

## 2 Messbare Funktionen und das Lebesgue-Integral

TODO: Einleitung mit Bildern

### 2.1 Messbare Funktionen

**Definition 2.1.** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X \neq \emptyset$  und  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y \neq \emptyset$ . Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, wenn  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B}$ .

**Bemerkung 2.2.** a) Sei  $f : X \rightarrow Y$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar. Dann ist  $f$   $\mathcal{A}'$ - $\mathcal{B}'$ -messbar für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}'$  auf  $X$  mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$  und  $\mathcal{B}'$  auf  $Y$  mit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ .  
Weiter ist die Einschränkung  $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$  für jedes  $X_0 \in \mathcal{A}$   $\mathcal{A}_{X_0}$ - $\mathcal{B}$ -messbar (vgl. (1.1)).

b) Wenn  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  oder  $\mathcal{B} = \{\emptyset, Y\}$ , dann ist  $f : X \rightarrow Y$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar.

c) Sei  $A \subset X$ . Setze  $\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$ . Sei  $B \in \mathcal{B}_d$ . Dann gilt:

$$\mathbf{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} A & , 1 \in B \text{ und } 0 \notin B, \\ A^c & , 1 \notin B \text{ und } 0 \in B, \\ X & , 1 \in B \text{ und } 0 \in B, \\ \emptyset & , 1 \notin B \text{ und } 0 \notin B \end{cases}$$

d) Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X \Rightarrow \mathbf{1}_A$  ist  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}_1$ -messbar  $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$ .  
 $\mathbf{1}_\Omega$  ist nicht  $\mathcal{B}_1$ - $\mathcal{B}_1$ -messbar.

Ana III, 10.11.2008

**Satz 2.3.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$   $\sigma$ -Algebren auf  $X, Y, Z \neq \emptyset$ . Dann gelten:

a) Wenn  $f : X \rightarrow Y$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar und  $g : Y \rightarrow Z$   $\mathcal{B}$ - $\mathcal{C}$ -messbar, dann ist  $h := g \circ f : X \rightarrow Z$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$ -messbar.

b) Seien  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ ,  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ ,  $f : X \rightarrow Y$ . Dann gilt:  
 $f$   $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar  $\Leftrightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \forall E \in \mathcal{E}$ .

*Beweis.* a) Sei  $C \in \mathcal{C}$ . Dann folgt, weil  $g$  messbar ist, dass  $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$  gilt. Da auch  $f$  messbar ist, gilt auch  $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$ .

b) " $\Rightarrow$ " ist klar, denn  $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$ .

" $\Leftarrow$ " zeigen wir mit dem Prinzip der guten Mengen:

$f_*(\mathcal{A}) = \{C \subset Y : f^{-1}(C) \in \mathcal{A}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  (siehe Übung). Nach Voraussetzung gilt  $\mathcal{E} \subset f_*(\mathcal{A})$ . Mit [Lem 1.6](#) folgt  $\sigma(f_*(\mathcal{A})) = f_*(\mathcal{A})$ , d.h.,  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B}$ .

□

**Definition 2.4.** Sei  $X \subset \mathbb{R}^d$  nichtleer,  $X \in \mathcal{B}_d$ . Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißt Borel-messbar, wenn sie  $\mathcal{B}(X)$ - $\mathcal{B}_k$ -messbar ist.

Ab jetzt sei stets  $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$  und "messbar" heiße stets Borel-messbar.

**Satz 2.5** (Eigenschaften Borel-messbarer Funktionen). *Seien  $X \in \mathcal{B}_d$ ,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ , wobei  $f = (f_1, \dots, f_k)^T$ . Dann gelten:*

a)  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  messbar

b)  $f$  messbar  $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar

c)  $f, g$  messbar,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot f + \beta \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  messbar

d)  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar  $\Rightarrow f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$  und falls  $f(x) \neq 0 \forall x \in X$ , dann ist  $\frac{1}{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar

e)  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar  $\Rightarrow \{x \in X : f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{B}(X)$ . (Analog für " $>$ ")

*Beweis.* a)  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen  $\xrightarrow{f \text{ stetig}} f^{-1}(U) \subset \mathcal{O}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ . Da  $\mathcal{O}(X)$  Erzeuger von  $\mathcal{B}(X)$  ist, folgt die Behauptung aus [Satz 2.3b](#)).

b) " $\Rightarrow$ ": Die Projektionen  $p_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, p_j(x) = x_j$ , sind stetig und damit nach a) messbar. Damit  $f_j = p_j \circ f$  messbar nach [Satz 2.3a](#)).

" $\Leftarrow$ ": Seien  $a, b \in \mathbb{Q}^d$ ,  $a \leq b$  (Erzeuger).

$f(x) \in (a, b] \Leftrightarrow f_j(x) \in (a_j, b_j] \forall j \in \{1, \dots, k\}$ .

$f^{-1}((a, b]) = \bigcap_{j=1}^k \underbrace{f_j^{-1}((a_j, b_j])}_{\in \mathcal{B}(X) \text{ nach Vor.}} \in \mathcal{B}(X)$ , also ist  $f$  messbar nach

[Satz 2.3b](#)).

c) Nach b) gilt:  $h = (f, g)^T : X \rightarrow \mathbb{R}^{k+k}$  messbar. Ferner ist  $\varphi : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$  stetig und nach a) messbar.

[Satz 2.3a](#))  $\Rightarrow \alpha \cdot f + \beta \cdot g = \varphi \circ h$  messbar.

d) Wie c) durch Stetigkeit der Multiplikation und Inversion.

e) Nach c) ist  $h = f - g$  messbar.

$$\begin{aligned}\{x \in X : f(x) \geq g(x)\} &= \{x \in X : h(x) \geq 0\} \\ &= h^{-1}(\underbrace{\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}}_{\in \mathcal{B}_1}) \in \mathcal{B}(X).\end{aligned}$$

□

**Beispiel.** a) Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  messbar,  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $g : X \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |f(x)|_p$ , messbar, denn es gilt  $g = |\cdot|_p \circ f$  und  $|\cdot|_p$  ist stetig.

b) Sei  $X = A \cup B$ , mit  $A, B \in \mathcal{B}_d$  diskunkt und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k, g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$  messbar.

$$\text{Dann ist } h : X \rightarrow \mathbb{R}^k, h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}.$$

*Beweis.* Seien  $a, b \in \mathbb{Q}^n$ ,  $a \leq b$  (Erzeuger). Dann gilt:

$$\begin{aligned}h^{-1}((a, b]) &= \{x \in X : h(x) \in (a, b]\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in (a, b]\} \cup \{x \in B : g(x) \in (a, b]\} \\ &= \underbrace{f^{-1}((a, b])}_{\in \mathcal{B}(A) \stackrel{(*)}{\subset} \mathcal{B}(X)} \cup \underbrace{g^{-1}((a, b])}_{\in \mathcal{B}(B) \stackrel{(*)}{\subset} \mathcal{B}(X)} \in \mathcal{B}(X)\end{aligned}$$

Dabei gilt  $(*)$  nach Korollar 1.11:

$$\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}_d : C \subset A\} \subset \{C \in \mathcal{B}_d : C \subset X\} = \mathcal{B}(X)$$

Mit Satz 2.3b) ist damit der Beweis erbracht.

