

15. g -adische Entwicklungen

Vereinbarung: Stets in diesem Paragraphen: $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, $G := \{0, 1, \dots, g-1\}$.

Satz 15.1 (Konvergenz g -adischer Entwicklungen)

(1) Sei $(z_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $G \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$ ist konvergent.

(2) Ist $m \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{1}{g^{m-1}}$

Beweis

(1) $\frac{|z_n|}{g^n} = \frac{z_n}{g^n} \leq \frac{g-1}{g^n} \forall n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}$ ist konvergent $\xrightarrow{12.2}$ Behauptung.

(2) $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{g-1}{g^m} + \frac{g-1}{g^{m+1}} + \dots = \frac{g-1}{g^m} \cdot (1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \dots) = \frac{g-1}{g^m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{g}} = \frac{1}{g^{m-1}}$. ■

Definition

Sei $(z_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in G und es gelte $(*) z_n \neq g-1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $0, z_1 z_2 z_3 \dots := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$ ein g -adischer Bruch oder eine g -adische Entwicklung.

Beispiele:

(1) $g = 10$ (Dezimalentwicklung); $0,333\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$.

(2) $g = 2$ (Dualentwicklung); $0,111000\dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Bemerkung: (1) Die Negation von $(*)$ lautet: $z_n = g-1$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

(2) Ist $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ ein g -adischer Bruch und existiert ein $m \in \mathbb{N} : z_n = 0$ für $n > m$, so schreibt man: $0, z_1 z_2 z_3 \dots z_m$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seien konvergent und es gelte $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Gilt zusätzlich $a_n < b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Beweis in Übung).

Satz 15.2 (Eindeutigkeit der g -adischen Entwicklung)

Sei $a = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$ ein g -adischer Bruch.

(1) $a \in [0, 1)$

(2) Ist $0, w_1 w_2 w_3 \dots$ eine weitere g -adische Entwicklung von a , so gilt $z_n = w_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis

(1) $0 \leq a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} \stackrel{(*), \text{Bem. (2)}}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} \stackrel{15.1}{=} 1$.

- (2) **Annahme:** $\exists n \in \mathbb{N} : z_n \neq w_n$. Sei m der kleinste solche Index, also $z_m \neq w_m$ und $z_j = w_j$ für $j = 1, \dots, m-1$. Etwa $z_m < w_m \implies z_m - w_m < 0 \stackrel{z_m - w_m \in \mathbb{Z}}{\implies} z_m - w_m \leq -1$. $\forall n \in \mathbb{N} : z_n - w_n \leq z_n \leq g-1$. $\exists \nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \geq m+1$ und $z_\nu - w_\nu < g-1$. (andererseits falls $z_\nu - w_\nu = g-1 \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = w_\nu + g-1 \forall \nu \geq m+1 \implies w_\nu = 0 \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = g-1 \forall \nu \geq m+1$. Widerspruch zu (*)). Dann:
- $$0 = a - a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{g^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n}$$
- $$= \underbrace{\frac{z_m - w_m}{g^m}}_{\leq -\frac{1}{g^m}} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n}}_{< \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}} < -\frac{1}{g^m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{\stackrel{15.1}{=} \frac{1}{g^m}} = 0$$
- $\implies 0 < 0$ Widerspruch. ■

Satz 15.3 (Existenz der g -adischen Entwicklung)

Ist $a \in [0, 1)$, so lässt sich a eindeutig als g -adischer Bruch darstellen.

Beweis

Eindeutigkeit siehe 15.2.

Existenz: Definiere $(z_n)_{n \geq 1}$ wie folgt: $z_1 := [a \cdot g]$, $z_{n+1} := [(a - \frac{z_1}{g} - \frac{z_2}{g^2} - \dots - \frac{z_n}{g^n}) \cdot g^{n+1}]$ ($n \geq 1$).

In der Übung: $z_n \in G \forall n \in \mathbb{N}$

Es gilt: (*) $\underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots + \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_n} \leq a < \underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots + \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_n} + \frac{1}{g^n} \forall n \in \mathbb{N} \implies s_n \leq a < s_n + \frac{1}{g^n} \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$.

Noch zu zeigen ist: $z_n \neq g-1$ für unendlich viele n . **Annahme:** $\exists m \in \mathbb{N} : z_n = g-1 \forall n \geq m$.

Dann: $a = \sum_{n=1}^{\infty} z_n g^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_{m-1}} + \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{=: \frac{1}{g^{m-1}}} \implies a = s_{m-1} + \frac{1}{g^{m-1}}$ Widerspruch zu (*). ■

Bemerkung: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, so lässt sich a eindeutig in der Form $a = [a] + 0, z_1 z_2 z_3 \dots$ darstellen. Ist $g = 10$, so schreibt man dafür $a = [a], z_1 z_2 z_3 \dots$. Beispiel: $1, 333 \dots$

Satz 15.4 (\mathbb{R} ist überabzählbar)

Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis

Es genügt zu zeigen: $[0, 1)$ ist überabzählbar.

Annahme: $[0, 1)$ ist abzählbar, also $[0, 1) = \{a_1, a_2, \dots\}$, $a_j \neq a_k$ für $j \neq k$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$ die 3-adische Entwicklung von a_j . ($z_k^{(j)} \in \{0, 1, 2\}$).

$$z_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_k^{(k)} \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann: $z_k \neq z_k^{(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}, z_k \neq g - 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}. a := 0, z_1 z_2 z_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}. 15.2 \implies a \in [0, 1) \implies \exists m \in \mathbb{N} : a = a_m \implies 0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} z_3^{(m)} \dots. 15.2 \implies z_j = z_j^{(m)} \quad \forall j \in \mathbb{N} \implies z_m = z_m^{(m)}. \text{ Widerspruch!} \quad \blacksquare$

