Kapitel 5

Zufallsvariable, Verteilung, Verteilungsfunktion

5.1 Zufallsvariable

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Häufig interessiert nicht ω selbst, sondern eine Kennzahl $X(\omega)$, d.h. wir betrachten eine Abbildung $\omega \mapsto X(\omega)$

Beispiel 5.1 $2\times$ würfeln
$\Omega = \{(i,j)|i,j \in \{1,2\ldots,6\}\}$
$X(\omega) = X((i,j)) = i + j$ "Augensumme"

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Wir möchten jetzt dem Ereignis $X \in B = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}, B \subset \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.
Also muss $\{\omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ sein.

Definition 5.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsvariable, falls*
$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathfrak{B}$
Diese Bedingung nennt man auch $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$-Messbarkeit von X.

Satz 5.1
*Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann **Zufallsvariable**, wenn*

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega | X(\omega) \leq a\} =: \{X \in B\} =: (X \in B) \in \mathcal{A}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Beweis "$\Rightarrow$" Sei X Zufallsvariable. $(-\infty, a] \in \mathfrak{B} \Rightarrow$ Behauptung

"$\Leftarrow$" $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$
Definiere $\mathcal{A}_0 = \{B \subset \mathbb{R} | X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. $\mathcal{A}_0$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$:

(i) $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}_0$

(ii) $X^{-1}(B^c) = \{\omega | X(\omega) \notin B\} = \{\omega | X(\omega) \in B\}^c = (X^{-1}(B))^c$
Also $B \subset \mathcal{A}_0 \Rightarrow B^c \subset \mathcal{A}_0$

(iii)

$$X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{E} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}_0 \Rightarrow \mathcal{A}_0 \supset \sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B} \Rightarrow$ Behauptung ∎

Bemerkung 5.1

a) Satz 5.1 bleibt richtig, wenn wir $\mathcal{E} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$ durch ein anderes Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}$ ersetzen.

b) Bei Anwendungen ist oft $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

Wann ist eine Abbildung $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar (ZV)?

Satz 5.2 *Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ gegeben, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist z.B. messbar, falls X stetig oder (schwach) monoton wachsend oder fallend.*

Beweis Sei X stetig. Dann ist $X^{-1}(U)$ offen, falls U offen.
Sei X wachsend $\Rightarrow \{\omega \in \mathbb{R} | X(\omega) \leq a\}$ ist von der Gestalt $(-\infty, b) \in \mathfrak{B}$ oder $(-\infty, b] \in \mathfrak{B}$ ∎

Bemerkung 5.2 Es sei $X(\omega) = c \ \forall \omega \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist X eine Zufallsvariable.

Satz 5.3 *Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, dann ist $Y \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ wieder eine Zufallsvariable.*

Satz 5.4 *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und X, Y Zufallsvariablen darauf.*

a) $\{X < Y\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) < Y(\omega)\}$,$\{X \leq Y\}, \{X = Y\} \in \mathcal{A}$

b) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so sind
$\alpha X + \beta, X + Y, X \cdot Y, X \wedge Y = \min\{X, Y\}, X \vee Y = \max\{X, Y\}$
Zufallsvariablen

c) Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so sind auch
$\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n, \limsup_{n \to \infty} X_n, \liminf_{n \to \infty} X_n$
Zufallsvariablen, falls sie $\mathbb{R}$-wertig sind.
Gilt $X_n(\omega) \to X(\omega) \forall \omega \in \Omega$, so ist auch X eine Zufallsvariable.

Beweis a) $\{X < Y\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{X < q\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y > q\}}_{\in \mathcal{A}}$
$\{X \leq Y\} = \{X > Y\}^c \in \mathcal{A}$,$\{X = Y\} = \{X \leq Y\} \cap \{X \geq Y\} \in \mathcal{A}$

b) (i) $x \mapsto \alpha x + \beta$ ist stetig

(ii) $\{X+Y \leq a\} = \{X \leq a-Y\} = \{X \leq a-Y\} \in \mathcal{A} \forall a \in \mathbb{R}$, da $a-Y$ Zufallsvariable + Teil a)

(iii) $X \cdot Y = \frac{1}{4}((X+Y)^2 - (X-Y)^2)$

(iv) $\{X \vee Y \leq a\} = \{X \leq a\} \cap \{Y \leq a\} \in \mathcal{A}$

c) $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{X_n \leq a\} \in \mathcal{A}$
$\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-X_n)$
$\limsup_{n\to\infty} X_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} X_m$
$\liminf_{n\to\infty} X_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} X_m$
Im Falle der Konvergenz ist $X = \limsup_{n\to\infty} X_n$ ∎

Bemerkung 5.3 Teil c) ist ohne Einschränkung gültig, wenn man $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ betrachtet und $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathfrak{B} \cup \{\{-\infty\}, \{+\infty\}\})$ erweitert.

