L^2-Theorie

Christian Schulz

12. Dezember 2016

In diesem Papier, wird die Fortsetzung der Fouriertransformation auf L^2 erarbeitet.

Motivation: Für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ muss das Fouriertransformationsintegral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-iw\cdot t}dt$$

nicht existieren. Um eine Fouriertransformation für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zu definieren müssen wir anders vorgehen. Die Idee ist klassische Analysis. Wir nehmen zunächst eine dichte Menge X ($\emptyset \neq X \subset L^2(\mathbb{R}^n)$) auf der die Fouriertransformation definiert ist. Dann folgt mit dem Fortsetzungssatz für stetige Abbildungen die eindeutige Existenz auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition

(1) Das n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wird im folgenden als *Multi-Index* bezeichnet.

(2) $|\alpha| = \sum \alpha_i$ wird als *Ordnung* bezeichnet.

(3) Für $t \in \mathbb{R}^n$ sei $t^\alpha := \prod t_i^{\alpha_i}$.

(4) $D^\alpha = \prod(\frac{\partial}{\partial x_i})^{\alpha_i}$

(5) $D_\alpha = \mathrm{i}^{-|\alpha|}\mathrm{D}^\alpha = \prod(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}})^{\alpha_\mathrm{i}}$

(6) $P(\xi) := \sum c_\alpha \xi^\alpha = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$

(7) $P(D) := \sum c_\alpha D_\alpha$, $P(-D) := \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha$

(8) $e_t(x) := e^{\mathrm{it\cdot x}} = e^{\mathrm{i(t_1x_1+\cdots+t_1x_n)}}$ $\forall t, x \in \mathbb{R}^n$

(9) $dm_n(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}dx$

(10) $(\tau_x f)(y) := f(y-x)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$

Beispiel
In obiger Definition folgt: $\forall t, x \in \mathbb{R}^n : P(D)e_t = P(t)e_t$

Beweis
Seien $t, x \in \mathbb{R}^n$ bel. $\Rightarrow P(D)e_t = \sum c_\alpha D_\alpha e_t(x)$
$= \sum c_\alpha (\frac{1}{\mathrm{i}})^{|\alpha|} D^\alpha e^{\mathrm{i}(\mathrm{t_1 x_1 + \cdots + t_1 x_n})}$
$= \sum c_\alpha (\frac{1}{\mathrm{i}})^{|\alpha|} \mathrm{i}^{|\alpha|} \mathrm{t}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{t}_\mathrm{n}^{\alpha_n} \mathrm{e_t(x)} = \sum c_\alpha t^\alpha e_t(x) = P(t)e_t$ ■

Beispiel
Der Ausdruck Fouriertransformation wird für die Abbildung benutzt, die f auf $\hat{f}$ abbildet. Dabei sei angemerkt, dass gilt

$$\widehat{f}(t) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t} dm_n = (f * e_t)(0)$$

Definition (Schnell fallende Funktionen)
Sei $\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha f)(x)| < \infty, N \in \mathbb{N}_0\}$ der *Raum der schnell fallenden Funktionen* ($|x|^2 = \sum x_i^2$).

Bemerkung: Mit anderen Worten gilt für alle $f \in \mathcal{S}$, dass $PD_\alpha f$ eine beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist und zwar für jedes Polynom P und jeden Multi-Index α.

Folgerung 0.1
$\mathcal{S}$ ist ein Vektorraum.

Beweis
Sei $\psi, \phi \in \mathcal{S}$ und $\delta := \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N |(D_\alpha \psi)(x)|$, $\widetilde{\delta} := \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N |(D_\alpha \phi)(x)| \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \sup_{|\widetilde{\alpha}| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_{\widetilde{\alpha}} (\alpha\psi + \phi))(x)| \leq \alpha\delta + \widetilde{\delta} \leq \max\{|\alpha|, 1\} \max\{\delta, \widetilde{\delta}\} =: \gamma$ ■

Beispiel
$\phi(x) := e^{-x^2}, \phi \in \mathcal{S}$.

Beweis
Es gilt $\phi'(x) = -2xe^{-x^2}, \phi''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 1), ...$ es folgt per Induktion, dass $\phi^{(n)}(x) = p(x) * e^{-x^2}$ (p Polynom) $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Da $\lim_{x \to \pm\infty} \phi^{(n)}(x) = 0$ gilt folgt, dass $\widetilde{p}\phi^{(n)}$ beschränkt ist, wobei $\widetilde{p}$ ein bel. Polynom ist. ■

Satz 0.2
(1) $\mathcal{S}$ ist ein Fréchet Raum.

(2) Sei P ein Polynom, $g \in \mathcal{S}$, und α ein Multi-Index. Dann sind folgende Abbildungen stetig und linear:
$T_1 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, f \mapsto Pf$
$T_2 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, f \mapsto gf$
$T_3 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, f \mapsto D_\alpha f$

(3) Sei $f \in \mathcal{S}$ und P ein Polynom, dann gilt

$$(P(D)f)\widehat{\ } = P\widehat{f} \text{ und } (Pf)\widehat{\ } = P(-D)\widehat{f}.$$

(4) Die Fouriertransformation ist eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$.

Beweis

(1) Sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{S}$. D.h. $\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : ||f_m - f_n|| < \epsilon$ $\forall n > m \geq n_0$. Für jedes Paar von Multi-Indizes α, β konvergiert die Funktion $x^\beta D^\alpha f_i(x)$ (gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$) gegen die beschränkte Funktion $g_{\alpha\beta}$ (für $i \to \infty$) $\Rightarrow$

$$g_{\alpha\beta} = x^\beta D^\alpha g_{00}(x)$$

und damit folgt $f_i \to g_{00} \Rightarrow \mathcal{S}$ ist vollständig.

(2) Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann ist offensichtlich $D_\alpha f \in \mathcal{S}$, $Pf \in \mathcal{S}$ und $gf \in \mathcal{S}$. Die Stetigkeit der drei Abbildungen folgt aus dem *closed graph theorem*.

(3) Sei $f \in \mathcal{S} \Rightarrow P(D)f \in \mathcal{S}$ und

$$(P(D)f) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t] \qquad .$$

Wenn man diese Funktionen nun im Ursprung des $\mathbb{R}^n$ auswertet, liefert uns das den ersten Teil von (3). Nämlich:

$$(P(D)f)\widehat{\ }(t) = P(t)\widehat{f}(t)$$

Sei $\widetilde{t} := (t_1 + \epsilon, ..., t_n), t := (t_1, ..., t_n), x \in \mathbb{R}^n$
$h(x) := e_{-\widetilde{t}}(x) - e_{-t}(x) = e^{-\mathrm{i}((t_1+\epsilon)x_n+\cdots+t_nx_n)} - e^{-\mathrm{i}(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}$
$= (e^{-\mathrm{i}\epsilon x_1} - 1)e_{-t}(x)$

Sei weiterhin $\gamma(x_1, \epsilon) := \frac{e^{-\mathrm{i}\epsilon x_1}-1}{\mathrm{i}\epsilon x_1} = \frac{h(x)}{\mathrm{i}\epsilon x_1 e_{-t}(x)}$.

Betrachte
$\lim_{\epsilon\to 0} \gamma(x_1, \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-\mathrm{i}\epsilon x_1}-1}{\mathrm{i}\epsilon x_1} = \lim_{\epsilon\to 0} -e^{-\mathrm{i}\epsilon x_1} = -1$

Nun gilt:

$\frac{\widehat{f}(\widetilde{t})-\widehat{f}(t)}{\mathrm{i}\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{h(x)}{\mathrm{i}\epsilon}dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x)\frac{h(x)}{\mathrm{i}\epsilon x_1 e_{-t}(x)}e_{-t}(x)dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x)\gamma(x_1, \epsilon)e_{-t}(x)dm_n$

Da $x_1 f \in L^1$ folgt für $\epsilon \to 0$ mit dem Satz von der dominierenden Konvergenz

$$-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t_1}\widehat{f} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x)e_{-t}(x)dm_n$$

und damit der zweite Teil der Behauptung für den Fall $P(x) = x_1$. Der allgemeine Fall folgt durch Iteration.

(4) Sei $f \in \mathcal{S}$ und $g(x) = \underbrace{(-1)^{|\alpha|}x^\alpha}_{:=\widetilde{P}(x)} f(x) \Rightarrow g \in \mathcal{S}$. Nun folgt mit (3), dass $\widehat{g} = D_\alpha \widehat{f}$, denn

$$\widehat{g} = \widehat{\widetilde{P}f} = \widetilde{P}(-D)\widehat{f} = D_\alpha \widehat{f}$$

und $P\widehat{g} = (P(D)g)\widehat{}$, welche eine beschränkte Funktion ist, da $P(D)g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Das beweist, dass $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Wenn $f_i \to f$ in $\mathcal{S}$ dann folgt $f_i \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Schließlich folgt nun direkt $\widehat{f_i} \to \widehat{f}$ $\forall t \in \mathbb{R}^n$. Die Stetigkeit der Abbildung $f \to \widehat{f}$ von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, folgt wieder aus dem closed graph theorem.

Satz 0.3

(1) $(\tau_x f)\widehat{} = e_{-x}\widehat{f}$

(2) Sei $\lambda > 0$ und $h(x) = f(x/\lambda) \Rightarrow \widehat{h}(t) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda t)$

Satz 0.4 (Das Inversionstheorem)

(1) $g \in \mathcal{S} \Rightarrow g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n$ $(x \in \mathbb{R}^n)$

(2) Die Fouriertransformation ist eine stetige, lineare, 1-zu-1 Abbildung von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$, dessen Inverse ebenfalls stetig ist.

(3) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} e_x dm_n$ $(x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow$
$f(x) = f_0(x)$ fast überall $(x \in \mathbb{R}^n)$

Beweis

(1) Zunächst gilt die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$$

Sei nun $g \in \mathcal{S}, \phi \in \mathcal{S}, \lambda > 0$ und $f(x) = \phi(x/\lambda)$. Dann gilt

$$\Gamma(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} g(\tfrac{t}{\lambda})\widehat{\phi}(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\tfrac{t}{\lambda})\phi(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n \widehat{g}(\lambda t)\phi(t) dm_n(t)$$

Nun führt man eine Substitution durch mit $\gamma(t) = \frac{y}{\lambda}$. Es gilt $\gamma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ und $det(\gamma'(t)) = \frac{1}{\lambda^n}$

$\Rightarrow \Gamma(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)\phi(\frac{y}{\lambda})dm_n(y)$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g(\frac{t}{\lambda})\widehat{\phi}(t)dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)\phi(\frac{y}{\lambda})dm_n(y)$

Nun konvergiert für $\lambda \to \infty$, $g(\frac{t}{\lambda}) \to g(0)$ und $\phi(\frac{y}{\lambda}) \to \phi(0)$ beschränkt. Satz von der dominierenden Konvergenz $\Rightarrow$

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(t)dm_n(t) = \phi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)dm_n(t)$$

Sei nun $\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. Dann gilt die Behauptung für den Fall $x = 0$, denn

$$g(0) = g(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(t)dm_n(t)}_{=1} = \underbrace{\phi(0)}_{=1} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)dm_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \underbrace{e_0}_{=1} dm_n(y).$$

Der allgemeine Fall folgt direkt, denn

$$g(x) = (\tau_{-x}g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_{-x}g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n$$

