Kapitel 17

Randomisierte Tests und das Lemma von Neyman-Pearson

Wir betrachten folgendes Testproblem: Sei $X \sim B(5,\theta)$ mit $\theta \in \Theta = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \text{ vs. } H_1 : \theta = \frac{3}{4}$$

Wir wollen einen Test der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ 1, & x > c \end{cases}$$

der das Niveau $\alpha = 0,05$ einhält.

$$\beta(\frac{1}{2}) = P_{\frac{1}{2}}(X > c) \overset{!}{\leq} 5$$

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}}(X = 5) &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 && = \frac{1}{32} < 0,05 \\ P_{\frac{1}{2}}(X \in \{4,5\}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 && = \frac{6}{32} > 0,05 \end{aligned}$$

Das heißt der Test

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 4 \\ 1, & \text{falls } x = 5 \end{cases}$$

hält das Niveau σ ein. Leider wird das Signifikanzvieau nicht voll ausgeschöpft. $\Rightarrow$ mache bei $x = 4$ ein zusätzliches Experiment.

Definition 17.1
*Eine Funktion $\varphi : \chi^n \to [0,1]$, die angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ die Hypothese H_0 abgelehnt wird, heißt **randomisierter Test**. Die Gütefunktion wird jetzt definiert durch*

$$\beta(\theta) := E_\theta \, \varphi(X) \,.$$

Bemerkung 17.1
Die bisher betrachteten nicht randomisierten Tests sind ein Spezialfall:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin R \\ 1, & x \in R \end{cases}$$

Die Definition der Gütefunktion stimmt mit der bisherigen überein:

$$\beta(\theta) = E_\theta\, \varphi(X) = P_\theta(X \in R)$$

Im Beispiel: Wir lehnen H_0 jetzt auch im Falle $x = 4$ mit einer Wahrscheinlichekit p ab:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = 5 \\ \gamma, & x = 4 \\ 0, & x \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

γ ist so zu bestimmen, dass der Test Niveau $\alpha = 0,05$ hat.

$$0,05 \stackrel{!}{=} \beta\left(\frac{1}{2}\right) = E_{\frac{1}{2}}\varphi(x) = 1 \cdot \frac{1}{32} + \gamma\binom{5}{4}\frac{1}{32} \Rightarrow \gamma = \frac{3}{25}$$

Im Folgenden betrachten wir den Spezialfall $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

Definition 17.2
*Ein randomisierter Test $\varphi^* : \chi^n \to [0,1]$ heißt **Neyman-Pearson-Test**, wenn eine Konstante $c^* \in [0,\infty)$ und eine Funktioon $\gamma : \chi^n \to [0,1]$ gibt mit*

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } L_x(\theta_1) > c^* L_x(\theta_0) \\ \gamma(x) & \text{falls } L_x(\theta_1) = c^* L_x(\theta_0) \\ 0 & \text{falls } L_x(\theta_1) < c^* L_x(\theta_0) \end{cases}$$

Satz 17.1 (Lemma von Neyman-Pearson)

a) Ist φ^* ein Neyman-Pearson-Test mit $\alpha = \beta_{\varphi^*}(\theta_0)$. Dann ist φ^* trennscharf unter allen Tests zum gleichen Niveau α, dass heißt er hat den kleinsten Fehler zweiter Art.

b) Für jedes $\alpha \in (0,1)$ existiert ein Neyman-Pearson-Test φ^* zum Niveau α. Dabei kann $\gamma(x) \equiv \gamma$ gewählt werden.

Beweis

a) Sei φ ein weiterer Test zum Niveau α. Zu zeigen: $1 - \beta_{\varphi^*}(\theta_1) \leq 1 - \beta_\varphi(\theta_1)$
Sei

$$A := \{x \in \chi^n | \varphi^*(x) > \varphi(x)\} \text{ und } B := \{x \in \chi^n | \varphi^*(x) < \varphi(x)\}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow \varphi^*(x) > 0 \qquad & \Rightarrow L_x(\theta_1) \geq c^* L_x(\theta_0) \\ x \in B \Rightarrow \varphi^*(x) < 1 \qquad & \Rightarrow L_x(\theta_1) \leq c^* L_x(\theta_0) \end{aligned}$$

Also (wir betrachten nur den diskreten Fall):

