

# 14. Laurententwicklung

Für  $z_0 \in \mathbb{C}$ :  $U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$ ,  $\dot{U}_\infty(z_0) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ,  $\frac{1}{0} := \infty$ . Erinnerung: Satz 9.5: Sei  $\gamma$  ein stückweise glatter Weg in  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi \in C(\text{Tr}(\gamma))$  und  $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z} dw$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$ ). Dann:  $g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma))$ .

## Satz 14.1

Seien  $0 \leq r < R \leq \infty$ ;  $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  und  $f \in H(A)$ . Für  $s \in (r, R)$  sei  $\gamma_s(t) := se^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  und  $J(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz$ . Dann ist  $J$  konstant auf  $(r, R)$ .

## Beweis

$g(z) := zf(z)$  ( $z \in A$ ). Dann:  $f(z) = \frac{g(z)}{z}$  und  $g \in H(A)$ .

$$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{g(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(se^{it})}{se^{it}} se^{it} dt = \int_0^{2\pi} ig(se^{it}) dt$$

$$J \text{ ist auf } (r, R) \text{ db und } J'(s) = \int_0^{2\pi} i \frac{d}{ds} g(se^{it}) dt = \int_0^{2\pi} ig'(se^{it}) e^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(se^{it}) se^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(\gamma_s(t)) \gamma_s'(t) dt = \frac{1}{s} \int_{\gamma_s} g'(z) dz \stackrel{8.5}{=} 0 \Rightarrow J(s) \text{ konstant.} \quad \blacksquare$$

## Satz 14.2 (Laurententwicklung)

Sei  $A$  wie in 14.1 und  $f \in H(A)$ . Dann existieren eindeutig bestimmte Funktionen  $g \in H(U_R(0))$  und  $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$  mit:

$$(*) \quad f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in A \text{ und } h(0) = 0$$

(\*) heißt die Laurentzerlegung von  $f$ ,  $g$  heißt Nebenteil von  $f$  und die Funktion  $z \rightarrow h(\frac{1}{z})$  ist der Hauptteil von  $f$ .

## Beispiel

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$   $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $r = 0, R = \infty$ ). Es gilt:

$$f(z) = 1 + (e^{\frac{1}{z}} - 1), \text{ also } g(z) = 1, h(z) = e^z - 1$$

## Beweis

1. Eindeutigkeit: es sei  $g, g_1 \in H(U_R(0))$ ,  $h, h_1 \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ ;  $h_1(0) = 0 = h(0)$  und  $g(z) + h(\frac{1}{z}) = f(z) = g_1(z) + h_1(\frac{1}{z}) \quad \forall z \in A$ .

$$G := g - g_1 \in H(U_R(0)), H := h_1 - h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$$

$$\Rightarrow G(z) = H\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in A \text{ Dann ist } F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ definiert durch}$$

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & (|z| < R) \\ H\left(\frac{1}{z}\right) & (|z| > r) \end{cases} \text{ auf } \mathbb{C} \text{ wohldefiniert. } F \in H(\mathbb{C}).$$

Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $|z_n| \rightarrow \infty$ . Dann  $(\frac{1}{z_n}) \rightarrow 0$  und  $z_n > r \quad \forall n \geq n_0$ .  $F(z_n) = H(\frac{1}{z_n}) = h_1(\frac{1}{z_n}) - h(\frac{1}{z_n}) \rightarrow h_1(0) - h(0) = 0$

Also  $F(z) \rightarrow 0$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ) Somit:

$\exists \varrho > 0 : |F(z)| \leq 1 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus U_\varrho(0)$ .  $F$  stetig auf  $\overline{U_\varrho(0)}$   $\Rightarrow F$  ist auf  $\mathbb{C}$  beschränkt. 10.2  $\Rightarrow F$  ist auf  $\mathbb{C}$  konstant; wegen  $F(z) \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow \infty$ ) folgt:  $F \equiv 0$

2. Existenz: fehlt hier nicht was ? Doch! ■

### Definition

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Eine Reihe der Form  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  heißt eine **Laurentreihe**.

Diese Reihe heißt in  $z \in \mathbb{C}$  (absolut) konvergent :  $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  konvergieren (absolut).

In diesem Fall:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ . Die Laurentreihe heißt auf  $A$  (lokal) gleichmäßig konvergent :  $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  konvergieren auf  $A$  (lokal) gleichmäßig.

