§ 6 Der Konvergenzsatz von Lebesgue

Stets in diesem Paragraphen: $\varnothing \neq X \in \mathfrak{B}_d$

Lemma 6.1 (Lemma von Fatou)
(f_n) sei eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, +\infty]$.

(1) Es gilt:
$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)(x)\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x$$

(2) Ist $f : X \to [0, +\infty]$ messbar und gilt $f_n \to f$ fast überall, so ist
$$\int_X f\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\mathrm{d}x$$

(3) Ist f wie in (2) und ist $\left(\int_X f_n\mathrm{d}x\right)$ beschränkt, so ist f integrierbar.

Beweis

(1) $g_j := \inf_{n\geq j} f_n$. Aus 3.5 folgt: g_j ist messbar, klar: $g_j \leq g_{j+1}$ auf X; $\sup_{j\in\mathbb{N}} g_j = \liminf_{n\to\infty} f_n$

Weiter: $g_j \leq f_n \, (n \geq j)$

Dann:
$$\begin{aligned}
\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}x &= \int_X \sup_{j\in\mathbb{N}} g_j\mathrm{d}x \\
&= \int_X \lim_{j\to\infty} g_j(x)\mathrm{d}x \\
&\overset{4.6}{=} \lim_{j\to\infty} \int_X g_j\mathrm{d}x \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{\int_X g_j\mathrm{d}x}_{\leq \inf_{n\geq j}\int_X f_n\mathrm{d}x} \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \inf_{n\geq j} \int_X f_n\mathrm{d}x \right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(2) Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$: $f_n(x) \to f(x) \, \forall x \in X \setminus N$. Dann: $f = \mathbb{1}_{X\setminus N} \cdot f$ fast

überall.

$$\begin{aligned}\int_X f \mathrm{d}x &\overset{5.3.(3)}{=} \int_X \mathbb{1}_{X\setminus N} \cdot f \mathrm{d}x \\ &= \int_X (\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{X\setminus N} f_n) \mathrm{d}x \\ &\overset{(1)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{X\setminus N} f_n \mathrm{d}x \\ &\overset{5.3.(3)}{=} \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}x\end{aligned}$$

(3) folgt aus (2). Nach Voraussetzung gilt

$$0 \leq \int_X f \mathrm{d}x \overset{(2)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}x < \infty$$

■

Satz 6.2 (Konvergenzsatz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz))
(f_n) sei eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, (f_n) konvergiere fast überall und es sei $g : X \to [0, +\infty]$ integrierbar. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $|f_n| \leq g$ fast überall. Dann sind alle f_n integrierbar und es existiert ein $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ mit:

(1) $f_n \to f$ fast überall

(2) $\int_X f_n \mathrm{d}x \to \int_X f \mathrm{d}x$

(3) $\int_X |f_n - f| \mathrm{d}x \to 0$

Beispiel
Sei $X = \mathbb{R}$, $f_n := n\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n})}$. Dann:

$$\int_X f_n \mathrm{d}x = n \cdot \lambda_1 \left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Es gilt $f_n \to f := 0$ punktweise und $\int_X f \mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \int_X f_n \mathrm{d}x$. 6.2 ist ohne Majorante im allgemeinen falsch.

Beweis

(1) Aus 5.4 folgt: Es existiert $\hat{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \to \hat{f}$ fast überall. Es existiert eine Nullmenge $N_0 \subseteq X : f_n(x) \to \hat{f}(x) \, \forall x \in X \setminus N_0$

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Nullmenge $N_n \subseteq X : |f_n(x)| \leq g(x) \, \forall x \in X \setminus N_n$.

Setze $N := \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$. Mit 5.1 folgt: N ist eine Nullmenge.

Wir haben: $|f_n(x)| \leq g(x) \, \forall x \in X \setminus N \forall n \in \mathbb{N}$ und $|\hat{f}(x)| \leq g(x) \, \forall x \in X \setminus N$.

(3) $f_n = \mathbb{1}_{X\setminus N} f_n$ fast überall und $\hat{f} = \mathbb{1}_{X\setminus N} \hat{f}$ fast überall.

