9 Konvergenzsätze für Martingale

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W'Raum, $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und $\mathfrak{F}_\infty := \sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{F}_n)$.

Definition 9.1 *Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Folge von ZV und $-\infty < a < b < \infty$.*
$U_n[a,b]$ sei die ***Anzahl der aufsteigenden Überschreitungen*** *des Intervalls $[a,b]$ durch $X_1, \dots, X_n$ also*

$$U_n[a,b] = \max\{k \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor \mid \exists \text{ Indizes } 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k} \leq n \text{ mit } X_{i_{2j-1}} \leq a,\ b \leq X_{i_{2j}} \text{ für } j = 1, \dots, k\}$$

Bemerkung 9.1 Wegen

$$\{U_n[a,b] \geq k\} = \bigcup_{1\leq i_1<\dots<i_{2k}\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} \{X_{i_{2j-1}} \leq a\} \cap \{X_{i_{2j}} \geq b\} \in \mathfrak{F}_n$$

ist $U_n[a,b]$ eine ZV.

Lemma 9.1 *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal. Dann gilt:*

$$EU_n\,[a,b] \leq \frac{1}{b-a} E(X_n - a)^-$$

Beweis
Sei $p := \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1,\ \tau_0 \equiv 1$ und für $k = 1, \dots, p$:
$\tau_{2k-1} := \min\{j \geq \tau_{2k-2} \mid X_j \leq a\} \wedge n$
$\tau_{2k} := \min\{j \geq \tau_{2k-1} \mid X_j \geq b\} \wedge n$
Die (τ_k) sind Stoppzeiten mit $1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{2p} = n$ und falls $\tau_{2k-1} < n$, ist $\tau_{2k-1} < \tau_{2k}$.
Sei $k_0 := U_n[a,b]$, d.h. $X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}} \geq b - a$ für $k = 1, \dots, k_0$
$X_{\tau_{2k_0+2}} - X_{\tau_{2k_0+1}} \neq 0 \implies X_{\tau_{2k_0+1}} \leq a,\ X_{\tau_{2k_0+2}} = X_n$
$\implies X_{\tau_{2k_0+2}} - X_{\tau_{2k_0+1}} \geq X_n - a \geq \min\{X_n - a, 0\} = -(X_n - a)^-$
$\implies \sum_{k=1}^{p}(X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}) \geq (b-a)\cdot U_n[a,b] - (X_n - a)^-$
Wir zeigen jetzt: $E(X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}) \leq 0$.
Sei $c_j := \mathbf{1}_{\{\tau_{2k-1}<j\leq\tau_{2k}\}}$. $(c_j)_{j\geq 2}$ ist vorhersehbar.
$\{c_j = 1\} = \{\tau_{2k-1} \leq j-1\} \cap \{\tau_{2k} \leq j-1\}^C\ \in \mathfrak{F}_{j-1}$
Sei $Y_n = X_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j(X_j - X_{j-1})$, $n \in \mathbb{N};\ Y_1 := X_1$.
$\xRightarrow{\text{Satz 8.4}}$ (Y_n) ist ein Supermartingal.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ EY_n &= E]X_1 + \sum_{j=1}^{n} c_j(X_j - X_{j-1})] \\
&= EX_1 + \underbrace{E[X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}]}_{\leq 0} \\
&\leq EY_1 = EX_1
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Beh. ■

Satz 9.1 (Vorwärtskonvergenzsatz von Doob)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Supermartingal mit der Eigenschaft $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{E|X_n|\} < \infty$. Dann existiert eine $\mathfrak{F}_\infty$[1] *-messbare Zufallsvariable X_∞ mit $E|X_\infty| < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ $P-f.s.$*

