiet.

Sei  $f \in H(G_1 \cup G_2)$ ,  $f_j := f|_{G_j}$  ( $j = 1, 2$ ),

$\exists F_j \in H(G_j) : F_j' = f_j = f$  auf  $G_j$  ( $j = 1, 2$ )

Für  $z \in G_1 \cap G_2 : (F_1 - F_2)'(z) = f(z) - f(z) = 0$

4.2  $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : F_1(z) = F_2(z) + c \quad \forall z \in G_1 \cap G_2$

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & , z \in G_1 \\ F_2(z) + c & , z \in G_2 \end{cases}$$

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G_1 \cup G_2$  ■

**Definition**

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.  $g$  ist auf  $D$  **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 : |g(z)| \leq c \quad \forall z \in D$

**Definition**

Eine Funktion  $f \in H(\mathbb{C})$  heißt eine **ganze Funktion**. (entire function)