

5 Lebesguesche Räume und Fourier-Reihen

Sei stets $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ versehen mit $\mathcal{B}(X)$ und λ .

Ana III, 30.01.2009

5.1 Die L^p -Räume

Für $p \in [1, \infty)$ setze

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^p(X) &:= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} : \int_X |f|^p dx < \infty \right\}, \\ \mathcal{L}^\infty(X) &:= \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar, (f.a.) beschränkt} \},\end{aligned}$$

sowie für messbare $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|f\|_p &:= \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf \{ c > 0 : \exists N_c \text{ NM mit } |f(x)| \leq c \, \forall x \in X \setminus N_c \}.\end{aligned}$$

Bemerkung. Für stetige $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\sup_{x \in X} |f(x)| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$. Denn sei N_c wie in der obigen Definition. Dann ist $N_c^0 = \emptyset$ (anderenfalls existiert ein $B \subset N_c$ mit $\lambda(B) > 0$, was ein Widerspruch ist). Aus $|f(x)| \leq c$ für alle $x \notin N_c$ folgt mit der Stetigkeit von f , dass $|f(x)| \leq c \, \forall x \in X$. Durch inf-Bildung erhält man $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$. Die andere Abschätzung ist klar mit $N_c = \emptyset$.

Wenn $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$, $1 \leq p < \infty$), dann sagt man “ f_n gegen f im p -ten Mittel”.

TODO: Bild

Interpretation der 1-Norm in [Bsp 4.21](#). Man kann $u(t, x) \geq 0$ als Konzentration eines Stoffes zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in X$ interpretieren. Dann folgt, dass

$$\int_X |u(t, x)| dx = \int_X u(t, x) dx$$

die Gesamtmenge des Stoffes zur Zeit t beschreibt.

Beachte: $\mathcal{L}^1(X)$ ist nach Kapitel 2 ein Vektorraum. Ebenso ist $\mathcal{L}^\infty(X)$ ein Vektorraum, denn wenn $|f_j(x)| \leq c_j$ ($\forall x \notin N_j$), wobei N_j Nullmengen sind, und $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$), dann gilt

$$|\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)| \leq |\alpha_1|c_1 + |\alpha_2|c_2 =: c \quad \forall x \notin N := N_1 \cup N_2 \quad (\text{NM}). \quad (*)$$

Dann folgt $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}^\infty(X)$.

Zu \mathcal{L}^p : Wenn $f \in \mathcal{L}^p(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X)$, $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$. (Folgt aus der Definition).

Setze wie in Ana2 $p' := \frac{p}{p-1}$, wenn $1 < p < \infty$, $1' := \infty$, $\infty' = 1$. Dann gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $\forall p[1, \infty]$.

$$p' = p \Leftrightarrow p = 2, \quad p \in [1, 2) \Leftrightarrow p' \in (2, \infty], \quad p'' = p.$$

Satz 5.1. Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gelten

a) Hölder-Ungleichung: Für $f \in \mathcal{L}^p(X)$, $g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ gelten $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ und

$$\|fg\|_1 = \int |fg| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'} \stackrel{p \in (1, \infty)}{=} \left(\int |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

(Für $p = p' = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

b) Minkowski-Ungleichung: Für $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$ und

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Ferner ist $\mathcal{L}^p(X)$ ein Vektorraum.

Beweis. fg , $|f + g|^p$ sind messbar ($p < \infty$).

a) $p = 1$: Dann folgt $g \in \mathcal{L}^\infty(X) \Rightarrow \exists$ Nullmenge N , $c > 0$ mit $|g(x)| \leq c$ ($\forall x \notin N$).
Setze $\tilde{g} := \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot g$. Dann gilt

$$\int |fg| dx \stackrel{\text{Lem 3.5}}{=} \int |f| \cdot \underbrace{|\tilde{g}|}_{\leq c} dx \leq c \cdot \|f\|_1.$$

Infimumbildung über alle c liefert die Behauptung. Genauso für $p = \infty$.

