

## § 17.

# Normierte Räume, Banachräume, Fixpunktsatz

In diesem Paragraphen sei  $\mathbb{K}$  stets gleich  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und sei  $X$  ein Vektorraum (VR) über  $\mathbb{K}$ .

### Definition

Eine Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt genau dann eine **Norm** auf  $X$ , wenn folgendes erfüllt ist:

- (1)  $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (2)  $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- (3)  $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

In diesem Fall heißt  $(X, \|\cdot\|)$  ein **normierter Raum** (NR).

### Beispiele:

- (1) Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X = \mathbb{K}^n$  und für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  die **euklidische Norm** gegeben:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

Dann ist  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$  ein normierter Raum (vgl. §1).

- (2) Sei  $X = C[a, b]$  und für  $f \in X$  seien die folgenden Normen gegeben:

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &:= \int_a^b |f(x)| \, dx \\ \|f\|_2 &:= \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx} \\ \|f\|_\infty &:= \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}\end{aligned}$$

Leichte Übung:  $(X, \|\cdot\|_1)$ ,  $(X, \|\cdot\|_2)$  und  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  sind NRe.

- (3) Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt,  $X := C(K, \mathbb{R}^m)$  und sei für  $f \in X$  die Norm

$$\|f\|_\infty := \max\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

Leichte Übung:  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  ist ein NR.

Für den Rest dieses Paragraphen sei  $X$  stets ein NR mit Norm  $\|\cdot\|$ .

**Bemerkung:** Wie in §1 zeigt man die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in X : |||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|$$

**Definition**

- (1) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $X$ .  $(x_n)$  heißt genau dann **konvergent**, wenn ein  $x_0 \in X$  existiert für das gilt:

$$\|x_n - x_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

In diesem Fall ist  $x_0$  eindeutig bestimmt und man schreibt  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  $x_0$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** von  $(x_n)$ .

- (2)  $(x_n)$  heißt genau dann **divergent**, wenn  $(x_n)$  nicht konvergent ist.

- (3)  $(x_n)$  heißt genau dann eine **Cauchyfolge** (CF), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

- (4) Sei  $x_0 \in X$  und  $\delta > 0$ . Definiere:

$$U_\delta(x) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \delta\}$$

- (5) Sei  $A \subseteq X$ .  $A$  heißt **offen**, genau dann wenn gilt:

$$\forall x \in A \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq A$$

$A$  heißt **abgeschlossen**, genau dann wenn  $X \setminus A$  offen ist.

**Satz 17.1 (Eigenschaften von Folgen in normierten Räumen)**

Seien  $(x_n), (y_n)$  Folgen in  $X$ ,  $(\alpha_n)$  Folge in  $\mathbb{K}$ ,  $x, y \in X$  und  $A \subseteq X$ .

- (1) Gilt  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  und  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{K}$ , so folgt:

$$x_n + y_n \rightarrow x + y \qquad \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x \qquad \|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

D.h. die Addition und Skalarmultiplikation sind stetig.

- (2) Ist  $(x_n)$  konvergent, so ist  $(x_n)$  **beschränkt**, d.h.:

$$\exists c \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq c$$

und  $(x_n)$  ist eine CF.

- (3) Genau dann wenn  $A$  abgeschlossen ist, gilt für jede konvergente Folge  $(x_n)$  in  $A$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$$

- (4) Sei  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  wie in obigem Beispiel (3). Dann gilt für  $(f_n)$  in  $X$  und  $f \in X$ , dass  $(f_n)$  genau dann auf  $K$  **gleichmäßig** gegen  $f$  **konvergiert**, wenn gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$: \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall x \in K$$

### Beweis

(1) Wie im  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Wie im  $\mathbb{R}^n$ .

(3) Wie im  $\mathbb{R}^n$ .

(4) **In der großen Übung.** ■

### Beispiel

Sei  $X = C[-1, 1]$  mit  $\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx}$ . Definiere die Folge  $(f_n)$  wie folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & , -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist klar, dass  $f_n \in X$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . In den **großen Übungen** wird gezeigt:

(1)  $(f_n)$  ist eine CF in  $X$ .

(2) Es existiert **kein**  $f \in X$  mit  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$

### Definition

$X$  heißt ein **Banachraum** oder **vollständig**, genau dann wenn jede CF in  $X$  einen Grenzwert in  $X$  hat.

### Beispiele:

(1) Sei  $X = \mathbb{K}^n$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ . Dann folgt aus §2, dass  $(X, \|\cdot\|_2)$  ein BR ist.

(2) Sei  $X = C[-1, 1]$ ,  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx}$ . Dann ist  $(X, \|\cdot\|_2)$  **kein** BR.

(3) Sei  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  wie in 17.1(4). In den **großen Übungen** wird gezeigt, dass  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  ein BR ist.

### Satz 17.2 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein BR,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  sei abgeschlossen und es sei  $F : A \rightarrow X$  eine Abbildung mit:

(i)  $F(A) \subseteq A$

(ii)  $F$  ist eine **Kontraktion**, d.h.:

$$\exists L \in [0, 1) : \forall x, y \in A : \|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

Dann existiert genau ein  $x^* \in A$  mit  $F(x^*) = x^*$ .

Ist  $x_0 \in A$  beliebig und  $(x_n)$  definiert durch  $x_{n+1} := F(x_n)$  ( $n \geq 0$ ), so ist  $x_n \in A$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und es gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*$$

Weiter gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1 - L} \|x_1 - x_0\|$$

Diese Folge heißt Folge der **sukzessiven Approximationen**.

**Beweis**

Sei  $x_0 \in A$  und  $(x_n)$  wie oben definiert. Es gilt:

$$\|x_2 - x_1\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Induktiv lässt sich zeigen:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Seien nun  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m > n$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq L^{m-1}\|x_1 - x_0\| + \dots + L^n\|x_1 - x_0\| \\ &= (L^{m-1} + \dots + L^n) \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &= L^n(1 + \dots + L^{m-n-1}) \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &\leq L^n \left( \sum_{j=0}^{\infty} L^j \right) \cdot \|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Also ist  $(x_n)$  eine CF. Da  $X$  außerdem  $BR$  ist, existiert ein  $x^* \in X$  mit  $x_n \rightarrow x^*$ . Wegen  $(x_n) \subseteq A$  und  $A$  abgeschlossen ist außerdem  $x^* \in A$ .

Festes  $n$  und  $m \rightarrow \infty$  liefert aus obiger Gleichung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

Für  $F(x^*)$  gilt also:

$$\begin{aligned} \|F(x^*) - x^*\| &= \|F(x^*) - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*\| \\ &\leq \|F(x^*) - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\ &= \|F(x^*) - F(x_n)\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\ &\leq L\|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|F(x^*) - x^*\| = 0 \iff F(x^*) = x^*$$

Sei nun  $z \in A$  und  $F(z) = z$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x^* - z\| &= \|F(x^*) - F(z)\| \leq L\|x^* - z\| \\ \implies (1-L)\|x^* - z\| &\leq 0 \\ \implies x^* &= z \end{aligned}$$

Also ist  $x^*$  eindeutig. ■