

# 24. Projektive Geometrie

## 24.1. Projektive Räume

**Zweck:** Störende Ausnahmefälle der affinen Geometrie beseitigen durch geschickte Erweiterung affiner Räume zu sogenannten projektiven Räumen, wo die Ausnahmen nicht mehr auftreten.

Sei  $K$  ein beliebiger Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

**Definition:** Die Menge der eindimensionalen Teilräume von  $V$

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(V) := \{Kx \mid x \in V \setminus \{0\}\}$$

heißt **projektiver Raum**.

Eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{P}(V)$  heißt **projektiver Teilraum** von  $\mathbb{P}(V)$ , falls ein Untervektorraum  $U_x \leq V$  existiert mit

$$X = \mathbb{P}(U_x) := \{Kx \mid x \in U_x \setminus \{0\}\}$$

$\dim(\mathbb{P}) := \dim(U) - 1$  heißt **Dimension** von  $\mathbb{P}$ .

$$X \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \\ \text{Ebene} \end{array} \right\} \text{ falls } \dim X = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right. .$$

$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$  heißt der **projektive Standardraum**.

**Bemerkung:** Die leere Menge  $\emptyset$  ist ein projektiver Raum mit  $U_\emptyset = \{0\}$ , also  $\dim \emptyset = -1$ .

**Lemma:**

Ist  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $\forall i \in I : X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$  projektive Teilräume. Dann ist

$$X := \bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$$

ein projektiver Teilraum.

Insbesondere existiert für jede beliebige Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{P}(V)$  die **projektive Hülle**

$$[M] := \bigcap_{X \text{ proj. TR}; M \subseteq X} X$$

Speziell:

- (1)  $X, Y \subseteq \mathbb{P}(V)$  projektive Teilräume

$$[X \cup Y] = \mathbb{P}(U_x + U_y)$$

- (2) Für  $M = \{P_1, \dots, P_r\}$  setze

$$[M] := [P_1, \dots, P_r]$$

**Beweis:** Sei  $X_i = \mathbb{P}(U_i)$  zu Teilvektorräumen  $U_i \leq V$ . Damit:

$$\begin{aligned} X &= \bigcap_{i \in I} \{Kx \mid x \in U_i \setminus \{0\}\} \\ &= \left\{ Kx \mid x \in \bigcap_{i \in I} U_i, x \neq 0 \right\} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Definition:** Ein projektiver Teilraum  $H \subsetneq \mathbb{P}(V)$  heißt **(proj.) Hyperebene**, falls ein Punkt  $p = Kx \in \mathbb{P}(V)$  existiert mit

$$[H \cup \{p\}] = \mathbb{P}(V)$$

**Bemerkung:** Falls  $n = \dim \mathbb{P}(V) < \infty$  ist, so gilt für projektive Teilräume  $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ :

$$H \text{ Hyperebene} \iff \dim H = n - 1$$

**Satz 40:**

Ist  $\dim \mathbb{P}(V) < \infty$ , so gilt:

- (1) Für projektive Teilräume  $X, Y \subseteq \mathbb{P}$  ist

$$\dim X + \dim Y = \dim[X \cup Y] + \dim X \cap Y$$

- (2) Für jede Hyperebene  $H$  und jeden projektiven Teilraum  $X \not\subseteq H$  ist

$$\dim(X \cap H) = \dim X - 1$$

Insbesondere besitzen zwei verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene  $\mathbb{P}(V)$  genau einen Schnittpunkt.

**Beweis:** (1)

$$\begin{aligned}\dim X + \dim Y &\stackrel{\text{Def.}}{=} \dim U_x - 1 + \dim U_y - 1 \\ &= \dim(U_x + U_y) + \dim(U_x \cap U_y) - 2 \\ &= \dim[X \cup Y] + \dim(X \cap Y)\end{aligned}$$

(2)  $X \subseteq H$  impliziert  $[X \cup H] = \mathbb{P}(V)$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned}\dim[X \cup H] &= \dim \mathbb{P}(V) = \dim H + 1 \\ \dim X \cap H &\stackrel{(1)}{=} \dim H + \dim X - \dim[X \cup H] = \dim X - 1\end{aligned}$$

■

## 24.2. projektive Koordinaten

**Definition:** Die Punkte  $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$  heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\dim[p_0, p_1, \dots, p_k] = k$$

**Lemma:**

Für  $p_{\varkappa} = K \cdot v_{\varkappa}$  ( $v_{\varkappa} \in V$ ) gilt:

$$p_0, p_1, \dots, p_k \text{ unabhängig} \iff \dim(Kv_0 + \dots + Kv_k) = k + 1 \text{ linear unabhängig}$$