$1 < p < \infty$: Wenn $\|f\|_p = 0$. oder $\|g\|_{p'} = 0$, dann $|f|^p = 0$ (f.ü.) oder $|g|^{p'} = 0$ (f.ü.) (Lem 2.18). Dann folgt $f = 0$ (f.ü.) oder $g = 0$ (f.ü.). Also $fg = 0$ (f.ü.), womit wir fertig sind.

Anderenfalls liefert die Young'sche Ungleichung (Ana2 Beweis von Satz 1.19) für festes $x \in X$:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g(x)\|_{p'}^{p'}}.$$

Integralbildung auf beiden Seiten liefert

$$\int |f| \cdot |g| dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \cdot \underbrace{\int |f(x)|^p dx}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \cdot \|g\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Daraus folgt $fg \in \mathcal{L}^1(X)$, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$.

- b) $p = 1$: Kapitel 2. $p = \infty$: Die Behauptung folgt mit Infimumbildung über c_1, c_2 in $(*)$ mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Sei $p \in (1, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p dx &= \|f + g\|_p^p = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} dx + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \left(\int |f + g|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad + \|g\|_p \cdot \left(\int |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Damit folgt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Dass $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt, folgt aus $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p)$, was integrierbar ist.

□

Beispiel 5.2. Sei $X = [1, \infty)$ und $f(x) = x^{-\alpha}$, $g(x) = x^{-\beta}$ für Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Dann $f \in \mathcal{L}^p(X) \Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-\alpha p} dx < \infty \Leftrightarrow \alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$, $g \in \mathcal{L}^{p'}(X) \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{p'}$, $fg \in \mathcal{L}^1(X) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 1$, wobei $p \in (1, \infty)$.

Korollar 5.3. Sei $\lambda(X) < \infty$. Dann $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$ für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $\|f\|_p \leq \lambda(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q$ ($\forall f \in \mathcal{L}^q(X)$). Mit $p = 1$ folgt

$$\left(\frac{1}{\lambda(X)} \cdot \int_X |f| dx \right)^q \leq \frac{1}{\lambda(X)} \cdot \int_X |f|^q dx.$$

Also folgt aus $f_n \rightarrow f$ bezüglich der q -Norm, dass auch $f_n \rightarrow f$ bezüglich der p -Norm. (Ersetze f durch $f_n - f$)

Beweis. Für $q = p$ und $p = \infty$ ist die Aussage klar. Sei $p < q < \infty$, $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Dann gilt für $r := \frac{p}{q} \in (1, \infty) \Rightarrow r' = \frac{q}{q-p}$, $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$ (*):

$$\int_X |f|^p dx = \int_X 1 \cdot |f|^p \stackrel{\text{Hoelder}}{\leq}_{\text{mit } r} \left(\int_X (1^{r'}) dx \right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Damit folgt

$$\int_X |f|^p dx \leq \lambda(X)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_X |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \stackrel{\text{nach Vor.}}{\leq} \infty.$$

Durch die Abschätzung mit der p -ten Wurzel folgt dann die Behauptung. \square

Beispiel 5.4. a) Sei $X = (0, 1]$, $f(x) = x^{-\alpha}$ für eine Konstante $\alpha > 0$. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^p((0, 1]) \Leftrightarrow \int_0^1 x^{-\alpha p} dx < \infty \Leftrightarrow \alpha p < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{p}.$$

Damit gilt $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ und mit $p < q$ liegt f in $\mathcal{L}^p(X)$, aber nicht in $\mathcal{L}^q(X)$. Also gilt $\mathcal{L}^q \subsetneq \mathcal{L}^p(X)$.

b) Wenn $\lambda(X) < \infty$, dann gibt es keine Inklusion zwischen $\mathcal{L}^p(X)$ und $\mathcal{L}^q(X)$ (bezüglich λ).

