Kapitel 15

Konfidenzintervalle

Definition 15.1
*Sei $\alpha \in (0,1)$ fest vorgegeben. Ein Intervall der Form $[L(x), U(x)]$ mit messbaren Funktionen $L, U : \chi^n \to \Theta \subset \mathbb{R}$ heißt $(1-\alpha)$-**Konfidenzintervall**, falls $L(x) \leq U(x)\ \forall x \in \chi^n$ und $P_\theta(L \leq U) = 1$ mit $P_\theta(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$*

Bemerkung 15.1

(i) Sowohl Lage als auch Länge des Konfidenzintervalls hängen von der konkreten Stichprobe ab.

(ii) Sei zum Beispiel $\alpha = 0.05$, dann enthält das Konfidenzintervall in 95% der Fälle den wahren Parameter.

Beispiel 15.1
Es sei $P_\theta = N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 bekannt. Stichprobe X vom Umfang n.
Bestimme $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für θ.
Sei

$$z := \frac{\overline{X} - \theta}{\sigma}.$$

Unter P_θ gilt: $z \sim N(0,1)$, (wegen Lemma 6.2, Bsp. 9.4). Wichtig: die Verteilung von z unter P_θ hängt nicht mehr von θ ab.

$$\Phi(c) - \Phi(-c) = P_\theta(-c \leq z \leq c) = P_\theta(\underbrace{X - \frac{c}{\sqrt{n}}\sigma}_{L(X)} \leq \theta \leq \underbrace{\overline{X} + \frac{c}{\sqrt{n}}\sigma}_{U(X)}) \overset{!}{=} 1 - \alpha$$

$$1 - \alpha = \Phi(c) - \Phi(-c) = \Phi(c) - (1 - \Phi(c)) = 2\Phi(c) - 1 \Rightarrow \Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Mit z_α bezeichnen wir im Folgenden das α-Quantil der Standardnormalverteilung.
Also: $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Wegen Symmetrie gilt: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$
$\Rightarrow = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall ist also:

$$\left[\overline{x} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma, \overline{x} + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma\right]$$

Die ist ein Sonderfall. Die Länge des Konfidenzintervalls: $2 \cdot \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma$ und hängt nicht vom Zufall ab.

Beispiel 15.2 Es sei $P_\theta = B(m,\theta)$, $\Theta = [0,1]$, $\chi = \mathbb{N}_0$, $n = 1$

$$\text{Beispiel 13.4:} \quad P_\theta\left(\frac{X - m\theta}{\sqrt{m\theta(1-\theta)}} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$

Dann gilt:

$$P_\theta\left(-c \leq \frac{X - m\theta}{\sqrt{m\theta(1-\theta)}} \leq c\right) \approx \Phi(c) - \Phi(-c) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \Rightarrow c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Wir versuchen auf die Darstellung $L(x) \leq \theta \leq U(x)$ zu kommen:

$$\begin{aligned} -c \leq \frac{X - m\theta}{\sqrt{m\theta(1-\theta)}} \leq c &\Leftrightarrow |X - m\theta| \leq c\sqrt{m\theta(1-\theta)} \\ &\Leftrightarrow (X - m\theta)^2 \leq c^2 m\theta(1-\theta) \\ &\Leftrightarrow \theta^2(c^2 + m) - \theta(2x + c^2) + \frac{x^2}{m} \leq 0 \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel in θ:

$$\theta_{1/2} = \frac{1}{m + c^2}\left(x + \frac{c^2}{2} \pm c\sqrt{\frac{X(m-X)}{m} + \frac{c^2}{4}}\right)$$

Das heißt:

$$L(x) = \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2}\left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}}\right)$$

$$U(X) = \frac{1}{m + (z_{\frac{\alpha}{2}})^2}\left(x + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{2} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{x(m-x)}{m} + \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}})^2}{4}}\right)$$

In einer Klinik gab es im letzten Jahr 87827 Geburten, davon 45195 Jungen.
Gesucht: 0.99 - Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes männlich ist.
Hier: $m = 87827, \quad x = 45195, \quad \alpha = 0,01$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = -z_{0,995} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -2,576$$

$$\text{Einsetzen: } [0,51091, 0,51961]$$