**Beweis:**

$$p_0, \dots, p_k \text{ unabhängig} \iff \dim(Kv_0, \dots, Kv_k) = k + 1$$

■

**Definition:** Sei  $\dim \mathbb{P} = n < \infty$  und seien  $p_0, \dots, p_k, e \in \mathbb{P}$ .

Das  $n+2$ -Tupel  $(e; p_0, \dots, p_n)$  heißt ein **Koordinatensystem** von  $\mathbb{P}$ , wenn je  $n+1$  Punkte hiervon linear unabhängig sind.

**Beachte:** Ein Koordinatensystem legt eine (bijektive) **Koordinatenabbildung**

$$D : \mathbb{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(K^{n+1})$$

fest wie folgt:

(1) Jede Wahl von Erzeugern  $v'_{\varkappa}$  der  $p_{\varkappa}$  ergibt eine Basis  $\{v'_0, \dots, v'_n\}$  von  $V$ .

Insbesondere hat jedes  $v \in V$  mit  $e = Kv$  die Darstellung

$$v = \sum_{\nu=0}^n \underbrace{x'_{\nu} v'_{\nu}}_{=: v_{\nu}}$$

mit  $x'_{\nu} \neq 0 \forall \nu$  (wegen der Voraussetzung über lineare Unabhängigkeit). Dabei sind die  $v_{\nu}$  unabhängig von der Wahl der  $v'_{\nu}$ .

(2) Zu festem  $v$  existiert also eine eindeutig bestimmte Basis  $\{v_0, \dots, v_n\}$  mit  $v = \sum_{\nu=0}^n v_\nu$ . Zu einem beliebigen anderen  $v' = \lambda \cdot v \in K \cdot v$  gehört die Basis  $\{\lambda v_0, \dots, \lambda v_n\}$ .

(3) Für einen beliebigen Punkt  $p = K \cdot w$  mit Basisdarstellung

$$w = \sum_{\nu=0}^n x_\nu v_\nu$$

setze  $D(p) := K \cdot (x_0, \dots, x_n) =: (x_0 : \dots : x_n)$ .

Das ist wohldefiniert, da für  $w' = \lambda \cdot w$  mit  $\lambda \neq 0$  gilt:

$$w' = \sum_{\nu=0}^n \underbrace{\lambda x_\nu}_{=: x'_\nu} v_\nu$$

Daher:

$$K(x'_0, \dots, x'_n) = K(x_0, \dots, x_n)$$

$D(p)$  ist unabhängig von der speziellen Wahl von  $v$ .

$(x_0 : \dots : x_n)$  heißen **homogene Koordinaten** von  $\mathbb{P}$ .

(4) Es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} D(p_\nu) &= (0 : \dots : \overset{\nu}{1} : 0 : \dots : 0) \\ D(e) &= (1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

### 24.3. Projektivitäten

**Vorbemerkung:** Jede injektive lineare Abbildung  $\phi : V \rightarrow W$  von  $K$ -Vektorräumen definiert eine Abbildung der zugehörigen projektiven Räume.

$$\tilde{\phi} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W), p = K \cdot v \mapsto \tilde{\phi}(p) := \phi(Kv) = K\phi(v)$$

**Definition:** Eine Permutation  $\varphi$  von  $\mathbb{P}$  heißt **Projektivität**, wenn ein Vektorraumautomorphismus  $\phi \in \text{Aut}(V)$  existiert mit  $\tilde{\phi} = \varphi$ .

**Lemma:**

Für  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Aut}(V)$  gilt:

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 \iff \exists c \in K, c \neq 0 : \phi_1 = c \cdot \phi_2$$

**Beweis:**  $\implies$  : klar

$\Leftarrow$  : Für alle  $x$  gilt:  $\phi_1(Kx) = \phi_2(Kx)$ , d.h. es existiert ein  $c_x \in K$  mit  $\phi_1(x) = c_x \cdot \phi_2(x)$ .

Für  $x, y$  linear unabhängig setze  $z := x + y$ .

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= c_z \cdot \phi_2(z) = c_z (\phi_2(x) + \phi_2(y)) \\ \phi_1(z) &= \phi_1(x) + \phi_1(y) = c_x \phi_2(x) + c_y \phi_2(y)\end{aligned}$$

Da  $x, y$  linear unabhängig und  $\phi_i$  Automorphismus folgt:  $\phi_2(x), \phi_2(y)$  linear unabhängig.

