

### 3 Schätzer und ihre Eigenschaften

Es seien  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$  ein statistischer Raum,  $\gamma : \Theta \rightarrow \Gamma$  ein Funktional, wobei  $\Gamma \supset \gamma(\Theta)$ ,  $A_\Gamma$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Gamma$ .

#### 3.1 Definition

Ein **Schätzer** für  $\gamma(\vartheta)$  ist eine messbare Abbildung  $S : (\mathfrak{X}, \mathcal{B}) \rightarrow (\Gamma, A_\Gamma)$ .  $S(x)$  heißt **Schätzwert** für  $\gamma(\vartheta)$  zur Beobachtung  $x \in \mathfrak{X}$ .

#### 3.2 Beispiel

$$(\mathfrak{X}, \mathcal{B}) = (\{0, 1\}^n, \mathcal{P}(\{0, 1\}^n)), \Theta = (0, 1), P_\vartheta = \bigotimes_{j=1}^n \text{Bin}(1, \vartheta)$$

$$\gamma(\vartheta) = \vartheta$$

$$S(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

(relative Trefferhäufigkeit)

$$\Gamma = [0, 1] = \bar{\Theta}, A_\Gamma = \mathcal{B}^1 \cap [0, 1]$$

[Beachte:  $\gamma(\Theta) = \Theta \subset \Gamma$ ]

Die Güte eines Schätzers wird über die Verteilung  $P_\vartheta^{S(X)}$  von  $S(X)$  unter  $\vartheta$  beurteilt. Für jedes  $\vartheta \in \Theta$  sollte  $P_\vartheta^{S(X)}$  „stark um  $\gamma(\vartheta)$  konzentriert“ sein.

#### 3.3 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ .)

- a) **S erwartungstreu** (unbiased) für  $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow E_\vartheta S(X) = \gamma(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$
- b)  $b_S(\vartheta) := E_\vartheta S(X) - \gamma(\vartheta)$  heißt Verzerrung (bias) von S an der Stelle  $\vartheta$ .
- c) Ist  $S_n = S_n(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \geq 1$  eine Schätzfolge, so heißt  $(S_n)$  **asymptotisch erwartungstreu** für  $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\vartheta S_n = \gamma(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$$

Erwartungstreue:  $\forall \vartheta \in \Theta$ : Schwerpunkt von  $P_\vartheta^{S(X)}$  ist  $\gamma(\vartheta)$

### 3.4 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$ .)

S mediantreu für  $\gamma(\vartheta) : \Leftrightarrow \text{med}_{\vartheta} S(X) = \gamma(\vartheta) \forall \vartheta \in \Theta$ .

Dabei:

Sei Y Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

$$F^{-1}(q) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq q\}, \quad 0 < q < 1$$

$$\text{med } Y := \text{med } F := \frac{1}{2} \left( F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{F^{-1}\left(\frac{1}{2} + 0\right)}_{=\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} F^{-1}(x)} \right)$$

$\rightarrow$  Median<sup>8</sup>

Mediantreue:  $\forall \vartheta \in \Theta$ :

$$P_{\vartheta}(S(X) \leq \gamma(\vartheta)) = P_{\vartheta}(S(X) \geq \gamma(\vartheta)) \geq \frac{1}{2}$$

(In jeweils 50% der Fälle Unter- bzw. Überschätzung.)

Beispiele:

- a)  $X_1, \dots, X_n$  reellwertig,  $X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} P_{\vartheta}$ ,  $\mu(\vartheta) := E_{\vartheta} X_1$   
 $(E_{\vartheta}|X_1| < \infty)$ .

$\bar{X}_n$  ist erwartungstreu für  $\mu(\vartheta)$

$X_1$  ist erwartungstreu für  $\mu(\vartheta)$

- b) Wie a),  $E_{\vartheta} X_1^2 < \infty$ .  $\sigma^2(\vartheta) := \text{Var}_{\vartheta}(X_1)$ .

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

$S_n^2$  ist erwartungstreu für  $\sigma^2(\vartheta)$ .

