2. Riemann'sche Metriken

2.1. Definition einer Riemann'schen Metrik und Struktur

Eine Riemann'sche Metrik (oder Riemann'sche Struktur) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist dadurch gegeben, dass jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p \equiv g_p(\cdot, \cdot)$ in T_pM zugeordnet wird.

Diese Zuordnung soll differenzierbar sein, das heißt für alle lokalen Koordinaten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$; $q \mapsto \big(x^1(q), \ldots, x^n(q)\big)$ sind die Funktionen

$$g_{ij} : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R} \\ q \mapsto g_{ij}(q) := \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_q \right\rangle \end{array}$$

C^∞ für $1 \le i, j \le n$. Die $(n \times n)$-Matrix $\big(g_{ij}(q)\big)$ ist symmetrisch und positiv definit für alle $q \in U$.

Insbesondere gilt für $v = \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$ und $w = \sum_{j=1}^n b_j \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \in T_pM$:

$$\langle v, w \rangle_q = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(q)$$

Definition
Eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, g) (oder $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$) bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und einer Riemann'schen Struktur auf M.

Bemerkung: Ist g nicht positiv definit (d.h. $g_p(v, v) \ge 0$ und $g_p(v, v) = 0 \iff v = 0$), sondern nur semi-definit, so heißt g Pseudo-Riemann'sche Struktur. Zum Beispiel der $\mathbb{R}^4$ versehen mit der Form $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ modelliert die Minkowski-Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie. Mehr dazu etwa in B. O'Neill: Semi-Riemannian Geometry.

Der Isometrie-Begriff auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten: Ein Diffeomorphismus $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (N, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ zwischen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten heißt Isometrie falls für alle $p \in M$ und alle $v, w \in T_pM$ gilt:

$$\langle\langle d\Phi_p(v), d\Phi_p(w) \rangle\rangle_{\Phi_p} = \langle v, w \rangle_p \qquad (*)$$

Ein lokaler Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ $(U \subset M,\ V \subset N)$ heißt lokale Isometrie falls $(*)$ gilt für alle $q \in U$ und alle $v, w \in T_qM$.

2.2. Beispiele und Konstruktionen

2.2.1. n-dimensionaler Euklidischer Raum

$M = \mathbb{R}^n$ mit Atlas $\{\mathrm{id}\}$ ist eine Riemann'sche Struktur mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dabei ist $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, also ist $\big(g_{ij}(p)\big)$ die Einheitsmatrix.

2.2.2. n-dimensionale hyperbolische Räume

$M = H^n := \{x = (x^, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Dies ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, also eine offene Untermannigfaltigkeit.

Die Riemann'sche Metrik ist dann

$$g_{ij}(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x^n)^2} & 1 \le i = j \le n \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

und die Matrix

$$\big(g_{ij}(x)\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x^n)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

positiv definit und symmetrisch, also ist (H^n, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und ist ein Modell für n-dimensionale hyperbolische Geometrien.

2.2.3. Konstruktion von neuen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten aus gegebenen

Sei $\Phi : M^m \to N^{n=m+k}$ sei eine Immersion. Weiter sei auf N eine Riemann'sche Struktur $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ gegeben. Diese induziert eine Riemann'sche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf M:

Für $p \in M$, $u, v \in T_pM$ setze: $\langle u, v \rangle_p := \langle\langle d\Phi_p u, d\Phi_p v \rangle\rangle_{\Phi(p)}$

Zu zeigen ist: $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ist symmetrisch, bilinear und positiv definit. Die Symmetrie und Bilinearität ist klar. Zu überprüfen: Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit? Es ist $\langle u, u \rangle_p \ge 0$. Ist $0 = \langle u, u \rangle_p = \langle\langle d\Phi_p u, d\Phi_p u \rangle\rangle_{\Phi(p)}$, so ist $d\Phi_p u = 0 \xRightarrow{\Phi \text{ injektiv}} u = 0$

Die Abbildung $\Phi : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (N, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ heißt isometrische Immersion von M in N.

Beispiel
Flächen im $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt, wobei $\Phi = i : F \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ die Inklusionsabbildung ist. Die so induzierte Riemann'sche Metrik auf F heißt die 1. Fundamentalform von F. Für $u, v \in T_pF$ gilt dann:

$$\langle u, v \rangle := \langle di_p u, di_p v \rangle = \langle u, v \rangle$$

wobei das letzte Skalarprodukt das Standardskalarprodukt ist.

