

## § 12 Vorbereitungen für die Integralsätze

### Definition

Seien  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Dann heißt

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

das **Kreuzprodukt** von  $a$  mit  $b$ . Mit  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$  gilt formal:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

### Beispiel

Sei  $a = (1, 1, 2), b = (1, 1, 0)$ , dann gilt:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 1 \\ e_2 & 1 & 1 \\ e_3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2e_1 - (-2)e_2 + (1-1)e_3 = (-2, 2, 0)$$

### Regeln zum Kreuzprodukt:

- (1)  $b \times a = -a \times b$
- (2)  $a \times a = 0$
- (3)  $(\alpha a) \times (\beta b) = \alpha\beta(a \times b)$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- (4)  $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen und  $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Dann heißt

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \in C(D, \mathbb{R})$$

die **Divergenz** von  $f$ .

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $D$  offen und  $F = (P, Q, R) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ . Dann heißt:

$$\operatorname{rot} F := (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \in C(D, \mathbb{R}^3)$$

die **Rotation** von  $F$ . Dabei gilt formal:

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R)$$

### Definition

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Weg. Ist  $\gamma$  in  $t_0 \in [a, b]$  differenzierbar mit  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , so heißt  $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$

**Tangentialvektor** von  $\gamma$  in  $t_0$ .