Koeffizientenvergleich liefert  $c_x = c_z = c_y$ . Damit sind alle  $c_x$  gleich  $=: c$ . ■

- Bemerkung:** (1) Die Projektivitäten von  $\mathbb{P}$  bilden eine Gruppe, wobei  $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2$  und  $\tilde{\phi}_1^{-1} = \tilde{\phi}_1^{-1}$  ist.
- (2) Jede Projektivität bildet einen projektiven Teilraum auf einen projektiven Teilraum gleicher Dimension ab.

**Satz 41:**

Zu verschiedenen Koordinatensystemen  $(e; p_0, \dots, p_n)$  und  $(e'; p'_0, \dots, p'_n)$  von  $\mathbb{P}$  existiert genau eine Projektivität  $\varphi$ , die sie ineinander überführt, d.h.

$$\begin{aligned}\varphi(p_\nu) &= p'_\nu \\ \varphi(e) &= e'\end{aligned}$$

**Beweis:** Übung. ■

## 24.4. Der Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Räumen

Sei  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ , fixiere eine Hyperebene  $H \subseteq \mathbb{P}$  und  $a = Ky \in \mathbb{P} \setminus H$ . Also  $\mathbb{P} = [H, a]$  und  $V = U_H \oplus Ky$ .

**Vorbemerkung:** Jedes  $p \in \mathbb{P} \setminus H$  ist von der Form  $p = K(u_p + y)$  mit  $u_p \in U_H$  eindeutig.

Für  $p = Kx \in \mathbb{P}$  gilt:

$$p \in H \iff p = Kx \leq U_H$$

Also gilt:  $p \in \mathbb{P} \setminus H \iff p = Kx \not\leq U_H$ .

Wegen direkter Summe ist  $x$  eindeutig zerlegbar:

$$\begin{aligned}x &= u'_p + \lambda y \quad (u'_p \in U_H) \\ x \notin U_H &\iff \lambda \neq 0 \implies Kx = K(\underbrace{\lambda^{-1}u'_p}_{=: u_p} + y)\end{aligned}$$

**Satz 42:**

Die Menge  $\mathbb{A} := \mathbb{P} \setminus H$  ist ein affiner Raum mit  $U_H$  als Translationsvektorraum bezüglich der Operation

$$(u, p) \mapsto K(u + u_p + y)$$

wobei  $p = K(u_p + y)$  gilt, mit eindeutig bestimmtem  $u_p \in U_H$ .

Dabei ist die Translation  $\overrightarrow{pq} = u_q - u_p$ .

**Beachte:**

$$\dim \mathbb{A} = \dim U_H = \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V)$$

**Definition:** Die Punkte von  $\mathbb{A}$  heißen **eigentliche Punkte**, die von  $H$  **uneigentlich**.

Umgekehrt lässt sich jeder affine Raum  $\mathbb{A}$  erweitern zu einem projektiven Raum durch disjunkte Vereinigung mit einer projektiven Hyperebene  $H$  gleicher Dimension:

ohne Einschränkung sei  $\mathbb{A} = K^n$ . Zum Beispiel haben wir die injektive Abbildung

$$j_1 : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{P}(K^{n+1}), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

$$H := \mathbb{P}(\underbrace{0 \times K^n}_{\leq K^{n+1}}).$$

Für eigentliche Punkte  $p = (y_0 : y_1 : \dots : y_n)$ , d.h.  $p \notin H$ , gilt:  $y_0 \neq 0$ , also  $p = \left(1 : \frac{y_1}{y_0} : \dots : \frac{y_n}{y_0}\right)$ , d.h.  $p$  hat die affinen Koordinaten  $\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}\right)$  in  $\mathbb{A}$ .

Es gilt:  $j_1(\mathbb{A}) \dot{\cup} H = \mathbb{P}(K^{n+1})$

Ferner gilt mit den den Einbettungen

$$j_\nu : K^n \rightarrow \mathbb{P}(K^{n+1}), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 : \dots : x_{\nu-1} : 1 : x_{\nu+1} : \dots : x_n)$$

folgende Gleichheit:

$$\mathbb{P}(K^{n+1}) = \bigcup_{\nu=1}^{n+1} j_\nu(\mathbb{A})$$

Aber: nicht disjunkt.

