

# 1 Affine Varietäten

## §1 Der Polynomring

Sei  $k$  ein Körper,  $k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $n \geq 0$  der Polynomring über  $k$  in  $n$  Variablen.

### Universelle Abbildungseigenschaft (UAE) des Polynomrings

Ist  $A$  eine  $k$ -Algebra und sind  $a_1, \dots, a_n \in A$ , so gibt es genau einen  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $f : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$  mit  $f(X_i) = a_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Folgerung: Jede endlich erzeugte  $k$ -Algebra ist Faktoring eines Polynomrings.

$n = 1$ , also  $k[X]$

Euklidischer Algorithmus: Zu  $f, g \in k[X]$ ,  $g \neq 0$  gibt es  $q, r \in k[X]$  mit  $f = qg + r$  und  $\deg(r) < \deg(g)$  oder  $r = 0$ .

Folgerung:  $k[X]$  ist Hauptidealring.

### Eindeutige Primfaktorzerlegung

$k[X_1, \dots, X_n]$  ist faktorieller Ring.

Folgerung: Jedes irreduzible Polynom erzeugt ein Primideal.

### Hilbertscher Basissatz

$k[X_1, \dots, X_n]$  ist noethersch, d.h.

- Jedes Ideal ist endlich erzeugbar.
- Jede aufsteigende Kette von Idealen wird stationär.

## §2 Die Zariski-Topologie

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

### Definition 1.2.1

Eine Teilmenge  $V \subseteq k^n$  heißt **affine Varietät**, wenn es eine Menge von Polynomen  $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  gibt, so dass  $V(F) = V = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$ .

### Beispiele

- 1)  $n = 1$  :  $V \subseteq k$  affine Varietät  $\Leftrightarrow V$  endlich oder  $V = k$
- 2)  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  linear (d.h.  $\deg(f) = 1$ )  $\Rightarrow V(f)$  ist affine Hyperebene.  
 $f_1, \dots, f_r$  linear  $\Rightarrow V(f_1, \dots, f_r)$  ist affiner Unterraum. (Jeder affine Unterraum lässt sich so

beschreiben.)

3) Quadriken sind affine Varietäten.

4) Lemniskate

$$C = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_1) = d(P, P_2) = c\}$$

für Punkte  $P_1, P_2 \in k^2, c > 0$ .

Für  $P_1(-1, 0)$  und  $P_2(1, 0)$  ist  $C = V(f)$  mit  $f = ((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) - 1$ . Dies ist aber keine affine Varietät, da das in  $\mathbb{C}^2$  nicht klappt.

### Bemerkung 1.2.2

(i) Für  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $V(F_1) \supseteq V(F_2)$ .

(ii)  $V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$  und  $V(f_1, f_2) = V(f_1) \cap V(f_2)$

(iii)  $V(F) = V(\sqrt{(F)})$  für das von  $F$  erzeugte Ideal  $(F) \subset k[X_1, \dots, X_n]$

(iv)  $V(F) = V(\sqrt{(F)})$  für das von  $F$  erzeugte Radikalideal

$$\sqrt{(F)} = \{g \in k[X_1, \dots, X_n] : \exists d > 0 \text{ mit } g^d \in (F)\}$$

(v) Zu jeder affinen Varietät  $V \subseteq k^n$  gibt es endlich viele Polynome  $f_1, \dots, f_r$ , so dass  $V = V(f_1, \dots, f_r)$ , da jedes Ideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  endlich erzeugbar ist.

**Beweis** (iii) “ $\subseteq$ “ Sei  $x \in V(F), g \in (F)$ . Schreibe  $g = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$  mit  $f_i \in F, a_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ , dann ist  $g(x) = a_1(x)f_1(x) + \dots + a_r(x)f_r(x) = 0$ .  $\square$

### Definition 1.2.3

(i) Für eine Teilmenge  $V \subseteq k^n$  heißt  $I(V) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] : f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$  das **Verschwindungsideal**.

(ii)  $A(V) := k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$  heißt **affiner Koordinatenring** von  $V$ .

Für  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$  gilt:  $f|_V = g|_V \Leftrightarrow f - g \in I(V)$

### Bemerkung 1.2.4

Für jede Teilmenge  $V \subseteq k^n$  gilt:

(i)  $I(V)$  ist Radikalideal,

(ii)  $V \subseteq V(I(V))$ ,

(iii)  $V(I(V))$  ist die kleinste Varietät, die  $V$  umfasst. Schreibweise:  $V(I(V)) =: \overline{V}$ .

(iv) Sind  $V_1, V_2$  affine Varietäten, so gilt:

$$V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow I(V_1) \supseteq I(V_2)$$

**Beweis** (iii) Sei  $V'$  eine affine Varietät mit  $V \subseteq V'$  und sei  $I' \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  ein Ideal mit  $V' = V(I')$ . Dann ist  $I' \subseteq I(V) \Rightarrow V(I') \supseteq V(I(V))$ .

(iv) “ $\Leftarrow$ “  $I(V_1) \supseteq I(V_2) \Rightarrow V(I(V_1)) \subseteq V(I(V_2))$ . Mit  $V_1 = V(I(V_1))$  und  $V_2 = V(I(V_2))$  folgt die Behauptung.  $\square$

### Bemerkung 1.2.5

Für jede Teilmenge  $V \subseteq k^n$  gilt:

(i)  $A(V)$  ist reduzierte  $k$ -Algebra, d.h. es gibt in  $A(V)$  keine nilpotenten Elemente (also  $f^d \neq 0$  für alle  $f \neq 0, d > 0$ ).

(ii) Ist  $V \subseteq V'$ , so gibt es einen surjektiven  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $A(V') \rightarrow A(V)$ .

**Beweis** (i) Sei  $g \in A(V)$ ,  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $\bar{f} = g$ . Dann ist  $(g^d = 0 \text{ (in } A(V))) \Leftrightarrow f^d \in I(V)$  und da  $I(V)$  Radikalideal ist, folgt  $f \in I(V)$  und somit  $g = 0$ .

