3 Lokale Eigenschaften

§14 Lokale Ringe zu Punkten

Erinnerung / Definition + Bemerkung 3.14.1
Sei V eine Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k) und $x \in V$.

(a)
$$\mathcal{O}_{V,x} := \{[(U,f)] : U \subseteq V \text{ offen}, \, x \in U, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$$
heißt ***lokaler Ring*** von V in x, dabei sei $(U,f) \sim (U',f') \Leftrightarrow f|U \cap U' = f'|U \cap U'$

(b) $\mathcal{O}_{V,x}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal
$$m_x = \{[(U,f)] \in \mathcal{O}_{V,x} : f(x) = 0\}.$$

(c) $\mathcal{O}_{V,x} = \varinjlim_{U \subseteq V \text{ offen}, \, x \in U} \mathcal{O}_V(U)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_V(U) \arrow[d, "U' \subseteq U"] \arrow[dr, "\rho_U"] \arrow[ddl, "\alpha_U"'] & \\
 & \mathcal{O}_V(U') \arrow[r, "\rho_{U'}"] \arrow[dl, "\alpha_{U'}"] & \mathcal{O}_{V,x} \arrow[dll, dotted, "\exists ! \alpha"] \\
A & &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 3.14.2
Seien $V, x \in V$ wie in 3.14.1, sei weiter $V_0 \subseteq V$ offen und affin mit $x \in V_0$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{O}_{V,x} \cong k[V_0]_{m_x^{V_0}}$, wobei $k[V_0]$ der affine Koordinatenring von V_0 sei und $m_x^{V_0}$ das zu x gehörige maximale Ideal in $k[V_0]$, das heißt $m_x^{V_0} = \{f \in k[V_0] : f(x) = 0\}$.

(b) Ist V irreduzibel, so ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong \{f = \frac{g}{h} \in k(V) : g, h \in k[V_0], h(x) \neq 0\}$.

Beweis Übung. □

Proposition 3.14.3
Seien V, W Varietäten, $x \in V, y \in W$. Ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{W,y}$ (als k-Algebra), so gibt es (affine) offene Umgebungen $U_1 \subseteq V$ von x und $U_2 \subseteq W$ von y mit $U_1 \cong U_2$.

Beweis Übungsblatt 7 Aufgabe 1. □

Bemerkung 3.14.4
Sei $\varphi : V \longrightarrow W$ ein Morphismus von Varietäten. Für jedes $x \in V$ induziert φ einen k-Algebrenhomomorphismus
$$\varphi_x^\sharp : \mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x} \quad \text{mit} \quad \varphi_x^\sharp(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x.$$

Beweis Œ V, W affin (geeignet einschränken!).
Dann induziert φ einen k-Algebrenhomomorphismus

$$\varphi^\sharp : \begin{array}{ccc} k[W] & \longrightarrow & k[V] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Dabei gilt für $f \in k[W]$:

$$(*) \quad f \in m^W_{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi^\sharp(f) \in m^V_x$$

$\Rightarrow \varphi^\sharp$ induziert einen Homomorphismus

$$\varphi^\sharp_x : \underbrace{k[W]_{m^W_{\varphi(x)}}}_{\cong \mathcal{O}_{W,\varphi(x)}} \longrightarrow \underbrace{k[V]_{m^V_x}}_{\cong \mathcal{O}_{V,x}}.$$

Aus $(*)$ folgt weiter:

$$\varphi^\sharp_x(\underbrace{m^W_{\varphi(x)} \cdot k[W]_{m^W_{\varphi(x)}}}_{=m_{\varphi(x)}}) \subseteq m^V_x k[V]_{m^V_x} = m_x$$ □

§15 Dimension einer Varietät

Definition 3.15.1
Sei X ein topologischer Raum ($\neq \emptyset$). Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{ Es gibt irreduzible Teilmengen } \emptyset \neq V_0 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \subseteq X\}$$

die ***(Krull-)Dimension*** von X.

Erinnerung / Definition 3.15.2
Sei R ein Ring (kommutativ mit Eins).

(a) Für ein Primideal $\wp \subseteq R$ heißt

$$\mathrm{ht}(\wp) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{ Es gibt Primideale } \wp_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \wp_n = \wp\}$$

die ***Höhe*** von $\wp$.

