# Kapitel 1

# Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

In der Stochastik werden zufallsabhängige Phänomene mathematisch modelliert und analysiert. (z.B. würfeln)
$\Omega$ = Ergebnisraum (z.B. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
$A \subset \Omega$ Ereignis (z.B. A={2,4,6} $\hat{=}$ gerade Zahl fällt)
Ist $\omega \in \Omega$, so heißt $\{\omega\}$ Elementarereignis

**Beispiel 1.1**

a) Zuerst wird eine Münze geworfen. Fällt Kopf, wird mit einem Würfel geworfen, fällt Zahl so wird nochmal mit der Münze geworfen.
$\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, ZZ, ZK\}$

b) Rotierender Zeiger
$\Theta = 2\pi x$, $0 \leq x < 1$ sei der Winkel beim Stillstand
$\Omega = [0, 1)$
$A = (0, \frac{1}{4})$ ist das Ereignis: "Zeiger stoppt im I. Quadranten"

Verknüpfungen von Ereignissen werden durch mengentheoretische Operationen beschrieben.

**Definition 1.1**

a) *Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse. So heißt*
$A \cap B = AB = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \ \underline{\text{und}}\ \omega \in B\} = \{\omega \in \Omega | \omega \in A, \omega \in B\}$ ***Durchschnitt von** $A$ **und** $B$.*
$A \cup B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \ \underline{\text{oder}}\ \omega \in B\}$ ***Vereinigung von** $A$ **und** $B$.*
*Sind $A$ und $B$ disjunkt, dh. $A \cap B = \emptyset$ dann schreiben wir auch $A + B$*
$A \backslash B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A, \omega \notin B\}$
*Gesprochen: $A$ ohne $B$. Spezialfall $A = \Omega$ Dann ist $\Omega \backslash B = B^c$*
*$B^c$ heißt **Komplement von** $B$.*

b) *Sind $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ Ergebnisräume, so ist* $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in \Omega_i, i = 1, \ldots, n\}$ *das* ***Kartesische Produkt****.*

**Beispiel 1.2** 2x würfeln
$\Omega = \{(i,j) \in \{1 \ldots 6\}\}$
A = Erster Würfel ist eine 6 = $\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} = \{(6,j)|j \in \{1 \ldots 6\}\}$
B = Augensumme ist max 4 = $\{(i,j)|i+j \leq 4\}$ = {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,1)}
$A \cap B = \emptyset$
$B^c$ = Augensumme ist mindestens 5

Mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die **Potenzmenge von** $\Omega$, d.h. die Menge aller Teilmengen von $\Omega$. (dazu gehören auch $\Omega$ und $\emptyset$). Wir wollen nun Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen.
Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Mengen (Ereignisse) denen wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen wollen. Um eine sinnvolle math. Theorie zu bekommen, können wir im Allgemeinen nicht $\mathcal{A} = B \backslash \Omega$ wählen. Jedoch sollte das Mengensystem $\mathcal{A}$ gewisse Eigenschaften haben.

**Definition 1.2**

a) *$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra über** $\Omega$, falls gilt:*

   (i) $\Omega \in \mathcal{A}$

   (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

   (iii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

b) *$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **$\sigma$-Algebra über** $\Omega$, falls $\mathcal{A}$ eine Algebra ist und*

   (iv) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

**Bemerkung 1.1**

a) Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mathcal{A}$ $\sigma$-Algebra über $\Omega$ heißt **Messraum**

b) $\mathcal{P}(\Omega)$ ist stets eine $\sigma$-Algebra. Ist $\Omega$ endlich oder abzählbar unendlich, so kann $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt werden. Ist $\Omega$ nicht abzählbar (siehe Beispiel 1.1), so muss eine kleinere $\sigma$-Algebra betrachtet werden. (Kapitel 4).

Wir wollen noch die folgenden Mengenverknüpfungen betrachten.

**Definition 1.3** *Seien $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ Dann heißt*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

*der **Limes Superior** der Folge* $\{A_n\}$ *und*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

*heißt der **Limes Inferior** der Folge* $\{A_n\}$

**Bemerkung 1.2** Es gilt:

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists n \geq k : w \in A_n \Leftrightarrow |\{n \in \mathbb{N} | \omega \in A_n\}| = \infty$$

$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ist das Ereignis "unendlich viele $A_n$'s treten ein"

$$\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}\text{,so dass } \forall\, n \geq k\ \omega \in A_n$$

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ist also das Ereignis "alle bis auf endlich viele der $A_n$'s treffen ein¡'

**Lemma 1.1** *Seien* $A_1, A_2, \ldots, \subset \Omega$.

*a) Falls* $\{A_n\}$ *wachsend ist, d.h.* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *dann gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

*b) Falls* $\{A_n\}$ *fallend ist, d.h.* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, *dann gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

**Bemerkung 1.3**

a) Für $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ schreiben wir $A_n \uparrow$, für $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ schreiben wir $A_n \downarrow$

b) Falls
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \text{ schreiben wir kurz: } \lim_{n\to\infty} A_n$$

**Beweis** a) Sei

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Es gilt

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

Andererseits:

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = A_k \text{ , d.h. } \liminf_{n\to\infty} A_n = A$$

b) analog ■

Ereignissen ordnen wir jetzt Zahlen zwischen 0 und 1 zu, die wir als Wahrscheinlichkeiten interpretieren. Damit dies sinnvoll ist, soll die Zuordnung gewissen AXIOMEN genügen.