Beispiel. $p = 1$, $X = [1, \infty)$. Dann ist $f(x) = \frac{1}{x}$ in $\mathcal{L}^q(X) \forall q > 1$, aber $f \notin \mathcal{L}^1(X)$.

Ferner liegt $g(x) = \mathbf{1}_{[1,2)}(x) \cdot (2-x)^{-\frac{1}{q}}$ nicht in $\mathcal{L}^q(X)$, aber in $\mathcal{L}^1(X)$.

Satz 5.5 (Majorisierte Konvergenz). Seien $1 \leq p < \infty$, $f_n \in \mathcal{L}^p(X)$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *messbar*, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ (f.ü.), $|f_n|^p \leq g$ (f.ü.) für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $g \in \mathcal{L}^p(X)$. Dann gelten $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Beweis. $p = 1$: **Satz von Lebesgue**. Sei also $p > 1$. Dann gilt $|f|^p \leq g$ (f.ü.) und $|f(x) - f_n(x)|^p \leq (f(x) + g(x))^p \leq (2 \cdot g(x)^{\frac{1}{p}})^p = 2^p \cdot g(x)$ (f.a.) x . Ferner gilt $|f - f_n|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (f.ü.). **Lebesgue** angewendet auf $|f - f_n|^p$ liefert $\|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - f_n|^p dx \rightarrow 0$. Dass $f \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt, folgt aus $|f|^p \leq g$ (f.ü.). \square

Beispiel. Sei $f_n = n \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n})}$, $X = \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty)$. Dann folgt $f_n \in \mathcal{L}^p(X)$ und $f_n \rightarrow 0$ punktweise. Aber es gilt $\|f_n\|_p = n^{1-\frac{1}{p}} \nrightarrow 0$. (Vergleiche **Bem 3.11**)

Ana III, 02.02.2009

Ab jetzt sei stets $1 \leq p < \infty$.

Es ergibt sich folgendes Problem:

$$\left(\int_X |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0 \text{ (f.ü.)} \Leftrightarrow f = 0 \text{ (f.ü.)}.$$

Also ist die Normeigenschaft (N1) verletzt ((N2) und (N3) gelten allerdings in \mathcal{L}^p). Damit ist $\|\cdot\|_p$ ist keine Norm auf \mathcal{L}^p .

Ausweg: Definiere

$$\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ messbar, } f = 0 \text{ (f.ü.)}\}.$$

Dann ist \mathcal{N} ein Untervektorraum von \mathcal{L}^p . Wir setzen

$$L^p := \mathcal{L}^p / \mathcal{N} \text{TODO} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} : f \in \mathcal{L}^p(X)\}. \quad (5.1)$$

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass auch L^p ein Vektorraum ist (bezüglich der kanonischen Verknüpfungen.) Beachte:

$$\hat{f} = \hat{g} \Leftrightarrow f = g \text{ (f.ü.) } \forall f \in \hat{f}, g \in \hat{g}.$$

Für $\hat{f} \in L^1$ definiere

$$\int_X \hat{f} dx := \int_X f(x) dx \quad (5.2)$$

für einen beliebigen Repräsentanten $f \in \hat{f}$. Mit [Lem 3.5](#) folgt, dass (5.2) repräsentantenunabhängig ist, denn sei g ein weiterer Repräsentant von \hat{f} , d.h. $\hat{f} = \hat{g}$, dann gilt $f = g$ (f.ü.).

Für das Integral in (5.2) gelten die bekannten Regeln. Somit ist $\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$ für ein beliebiges $f \in \hat{f}$ wohldefiniert. Vorsicht: $\hat{f} \mapsto f(x)$ für einen Repräsentanten $f \in \hat{f}$ und ein $x \in X$ definiert keine Abbildung von $L^p(X)$ nach \mathbb{R} !