Analog kann man mit anderen Untermannigfaltigkeiten des $(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vorgehen. So kan man $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der vom Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Riemann'schen Metrik versehen. Diese heißt sphärische Geometrie.

Bemerkung: Die klassischen Geometrien (euklidische, hyperbolische, sphärische) sind Spezialfälle der Riemman'schen Geometrien.

2.2.4. Riemann'sche Produkte

Seien $(M_1, \langle\cdot,\cdot\rangle^{(1)})$, $(M_2, \langle\cdot,\cdot\rangle^{(2)})$ zwei Riemann'sche Mannigfaltigkeiten. $M_1 \times M_2$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiter haben wir die zwei kanonischen Projektionen auf die Faktoren:

$$\begin{aligned} \pi_1 : M_1 \times M_2 &\to M_1 \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \pi_2 : M_1 \times M_2 &\to M_2 \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_2 \end{aligned}$$

Definition (Riemann'sche Produktmetrik)
Riemann'sche Produktmetrik auf $M_1 \times M_2$ ist für alle $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ und für alle $(p,q) \in M_1 \times M_2$:

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_{(p,q)} := &\langle d\pi_{1(p,q)}u, d\pi_{1(p,q)}v\rangle^{(1)} \\ &+\langle d\pi_{2(p,q)}u, d\pi_{2(p,q)}v\rangle^{(2)} \end{aligned}$$

(Kurz: $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \langle u_1, u_1\rangle^{(1)} + \langle u_2, u_2\rangle^{(2)} = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$)

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{(p,q)}$ ist symmetrisch und positiv bilinear. Es ist auch positiv definit:

$$0 = \langle u, u\rangle \implies \left.\begin{aligned} d\pi_1 u = 0 \\ d\pi_2 u = 0 \end{aligned}\right\} \implies u = 0\,,$$

da $u = d\pi_1 u \oplus d\pi_2 u$.

Beispiele

(1) $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}^1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. $(a_1, \dots, a_n) = a \in T_x\mathbb{R}^n$; $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$

(2) Flacher Torus:

$T^2 := S^1 \times S^1$, wobei jeder Faktor S^1 mit der kanonischen Riemann'schen Metrik, induziert von $\mathbb{R}^2$, versehen ist. Wir betrachten lokale Koordinaten (s,t). Dann:

$$T_{(s,t)}(S^1 \times S^1) = \mathbb{R}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_s \oplus \mathbb{R}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t$$

Sei nun $u, v \in T_{(s,t)}(S^1 \times S^1)$ mit $u = a\frac{\partial}{\partial s} + b\frac{\partial}{\partial t}$ und $v = c\frac{\partial}{\partial s} + d\frac{\partial}{\partial t}$. Das heißt: $d\pi_1 u = a\frac{\partial}{\partial s}$ und $d\pi_2 u = b\frac{\partial}{\partial t}$. Ohne Einschränkung sei $\left\langle\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right\rangle = 1$ und $\left\langle\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = 1$

Die Riemann'sche Produktmetrik auf T^2 bezüglich lokalen Koordinaten (s,t):

$$\begin{aligned} g_{11}(s,t) &= \left\langle d\pi_1(\frac{\partial}{\partial s} + 0), d\pi_1(\frac{\partial}{\partial s} + 0)\right\rangle + \left\langle d\pi_2(\frac{\partial}{\partial s} + 0), d\pi_2(\frac{\partial}{\partial s} + 0)\right\rangle \\ &= \left\langle\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right\rangle + \langle 0, 0\rangle = 1 \end{aligned}$$

Analog: $g_{22}(s,t) = \cdots = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1$

$$g_{12}(s,t) = \left\langle d\pi_1(\frac{\partial}{\partial s} + 0), d\pi_1(\frac{\partial}{\partial t} + 0) \right\rangle + \left\langle d\pi_2(\frac{\partial}{\partial s} + 0), d\pi_2(\frac{\partial}{\partial t} + 0) \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, 0 \right\rangle + \left\langle 0, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0$$

also ist

$$\Big(g_{ij}(s,t)\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das heißt: T^2 mit Produktmetrik ist lokal isometrisch zur euklidischen Ebene.

☠ T^2 und $\mathbb{R}^2$ sind nicht global isometrisch (sonst wären sie homöomoph, aber $\mathbb{R}^2$ ist nicht kompakt, während T^2 kompakt ist).

2.3. Existenz von Riemann'schen Metriken

Satz 2.1 (Existenz der Riemann'schen Metrik)
Auf jeder n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Riemann'sche Metrik.

