

1. Mannigfaltigkeiten

1.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Erinnerung (LA/Analysis)

Euklidischer Raum	$\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle$
Norm	$\ a\ := \sqrt{\langle a, a \rangle}$
Metrik	$d(a, b) := \ a - b\ $
Winkel	$\cos \angle(a, b) := \frac{\langle a, b \rangle}{\ a\ \cdot \ b\ }$

Die Funktion $f : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt (oder C^∞) falls in jedem Punkt $p \in U$ alle gemischten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.¹

Die C^∞ -Funktion

$$u^i : \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ p = (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i = u^i(p) \end{array}$$

heißt i -te Koordinatenfunktion ($i = 1, \dots, n$). Eine Abbildung $\phi : U(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt glatt falls jede der reellen Funktionen $u^i \circ \phi$ glatt ist ($i = 1, \dots, n$).

Karten und Atlanten

Sei M ein topologischer Raum, der hausdorff'sch ist und eine abzählbare Basis hat.

Ein Koordinatensystem (oder Karte) in M ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : U(\overset{\circ}{\subset} M) \rightarrow \varphi(U)(\overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n)$$

Schreibt man $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, dann heißen die Funktionen $x^i := u^i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ Koordinatenfunktionen von φ . n heißt Dimension von (φ, U) .

Ein n -dimensionaler, differenzierbarer Atlas für M ist eine Kollektion \mathcal{A} von n -dimensionalen Karten von M . Es gilt:

- (A1) Jeder Punkt von M liegt im Definitionsbereich mindestens einer Karte, d.h. M ist lokal euklidisch.
- (A2) Alle zu \mathcal{A} gehörigen Kartenwechsel sind glatt, das heißt: Sind die Karten $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ und $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ in \mathcal{A} und $V \cap U \neq \emptyset$, so sind $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ sowie $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$, genannt Kartenwechsel, glatt.

¹ $A \overset{\circ}{\subset} B := A$ offen und $A \subset B$

1. Mannigfaltigkeiten

Eine Karte ψ von M heißt mit \mathcal{A} verträglich, wenn auch $\mathcal{A} \cup \{\psi\}$ ein differenzierbarer Atlas für M ist.

\mathcal{A} ist vollständig (oder maximal) wenn jede mit \mathcal{A} verträgliche Karte zu \mathcal{A} gehört.

Definition

Eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis versehen mit einem vollständigen differenzierbaren n -dimensionalen Atlas.

Beispiele

- (1) \mathbb{R}^n : $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$ ist ein Atlas. Durch Erweiterung zu einem vollständigen Atlas \mathcal{A} erhalten wir die standard-differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n .

Bemerkung: Auf \mathbb{R}^n , $n \neq 4$, existiert bis auf Diffeomorphismus genau eine differenzierbare Struktur. Auf \mathbb{R}^4 existieren weitere, „exotische“ differenzierbare Strukturen.

- (2) Die Sphären $S^n := \{p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\}$. Wir behaupten: S^n ist eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Als Topologie wählen wir die Teilmengen-Topologie, d.h. $U \subset S^n$ offen $\iff \exists U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, so dass $U = S^n \cap U'$. Daher folgt auch, dass die Sphären auch hausdorff'sch sind und eine abzählbare Basis haben.

Seien U_i^+ bzw. U_i^- die offenen Hemisphären, definiert durch

$$\begin{aligned} U_i^+ &:= \{p \in S^n \mid p_i > 0\} \\ U_i^- &:= \{p \in S^n \mid p_i < 0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Projektion in Richtung i -te Koordinaten-Achse) für $i = 1, \dots, n+1$ mit

$$\varphi_i^\pm(p) := (u^1(p), \dots, u^{i-1}(p), u^{i+1}(p), \dots, u^{n+1}(p))$$

sind Karten mit glatten (C^∞) Kartenwechsel, was wir am Beispiel $n = 2$ überprüfen:

$$(u^1, u^2) \xrightarrow{(\varphi_3^+)^{-1}} (u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}) \xrightarrow{\varphi_1^+} (u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}) \quad ((u^1)^2 + (u^2)^2 < 1)$$

- (3) Kurven und Flächen in \mathbb{R}^3 sind 1- bzw. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten

- (4a) Der n -dimensionale reell-projektiver Raum $P^n\mathbb{R}$

Definition

Auf $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betrachte die Äquivalenz-Relation

$$x \sim y \iff \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0, y = tx, \text{ also } (y^1, \dots, y^n) = (tx^1, \dots, tx^{n+1})$$

Die Äquivalenzklassen sind also Geraden durch den Ursprung. Nun definieren wir:

$$P^n\mathbb{R} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

Wir behaupten nun dass $P^n\mathbb{R}$ eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Die Topologie erhalten wir aus dem topologischen Raum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ über die Quotienten-Topologie, für die wir die surjektive Abbildung π verwenden:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow P^n\mathbb{R} \\ x &\mapsto [x]_{\sim} \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Quotiententopologie ist allgemein:

$$U \subset X / \sim \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subset X \text{ offen}$$

Um zu zeigen, dass $P^n\mathbb{R}$ eine abzählbare Basis hat, genügt es nach Lemma 1 des verteilten Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“ zu zeigen, dass $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n\mathbb{R}$ offen ist. (π ist offen wenn π -Bilder offener Mengen offen sind.) Dazu betrachten wir die Streckung $\alpha_t : X \rightarrow X; x \mapsto tx$ ($t \neq 0$). α_t ist ein Homöomorphismus mit $\alpha_t^{-1} = \alpha_{\frac{1}{t}}$.

Sei nun $U \subset X$ offen, so ist $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \neq 0} \alpha_t(U)$. Da jedes $\alpha_t(U)$ offen ist, ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen. Nach der Definition der Quotiententopologie also ist $\pi(U)$ offen.

Weiter müssen wir zeigen, dass $P^n\mathbb{R}$ hausdorff'sch ist. Anschaulich heißt das, um zwei „Geraden“ $[x]$ und $[y]$ je einen offenen „Kegel“ zu finden, welche disjunkt sind. Wir zeigen dies über das Lemma 2 des Blattes „Einige Grundbegriffe der Topologie“, wozu wir zeigen müssen: $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ ist abgeschlossen.

Die Idee ist, auf $X \times X \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ die reelle Funktion f zu betrachten:

$$f(x, y) = f(x^1, \dots, x^{n+1}, y^1, \dots, y^{n+1}) := \sum_{i \neq j} |x^i y^j - x^j y^i|$$

f ist stetig und $f(x, y) = 0 \iff y = tx$ für ein $t \neq 0 \iff x \sim y$. Also ist $R = f^{-1}(\{0\})$. Da f stetig ist, ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen, also ist R abgeschlossen. Damit ist gezeigt, dass X / \sim hausdorff'sch ist.

Also ist $P^n\mathbb{R}$ ein topologischer Raum mit den gewünschten Eigenschaften. Es bleibt zu zeigen, dass für diese Menge ein vollständiger Atlas existiert.

Wir definieren also $n+1$ Karten (U_i, φ_i) ($i = 1, \dots, n+1$). Es ist $\bar{U}_i := \{x \in X \mid x^i \neq 0\}$ und $U_i := \pi(\bar{U}_i) \subset P^n\mathbb{R}$. Damit ist $P^n\mathbb{R}$ abgedeckt ($\bigcup_{i=1, \dots, n+1} U_i = P^n\mathbb{R}$). Weiter ist:

$$\begin{aligned} U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi_i : [x] &\mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^n}{x^i} \right) \end{aligned}$$

Diese Definition ist representanten-unabhängig und injektiv:

$$\begin{aligned} \varphi_i([x]) = \varphi_i([y]) &\implies \frac{y^1}{y^i} = \frac{x^1}{x^i} =: t \\ &\implies y^1 = tx^1 \\ &\implies y = tx \\ &\implies [y] = [x] \end{aligned}$$

Auch ist φ_i stetig, und surjektiv: $\varphi_i^{-1}(z^1, \dots, z^n) = \pi(z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \dots, z^n)$.

Die Koordinatenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sind affin, also C^∞ (Übungsaufgabe).

Diese Karten lassen sich zu einem vollständigen Atlas für $P^n\mathbb{R}$ erweitern, also liegt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit vor.

1. Mannigfaltigkeiten

- (4b) $P^n\mathbb{C}$ ist eine $2n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, was sich ähnlich zeigen lässt. Die doppelte Dimension kommt von der 2-dimensionalität von \mathbb{C} .
- (5) Wir wollen aus gegebenen Mannigfaltigkeiten neue Mannigfaltigkeiten erhalten.