□

**Beispiel.**  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$h(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)}{x} =: f(x, y), & (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}) =: A \\ c =: g(x, y), & (x, y)^T \in \{0\} \times \mathbb{R} =: B \end{cases}$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig ist und  $f, g$  stetig auf  $A$  bzw.  $B$  sind. Da  $\mathbb{R}^2 = A \dot{\cup} B$  und  $A, B$  disjunkt, folgt mit b) aus dem obigen Beispiel, dass  $h$  messbar ist.

Um für Funktionenfolgen  $f_j : X \rightarrow \mathbb{R} \ j \in \mathbb{N}$ , immer  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_j(x), \inf_{n \in \mathbb{N}} f_j(x)$  bilden zu können, setzt man  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

Rechenregeln: Sei  $a \in \mathbb{R}$ .

- $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$ ,  $\pm\infty + a = a \pm\infty = \pm\infty$
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a \in (0, \infty] \\ \mp\infty, & a \in [-\infty, 0) \end{cases}$
- Verboten bleiben:  $+\infty + (-\infty)$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $\frac{a}{0}$  usw.

Ordnung:  $-\infty < a < +\infty$  ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ).

Konvergenz: Für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$  schreibe:  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ ,  
falls  $\forall C \in \mathbb{R} \exists N_C \in \mathbb{N} : x_n \geq C \forall n \geq N_C$   
(Konvergenz gegen  $-\infty$  entsprechend mit " $\leq$ ")

**Beispiel.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$

Notation: Setze für  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \{f = g\} &:= \{x \in X : f(x) = g(x)\}, \\ \{f = a\} &:= \{x \in X : f(x) = a\}. \end{aligned}$$

(Analog für  $\leq, <, =, >, \geq, \dots$ )

Erinnerung:  $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \forall x \in X$

**Definition.** Definiere auf  $\overline{\mathbb{R}}$  die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra  $\overline{\mathcal{B}}_1$  durch

$$\overline{\mathcal{B}}_1 = \{B \cup E : B \in \mathcal{B}_1, E \subset \{-\infty, +\infty\}\}. \quad (2.1)$$

Man prüft leicht nach, dass  $\overline{\mathcal{B}}_1$  wirklich eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$  ist.

Offensichtlich gilt  $\mathcal{B}_1 \subset \overline{\mathcal{B}}_1$ .

Funktionen  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die  $\mathcal{B}(X)$ - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar sind, heißen ebenfalls (Borel-) messbar.

**Lemma 2.6.** a)

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}}_1 &= \sigma(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_1 \\ &= \sigma(\{(a, \infty] : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_2 \\ &= \sigma(\{[a, \infty] : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_3 \\ &= \sigma(\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_4 \end{aligned}$$

b)  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist messbar

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \{f \leq a\} \in \mathcal{B}(x) \quad \forall a \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \{f < a\} \in \mathcal{B}(x) \quad \forall a \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathcal{B}(x) \quad \forall a \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \{f \geq a\} \in \mathcal{B}(x) \quad \forall a \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Als Spezialfall gelten die entsprechenden Äquivalenzen für Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , denn so ein  $f$  ist  $\mathcal{B}(X)$ - $\overline{\mathcal{B}}_1$ -messbar genau dann, wenn es  $\mathcal{B}(X)$ - $\mathcal{B}_1$ -messbar ist.

*Beweis.* a)  $A_1 \subset A_2$  folgt aus  $[-\infty, a] = (a, \infty]^c \in A_2$  und [Lem 1.6](#). Genauso  $A_3 \subset A_4$ .

$A_2 \subset A_3$  wegen  $(a, \infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, \infty] \in A_3$  und [Lem 1.6](#).

$A_4 \subset \overline{B}_1$  wegen  $[-\infty, a) = \{-\infty\} \cup (-\infty, a) \in \overline{B}_1$  und [Lem 1.6](#).

Es bleibt zu zeigen:  $\overline{B}_1 \subset A_1$

Es gilt  $\{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, -n] \in A_1 \Rightarrow (-\infty, a] = [-\infty, a] \setminus \{-\infty\}$

[Lem 1.6](#)  
[Satz 1.9](#)  $\Rightarrow \overline{B}_1 \subset (A_1)$ . Ebenso  $\{+\infty\} \in A_1 \Rightarrow \overline{B}_1 \subset A_1$ .

b) folgt aus a) und [Satz 2.3b](#)).

Spezialfall folgt aus  $f^{-1}(B \cup E) = f^{-1}(B)$  für  $B \in \mathcal{B}(X)$  und  $E \subset \{-\infty, +\infty\}$ .  $\square$

Ana III, 14.11.2008

**Definition.** Sei  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar,  $n \in \mathbb{N}$ .

Definiere  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  durch

$$\left( \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) (x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad x \in X$$

(Analog definiert man  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ )

Falls:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  für alle  $x \in X$  existiert, setzt man

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) (x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}} \quad (\forall x \in X).$$

Dabei gilt

$$\max_{1 \leq n \leq N} \{f_1, \dots, f_N\} = \sup \{f_1, \dots, f_N, f_N, \dots\}.$$

(min analog).

**Satz 2.7.** Seien  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  messbar. Dann sind die Funktionen  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  und (falls  $\forall x \in X$  existent)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar.

*Beweis.* Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\{(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{B}(X)$  und  $\{x \in X : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{B}(X)$ .