(b) $\dim R := \sup\{\mathrm{ht}(\wp) : \wp \subset R \text{ Primideal}\}$ heißt ***(Krull-)Dimension*** von R.

Bemerkung 3.15.3
Sei V eine affine Varietät. Dann ist $\dim(V) = \dim(k[V])$.

Beweis Nach Proposition 1.3.2 ist eine abgeschlossene Teilmenge Z von V genau dann irreduzibel, wenn ihr Verschwindungsideal $I(Z)$ ein Primideal ist. Nach Satz 2 ist das eine Bijektion. □

Proposition 3.15.4

(a) $\dim(k[X_1, \ldots, X_n]) = n$

(b) Ist A eine nullteilerfreie k-Algebra, so haben alle maximalen Primidealketten die gleiche Länge.

Beweis Algebra 2. □

Bemerkung + Definition 3.15.5
Sei V eine Varietät, $x \in V$, $V_0 \subseteq V$ eine offene und affine Umgebung von x.

(a) $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \operatorname{ht}(m_x^{V_0})(= \operatorname{ht}(m_x^{V_0} \cdot k[V_0]_{m_x^{V_0}}))$

(b) Ist V irreduzibel, so ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim \mathcal{O}_{V,y} = \dim V \text{ für alle } x, y \in V.$$

(c) $\dim_x V := \dim \mathcal{O}_{V,x}$ heißt ***lokale Dimension*** von V in x.

(d) $\dim_x V = \max\{\dim Z : Z \text{ irreduzible Komponente von } V,\ x \in Z\}$

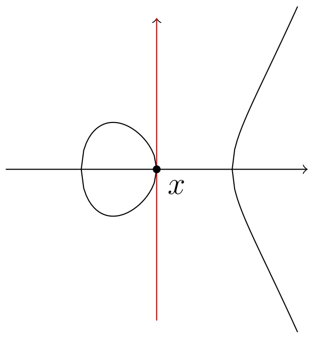
Beweis b) Ist V affin (also $V = V_0$), so folgt die Aussage aus a) und Proposition 3.15.4(b). Im allgemeinen Falle überdecke V durch affine Varietäten V_i $(i = 1, \ldots, n)$. Da V irreduzibel ist, ist $V_i \cap V_j \neq \emptyset \ \forall i, j$.
$\Rightarrow \dim \mathcal{O}_{V,x}$ ist unabhängig von x, also gleich $\dim V_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$.
noch zu zeigen: $\dim V_i = \dim V$.
Sei $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_d = V$ eine maximale Kette von irreduziblen Teilmengen. Dabei ist $Z_0 = \{z_0\}$ einpunktig. Es folgt $d = \dim \mathcal{O}_{V,z_0}$.
d) Œ sei V affin. Die irreduziblen Komponenten $Z_1, \ldots, Z_n$ von V entsprechen den minimalen Primidealen in $k[V]$. Es gilt $x \in Z_i \Leftrightarrow m_x^V \supseteq I(Z_i) =: \mu_i$. Weiter ist $k[Z_i] = k[V]/\mu_i$. Es folgt: $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \operatorname{ht}(m_x^V) = \max_{i=1;\mu_i \subseteq m_x^V}^n \{\text{maximale Länge einer Primidealkette } \mu_i \subsetneq \wp_1 \subsetneq \ldots \subsetneq m_x^V\} = \max_{i=1;\mu_i \subseteq m_x^V}^n \{\underbrace{\dim k[Z_i]}_{=\dim Z_i}\}$. □

§16 Der Tangentialraum

Zunächst einige einführende Beispiele:

Beispiele

1.) $V = V(Y^2 - X^3 + X)$, $x = (0,0)$.
Die Tangente in x an V ist die y-Achse, also $V(X)$. Der Tangentialraum in $x = (1,0)$ ist derselbe, d.h. der Tangentialraum ist nicht als affiner Raum, sondern als Vektorraum zu verstehen.



2.) $V = V(Y^2 - X^3 + X^2)$ (Newton-Knoten), $x = (0,0)$.
Hier kann man an den Nullpunkt 2 Tangenten anlegen ($y = x$ und $y = -x$). Der Tangentialraum, wie wir ihn definieren werden, ist der davon aufgespannte $\mathbb{A}^2(k)$.

3.) $V = V(Y^2 - X^3)$, $x = (0,0)$.
Ist jeder beliebige eindimensionale Unterraum im Tangentialraum enthalten?

4.) $V = V(X^2 + Y^2 - Z^2)$ (doppelter Kegel), $x = (0,0,0)$, $y = (1,0,1)$.

Definition + Bemerkung 3.16.1
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $x \in V$, $I = I(V)$.

(a) Für $f \in I$ sei $f^{(1)} := f_x^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) \cdot X_i$. Weiter sei I_x das von den $f^{(1)}$, $f \in I$, erzeugte Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n]$ und $T_x := T_{V,x} := V(I_X)$. $T_{V,x}$ heißt ***Tangentialraum*** an V in x.

(b) T_x ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{A}^n(k)$.

(c) Sind $f_1, \ldots, f_r$ Erzeuger von I, so wird I_x erzeugt von $f_1^{(1)}, \ldots, f_r^{(1)}$.

Beispiele von oben:

1.) $I_x = (X), \quad T_x = V(X)$
2.) $I_x = (0), \quad T_x = \mathbb{A}^2(k)$
3.) $I_x = (0), \quad T_x = \mathbb{A}^2(k)$
4.) $I_x = (0), \quad T_x = \mathbb{A}^3(k)$;
$I_y = (2X - 2Z) = (X - Z), \quad T_y = V(X - Z)$

Bemerkung 3.16.2
Jeder Morphismus $\varphi : V \to W$ von affinen Varietäten induziert für jedes $x \in V$ eine k-lineare Abbildung $d_x\varphi : T_{V,x} \to T_{W,\varphi(x)}$.

Beweis Œ $x = 0,\ \varphi(x) = 0$.
Schreibe $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Brauche k-Algebrenhomomorphismus:

$$(d_x\varphi)^\sharp : \quad k[Y_1, \ldots, Y_m]/I_{\varphi(x)} \to k[X_1, \ldots, X_n]/I_x$$

Für $j = 1, \ldots, m$ ist $\varphi^\sharp(Y_j) = Y_j \circ \varphi = \varphi_j \Rightarrow (\varphi^\sharp(Y_j)^{(1)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0) \cdot X_i =: (d_x\varphi)^\sharp(Y_j)$.
Sei $f \in I_\varphi$, Œ $f = g^{(1)}$ für ein $g \in I(V)$.
Schreibe $g^{(1)} = \sum_{j=1}^m a_j Y_j,\ a_j \in k = (d_x\varphi)^\sharp(f) = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0) \cdot X_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0)) \cdot X_i = (g \circ \varphi)^{(1)}$
da $\frac{\partial (g\circ\varphi)}{\partial X_i}(0) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial g}{\partial Y_j}(\varphi(0))}_{=a_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0)$ □

Proposition + Definition 3.16.3
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $x \in V$. Dann ist T_x in natürlicher Weise isomorph zu dem Dualraum $(m_x/m_x^2)^\vee$ von m_x/m_x^2. Der k-Vektorraum $(m_x/m_x^2)^\vee$ heißt ***Zariski-Tangentialraum*** an V in x.
m_x/m_x^2 ist ein k-Vektorraum: Zunächst ist m_x/m_x^2 ein R-Modul für $R = \mathcal{O}_{V,x}$. Weiter ist $R/m_x = k$.
Da $m_x \cdot (m_x/m_x^2) = 0$ ist, hat m_x/m_x^2 eine Struktur als R/m_x-Modul.

Definition + Bemerkung 3.16.4
Sei V eine Varietät, $x \in V$.

(a) x heißt ***nichtsingulärer Punkt*** (oder ***regulärer Punkt***), wenn

$$\dim T_{V,x} = \dim_x V.$$

(b) (Jacobi-Kriterium) Sei $U \subseteq V$ eine offene, affine Umgebung von x, $f_1, \ldots, f_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ Erzeuger des Verschwindungsideals $I(U)$. Dann gilt:

$$x \text{ nichtsingulär } \Leftrightarrow \text{Rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{i,j} = n - \dim_x V$$

(c) Ist x singulär, so ist $\dim T_{V,x} > \dim_x V$.