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit vollständigem Atlas \mathcal{A} . Sei \mathcal{A}' die Menge aller Koordinatensysteme mit Definitionsbereich in einer offenen Teilmenge $O \subset M$. \mathcal{A}' ist ein Atlas für O . Die entsprechende differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt offene Untermannigfaltigkeit.

Beispiel

Die allgemeine lineare Gruppe

$$GL_n\mathbb{R} := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

ist eine n^2 -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit: $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathbb{R}^{n^2}$ ist eine n^2 -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $GL_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{\det A = 0\}$ ist offen, da die Determinantenfunktion stetig ist, also $\{\det A = 0\}$ abgeschlossen ist.

- (6) Die Produkt-Mannigfaltigkeit: Sind M^m und N^n m - bzw. n -dimensionale Mannigfaltigkeiten, so ist das topologische Produkt $M \times N$ eine $(n+m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Atlas besteht aus den Karten $\varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+m}$ für Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N .

Beispiel

(S^1 ist der Einheitskreis im \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} \\ \mathbb{T}^n &= \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{-dimensionaler Torus}} \end{aligned}$$

- (7) Eine Lie-Gruppe G ist eine Gruppe die zugleich eine Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt und zwar so, dass die Gruppenoperationen i und m differenzierbare Abbildungen (siehe nächster Abschnitt) sind.

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G, & m(g_1, g_2) &= g_1 g_2 \\ i : G &\rightarrow G, & i(g) &= g^{-1} \end{aligned}$$

Beispiele

- (i) Die eindimensionalen Gruppen $GL_n\mathbb{R}$, $GL_1\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und (\mathbb{R}^+, \cdot)
- (ii) Die null-dimensionale Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.
- (iii) Die spezielle Orthogonale Gruppe

$$SO(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

welche homöomorph zu S^1 ist.

- (iv) Die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \right\}$$

welche homöomorph zu S^3 ist.

1.2. Differenzierbare Abbildungen

Definition (differenzierbare Abbildung)

Eine Abbildung $f : M^m \rightarrow N^n$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt differenzierbar (oder glatt) im Punkt $p \in M$ falls für eine (und damit jede) Karte $\varphi : U \rightarrow U' = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ um p und $\psi : V \rightarrow V' = \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ mit $f(U) \subset V$ die Darstellung von f in lokalen Koordinaten $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow V'$ glatt (oder C^∞) ist.

Die Unabhängigkeit der Aussage von der Wahl der Karte folgt aus der Definition des Atlases. Seien $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ andere Karten um p bzw. $f(p)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} &= \tilde{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \tilde{\varphi}^{-1} \\ &= \underbrace{(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})}_{C^\infty, \text{ da Kartenwechsel}} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \underbrace{(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}_{C^\infty, \text{ da Kartenwechsel}} \end{aligned}$$

Also $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ ist $C^\infty \iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist C^∞ .

Spezialfälle sind:

- Falls $n = 1$ heißt $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion
- Falls $m = 1$ heißt $f : \mathbb{R} \rightarrow N$ heißt differenzierbare Kurve

Definition

$C^\infty(M)$ ist die Menge aller C^∞ -Funktionen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M .

Bemerkung: $C^\infty(M)$ ist eine \mathbb{R} -Algebra bezüglich Addition, Multiplikation, skalare Multiplikation: ($p \in M, \lambda \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} (f + g)(p) &:= f(p) + g(p) \\ (f \cdot g)(p) &:= f(p) \cdot g(p) \\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p) \end{aligned}$$

Definition (Diffeomorphismus)

Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt Diffeomorphismus falls f bijektiv und f sowie f^{-1} glatt sind.

Beispiele

- (1) Identität auf M
- (2) Kartenwechsel

Die Menge $\text{Diff}(M)$ aller (Selbst-)Diffeomorphismen von M bilden eine Gruppe.

☠ Ein differenzierbarer Homöomorphismus ist im allgemeinen **kein** Diffeomorphismus! So ist etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ein differenzierbarer Homöomorphismus, aber $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist zwar stetig aber nicht glatt.

