7. Der komplexe Logarithmus

Definition
Sei $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt **ein Logarithmus von** w. Man schreibt in diesem Fall (ungenau): $z = \log w$.

Satz 7.1
Sei $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, w = |w|e^{i\text{Arg}w}(\text{Arg}w \in (-\pi, \pi])$
Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^z = w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \log|w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$ ($\log|w|$ ist der reelle Log)

Beweis
„ $\Longleftarrow$ “ : $e^z = \underbrace{e^{\log|w|}}_{|w|} e^{i\text{Arg}w} \underbrace{e^{2k\pi i}}_{1} = |w|e^{i\text{Arg}w} = w$
„ $\Longrightarrow$ “ Sei $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ und $e^z = w$. Dann: $|w| = |e^z| = e^x \implies x = \log|w|$
$|w|e^{i\text{Arg}w} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w|e^{iy}$
$\implies e^{iy} = e^{i\text{Arg}w} \implies e^{i(y-\text{Arg}w)} = 1 \stackrel{6.3}{\implies} \exists k \in \mathbb{Z} : iy - i\text{Arg}w = 2k\pi i$
$\implies z = \log|w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$ ∎

Definition
Die Funktion $\text{Log} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ def. durch $\text{Log}w := \log|w| + i\text{Arg}w$ heißt der **Hauptzweig des Logarithmus**.

Beispiele:
(1) Alle Log von $w = 1$: $2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\text{Log } 1 = 0$

(2) $\text{Log}(-1) = i\pi$

(3) $w = 1 + i, \ |w| = \sqrt{2}, \ \text{Arg}w = \frac{\pi}{4}$
$\text{Log}(1 + i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

Satz 7.2
Sei $A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$
$f := \exp_{|A}$

(1) f ist auf A injektiv.

(2) $f(A) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$

(3) $f^{-1}(w) = \operatorname{Log} w$ $(w \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$

(4) Die Funktion Log ist unstetig in jedem $w \in \mathbb{R}$ und $w < 0$

Beweis

(1) 6.3, 7.1

(2) 6.3, 7.1

(3) 6.3, 7.1

(4) §3 Beispiel: $w \mapsto \operatorname{Arg} w$ ist in $w < 0$ unstetig. ■

Definition
$\mathbb{C}\_ := \mathbb{C}\backslash\{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ $(\subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\})$

Für $w \in \mathbb{C}\_$ ist $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$.

Satz 7.3
$\operatorname{Log} \in C(\mathbb{C}\_)$

Beweis
Sei $w_0 \in \mathbb{C}\_$, $z_0 := \operatorname{Log} w_0$, $x_0 := \operatorname{Re} z_0$, $y_0 := \operatorname{Im} z_0$; also: $x_0 = \log|w_0|$, $y_0 = \operatorname{Arg} w_0 \in (-\pi, \pi)$.
$R := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \log 2, |y| \leq \pi\}$.
Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K := R \cap (\mathbb{C}\backslash U_\varepsilon(z_0)) \neq \emptyset$. Klar: K ist kompakt, $z_0 \notin K$.
Definiere $\varphi : K \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(z) := |e^z - w_0| = |e^z - e^{z_0}|$.
Dann: $\varphi \in C(K)$. 3.3 $\Rightarrow \exists \varrho := \min \varphi(K)$.
Annahme: $\varrho = 0$. Also existiert ein $z \in K : e^z = e^{z_0} \Rightarrow e^{z - z_0} = 1$. 6.3 $\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : z - z_0 = 2j\pi i \Rightarrow 2j\pi = \operatorname{Im}(z - z_0) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0 \Rightarrow 2|j|\pi = |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| \leq \underbrace{|\operatorname{Im} z|}_{\leq \pi} + \underbrace{|\operatorname{Im} z_0|}_{< \pi} < 2\pi \Rightarrow$
$j = 0 \Rightarrow z_0 = z \in K$. Wid!
Also: $\varrho > 0$
$\delta := \min\{\varrho, \frac{1}{2}e^{x_0}\}$. Sei $w \in \mathbb{C}\_$ und $|w - w_0| < \delta$; $z := \log w$. Z.z: $|z - z_0| < \varepsilon$.
Sei $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$; $y = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$, also: $|y| \leq \pi$.
Annahme: $x > x_0 + \log 2$. Dann:

$$\frac{1}{2}e^{x_0} \geq \delta > |w - w_0| = |e^z - e^{z_0}| \geq ||e^z| - |e^{z_0}|| = |e^x - e^{x_0}| \geq e^x - e^{x_0} > e^{x_0 + \log 2} - e^{x_0} = e^{x_0} \quad \text{Wid!}$$

Also: $x \leq x_0 + \log 2$. Analog: $x \geq x_0 - \log 2$.
Fazit: $z \in R$.
Annahme: $|z - z_0| \geq \varepsilon \Rightarrow z \in K \Rightarrow \delta \leq \varrho \leq \varphi(z) = |e^z - e^{z_0}| = |w - w_0| < \delta$. Wid! ■

Satz 7.4
$\text{Log} \in H(\mathbb{C}\_)$ und $\text{Log}'w = \frac{1}{w}\ \forall w \in \mathbb{C}\_$

Beweis
Sei $w_0 \in \mathbb{C}\_$; (w_n) eine Folge in $\mathbb{C}\_$ mit: $w_n \neq w_0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $w_n \to w_0$, $z_0 := \text{Log}w_0$, $z_n := \text{Log}w_n$. 7.3 $\Rightarrow z_n \to z_0$. Dann:

$$\frac{\text{Log}w_n - \text{Log}w_0}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} = \left(\frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0}\right)^{-1} \to \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}$$

D.h. Log ist in w_0 komplex differenzierbar und $\text{Log}'w_0 = \frac{1}{w_0}$ ∎

Bezeichnung: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = U_1(0)$
Beachte: Für $z \in \mathbb{D}$ ist $1 - z \in \mathbb{C}\_$

Satz 7.5
Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Beweis
7.4, 5.4 $\Rightarrow f(z) := \text{Log}(1+z) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ ist auf $\mathbb{D}$ holomorph und
$f'(z) = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-(-z)} = 0\ \forall z \in \mathbb{D}$
$\mathbb{D}$ ist ein Gebiet $\overset{4.2}{\Rightarrow}$ f ist auf $\mathbb{D}$ konstant. $f(0) = 0 \Rightarrow$ Beh. ∎

Definition
Sei $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $a \in \mathbb{C}$.
$w^a := e^{a\text{Log}w}$ (**Hauptzweig der allgemeinen Potenz**)

Beispiele:

(1) Für $a = k \in \mathbb{Z}$ ist obige Definition die frühere Potenz von w. Denn: $\forall k \in \mathbb{N}$:
$e^{k\text{Log}w} = e^{\text{Log}w + \text{Log}w + \cdots + \text{Log}w} = \left(e^{\text{Log}w}\right)^k = w^k$
$e^{-k\text{Log}w} = \frac{1}{e^{k \log w}} \overset{s.o.}{=} \frac{1}{w^k} = w^{-k}$

(2) $w = a = i$, $\log|w| = 0$, $\text{Arg}w = \frac{\pi}{2}$, $\text{Log}w = i\frac{\pi}{2} \Rightarrow i^i = e^{i \cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$

Satz 7.6
Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C}\_ \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(w) := w^a$. Dann:
$f \in H(\mathbb{C}\_)$ und $f'(w) = aw^{a-1}\ \forall w \in \mathbb{C}\_$

Beweis
7.4, 4.4 $\Rightarrow f \in H(\mathbb{C}\_)$ und $f'(w) = e^{a\text{Log}w}(a\text{Log}w)' = ae^{a\text{Log}w}\frac{1}{w} \overset{Bsp(1)}{=} ae^{a\text{Log}w}e^{-\text{Log}w} = ae^{(a-1)\text{Log}w} = aw^{a-1}$ ∎