Beweis b) Sei $x \in V$, $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$.

$$\mathcal{J}_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{\substack{i=1,\dots,r\\ j=1,\dots,n}}$$

$T_{V,x}$ ist die Lösungsmenge des LGS $\mathcal{J}_f(x) \cdot X = 0$, denn $f_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \cdot X_j$.

c) Sei $\mathcal{J}_f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{i,j}$.
$\Rightarrow$ Rang $(\mathcal{J}_f(x)) = \max\{d : \exists\, (d \times d)$-Minor M von $\mathcal{J}_f$ mit $\det M(x) \neq 0\}$
$\Rightarrow$ Es gibt eine offene Teilmenge U von V, auf der Rang$(\mathcal{J}_f(x))$ maximal ist. □

Beispiele 3.16.5
(a) $V = (Y^2 - X^3 - X^2) =: V(f)$
$\mathcal{J}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}\right) = (-3X^2 - 2X, 2Y)$
$Rang(\mathcal{J}_f(x)) = \begin{cases} 0 & , \ -3X^2 - 2X = 0 \text{ und } Y = 0 \\ 1 & , \ \text{sonst} \end{cases}$
(b) $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ mit einem Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$.
$x \in \mathbb{A}^n(k)$ singulärer Punkt von $V \Leftrightarrow 0 = f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x)$

Proposition 3.16.6

$$\mathcal{T}_{V,x} \cong \left({}^{m_x}\big/_{m_x^2}\right)^* \qquad\qquad {}^{\mathcal{O}_{V,x}}\big/_{m_x} \cong k$$

(in natürlicher Weise)

Beweis Sei $I = I(V)$ das Verschwindungsideal von V in $k[X_1, ..., X_n]$. Œ $\quad x = (0, ..., 0)$
Dann ist $\mathcal{M} := m_x^{\mathbb{A}^n} = (x_1, ..., x_n)$
$\Rightarrow m_x^V = {}^{\mathcal{M}_x}\big/_{I \cap \mathcal{M}_x} = {}^{\mathcal{M}_x}\big/_{I}$, da $I \subseteq \mathcal{M}_x$
<u>Beh. 1</u>: ${}^{m_x}\big/_{m_x^2} \cong {}^{m_x^V}\big/_{(m_x^V)^2}$
Denn: $\mathcal{O}_{x,V} \cong k[v]_{m_x^V}$
$m_x = m_x^V k[V] m_x^V$
$a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Homomorphismus $\rho : m_x^V \to m_x \to {}^{m_x}\big/_{m_x^2}$ mit Kern $(m_x^V)^2$
ρ ist surjektiv: Sei $p = q \cdot \frac{a}{b} \in m_x$ mit $q \in m_x^V,\ a, b \in k[V],\ b \notin m_x^V$
Ansatz: Wähle $\tilde{a}(= q \cdot \tilde{b}) \in m_x^V \Rightarrow p - \frac{\tilde{a}}{1} = q \cdot \frac{a}{b} - \frac{q \cdot \tilde{b}}{1} = q \frac{a - \tilde{b}b}{b}$
Hätte gerne: $a - b\tilde{b} \in m_x^V$

?????????????????????

<u>Beh. 2</u>: ${}^{m_x}\big/_{(m_x^V)^2} \cong {}^{\mathcal{M}_x}\big/_{\mathcal{M}_x^2 + I} = {}^{\mathcal{M}_x}\big/_{\mathcal{M}_x^2 + I_x}$
denn: ${}^{m_x}\big/_{(m_x^V)^2} \cong {}^{\mathcal{M}_x}\big/_{I}\Big/\left({}^{\mathcal{M}_x}\big/_{I}\right)^2$
$\cong \left({}^{\mathcal{M}_x}\big/_{I}\right)\Big/\left({}^{\mathcal{M}_x^2}\big/_{I \cap \mathcal{M}_x^2}\right)$
$\cong \left({}^{\mathcal{M}_x}\big/_{I}\right)\Big/\left({}^{\mathcal{M}_x^2 + I}\big/_{I}\right)$