Mit [Lem 2.6](#) folgt dann, dass  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  und  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  messbar sind. Damit sind auch  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{j \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq j} f_n$  und  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{j \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq j} f_n$  messbar.

Wenn existent für alle  $x \in X$ , dann ist somit auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar.  $\square$

**Bemerkung.** [Satz 2.7](#) ist falsch für überabzählbare Suprema, denn:

Sei  $\Omega \in \mathcal{B}_1$  aus [Satz 1.26](#),  $f_x := \mathbf{1}_{\{x\}}$ ,  $x \in \Omega$ . Dann sind alle  $f_x$  messbar, aber  $\sup_{x \in \Omega} \mathbf{1}_{\{x\}} = \mathbf{1}_{\Omega}$  ist nicht messbar, da  $\Omega \notin \mathcal{B}_1$ .

**Satz 2.8.** Seien  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann gelten:

a) Seien  $f, g$  messbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wenn  $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$  für alle  $x \in X$  definiert ist, dann ist  $\alpha \cdot f + \beta \cdot g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Wenn  $f(x) \cdot g(x)$  für alle  $x \in X$  definiert ist, dann ist  $f \cdot g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar.

b)  $f$  messbar  $\Leftrightarrow f_+ := \max\{f, 0\}$  und  $f_- := \max\{-f, 0\}$  messbar  $\Rightarrow |f|$  messbar.

Bemerkung zu b):  $f = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{\Omega^c}$  ist mit  $\Omega$  aus [Satz 1.26](#) nicht messbar, aber  $|f| = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}$  ist messbar.

*Beweis.* a) Betrachte  $f_n(x) = \max\{-n, \min\{n, f(x)\}\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ . Genauso für  $g$ . Da konstante Funktionen immer messbar sind, sind nach [Satz 2.7](#)  $f_n, g_n \forall n \in \mathbb{N}$  messbar.

Es gilt:  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in X$  (auch dann, wenn  $f(x), g(x) \notin \mathbb{R}$ ).

Sei  $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$  definiert. Dann gilt:

$$\alpha \cdot f_n(x) + \beta \cdot g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x).$$

(Das ist klar, wenn  $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ . Sei deshalb etwa  $\alpha = \beta = 1, f(x) = \infty, g(x) \in \mathbb{R}$ . Sei  $n > |g(x)|$ . Dann  $\alpha \cdot f_n(x) + \beta \cdot g_n(x) = n + g(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = f(x) + g(x)$ .)

Mit [Satz 2.7](#) folgt dann, dass  $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$  messbar ist.

(Ähnlicher Beweis für  $f \cdot g$ . Beachte dabei: Falls  $f(x) = 0, g(x) = \infty$  folgt:  $f_n(x) \cdot g_n(x) = 0 \cdot n = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = f(x) \cdot g(x)$ .)

b) Beide “ $\Rightarrow$ ” folgen sofort aus [Satz 2.7](#).

Erstes “ $\Leftarrow$ ” folgt aus a) und  $f = f_+ - f_-$ ,  $|f| = f_+ + f_-$ .

Beachte:  $f_+$  und  $f_-$  sind nur einzeln gleich 0.

□

**Bemerkung.** [Satz 2.7](#) und [Satz 2.8](#) gelten genauso für  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen.

**Beispiel.** Seien  $f_j : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar für  $j \in \mathbb{N}$ . Dann existiert  $g_n(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x) \in [0, \infty]$  für alle  $x \in X$  und  $g_n$  ist nach [Satz 2.8a](#)) messbar für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Mit [Satz 2.7](#) ist also  $g := \sum_{j=1}^\infty f_j = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$  ebenfalls messbar.

**Definition 2.9.** Eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt einfach, wenn sie endlich viele Werte annimmt, d.h.  $|f(X)| < \infty$ . Seien  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  alle verschiedenen Funktionswerte von  $f$ . Setze  $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ . Da  $f$  messbar ist, folgt nach Definition der Messbarkeit, dass  $A_j \in \mathcal{B}(X)$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann heißt

$$f = \sum_{j=1}^n y_j \cdot \mathbf{1}_{A_j}$$

die Normalform von  $f$ .

Beachte: Die Vereinigung  $X = A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n$  ist disjunkt.

**Bemerkung 2.10.** Linearkombinationen, Produkte, endliche Minima und Maxima einfacher Funktionen sind wieder einfach.

**Satz 2.11.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann gelten:

- a) Es existieren einfache Funktionen  $f_n$  mit  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  (punktweise).
- b) Ist  $f$  beschränkt, so gilt a) mit gleichmäßiger Konvergenz.
- c) Sei  $f \geq 0$ . Dann gilt a) mit  $f_n$ , die  $f_n \leq f_{n+1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) erfüllen.

**Korollar 2.12.**  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar  $\Leftrightarrow$  es existieren einfache  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  (punktweise).

Beweis. Satz 2.11 und Satz 2.7. □

Beweis von Satz 2.11. c) Sei  $f \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Setze

$$B_{jn} := \begin{cases} [j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n}), & j = 0, \dots, n \cdot 2^{n-1} \\ [n, \infty), & j = n \cdot 2^n \end{cases},$$

$$A_{jn} := f^{-1}(B_{jn}) \in \mathcal{B}(X) \text{ (da } f \text{ messbar)}$$

für alle  $j = 0, \dots, n \cdot 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt, dass die Vereinigung  $X = \bigcup_{j=0, \dots, n \cdot 2^n} A_{jn}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  disjunkt ist. Setze außerdem für  $n \in \mathbb{N}$

$$f_n := \sum_{j=0}^{n \cdot 2^n} \underbrace{j \cdot 2^{-n}}_{=\min B_{jn}} \cdot \mathbf{1}_{A_{jn}}.$$

Dann ist  $f_n$  einfach und für  $x \in A_{jn}$  gilt:  $f_n(x) = j \cdot 2^{-n} \leq f(x)$ , also  $f_n \leq f \forall n \in \mathbb{N}$ .

TODO: BILD

Ferner gilt

$$A_{jn} = \begin{cases} A_{2j, n+1} \dot{\cup} A_{2j+1, n+1}, & j = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \bigcup_{k=n \cdot 2^{n+1}}^{(n+1) \cdot 2^{n+1}} A_{k, n+1}, & j = n \cdot 2^n \end{cases}.$$

Für  $x \in A_{jn}$  gilt

$$f_n(x) = j \cdot 2^{-n} \begin{cases} = 2 \cdot j \cdot 2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x), & x \in A_{2j, n+1} \\ \leq (2 \cdot j + 1) \cdot 2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x), & x \in A_{2j+1, n+1} \end{cases}$$

Also gilt  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in A_{jn}$ , falls  $j < n \cdot 2^n$ .

