

# 15. Multilineare Abbildungen und Tensorprodukte

## 15.1. Bilinearformen

**Definition:** Seien  $V, W$   $K$ -VRme. Eine Abbildung  $P : V \times W \rightarrow K$  heißt **(Vektorraum-)Paarung**, falls  $P$  in jedem Argument linear ist, d.h. wenn für jedes feste  $w_0 \in W$

$$P(\cdot, w_0) : V \rightarrow K, v \mapsto P(v, w_0)$$

und für jedes feste  $v_0 \in V$

$$P(v_0, \cdot) : W \rightarrow K, w \mapsto P(v_0, w)$$

eine lineare Abbildung, also Linearform ist.

Im Fall  $V = W$  heißt  $P$  eine **Bilinearform** auf  $V$ .

Eine Paarung  $P$  heißt **nicht ausgeartet**, wenn für jedes  $w_0 \in W$  und für jedes  $v_0 \in V$  die Abbildung  $P(\cdot, w_0)$  bzw.  $P(v_0, \cdot)$  nicht die Nullabbildung ist.

**Bemerkung:** Die Menge  $\mathcal{P}(V, W)$  aller Paarungen von  $V$  und  $W$  ist ein Untervektorraum des  $K$ -VRms  $\text{Abb}(V \times W, K)$  aller Abbildungen von  $V \times W$  nach  $K$ .

**Beispiel:** Auf dem Dualraum  $W := V^*(= \text{Hom}(V, K))$  ist die nicht ausgeartete Paarung

$$P : V \times V^* \rightarrow K, (v, f) \mapsto f(v)$$

eine Bilinearform.

Für eine Paarung  $P : V \times W \rightarrow K$  setzen wir  $\rho_w(v) := P(v, w)$  und erhalten so Linearformen  $\rho_w \in V^*$  für alle  $w \in W$ .

### Satz 6:

(1) Die Abbildung  $\rho : W \rightarrow V^*, w \mapsto \rho_w$  ist ein Homomorphismus von  $K$ -VRmen.

(2) Die Zuordnung  $\eta : P \mapsto \rho$  ist ein Isomorphismus, es gilt:

$$\mathcal{P}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(W, V^*)$$

**Beweis:** (1) Es gilt für alle  $\alpha \in K, w_1, w_2 \in W$ :

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha w_1 + w_2} &= (v \mapsto P(v, \alpha w_1 + w_2)) \\ &= (v \mapsto \alpha P(v, w_1) + P(v, w_2)) \\ &= \alpha((v \mapsto P(v, w_1)) + (v \mapsto P(v, w_2))) \\ &= \alpha \rho_{w_1} + \rho_{w_2}\end{aligned}$$

(2) Homomorphie selbst nachrechnen!

Die Umkehrabbildung ist:

$$\text{Hom}(W, V^*) \rightarrow \mathcal{P}(V, W), \rho \mapsto P := ((v, w) \mapsto (\rho(w))(v)) \quad \blacksquare$$

**Erinnere:** Lineare Abbildungen sind bereits durch ihre Wirkung auf einer Basis eindeutig bestimmt. Dieses Prinzip gilt auch für Paarungen.

**Bemerkung:** Seien  $V, W$   $K$ -VRme mit jeweiliger Basis  $B := \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V, C := \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq W$ , so ist eine Paarung  $P$  auf  $V \times W$  bereits durch ihre Einschränkung auf  $B \times C$  festgelegt.

Für  $v := \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i, w := \sum_{j=1}^n \beta_j c_j$  gilt:

$$P(v, w) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \cdot P(b_i, c_j)$$

Jede Abbildung  $P' : B \times C \rightarrow K$  definiert über diese Gleichung eine Paarung  $P' : V \times W \rightarrow K$ . Diese heißt **bilineare Fortsetzung**.

**Definition:** Die Matrix  $D_{BC}(P) := (P(b_i, c_j)) \in K^{m \times n}$  heißt **Fundamentalmatrix** der Paarung  $P$  bzgl. der Basen  $B$  und  $C$ . Mit den Kkordinatenvektoren:

$$D_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \text{ und } D_C(w) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

gilt nach obiger Gleichung:

$$P(v, w) = D_B(v)^T \cdot D_{BC}(P) \cdot D_C(w)$$

**Satz 7:**

Eine Paarung  $P$  endlichdimensionaler  $K$ -VRme  $V, W$  mit Basen  $B, C$  ist genau dann nicht ausgeartet, wenn die Dimensionen von  $V$  und  $W$  gleich und  $D_{BC}(P)$  invertierbar ist.