**Definition 1.4 (Axiomensystem von Kolmogorov 1933)**
*Gegeben sei ein Messraum* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Eine Abbildung* $P : A \to [0,1]$ *heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathcal{A}$, *falls*

*(i)* $P(\Omega) = 1$ *"Normiertheit"*

*(ii)*

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \forall \, \text{paarweise disjunkten} \, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$$

*(d.h.* $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$*) "*$\sigma$ *– Additivität"*

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *heißt* ***Wahrscheinlichkeitsraum***.

**Beispiel 1.3**
Ist $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $\mathcal{A} = P(\Omega)$, so wird durch $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \forall A \subset \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nennt man Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsraum. Jedes Elementarereignis hat hier die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{|\Omega|}$.
Wir betrachten den gleichzeitigen Wurf zweier Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 11 bzw. 12 ist?
2 Würfel
$\Omega = \{(i,j)|i,j = \{1\ldots 6\}\}$
$|\Omega| = 36$
A = Augensumme 11
B = Augensumme 12
P(A) = P({(5,6),(6,5)}) = $\frac{2}{36}$
P(B) = P({(6,6)}) = $\frac{1}{36}$

**Satz 1.2**
*Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. *Dann gilt:*

*a)* $P(A^c) = 1 - P(A)$

*b) Monotonie:* $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

*c)*

$$\text{Endliche Additivität} P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (P(A_k)) \, \text{für paarweise disjunkte} \, A_1 \ldots A_n$$

*d)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\overbrace{A \cap B}^{=AB})$

e) *Boole'sche Ungleichung:*

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

**Beweis** a) Es gilt:

$1 = P(\Omega) = P(A+A^c) = P(A+A^c+\emptyset+\emptyset\dots) \overset{(ii)}{=} P(A)+P(A^c)+P(\emptyset)+P(\emptyset)\dots$
$\underline{\Rightarrow P(\emptyset) = 0}$ und $P(A^c) = 1 - P(A)$

b) $P(B) = P(A + B\backslash A) = P(A) + \underbrace{P(\overbrace{B\backslash A}^{=B\cap A^c \in \mathcal{A}})}_{\geq 0} \geq P(A)$

c) Setze $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ und verwende die $\sigma - Additivit\ddot{a}t$.

d) Es gilt: $A \cup B = A + B\backslash A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B\backslash A)$

$B = B\backslash A + A \cap B \Rightarrow P(B) = P(B\backslash A) + P(\overbrace{A \cap B}^{=AB})$
Es folgt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

e) Für n=2 folgt die Aussage aus Teil d), da $P(AB) \geq 0$
Induktion: $n \to n+1$:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1}) \leq P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + P(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1})$$

■

**Satz 1.3 (Siebformel)**
*Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann gilt für $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}$:*

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \cdots \leq i_k \leq n} P(A_{i1} \cap \dots \cap A_{ik})$$

**Bemerkung 1.4**

a) Die Formel ist auch unter dem Namen: Formel von Poincare-Sylvester oder Formel des Ein- und Ausschließens bekannt.

b) n=2 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Die $\sigma$-Additivität ist äquivalent zu einer gewissen Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

**Satz 1.4** *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ eine beliebige additive Mengenfunktion, d.h. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ gelte für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}$. Außerdem sei $P(\Omega) = 1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*a) $P$ ist $\sigma$-additiv (und damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß)*

*b) $P$ ist stetig von unten, d.h. für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

*c) $P$ ist stetig von oben, d.h. für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

*d) $P$ ist stetig in $\emptyset$, d.h. für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

**Beweis** *a)* $\Rightarrow$ *b)* Es sei $A_0 := \emptyset$. Dann gilt:

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) \overset{L.1.1}{=} P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\sum_{k=1}^{\infty}(A_k \backslash A_{k-1})) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \backslash A_{k-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \backslash A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

*b)* $\Rightarrow$ *c)* $A_n \downarrow \Rightarrow A_n^c \uparrow$ und

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - P(A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \overset{b)}{=} 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \overset{\text{d'Morgan}}{=} P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Mit Lemma 1.1 folgt die Behauptung

*c)* $\Rightarrow$ *d)* klar (d) Spezialfall von c))

*d)* $\Rightarrow$ *a)* Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \downarrow \emptyset \qquad \text{für}\, n \to \infty$$

Also

$$P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k) \overset{\text{P endl. Add.}}{=} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k)$$

Für $n \to \infty$ gilt: $P(\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k}_{B_n}) \to 0$ und die Behauptung folgt. ■