1.3. Tangentialvektoren und -räume

Erinnerung

$v \in T_p \mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ und $f : U(p) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei C^∞ . Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung v :

$$\partial_v f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv)$$

Für $v = e_i$ erhält man die i -te partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{e_i} f$$

Es gilt: $(a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$

$$\begin{aligned} \partial_v(af + bg) &= a\partial_v f + b\partial_v g \\ \partial_v(f \cdot g) &= f(p) \cdot \partial_v g + g(p) \cdot \partial_v f \end{aligned}$$

Definition (Funktionskeim)

Zwei Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$, die auf offenen Umgebungen von $p \in M$ differenzierbar sind, heißen äquivalent, falls sie auf einer Umgebung übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen heißen Funktionskeime in $p \in M$. Die Menge aller Funktionskeime in p schreiben wir als $C^\infty(p)$.

Definition (Tangentialvektor)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Tangentialvektor an M in p ist eine Funktion $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ so dass gilt: $(a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(p))$

(T1) v ist \mathbb{R} -linear: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$

(T2) Leibniz-Regel: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

Sei $T_p M$ die Menge aller Tangentialvektoren von M im Punkt p

Beispiel

$$v(f) := 0$$

Wie rechnet man mit Funktionskeimen? Praktisch genügt es mit Repräsentanten, also in p differenzierbaren Funktionen zu rechnen.

Lemma 1.1

- a) $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle (T1) und (T2) für Funktionen, die in p differenzierbar sind. Falls f und g in einer Umgebung von p übereinstimmen (d.h. $f \sim g \iff [f] = [g]$) so ist $v(f) = v(g)$. Also insbesondere: $\tilde{v}([f]) := v(f)$.
- b) Falls h in einer Umgebung von p konstant ist, so ist $v(h) = 0$.

Beweis

- a) Da v linear ist, genügt es zu zeigen: Falls $f = 0$ in einer Umgebung U von p , so ist $v(f) = 0$. Dazu betrachte die „Abschneidefunktion“ \tilde{g} mit

- (1) Träger von $\tilde{g} := \{q \in M \mid \tilde{g}(q) \neq 0\} \subset U$
- (2) $0 \leq \tilde{g} \leq 1$ auf M
- (3) $\tilde{g} = 1$ in einer Umgebung V von p , $V \subset U$.

Es ist dann $f\tilde{g} = 0$ auf M . Nun folgt aus den Axiomen (T1) und (T2) dass wegen $v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0)$ gilt: $v(0) = 0$. Somit ist

$$0 = v(0) = v(f\tilde{g}) \stackrel{(T2)}{=} v(f) \underbrace{\tilde{g}(p)}_{=1} + \underbrace{f(p)}_{=0} v(\tilde{g}) = v(f).$$

- b) Nach a) können wir annehmen dass h konstant c auf M ist. Es ist dann $v(h) = v(c \cdot 1) = c \cdot v(1)$. Aus $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1)$ folgt $v(1) = 0$ und damit die Behauptung. ■

$T_p M$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum: ($v, w \in T_p M$, $f \in C^\infty(p)$, $a \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} (v + w)(f) &:= v(f) + w(f) \\ (a \cdot v)(f) &:= a \cdot v(f) \end{aligned}$$

Weitere Beispiele von Tangentialvektoren via Karten:

Sei $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ ein Koordinatensystem (eine Karte) von M im Punkt p . (d.h. $x^i = u^i \circ \varphi$). Für $f \in C^\infty(p)$ setze:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : C^\infty p \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

ist ein Tangentialvektor in p .

Satz 1.1 (Basis-Satz)

Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ eine Karte um $p \in M$. Dann bilden die Tangentialvektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$, $i = 1, \dots, n$, eine Basis von $T_p M$ und es gilt für alle $v \in T_p M$:

$$v = \sum_{i=1}^m v(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

Inbesondere ist $\dim T_p M = m = \dim M$.

Für diesen Satz benötigen wir noch das

Lemma 1.2 (Analysis)

Sei g eine C^∞ -Funktion in einer bezüglich o sternförmigen offenen Umgebung von $o \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $g = g(0) + \sum_{j=1}^n u^j g_j$ für C^∞ -Funktionen g_j , $j = 1, \dots, n$.