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Implikation in beiden Richtungen:

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\dim V = \dim W$  und  $F := D_{BC}(P)$  invertierbar. Sei nun  $w \neq 0 \in W$ , dann ist  $D_C(w) \neq 0$ .

Daraus folgt, dass auch  $F \cdot D_C(w)$  nicht null ist. O.B.d.A sei die  $i$ -te Koordinate ungleich null. Dann gilt:

$$P(b_i, w) = e_i^T \cdot F \cdot D_C(w) \neq 0$$

Insbesondere ist  $P(\cdot, w) \neq 0$ . Analog folgt  $P(v, \cdot) \neq 0$  für alle  $0 \neq v \in V$ . Also ist  $P$  nicht ausgeartet.

„ $\implies$ “ Sei  $P$  nicht ausgeartet, dann ist insbesondere  $\rho : W \rightarrow V^*, w \mapsto \rho_w = (v \mapsto P(v, w))$  injektiv. Daraus folgt:

$$\dim V = \dim V^* \geq \dim W$$

Analog gilt:

$$\dim W = \dim W^* \geq \dim V$$

Also haben  $V$  und  $W$  gleiche Dimension.

**Annahme:**  $F$  ist nicht invertierbar.

Dann existiert ein  $D_C(w) \neq 0$ , sodass  $F \cdot D_C(w)$  gilt. Daraus folgt für alle  $v \in V$ :

$$P(v, w) = D_B(v)^T \cdot F \cdot D_C(w) = 0 \quad \nexists$$

Also ist  $P(\cdot, w) = 0$ , was einen Widerspruch zur nicht Ausgeartetheit von  $P$  darstellt. ■

**Satz 8:**

Seien  $B, \hat{B}$  Basen von  $V$ ,  $C, \hat{C}$  Basen von  $W$  und  $P$  eine Paarung von  $V$  und  $W$ . Dann gilt:

$$D_{BC}(P) = D_{\hat{B}\hat{B}}(\text{id}_V)^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot D_{\hat{C}C}(\text{id}_W)$$

**Beweis:** Für  $(v, w) \in V \times W$  gilt:

$$\begin{aligned} P(v, w) &= D_{\hat{B}}(v)^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot D_{\hat{C}}(w) \\ &= (D_{\hat{B}\hat{B}}(\text{id}_V) \cdot D_B(v))^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot (D_{\hat{C}C}(\text{id}_W) \cdot D_C(w)) \\ &= D_B(v)^T \cdot (D_{\hat{B}\hat{B}}(\text{id}_V)^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot D_{\hat{C}C}(\text{id}_W)) \cdot D_C(w) \end{aligned}$$

Aber es gilt auch:

$$P(v, w) = D_B(v)^T \cdot D_{BC}(P) \cdot D_C(w)$$

Durch einsetzen aller Basispaare  $b_i, c_j$  folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung:** Mit der Dualbasis  $B^* = \{b_1^*, \dots, b_m^*\}$  von  $V^*$  zu  $B$  (erinnere:  $b_k^*(b_i) = \delta_{ik}$ ) gilt für  $\rho = \eta(P) : W \rightarrow V^*$ :

$$\rho(c_j) = \sum_{i=1}^n P(b_i, c_j) \cdot b_i^*$$

$$\text{D.h. } D_{B^*C}(\rho) = D_{BC}(P).$$

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \rho(c_j) &= P(\cdot, c_j) \\ &= (b_i \mapsto P(b_i, c_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n P(b_i, c_j) \cdot b_i^* \end{aligned}$$

**Beispiel:** Sei  $W = V^*$  und für alle  $f \in V^*$  sei  $P(v, f) = f(v)$ . Nehme nun die Dualbasis  $C = B^*$  zur Basis  $B$  von  $V$ . Dann gilt:

$$P(b_i, b_k^*) = b_k^*(b_i) = \delta_{ik}$$

Also ist  $D_{BB}(P) = I_m$

Wir spezialisieren nun  $W = V$ .

