# 5. Krümmung

## 5.1. Der Riemann'sche Krümmungstensor

Gegeben sei eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit Levi-Civita-Zusammenhang $D$. Der Riemann'sche Krümmungstensor von $M$ bezüglich $D$ ist die Abbildung $R : \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$, $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$, wobei

$$R(X, Y)Z := D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z \,.$$

**Beispiel**
Im $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt ist, betrachten wir das Vektorfeld $Z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathcal{V}\mathbb{R}^n$. Da $D_X Z = (Xz^1, \dots, Xz^n)$, folgt: $D_Y D_X Z = (YXz^1, \dots, YXz^n)$. Wegen $[X, Y] = XY - YX$ folgt: $R(X, Y)Z = 0$.

Das oben definierte $R$ ist somit ein „Maß“ für die Abweichung der Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ von der euklidischen Geometrie.

**Bemerkung:** Bezüglich lokalen Basisfeldern $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = (1, \dots, n))$ gilt: $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ für $C^\infty$-Funktionen. Dann ist $R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}$. „$R$ ist ein Maß für die Vertauschbarkeit der 2. kovarianten Ableitungen.“

**Definition**
Setze $\mathcal{V}_0 M := C^\infty M$, $\mathcal{V}_r M := \mathcal{V}M \times \cdots \times \mathcal{V}M$. ($r$ Summanden). $\mathcal{V}_r M$ ist ein $C^\infty M$-Modul. Ein $(s, r)$-Tensorfeld auf $M$ ist eine $r$-lineare Abbildung $T : \mathcal{V}_r \to \mathcal{V}_s M$ über dem Ring $C^\infty M$, das heißt

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, X_{i-1}, fX + gY, X_{i+1}, \dots, X_r) &= fT(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_r) \\ &\quad + gT(X_1, \dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots, X_r) \end{aligned}$$

für alle Argumente von $T$, $X, Y \in \mathcal{V}M$

**Satz 5.1**
*$R$ ist ein (1,3)-Tensorfeld*

**Beweis**
Exemplarisch für $R(X, Y)(fZ = fR(X, Y)Z \;\forall f \in C^\infty M$.

$D_Y D_X(fZ) = D_Y(fD_X Z + (Xf)Z) = (Yf)D_X Z + fD_Y D_X Z + (YXf)Z + (Xf)D_Y Z$. Also: $D_Y D_X(fZ) - D_X D_Y(fZ) = f(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z) + (YXf - XYf)Z$; $D_{[X,Y]} fZ = fD_{[X,Y]} Z + ([X, Y]f)Z \implies R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$. ■

**Satz 5.2 (Symmetrie-Eigenschaften)**
$(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sei eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. $D$ der Levi-Civita-Zusammenhang und $R$ ein Krümmungstensor. Dann gilt

(1) $R(X,Y)Z + R(X,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (zyklisch Vertauschbar). „Bianchi-Identität“

(2) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$

(3) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$

(4) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$

**Beweis**

(1) ist äquivalent zur Jacobi-Identität für Lie-Klammern.

(2) folgt direkt aus der Definition.

(3) ist äquivalent zu $\langle R(X,Y)W, W\rangle = 0$ (setzte $W = Z + T$ und verwende Satz 5.1).

Es ist $\langle R(X,Y)W, W\rangle = \langle D_Y D_X W - D_X D_Y W + D_{[X,Y]}W, W\rangle$, $\langle D_Y D_X W, W\rangle \overset{\text{Levi-Civita, vertraeglich}}{=} Y\langle D_X W, W\rangle - \langle D_X W, D_Y W\rangle$, analog $\langle D_X D_Y W, W\rangle$; $\langle D_{[X,Y]}W, W\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle W, W\rangle$. Somit: $\langle R(X,Y)W, W\rangle = Y\langle D_X W, W\rangle - \langle D_X W, D_Y W\rangle - X\langle D_Y W, W\rangle + \langle D_Y W, D_X W\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle W, W\rangle = 0$.

(4) Analog. ∎

## Krümmungstensor in lokalen Koordinaten $(u, \varphi)$

Die Basisfelder seien $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann: $R(X_i, X_j)X_k := \sum_{l=1}^n R^l_{ijk} X_l$ (per Basissatz), wobei $R^l_{ijk}$ die Komponenten des Krümmungstensors in lokalen Koordinaten sind, also $C^\infty$-Funktionen und symmetrisch bezüglich $i$, $j$.

Für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$ mit

$$X = \sum_{i=1}^n u^i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n v^j X_j, \quad Z = \sum_{k=1}^n w^k X_k$$

gilt wegen Satz 5.1:

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^n u^i v^j w^k R^l_{ijk} X_l \quad (*)$$

(man muss alles an der Stelle $p$ kennen).

**Bemerkung:** (Trägereigenschaft von $R$) Die Formel $(*)$ zeigt, dass $(R(X,Y)Z)(p)$ nur von den Werten der Vektorfelder $X, Y, Z$ im Punkt $p$ abhängig ist.