**Beispiel:** (1) Die reelle projektive Gerade  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Es gibt zwei Modelle:

$$\{\mathbb{R} \cdot x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \longleftrightarrow \{G \subseteq \mathbb{R}^2 \mid G \text{ affine Gerade mit } 0 \in G\}$$

Dies ist das sogenannten **Büschelmodell** von  $\mathbb{P}^1$ .

Fixiere  $g$  (die Hyperebene besteht hier aus einem Punkt)

$$\mathbb{P}^1 \setminus \{g\} \xrightarrow[\text{bijekt.}]{\quad} g' \quad (\text{affine Gerade } \neq g, g' \parallel g)$$

eigentliche Punkte  $g_a \mapsto g_a \cap g'$

$g$  ist der einzige uneigentliche Punkt; das entspricht anschaulich einem unendlich fernen Punkt  $F$  auf  $g'$ . Sprich: **Fernpunkt**.

Wir erhalten das **Punktmodell** von  $\mathbb{P}^1 : g' \dot{\cup} \{F\}$ .

Ein einheitliches Modell liefert der Einheitskreis um  $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$

$$S := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - (0, 1)\| = 1\}$$

$$\begin{aligned} \{\mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} &\xleftrightarrow{\text{bij.}} S \\ \mathbb{R}x &\mapsto \mathbb{R}x \cap S \rightsquigarrow \{s_x\} \quad (s_x \neq (0, 0)) \end{aligned}$$

- (2) Die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$   
Bündelmodell:

$$\{\mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \{\text{affine Gerade } g \leq \mathbb{R}^3, 0 \in g\}$$

Fixiere die affine Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $0 \notin E$  und eine dazu parallele  $E'$  mit  $0 \in E'$ .

Dabei entsteht eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \setminus \{g' \subseteq E'\} &\longleftrightarrow E \\ g &\mapsto g \cap E \\ A &\mapsto g = 0A \end{aligned}$$

Jedem  $g' \in E'$  ordnet man genau einen **Fixpunkt**  $F_{g'} \in \mathbb{P}^2$  zu.

$\{g' \in E'\}$  ist projektive Gerade.  $f := \{F_{g'} \mid g' \subseteq E'\}$  heißt **Ferngerade**.

$E \dot{\cup} f$  ist das Punktmodell des  $\mathbb{P}^2$ .

Analog lassen sich generell Bündel- und Punktmodell des  $\mathbb{P}^n$  mittels  $\mathbb{A}^{n+1}$  beschreiben.





# Stichwortverzeichnis

- Abbildung
  - affine, 71
  - kanonische, 23
  - orthogonale, 51
  - unitäre, 51
- Abbildungseigenschaft
  - universelle (UAE), 21
- Abstand, 25, 37, 85
- Adjungierte, 41
- adjungierter Homomorphismus, 41
- affin
  - Abbildung, 71
  - Automorphismus, 72
  - Gruppe, 72
  - Hülle, 65
  - Koordinatensystem, 71
  - Raum, 61
  - Standardraum, 62
  - Teilraum, 62
- Affinität, 72, 100–102
- allgemeine Lage, 66
- Approximation, 102
- ausgeartete Paarung, 17
- Automorphismengruppe, 51
- Automorphismus, 51
  - affiner, 72
- Büschelmodell, 112
- Basiswechsel
  - unitärer, 55
- Bewegung, 85, 89
- bilineare Fortsetzung, 18
- Bilinearform, 17
  - symmetrische, 26
- Blockdiagonalmatrix, 13
- cartesisches Koordinatensystem, 85
- Chauchy-Schwarzsche Ungleichung, 27
- Darstellungsmatrix, 27
- Diagonalmatrix, 7
  - Block-, 13
- Dimension, 107
- diskrete Metrik, 25
- Drehachse, 59
  - verallgemeinerte, 59
- Drehebene, 59
- Drehkästchennormalform, 58
- Drehung, 59, 88
- Dreiecksungleichung, 25
- E. Schmidt
  - Orthogonalisierungsverfahren, 32
- Ebene, 62
  - projektive, 108
- Einheitskreis, 113
- Endomorphismus
  - nilpotenter, 11
  - normaler, 41
  - Normalform, 7
  - selbstadjungierter, 47
- euklidischer Raum, 85
- Fern-
  - Gerade, 113
  - Punkt, 113
- Fix-
  - Gerade, 81
  - Punkt, 79, 81, 113
  - Raum, 79
  - Richtung, 79
- Form
  - hermitesche, 26
- Fortsetzung
  - bilineare, 18
- Fourierformel, 21
- Fundamentalmatrix, 18
- gemeinsames Lot, 86
- Gerade, 62
- Geradentreue, 81
- Gram-Schmidt, 32
- Gruppe
  - affine, 72

