§ 9 Das Prinzip von Cavalieri

Die Bezeichnungen seien wie im Paragraphen 8.

Satz 9.1 (Prinzip von Cavalieri)
Sei $C \in \mathfrak{B}_d$. Dann:

$$\lambda_d(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y)\,dy$$

Das heißt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_C(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx\right)\,dy$$

Beispiel

(1) Sei $k = l = 1$, also $d = 2$. Sei $r > 0$ und

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

Da C abgeschlossen ist, gilt $C \in \mathfrak{B}_2$.
Ist $|y| > r$, so ist $C_y = \varnothing$, also $\lambda_1(C_y) = 0$.
Sei also $|y| \leq r$. Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $(x,y) \in \partial C$. Dann ist $x^2+y^2 = r^2$, also $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$.
Das heißt, es ist

$$C_y = \left[-\sqrt{r^2 - y^2}, +\sqrt{r^2 - y^2}\right] \text{ und } \lambda_1(C_y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

Aus 9.1 folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_2(C) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(C_y)\,dy \\
&= \int_{[-r,r]} \lambda_1(C_y)\,dy + \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \lambda_1(C_y)\,dy \\
&= \int_{[-r,r]} 2\sqrt{r^2 - y^2}\,dy \\
&\overset{4.13}{=} \text{R-}\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2}\,dy \\
&\overset{AnaI}{=} \pi r^2
\end{aligned}$$

(2) Sei $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$. X sei kompakt, also $X \in \mathfrak{B}_d$. Weiter sei $f\colon X \to [0,\infty)$ stetig, woraus mit 4.11 $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ folgt. Setze

$$C := \{(x,y) : x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

C ist kompakt und somit gilt: $C \in \mathfrak{B}_{d+1}$.
Ist $x \notin X$, so ist $C^x = \varnothing$, also $\lambda_1(C^x) = 0$.
Ist $x \in X$, so ist $C^x = [0, f(x)]$, also $\lambda_1(C^x) = f(x)$. Damit gilt

$$\lambda_{d+1}(C) \overset{9.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(C^x)\,dx = \int_X \lambda_1(C^x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus X} \lambda_1(C^x)\,\mathrm{d}x = \int_X f(x)\,dx$$

(3) Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon I \to [0, \infty]$ stetig. Setze

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Aus Beispiel (2) und 4.13 folgt

$$\lambda_2(C) = \text{R-}\int_a^b f(x)\,dx$$

(4) X und f seien wie in Beispiel (2). Setze

$$G := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

G ist kompakt, also ist $G \in \mathfrak{B}_2$. Ist $x \notin X$, so ist $G^x = \varnothing$, also $\lambda_1(G^x) = 0$. Ist $x \in X$, so ist $G^x = \{f(x)\}$, also $\lambda_1(G^x) = 0$. Aus 9.1 folgt

$$\lambda_2(G) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(G^x)\,dx = 0$$

Beweis (Prinzip von Cavalieri)
Wir definieren $\mu, \nu : \mathfrak{B}_d \to [0, \infty]$ durch:

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(A^x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \nu(A) := \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(A_y)\,\mathrm{d}y$$

Dann ist klar, dass $\mu(\varnothing) = \nu(\varnothing) = \lambda_d(\varnothing) = 0$ ist.
Sei (A_j) eine disjunkte Folge in $\mathfrak{B}_d$. Dann ist (A_j^x) ebenfalls disjunkt und $(\bigcup A_j)^x = \bigcup A_j^x$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup A_j) &= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(\bigcup A_j^x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \sum \lambda_l(A_j^x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(A_j^x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum \mu(A_j)
\end{aligned}$$

D.h. μ ist ein Maß auf $\mathfrak{B}_d$. Analog lässt sich zeigen, dass ν ein Maß auf $\mathfrak{B}_d$ ist.
Sei nun $I \in \mathcal{I}_d$, dann existieren $I' \in \mathcal{I}_k, I'' \in \mathcal{I}_l$ mit $I = I' \times I''$. Aus §8 folgt:

$$I^x = \begin{cases} I'' & , x \in I' \\ \varnothing & , x \notin I' \end{cases}$$

Also ist $\lambda_l(I^x) = \lambda_l(I'') \cdot \mathbb{1}_{I'}(x)$ und damit:

$$\begin{aligned}
\mu(I) &= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(I'') \cdot \mathbb{1}_{I'}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda_l(I'') \cdot \lambda_k(I') = \lambda_d(I)
\end{aligned}$$

D.h. auf $\mathcal{I}_d$ stimmen μ und λ_d überein. Analog gilt $\nu = \lambda_d$ auf $\mathcal{I}_d$. Da $\mathcal{I}_d$ die Vorraussetzungen des Satzes 2.6 erfüllt, gilt $\mu = \lambda_d = \nu$ auf $\mathfrak{B}_d$. ∎

Folgerung 9.2

(1) Sei $N \in \mathfrak{B}_d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_d(N) = 0 &\iff \lambda_l(N^x) = 0 \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^k \\ &\iff \lambda_k(N_y) = 0 \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^l \end{aligned}$$

(2) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ ($M \subseteq \mathbb{R}^l$) eine Nullmenge, dann ist $M \times \mathbb{R}^l$ ($\mathbb{R}^k \times M$) eine Nullmenge.