(ii) Es ist  $I(V') \subseteq I(V)$ , also

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V) \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ A(V') = k[X_1, \dots, X_n]/I(V') & & \end{array}$$

□

### Definition + Satz 1.2.6

Die affinen Varietäten in  $k^n$  bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der **Zariski-Topologie**.

**Beweis** •  $k^n = V(0)$  und  $\emptyset = V(1)$  sind affine Varietäten.

• Seien  $V_1 = V(I_1)$  und  $V_2 = V(I_2)$  affine Varietäten. Dann ist  $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$ .

Denn: “ $\subseteq$ “ klar “ $\supseteq$ “: Sei  $x \in V(I_1 \cdot I_2)$ ,  $x \notin V_1$ . (Zu zeigen:  $x \in V_2$ )

Dann gibt es ein  $f \in I_1$  mit  $f(x) \neq 0$ .

Da  $x \in V(I_1 \cdot I_2)$  ist  $f(x) \cdot g(x) = 0$  für alle  $g \in I_2 \Rightarrow x \in V(I_2) = V_2$ .

• Seien  $V_i = V(I_i)$ ,  $i \in J$ , affine Varietäten  $\Rightarrow \bigcap_{i \in J} V_i = V(\sum_{i \in J} I_i)$ .

Denn: “ $\supseteq$ “ klar “ $\subseteq$ “: Sei  $x \in \bigcap V_i$ ,  $f \in \sum I_i$ . Schreibe  $f = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$  mit  $f_k \in I_{i_k}$ ,  $a_k \in k[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow f(x) = a_1(x) \cdot 0 + \dots + a_r(x) \cdot 0 = 0$  □

### Bemerkung 1.2.7

(i) Für  $f \in k[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$  ist  $D(f) := k^n \setminus V(f)$  nichtleere offene Teilmenge von  $k^n$ .

(ii) Die  $D(f)$  bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

**Beweis** (ii) Zu zeigen: Jede offene Menge  $U$  ist Vereinigung von Mengen der Form  $D(f)$ .

Zeige dazu: Zu jedem  $x \in U$  gibt es ein  $f$  mit  $x \in D(f) \subseteq U$ .

Sei  $V = k^n \setminus U$ , also  $V = V(I)$  für ein Ideal  $I$ . Da  $x \notin V$ , gibt es  $f \in I$  mit  $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ .

Weil  $f \in I$ , ist  $V \cap D(f) = \emptyset \Rightarrow D(f) \subseteq U$  □

### Bemerkung 1.2.8

Die Zariski-Topologie auf  $k^n$  ist nicht hausdorffsch.

**Beweis** Wegen 2.7 genügt es zu zeigen, dass  $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$  für alle  $f, g \in k[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ .

Induktion über  $n$ :

$n = 1$ :  $V(f)$  und  $V(g)$  sind endlich  $\Rightarrow D(f) \cap D(g) = k \setminus V(f \cdot g)$  ist unendlich.

$n > 1$ : Zerlege  $f$  und  $g$  in Primfaktoren (vgl. §1) und wähle  $a \in k$ , so dass  $(X_n - a)$  nicht Teiler von  $f$  oder  $g$  ist. Identifiziere  $V(X_n - a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n : x_n = a\}$  mit  $k^{n-1}$ .

Nach der Wahl von  $a$  sind  $f|_{V(X_n - a)}$  und  $g|_{V(X_n - a)}$  nicht identisch 0, also  $f' = f(X_1, \dots, X_{n-1}, a) \neq 0 \neq g(X_1, \dots, X_{n-1}, a) =: g'$  in  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $x' \in k^{n-1}$  mit  $f'(x') \neq 0 \neq g'(x') \Rightarrow$  Für  $x = (x', a) \in k^n$  gilt  $f(x) = f'(x') \neq 0 \neq g'(x') = g(x)$ . □

## §3 Irreduzible Komponenten

### Definition 1.3.1

a) Ein topologischer Raum  $X$  heißt **irreduzibel**, wenn er nicht Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist.

b) Eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  heißt **irreduzible Komponente**, wenn sie irreduzibel ist (bzgl. der induzierten Topologie) und maximal (bzgl. Inklusion).

**Proposition 1.3.2**

Eine affine Varietät  $V \subseteq k^n$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(V)$  Primideal in  $k[X_1, \dots, X_n]$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der affine Koordinatenring  $A(V) =: k[V]$  nullteilerfrei ist.

**Beweis** " $\Rightarrow$ " Seien  $f_1, f_2 \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $f_1 \cdot f_2 \in I(V)$ . Sei  $f_1 \notin I(V)$ .

Dann ist  $V \not\subseteq V(f_1)$ .

Nach Voraussetzung ist  $V \subseteq V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$ .

$V$  irreduzibel  $\Rightarrow V \subseteq V(f_2)$

$\Rightarrow f_2(x) = 0$  für alle  $x \in V$

$\Rightarrow f_2 \in I(V)$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $V = V_1 \cup V_2$  mit  $V_i = V(I_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Sei  $V_1 \neq V$ .

$\Rightarrow V \not\subseteq V(I_1)$

$\Rightarrow \exists x \in V$  und  $f \in I_1$  mit  $f(x) \neq 0$

Also  $f \notin I(V) \subseteq I(V_1)$

Andererseits ist  $V = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq I(V)$

$\Rightarrow f \cdot g(x) = 0$  für alle  $g \in I_2$

$I(V)$  prim und  $f \notin I(V) \Rightarrow g \in I(V)$  für alle  $g \in I_2$

$\Rightarrow V_2 = V(I_2) \supseteq V(I(V)) = V$  □

**Satz 1**

Jede affine Varietät  $V \subseteq k^n$  hat eine Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten. Diese Zerlegung ist eindeutig.

**Beweis** 1. Schritt  $V$  ist endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten.

Sei dazu  $\mathcal{B}$  die Menge der Varietäten in  $k^n$ , die nicht endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten sind. Sei weiter  $\mathcal{J} := \{I(V) \mid V \in \mathcal{B}\}$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{B} = \emptyset$

Annahme:  $\mathcal{J} \neq \emptyset$ . Dann enthält  $\mathcal{J}$  ein maximales Element  $I_0 = I(V_0)$  für ein  $V_0 \in \mathcal{B}$ .

$\Rightarrow V_0$  ist minimales Element in  $\mathcal{B}$ .

$V_0 \in \mathcal{B} \Rightarrow V_0$  reduzibel

$\Rightarrow V_0 = V_1 \cup V_2$  mit  $V_1 \neq V_0 \neq V_2$ ,  $V_i$  abgeschlossen

$\Rightarrow V_i \notin \mathcal{B}$ ,  $i = 1, 2$  (da  $V_0$  minimales Element in  $\mathcal{B}$ )

$\Rightarrow V_i$  ist endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten

$\Rightarrow V_0$  auch. Widerspruch!

2. Schritt "Irreduzible Komponenten"

Sei  $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$  mit irreduziblen Varietäten  $V_1, \dots, V_n$ .

Ohne Einschränkung sei  $V_i \not\subseteq V_j$  für  $i \neq j$ .

Sei  $W \subseteq V$  irreduzibel und  $V_i \subseteq W$  für ein  $i$ .

Es ist  $W = V \cap W = (V_1 \cup \dots \cup V_n) \cap W = (V_1 \cap W) \cup \dots \cup (V_n \cap W)$

$W$  irreduzibel  $\Rightarrow \exists j$  mit

$$V_j \cap W = W \Rightarrow V_i \subseteq W = W \cap V_j \subseteq V_j \Rightarrow i = j \text{ und } W = V_i$$

$\Rightarrow V_1, \dots, V_n$  sind irreduzible Komponenten von  $V$ .

Genauso:  $W \subseteq V$  irreduzible Komponente  $\Rightarrow \exists j : W \subseteq V_j$ ,

da  $W$  maximal  $\Rightarrow$  Zerlegung eindeutig. □

**Beispiele 1.3.3**

$$f = y^2 - x(x-1)(x+1) \in \mathbb{R}[x, y] \quad E := V(f)$$

## §4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

### Satz 2 (Hilbertscher Nullstellensatz)

Sei  $k$  ein Körper,  $n \geq 1$ ,  $m \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$  maximales Ideal. Dann ist  $L = k[X_1, \dots, X_n]/m$  eine endlich erzeugte Körpererweiterung von  $k$ .

**Beweis** Siehe Algebra II, Theorem 4. □

### Folgerung 1.4.1

Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so entsprechen die maximalen Ideale in  $k[X_1, \dots, X_n]$  bijektiv den Punkten in  $k^n$ .

### Beweis

$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$  (maximal, da Faktorring Körper) ist eine injektive Zuordnung  $\varphi : k^n \rightarrow m\text{-Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$  (= Menge der Maximalideale).

$\varphi$  surjektiv:

Sei  $m \in m\text{-Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$ ,  $\alpha : k[X_1, \dots, X_n]/m \rightarrow k$  der Isomorphismus, den es nach Satz 2 gibt. (Das ist tatsächlich ein Isomorphismus, da  $k$  algebraisch abgeschlossen ist und somit jede endliche Erweiterung von  $k$  wieder  $k$  selbst ist.)

$\Rightarrow X_i - \alpha(X_i) \in m, i = 1, \dots, n$  (da  $\alpha \in \text{Hom}_k \Rightarrow \alpha(X_i - \alpha(X_i)) = 0$ )

$\Rightarrow (X_1 - \alpha(X_1), \dots, X_n - \alpha(X_n)) \subseteq m$  □

### Folgerung 1.4.2 (Schwacher Nullstellensatz)

Für jedes echte Ideal  $I \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$  ist  $V(I) \neq \emptyset$ .

**Beweis**  $I \subseteq m$  für ein maximales Ideal  $m \Rightarrow V(I) \supseteq V(m) \neq \emptyset$  □

Sei jetzt  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $n \geq 1$ , und

$$\mathcal{V}_n := \{V \subseteq k^n \mid V \text{ affine Varietät}\}$$

$$\mathcal{I}_n := \{I \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \mid I \text{ Radikalideal}\}$$

### Satz 3 (Hilbertscher Nullstellensatz)

Die Zuordnungen

$$V : \mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{V}_n, \quad I \mapsto V(I)$$

$$I : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{I}_n, \quad V \mapsto I(V)$$

sind bijektiv und zueinander invers.

**Beweis** Zu zeigen: (1)  $V(I(V)) = V$  für jedes  $V \in \mathcal{V}_n$

(2)  $I(V(I)) = I$  für jedes  $I \in \mathcal{I}_n$

(1): Ist Bemerkung 2.4 (iii).

(2): Zeige:  $I(V(I)) = \sqrt{I}$  für jedes Ideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ .

“ $\supseteq$ “:  $\sqrt{I}$

“ $\subseteq$ “: Sei  $g \in I(V(I))$ , seien  $f_1, \dots, f_m$  Erzeuger von  $I$ .

Zu zeigen:  $\exists d : g^d = \sum_{i=1}^m a_i f_i$  für gewisse  $a_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ .

Betrachte in  $k[X_1, \dots, X_n, Y]$  das von  $f_1, \dots, f_m$  und  $gY - 1$  erzeugte Ideal  $J$ .

Es ist  $V(J) = \emptyset$

Schwacher Nullstellensatz  $\Rightarrow J = k[X_1, \dots, X_n, Y]$

$\Rightarrow \exists b_i, b \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$  sodass  $1 = \sum_{i=1}^m b_i f_i + b(gY - 1)$

In  $R := k[X_1, \dots, X_n, Y]/(gY - 1)$  gilt also

$1 = \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i f_i$  ( $\tilde{b}_i \in k[X_1, \dots, X_n, \frac{1}{g}]$  die Restklasse von  $b_i$ ). Multipliziere mit Hauptnenner  $g^d$ . □

### Bemerkung 1.4.3

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen,  $V \subseteq k^n$  eine affine Varietät. Dann entsprechen die Punkte in  $V$  bijektiv den maximalen Idealen in  $k[V]$  ( $= k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$ ).

**Beweis** Die maximalen Ideale in  $k[V]$  entsprechen bijektiv denjenigen maximalen Idealen in  $k[X_1, \dots, X_n]$ , die  $I(V)$  umfassen, also nach 4.1 den Punkten  $(x_1, \dots, x_n)$ , für die  $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \supseteq I(V)$  ist

$$\Leftrightarrow V(\underbrace{X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n}_{\{(x_1, \dots, x_n)\}}) \subseteq V(I(V)) = V$$

□

## §5 Morphismen

### Definition + Bemerkung 1.5.1

(a) Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper,  $V \subseteq k^n$  und  $W \subseteq k^m$  affine Varietäten. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **Morphismus**, wenn es Polynome  $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  gibt, so dass  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  für jedes  $x \in V$ .

(b) Jeder Morphismus  $V \rightarrow W$  ist Einschränkung eines Morphismus  $k^n \rightarrow k^m$ .

(c) Die affinen Varietäten über  $k$  bilden zusammen mit den Morphismen aus (a) eine Kategorie  $\text{Aff}(k)$ . Als Objekte von  $\text{Aff}(k)$  bezeichnen wir  $k^n$  mit  $\mathbb{A}^n(k)$ .

### Beispiele 1.5.2

(1) Projektionen und Einbettungen  $\mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$ .

(2) Jedes  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  ist Morphismus  $\mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$ .

(3)  $V = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$  ("Neilsche Parabel")

$f : V \rightarrow W, x \mapsto (x^2, x^3)$  ist Morphismus.

$f$  ist bijektiv: injektiv ✓

surjektiv: Sei  $(x, y) \in W \setminus \{(0, 0)\}$ , d.h.  $y^2 = x^3$

Dann ist  $(x, y) = f(\frac{y}{x}) = ((\frac{y}{x})^2, (\frac{y}{x})^3) = (\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{x^2})$ ,  $f(0) = (0, 0)$

Umkehrabbildung:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y}{x} & \text{sonst} \end{cases} \text{ ist kein Morphismus.}$$

(4) Sei  $\text{char}(k) = p > 0$ .  $f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^n(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p)$ , heißt Frobenius-Morphismus.  $f$  ist bijektiv, aber kein Isomorphismus. Die Fixpunkte von  $f$  sind die Elemente von  $\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_p)$ .

### Bemerkung 1.5.3

Morphismen sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

**Beweis** Ohne Einschränkung sei  $f : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{A}^m(k)$ . Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  abgeschlossen,  $V = V(I)$  für ein Radikalideal  $I \subseteq k[X_1, \dots, X_m]$ . Zu zeigen:  $f^{-1}(V)$  abgeschlossen in  $\mathbb{A}^n(k)$ .

Genauer gilt:  $f^{-1}(V) = V(J)$  mit  $J = \{g \circ f \mid g \in I\}$

denn:  $x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V \Leftrightarrow g(f(x)) = 0$  für alle  $g \in I \Leftrightarrow x \in V(J)$

□

### Bemerkung 1.5.4

Jeder Morphismus  $f : V \rightarrow W$  induziert einen  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $f^\sharp : k[W] \rightarrow k[V]$  (durch Hintereinanderschalten).

Genauer: Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_m] & \xrightarrow{g \mapsto g \circ f} & k[X_1, \dots, X_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[W] = k[X_1, \dots, X_m]/I(W) & \xrightarrow{f^\#} & k[X_1, \dots, X_n]/I(V) = k[V] \end{array}$$

$f^\#$  existiert, weil für alle  $g \in I(W)$  gilt:  $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$  für alle  $x \in V$

**Proposition 1.5.5**

Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Morphismus von affinen Varietäten,  $\alpha := f^\# : k[W] \rightarrow k[V]$  der induzierte  $k$ -Algebra-Homomorphismus. Seien  $x \in V, y \in W$  und  $m_x \subset k[V], m_y \subset k[W]$  die Verschwindungsideale zum jeweiligen Punkt. Dann gilt:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(m_x) = m_y$$

**Beweis** “ $\Rightarrow$ “  $g \in m_y \Leftrightarrow g(y) = 0 \Rightarrow g \circ f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{g \circ f}_{=\alpha(g)} \in m_x \Leftrightarrow g \in \alpha^{-1}(m_x) \Leftrightarrow m_y \subseteq$

$\alpha^{-1}(m_x)$ . Gleichheit folgt daraus, dass  $m_y$  maximales Ideal ist.

“ $\Leftarrow$ “ Wäre  $f(x) \neq y$ , dann gäbe es ein  $g \in k[W]$  mit  $g(f(x)) = 0$  und  $g(y) = 1$ .

Andererseits:

$$\alpha(g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \alpha(g) \in m_x \Leftrightarrow g \in \alpha^{-1}(m_x) = m_y \Leftrightarrow g(y) = 0 \quad \square$$

**Satz 4**

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi : \underline{\text{Aff}} &\longrightarrow \underline{k\text{-Alg}}^\circ \\ V &\longmapsto k[V] \\ f &\longmapsto f^\# \end{aligned}$$

eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien. Hierbei bezeichnet  $\underline{k\text{-Alg}}^\circ$  die Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten  $k$ -Algebren.

**Beweis**  $\Phi$  ist ein Funktor:  $\checkmark$

Definiere Umkehrfunktor  $\Psi$ :

(i) Sei  $A \in \underline{k\text{-Alg}}^\circ, a_1, \dots, a_n$  Erzeuger von  $A$

$\Rightarrow p_A : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A, X_i \mapsto a_i$  ist surjektiver  $k$ -Algebra-Homomorphismus.

Sei  $I_A := \text{Kern}(p_A)$  (Radikalideal).

$\Psi(A) := V(I_A) \subseteq k^n$  affine Varietät mit  $k[V(I_A)] \cong A$ .

(ii) Sei  $\alpha : A \rightarrow B$   $k$ -Algebra-Homomorphismus in  $\underline{k\text{-Alg}}^\circ$ .