Sei  $x \in A_{n \cdot 2^n}$ . Dann gilt  $f_n(x) = n = n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{-(n+1)} \leq k \cdot 2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x)$  für alle  $k \in \{n \cdot 2^{n+1}, \dots, (n+1) \cdot 2^{n+1}\}$ .

Also:  $f_n \leq f_{n+1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

A) Wenn  $f(x) = \infty$ , dann  $x \in A_{n \cdot 2^n, n}$  für alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = f(x)$ .

- B) Wenn  $f(x) < \infty$ , dann liegt  $x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > f(x)$  in einem  $A_{j(n),n}$  mit  $j(n) < n \cdot 2^{-n}$ . Dann folgt

$$f_n(x) = j(n) \cdot 2^{-n} \leq f(x) \leq f_n(x) + 2^{-n} \quad (*).$$

Und somit  $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , woraus Behauptung c) folgt.

- a) Setze  $f_n := (f_+)_n - (f_-)_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $f_n$  einfach. Nach c) gilt:  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_+ - f_- = f$ .
- b) Wenn  $f$  beschränkt ist, tritt für  $n > \|f\|_\infty$  in c) stets B) ein. Für alle  $n > \|f\|_\infty$  gilt dann  $(*) \forall x \in X$ , also  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  (gleichmäßig).

□

## 2.2 Konstruktion des Lebesgue-Integrals

Weiterhin sei  $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$  versehen mit  $\mathcal{B}(X)$  und  $\lambda = \lambda_d$ .

**Bemerkung.** Alles in dem Abschnitt 2.2 geht entsprechend für beliebige Maßräume  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

### Vorgehen

- A) Integral für einfache  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ .
- B) Integral für jedes messbare  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ .
- C) Integral für gewisse messbare  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Ana III, 17.11.2008

### Schritt A: Integral für einfache, positive Funktionen

**Definition 2.13.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  einfach mit Normalform  $f = \sum_{k=1}^m y_k \mathbf{1}_{A_k}$ . Dann setzt man:

$$\int f(x) dx := \int_X f(x) dx = \sum_{k=1}^m y_k \lambda(A_k) \in [0, \infty]$$

Beachte:  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ ,  $y_1, \dots, y_m \geq 0$  und  $f(x) = y_k \Leftrightarrow x \in A_k$

Problem:  $f$  hat viele Darstellungen, z.B.:  $\mathbf{1}_A = 2 \cdot \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_A + 0 \cdot \mathbf{1}_{A^c}$

Frage: Ist  $\int_X f dx$  unabhängig von der Darstellung von  $f$ ?

**Lemma 2.14.** Seien  $B_j \in \mathcal{B}(X)$ ,  $j = 1, \dots, n$  mit  $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = X$  und  $z_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$  sowie  $f = \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{1}_{B_j}$ . Dann gilt:

$$\int_X f(x) dx = \sum_{j=1}^n z_j \lambda(B_j)$$



*Beweis.* Durch iteratives Schneiden und Differenzmengenbilden erhält man disjunkte  $C_i \in \mathcal{B}(X), i = 1, \dots, l$  sowie Mengen  $I(j) \subset \{1, \dots, l\}$  und  $J(i) \subset \{1, \dots, n\}$  mit:  $(*) B_j = \biguplus_{i \in I(j)} C_i$  und  $C_i \subset B_j, j \in J(i) (\forall j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, l)$ . Dann folgt:

$$\sum_{j=1}^n z_j \cdot \lambda(B_j) = \sum_{j=1}^n z_j \sum_{i \in I(j)} \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^l \lambda(C_i) \sum_{j \in J(i)} z_j =: S$$

Setze für  $i = 1, \dots, l$  :  $w_i := \sum_{j \in J(i)} z_j = f(x)$ , wenn  $x \in C_i$ . Vereinige die  $C_i$  mit gleichem  $w_i (i = 1, \dots, l)$  zu einer Menge  $A_k \in \mathcal{B}(X) (k = 1, \dots, m)$ . Sei  $f(x) = y_k$  für  $x \in A_k$ , d.h.:  $A_k = f^{-1}(\{y_k\})$ . Dabei sind  $y_1, \dots, y_m$  die Funktionswerte von  $f$ , die paarweise verschieden sind. Da die  $C_i$  disjunkt sind, gilt  $S = \sum_{k=1}^m y_k \lambda(A_k)$  und  $f = \sum_{k=1}^m y_k \mathbf{1}_{A_k}$  ist die Normalform. Mit [Def 2.13](#) folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.15.** Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  einfache Funktionen,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{B}(X)$ . Dann:

- a)  $\int_X \mathbf{1}_A dx = \lambda(A)$
- b)  $\int_X (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) dx = \alpha \cdot \int_X f(x) dx + \beta \cdot \int_X g(x) dx$  (Beachte [Bem 2.10](#))
- c)  $f \leq g \Rightarrow \int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx$

*Beweis.* a): Folgt aus [Def 2.13](#).

b),c): Es seien  $f = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{1}_{A_j}, g = \sum_{k=1}^m z_k \mathbf{1}_{B_k}$  in Normalform. Seien  $C_i, i = 1, \dots, l$  alle Schnitte der Form  $A_j \cap B_k$ , sodass  $\{C_i : i = 1, \dots, l\}$  disjunkt ist. Seien weiter  $\bar{y}_i \in \{y_1, \dots, y_n\}$  und  $\bar{z}_i \in \{z_1, \dots, z_m\}$  die Funktionswerte von  $f$  bzw.  $g$  auf  $C_i$ . Dann folgt:  $f = \sum_{i=1}^l \bar{y}_i \mathbf{1}_{C_i}, g = \sum_{i=1}^l \bar{z}_i \mathbf{1}_{C_i}$ .

