

Also muß gelten:  $\phi(x) = x$

$$A_\phi \cdot \hat{x} = \hat{x} \Leftrightarrow (A_\phi - E_n)\hat{x} = 0$$

Löse LGS:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also:  $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , also  $x = U_1$ .

Widerspruch zu  $U \oplus [x] = V$ .

### 0.15.2 Aufgabe 4

a) Es gilt:  $\text{Bild}(\psi \circ \phi) \subset \text{Bild } \psi$

$$\psi \circ \phi \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \text{Bild } \psi \circ \phi = W \Rightarrow \text{Bild } (\psi \circ \phi) = \text{Bild } \psi \Rightarrow \text{Beh.}$$

b) Ann.:  $\text{Bild } \phi \cap \text{Kern } \psi \neq \{0\}$

$$\Rightarrow \exists x \in U, x \neq 0_U: \phi(x) \in \text{Kern } \psi, \phi(x) \neq 0_V.$$

$$\Rightarrow \exists x \in U, x \neq 0: \psi(\phi(x)) = 0_W$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(\psi \circ \phi) \neq \{0_W\}$$

$\psi \circ \phi$  nicht injektiv.

Also gilt:  $\text{Bild } \phi \oplus \text{Kern } \psi$  ist direkt.

z.Z.:  $\text{Bild } \phi \oplus \text{Kern } \psi = V$

Sei  $v \in V$ . Dann ex.  $u \in U$  mit  $(\psi \circ \phi)(u) = \psi(v)$ .

Sei  $v_1 := v - \phi(u)$  und  $v_2 := \phi(u)$ .

Dann gilt:

$$(i) \psi(v_1) = \psi(v - \phi(u)) = \psi(v) - (\psi \circ \phi)(u) = 0 \Rightarrow v_1 \in \text{Kern } \psi$$

$$(ii) v_2 = \phi(u) \in \text{Bild } \phi$$

$$(iii) v = v_1 + v_2$$

$$\Rightarrow v \in \text{Bild } \phi \oplus \text{Kern } \psi.$$

## 0.16 Übung 16, 18.04.2005

### 0.16.1 Aufgabe 1

$$a) \det(A - XE_4) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-x & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -x & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-x & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -x & 1 \\ -1-x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 2 & 4 & -x \end{vmatrix} \\
 &= (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ -1+x & 1-x & 0 \\ 2 & 4 & -x \end{vmatrix} = (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 4 & -x \end{vmatrix} \\
 &= (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 5-x & 1 \\ 6 & -x \end{vmatrix} = (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 6-x & 1 \\ 6-x & -x \end{vmatrix} \\
 &= (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 0-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (-1-x)^2(1-x)(6-x)
 \end{aligned}$$

Eigenraum zum EW  $-1$ :  $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$  ist EV zum EW  $-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 &Ax = -x \\
 \Leftrightarrow &Ax + x = 0 \\
 \Leftrightarrow &(A + E_4)x = 0 \\
 \Leftrightarrow &0 \neq x \in \text{Kern}(A) + E_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } E_{-1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{ebenso: } E_1 = \left[ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right], E_6 = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$\text{b) Offensichtlich } B = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ ist Basis von } \mathbb{R}^4.$$

Definieren wir eine lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  durch  $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$  so ist die Abbildung von  $\Phi$  bzgl. der Std.-Basis.

$$\text{Bzgl. B hat } \Phi \text{ die Abb. } A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ dann gilt: } A_\Phi = S^{-1}AS$$

Nebenrechnung:

$$\boxed{\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = A_\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dann gilt: } A_{\Phi} = S^{-1}AS$$

c)  $c$  ist EW von  $A$  mit EV  $x \neq 0 \Leftrightarrow Ax = cx \Leftrightarrow (A - cE)x = 0$

### 0.16.2 Aufgabe 2

Seien  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $AB - E_n$  regulär.

Ann.:  $BA - E_n$  nicht regulär.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \exists x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0 : (BA - E_n)x = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists 0 \neq x \in \mathbb{K}^n : BAx = x \\ \Leftrightarrow & \exists 0 \neq x \in \mathbb{K}^n : (AB)Ax = Ax \end{aligned}$$

$Ax \neq 0$ , sonst:  $x = B(AX) = B \times 0 = 0$

Damit gilt  $(AB - E_n)(Ax) = 0$ . Also ist  $AB - E_n$  nicht regulär. Insgesamt  $BA - E_n$  ist regulär.

### 0.16.3 Übungsaufgabe 2

Es sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$ . Weiter sei  $M = \{x \in G \mid x \circ x = e\}$ .

a) Zeigen Sie: ist  $G$  kommutativ so ist  $M$  eine Untergruppe von  $G$ .

$G$ : Gruppe:  $G$  Menge und  $\circ : G \times G \rightarrow G$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, a, b, c \in G$
- (ii)  $\exists e \in G : \forall a \in G : a \circ e = a = e \circ a$
- (iii)  $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$

$G$  heisst abelsch falls zusätzlich gilt:

- (i) (iv)  $\forall a, b \in G a \circ b = b \circ a$

Sei  $M \subset G$ :  $M$  heisst Untergruppe von  $G$ , falls:

$(M, \circ)$  eine Gruppe ist

Untergruppenkriterium:

$$\begin{aligned} M \subset G \text{ ist Untergruppe} & \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{(i)} \quad M \neq \emptyset \\ & \text{(ii)} \quad x, y \in M : x^{-1} \circ y \in M \end{aligned} \\ & \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{(i)} \quad M \neq \emptyset \\ & \text{(ii)} \quad x, y \in M : x \circ y \in M \\ & \text{(iii)} \quad x \in M : x^{-1} \in M \end{aligned} \end{aligned}$$

**Beweis:** Zu zeigen: