§ 5 Nullmengen

In diesem Paragraphen sei stets $\varnothing \neq X \in \mathfrak{B}_d$. Wir schreiben wieder λ statt λ_d.

Definition
Sei $N \in \mathfrak{B}_d$. N heißt eine **(Borel-)Nullmenge**, genau dann wenn $\lambda(N) = 0$ ist.

Beispiel
(1) Ist $N \subseteq \mathbb{R}^d$ höchstens abzählbar, so ist $N \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda(N) = 0$.

(2) Sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und $H_j := \big\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\big\}$. Aus Beispiel (5) nach 2.7 folgt, dass H_j eine Nullmenge ist.

Lemma 5.1
Seien $M, N, N_1, N_2, \dots \in \mathfrak{B}_d$.

(1) Ist $M \subseteq N$ und N Nullmenge, dann ist M Nullmenge.

(2) Sind alle N_j Nullmengen, so ist auch $\bigcup N_j$ eine Nullmenge.

(3) N ist genau dann eine Nullmenge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ offene Intervalle $I_1, I_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^d$ existieren mit $N \subseteq \bigcup I_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \leq \varepsilon$.

Beweis
(1) $0 \leq \lambda(M) \leq \lambda(N) = 0$

(2) $0 \leq \lambda(\bigcup N_j) \leq \sum \lambda(N_j) = 0$

(3) Folgt aus 2.10. ■

Bemerkung:

(1) $\mathbb{Q}$ ist „klein“: $\mathbb{Q}$ ist „nur“ abzählbar.

(2) $\mathbb{Q}$ ist „groß“: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(3) $\mathbb{Q}$ ist „klein“: $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

Definition
(1) Sei (E) eine Eigenschaft für Elemente in X.
(E) gilt **für fast alle** (ffa) $x \in X$, genau dann wenn (E) **fast überall** (fü) (auf X) gilt, genau dann wenn eine Nullmenge $N \subseteq X$ existiert, sodass (E) für alle $x \in X \setminus N$ gilt.

(2) $\int_{\varnothing} f(x) \,\mathrm{d}x := 0$

Satz 5.2
Seien $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen.

(1) Ist f integrierbar, so ist f fast überall endlich.

(2) Ist $f \geq 0$ auf X, so ist $\int_X f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ genau dann wenn fast überall $f = 0$.

(3) Ist f integrierbar und $N \subseteq X$ eine Nullmenge, so gilt:

$$\int_N f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Beweis

(1) ist gerade 4.10.

(2) ist gerade 4.5(3)

(3) Setze $g := \mathbb{1}_N f$. Aus 4.11 folgt, dass g integrierbar ist, also ist nach 4.9 auch $|g|$ integrierbar. Für $x \in X \setminus N$ gilt:

$$g(x) = |g(x)| = 0$$

D.h. $|g| = 0$ fast überall. Aus (2) folgt damit $\int_X |g|\, dx = 0$. Dann ist mit 4.11:

$$\left| \int_X g\, dx \right| \leq \int_X |g|\, dx = 0$$

und somit $\int_X g\, dx = 0$. ∎

Satz 5.3
$f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar.

(1) Ist f integrierbar und gilt fast überall $f = g$, so ist g integrierbar und es gilt:

$$\int_X f\, dx = \int_X g\, dx$$

(2) Ist f integrierbar und $g := \mathbb{1}_{\{|f| < \infty\}} \cdot f$, so ist g integrierbar und es gilt:

$$\int_X f\, dx = \int_X g\, dx$$

(3) Sind f und g beide ≥ 0 auf X, und ist fast überall $f = g$, so ist

$$\int_X f\, dx = \int_X g\, dx$$

Beweis

(1) Nach Voraussetzung existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$, sodass gilt:

$$\forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$$

Aus 5.2(3) folgt dann $\int_N f\,dx = 0$. Sei $x \in X \setminus N$ Dann gilt:

$$(\mathbb{1}_N|g|)(x) = \mathbb{1}_N(x) \cdot |g(x)| = 0$$

D.h.: Fast überall ist $\mathbb{1}_N|g| = 0$. Aus 5.2(2) folgt $\int_N |g|\,dx = \int_X \mathbb{1}_N \cdot |g|\,dx = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_X |g|\,dx &= \int_X \left(\mathbb{1}_N|g| + \mathbb{1}_{X\setminus N}|g|\right)\,dx \\ &= \int_X \mathbb{1}_N|g|\,dx + \int_X \mathbb{1}_{X\setminus N}|g|\,dx \\ &= \int_X \mathbb{1}_{X\setminus N}|g|\,dx \\ &\leq \int_X |f|\,dx \overset{4.9}{<} \infty\end{aligned}$$