(2) Sei vorrübergehend $\phi g = \widehat{g}$. Die Inversionsformel (1) liefert uns schon, dass ϕ eine 1-zu-1 Abbildung ist, da offensichtlich $\widehat{g} = 0 \Rightarrow g = 0$. Es zeigt sich weiterhin, dass $\phi^2 g = \check{g}$, wobei $\check{g} = g(-x)$. Denn

$$\phi^2 g = \phi\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_{-t} dm_n = g(-t)$$

Nun folgt $\phi^4 g = g$ und damit, dass ϕ $\mathcal{S}$ komplett auf $\mathcal{S}$ abbildet. Die Stetigkeit von ϕ wurde schon in Satz 1.2.4 bewiesen. Da $\phi^{-1} = \phi^3$ gilt, folgt auch die Stetigkeit von ϕ^{-1}.

(3) Es gilt zunächst für $g \in \mathcal{S}$

$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} e_x dm_n \widehat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} e_x dm_n dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dm_n$

Also:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \widehat{g}\ dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g}\ dm_n$$

Aus (2) folgt, dass mit $\widehat{g}$ alle schnell fallenden Funktionen abgedeckt werden. Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_0 - f)\phi\ dm_n = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

und (durch eine Approximation (Übung)) damit gilt diese Identität für jede stetige Funktion ϕ mit kompakten Träger. Es folgt fast überall $f_0 - f = 0$.

Satz 0.5 (Plancherel Theorem)
Es existiert eine Isometrie $\Psi : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, welche eindeutig festgelegt ist durch

$$\Psi f = \widehat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

Bemerkung: Man beachte, dass die Gleichheit $\Psi f = \widehat{f}$ erweitert wird von $\mathcal{S}$ zu $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, da $\mathcal{S}$ sowohl dicht in L^2 als auch in L^1 liegt. Das liefert uns die Übereinstimmung: das Gebiet von Ψ ist L^2. $\widehat{f}$ wurde schon definiert für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\Psi f = \widehat{f}$, falls beide Definitionen anwendbar sind. Daher erweitert Ψ die Fouriertransformation von $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ zu $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese Erweiterung nennt man immer noch Fouriertransformation, und die Notation $\widehat{f}$ wird beibehalten.

Beweis
Es sei $f, g \in \mathcal{S}$, dann liefert uns das Inversionstheorem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}\; dm_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x)\; dm_n(x) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) e^{ix\cdot t}\; dm_n(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t)\; dm_n(t) \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) e^{ix\cdot t}\; dm_n(x)\end{aligned}$$

Das letzte innere Integral ist das komplex Konjugierte von $\widehat{g}(t)$.
Das liefert uns die Parseval Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}\; dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\overline{\widehat{g}}\; dm_n \; (f, g \in \mathcal{S})$$

Wir spezialisieren nun $g = f$, dann folgt

$$||f||_2 = ||\widehat{f}||_2 \quad f \in \mathcal{S} \qquad .$$

Nun folgt, da $\mathcal{S}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, dass die Abbildung $f \to \widehat{f}$ eine Isometrie (relativ zur Metric in L^2) von $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist. Mit dem Satz über die eindeutige Fortsetzung folgt, dass $\psi : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ eine linieare Isometrie von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist.

Appendix:

Satz 0.6 (Exkurs: Closed Graph Theorem)
Es gelte:

(1) X und Y sind F-Räume

(2) $\Psi : X \to Y$ sei linear

(3) $G = \{(x, \Psi x) | x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$

Dann ist Ψ stetig.

Satz 0.7 (Exkurs: Eindeutige stetige Fortsetzung)
Sei X, Y metrische Räume und A sei dicht in X, $f : A \to Y$ sei gleichmäßig stetig. Dann gilt:

(1) f hat eine eindeutige stetige Fortsetzung $F : X \to Y$

(2) f ist Isometrie $\Rightarrow$ F ist Isometrie und $F(X)$ ist abgeschlossen in Y.