b): Es gilt  $\alpha \cdot f + \beta \cdot g = \sum_{i=1}^l (\alpha \cdot \bar{y}_i + \beta \cdot \bar{z}_i) \mathbf{1}_{C_i}$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) dx &\stackrel{\text{Lem 2.14}}{=} \sum_{i=1}^l (\alpha \cdot \bar{y}_i + \beta \cdot \bar{z}_i) \lambda(C_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^l \bar{y}_i \lambda(C_i) + \beta \sum_{i=1}^l \bar{z}_i \lambda(C_i) \\ &\stackrel{\text{Lem 2.14}}{=} \int_X f dx + \int_X g dx. \end{aligned}$$

c): Nach Voraussetzung gilt  $\bar{y}_i \leq \bar{z}_i$ . Damit und mit b),c) folgt:

$$\int_X f dx = \sum_{i=1}^l \bar{y}_i \lambda(C_i) \leq \sum_{i=1}^l \bar{z}_i \lambda(C_i) = \int_X g dx.$$

$\square$

## Schritt B: Integral für messbare Funktionen $f : X \rightarrow [0, \infty]$

Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Nach [Satz 2.11](#) gilt:

$$\exists \text{ einfache } f_n : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mit } f_n \leq f_{n+1} \ (\forall n \in \mathbb{N}), f_n \rightarrow f \text{ (pw, } n \rightarrow \infty) \quad (2.2)$$

Nach [Lem 2.15](#) gilt:

$$\int f_n dx \leq \int f_{n+1} dx \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n dx \in [0, \infty]$$

**Definition 2.16.** Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $f_n, n \in \mathbb{N}$  wie in (2.2). Dann setze:

$$\int f dx = \int_X f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) dx \in [0, \infty]$$

**Lemma 2.17.** Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Dann gilt:

$$\int_X f(x) dx = \sup \left( \left\{ \int_X g(x) dx : g : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ einfach, } 0 \leq g \leq f \right\} \right) =: S$$

*Beweis.* Sei  $f_n$  wie in (2.2). Da  $\int f dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n dx$ , gilt  $\int f dx \leq S$ .

Zu  $\geq$ : Sei  $g$  einfach mit  $0 \leq g \leq f$  und  $g = \sum_{k=1}^m y_k \mathbf{1}_{A_k}$  (Normalform). Sei  $\alpha > 1$  fest, aber beliebig, und  $B_n = \{x \in X : \alpha f_n(x) \geq g(x)\} =: \{\alpha f_n \geq g\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

Aus [Satz 2.5](#) folgt dann:  $B_n \in \mathcal{B}(X) \forall n \in \mathbb{N}$ . Beachte dabei  $\alpha \cdot f_n \geq \mathbf{1}_g$  (\*)

Sei  $x \in X$ . Wenn  $f(x) = 0$ , dann folgt wegen  $0 \leq g \leq f$ :

$$g(x) = 0 \Rightarrow x \in B_n \forall n \in \mathbb{N}$$

Wenn  $f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\alpha} g(x)$ . Da  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , folgt:

$$\exists n(x) \in \mathbb{N} : f_n(x) \geq \frac{1}{\alpha} g(x), \forall n \geq n(x) \Rightarrow x \in B_n \forall n \geq n(x)$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n. \text{ Ferner } B_n \subset B_{n+1}, \text{ da } f_n \leq f_{n+1} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (**)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &\stackrel{\text{Def 2.13}}{=} \sum_{k=1}^m y_k \cdot \lambda(A_k) \stackrel{\text{Satz 1.14}}{\stackrel{(**)}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m y_k \cdot \lambda(A_k \cap B_n) \\ &\stackrel{\text{Lem 2.14}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) \cdot \mathbf{1}_{B_n}(x) dx \stackrel{\text{Lem 2.15}}{\stackrel{(*)}{\leq}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \alpha \cdot f_n(x) dx \\ &\stackrel{\text{Lem 2.15}}{=} \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx \stackrel{\text{Def 2.16}}{=} \alpha \cdot \int f(x) dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit  $\alpha \rightarrow 1$ :  $\int g dx \leq \int f(x) dx \stackrel{\sup}{\Rightarrow} S \leq \int f dx$ . □

**Lemma 2.18.** Seien  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ . Dann:

$$a) \int_X (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) dx = \alpha \cdot \int_X f(x) dx + \beta \cdot \int_X g(x) dx$$

$$b) f \leq g \Rightarrow \int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx$$

$$c) \int_X f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \lambda(\{f > 0\}) = 0$$

*Beweis.* a) Seien  $f_n, g_n$  wie in (2.2). Nach Bem 2.10 und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  erfüllen  $\alpha f_n + \beta g_n$  (2.2) für  $\alpha f + \beta g$ .

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) dx &\stackrel{\text{Def 2.16}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\alpha f_n + \beta g_n) dx \\ &\stackrel{\text{Lem 2.15}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha \int f_n dx + \beta \int g_n dx \right) \\ &\stackrel{\text{Def 2.16}}{=} \alpha \int f dx + \beta \int g dx. \end{aligned}$$

b) Sei  $A = \{f > 0\} \in \mathcal{B}(X)$ , seien  $f_n$  wie in (2.2) für  $f$ .

i) Sei  $\lambda(A) = 0$ . Da  $0 \leq f_n \leq f$ , gilt  $f_n(x) = 0$ , wenn  $x \notin A$ . Dann folgt  $f_n \leq \mathbf{1}_A \|f_n\|_\infty \stackrel{\text{Lem 2.15}}{\Rightarrow} 0 \leq \int f_n dx \leq \int \|f_n\|_\infty \mathbf{1}_A dx = \|f\|_\infty \lambda(A) = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx \stackrel{\text{Def 2.16}}{=} \int f dx$ .

ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{\text{Lem 2.17}}{=} \sup_{0 \leq u \leq f, u \text{ einfach}} \int u(x) dx \\ &\stackrel{f \leq g}{\leq} \sup_{0 \leq u \leq g, u \text{ einfach}} \int u(x) dx = \int g(x) dx. \end{aligned}$$

iii) Sei  $\int f dx = 0$ . Setze  $A_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt:  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ ,  $f \geq \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A_n}$ . Damit  $0 = \int f dx \stackrel{\text{b)}}{\geq} \int \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A_n} dx \stackrel{\text{Lem 2.15}}{=} \frac{1}{n} \lambda(A_n) \geq 0 \Rightarrow \lambda(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .  
 $\Rightarrow \lambda(A) = \lambda(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \stackrel{\text{Satz 1.14}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0$ .

