15. Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Dgl.Systeme 1. Ordnung

Stets in diesem Paragraphen: $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}, (x_0, y_0) \in D$ und $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^m$ und $f = (f_1, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.
Ein **System von Dgl. 1. Ordnung** hat die Form:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_m) \\ y_2' = f_2(x, y_1, ..., y_m) \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, ..., y_m) \end{cases}$$

Setzt man $y = (y_1, ..., y_m)$, so schreibt sich das System in der Form $y' = f(x, y)$. Wir betrachten auch noch das AWP (A) $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
Wir übertragen die Sätze aus den Paragraphen 12 und 13 auf Systeme. Die Beweise dort lassen sich fast wörtlich für Systeme wiederholen. (beachte 14.2) ($\|\cdot\|$ anstatt $|\cdot|$).

Satz 15.1 (Peano)

(1) Sei $D = I \times \mathbb{R}^m$ und $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^m$ und $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ sei beschränkt. Dann hat das AWP (A) eine Lösung auf I.

(2) Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^m, s > 0$ und $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} | ||y - y_0|| < s\}$. Es sei $f \in C(D, \mathbb{R}^m), M := \max\{||f(x, y)|| : (x, y) \in D\}$ und $J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$. Dann hat das AWP (A) eine Lösung auf J.

(3) Sei D offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$. Dann ex. eine Lösung $y : K \to \mathbb{R}^m$ von (A) mit $x_0 \in K$ und $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Definition

(1) f **genügt auf** D **einer Lipschitzbedingung (LB) bzgl.** y **:** $\Longleftrightarrow$
$\exists\, \gamma \geq 0 : ||f(x, y) - f(x, \overline{y})|| \leq \gamma ||y - \overline{y}||\ \forall (x, y), (x, \overline{y}) \in D \quad (*)$

(2) Sei D offen. f **genügt auf** D **einer lokalen LB bzgl.** $y :\Longleftrightarrow \forall (x_0, y_0) \in D\ \exists$ Umgebung U von (x_0, y_0) mit: $U \subseteq D$ und f genügt auf U einer LB bzgl. y.

Satz 15.2 (Picard-Lindelöf)

(1) I, x_0, y_0, D seien wie in 15.1(1) und $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ genüge auf D einer LB bzgl. y. Dann hat das AWP (A) auf I genau eine Lösung. Ist $y^{[0]} \in C(I, \mathbb{R}^m)$ beliebig und

setzt man $y^{[n+1]}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y^{[n]}(t))dt$ $(x \in I, n \in \mathbb{N})$. Dann konvergiert $(y^{[n]})$ auf I glm. gegen die Lösung von (A).

(2) I, x_0, y_0, D, s, M und J seien wie in 15.1(2) und $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ genüge auf D eine LB bzgl. y. Dann hat (A) auf J genau eine Lsg.

(3) Es sei D offen, f genüge auf D einer lokalen LB bzgl. y. Dann ist das AWP (A) eindeutig lösbar.