Beweis
Wir gehen in zwei Schritten vor:

1. Schritt (lokale Konstruktion für Kartengebiete)

Gegeben eine Karte $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto \varphi_\alpha(p) = \big(x^1_\alpha(p), \ldots, x^n_\alpha(p)\big)$. Wir benötigen $\frac{n(n+1)}{2}$ C^∞-Funktionen $g_{ij} : U_\alpha \to \mathbb{R}$, so dass die $n \times n$-Matrix $\big(g_{ij}(q)\big)$ positiv definit wird für alle $q \in U_\alpha$.

Eine Möglichkeit: Wähle Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, das heißt $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ und setze für alle $u, v \in TqM$, $q \in U_\alpha$:

$$g_\alpha(u,v) := \langle d\varphi_\alpha|_q(u), d\varphi_\alpha|_q(v) \rangle_{\varphi_\alpha(q)} \ ,$$

das heißt φ_α wird zu einer lokalen Isometrie gemacht.

Weil $d\varphi_\alpha|_q(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_q) = e_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, ist

$$g^{(\alpha)}_{ij}(q) = g_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q, \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_q \right) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\,.$$

2. Schritt (Globale Konstruktion)

Wir nehmen ein Hilfsmittel aus der Differential-Topologie:

Satz 2.2 („Zerlegung der Eins“)
Sein M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (insbesondere Hausdorff'sch und es existiert eine abzählbare Basis) und $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine (offene) Überdeckung von M von Karten.

Dann existiert eine lokal endliche Überdeckung $(V_k)_{k \in I}$ und C^∞-Funktionen $f_k : M \to \mathbb{R}$ mit

(1) Jedes V_k liegt in einem $U_{\alpha=\alpha(k)}$.

(2) $f_k \geq 0$ auf $\bar{V}_k$ und $f_k = 0$ auf dem Komplement von $\bar{V}_k$. (Das heißt: Der Träger von f_k ist eine Teilmenge von $\bar{V}_k$)

(3) $(\sum_{k \in I} f_k) = 1$ für alle $p \in M$. Diese Summe ist immer endlich, da die Überdeckung lokal endlich ist.

Lokal Endlich: Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung $U = U(p)$ mit $U \cap V_k \neq \emptyset$ für nur endlich viele $k \in I$
Beweis (von Satz 2.2)
siehe zum Beispiel: Gromoll-Klingenberg-Meyer, „Riemann'sche Geometrie im Großen“. ■

Für die Konstruktion einer Riemann'schen Metrik auf M „verschmiert“ oder „glättet“ man jetzt alle im ersten Schritt konstruierten lokalen Riemann'schen Metriken $g_k : g_\alpha|_{V_k}$ wie folgt:

Sei $p \in M$ beliebig und $u, v \in T_pM$. Setze

$$\langle u, v \rangle_p := \sum_{k \in I} f_k(p) \cdot g_k(p)(u, v)$$

Diese Summe ist endlich, da $f_k(p) \neq 0$ nur für endlich viele k.

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ein Skalarprodukt auf T_pM?

- Symetrie und Bilinearität sind klar.
- Positivität:
$$\langle u, u \rangle_p = \sum_{k \in I} \underbrace{f_k(p)}_{\geq 0} \underbrace{g_k(u, u)}_{\geq 0} \geq 0\,.$$
- Definitheit: Sei $\langle u, u \rangle_p = 0$, dann ist für jedes k $f_k(p) g_k(u, u) = 0$. Wegen Punkt (3) von Satz 2.2 existiert mindestens ein $k_0 \in I$, so dass $f_{k_0}(p) > 0$. Daher ist $g_{k_0}(u, u) = 0$, woraus $u = 0$ folgt, da g_{k_0}positiv definit ist. ■

2.4. Anwendung: Länge von Kurven

Sei $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit M. Dann ist die Länge von c

$$L(c) := \int_I \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle} dt = \int_I \| c'(t) \| dt$$

(Ein Spezialfall sind C^∞-Kurven in $\mathbb{R}^n$ versehen mit Standardskalarprodukt)

Die Länge ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve und invariant unter Isometrien $\Phi : (M, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \to (N, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, also $L(\Phi \circ c) = L(c)$, da $L(\Phi \circ c) = \int_I \|(\Phi \circ c)'\|_2 dt = \int_I \|d\Phi_{c(t)} c'(t)\|_2 dt \overset{\Phi \text{ iso.}}{=} \int_I \|c'\|_1 dt = L(c)$.