

Skript zur Vorlesung

# Algebraische Geometrie I

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Wintersemester 2010/2011

Jonathan Zachhuber, Jens Babutzka und Michael Fütterer  
Karlsruher Institut für Technologie



# Inhaltsverzeichnis

<b>i</b>	<b>Die Kategorie der affinen Varietäten</b>	<b>7</b>
1	Affine Varietäten und Verschwindungsideale . . . . .	7
2	Zariski-Topologie . . . . .	8
3	Der Hilbertsche Nullstellensatz . . . . .	13
4	Morphismen zwischen affinen Varietäten . . . . .	16
5	Die Garbe der regulären Funktionen . . . . .	20
6	Rationale Abbildungen . . . . .	26
7	Spektrum eines Rings . . . . .	30
<b>ii</b>	<b>Projektive Varietäten</b>	<b>39</b>
1	Der Projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$ . . . . .	39
2	Projektive Varietäten . . . . .	40
3	Quasi-projektive Varietäten . . . . .	48
4	Reguläre Funktionen . . . . .	49
5	Morphismen . . . . .	53
6	Graßmann-Varietäten . . . . .	59
<b>iii</b>	<b>Geometrische Eigenschaften</b>	<b>63</b>
1	Lokale Ringe zu Punkten . . . . .	63
2	Dimension von Varietäten . . . . .	66
3	Der Tangentialraum . . . . .	70
4	Der singuläre Ort einer Varietät . . . . .	76
5	Reguläre Ringe und Krullscher Höstensatz . . . . .	79
<b>iv</b>	<b>Nicht-singuläre Kurven</b>	<b>83</b>
1	Divisoren . . . . .	83
2	Verzweigungsindizes . . . . .	86
3	Das Geschlecht einer Kurve . . . . .	92
4	Der Satz von Riemann-Roch . . . . .	96
<b>v</b>	<b>Liste der Sätze</b>	<b>99</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>101</b>



# Motivation

**Ziel:** *Untersuche Nullstellenmengen von Polynomen: Für eine Menge von Polynomen*

$$p_1, \dots, p_r \in k[X_1, \dots, X_n]$$

*über einem Körper  $k$  möchte man die Menge der Nullstellen*

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid p_i(x) = 0 \text{ für alle } i\}$$

*analysieren.*

- BEISPIEL: (a) Betrachte  $ax^2 + by^2 = 1 \iff ax^2 + by^2 - 1 = 0$  über  $k = \mathbb{R}$ . Das liefert eine Ellipse, für  $a = b = 1$  einen Kreis.
- (b) Betrachte  $x^2 + y^2 = z^2$ .
- (c) Betrachte (b) mit  $x = 1$ : Dann ist  $1 + y^2 = z^2 \iff 1 = z^2 - y^2$ , also eine Hyperbel.
- (d) Bei linearen Gleichungen sehen wir mit Hilfe der linearen Algebra, dass wir affine Unterräume erhalten.
- (e) Die Lösungsmengen sind abhängig vom Körper, z.B. sehen wir, dass das Polynom  $X^3 - X$  für  $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  als Lösungsmenge ganz  $k$  hat.

*Der Inhalt der Vorlesung wurde in großen Teilen von der Algebraischen-Geometrie-Vorlesung von Prof. Dr. Frank Herrlich inspiriert.*

