

6 Übung vom 02.06.

17. Aufgabe

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

$M \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} f(x) = \langle 0, x \rangle & = & \max \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \quad (\text{PP}) \text{ ist lösbar mit Maximalwert } 0$$

$$\text{A14, Dualitätssatz} \quad \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \langle b, v \rangle & = & \min \\ A^T v & \geq & 0 \end{array} \quad (\text{DP}) \text{ ist lösbar mit Minimalwert } 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \langle b, v \rangle & = & \min \\ A^T v & \geq & 0 \end{array} \quad (\text{DP}) \text{ wird durch } v=0 \text{ gelöst}$$

$$\Leftrightarrow [\forall v \in \mathbb{R}^m : A^T v \geq 0 \Rightarrow \langle b, v \rangle \geq \langle b, 0 \rangle = 0]$$

18. Aufgabe

a) Es sei $f_i = \langle y^i, \cdot \rangle$ mit $\|y^i\| = 1$ für $i = 1, \dots, k$.
Für $\varrho \in [0, \infty)$ und $z \in \mathbb{R}^n$:

$$\underbrace{B_\varrho(z)}_{\text{Kugel um } z \text{ mit Radius } \varrho} \subset \{f_i \leq \alpha_i\} \Leftrightarrow z + \varrho y^i \in \{f_i \leq \alpha_i\}$$

Also ist $B_\varrho(z) \subset M \Leftrightarrow \alpha_i \geq \langle z + \varrho y^i, y^i \rangle = \langle z, y^i \rangle + \varrho$ ($i = 1, \dots, k$)
[Beachte: $\langle z + \varrho y^i, y^i \rangle = f_i(z + \varrho y^i)$; $\|y^i\| = 1$]

Unser gesuchtes LP ist:

$$\begin{array}{rcl} f(\varrho, z) = \varrho & = & \max \\ \langle z + \varrho y^i, y^i \rangle & \leq & \alpha_i \\ \varrho & \geq & 0 \end{array} \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

Wir setzen $z = z^1 - z^2$, dann ergibt sich:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\varrho, z^1, z^2) = \varrho = \max \\ \begin{pmatrix} 1 & y^{1T} & -y^{1T} \\ \vdots & & \\ 1 & y^{kT} & -y^{kT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho \\ z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \\ \varrho \geq 0 \\ z^1, z^2 \geq 0 \end{array}} \quad (\text{PP})$$

[Bemerkung: z^1 soll alle positiven Komponenten von z und sonst nur 0 enthalten, z^2 alle negativen Komponenten und sonst nur 0. (Im Prinzip: $z^1 = z^+$, $z^2 = z^-$)]

Als duales Programm erhalten wir:

$$\boxed{\begin{array}{l} g(v) = \sum_{i=1}^k v_i \alpha_i = \min \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ y^1 & \cdots & y^k \\ y^k & \cdots & -y^k \end{pmatrix} v \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ v \geq 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} g(v) = \sum_{i=1}^k v_i \alpha_i = \min \\ \sum_{i=1}^k v_i \geq 1 \\ \sum_{i=1}^k v_i y^i = 0 \\ v \geq 0 \end{array}}$$

b)

$$\begin{aligned} \varrho(M) \text{ ist endlich} &\Leftrightarrow (\text{PP}) \text{ ist lösbar} \\ &\stackrel{\text{Dualitätssatz}}{\Leftrightarrow} (\text{PP}) \text{ und (DP) besitzen zulässigen Punkt} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} (\text{DP}) \text{ besitzt zulässigen Punkt} \\ &\Leftrightarrow \exists v_1, \dots, v_k \geq 0 : \sum_{i=1}^k v_i = 1, \sum_{i=1}^k v_i y^i = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \in \text{conv} \{y^1, \dots, y^k\} \end{aligned}$$

(*) (PP) besitzt den zulässigen Punkt $(\varrho, z^1, z^2) = (0, 0, 0)$ [Beachte: alle $\alpha_i \geq 0$]

19. Aufgabe

(a) Sei $x = (x_1, \dots, x_6)$ mit $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 22 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Gauß}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also: $x^0 = (4, 2, 1, 0, 0, 0)$ ist einziger Punkt mit $Ax = b$ und $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.
 $x^0 \in M$; a^1, a^2, a^3 sind l.u. $\Rightarrow x^0$ ist Ecke von M .

(b) Wir betrachten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 22 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Gauß}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gibt keine zulässigen Punkte mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

20. Aufgabe

(a)(i) Weil $b \geq 0$ ist, gilt $(0, b) \in M'$.

$$Ax + y = b \Leftrightarrow (A|E_m) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$$

Die Spalten von E_m sind l.u. $\Rightarrow (0, b)$ ist Ecke.

(ii) Es sei (x, y) Ecke von M' .

Beh.: x ist Ecke von M

Es seien $x^1, x^2 \in M$ und $\alpha \in (0, 1)$: $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$.

Wir setzen $y^1 = b - Ax^1$ und $y^2 = b - Ax^2$. Es gilt:

- $y^1, y^2 \geq 0$
- $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in M'$
-

$$\alpha \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \\ \alpha(b - Ax^1) + (1 - \alpha)(b - Ax^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ b - Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Da (x, y) Ecke von M' ist, ist dies äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = x^1 = x^2$$

Also ist x Ecke von M .

(b) **Anmerkung:** Wir führen die Schlupfvariablen y_1, y_2, y_3 ein und betrachten M' . Wir wissen aus (a)(i), dass $(0, b)$ Ecke von M' ist. Hieraus folgt das erste Tableau. Dann führen wir einen Eckentausch durch, wobei wir hier die Pivot-Spalte frei wählen können und deswegen eine einfache Spalte aussuchen. Ziel ist es, eine Ecke von M' zu bekommen, bei der drei der ersten 5 Komponenten von 0 verschieden sind. Nach

(a)(ii) sind die ersten 5 Komponenten der Ecke von M' nämlich Ecke von M . Diese ist dann nicht entartet.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	4
2	1	1	1	-2	1	0	0	4 $\frac{4}{1}$
1	-4	1	-2	-3	0	1	0	2 $\frac{2}{1}$
2	5	1	-4	6	0	0	1	3 $\frac{3}{1}$
1	5	0	3	1	1	-1	0	2 $\frac{2}{1}$
1	-4	1	-2	-3	0	1	0	2 $\frac{2}{1}$
1	9	0	-2	9	0	-1	1	1 $\frac{1}{1}$
0	-4	0	5	-8	1	0	-1	1
0	-13	1	0	-12	0	2	-1	1
1	9	0	-2	9	0	-1	1	1
0	$-\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
0	-13	1	0	-12	0	2	-1	1
1	$\frac{37}{5}$	0	0	$\frac{29}{5}$	$\frac{2}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$

Die Ecken (x,y) von M' sind nach jeweils einem Schritt $(0,0,2,0,0, 2,0,1)$, $(1,0,1,0,0, 1,0,0)$ bzw. $(\frac{7}{5},0,1,\frac{1}{5},0, 0,0,0)$.

Aus (a)(ii) folgt, dass $(\frac{7}{5},0,1,\frac{1}{5},0)$ Ecke von M ist, und diese Ecke ist nicht entartet.