Beweis

(1) Nach 9.1 gilt:

$$\lambda_d(N) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(N^x) \, \mathrm{d}x$$

Nach 5.2(2) folgt die Behauptung. Analog lässt sich die zweite Äquivalenz zeigen.

(2) Es gilt:

$$\forall y \in \mathbb{R}^l : (M \times \mathbb{R}^l)_y = M$$

Damit folgt die Behauptung aus (1). ■

Lemma 9.3
Sei $\varnothing \neq D \in \mathfrak{B}_d$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Definiere

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in D \\ 0 & , z \notin D \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Beweis
Sei $a \in \mathbb{R}$, $B_a := \{n \in \mathbb{R}^d \mid \tilde{f}(z) \leq a\}$.
Fall $a < 0$**:**

$$B_a = \{z \in D \mid f(z) \leq a\} \overset{3.4}{\in} \mathfrak{B}_d$$

Fall $a \geq 0$**:**

$$B_a = \{z \in D \mid f(z) \leq a\} \cup \{z \in \mathbb{R}^d \setminus D\} \in \mathfrak{B}_d$$

Also folgt aus 3.4 die Messbarkeit von $\tilde{f}$. ■

Beispiel

(1) Sei $r > 0$ und

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$$

Dann ist K offen, also $K \in \mathfrak{B}_2$ und es gilt:

$$\partial K = \overline{K} \setminus K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\} \in \mathfrak{B}_2$$

Damit enthält die Menge $(\partial K)_y$ für alle $x \in \mathbb{R}$ höchstens zwei Elemente, d.h.

$$\lambda_2(\partial K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1((\partial K)_y) \, \mathrm{d}y = 0$$

Mit $\overline{K} = (\partial K)\dot{\cup} K$ folgt dann

$$\lambda_2(K) = \lambda_2(\partial K) + \lambda_2(\overline{K}) = \lambda_2(\overline{K}) = \pi r^2$$

Sei nun $A \in \mathfrak{B}_2$ mit $K \subseteq A \subseteq \overline{K}$, dann ist $\lambda_2(A) = \pi r^2$.

(2) Sei $r > 0$ und

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

Dann ist K abgeschlossen, also $K \in \mathfrak{B}_3$.
Fall $|z| > r$: Es ist $K_z = \varnothing$, also $\lambda_2(K_z) = 0$.
Fall $|z| \geq r$: Es ist

$$K_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2\}$$

und damit $\lambda_2(K_z) = \pi(r^2 - z^2)$.
Aus 9.1 folgt dann:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(K) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(K_z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{[-r,r]} \lambda_2(K_z)\ \mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \lambda_2(K_z)\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{[-r,r]} \pi(r^2 - z^2)\ \mathrm{d}z \\
&\overset{4.13}{=} \int_{-r}^{r} \pi r^2 - \pi z^2\ \mathrm{d}z \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

(3) $\lambda_2\left(☺\right) = 0$

(4) Wir wollen nun **Rotationskörper** betrachten. Sei dazu $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : I \to [0, \infty)$ messbar. Definiere nun

$$V := \{(x, y, z,) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2, z \in I\}$$

Setze $D := \mathbb{R}^2 \times I$ und $g(x, y, z) := x^2 + y^2 - f(z)^2$. Dann ist g nach §3 messbar und $V = \{g \leq 0\} \in \mathfrak{B}_3$.
Fall $z \notin I$: Es so ist $V_z = \varnothing$, also $\lambda_2(V_z) = 0$.
Fall $z \in I$: Es ist

$$V_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

und damit $\lambda_2(V_z) = \pi f(z)^2$.
Aus 9.1 folgt dann:

$$\begin{aligned}
\lambda_3(V) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(V_z)\ \mathrm{d}z \\
&= \pi \int_a^b f(z)^2\ \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

(5) Sei $h > 0$, $I = [0, h]$ und $f(z) = \frac{r}{h}z$. Definiere den Kegel

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2}z^2\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda_3(V) &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} z^2 \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3}\end{aligned}$$