$\cong \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 + I$
Definiere k-lineare Abbildung: $\alpha : (m_x/m_x^2)^* \to \mathcal{T}_x$ durch $l \mapsto (l(\overline{X_1}), ..., l(\overline{X_n})) \in k^n$
Zu zeigen: α ist wohldefiniert, d.h. $\alpha(l) \in \mathcal{T}_x$
Sei also $f \in I_x$. Zu zeigen: $f(\alpha(l)) = 0$
$f = g_x^{(1)}$ für ein $g \in I$
$\Rightarrow f(L(l)) = \sum \frac{\partial g}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i})$
$= l(\overline{\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i}(x) X_i})$
$= l(\overline{g_x^{(1)}}) = 0$ weil $g_x^{(1)} \in I_x \subseteq \mathcal{M}_x^2 + I_x$
Umkehrabbildung:

$$\beta : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_x & \longrightarrow & (m_x/m_x^2)^* \\ (l_1, ..., l_n) & \longmapsto & (\overline{X_i} \mapsto l_i) \end{array}$$

Wohldefiniertheit von β: Ist $\sum \lambda_i X_i \in I_X$, so ist $\sum \lambda_i l_i = 0$, da jedes Polynom in I_x auf dem Tangentialraum verschwindet, $l_i \in \mathcal{T}_x$ □

Definition 3.16.7

(a) Ein lokaler Ring heißt ***regulär***, wenn $\dim R = \dim_{R/m}(m/m^2)$ ist.
(b) Sei V eine Varietät. Ein Punkt $x \in V$ ist genau dann nichtsingulär, wenn $\mathcal{O}_{V,x}$ ein regulärer, lokaler Ring ist.

Definition + Bemerkung 3.16.8

Sei $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät.

(a) Für $i = 1, \dots, r$ sei

$$f_i^1 := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \cdot Y_j \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$$

Dann heißt

$$\mathcal{T}_V = V(f_1, \dots, f_r, f_1^1, \dots, f_r^1) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{2n}$$

Tangentialbündel über V.
(b) Sei $p : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ die Projektion auf die ersten n Komponenten. Dann ist $p(\mathcal{T}_V) = V$.
(c) Für jedes $x \in V$ ist $p^{-1}(x) \cong T_{V,x}$.
(d) Ist V eine beliebige Varietät und $V_1, \dots, V_m$ eine affine Überdeckung von V, so verkleben sich die Tangentialbündel $\mathcal{T}_{V_1}, \dots, \mathcal{T}_{V_m}$ zu einer Varietät $\mathcal{T}_V$, dem ***Tangentialbündel*** über V.

Beispiele 3.16.9

$V = V(\underbrace{Y^2 - X^3 - X^2}_{=:f}) \qquad \mathcal{T} = V(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ) \subseteq \mathbb{A}^4$

Beh: $\mathcal{T}_V$ hat 2 irreduzible Komponenten $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$.
Äquivalent dazu: $I := I(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ)$ ist kein Primideal.
$\underbrace{X^2}_{\notin I}(\underbrace{W^2(2+3X)^2 - 4Z^2(X+1)}_{\notin I}) =$
$\underbrace{(WX(2+3X) - 2YZ)}_{\in I}(WX(2+3X) + 2YZ) - \underbrace{4Z^2X^2(X+1) + 4Z^2Y^2}_{=4Z^2(\underbrace{Y^2 - X^2(X+1)}_{\in I})}$
$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = V(Y^2 - X^3 - X^2, W^2(2-3X)^2 - 4Z^2(X+1)) \subset \mathcal{T}_V$
$\mathcal{T}_2 = V(Y^2 - X^3 - X^2, X) \subset \mathcal{T}_V = V(X, Y) = \mathbb{A}^2$ über dem Nullpunkt.
$\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = V(X, Y, W^2 - Z^2)$

§17 Der singuläre Ort einer Varietät

Definition 3.17.1
Für eine Varietät V heißt

$$\operatorname{Sing}(V) := \{x \in V : x \text{ ist singulärer Punkt}\}$$

der ***singuläre Ort*** von V.