□

**Theorem 2.19** (Monotone Konvergenz, B. Levi). Seien  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $f_n \leq f_{n+1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ). Sei  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Dann:

$$\int_X f(x) dx = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \stackrel{!}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) dx$$

**Bemerkung.** a) Konvergenzaussage ist ohne Monotonie falsch:

Bsp:  $f_n = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]} \rightarrow f = 0$  (glm.), aber  $\int f_n dx = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \int f dx$ .

b) Die Konvergenzaussage ist im allgemeinen falsch für fallende Folgen.

Bsp:  $f_n := \mathbf{1}_{[n, \infty]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (punktweise),  $f_n \geq f_{n+1}$ , aber  $\int_{\mathbb{R}} f_n dx \stackrel{\text{einfache Funktion}}{=} \lambda_1([n, \infty]) = \infty$  und  $\int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$ .

c) Die Konvergenzaussage ist im allgemeinen sinnlos fürs Riemannintegral.

Bsp: Sei  $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ ,  $A_n := \{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$ . Dann ist  $f_n$  Riemannintegrierbar mit  $f_n \leq f_{n+1}$ , aber  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  ist nicht Riemannintegrierbar, obwohl  $\int_{\mathbb{R}} f_n dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis von Thm 2.19.* Nach Satz 2.7 ist  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar. Zweites “=” folgt aus  $\int f_n dx \leq \int f_{n+1} dx$  und Lem 2.18b). Nach (2.2) gibt es  $\forall n \in \mathbb{N}$  einfache  $u_{nj} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $j \in \mathbb{N}$  mit  $u_{nj} \leq u_{n,j+1} \leq f_n$  (\*) und  $u_{nj} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f_n$  (punktweise).

Ziel: Konstruiere zu  $f$  einfache  $v_j$  wie in (2.2) mit  $v_j \leq f_j$ .

Setze:  $v_j = \max\{u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{jj}\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $v_j$  nach Bem 2.10 einfach.

$$\begin{array}{ccccccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1j} & \leq & u_{1j+1} \\ & u_{22} & \dots & u_{2j} & \leq & u_{2j+2} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & u_{jj} & \leq & u_{jj+1} \end{array}$$

Wegen (\*):  $v_j \leq v_{j+1}$  und  $v_j \leq \max\{f_1, \dots, f_j\} \stackrel{\text{nach Vor. Monotonie}}{=} f_j \leq f$  (\*\*).

Ferner gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$  mit  $j \leq n \Rightarrow u_{nj} \leq v_j$ , damit:

$$f_n \stackrel{\text{nach Vor.}}{=} \sup_{j \in \mathbb{N}} u_{nj} \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} v_j \quad (***)$$

Es folgt  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \stackrel{(***)}{\leq} \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{j \in \mathbb{N}} v_j) \leq f$ , also  $f = \sup_{j \in \mathbb{N}} v_j$ , d.h.,  $v_j$  erfüllt (2.2) für  $f$ . Per Definition gilt dann

$$\int_X f dx \stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_X v_j dx \stackrel{(**)}{\leq} \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_X f_j dx \stackrel{(**)}{\leq} \int_X f dx.$$

□

**Korollar 2.20.** a) Seien  $f_j : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Dann gilt

$$\int_X \left( \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx$$

b) Sei  $\omega : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Setze für  $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(A) := \int_X \mathbf{1}_A(x) \cdot \omega(x) dx$$

(Dann ist  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{B}(X)$  und wird Gewicht oder Dichte genannt.)

*Beweis.* a) Es gilt

$$\underbrace{\int_X \left( \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) dx}_{\text{links}} = \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f_j \right) dx \stackrel{\text{Thm 2.19}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left( \sum_{j=1}^n f_j \right) dx$$

$$\stackrel{\text{Lem 2.18}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \underbrace{\int_X f_j dx}_{\text{rechts}} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx.$$

b) Zeige die Maßeigenschaft.

$$(M1) : \mu(\emptyset) = \int_X \mathbf{1}_{\emptyset}(x) \omega(x) dx = \int_X 0 dx = 0.$$

(M2) : Seien  $A_n \in \mathcal{B}(X)$  disjunkt,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \int_X \mathbf{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}(x) \cdot \omega(x) dx \\ &= \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}\right)(x) \cdot \omega(x) dx \\ &\stackrel{a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_n}(x) \omega(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.21.** Seien  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $\emptyset \neq Y \in \mathcal{B}(X)$ . Dann sind  $f|_Y : Y \rightarrow [0, \infty]$  auf  $Y$  und  $\mathbf{1}_Y \cdot f : X \rightarrow [0, \infty]$  auf  $X$  messbar und es gilt

$$\int_Y f dx = \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f dx.$$

*Beweis.*  $f|_Y$  ist messbar wegen Bemerkung 2.2 und  $\mathbf{1}_Y \cdot f$  ist messbar nach Satz 2.5d). Setze

$$g := \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j} : X \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad z_j \in \mathbb{R}_+, \quad B_j \in \mathcal{B}(X).$$

Dann ist  $g$  einfach und es gelten  $g|_Y = \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j \cap Y}$  und

$$\begin{aligned} \int_Y g dx &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^n z_j \cdot \lambda(B_j \cap Y) = \int_X \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j \cap Y} dx \\ &= \int_X \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j} \cdot \mathbf{1}_Y dx = \int_X \mathbf{1}_Y \cdot g dx. \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung für einfache Funktionen.

Für den allgemeinen Fall, in dem  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  beliebig ist und messbar ist, gibt es nach Satz 2.11 einfache  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  mit  $f_n \nearrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann gelten auch  $f_n|_Y \nearrow f|_Y$  und  $\mathbf{1}_Y \cdot f_n \nearrow \mathbf{1}_Y \cdot f$  ( $n \rightarrow \infty$ ), also

$$\int_Y f dx \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n dx \stackrel{f_n \text{ einfach}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_n dx \stackrel{\text{Def}}{=} \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f dx$$

□

### Schritt C: Integral für $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen

Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Nach [Satz 2.8](#) sind dann auch  $f_+, f_- : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar.

**Definition 2.22.** Sei  $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ . Eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt (Lebesgue-) integrierbar, wenn  $\int_X f_+ dx, \int_X f_- dx < \infty$ .