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi^*}(\theta_1) - \beta_\varphi(\theta_1) &= \sum_{x \in \chi^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x))\, L_x(\theta_1) \\ &= \sum_{x \in A} (\varphi^*(x) - \varphi(x))\, L_x(\theta_1) + \sum_{x \in B} (\varphi^*(x) - \varphi(x))\, L_x(\theta_1) \\ &\geq \sum_{x \in A} (\varphi^*(x) - \varphi(x))\, c^* L_x(\theta_0) + \sum_{x \in B} (\varphi^*(x) - \varphi(x))\, c^* L_x(\theta_0) \\ &= c^* \sum_{x \in \chi^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) = c^* \left(\underbrace{\beta_{\varphi^*}(\theta_0)}_{=\alpha} - \underbrace{\beta_\varphi(\theta_0)}_{\leq \alpha} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

b) Für $c \geq 0$ sei

$$\alpha(c) := P_{\theta_0}\left(\frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} > c \right) \text{ sowie } \alpha(c^-) := P_{\theta_0}\left(\frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} \geq c \right)$$

Sei $c^* := \inf\{c | \alpha(c) \leq \alpha\}$. Dann gilt: $\alpha(c^*) \geq \alpha \geq \alpha(c^*)$.
Sei außerdem

$$\gamma^* = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha(c^*-) = \alpha(c^*) \\ \frac{\alpha - \alpha(c^*)}{\alpha(c^*-)\alpha(c^*)}, & \text{falls } \alpha(c^*-) > \alpha(c^*) \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi^*}(\theta_0) &= E_{\theta_0}\varphi^*(X) \\ &= P_{\theta_0}\left(\frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} > c^* \right) + \gamma^* P_{\theta_0}\left(\frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} = c^* \right) + 0 \\ &= \alpha(c^*) + \gamma^*(\alpha(c^{*-}) - \alpha(c^*)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Beispiel 17.1
Es sei $P_\theta \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ und $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ mit $\theta 0 < \theta_1$. Es ist

$$L_x(\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i} = \theta^n e^{-\theta n \overline{X}}$$

Betrachte

$$c^* < q(x) = \frac{L_X(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n e^{n\overline{x}(\theta_0 - \theta_1)} =: q^*(\overline{x})$$

$q^*(\overline{x})$ ist fallen in $\overline{x}$. Also ist der zughörige Neyman-Pearson-Test äquivalent zu:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \overline{X} < c^* \quad (\Leftrightarrow q(x) > \tilde{c}) \\ \gamma^*, & \text{falls } \overline{X} = c^* \quad (\Leftrightarrow q(x) = \tilde{c}) \\ 0, & \text{falls } \overline{X} > c^* \quad (\Leftrightarrow q(x) < \tilde{c}) \end{cases}$$

$\alpha(c) = P_{\theta_0}(\overline{X} < c) = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^n X_i < nc)$
Es ist $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$ für $\theta \in \Theta$. Offenbar ist $\alpha(c) = P_{\theta_0}(\overline{x} < c)$ stetig in c und damit $\gamma^* = 0$. c ist so zu wählen, dass

$$P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n X_i < nc^*\right) \stackrel{!}{=} \alpha$$

Wir betrachten jetzt wieder den Fall:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta > \theta_0$$

Im allgemeinen können wir hier nicht wie vorher einen trennscharfen Test konstruieren. Es gibt aber Spezielfälle wo das klappt.

Definition 17.3
*$\{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ bzw. $\{p(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ heißt **Familie von (Zähl-)Dichten mit monotonen Dichtequotienten**, falls es eine messbare Funktion $T : \chi^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$q(x) = \frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} = q^*(T(X_1, \ldots, X_n))$$

und q^* eine monotone Funktion in $T(x_1, \ldots, x_n) = T(x)$ ist $\forall \theta_0 < \theta_1$

Beispiel 17.2 (vgl. Beispiel 15.3)
Die Familie der Exponentialverteilungen erfüllt die Bedingung mit $T(x) = \overline{x}$.

Satz 17.2

a) Sei $x \in \chi^n$ eine Zufallsstichprobe zu einer Verteilung mit monoton nicht fallendem Dichtequotienten in $T(x)$ Jeder Test der Form:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > t_0 \\ \gamma, & T(x) = t_0 \\ 0, & T(x) < t_0 \end{cases}$$

ist gleichmäßig bester Test für das Testproblem

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta > \theta_0$$

zum Niveau

$$\alpha = E_{\theta_0}(\varphi(X)) = \sup_{\theta \leq \theta_0} E_\theta(\varphi(X))$$

b) Für jedes $\alpha \in (0, 1)$ und $\theta_0 \in \Theta$ existiert ein Test wie in a) beschrieben.