5.2 Verteilungen

Definition 5.2
*Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die **Verteilung** der Zufallsvariablen ist die Mengenfunktion $P_X : \mathfrak{B} \to [0,1]$ mit*
$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) \quad \forall B \in \mathfrak{B}$

Bemerkung 5.4

a) P_X ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, denn:

- $P_X(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
- Für $B_1, B_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ paarweise disjunkt gilt: (σ-Additivität)

$$P_X(\sum_{i=1}^{\infty} B_i) = P(X^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} B_i)) = P(\sum_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i)$$

b) Die Abbildung $P \to P_X$ nennt man **Maßtransport** vom Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ in den Messraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

5.3 Verteilungsfunktion

Eine Verteilung $P_X : \mathfrak{B} \to [0,1]$ kann durch eine “einfachere“ Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ beschrieben werden.

Definition 5.3 *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit*
$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}) = P_X((-\infty, x])$ *heißt **Verteilungsfunktion** von X.*

Bemerkung 5.5 Da die Mengen $(-\infty, x], x \in \mathbb{R}$ einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathfrak{B}$ bilden, wird P_X durch F_X eindeutig festgelegt (siehe Satz 4.4)

Satz 5.5
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ ihre Verteilungsfunktion. Dann gilt:

a)

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$

b) F_X ist (schwach) monoton wachsend.

c) F_X ist rechtsseitig stetig.

Beweis b) folgt aus der Monotonie von P_X

a) Sei (x_n) eine reellwertige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$
Setze $y_n := \sup_{m\geq n} x_m$ Dann gilt $y_n \downarrow -\infty$, also $(-\infty, y_n] \downarrow \emptyset$
Da P_X stetig in $\emptyset$ ist (Satz 1.4) folgt:
$0 \leq F_X(x_n) = P_X((-\infty, x_n]) \leq P_X((-\infty, y_n]) \to 0$ für $n \to \infty$
Andere Grenzwertaussage mit Stetigkeit von unten von P_X

c) Sei $x \in \mathbb{R}, x_n \geq x \,\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{x\to\infty} x_n = x$
Setze $y_n = \sup_{m\geq n} x_m$, also $y_n \downarrow x$ und
$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) \leq P_X((-\infty, x_n]) = F_X(x_n) \leq$
$\leq P_X((-\infty, y_n]) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} P_X((-\infty, x]) = F_X(x)$
weil P_X stetig von oben.

Umgekehrt gibt es zu jeder Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit den Eigenschaften a),b),c) aus Satz 5.5 eine Zufallsvariable X, so dass $F = F_X$. ■

Definition 5.4
*Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Funktion mit den Eigenschaften a),b),c) aus Satz 5.5. Die **Quantilfunktion** F^{-1} zu F ist:*

$$F^{-1}(0,1) \to \mathbb{R}, \quad F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) > y\}$$

Bemerkung 5.6

a) Ist F stetig und streng monoton wachsend, so ist F^{-1} die übliche Umkehrfunktion.

b) Für $0 < \alpha < 1$ heißt $F_X^{-1}(x)$ α-Quantil zu X

Lemma 5.6

$$y \leq F(x) \Leftrightarrow F^{-1}(y) \leq x, \quad \forall\, y \in (0,1), x \in \mathbb{R}$$

Beweis “$\Rightarrow$“ Definition von F^{-1}

“$\Leftarrow$“ $F(x) < y \Rightarrow F(x + \frac{1}{n}) < y$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (F ist rechtsseitig stetig)

$\Rightarrow F^{-1}(y) \geq x + \frac{1}{n}$ (F monoton wachsend)

$\Rightarrow F^{-1}(y) > x$ ■

Satz 5.7

Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Funktion mit den Eigenschaften a),b),c) aus Satz 5.5. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion F.

Beweis Wähle $\Omega = [0,1), \mathcal{A} = \mathfrak{B}_{[0,1)}, P = \text{Unif}[0,1)$ (Gleichverteilung).
Definiere $X : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $X(\omega) := F^{-1}(\omega)$
Offenbar ist F^{-1} monoton wachsend, also X eine Zufallsvariable und
$F_X(x) = P(X < x) = P(\{\omega \in \Omega | F^{-1}(\omega) \leq x\}) \overset{L.5.6}{=} P(\{\omega \in \Omega | \omega \leq F(x)\}) = P([0, F(x)]) = F(x)$ ■