---

<sup>8</sup> $\rightarrow$  Abbildung 3.1

Beweis:

$$\begin{aligned}
 E_{\vartheta} S_n^2 &= \frac{1}{n-1} E_{\vartheta} \left[ \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu(\vartheta)) - (\bar{X}_n - \mu(\vartheta)))^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n \underbrace{E_{\vartheta} (X_i - \mu(\vartheta))^2}_{=\text{Var}_{\vartheta}(X_i)} - n \underbrace{E_{\vartheta} (\bar{X}_n - \mu(\vartheta))^2}_{=\text{Var}_{\vartheta}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2(\vartheta)}{n}} \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2(\vartheta) - \sigma^2(\vartheta)) \\
 &= \sigma^2(\vartheta)
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \vartheta = (\mu, \sigma^2), \gamma(\vartheta) = E_{\vartheta} X_1 = \mu$$

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \text{med}_{\vartheta} \bar{X}_n = \mu$$

$\Rightarrow \bar{X}_n$  ist mediantreu für  $\gamma(\vartheta)$ .

### 3.5 Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ .)

Schätzfolge  $S_n = S_n(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n \geq 1$ , heißt (schwach) **konsistent** für  $\gamma(\vartheta) \Leftrightarrow$

$$P_{\vartheta}(\|S_n(X_1, \dots, X_n) - \gamma(\vartheta)\| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta$$

$$(\forall \vartheta \in \Theta : S_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} \gamma(\vartheta))$$

### 3.6 Bemerkung (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$ .)

$(S_n)$  asymptotisch erwartungstreu für  $\gamma(\vartheta)$  und  $\text{Var}_{\vartheta} S_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow (S_n)$  konsistent für  $\gamma(\vartheta)$ .

[Beweis:]

$$\begin{aligned}
 P_{\vartheta}(|S_n - \gamma| \geq \varepsilon) &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| + |ES_n - \gamma| \geq \varepsilon) \\
 &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } |ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\leq P_{\vartheta}(|S_n - ES_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P_{\vartheta}(|ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\text{Var}(S_n)}{(\frac{\varepsilon}{2})^2} + P_{\vartheta}(|ES_n - \gamma| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

(\*) : Tschebyscheff

Kurz:

$$|S_n - \gamma| \leq \underbrace{|S_n - E_\vartheta S_n|}_{\xrightarrow{P_\vartheta} 0 \text{ (1)}} + \underbrace{|E_\vartheta S_n - \gamma|}_{\xrightarrow{P_\vartheta} 0 \text{ (2)}} \xrightarrow{P_\vartheta} 0$$

(1): Tschebyscheff, (2): asymptotisch erwartungstreu

Obiges Beispiel a):

$\bar{X}_n$  konsistent für  $\mu(\vartheta)$ , falls  $E_\vartheta X_1^2 < \infty$  nach 3.6.

Starkes Gesetz der großen Zahlen (SGGZ):

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P_\vartheta \text{-f.s.}} E_\vartheta X_1 \text{ (ohne weitere Voraussetzung)} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P_\vartheta} E_\vartheta X_1$$

### 3.7 Bemerkung und Definition (Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$ .)

$$\text{MQA}_S(\vartheta) := E_\vartheta(S(X) - \gamma(\vartheta))^2$$

heißt **mittlere quadratische Abweichung** von S an der Stelle  $\vartheta$ .

Es gilt:

$$\text{MQA}_S(\vartheta) = E_\vartheta(S(X) - E_\vartheta S(X))^2 + (E_\vartheta S(X) - \gamma(\vartheta))^2 = \text{Var}_\vartheta S(X) + b_s^2(\vartheta)$$

### 3.8 Beispiel

$X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  unbekannt

Schätzer von  $\sigma^2$ :

$$\tilde{\sigma}_n^2(c) = c \cdot \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$$

Ziel: c so wählen, dass MQA von  $\tilde{\sigma}_n^2(c)$  minimal wird.

$$E_\vartheta(\tilde{\sigma}_n^2(c)) = c\sigma^2 \cdot E_\vartheta \underbrace{\left[ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right]}_{\sim \chi_{n-1}^2} = c\sigma^2 \cdot (n-1)$$

$$\text{Var}_\vartheta(\tilde{\sigma}_n^2(c)) = c^2 \sigma^4 \cdot 2(n-1)$$

Damit:

$$\begin{aligned}
 \text{MQA}_{\tilde{\sigma}_n^2(c)}(\vartheta) &= 2(n-1)c^2\sigma^4 + (c\sigma^2(n-1) - \sigma^2)^2 \\
 &= \dots \\
 &= \sigma^4(n^2-1) \left[ \left(c - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{2}{(n-1)(n+1)^2} \right] \\
 &\stackrel{!}{=} \min
 \end{aligned}$$

Dies führt offensichtlich auf  $c = \frac{1}{n+1}$ .