4.9 liefert nun, dass $|g|$ und damit auch g integrierbar ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\int_X g\,dx &\overset{4.12}{=} \int_N g\,dx + \int_{X\setminus N} g\,dx = \int_{X\setminus N} g\,dx \\ &= \int_{X\setminus N} f\,dx \overset{5.2(3)}{=} \int_N f\,dx + \int_{X\setminus N} f\,dx \\ &\overset{4.12}{=} \int_X f\,dx.\end{aligned}$$

(2) Setze $N := \{|f| = \infty\}$. Aus 5.2(1) folgt, dass N eine Nullmenge ist. Sei $x \in X \setminus N$, so ist $x \in \{|f| < \infty\}$ und $g(x) = f(x)$. D.h. fast überall ist $f = g$. (Klar: g ist mb). Dann folgt die Behauptung aus (1).

(3) **Fall 1:** $\int_X f\,dx < \infty$
Dann ist f integrierbar, damit ist nach (1) auch g integrierbar und es gilt:

$$\int_X f\,dx = \int_X g\,dx$$

Fall 2: $\int_X f\,dx = \infty$.
Annahme: $\int_X g\,dx < \infty$. Dann gilt nach Fall 1: $\int_X f\,dx < \infty$. ` ■

Definition
(f_n) sei eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

(1) (f_n) konvergiert fast überall (auf X) genau dann, wenn eine Nullmenge $N \subseteq X$ existiert, sodass für alle $x \in X \setminus N$ $(f_n(x))$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert.

(2) Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. (f_n) konvergiert fast überall (auf X) gegen f genau dann, wenn eine Nullmenge $N \subseteq X$ existiert mit: $f_n(x) \to f(x) \forall x \in X \setminus N$
In diesem Fall schreiben wir: $f_n \to f$ fast überall.

Satz 5.4
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und (f_n) konvergiere fast überall (auf X). Dann:

(1) Es existiert $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \to f$ fast überall.

(2) Ist $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f_n \to g$ fast überall, so gilt $f = g$ fast überall.

Bemerkung: Ist g wie in (2), so muss g nicht messbar sein (ein Beispiel gibt es in der Übung).

Beweis

(1) Es existiert eine Nullmenge $N_1 \subseteq X : (f_n(x))$ konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X \setminus N_1$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in N_1 \\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) & x \in X \setminus N_1 \end{cases}$$

$g_n := \mathbb{1}_{X\setminus N} \cdot f_n$, g_n ist messbar und $g_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$. Mit 3.5 folgt: f ist messbar.

(2) Es existiert eine Nullmenge $N_2 \subseteq X : f_n(x) \to g(x) \, \forall x \in X \setminus N_2$. $N = N_1 \cup N_2$. Aus 5.1 folgt: N ist eine Nullmenge.

Für $x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$. ■

Satz 5.5 (Satz von Beppo Levi (Version III))
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, +\infty]$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $f_n \leq f_{n+1}$ fast überall. Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \to [0, +\infty]$ mit: $f_n \to f$ fast überall und

$$\int_X f \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}x$$

Beweis

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Nullmenge $N_n : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in X \setminus N_n$. $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$; Mit 5.1 folgt: N ist eine Nullmenge.

Dann: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in X \setminus N \forall n \in \mathbb{N}$.

$\hat{f}_n := \mathbb{1}_{X\setminus N} \cdot f_n$, $\hat{f}_n$ ist messbar, $\hat{f}_n \leq \hat{f}_{n+1}$ auf X für alle $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) := \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(x) \, (x \in X)$; 3.5 liefert: f ist messbar. Weiter: $\hat{f}_n \to f$.

$$\int_X f \mathrm{d}x \overset{4.6}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \hat{f}_n \mathrm{d}x \overset{5.3.(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}x$$ ■