### Formel für $R_{ijk}^l$

$$
\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= D_{X_j}(D_{X_i}X_k) - D_{X_i}(D_{X-j}K_k) + D_{\underbrace{[X_i, X_j]}_{=0}}X_k \\
&= D_{X_j}(\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ik}^m X_m) - D_{x_j}(\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{jk}^n X_m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} [(X_j(\Gamma_{ik}^m X_m + \Gamma_{ik}^m \underbrace{D_{X_j}X_m}_{\sum_{l=1}^m \Gamma_{jm}^l X_l}] - \sum_{m=1}^{n} [X_i(\Gamma_{ik}^m)X_m + \Gamma_{jk}^m \underbrace{D_{X_i}X_m}_{\sum_{l=1}^n \Gamma_{im}^l X_l}] \\
\implies R_{ijk}^l &= \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ik}^n \Gamma_{jm}^l - \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^l - \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l
\end{aligned}
$$

(so hatte es Riemann definiert)

Setze nun

$$R_{ijks} := \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^l \cdot g_{ls} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle$$

„Herunterziehen von Indizes", „Ricci-Kalkül". Nach Satz 5.2 gilt:

- $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0$
- $R_{ijks} = -R_{ijsk}$
- $R_{ijks} = -R_{jiks}$
- $R_{ijks} = R_{ksij}$

**Bemerkung:** Für $\dim M = 2$ sind $i, j, k, s \in \{1, 2\}$ und aufgrund obiger Symmetrien ist im wesentlichen nur $R_{1212} \neq 0$. Dies ist gerade die Gauß-Krümmung.

### Riemann'scher Krümmungstensor

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $D$ der zugehöriger Levi-Civita-Zusammenhang. Dann ist

$$R : \begin{array}{l} \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M \\ \qquad\qquad (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z := D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{[X,Y]}Z \end{array}$$

multilinear bezüglich $C^\infty M$.

## 5.2. Schnittkrümmung

Vorbemerkung aus der Linearen Algebra. Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für $x, y \in V$ setze

$$|x \wedge y| := \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - < x, y >^2} \geq 0$$

(Flächeninhalt des des von $x$ und $y$ aufgespannten Parallelogramms). Für orthonormierte Vektoren ist $|x \wedge y| = 1$.

**Lemma 5.1**
Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $\sigma$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum von $T_pM$ mit Basis $x, y$. Dann ist

$$K(x,y) := \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle_p}{|x \wedge y|^2}$$

unabhängig von der Wahl der Basis.

In der Konsequenz macht folgende Definition Sinn:

**Definition**
Für $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum setze $K(p,\sigma) := K(x,y)$ für eine beliebige Basis $\{x,y\}$ von $\sigma$. $K(p,\sigma)$ heißt Schnittkrümmung von $\sigma$ in $p \in M$.

**Bemerkungen:** (1) Für $n = 2$ ist $K(p,\sigma) = K(p)$ die Gauß-Krümmung von $M$ im Punkt $p$. Die Menge der Krümmungstensoren $R$ im Punkt $p$ ist vollständig bestimmt.

**Beispiel**
Schnittkrümmung von $(\mathbb{R}^n, \mathrm{kan})$ ist konstant null, da $R = 0$.

(2) $(S^n, \mathrm{kan})$. Behauptung: Schnittkrümmung ist konstant 1.

**Lemma 5.2**
Sei $f : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (N, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ eine Riemann'sche Isometrie. Für $\sigma \subset T_pM$ ist $df|_p(\sigma) \subset T_{f(p)}N$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum und $K^M(p,\sigma) = K^N(f(p), df|_p(\sigma))$. Das heißt: Schnittkrümmung ist invariant unter Isometrie.

**Beweis**
Es gilt (Übungsblatt 7 Aufgabe 1):

- $D^N_{dfx} df(y) = df(D^m_x y)$
- $[df(x), df(y)]^N = df([x,y]^M)$
- $\langle\langle df(x), df(y)\rangle\rangle = \langle x, y\rangle$

$\implies$ $R^N(df(x), df(y))df(z) = df(R^M(x,y)z)$. Es genügt zu zeigen: Zu $\sigma \subset T_xS^n$ und $\tau \subset T_yS^n$, jeweils 2-dimensionale Untervektorräume, existiert eine Isometrie $f : S^n \to S^n$ mit $df_x(\sigma) = \tau$.

Sei nun $\sigma = [u,v]$, $\tau = [\tilde{u}, \tilde{v}]$, wobei $u, v$ bzw. $\tilde{u}, \tilde{v}$ Orthonormalbasen sind. $l_1 = x$, $l_2 = u$, $l_3 = v$.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f_1 \qquad \tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n+1} \end{pmatrix} = f_2 \qquad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_{n+1} \end{pmatrix} = f_3$$

ergänze zu einer Orthonormalbasis $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $A := [f_1, f_2, \dots, f_{n+1}] \in O(n+1)$, also eine orthogonale $(n+1) \times (n+1)$-Matrix, mit $A_{li} = f_i$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$; $w \mapsto Aw$ ist eine euklidische Isometrie (Rotation von $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathrm{kan})$ die $S^n$ invariant lässt. Dies Induzier also eine Isometrie von $(S^n, \mathrm{kan})$.

