Kapitel 11

Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, X_2, \ldots \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. "Konvergenz" der Folge $\{X_n\}$ kann man auf verschiedene Weise definieren.

Definition 11.1

a) *X_n konvergiert **P-fast sicher (P-f.s.)** gegen X*
Schreibweise: $X_n \stackrel{fs}{\to} X$, wenn gilt:

$$P(\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

b) *X_n konvergiert **in Wahrscheinlichkeit** (stochastisch) gegen X*
Schreibweise: $X_n \stackrel{P}{\to} X$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \Big| |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

c) *X_n konvergiert **in Verteilung** gegen X*
Schreibweise: $X_n \stackrel{d}{\to} X$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{an denen}\, F_X(x)\, \text{stetig ist}$$

Beispiel 11.1
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten (u.i.v.) Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ $\quad (\Rightarrow EX_n = 0)$
Mit der Ungleichung von Tschebyscheff (Satz 7.4) folgt:

$$P(|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$$

Also:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{P}{\to} 0$$

Satz 11.1
Fast sichere Konvergenz impliziert die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Beweis
Sei $X_n \overset{fs}{\to} X$ und $N := \{\omega \in \Omega | X_n(\omega) \not\to X(\omega)\}$ also $P(N) = 0$
Sei $\varepsilon > 0$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{\omega \in \Omega \Big| \sup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Es gilt $A_n \downarrow$ und $\omega \in A_n \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$
Also:

$$A_n \downarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m =: N_\varepsilon \subset \{\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset N$$

Da P stetig von oben folgt:
$0 \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P(A_n) \overset{n\to\infty}{\to} P(N_\varepsilon) \leq P(N) = 0$

Bemerkung 11.1
Die Umkehrung von Satz 11.1 gilt nicht.
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \mathrm{Unif}(0,1))$

(Hier fehlen Skizzen, die $X_1, X_2, \ldots$ beschreiben.)
Offenbar $P(\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \,\text{existiert}\}) = 0$
aber $P(\{\omega \in \Omega \Big| |X_n(\omega) - 0| \geq \varepsilon\}) = P(X_n = 1) \to 0$ für $n \to \infty$
Das heißt : $X_n \overset{P}{\to} 0$ aber $X_n \overset{fs}{\not\to} 0$

Satz 11.2
Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert Konvergenz in Verteilung.

Beweis
Vorüberlegung: $P(A) = P(AB) + P(AB^c) \leq P(AB) + P(B^c)$
$\Rightarrow P(AB) \geq P(A) - P(B^c) \quad (*)$
Sei $X_n \overset{P}{\to} X$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$\{\omega | X_n(\omega) \leq x\} \supset \{\omega | X(\omega) \leq x - \varepsilon, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$
da $X_n = X + X_n - X \leq X + |X_n - X| \leq x - \varepsilon + \varepsilon = x$

Also:

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) \geq P(\underbrace{X \leq x - \varepsilon}_{A}, \underbrace{|X_n - X| < \varepsilon}_{B})$$

$$\Rightarrow F_{X_n}(x) \overset{(*)}{\geq} \underbrace{P(X \leq x - \varepsilon)}_{F_X(x-\varepsilon)} - P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(X_n \leq x, |X_n - X| < \varepsilon) + P(X_n \leq x, |X_n - X| \geq \varepsilon) \\ &\leq \underbrace{P(X \leq x + \varepsilon)}_{=F_X(x+\varepsilon)} + P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$F_X(x-\varepsilon) - P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Mit $n \to \infty$ folgt:

$$F_X(x-\varepsilon) - 0 \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon) + 0$$

Mit $\varepsilon \to 0$ (x ist Stetigkeitsstelle von F_X) folgt die Behauptung.

Bemerkung 11.2
Die Umkehrung von Satz 11.2 gilt nicht:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$
$X(\omega) = 1, \quad X(\omega_2) = -1$. Also:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{array} \right\} = F_{-X}(x)$$

Sei $X_n := (-1)^n X \Rightarrow F_{X_n} = F_X \Rightarrow X_n \overset{d}{\to} X$
Aber (X_n) konvergiert nicht in Wahrscheinlichkeit.

$$X_{2n} = X \overset{P}{\to} X, \quad X_{2n+1} = -X \overset{P}{\to} -X \quad \text{und} \quad P(X = -X) = 0$$

Insgesamt:

$$\boxed{X_n \overset{fs}{\to} X \;\Rightarrow\; X_n \overset{P}{\to} X \;\Rightarrow\; X_n \overset{d}{\to} X}$$

Lemma 11.3
Konvergenz in Verteilung gegen eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichekeit, das heißt:

$$X_n \overset{d}{\to} c \;\Rightarrow\; X_n \overset{P}{\to} c$$

Beweis
Übung