Definiere die Abbildung  $f_\alpha : V(I_B) \rightarrow V(I_A)$  durch  $f_\alpha(y) = x$ , falls  $m_x = \alpha^{-1}(m_y)$ . Diese ist wohldefiniert aufgrund der folgenden

**Proposition 1.5.6**

Sei  $\alpha : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus von endlich erzeugten  $k$ -Algebren,  $m \subset B$  ein maximales Ideal. Dann ist  $\alpha^{-1}(m) \subset A$  ein maximales Ideal.

(Beispiel.: Für  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  ist  $\alpha^{-1}(\{0\})$  kein maximales Ideal.)

## Beweis

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\alpha^{-1}(m) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & B/m \end{array}$$

$\alpha$  induziert einen injektiven  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $\bar{\alpha}$ . Nach dem HNS ist  $B/m = k$ .  
 $k$  hat keine echte  $k$ -Unteralgebra  $\Rightarrow A/\alpha^{-1}(m) = k$ .  $\square$

**Ende des Beweises des Satzes** Noch zu zeigen:  $f_\alpha : V(I_B) \rightarrow V(I_A)$  ist ein Morphismus.  
 Schreibe dazu  $A \cong k[X_1, \dots, X_n]/I_A$ ,  $B = k[Y_1, \dots, Y_m]/I_B$ .

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & k[Y_1, \dots, Y_m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

Bastle Lift  $\tilde{\alpha}$  von  $\alpha$ :

$$\tilde{\alpha}(X_i) = f_i \text{ mit } \bar{f}_i = \alpha(\bar{X}_i)$$

Beh.: Für  $y \in V(I_B)$  ist  $f_\alpha(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ .

Denn: Sei  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , dann ist  $m_y$  das Bild in  $B$  von  $M_y = (Y_1 - y_1, \dots, Y_m - y_m) \Rightarrow \alpha^{-1}(m_y)$  ist das Bild in  $A$  von  $\tilde{\alpha}^{-1}(M_y) = (X_1 - f_1(y), \dots, X_n - f_n(y))$ .

Nachrechnen:  $\Phi \circ \Psi \cong \text{id}_{k\text{-Alg}^\circ}$ ,  $\Psi \circ \Phi \cong \text{id}_{\text{Aff}(k)}$   $\square$

## §6 Reguläre Funktionen

### Bemerkung 1.6.1

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät. Dann gilt für  $h \in k[X_1, \dots, X_n]$ :

$\bar{h}$  ist Einheit in  $k[V] \Leftrightarrow V(h) \cap V = \emptyset$

**Beweis**  $V(h) \cap V = \emptyset \Leftrightarrow (h) + I(V) = k[X_1, \dots, X_n]$

$\Leftrightarrow 1 = g \cdot h + f$  für  $g \in k[X_1, \dots, X_n]$  und  $f \in I(V)$

$\Leftrightarrow 1 = \bar{g} \cdot \bar{h}$  in  $k[V]$ .  $\square$

### Definition 1.6.2

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $U \subseteq V$  offen.

a) Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  heißt **reguläre Funktion** auf  $U$ , wenn es zu jedem  $x \in U$  eine Umgebung  $U(x) \subseteq U$  und  $g_x, h_x \in k[V]$  gibt mit  $h_x(y) \neq 0$  für alle  $y \in U(x)$  und  $f(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)}$  für alle  $y \in U(x)$ .

b) Eine Abbildung  $f : U \rightarrow U'$  mit  $U' \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  offen heißt **Morphismus**, wenn es reguläre Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  auf  $U$  gibt mit  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ .

### Beispiele 1.6.3

$\frac{1}{x}$  ist eine reguläre Funktion auf  $k \setminus \{0\}$ .

Dann ist  $U \rightarrow \mathbb{A}^2(k)$ ,  $x \mapsto (x, \frac{1}{x})$  ein Isomorphismus mit Bild  $V(XY - 1)$ .



**Definition 1.6.4**

a) Eine **Prägarbe** besteht aus einer  $k$ -Algebra  $\mathcal{O}(U)$  für jede offene Menge  $U \subseteq V$  zusammen mit  $k$ -Algebra-Homomorphismen

$$\rho_{UU'} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U') \quad \forall U' \subseteq U \text{ offen}$$

so dass  $\rho_{UU''} = \rho_{U'U''} \circ \rho_{UU'}$  für  $U'' \subseteq U' \subseteq U$  gilt.

b) Eine Prägarbe heißt **Garbe**, falls zusätzlich noch folgende Bedingungen gelten:

Sei  $U \subseteq V$  offen und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $U$ .

(i) Ist  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $\rho_{UU'}(f) =: f|_{U_i} = 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $f = 0$ .

(ii) Ist für jedes  $i \in I$  ein  $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$  gegeben, so dass für alle  $i, j \in I$  gilt  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ , so gibt es  $f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $f|_{U_i} = f_i$  für jedes  $i \in I$ .

**Bemerkung 1.6.5**

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät.

(a) Für jedes offene  $U \subseteq V$  ist

$$\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow k \mid f \text{ regulär}\}$$

eine  $k$ -Algebra.

(b)  $f \mapsto \frac{f}{1}$  ist ein  $k$ -Algebra-Homomorphismus  $k[V] \rightarrow \mathcal{O}(U)$  für jedes offene  $U \subseteq V$ . Dieser ist injektiv, falls  $U$  dicht in  $V$  ist. Dies ist für alle  $\emptyset \neq U$  der Fall, wenn  $V$  irreduzibel ist.

(Gegenbsp.:  $V(X \cdot Y)$ ,  $U = D(x)$ ,  $f = y$ )

(c) Die Zuordnung  $U \mapsto \mathcal{O}(U)$  ist eine Garbe  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_V$  von  $k$ -Algebren auf  $V$ .

**Beweis** Seien  $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(U)$ . Ohne Einschränkung sei  $U_1(x) = U_2(x) =: U(x)$  für alle  $x \in U$ .

Sei  $f_i = \frac{g_{i,x}}{h_{i,x}}$  auf  $U(x)$ .

$\Rightarrow h_{1,x}(y) \cdot h_{2,x}(y) \neq 0$  für alle  $y \in U(x) \Rightarrow f_1 \pm f_2$  und  $f_1 \cdot f_2$  sind reguläre Funktionen.

Mit  $h_x = 1$  und  $g_x = f$  für alle  $x$  ist jedes  $f \in k[V]$  reguläre Funktion auf jedem offenen  $U$ .  $\square$

**Proposition 1.6.6**

Für jede affine Varietät  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  gilt  $\mathcal{O}(V) = k[V]$ .

**Beweis** Nach Bem. 1.6.5(b) ist  $k[V] \rightarrow \mathcal{O}(V)$  injektiv, also gilt ohne Einschränkung  $k[V] \subseteq \mathcal{O}(V)$ .

Sei zunächst  $V$  irreduzibel: Sei  $f \in \mathcal{O}(V)$ ,  $x_i \in V$ ,  $i = 1, 2$ ,  $U_i \subseteq V$  offene Umgebungen von  $x_i$ , auf denen  $f(y) = \frac{g_i(y)}{h_i(y)}$  gilt für geeignete  $g_i, h_i \in k[V]$ ,  $h_i(y) \neq 0 \quad \forall y \in U_i$ .

Dann ist  $U := U_1 \cap U_2$  offen und dicht in  $V \Rightarrow g_1 h_2 - g_2 h_1 \in I(U)$  (weil  $\frac{g_1(y)}{h_1(y)} = f(y) = \frac{g_2(y)}{h_2(y)}$  für alle  $y \in U$ ).

Mit  $V(I(U)) = \overline{U} = V$  folgt  $g_1 h_2 = g_2 h_1$  in  $k[V] \Rightarrow \frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}$  auf  $U_1 \cap U_2$ , d.h.  $\exists g, h \in k[V]$  mit  $\frac{g_i}{h_i} = \frac{g}{h}$ ,  $i = 1, 2$ .

Ist  $V$  zusammenhängend, so sei  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Die Argumentation ist die gleiche, allerdings für  $x \in V_1 \cap V_i$  ( $V_i$  geeignet).

Ist  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$  disjunkte Vereinigung von affinen Varietäten  $V_1, V_2$ , so ist

$\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(V_1) \oplus \mathcal{O}(V_2)$  (folgt aus der Definition von regulären Funktionen) und

$k[V] = k[V_1] \oplus k[V_2]$  (Übung).  $\square$

**Proposition 1.6.7**

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät,  $f \in k[V]$ . Dann ist  $\mathcal{O}(D(f)) \cong k[V]_f$  (Lokalisierung von  $k[V]$  nach dem multiplikativen System  $S = \{f^d : d \geq 0\}$ , d.h.:  $k[V]_f := \{\frac{g}{f^m} \mid g \in k[V], m \geq 0\}$ ).

$D(f)$  ist als offene Teilmenge von  $V$  zu interpretieren.

### Beispiele 1.6.8

1)  $V = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $f = x$ ,  $D(f) = k \setminus \{0\}$

$\mathcal{O}(D(f)) = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[X] \text{ mit } h(x) \neq 0 \text{ für alle } x \neq 0\}$

$= \{\frac{g}{x^d} : g \in k[X], d \geq 0\}$

2)  $V = V(x \cdot y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ ,  $f = x \in k[V] = k[X, Y]/(X \cdot Y)$

$D(f) = V - V(x) = x$ -Achse ohne die 0

$k[V]_x = \{\frac{g}{x^d} : g \in k[V], d \geq 0\} / \sim$  mit der Äquivalenzrelation  $\frac{g}{x^d} \sim 0 \Leftrightarrow \exists d' \geq 0$  mit  $x^{d'} \cdot g = 0 \Leftrightarrow g = y \cdot g'$  für ein  $g' \in k[V] \Rightarrow \text{Kern}(k[V] \rightarrow k[V]_x) = (y) \Rightarrow k[V]_x \cong k[X]_x$ .

**Beweis** Sei  $I = I(V)$ , also  $k[V] \cong k[X_1, \dots, X_n]/I$ . Sei weiter  $\tilde{f} \in k[X_1, \dots, X_n]$  Repräsentant von  $f$ .

Beh.:  $D(f)$  ist isomorph zu einer affinen Varietät  $W := V(\underbrace{I + (\tilde{f}X_{n+1} - 1)}_{:=\tilde{I}}) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$

Beweis: Übung (Blatt 4, A.3).

Nach Prop. 6.4:  $\mathcal{O}(D(f)) \cong \mathcal{O}(W) = k[W] = k[X_1, \dots, X_{n+1}]/\tilde{I}$

Sei  $\alpha : k[X_1, \dots, X_{n+1}] \rightarrow k[V]_f$  der durch  $x_i \mapsto \begin{cases} x_i : i = 1, \dots, n \\ \frac{1}{f} : i = n+1 \end{cases}$  erzeugte Homomorphismus.

Beh.:  $\text{Kern}(\alpha) = \tilde{I}$

“ $\supseteq$ “ ✓

“ $\subseteq$ “  $\alpha$  induziert einen Homomorphismus:  $\tilde{\alpha} : \underbrace{k[X_1, \dots, X_{n+1}]}_{k[V][X_{n+1}]} / \tilde{I} \rightarrow k[V]_f$

zu zeigen ist also:  $A$   $k$ -Algebra,  $f \in A$

$\alpha : A[X] \rightarrow A_f$ , so ist  $\text{Kern}(\alpha) = (Xf - 1)$ . □

### Nachtrag

$$\begin{array}{ccc}
 k[Y_1, \dots, Y_m] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & k[X_1, \dots, X_n] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 k[W] & \longrightarrow & k[V] \\
 \cup & & \cup \\
 m_y := \alpha^{-1}(m_x) & \longrightarrow & m_x \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 y & \longleftarrow & x \\
 \in & & \in \\
 W & \xleftarrow{f_\alpha} & V
 \end{array}
 \quad k\text{-Algebrenhomomorphismus}$$