Es gilt $|\mathbb{1}_{X\setminus N} f_n| \leq g$ und $|\mathbb{1}_{X\setminus N} \hat{f}| \leq g$. Mit 4.9 folgt: $\mathbb{1}_{X\setminus N} f_n$ und $\mathbb{1}_{X\setminus N} \hat{f}$ sind integrierbar.

Mit 5.3.(1) folgt: f_n und $\hat{f}$ sind integrierbar.

(4) $\tilde{N} := N \cup \{|\hat{f}| = \infty\} \cup \{g = \infty\}$. Mit 4.10 und 5.1 folgt: $\tilde{N}$ ist eine Nullmenge.

Setze $f := \mathbb{1}_{X \setminus N} \hat{f}$. Dann: f ist messbar; es ist $|f| \leq |\hat{f}|$. Mit 4.9 folgt: f ist integrierbar.

Es ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Also: $f \in \mathfrak{L}^1(X)$.

Sei $x \in X \setminus \tilde{N}$: $f(x) = \tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. D.h. $f_n \to f$ fast überall.

(5) Definiere $g_n := |f| + \mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} g - \mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} |f_n - f|$. Es ist fast überall

$$\mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} g = g \qquad\qquad \mathbb{1}_{X\setminus\tilde{N}} |f_n - f| = |f_n - f|$$

Nach 5.3(1) ist g integrierbar und $g_n \to |f| + g$ fast überall. Es gilt:

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + |f| \text{ auf} X \setminus \tilde{N}$$

D.h. es ist $g \geq 0$ auf X.

(6) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_X (|f| + g)\ \mathrm{d}x &\overset{6.1(2)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n\ \mathrm{d}x \\
&= \liminf \left(\int_{\tilde{N}} g_n\ \mathrm{d}x + \int_{X\setminus\tilde{N}} g_n\ \mathrm{d}x \right) \\
&= \liminf \int_{X\setminus\tilde{N}} g_n\ \mathrm{d}x \\
&= \liminf \int_{X\setminus\tilde{N}} (|f| + g - |f_n - f|)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{X\setminus\tilde{N}} (|f| + g)\ \mathrm{d}x - \limsup \int_{X\setminus\tilde{N}} |f_n - f|\ \mathrm{d}x \\
&\overset{5.2(3)}{=} \int_X |f| + g\ \mathrm{d}x - \limsup \int_X |f_n - f|\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\limsup \int_x |f_n - f|\ \mathrm{d}x \leq 0$$

Also gilt auch:

$$|\int_X f_n\ \mathrm{d}x - \int_X f\ \mathrm{d}x| = |\int_X (f_n - f)\ \mathrm{d}x \leq \int_X |f_n - f|\ \mathrm{d}x \to 0$$

■

Beispiel
Sei $X := [1, \infty)$ und $f_n(x) := \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ für alle $x \in X, n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ für jedes $x \in X$. Dann ist $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$. Definiere nun

$$g(x) := \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Aus Analysis I ist bekannt, dass $\int_1^\infty g(x)\, dx$ (absolut) konvergent ist und aus 4.14 folgt

$$g \in \mathfrak{L}^1(X) \text{ sowie } \int_X g(x)\, dx = \text{R-} \int_1^\infty g(x)\, dx$$

Weiter folgen aus 6.2:

$$\int_X f_n\,dx \to 0 \text{ und } \int_X |f_n|\,dx \to 0\ (n \to \infty)$$

Folgerung 6.3 (aus 6.2)

(1) Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und (A_n) sei eine Folge in $\mathfrak{B}(X)$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup A_n$. Weiter sei

$$f_n := \mathbb{1}_{A_n} \cdot f \text{ integrierbar für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\left(\int_{A_n} |f|\,dx\right) \text{ sei beschränkt.}$$

Dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\int_{A_n} f\,dx \to \int_X f\,dx \quad \text{für } n \to \infty$$

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$, $X := [a, \infty]$ und $f : X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Weiter sei R-$\int_a^\infty f\,dx$ **absolut** konvergent. Dann ist $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und wie in 4.14:

$$\text{L-}\int_X f\,dx = \text{R-}\int_a^\infty f\,dx$$

Beweis

(1) Sei $x \in X$. Es exisitert ein $m \in \mathbb{N}$, für das $x \in A_m$ ist und somit auch $x \in A_n$ für jedes $n \geq m$. Nach der Definition von f_n gilt dann $f_n(x) = f(x)$ für jedes $n \geq m$ und somit $f_n \to f$ auf X. Damit gilt auch

$$|f_n| \to |f| \text{ auf } X$$

Durch die Konstruktion der f_n ergibt sich:

$$|f_n| = |\mathbb{1}_{A_n} f| = \mathbb{1}_{A_n}|f| \leq \mathbb{1}_{A_{n+1}}|f| = |f_{n+1}|$$

Dann gilt:

$$\int_X |f|\,dx \overset{4.6}{=} \lim \int_X |f_n|\,dx = \lim \int_{A_n} |f|\,dx \overset{Vor.}{<} \infty$$

Es folgt, dass $|f|$ integrierbar ist und somit ist nach 4.9 auch f integrierbar. Da $|f_n| \leq |f|$ auf X für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist f eine integrierbare Majorante und es folgt mit 6.2:

$$\int_X f\,dx = \lim \int_X f_n\,dx = \lim \int_{A_n} f\,dx$$

(2) Setze $A_n := [a, n]$ $(n \in \mathbb{N})$ und es gelte o.B.d.A.: $a \leq 1$. Dann gilt:

$$\int_{A_n} |f|\,dx \overset{4.13}{=} \text{R-}\int_a^n |f|\,dx \overset{Vor.}{\longrightarrow} \text{R-}\int_a^\infty |f|\,dx$$

D.h. $\left(\int_{A_n} |f|\,dx\right)$ ist beschränkt. Definiere $f_n := \mathbb{1}_{A_n} f$ mit 4.13 folgt daraus, dass f_n integrierbar ist. Weiter folgt aus (1) $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ (denn es ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$) und

$$\text{L-}\int_X f\,dx = \lim \int_{A_n} f\,dx \overset{4.13}{=} \lim \left(\text{R-}\int_a^n f\,dx\right) = \text{R-}\int_a^\infty f\,dx. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: 6.3(2) gilt entsprechend für die anderen Typen uneigentlicher Riemann-Integrale.

Folgerung 6.4

(1) (f_n) sei eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g\colon X \to [0,+\infty]$ sei ebenfalls integrierbar und

$$g_n := f_1 + f_2 + \ldots + f_n \ (n \in \mathbb{N})$$

Weiter sei N eine Nullmenge in X so, dass $(g_n(x))$ für jedes $x \in X \setminus N$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert und

$$|g_n(x)| \leq g(x) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in X \setminus N$$

Setzt man

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in N \\ \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x), & \text{falls } x \in X \setminus N \end{cases},$$

so gilt, dass f integrierbar ist und

$$\int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_X f_j(x)\, dx \right)$$

(2) Sei $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und (A_n) eine **disjunkte** Folge in $\mathfrak{B}(X)$ mit $X = \dot{\bigcup} A_n$. Dann gilt

$$\int_X f\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f\, dx$$

Beweis

(1) Fast überall gelten $g_n \to f$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $|g_n| \leq g$. Aus 6.2 folgt

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \right) dx &= \int_X f\, dx \\
&\overset{6.2}{=} \lim \int_X g_n\, dx \\
&= \lim \int_X \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right) dx \\
&= \lim \sum_{j=1}^{n} \int_X f_j(x)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j\, dx
\end{aligned}$$

(2) Setze $f_j := \mathbb{1}_{A_j} f$, $g := |f|$, $g_n := f_1 + \ldots + f_n$. Dann ist

$$|g_n| = |\mathbb{1}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \cdot f| \leq |f| = g$$

Es gilt: $g_n \to f$ auf X. Aus (1) folgt

$$\int_X f\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f\, dx$$

■