### Satz 14.3

Sei  $0 \leq r < R \leq \infty$ ,  $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$  und  $f \in H(A)$ .

Dann hat  $f$  auf  $A$  die **Laurententwicklung**  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ . Die Laurentreihe konvergiert auf  $A$  absolut und lokal gleichmäßig. Die Koeffizienten  $a_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) sind eindeutig bestimmt. Ist  $r < \rho < R$  und  $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}$   $t \in [0, 2\pi]$ , so gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  heißt **Nebenteil** von  $f$ ,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$  heißt der **Hauptteil** von  $f$ .

### Beweis

O.B.d.A:  $z_0 = 0$ . 14.2  $\Rightarrow \exists g \in H(U_R(0)), \exists h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0)) : f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z}) \ \forall z \in A$  und  $h(0) = 0$ . 10.4  $\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \forall z \in U_R(0)$  und  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ \forall z \in U_{\frac{1}{r}}$ . Setze  $a_{-n} := b_n$  für  $n \geq 1$ . Dann:  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ . 5.4  $\Rightarrow$  die Laurentreihe konvergiert auf  $A$  absolut und lokal gleichmäßig.

14.2  $\Rightarrow g$  und  $h$  sind eindeutig bestimmt

5.4  $\Rightarrow a_n$  eindeutig bestimmt für  $n \in \mathbb{Z}$ . Sei  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\gamma(t) := \rho e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )  $r < \rho < R$ . Sei  $w \in \text{Tr}(\gamma)$ :

$$\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^{\nu-n-1}.$$

Die letzte Reihe konvergiert auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig.

$$8.4 \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \underbrace{\int_{\gamma} w^{\nu-n-1}}_{= \begin{cases} 0 & , \nu \neq n \\ 2\pi i & , \nu = n \end{cases}}$$

#### Satz 14.4

$D \subseteq \mathbb{C}$  sei offen,  $z_0 \in D$ ,  $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$  und  $f \in H(\dot{D})$  ( $z_0$  ist also eine isolierte Singularität). Sei  $R > 0$  so, daß  $U_R(z_0) \subseteq D$ .  $f$  hat also, nach 14.3, auf  $\dot{U}_R(z_0)$  die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in \dot{U}_R(z_0))$$

- (1)  $f$  hat in  $z_0$  eine hebbare Singularität  $\iff a_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2)  $f$  hat in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$   $\iff a_{-m} \neq 0, a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$
- (3)  $f$  hat in  $z_0$  eine wesentliche Singularität  $\iff a_{-n} \neq 0$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$

#### Definition

Vorraussetzung wie in 14.4.  $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$  heißt das **Residuum** von  $f$  in  $z_0$ .

Ist  $0 < \rho < R$  und  $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ), so folgt aus 14.3:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

#### Beweis

(1) Klar.

(2) O.B.d.A:  $z_0 = 0$ .

“ $\Rightarrow$ “: 13.2  $\Rightarrow \exists g \in H(D) : f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{D}$  und  $g(z_0) \neq 0$

$$10.4 \Rightarrow g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_R(0) \Rightarrow f(z) = \frac{c_0}{z^m} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z} + \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$\forall z \in \dot{U}_R(0)$ . Eindeutigkeit der Laurententwicklung  $\Rightarrow c_0 = a_{-m}$ , also  $a_{-m} = g(0) \neq 0$ ; weiter:  $a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$

“ $\Leftarrow$ “:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z} + \dots + \frac{a_{-m}}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$

$$\Rightarrow z^m f(z) = \underbrace{a_{-m} + \dots + a_{-1} z^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}}_{=: g(z)} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$$

Es ist  $g \in H(U_R(0))$ ,  $g(0) = a_{-m} \neq 0$  und  $f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$ . 13.2  $\Rightarrow f$  hat einen Pol der Ordnung  $m$ .

(3) folgt aus (1) und (2). ■

#### Beispiele:

(i)  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  Laurententwicklung in  $\mathbb{C} \setminus \{1\} : f(z) = \frac{1}{z-1}$ ,  $\text{Res}(f, 1) = 1$

(ii)  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  Laurententwicklung in  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ .

$$\text{Für } |z| > 1 : \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

#### 14. Laurententwicklung

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } f(z) &= \frac{\cos(z)}{z^3}. \text{ Laurententwicklung in } \mathbb{C} \setminus \{0\}. f(z) = \frac{1}{z^3} \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \right) = \\
 &\underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + - \dots}_{\text{Nebenteil}, \text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$