Beweis (Lemma 1.2)

Taylorintegralformel:

$$g(u) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tu) dt = \sum_{j=1}^n u^j \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^j}(tu) dt$$

■

Beweis (Satz 1.1)

- (a) $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ist ein Tangentialvektor in p . (Rechnung hier ausgelassen) und für die k -te Koordinatensystem $x^k := u^k \circ \varphi$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^k) = \frac{\partial (x^k \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \frac{\partial u^k}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \delta_{ik}.$$

- (b) Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, $i = 1, \dots, n$, sind linear unabhängig: Sei

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

Dann ist für $k = 1, \dots, m$:

$$0 = 0(x^k) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^k)}_{\delta_{ik}} = \lambda_k$$

- (c) Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, $i = 1, \dots, n$, bilden ein Erzeugendensystem. Ohne Einschränkung gelte $\varphi(p) = 0$ (*). Sei $v \in T_p M$ und $a_k := v(x^k)$, $k = 1, \dots, m$. Setze

$$w := v - \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \in T_p M.$$

Dann ist für alle $k = 1, \dots, m$:

$$w(x^k) = v(x^k) - \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^k) = a_k - \sum_{i=1}^m a_i \delta_{ik} = 0 \quad (**)$$

Nun wollen wir zeigen: $w = 0$, d.h. $w(f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(p)$. Sei $f \in C^\infty(p)$. Dann

ist $g := f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(p))$.

$$\begin{aligned}
 w(f) &= w(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \\
 &= w(g \circ \varphi) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 1.2}}{=} w(g(0) + \sum_{j=1}^m (u^j \circ \varphi) \cdot (g_j \circ \varphi)) \\
 &\stackrel{(\text{T1}), (\text{T2})}{=} 0 + \sum_{j=1}^m \underbrace{w(x^j)}_{\stackrel{(**)}{=} 0} \cdot (g_j \circ \varphi)(p) + \underbrace{x^j(p)}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \cdot w(g_j \circ \varphi) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

1.4. Tangentialabbildungen

In diesem Abschnitt verwendete Notation: $\Phi : M \rightarrow N$ differenzierbar, $f \in C^\infty(M)$ oder $f \in C^\infty(p)$, $\varphi : U \rightarrow U'$ eine Karte.

Sei $\Phi : M^m \rightarrow N^n$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das Ziel ist Φ in jedem Punkt von $p \in M$ durch lineare Abbildungen $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ zu „approximieren“.

Definition

Das Differential (oder die Tangentialabbildung) von Φ in p ist: $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ mit $d\Phi_p(v) : C^\infty(\Phi(p)) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d\Phi_p(v)(f) := v(f \circ \Phi).$$

Nun ist zu zeigen dass $d\Phi_p(v) \in T_{\Phi(p)} N$:

(T1)

$$\begin{aligned}
 d\Phi_p(v)(a \cdot f + b \cdot g) &= v((a \cdot f + b \cdot g) \circ \Phi) \\
 &= v(a \cdot f \circ \Phi + b \cdot g \circ \Phi) \\
 &= a \cdot v(f \circ \Phi) + b \cdot v(g \circ \Phi) \\
 &= a \cdot d\Phi_p(v)(f) + b \cdot d\Phi_p(v)(g)
 \end{aligned}$$

(T2)

$$\begin{aligned}
 d\Phi_p(v)(fg) &= v((fg) \circ \Phi) \\
 &= v((f \circ \Phi) \cdot (g \circ \Phi)) \\
 &= v(f \circ \Phi)(g \circ \Phi)(p) + v(g \circ \Phi)(f \circ \Phi)(p) \\
 &= d\Phi_p(v)(f) + \dots
 \end{aligned}$$

Beachte, dass aus der Definition direkt folgt: Ist $\Phi = \text{id}_M : M \rightarrow M$, $p \mapsto p$, so gilt $d\Phi_p(v) = d(\text{id})_p(v) = v$ für alle $v \in T_p M$.

Lemma 1.3

Sei $\Phi \in C^\infty(M, N)$, $\xi = (x^1, \dots, x^m)$ eine Karte um $p \in M$ und $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ eine Karte um $\Phi(p) \in N$. Dann gilt:

$$d\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ \Phi)}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\Phi(p)} \quad (*)$$

Beweis

Sei $w \in T_{\Phi(p)}N$ die linke Seite von (*). Dann gilt nach dem Basis-Satz (Satz 1.1) ist

$$w = \sum w(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\Phi(p)}.$$

Nach der Definition des Differentials ist

$$w(y^i) = d\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) (y^i) = \frac{\partial(y^j \circ \Phi)}{\partial x^i}(p).$$

■

Definition

Die Matrix

$$\left(\frac{\partial(y^j \circ \Phi)}{\partial x^j}(p) \right) = \left(\frac{\partial(y^j \circ \Phi \circ \xi^{-1})}{\partial u^j}(\xi(p)) \right) \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

heißt Jacobi-Matrix von Φ bezüglich ξ und η .