Satz 6
Sei V eine Varietät über k. Dann ist $\operatorname{Sing}(V)$ echte Untervarietät von V.

Beweis Œ sei V affin in $\mathbb{A}^n(k)$, V irreduzibel. Sei $d = \dim V$.
$\underline{\operatorname{Sing}(V) \text{ ist abgeschlossen}}$: Sei $V = V(f_1, ..., f_r)$, $\mathcal{J} = (\frac{\partial f_i}{\partial X_j})_{\substack{i=1,...,r \\ j=1,...,n}}$.
Dann ist $\operatorname{Sing}(V) = \{x \in V : \operatorname{Rg}(\mathcal{J}(x)) < n - d = d'\} =$
$\{x \in V : \det(M(x)) = 0 \text{ für alle } (d' \times d') - \text{Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}\} =$
$(\bigcap_{M (d' \times d')-\text{Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}} V(\det(M))) \cap V.$
$\underline{\operatorname{Sing}(V) \neq V}$:
$\underline{\text{Fall 1}}$: $V = V(f)$ Hyperfläche, f quadratfreies Polynom
$\Rightarrow \operatorname{Sing}(V) = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial X_j}(x) = 0, j = 1, ..., n\}$
Wäre $\operatorname{Sing}(V) = V$, so wäre $\frac{\partial f}{\partial X_j} \in I(V) = (f)$ für $j = 1, ..., n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_j} = 0$ für $j = 1, ..., n \Rightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{char}(k) = 0 : & f \in k, \text{Wid!} \\ \operatorname{char}(k) = p : & f(X_1, ..., X_n) = g(X_1^p, ..., X_n^p) = g^p, \text{Wid!} \end{cases}$$

$\underline{\text{Fall 2}}$ V ist beliebig. Dann folgt die Behauptung aus der folgenden Proposition. □

Proposition 3.17.2
Jede irreduzible Varietät V der Dimension d ist birational Äquivalent zu einer Hyperfläche in $\mathbb{A}^{d+1}(k)$

Beweis Ziel: Finde eine irreduzible Hyperfläche $W \subseteq \mathbb{A}^{d+1}(k)$ mit $k(W) \cong k(V)$. Dann folgt die Proposition aus Korollar 7.5.
Sei $X_1, ..., X_d$ Transzendenzbasis von $k(V)$ (Noether-Normalisierung von $k(V)$).
Dann ist $k(V) / k(X_1, ..., X_d)$ endlich.
Œ Sei $k(V) / k(X_1, ..., X_d)$ einfach (falls $\operatorname{char}(k) = p$, so gibt es eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft).
Sei $y \in k(V)$ ein primitives Element.
Sei $y^m + a_{m-1}y^{m-1} + ... + a_1 y + a_0$ das Minimalpolynom.
Sei $a_i = \frac{f_i}{g_i}$ mit $f_i, g_i \in k[X_1, ..., X_d]$.
Sei $g = \Pi g_i$, $W := V(g^m y^m + g^m a_{m-1} y^{m-1} + ... + g^m a_0)$.
W ist eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^{d+1}(k)$
$k[W] = k[X_1, ..., X_d, gY] / (...) \Rightarrow k(W) \cong k(V)$ □

Bemerkung 3.17.3
Sei V eine Varietät, $x \in V$. Dann gilt:

$$\mathcal{O}_{V,x} \text{ nullteilerfrei } \Leftrightarrow \text{ es gibt genau eine irreduzible Komponente } Z \text{ von } V \text{ mit } x \in Z.$$

Beweis ŒE V affin. Seien $V_1 \neq V_2$ irreduzible Komponenten von V. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&x \in V_1 \cap V_2\\
\Leftrightarrow &I(V_1) + I(V_2) \subseteq m_x^V\\
\Leftrightarrow &\mu_{i,x} := I(V_i) \cdot \mathcal{O}_{V,x} \text{ ist minimales Promideal in } \mathcal{O}_{V,x} \ (i = 1, 2) \text{ mit } \mu_{1,x} \neq \mu_{2,x}\\
\Leftrightarrow &(0) \text{ nicht Primideal in } \mathcal{O}_{V,x}\\
\Leftrightarrow &\mathcal{O}_{V,x} \text{ nicht nullteilerfrei}
\end{aligned}$$

(das vorletzte "$\Leftarrow$" folgt mit der Übung: $\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal in } R} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$) □

Proposition 3.17.4
Sei V eine Varietät, $x \in V$. Gibt es irreduzible Komponenten $V_1 \neq V_2$ von V mit $x \in V_1 \cap V_2$, so ist x singulärer Punkt von V.