Num: $\|\hat{f}\|_p = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{N}$ für jeden Repräsentanten $f \in \hat{f} \Rightarrow \hat{f} = 0$. Weiter seien $\hat{f}, \hat{g} \in L^p(X)$ mit Repräsentanten f, g , sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- $\|\alpha \hat{f}\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} \|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} |\alpha| \cdot \|\hat{f}\|_p$
- $\|f + g\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} \|f + g\|_p \stackrel{\text{Satz 5.1b}}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} \|\hat{f}\|_p + \|\hat{g}\|_p.$

Also definiert $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $L^p(X)$.

Seien $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in L^2(X)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nach [Hoelder](#) existiert für beliebige Repräsentanten $f \in \hat{f}, g \in \hat{g}$

$$(\hat{f}|\hat{g}) = \int_X f(x) \cdot g(x) dx. \quad (5.3)$$

Es gelten

$$|(\hat{f}|\hat{g})| \leq \int_X |fg| dx \stackrel{\text{Hoelder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \stackrel{\text{Def.}}{=} \|\hat{f}\|_p \cdot \|\hat{g}\|_p, \quad (5.4)$$

$$(\hat{f}|\hat{g}) = (\hat{g}|\hat{f}),$$

$$(\alpha \hat{f} + \beta \hat{h}|\hat{g}) = \alpha(\hat{f}|\hat{g}) + \beta(\hat{h}|\hat{g}) \quad (5.5)$$

und

$$(\hat{f}|\hat{f}) = \int_X |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2. \quad (5.6)$$

Damit ist $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum $L^2(X)$ mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_2 = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$.

Definition. Ein Banachraum, dessen Norm wie in (5.6) von einem Skalarprodukt induziert wird, heißt Hilbertraum.

Bemerkung. Setze $\infty^p := \infty$. Dann ist die Abbildung $\varphi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty], x \mapsto x^p$ messbar, da $\varphi^{-1}([a, \infty]) = [a^{\frac{1}{p}}, \infty] \in \bar{\mathcal{B}}_1$ ($\forall a \geq 0$).

Theorem 5.6 (Riesz/Fischer). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(X)$, $1 \leq p < \infty$ eine Cauchy-Folge bezüglich der p -Norm. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und eine Teilfolge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$, sodass $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und $f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ (f.ü.). Ferner ist $L^p(X)$ ein Banachraum und $L^2(X)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. 1) Zweite Behauptung: Wenn $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X)$ ist, dann gilt für Repräsentanten $f_n \in \hat{f}_n$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p \leq \epsilon \quad (\forall n, m \geq N_\epsilon).$$

Damit ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(X)$. Nach der ersten Behauptung existiert dann ein $f \in \mathcal{L}^p(X)$, sodass

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p = \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist $L^p(X)$ ein Banachraum und $L^2(X)$ ist ein Hilbertraum.

2) Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(X)$. Wähle (mittels $e_j := 2^{-j}$) eine Teilfolge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|f_l - f_{n_j}\|_p \leq \epsilon = 2^{-j}, \quad \forall l \geq n_j \quad (*)$$

Setze $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$ für $j \in \mathbb{N}$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_N &:= \left(\int_X \left(\sum_{j=1}^N |g_j(x)| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \sum_{j=1}^N |g_j| \right\|_p \stackrel{\text{Satz 5.1b}}{\leq} \sum_{j=1}^N \|g_j\|_p \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^N 2^{-j} \leq 1 \quad (\forall N \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_X \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j(X)| \right)^p}_{=: g(x) \text{ messbar}} dx &= \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N |g_j(x)| \right)^p dx \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \varliminf_{N \rightarrow \infty} \int_X \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N |g_j| \right)^p}_{=s_N^p} dx \leq 1. \end{aligned}$$

Also liegt $g \in \mathcal{L}^p(X)$ und somit existiert eine Nullmenge N mit $g(x)^p < \infty \forall x \notin N$ ($\Leftrightarrow g(x) < \infty \forall x \notin N$) (wegen [Kor 2.24](#)). Mit unserem Wissen aus Ana1 folgt

$$\exists \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \in \mathbb{R} \quad (\forall x \notin N).$$