Lemma 1.4 (Kettenregel)

Falls $\Phi \in C^\infty(M, N)$ und $\Psi \in C^\infty(N, L)$, so gilt

$$d(\Psi \circ \Phi)_p = d\Psi_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p.$$

Beweis

Mit einer Testfunktion g überprüfen wir:

$$d(\Psi \circ \Phi)(v)(g) = v(g \circ \Psi \circ \Phi) = d\Phi(v)(g \circ \Psi) = d\Psi(d\Phi(v))(g)$$

■

Bemerkung: Falls $\Phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, so folgt wegen

$$\text{id} = d(\text{id})_p = d(\Phi \circ \Phi^{-1})|_p \stackrel{\text{Lemma 1.4}}{=} d\Phi_p \circ d\Phi_{\Phi(p)}^{-1}$$

dass

$$(d\Phi_p)^{-1} = d\Phi_{\Phi(p)}^{-1}.$$

Das heißt insbesondere, dass $d\Phi_p$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, und $\dim M = \dim N$.

Satz 1.2 (Inverser Funktionensatz für Mannigfaltigkeiten)

Ist $\Phi \in C^\infty(M, N)$ und $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ ein Vektorraum-Isomorphismus für ein Punkt $p \in M$, dann existiert eine Umgebung V von p und eine Umgebung W von $\Phi(p)$ so dass $\Phi|_V$ ein Diffeomorphismus von V auf $\Phi(V) = W$ ist. $\Phi|_V$ nennen wir einen lokalen Diffeomorphismus.

Beweis

Wähle eine Karte ξ um $p \in M$ und eine Karte η um $\Phi(p) \in N$. Nach dem Satz über inverse Funktionen (Analysis II) ist $\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}$ ein lokaler Diffeomorphismus (da $d(\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}) = d\eta \circ d\Phi \circ (d\xi)^{-1}$, was jeweils reguläre lineare Abbildungen sind). ■

1.5. Tangentialvektoren an Kurven

Die bisherige Herangehensweise an die Tangentialvektoren war sehr abstrakt, was Vor- und Nachteile hat. Ein weiterer Ansatz ist der Zugang über Kurven, den wir im Folgenden untersuchen.

Eine Kurve ist eine C^∞ -Abbildung $c : I \rightarrow M$, wobei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} (meist mit $0 \in I$) und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Die erste (und einzige) Koordinatenfunktion der trivialen Karte von $I \subset \mathbb{R}$ schreiben wir als $u := u^1$. Der Tangentialvektor ist dann $\frac{d}{du}|_t := \frac{\partial}{\partial u^1}|_t \in T_t I = T_t \mathbb{R}$.

Definition

Der Tangentialvektor an c in $c(t)$ ist

$$c'(t) := dc_t \left(\frac{d}{du} \Big|_t \right) \in T_{c(t)} M.$$

Diese Tangentialvektoren haben interessante Eigenschaften:

- (1) Für $f \in C^\infty(M)$ ist $c'(t)(f) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(t)$ (Richtungsableitung)
- (2) Falls $v \in T_p M$ und c eine Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$, dann gilt:

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$$

- (3) Ist $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve und $\Phi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, so ist $\Phi \circ c : I \rightarrow N$ eine glatte Kurve in N und es gilt dass

$$d\Phi_{c(t)}(c'(t)) = (\Phi \circ c)'(t)$$

Beweis

$$d\Phi(c')(f) = c'(f \circ \Phi) = \frac{d}{du}(f \circ \Phi \circ c)(t) = (\Phi \circ c)'(t)(f)$$

1. Mannigfaltigkeiten

- (4) Ist φ eine Karte um p und $c_i(t) : \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$, $i = 1, \dots, n$ die i -te Koordinatenline um p bezüglich φ , so gilt

$$c'_i(0) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (i = 1, \dots, n)$$

Beweis

Sei $f \in C^\infty(p)$.

$$\begin{aligned} c_i(p)(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ c_i)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i))(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

1.6. Untermannigfaltigkeiten und spezielle differenzierbare Abbildungen

Eine C^∞ -Abbildung $\Phi : M^m \rightarrow N^n$ heißt

- Immersion, falls $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ injektiv ist für alle $p \in M$.
- Submersion, falls $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ surjektiv ist für alle $p \in M$.
- Einbettung, Φ eine Immersion ist und M homöomorph zu $\Phi(M) \subset N$ (versehen mit der Teilraum-Topologie) ist.

Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt (reguläre) Untermannigfaltigkeit, falls die Inklusionsabbildung $i : M \hookrightarrow N$, $i(p) := p$, eine differenzierbare Einbettung ist.

Manchmal definiert man eine (allgemeine) Untermannigfaltigkeit als injektive Immersion $\Phi : M \rightarrow N$, so dass M und $\Phi(M)$ diffeomorph sind. Dabei hat $\Phi(M)$ nicht notwendigerweise die Teilraum-Topologie.

Beispiele

- (1) Immersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{k+l} \\ (x^1, \dots, x^k) &\mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Man kann zeigen: Lokal sieht jede Immersion so aus.

- (2) Submersion:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{k+l} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (x^1, \dots, x^{k+l}) &\mapsto (x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

Auch hier kann man zeigen, dass jede Submersion lokal so aussieht.

- (3) Die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, t^2)$ ist differenzierbar, aber keine Immersion, denn

$$c'(0) = dc_0\left(\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\neq 0}\right) = (0, 0).$$

- (4) Die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ ist eine Immersion, aber keine Einbettung.

- (5) \mathbb{R}^2 versehen mit der Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (u, v) \iff \begin{aligned} x &\equiv u \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \\ y &\equiv v \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ergibt den zweidimensionalen Torus $T^2 := \mathbb{R}^2 / \sim$. Wir betrachten nun die Kurve $c_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow T^2, t \mapsto (e^{it}, e^{i\alpha t})$.

Satz (Kronecker)

- $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$ geschlossene Kurve.
- $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q} \implies c_\alpha(\mathbb{R})$ dicht in \mathbb{R}^2

Beweis

Siehe V.I. Arnold: *Gewöhnliche Differenzialgleichungen* ■

Daraus folgt: Für $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ ist c_α eine injektive Immersion, aber keine Einbettung, da $c_\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ mit der Teilraumtopologie nicht homöomorph zu \mathbb{R} ist.

Bemerkungen: (1) Jede Immersion ist lokal eine Einbettung.

- (2) Einbettungs-Satz von Whitney (1936): Jede differenzierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeit kann in \mathbb{R}^{2n+1} eingebettet werden:

$$\Phi : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

(Beweis: L.Führer: *Topologie*)

1.7. Tangentialbündel und Vektorfelder

Satz 1.3 (Tangentialbündel)

Sei M eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}.$$

TM ist eine $2n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

TM heißt Tangentialbündel und ist ein Spezialfall eines Vektorraumbündels. In der Physik entspricht dies dem Phasenraum (Ort, Geschwindigkeit).

Beweis

(Skizze) Sei $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas für M . Ist $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, so gilt nach Basis-Satz (Satz 1.1), dass $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \mid i = 1, \dots, n\}$ eine Basis von $T_p M$ für alle $p \in U_\alpha$ ist. Für $v \in T_p M$ gilt also $v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Somit erhalten wir für jedes $\alpha \in A$ eine bijektive Abbildung

$$h_\alpha : \begin{aligned} V_\alpha &:= TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (p, v) &\mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v(x^1), \dots, v(x^n)) \end{aligned}$$

Ohne Beweis: $(V_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist ein differenzierbarer Atlas für TM . ■

Definition

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, TM das Tangentialbündel von M und $\pi : TM \rightarrow M$, $(p, v) \mapsto p$ die natürliche (oder kanonische) Projektion.

Ein Vektorfeld (VF) auf M ist eine Abbildung $V : M \rightarrow TM$, $p \mapsto v_p$ mit $\pi \circ V = \text{id}_M$, d.h. $v_p \in T_p M$.

Das Vektorfeld ist differenzierbar (C^∞ , glatt), falls $V : M \rightarrow TM$ eine differenzierbare Abbildung ist. Äquivalent dazu: Für alle $f \in C^\infty(M)$ ist $Vf \in C^\infty(M)$ mit $(Vf)(p) := v_p(f)$.