### Behauptung

Für  $x \in V$  ist  $f_\alpha(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) =: y$ . Noch zu zeigen:  $\alpha^{-1}(m_x) = m_y$ . Es ist  $m_y = \overline{(Y_1 - f_1(x), \dots, Y_m - f_m(x))}$ . Dann ist  $\alpha(m_y)$  das von  $\tilde{\alpha}(Y_i) - f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  erzeugte Ideal. Also:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \alpha(m_y) \subseteq m_x \\
 &\Rightarrow m_y \subseteq \alpha^{-1}(m_x) \\
 &\Rightarrow m_y = \alpha^{-1}(m_x)
 \end{aligned}$$

**Proposition 1.6.9**

Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten und  $U_1 \subseteq V$ ,  $U_2 \subseteq W$  offen. Dann gilt: Eine Abbildung  $f : U_1 \rightarrow U_2$  ist genau dann ein Morphismus, wenn  $f$  stetig ist und für jedes offene  $U \subseteq U_2$  gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)) \text{ für jedes } g \in \mathcal{O}(U)$$

**Beweis** " $\Rightarrow$ "  $f$  ist stetig nach 1.5.3. Seien  $g \in \mathcal{O}(U)$ ,  $x \in f^{-1}(U)$ ,  $U'$  Umgebung von  $f(x)$ , sodass  $g(y) = \frac{h_1(y)}{h_2(y)}$  für alle  $y \in U'$ , wobei  $h_1, h_2 \in k[W]$ ,  $h_2(y) \neq 0$  für alle  $y \in U'$ . Daraus folgt für  $z \in f^{-1}(U')$ :

$$g \circ f(z) = \frac{h_1(f(z))}{h_2(f(z))} = (*)$$

weil  $f$  ein Morphismus ist, gilt  $f(z) = \left( \frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \dots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)} \right)$  für geeignete  $a_i, b_i \in k[V]$  und  $\forall$  alle  $z \in f^{-1}(U')$  und damit

$$(*) = \frac{h_1\left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \dots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)}{h_2\left(\frac{a_1(z)}{b_1(z)}, \dots, \frac{a_m(z)}{b_m(z)}\right)} =: \frac{\tilde{h}_1}{\tilde{h}_2}(z), \text{ mit } \tilde{h}_i \in k[V].$$

" $\Leftarrow$ " Seien  $x \in U_1$  und  $U \subseteq W$  eine offene Umgebung von  $f(x) \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq V$  ist offen.

Sei  $p_i : U \rightarrow k$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion, also  $p_i(y_1, \dots, y_m) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Nach Voraussetzung ist  $p_i \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U))$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Also gibt es  $g_i, h_i \in k[V]$  mit  $p_i \circ f(y) = \frac{g_i(y)}{h_i(y)}$  für alle  $y$  in einer geeigneten Umgebung von  $x$ .

$$\Rightarrow f(z) = \left( \frac{g_1(z)}{h_1(z)}, \dots, \frac{g_m(z)}{h_m(z)} \right) \Rightarrow f \text{ ist ein Morphismus.} \quad \square$$

**Definition 1.6.10**

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät und irreduzibel. Dann heißt  $k(V) := \text{Quot}(k[V])$  **Funktionenkörper** von  $V$ .

**Beispiele 1.6.11**

(a)  $V = \mathbb{A}^n(k) \Rightarrow k(V) = k(X_1, \dots, X_n)$

(b)  $V = V(Y^2 - X^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$   
 $k[V] = k[X, Y]/(Y^2 - X^2) \cong k[T^2, T^3] \subseteq k[T]$   
 $\Rightarrow k(V) \cong k(T)$

**Proposition 1.6.12**

Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten.

- (a)  $f$  induziert genau dann einen Körperhomomorphismus  $\varphi_f : k(W) \rightarrow k(V)$ , der den  $k$ -Algebrenhomomorphismus  $f^\# : k[W] \rightarrow k[V]$  fortsetzt, wenn  $f^\#$  injektiv ist.
- (b)  $f^\#$  ist genau dann injektiv, wenn  $f(V)$  dicht in  $W$  ist (in diesem Fall heißt  $f$  **dominant**).

**Beweis**

- (a)  $k(W) = \text{Quot}(k[W])$ . Für  $x = \frac{a}{b} \in k(W)$  mit  $a, b \in k[W]$ ,  $b \neq 0$  muss gelten  $\varphi_f(x) = \frac{f^\#(a)}{f^\#(b)}$ . Das ist wohldefiniert  $\Leftrightarrow f^\#(b) \neq 0$  für alle  $b \neq 0$ .

(b) Sei  $\alpha := f^\# : k[W] \longrightarrow k[V]$ ,  $Z \subseteq V$ , dann gilt  $\alpha^{-1}(I(Z)) = I(f(Z))$ , denn:

$$\begin{aligned} g &\in \alpha^{-1}(I(Z)) \\ \Leftrightarrow \forall z \in Z : \alpha(g)(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall z \in Z : (g \circ f)(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow g &\in I(f(Z)) \end{aligned}$$

Für  $Z = V$  heißt das:  $\text{Kern}(\alpha) = \alpha^{-1}(0) = \alpha^{-1}(I(V)) = I(f(V))$ . Also:  $\text{Kern}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow I(f(V)) = 0 \Leftrightarrow V(I(f(V))) = \overline{f(V)} = W$   $\square$

## §7 Rationale Abbildungen

### Definition + Bemerkung 1.7.1

Sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät.

- (a) Eine **rationale Funktion** auf  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f)$ , wobei  $U \subseteq V$  offen und dicht und  $f \in \mathcal{O}(U)$  ist. Dabei sei  $(U, f) \sim (U', f') : \Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$
- (b) In jeder Äquivalenzklasse  $[(U', f')]$  gibt es ein (bezüglich " $\subseteq$ ") maximales Element  $(U, f)$ , dessen  $U$  **Definitionsbereich** der rationalen Funktion heißt.  $V \setminus U$  heißt **Pol(stellen)menge**.
- (c) Die rationalen Funktionen auf  $V$  bilden eine  $k$ -Algebra  $\text{Rat}(V)$ .
- (d) Ist  $V$  irreduzibel, so ist  $\text{Rat}(V) \cong k(V)$ .

