

5. Potenzreihen

Im Folgenden sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ und $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Definition

- (1) (f_n) heisst auf A **punktweise konvergent** : $\iff \forall z \in A$ ist $(f_n(z))$ konvergent.
In diesem Fall heisst $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, die **Grenzfunktion** von (f_n) .

- (2) (f_n) heisst auf A **gleichmaessig (glm) konvergent** : $\iff \exists f : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall z \in A$$

In diesem Fall sagt man : (f_n) konvergiert auf A gleichmaessig gegen f .

- (3) (f_n) heisst auf A **lokal gleichmaessig konvergent** : $\iff (f_n)$ konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmaessig. ($\iff \forall a \in A \exists \rho > 0 : (f_n)$ konvergiert auf $U_\rho(a) \cap A$ gleichmaessig)

- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A punktweise : $\iff (s_n)$ konvergiert auf A punktweise.
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A gleichmaessig : $\iff (s_n)$ konvergiert auf A gleichmaessig.
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A lokal gleichmaessig : $\iff (s_n)$ konvergiert auf A lokal gleichmaessig.

Klar: gleichmaessig Konvergenz \implies lokal gleichmaessig Konvergenz \implies punktweise Konvergenz.

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 5.1

- (1) (f_n) konvergiert auf A gleichmaessig gegen f , alle f_n seien in $z_0 \in A$ stetig. $\implies f$ ist in z_0 stetig.

- (2) **Cauchy Kriterium:**

$$(f_n) \text{ konvergiert auf A gleichmaessig} \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \forall z \in A$$

- (3) **Kriterium von Weierstrass:**

Sei (a_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ konvergiert und $|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in A$.

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf A gleichmaessig.

Definition

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} und $z_0 \in \mathbb{C}$.

Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heisst eine **Potenzreihe (PR)**.

Wir setzen $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ($\rho = \infty$ falls $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt) und

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}.$$

r heisst der **Konvergenzradius (KR)** der Potenzreihe.

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 5.2

Die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r

- (1) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur in $z = z_0$
- (2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut.
Die Potenzreihe konvergiert auf \mathbb{C} lokal gleichmässig.
- (3) Ist $0 < r < \infty$ so gilt:
 - (i) die Potenzreihe konvergiert in jedem $z \in U_r(z_0)$ absolut.
 - (ii) die Potenzreihe divergiert zu jedem $z \notin \overline{U_r(z_0)}$.
 - (iii) für $z \in \partial U_r(z_0)$ ist keine allgemeine Aussage möglich.
 - (iv) die Potenzreihe konvergiert auf $U_r(z_0)$ lokal gleichmässig.

Beispiel:

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Für $|z| = 1$ ist z^n keine Nullfolge $\implies \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist divergent zu jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.
- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 0$.
- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Sei $|z| = 1$, $|\frac{z^n}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$; Majorantenkriterium $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert.
- (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wie in der Analysis: die Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

Satz 5.3

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r . Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius r .

Beweis

$$\alpha_n = na_n; \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}; \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad \blacksquare$$

Definition

Für $z_0 \in \mathbb{C} : U_{\infty}(z_0) := \mathbb{C}$.

Satz 5.4

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$ ($r = \infty$ zugelassen). Die Funktion $f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Dann

$$(1) \quad f \in H(U_r(z_0)) \text{ und } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

(2) f ist auf $U_r(z_0)$ beliebig oft komplex db und

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \quad \forall z \in U_r(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Beweis

(1) O.B.d.A $z_0 = 0$.

Für $w \in U_r(0) : g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1}$. Sei $w \in U_r(0)$. Wähle $\rho > 0$, so daß $|w| < \rho < r$.

$b_n := n^2|a_n|\rho^{n-2}$ ($n \geq 2$); $\sqrt[n]{|b_n|} \rightarrow \frac{\rho}{r} < 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ konvergent; $c := \sum_{n=2}^{\infty} b_n$. Sei $z \in U_{\rho}(0)$

und $z \neq w$. Betrachte dann

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \frac{1}{z-w} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - w^n) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1} \right)}_{=: \alpha_n}.$$

$$\text{Nachrechnen: } \alpha_n = (z-w) \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= |z-w| \left| \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1} \right| \leq |z-w| \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{k}_{< \rho} \underbrace{|w|^{k-1}}_{< \rho} \underbrace{|z|^{n-k-1}}_{< \rho} \\ &\leq |z-w| \sum_{k=1}^{n-1} k\rho^{n-2} = |z-w|\rho^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \leq |z-w|\rho^{n-2}n^2 \\ &\Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \alpha_n \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |\alpha_n| \end{aligned}$$

5. Potenzreihen

$$\leq \left(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 \rho^{n-2} \right) |z - w| = c |z - w|$$
$$\Rightarrow (z \rightarrow w) \text{ } f \text{ ist in } w \text{ komplex db und } f'(w) = g(w)$$

(2) folgt aus (1) induktiv.

(3) folgt aus (2) mit $z = z_0$. ■

Definition

Seien $r_1, r_2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Dann

$$\min\{r_1, r_2\} = \begin{cases} \min\{r_1, r_2\} & , \text{ falls } r_1, r_2 < \infty \\ r_2 & , \text{ falls } r_1 = \infty \\ r_1 & , \text{ falls } r_2 = \infty \end{cases}$$

Satz 5.5

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2 . Dann hat für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n$ einen Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$

Beweis

Klar. ■

Beispiel

$$a_n = b_n, \alpha = 1, \beta = -1$$