In diesem Fall definiert man (Lebesgue-) Integral durch

$$\int_X f dx := \int_X f(x) dx := \int_X f_+(x) dx - \int_X f_-(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Hiervon ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Spezialfall. Man setzt

$$\mathcal{L}^1(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und integrierbar}\}.$$

**Bemerkung.** Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Wegen  $f_- = 0$  gilt

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow \int_X f(x) dx < \infty$$

**Bemerkung.** Für einen Maßraum  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  definiert man das Integral  $\int f dx$  völlig analog, indem man [A- \$\overline{\mathcal{B}}\_1\$ -messbare](#) Funktionen betrachtet und überall  $\lambda(A)$  durch  $\mu(A)$  ersetzt.

**Beispiel.** Sei  $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  und  $\mu$  das Zählmaß, d.h.:  $\mu(A) := |A|$ . Schreibe  $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  als  $a_n = f(n)$ . Dann  $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , falls existent.

**Satz 2.23.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann sind äquivalent:

- $f$  ist integrierbar.
- Es existieren integrierbare  $u, v : X \rightarrow [0, \infty]$  mit  $f = u - v$  (wobei  $u$  und  $v$  nie gleichzeitig  $\infty$ -wertig sind.).
- Es existiert ein integrierbares  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  mit  $|f| \leq g$ .
- Die messbare Funktion  $|f| : X \rightarrow [0, \infty]$  ist integrierbar.

Wenn a)-d) gelten, dann  $\int_X f dx = \int_X u dx - \int_X v dx$ .

Weiter folgt  $\mathcal{L}^1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar, } \int_X |f| dx < \infty\}$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Äquivalenz von a), b), c) und d) durch einen Ringschluss.

- a)  $\Rightarrow$  b): Wegen [Lem 2.21](#) gilt  $u = f_+, v = f_-$  ( $f_+, f_-$  nie gleichzeitig  $\infty$ ).
- b)  $\Rightarrow$  c):  $g := u + v$  ist integrierbar nach [Lem 2.18](#).  $|f| = |u + v| \leq u + v = g$ .
- c)  $\Rightarrow$  d): Aus [Lem 2.18b](#)) folgt  $\int |f| dx \leq \int g dx < \infty$ .
- d)  $\Rightarrow$  a): Es gilt  $0 \leq f_+, f_- \leq |f| \Rightarrow f_+, f_-$  integrierbar  $\xrightarrow{\text{Def 2.22}}$   $f$  ist integrierbar.

Letzte Behauptung: Nach b) gilt:  $\exists u, v \geq 0 : f = f_+ - f_- = u - v \Rightarrow f_+ + v = f_- + u \Rightarrow \int_X f_+ + \int_X v dx = \int_X f_- dx + \int_X u dx \Rightarrow \int_X f dx = \int_X u dx - \int_X v dx$ , da alle Integrale endlich sind.  $\square$

Ana III, 24.11.2008

**Korollar 2.24.** Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar. Dann gilt  $\lambda(\{|f| = \infty\}) = 0$ .

*Beweis.* Betrachte  $A := \{|f| = \infty\} \in \mathcal{B}_d$ . Es gilt  $|f| \geq n \cdot \mathbf{1}_A$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $n \cdot \lambda(A) \stackrel{\text{Lem 2.15}}{=} \int_X n \cdot \mathbf{1}_A dx \stackrel{\text{Lem 2.18}}{\leq} \int_X |f| dx =: C \stackrel{\text{Satz 2.23}}{<} \infty$   
 $\Rightarrow 0 \leq \lambda(A) \leq \frac{C}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).  $\square$

**Satz 2.25.** Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gelten:

a)  $\alpha \cdot f$  und (soweit überall definiert)  $f + g$  sind integrierbar und es gelten:

$$\begin{aligned} \int_X \alpha \cdot f(x) dx &= \alpha \cdot \int_X f(x) dx, \\ \int_X (f(x) + g(x)) dx &= \int_X f(x) dx + \int_X g(x) dx. \end{aligned}$$

Somit ist  $\mathcal{L}^1(X)$  ein Vektorraum und das Integral eine lineare Abbildung von  $\mathcal{L}^1(X)$  nach  $\mathbb{R}$ .

b) Die Funktionen  $\max\{f, g\}$  und  $\min\{f, g\}$  sind integrierbar.

c) Wenn  $f \leq g$ , dann  $\int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx$ . (Das Integral ist monoton.)

d)  $|\int_X f(x) dx| \leq \int_X |f(x)| dx$ .

e) Sei  $\emptyset \neq Y \in \mathcal{B}(X)$ . Dann sind  $f|_Y$  und  $\mathbf{1}_Y \cdot f$  integrierbar und es gilt

$$\int_Y f|_Y(x) dx = \int_X \mathbf{1}_Y(x) \cdot f(x) dx.$$

f) Seien  $\lambda(X) < \infty$  und  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und beschränkt. Dann liegt  $h$  in  $\mathcal{L}^1(X)$  und  $|\int_X h(x) dx| \leq \|h\|_\infty \cdot \lambda(X)$ .

*Beweis.* a) Es gilt

$$(\alpha \cdot f)_\pm = \begin{cases} \alpha \cdot f_\pm, & \alpha \geq 0 \\ [(-\alpha) \cdot (-f)]_\pm = (-\alpha) \cdot f_\mp, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Ferner sind nach [Satz 2.23](#) und [Lem 2.18](#) die Funktionen  $\alpha \cdot f_{\pm}$  ( $\alpha \geq 0$ ) und  $(-\alpha) \cdot f_{\mp}$  ( $\alpha \leq 0$ ) integrierbar. Somit folgt die Integrierbarkeit von  $\alpha \cdot f$  und es gilt

$$\begin{aligned} \int \alpha \cdot f dx &\stackrel{\text{Def 2.22}}{=} \int (\alpha \cdot f)_+ dx - \int (\alpha \cdot f)_- dx \\ &= \begin{cases} \int \alpha \cdot f_+ dx - \int \alpha \cdot f_- dx. & \alpha \geq 0 \\ \int (-\alpha) \cdot f_- dx - \int (-\alpha) \cdot f_+ dx. & \alpha \leq 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\text{Lem 2.18}}{\stackrel{\text{Def 2.22}}{=}} \alpha \cdot \int f dx. \quad (\text{Beachte } -\alpha > 0 \text{ f\"ur } \alpha < 0) \end{aligned}$$

Ferner gilt  $f + g = \underbrace{f_+ + g_+}_{=:u} - \underbrace{(f_- + g_-)}_{=:v}$ . Dabei sind  $u, v$  nach [Lem 2.18](#) und [Satz 2.23](#) integrierbar und nie gleichzeitig  $\infty$ -wertig.