**Beweis** (a)  $\sim$  ist transitiv: Seien  $(U, f) \sim (U', f')$ ,  $(U', f') \sim (U'', f'')$ , dann folgt:  $f|_{U \cap U' \cap U''} = f''|_{U \cap U' \cap U''}$ . Da  $U \cap U' \cap U''$  dicht in  $V$  ist, ist dann auch  $f|_{U \cap U''} = f''|_{U \cap U''}$ .

- (b) Ist  $(U, f) \sim (U', f')$ , so definiere auf  $U \cup U'$  eine Funktion  $\tilde{f}$  durch  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ f'(x) & x \in U' \end{cases}$ .

Dann ist  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U \cup U')$ .

- (c)  $f \pm g, f \cdot g$  sind reguläre Funktionen auf  $U \cap U'$ , wobei  $(U, f)$  und  $(U', g)$  Repräsentanten sind.
- (d)  $\frac{g}{h} \in k(V)$  ist eine reguläre Funktion auf  $D(h)$ .  $D(h)$  liegt dicht in  $V$ , weil  $V$  irreduzibel ist. Es folgt:  $\frac{g}{h} \mapsto (D(h), \frac{g}{h})$  ist ein wohldefinierter  $k$ -Algebrenhomomorphismus  $\alpha : k(V) \longrightarrow \text{Rat}(V)$ .

$\alpha$  ist surjektiv, denn:

Sei  $(U, f)$  ein Repräsentant einer rationalen Funktion auf  $V$ . Dann gibt es offenes  $U' \subseteq U$  und  $g, h \in k[V]$  mit  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  für alle  $x \in U'$ . Da  $V$  irreduzibel ist, ist  $U'$  dicht in  $V$ . Also ist  $\alpha(\frac{g}{h})$  gleich der Klasse  $(U', \frac{g}{h})$ , was gleich der Klasse von  $(U, f)$  ist.  $\square$

### Definition + Bemerkung 1.7.2

Seien  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$  affine Varietäten.

- (a) Eine **rationale Abbildung**  $f : V \dashrightarrow W$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, f_U)$ , wobei  $U \subseteq V$  offen und dicht ist und  $f_U : U \longrightarrow W$  ein Morphismus ist; dabei sei  $(U, f_U) \sim (U', f'_U) : \Leftrightarrow f_U|_{U \cap U'} = f'_U|_{U \cap U'}$ .
- (b) Rationale Funktionen sind rationale Abbildungen  $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ .

- (c) Jede rationale Abbildung hat einen maximalen Definitionsbereich.
- (d) Die Komposition von dominanten rationalen Abbildungen ist wieder eine dominante rationale Abbildung wegen  $\overline{f(U)} = \overline{f(\overline{U})}$ .
- (e) Jede dominante rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  induziert einen  $k$ -Algebrenhomomorphismus  $\text{Rat}(W) \longrightarrow \text{Rat}(V)$ .
- (f) Eine dominante rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  heißt **birational**, wenn es eine rationale Abbildung  $g : W \dashrightarrow V$  gibt mit  $f \circ g \sim \text{id}_W$  und  $g \circ f \sim \text{id}_V$ .

### Beispiele

- 1)  $f : \mathbb{A}^1(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k), x \mapsto (x, \frac{1}{x})$  ist eine rationale Abbildung.
- 2)  $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k), (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$  ist eine birationale Abbildung. Es gilt  $\sigma \circ \sigma = \text{id}$  auf  $\mathbb{A}^2(k) - V(XY)$ .

### Proposition 1.7.3

Seien  $V, W$  irreduzible affine Varietäten. Dann gibt es zu jedem Körperhomomorphismus  $\alpha : k(W) \longrightarrow k(V)$  eine rationale Abbildung  $f : V \dashrightarrow W$  mit  $\alpha = \alpha_f$ .

**Beweis** Wähle Erzeuger  $g_1, \dots, g_m$  von  $k(W)$  als  $k$ -Algebra. Für  $\alpha(g_i) \in k(V) = \text{Rat}(V)$  sei  $U_i \subseteq V$  der Definitionsbereich. Sei  $\tilde{U} := \bigcap_{i=1}^m U_i$ ,  $\tilde{U}$  ist offen und dicht in  $V$ . Sei  $U \subseteq \tilde{U}$  affin (d.h. isomorph zu einer affinen Varietät) und dicht (sowas gibt es, da  $D(f)$  affine Teilmenge).

$$\begin{aligned} & \stackrel{1.6.6}{\Rightarrow} \alpha(g_i) \in \mathcal{O}(U) = k[U], i = 1, \dots, m \\ & \Rightarrow \alpha|_{k[W]} : k[W] \longrightarrow k[U] \text{ ist } k\text{-Algebrenhomomorphismus.} \\ & \stackrel{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} \text{Es gibt einen Morphismus } f : U \longrightarrow W \text{ mit } f^\# = \alpha. \end{aligned}$$

$\alpha_f$  ist der von  $f^\#$  induzierte Homomorphismus auf  $\text{Quot}(k[W])$ . □

### Proposition 1.7.4

Zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung  $K/k$  gibt es eine irreduzible affine  $k$ -Varietät  $V$  mit  $K \cong k(V)$ .

**Beweis** Seien  $x_1, \dots, x_n \in K$  Erzeuger der Körpererweiterung  $K/k$ . Sei weiter  $A := k[x_1, \dots, x_n]$  die von den  $x_i$  erzeugte  $k$ -Algebra.  $A$  ist nullteilerfrei, da  $A \subseteq K$ . Nach Satz 2 gibt es eine affine Varietät  $V$  mit  $A \cong k[V]$ .  $V$  ist irreduzibel, da  $A$  nullteilerfrei.  $k(V) = \text{Quot}(k[V]) \cong \text{Quot}(A) = K$ . □

### Korollar 1.7.5

Die Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen  $K/k$  (mit  $k$ -Algebrenhomomorphismen) ist äquivalent zur Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten über  $k$  mit dominanten rationalen Abbildungen.