Beweis
Sei $N := \{\omega \in \Omega \mid \liminf_{n\to\infty}\{X_n(\omega)\} < \limsup_{n\to\infty}\{X_n(\omega)\}\}$ und
$U_\infty[a,b] := \lim_{n\to\infty}\{U_n[a,b]\}$ (existiert, da $U_n[a,b]$ wachsend)
$\Longrightarrow\ N = \cup_{a,b\in\mathbb{Q},\, a<b}\{\omega \in \Omega \mid U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}$
$\xRightarrow{\text{Lemma 9.1}}\ (b-a)EU_n[a,b] \leq E(X_n - a)^- \leq |a| + E|X_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Mit der Voraussetzung und monotoner Konvergenz: $EU_\infty[a,b] < \infty$.
$\Longrightarrow\ P(U_\infty[a,b] = \infty) = 0 \quad \Longrightarrow\ P(N) = 0$, da N abzählbare Vereinigung von P-Nullmengen. Außerdem: $N \in \mathfrak{F}_\infty$.
Sei $\tilde{X}_\infty(\omega) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\{X_n(\omega)\} & \omega \in N^C (\text{ evtl. } \tilde{X}_\infty(\omega) = \infty) \\ 0 & \omega \in N \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ E\left|\tilde{X}_\infty\right| &= E\left[\liminf_{n\to\infty}\{|X_n|\}\right] \\
&\overset{\text{Lem. von Fatou}}{\leq} \limsup_{n\to\infty}\{E|X_n|\} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{E|X_n|\} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Sei $\tilde{N} := \{\omega \in \Omega \mid \tilde{X}_\infty \in \{-\infty, \infty\}\} \quad \Longrightarrow\ P(\tilde{n}) = 0$
$folgt X_\infty := \tilde{X}_\infty \cdot \mathbf{1}_{\tilde{N}^C}$ erfüllt die Bedingung. ■

Bemerkung

(i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{E|X_n|\} < \infty$ heißt L^1-**beschränkt**.

(ii) Bei Supermartingalen folgt die L^1-Beschränktheit aus $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{EX_n^-\} < \infty$, also z.B. falls $X_n \geq 0$.

[1] $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{F}_n)$

Beispiel 9.1 (Verzweigungsprozesse)
Es sei $\{Y_{nk} \,|\, n,k \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von unabhängigen und identisch verteilten $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariablen.

$$P_j := P(Y_{nk} = j) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

Sei (Z_n) definiert durch

$$Z_1 := 1,\ Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{nk} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \mu := \sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$$

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(\{Y_{mk} \mid k \in \mathbb{N},\ m \leq n-1\})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
E\left[Z_{n+1} \,|\, \mathfrak{F}_n\right] &= E\left[\sum_{k=1}^{Z_n} Y_{nk} \,|\, \mathfrak{F}_n\right] \\
&= E\left[\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{l} Y_{nk}\right) \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \,|\, \mathfrak{F}_n\right] \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{E\left[\sum_{k=1}^{l} Y_{nk} \,|\, \mathfrak{F}_n\right]}_{=E\left[\sum_{k=1}^{l} Y_{nk}\right]} \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \mu \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} = \mu \cdot Z_n
\end{aligned}$$

Sei $X_n := \frac{Z_n}{\mu^n} \implies (X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal.
Insbesondere gilt:

$$EZ_n = \mu^n \cdot EX_n = \mu^n EX_1 = \mu^{n-1} EZ_1 = \mu^{n-1} \quad (*)$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist L^1-beschränkt, da $E|X_n| = EX_n = \frac{1}{\mu} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$\xRightarrow{\text{Satz 9.1}}$ $\exists X_\infty$ mit $X_n \to X_\infty$ $P-$f.s. .
Falls $\mu < 1$: $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $P(Z_n \geq \epsilon) \to 0$ $(n \to \infty)$ $\implies X_\infty \equiv 0$
Falls $\mu = 1$: X_n ganzzahlig $\implies$ Folge irgendwann konstant. Wenn $P_1 \neq 1 \implies X_\infty \equiv 0$
Falls $\mu > 1$: X_∞ ist nicht degeneriert. $P(X_\infty = 0)$ ist Lösung von $g(z) = z$, wobei g erzeugende Funktion von Y ist.

Stichwortverzeichnis