

3 Kohomologie von Garben

§9 \mathcal{O}_X -Modulgarben

Definition 3.9.1

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein lokal geringter Raum, \mathcal{F} eine Garbe von abelschen Gruppen auf X . \mathcal{F} heißt \mathcal{O}_X -**Modulgarbe**, wenn gilt:

- (i) Für jedes offene $U \subseteq X$ ist $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul
- (ii) Für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$ ein $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulhomomorphismus, wobei $\mathcal{F}(U')$ durch den Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$ zum $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul wird.

Bemerkung 3.9.2

Die \mathcal{O}_X -Modulgarben bilden mit den \mathcal{O}_X -linearen Abbildungen eine Kategorie $\underline{\mathcal{O}_X - Mod}$.

Beispiele

Sei X eine nichtsinguläre Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $D = \sum_{P \in X} n_P P$ ein Divisor auf X .

Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D)(U) &:= \{f \in k(X) : \operatorname{div} f|_U + D|_U \geq 0\} \\ &= \{f \in k(X) : \forall P \in U : \operatorname{ord}_P(f) + n_P \geq 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(D)$ ist eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe, denn $\operatorname{div}(f \cdot g) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$.

Definition + Bemerkung 3.9.3

Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} \mathcal{O}_X -Modulgarben.

- (a) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ sei die zu $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe.
- (b) Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sind \mathcal{O}_X -Modulgarben.

Definition + Bemerkung 3.9.4

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von lokalgeringten Räumen.

- (a) Für jede \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} ist $f_*\mathcal{F}$ eine \mathcal{O}_Y -Modulgarbe auf Y .
- (b) Für jede \mathcal{O}_Y -Modulgarbe \mathcal{G} ist $f^*\mathcal{G}$ eine $f^*\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe und

$$f^*\mathcal{G} := f^*\mathcal{G} \otimes_{f^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

Beweis (a) Für offenes $U \subseteq Y$ ist $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ ein $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ -Modul. $f_U^\#$ ist ein Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Dadurch wird $f_*\mathcal{F}(U)$ zu einem $\mathcal{O}_Y(U)$ -Modul.

- (b) Den Garbenhomomorphismus $f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_X$ erhält man aus $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$

$$f^{-1}(f^\#) : f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow f^*f_*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$$

den hinteren Morphismus liefert 1.1.16 (d). □

§10 Quasikohärente \mathcal{O}_X -Modulgarben

Definition + Bemerkung 3.10.1

Sei $X = \text{Spec } R$ ein affines Schema, M ein R -Modul. Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\widetilde{M}(U) := \{s : U \rightarrow \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} : \text{für jedes } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es eine Umgebung } U_{\mathfrak{p}} \text{ und Elemente } m_{\mathfrak{p}} \in M, f_{\mathfrak{p}} \in R - \mathfrak{p}, \text{ sodass}\}$$

$$\text{für alle } \mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}} \text{ gilt: } s(\mathfrak{q}) = \frac{m_{\mathfrak{p}}}{f_{\mathfrak{p}}} \in M_{\mathfrak{p}}\}$$

wobei $M_{\mathfrak{p}} = M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Proposition 3.10.2

Seien $X = \text{Spec } R, M, \widetilde{M}$ wie in 10.1.

- (a) Für jedes $\mathfrak{p} \in X$ ist $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$.
- (b) Für jedes $f \in R$ ist $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$ (insbesondere $\widetilde{M}(X) \cong M$).

Beweis Wie für \mathcal{O}_X . □

Bemerkung 3.10.3

$M \mapsto \widetilde{M}$ ist ein exakter, volltreuer Funktor $R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$, denn:

Lokalisieren ist exakt, da $R_{\mathfrak{p}}$ flacher R -Modul ist (was Tensorieren exakt macht).

Bemerkung 3.10.4

- (a) $\widetilde{M \otimes_R N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$
- (b) $\widetilde{\bigotimes_i M_i} \cong \bigotimes_i \widetilde{M_i}$

Beweis (a) $(M \otimes_R N) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (N \otimes_R R_{\mathfrak{p}})$ □

Bemerkung 3.10.5

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus, $X = \text{Spec } R, Y = \text{Spec } R', \alpha : R' \rightarrow R$ der zugehörige Ringhomomorphismus.

- (a) Für jeden R -Modul M ist $f_* \widetilde{M} \cong \widetilde{\alpha M}$ (αM sei M aufgefasst als R' -Modul über α).
- (b) Für jeden R' -Modul N ist $f^* \widetilde{N} = \widetilde{N \otimes_{R'} R}$

Beweis (a)

$$\begin{aligned} f_* \widetilde{M}(U) &= \widetilde{M}(f^{-1}(U)) \text{ als } \mathcal{O}_Y(U)\text{-Modul} \\ &= \widetilde{\alpha M}(U) \end{aligned}$$

$$(b) \quad f^* \widetilde{N}(X) = (f^{-1} \widetilde{N} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(X) = N \otimes_{R'} R \quad \square$$

Definition 3.10.6

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema, \mathcal{F} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

- (a) \mathcal{F} heißt **quasi-kohärent**, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \text{Spec } R_i)_{i \in I}$ von X und R_i -Moduln M_i gibt, sodass

$$\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$$

für alle $i \in I$ gilt.

(b) \mathcal{F} heißt **kohärent**, wenn in (a) jedes M_i endlich erzeugbarer R_i -Modul ist.

Proposition 3.10.7

Eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} auf einem Schema X ist genau dann quasi-kohärent, wenn für jedes offene affine $U = \text{Spec } R \subseteq X$ ein R -Modul M existiert mit $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$.

Beweis 1. Schritt: Sei X affin, denn:

Sei $U = \text{Spec } R \subseteq X$ offen und affin, $(U_i = \text{Spec } R_i)$ die gegebene Überdeckung von X . $(U \cap U_i)$ ist eine offene Überdeckung von U . Überdecke $U \cap U_i$ durch $D(f_{ij}), f_{ij} \in R_i$. Dann gilt:

$$\mathcal{F}|_{D(f_{ij})} = (\mathcal{F}|_U)|_{D(f_{ij})} = \widetilde{M}_i|_{D(f_{ij})} = \widetilde{(\widetilde{M}_i)_{f_{ij}}}$$

2. Schritt: FEHLT NOCH

□