- algebraische, 105
- orthogonale, 51
- unitäre, 51
- Hülle
  - affine, 65
  - projektive, 107
- Halb-
  - Achse, 99
  - Achsenlänge, 99
- Haupt-
  - Achse, 99
  - Achsentransformation, 99
  - Raum, 7
- hermitesche Form, 26
- Hermitezität, 27
- Homogenität, 25
- Hyperebene, 59, 62, 100, 103, 108
  - Durchschnitt, 103
  - projektive, 108
- Hyperfläche, 99, 100
- Invariante
  - affine, 102
- Isometrie, 51, 85
- Isomorphismus
  - affiner Räume, 72
- Iwasawa-Zerlegung, 36
- Jacobi-Matrix, 99, 103
- Jordan-
  - Block, 14
  - Kästchen, 12–14
  - Normalform, 13, 14
- Komplement
  - orthogonales, 36, 38
- Koordinaten
  - homogene, 110
  - projektive, 109
- Koordinaten-
  - Abbildung, 109
  - Darstellung, 71
  - System, 109
  - Vektor, 71
- Koordinatensystem
  - affines, 71
  - cartesisches, 85
- Kurve, 100
- Längentreue, 52, 85
- Lage
  - allgemeine, 66
- linear
  - Abbildung, 41
  - Varietät, 62
- Lorenzgruppe, 51
- Lot, 37
  - gemeinsames, 86
- Lotfußpunkt, 37, 86
- Matrix
  - hermitesche, 47
  - Jacobi-, 103
- Matrizengruppe
  - algebraische, 105
- Metrik, 25
  - diskrete, 25
- Minimalpolynom, 8
- Mittelpunkt, 97
- Morphismus, 51
  - affiner Räume, 71
- Multi-
  - Index, 93
  - Linearität, 21
- Näherung, 102
- Nilpotenz, 11
- Norm, 25
- normaler Endomorphismus, 41
- Normalform, 55, 88
  - Jordansche, 13, 14
- normierter Raum, 25
- orthogonal, 31
  - Abbildung, 51
  - Gruppe, 51
  - Teilräume, 86
- Orthogonal-
  - Basis (OGB), 20
  - Raum, 38
  - System, 31
- Orthonormalbasis (ONB), 20
- Paarung, 17
  - ausgeartete, 17
- Parallelität, 67
- Parallelogrammgleichung, 29
- Partition, 13
- Polynom
  - charakteristisches, 8
- Positivdefinitheit, 25, 27

- Projektion
  - orthogonale, 36, 37
- Projektivität, 110
- Punkt, 61
  - eigentlicher, 112
  - regulärer, 102, 103
  - singulärer, 102
  - unabhängiger, 109
  - uneigentlicher, 112
- Punktmodell, 113
- Pythagoras
  - Satz von, 36
- Quadrik, 93
  - Mittelpunkt der, 97
  - oskulierend, 102
  - Schmiege-, 102
- Raum
  - affin, 111
  - affiner, 61
  - euklidischer, 85
  - normierter, 25
  - projektiv, 111
  - projektiver, 107
- Regularität, 100
- Richtungsvektorraum, 61
- Schiefsymmetrie, 26
- Schnittpunkt, 108
- Sesquilinearform, 26
- Singularität, 100, 101
- Skalarprodukt, 26
- Spektral-
  - Radius, 47
  - Satz, 43
- Spektrum, 43
- Spiegelung, 59, 88
- Standardraum
  - affiner, 62
  - projektiver, 107
- Standardskalarprodukt, 27
- Streckung, 80
- Summenzerlegung, 13
- symmetrisch
  - Bilinearform, 26
  - Paarung, 20
- Tangente, 99, 103
- Tangentialraum, 99, 100, 102, 103
- Taylorentwicklung, 100
- Teilraum
  - affiner, 62
  - projektiver, 107
- Torus, 102
- Torusfläche, 102
- Trägheitssatz von Sylvester, 96
- Translation, 61, 80, 88
- Translationsvektor, 61
- Transversalität, 103
- unitär
  - Abbildung, 51
  - Basiswechsel, 55
  - Gruppe, 51
- universell
  - Abbildungseigenschaft (UAE), 21
- Untervektorraum, 7
  - invarianten, 7
- Ursprung, 71
- Varietät
  - lineare, 62
- Vektorraumpaarung, 17
- Verbindungsgerade, 62
- Winkel, 31
- Winkeltreue, 52