⌈Denn: Sei z.B.  $f(x) = \infty$ . Dann gilt  $f_+(x) = \infty$ ,  $f_-(x) = 0$ . Dann ist  $u(x) = \infty$ . Ferner gilt  $g(x) \neq \infty$  nach Voraussetzung, woraus  $v(x) = g_-(x) \neq \infty$ .⌋

Aus [Satz 2.23](#) folgt, dass  $f + g$  integrierbar ist und es gilt

$$\begin{aligned} \int (f + g) dx &= \int (f_+ + g_+) dx - \int (f_- + g_-) dx \\ &= \left( \int f_+ dx + \int g_+ dx \right) - \left( \int f_- + \int g_- dx \right) \\ &\stackrel{\text{Def 2.22}}{=} \int f dx + \int g dx. \end{aligned}$$

b)  $\max\{f, g\}$  ist [messbar](#) nach [Satz 2.7](#), Ferner gilt  $0 \leq \max\{f, g\} \leq |f| + |g|$ , wobei  $|f| + |g|$  nach a) und [Satz 2.23](#) integrierbar ist. Dann folgt mit [Satz 2.23](#), dass  $\max\{f, g\}$  integrierbar ist. Für das Minimum zeigt man es genauso.

c) Sei  $f \leq g$ . Dann gilt  $f_+ \leq g_+$  und  $f_- = (-f)_+ \geq (-g)_+ = g_-$ . Damit folgt

$$\int f dx = \int f_+ dx - \int f_- dx \stackrel{\text{Lem 2.18}}{\leq} \int g_+ - \int g_- dx = \int g dx.$$

d) Da  $\pm f \leq |f|$  gilt, liefern a) und c)

$$\pm \int f dx = \int \pm f dx \leq \int |f| dx.$$

e)  $f|_Y$  ist auf  $Y$  und  $\mathbf{1}_Y \cdot f$  ist nach [Bem 2.2](#), [Satz 2.5](#) und [Satz 2.7](#) auf  $X$  [messbar](#). Klar ist, dass

$$(f|_Y)_{\pm} = f_{\pm}|_Y \text{ und } (\mathbf{1}_Y \cdot f)_{\pm} = \mathbf{1}_Y \cdot f_{\pm} \quad (*)$$



gelten. Nach [Lem 2.18](#) gilt  $\int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_{\pm} dx \leq \int_X f_{\pm} dx \stackrel{\text{n. Vor.}}{<} \infty$ .  
Mit (\*) und [Def 2.22](#) ist also  $\mathbf{1}_Y \cdot f$  integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f dx &\stackrel{(*)}{=} \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_+ dx - \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_- dx \\ &\stackrel{\text{Lem 2.21}}{=} \int_Y (f_+)|_Y dx - \int_Y (f_-)|_Y dx \stackrel{(*)}{=} \int_Y f|_Y dx. \end{aligned}$$

f) Sei nun  $\lambda(X) < \infty$ . Da  $|h| \leq \|h\|_{\infty} \mathbf{1}_X$  integrierbar ist, ist nach [Satz 2.23](#) integrierbar und nach d) und c) folgt

$$\left| \int_X h dx \right| \leq \int_X |h| dx \leq \|h\|_{\infty} \cdot \lambda(X).$$

□

**Beispiel.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  einfach mit Normalform  $f = \sum_{k=1}^m y_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}$ , wobei  $y_k = 0$ , falls  $\lambda(A_k) = \infty$ . Dann ist  $f$  integrierbar und  $\int_X f(x) dx = \sum_{k=1}^m y_k \cdot \lambda(A_k)$ .

*Beweis.* [Satz 2.25a](#)), da  $\int \mathbf{1}_{A_k} = \lambda(A_k)$ . □

Ana III, 28.11.2008

**Bemerkung 2.26.** a) Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integrierbar und  $X = A \dot{\cup} B$  für disjunkte  $A, B \in \mathcal{B}_d$ . Dann gilt

$$\int_X f dx = \int_X (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) \cdot f dx \stackrel{\text{Satz 2.25a)}}{=} \int_X \mathbf{1}_A \cdot f dx + \int_X \mathbf{1}_B \cdot f dx$$

b) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und Riemannintegrierbar. Nach [Satz 2.25f](#)) ist  $f$  Lebesgueintegrierbar.

Weiter gilt  $R - \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx$ .

Wir schreiben von nun an auch,  $\int_a^b f(x) dx$  für das Lebesgueintegral. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für das Lebesgueintegral aus Ana I.

*Beweis.* Es gilt

$$R - \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f\left(a + j \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=: t_{jn}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} u_n dx,$$

wobei

$$u_n = \sum_{j=1}^n f(t_{jn}) \cdot \mathbf{1}_{[t_{j-1,n}, t_{j,n}]}.$$

Ferner  $\|f - u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (da  $f$  gleichmäßig stetig ist, vergleiche Ana1 §6). Damit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} f(x) dx - \int_{[a,b]} u_n dx \right| &\stackrel{\text{Satz 2.25}}{\leq} \int_{[a,b]} |f - u_n| dx \\ &\stackrel{\text{Satz 2.25}}{\leq} \|f - u_n\|_\infty \cdot (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

- c) Warnung: Es gibt stetige, uneigentlich Riemannintegrierbare Funktionen, die nicht Lebesgueintegrierbar sind.

**Beispiel.** Sei  $X = [1, \infty]$ ,  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . Aus Ana I §6 wissen wir:  $f$  ist uneigentlich Riemannintegrierbar und

$$|f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2n} \cdot \mathbf{1}_{[\pi \cdot n + \frac{\pi}{2}, \pi \cdot n + \frac{3}{4} \cdot \pi]} =: g$$

für ein  $c > 0$ . Damit folgt

$$\int_X g(x) dx \stackrel{\text{Bem 2.10}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2n} \cdot \int_X \mathbf{1}_{[\pi \cdot n + \frac{\pi}{2}, \pi \cdot n + \frac{3}{4} \cdot \pi]} = \frac{c\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Damit folgt, dass  $g$  nicht integrierbar ist und [Lem 2.18](#) liefert

$$\int_X |f| dx \geq \int_X g(x) dx = \infty.$$

Also ist  $f$  nach [Satz 2.23](#) nicht integrierbar.