Da $f$ linear ist, $df = f$, also $df_x(\sigma) = df_x([u,v]) = [df_x u, df_y v] = [\tilde{u}, \tilde{v}] = \tau \implies$ Behauptung. $S^n$ hat konstante Schnittkrümmung. Es glit $K = 1$ (siehe später). ■

(3) $n$-dimensionale hyperbolische Räume $H^n\mathbb{R} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ mit der Identität als Karte und lokalen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$. Es ist

$$(g_{ij}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_n)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(x_n)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x_n)^2} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der $R_{ijk}$ zeigt: Schnittkrümmung $R$ ist konstant $-1$.

(4) Konfrome Änderung der Metrik $(M, g)$ einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit um $\lambda \in C^\infty M$, $\lambda > 0$: $\tilde{g} := \lambda g$ ist wieder eine Riemann'sche Metrik.

Für konstantes $\lambda > 0$ ist die Schnittkrümmung für $\tilde{g}$: $\tilde{R} = \frac{1}{\lambda} R$. Insbesondere kann man jede Mannigfaltigkeit mit beliebiger, konstaner Krümmung durch Reskalierung der Riemann'schen Metrik zu $S^n$ oder $H^n$ formen. (besseres verb bitte?!?)

### Ergänzende Sätze (ohne Beweis, vergleiche: do Carmo, Kapitel 8)

**Satz**
$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hat konstante Schnittkrümmung, also

$$K(p, \sigma) = K_0 \forall \sigma \subset T_p M \forall p \in M \iff \langle R(x,y)w, z \rangle = K_0(\langle x, w \rangle \langle y, z \rangle - \langle y, w \rangle \langle x, z \rangle)$$

insbesondere ist $\langle R(x,y)x, y \rangle = K_0(\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)$.

**Satz (Hopf)**
Eine vollständige, einfach zusammenhängende, ??? Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung 0,1 oder -1 ist isometrisch zu $\mathbb{R}^n$, $S^n$, $H^n\mathbb{R}$. Dabei heißt

- Vollständig: Jede Geometrie ist auf ganz $\mathbb{R}$? definiert
- Einfach zusammenhängend: Jede geschlossene Kurve ist auf einen Punkt zusammenziehbar
- „???“ = Riemann'sche Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung.

## 5.3. Ricci-Krümmung

Sei $R$ der Krümmungstensor einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$. In jedem Punkt $p \in M$ ist $Y(p) \mapsto R(X(p), Y(p))Z(p)$ ein Endomorphismus von $T_pM$. Oder: Für $X, Z \in \mathcal{V}M$ fest ist $R(X, \cdot)Z$ ein (1,1)-Tensormodul.

Für ein beliebiges (1,1)-Tensorfeld $A$ ist $A(p) : T_pM \to T_pM$ ein Endomorphismus und wir definieren die Spur von $A$ durch

$$(\operatorname{Spur} A)(p) := \sum_{i=1}^{n} \langle A(p)e_i, e_i\rangle_p$$

wobei $[e_i]$ eine Orthonormalbasis von $T_pM$ ist. Linere Algebra: Es gibt einen Endomorphismus $\Phi$ mit Abbildungsmatrix $A$ und $\operatorname{Spur}\Phi = \operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ (insbesondere für Orthonormalbasen, $a_{ii} = \langle A_{e_i}, e_i\rangle$).

Der Ricci-Tensor von $M$ ist der (0,2)-Tensor $Ric(x, y) := \operatorname{Spur}(y \mapsto R(x, y)z)$. (In manchen quellen noch mit $\frac{1}{n-1}$ normiert.) Die Ricci-Krümmung von $M$ in Richtung $v \in T_pM$ ist

$$r(v) := \frac{Ric(v, v)}{\|v^2\|}\,.$$

Für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von $T_pM$ ist $Ric(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(v, e_i)w, e_i\rangle$. Also insbesondere ist der Ricci-Tensor symmetrisch und $r(e_1) = \sum_{i=2}^{n} K(p, [e_1, e_i])$.

Die Skalar-Krümmung ist eine differenzierbare Funktion auf $S : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \sum_{j=1}^{n} r(e_j)$, wobei $\{e_j\}$ eine Orthonormalbasis von $T_pM$ ist.

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} r(e_j) = \sum_{j=1}^{n} Ric(e_j, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle R(e_j, e_i)e_j, e\rangle_i = \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} K(p, [e_i, e_j])$$

Eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit $(M, g)$ heißt Einstein-Raum falls $Ric(x, y) = \lambda g(x, y) \forall x, y \in \mathcal{V}M$, wobei $\lambda : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist.

**Beispiel**
Räume mit konstanter Krümmung sind Einstein-Räume: $K = c_0$ konstant. $Ric(X, X) = \sum_{i=1}^{n} k([x, e_i])g(x, x) = (n-1)c_0 g(x, x)$

**Bemerkung:** Der Einstein-Tensor ist... (bitte jemand eintragen!)