Weiter gilt

$$\sum_{j=1}^{m-1} g_j = f_{n_m} - f_{n_1} \quad (\forall m \in \mathbb{N}). \quad (**)$$

Daraus folgt

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x) =: f(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \notin N.$$

Setze $f(x) := 0 \forall x \in N$. Dann ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ [messbar](#) und $f_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ (f.ü.). Ferner gilt

$$|f_{n_m}| \stackrel{(**)}{\leq} |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{m-1} |g_j| \leq |f_{n_1}| + g =: h,$$

wobei $h \in \mathcal{L}^p(X)$, $m \in \mathbb{N}$.

Mit [Satz 5.5](#) folgt dann $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $\|f_{n_m} - f\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Für $\epsilon > 0$ wähle m mit $2^{-m} \leq \epsilon$ und $\|f - f_{n_m}\|_p \leq \epsilon$. Sei $l \geq n_m =: N_\epsilon$. Dann gilt

$$\|f_l - f\|_p \leq \|f_l - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p \stackrel{(*)}{\leq} 2\epsilon.$$

□

Beispiel 5.7. Sei $X = [0, 1]$, $I_n = [0, 1], [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \dots$. Setze $f_n := \mathbf{1}_{I_n}$. Damit $\|f_n\|_p = \lambda(I_n)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Aber: $\forall x \in [0, 1] \exists$ eine Teilfolge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $f_{n_j}(x) = 1 \nrightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). Also gilt $f_n(x) \nrightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) für jedes $x \in [0, 1]$.

Also folgt aus Konvergenz $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $\mathcal{L}^p(X)$ nicht die punktweise Konvergenz $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in \mathbb{R} .

Korollar 5.8. Seien $\hat{f}_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$, $1 \leq p, q < \infty$ und $\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{f}$ in $L^p(X)$, $\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{g}$ in $L^q(X)$. Dann gilt $f = g$ (f.ü.) für alle Repräsentanten $f \in \hat{f}$ und $g \in \hat{g}$, also $\hat{f} = \hat{g} \in L^p(X) \cap L^q(X)$.

Beweis. Seien f, g, h Repräsentanten von $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$. Dann folgt mit [Thm 5.6](#), dass Teilfolgen (n_m) , (n_{m_l}) und Nullmengen N_1, N_2 existieren, sodass

$f_{n_m}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x) \forall x \notin N_1$, $f_{n_{m_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \forall x \notin N_2$. Daraus folgt, dass $f(x) = g(x) \forall x \notin N_1 \cup N_2$ gilt, wobei $N_1 \cup N_2$ selbst auch eine Nullmenge ist. □

Bemerkung 5.9. Die Abbildung $J : \mathcal{L}^p(X) \cap C(X) \rightarrow L^p(X)$, $Jf = \hat{f}$ ist injektiv und linear. Wir identifizieren deshalb $\mathcal{L}^p(X) \cap C(X)$ mit dem neuen Teilraum $L^p(X)$.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(X) \cap C(X)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann folgt, dass eine Nullmenge N existiert, sodass $f(x) = g(x) \forall x \notin N$. Sei $y \in N$. Dann existiert $x_n \notin N$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ (da $N^0 = \emptyset$). Aus der Stetigkeit von f und g folgt $f(y) = g(y)$. \square

Im Folgenden schreiben wir f statt \hat{f} und identifizieren $L^p(x)$ mit $\mathcal{L}^p(X)$.

Bemerkung 5.10. Stetig sind

- a) $L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_p$. (Gilt in jedem normierten Vektorraum)
- b) $L^1(X) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_X f(x)dx$, denn, wenn $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in L^1 , dann gilt

$$\left| \int_X f_n dx - \int_X f dx \right| \leq \int_X |f_n - f| dx = \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- c) $L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto (f|g)$ (Beweis siehe Übung).