Wir definieren für $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$:

- $(f \cdot V)(p) := f(p)v_p$ sowie
- $(V + W)(p) := v_p + w_p$.

Damit ist $\mathcal{V}M$ (die Menge aller Vektorfelder auf M) ein $C^\infty(M)$ -Modul.

Die lokale Darstellung der Vektorfelder liefert uns Basisfelder: Sei $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ für $U \subset M$. Dann ist für $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \begin{aligned} U &\rightarrow TU \\ p &\mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \end{aligned}$$

ein Vektorfeld auf U , nämlich das i -te Koordinaten-Vektorfeld von φ oder „begleitendes n -Bein“

Nach dem Basissatz (Satz 1.1) gilt: Jedes Vektorfeld $V \in \mathcal{V}M$ kann auf U geschrieben werden als

$$V = \sum_{i=1}^n V(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Definition

Eine Derivation von $C^\infty M$ ist eine Abbildung $\mathcal{D} : C^\infty M \rightarrow C^\infty M$ mit

(D1) \mathcal{D} ist \mathbb{R} -linear: $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$

(D2) Leibnitz: $\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cdot g + f\mathcal{D}(g)$

Aus den Axiomen (T1), (T2) für Tangentialvektoren folgt, dass $V \in \mathcal{V}M$ eine Derivation ist.

Umgekehrt gilt, dass Jede Derivation von einem Vektorfeld kommt: Sei \mathcal{D} eine Derivation. Definiere für jeden Punkt $p \in M$: $v_p(f) := \mathcal{D}(f)(p)$. Aus (D1), (D2) folgt: $v_p \in T_p M$ und $V : M \rightarrow TM$, $p \mapsto v_p$ ist ein Vektorfeld.

Weiter gilt für alle $p \in M$: $(Vf)(p) = v_p(f) = (\mathcal{D}f)(p)$, also ist $Vf = \mathcal{D}f$, insbesondere ist V glatt. Also entspricht \mathcal{VM} den Derivationen auf $C^\infty M$.

Warum also führen wir Derivationen ein? Die entscheidende Eigenschaft ist dass das Produkt zwei Vektorfelder V und W

$$(V \cdot W)(f) := V(Wf)$$

keine Derivation ist, da (D2) nicht erfüllt ist, also $(V \cdot W)$ kein Vektorfeld ist!

Dies korrigieren wir mit der Lie-Klammer

$$[V, W] := V \cdot W - W \cdot V$$

welche eine Derivation liefert! Insbesondere ist also $[V, W]$ wieder ein Vektorfeld.

Also

$$[\cdot, \cdot] : \begin{array}{l} \mathcal{VM} \times \mathcal{VM} \rightarrow \mathcal{VM} \\ (V, W) \mapsto [V, W] \end{array}$$

Lemma 1.5

\mathcal{VM} versehen mit der Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] : \mathcal{VM} \times \mathcal{VM} \rightarrow \mathcal{VM}$ ist eine Lie-Algebra.

Definition

Eine reelle Lie-Algebra ist ein \mathbb{R} -Vektorraum L mit einer Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ mit

(L1) \mathbb{R} -Linearität: $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ sowie $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$ für $a, b \in \mathbb{R}$

(L2) Schiefsymmetrie: $[x, y] = -[y, x]$

(L3) Jacobi-Identität: $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$

Vektorfelder und Differentialgleichungen

Sei $V \in \mathcal{VM}$. Eine Integralkurve von V ist eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \rightarrow M$ mit $\alpha'(t) = V(\alpha(t))$ für alle $t \in I$.

In einem Koordinatensystem $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ gilt:

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} \quad \text{sowie} \quad V(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^n V(x^i \circ \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)}$$

Also gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \iff \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha) = V(x^i \circ \alpha)$$

Dies ist ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus Existenz- und Eindeigkeitssätzen für solche Systeme (zum Beispiel Königsberger II, 4.2) folgt

Satz 1.4 (Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven)

Sei $V \in \mathcal{VM}$. Dann existiert für jeden Punkt $p \in M$ ein Intervall $I = I(p)$ um 0 und eine eindeutige Integralkurve $\alpha : I \rightarrow M$ von V mit $\alpha(0) = p$.

Korrolar

Ist $v \in T_p M$, dann existiert eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v$.

Beweisidee: Ergänze v zu einem Vektorfeld in einer Umgebung von p und wende Satz 1.4 an.