Beweis Es genügt zu zeigen:

Proposition 3.17.5
Jeder reguläre lokale Ring R ist nullteilerfrei.

Beweis (mit Import von (1), ·, (3); siehe unten) Sei $d = \dim R$. Induktion über d:

d=0: ${}^{m}\!/\!{}_{m^2} = 0 \Rightarrow m = 0$ (Nakayama)

d=1: $\dim({}^{m}\!/\!{}_{m^2}) = 1 \Leftrightarrow$ R ist diskreter Bewertungsring, also insbesondere nullteilerfrei.

d>1: Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von R. $\mathfrak{p}_i \neq m$, da $\dim R \geq 1$, außerdem $m \neq m^2$.
$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\exists a \in m$ mit $a \notin \mathfrak{p}_i, i = 1, \cdots, r$

Behauptung
a ist ein Primelement in R.

Dann gibt es ein i mit $\mathfrak{p}_i \subseteq (a)$
Für jedes $b \in \mathfrak{p}_i$ gibt es also $q \in R$ mit $b = q \cdot a$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow q \in \mathfrak{p}_i, \text{ da } \mathfrak{p}_i \text{ Primideal }, a \notin \mathfrak{p}_i\\
&\Rightarrow \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot (a) \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot m\\
&\overset{(Nakayama)}{\Rightarrow} \mathfrak{p}_i = 0
\end{aligned}$$
□

Beweis (der Behauptung) Zeige: $S := {}^{R}\!/\!{}_{(a)}$ ist regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$.
Es ist $m_S = {}^{m}\!/\!{}_{(a)}$ und ${}^{m_S}\!/\!{}_{m_S^2} = {}^{{}^{m}\!/\!{}_{(a)}}\!/\!{}_{{}^{m^2}\!/\!{}_{m^2 \cap (a)}} \cong {}^{{}^{m}\!/\!{}_{(a)}}\!/\!{}_{{}^{m^2 + (a)}\!/\!{}_{(a)}} \cong {}^{m}\!/\!{}_{m^2 + (a)}$
Da $a \notin m^2$, ist ${}^{m_S}\!/\!{}_{m_S^2} \subsetneq {}^{m}\!/\!{}_{m^2} \Rightarrow \dim({}^{m_S}\!/\!{}_{m_S^2}) \leq d - 1$.
Noch zu zeigen: $\dim s = d - 1$
Sei $\mathfrak{p}$ minimales Primideal in R, das in einer Kette der Länge d vorkommt und $R' := {}^{R}\!/\!{}_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $\dim R' = \dim R = d$ und R' nullteilerfrei. Da $a \notin \mathfrak{p}$, ist $\bar{a} \neq 0$ in $R' \Rightarrow \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ für jedes minimale (Primideal $\mathfrak{q}$ in R' mit $\bar{a} \in \mathfrak{q}$)
$\Rightarrow \dim S = \dim {}^{R'}\!/\!{}_{(\bar{a})} = \dim {}^{R'}\!/\!{}_{\mathfrak{q}} = d - 1$ □

Import:

(1) Jeder noethersche Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.

(2) Vermeiden von Primidealen: Sei R ein Ring, $\mathfrak{p}_0 \subseteq R$ ein Ideal, $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ Primideale. Ist $I \subseteq R$ Ideal mit $I \nsubseteq \mathfrak{p}_i, i = 0, \cdots, r$, so ist $I \nsubseteq \bigcap_{i=0}^{r} \mathfrak{p}_i$

(3) Krullscher Hauptidealsatz: Sei R nullteilerfrei, noethersch, $x \in R, x \neq 0, x \neq R^{\times}$.
Dann hat jedes Primideal, das x enthält und minimal mit dieser Eigenschaft ist, Höhe 1.