**Definition:** Sei  $P$  eine Paarung von  $V$  und  $V$ .

(a)  $P$  heißt **symmetrisch**, falls für alle  $v, w \in V$  gilt:

$$P(v, w) = P(w, v)$$

(b) Eine Basis  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  heißt **Orthogonalbasis** (OGB) von  $V$  bezüglich  $P$ , wenn für alle  $i \neq j$  gilt:

$$P(b_i, b_j) = 0$$

(c) Eine Basis  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  heißt **Orthonormalbasis** (ONB) von  $V$  bezüglich  $P$ , wenn  $B$  OGB ist und für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  gilt:

$$P(b_i, b_i) = 1$$

**Bemerkung:** Falls eine OGB  $B$  existiert, so ist die Fundamentalmatrix  $D_{BB}(P)$  diagonal, insbesondere symmetrisch, also ist  $P$  symmetrisch.

**Satz 9:**

Sei  $K$  ein Körper mit  $1 + 1 \neq 0$  und  $P$  eine symmetrische Bilinearform auf einem  $K$ -VRm  $V$  mit  $\dim V =: n < \infty$ . Dann existiert eine OGB von  $V$  bzgl.  $P$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der Dimension  $n$ .

Für  $n = 1$  ist die Behauptung offensichtlich wahr, nehmen wir also als Induktionsvoraussetzung an, dass sie für  $n - 1$  erfüllt sei.

Da für  $P = 0$  jede Basis Orthogonalbasis ist, lässt sich im Folgenden o.B.d.A. annehmen, dass  $P \neq 0$  ist. Also existieren  $v, w \in V$  mit  $P(v, w) \neq 0$ , es gilt:

$$\begin{aligned} P(v + w, v + w) &= P(v, v) + P(w, w) + P(v, w) + P(w, v) \\ &= P(v, v) + P(w, w) + 2P(v, w) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P(v, v) \neq 0 \vee P(w, w) \neq 0 \vee P(v + w, v + w) \neq 0$$

Also existiert ein  $b_1 \in V$  mit  $P(b_1, b_1) \neq 0$ . Nun betrachte:

$$\begin{aligned} W &:= \{v \in V \mid P(v, b_1) = 0\} \\ &= \text{Kern}(P(\cdot, b_1)) \end{aligned}$$

Nach Dimensionsformel ist  $\dim W = n - 1$  und  $V = K \cdot b_1 \oplus W$ . Da die Einschränkung  $P|_{W \times W}$  symmetrisch ist, existiert nach Induktionsvoraussetzung eine OGB  $\{b_2, \dots, b_n\}$  von  $W$  bzgl.  $P|_{W \times W}$ .

Da außerdem für alle  $w \in W$   $P(w, b_1) = 0$  ist, ist  $\{b_1, \dots, b_n\}$  OGB von  $V$  bzgl.  $P$ . ■

**Bemerkung (Fourierformel):** Die Basisdarstellung bzgl. einer ONB  $B$  lautet:

$$v = \sum_{b \in B} P(v, b) \cdot b$$

**Beweis:** Leichte Übung! ■

## 15.2. Multilineare Abbildungen

Veralgemeinere nun die Bilinearität und den Zielbereich.

**Definition:** Seien  $V_1, \dots, V_n, W$   $K$ -VRme und  $M : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  eine Abbildung.  $M$  heißt **(n-fach) multilinear**, falls für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  bei fester Wahl von  $v_j \in V_j$  (für alle  $j \neq i$ )  $M(v_1, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_n) : V_i \rightarrow W$  eine lineare Abbildung ist.

**Beispiel:** Multilineare Abbildungen sind:

- (1) Die Determinantenabbildung:

$$\det : K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K$$

- (2) Die Skalarmultiplikation:

$$K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

- (3) Die Matrizenmultiplikation:

$$K^{p \times q} \times K^{q \times r} \times K^{r \times s} \rightarrow K^{p \times s}, (A, B, C) \mapsto A \cdot B \cdot C$$

## 15.3. Tensorprodukte

**Definition:** Seien  $V, W$   $K$ -VRme. Ein  $K$ -VRm  $T$  mit einer bilinearen Abbildung  $\tau : V \times W \rightarrow T$  heißt ein **Tensorprodukt** von  $V$  und  $W$ , falls  $\tau$  die folgende **universelle Abbildungseigenschaft** (UAE) erfüllt:

Zu jedem  $K$ -VRm  $U$  und jeder bilinearen Abbildung  $\beta : V \times W \rightarrow U$  existiert genau eine lineare Abbildung  $\Phi_\beta : T \rightarrow U$  derart, dass  $\beta = \Phi_\beta \circ \tau$ .

Schreibe:  $T =: V \otimes_K W, \tau(v, w) =: v \otimes w$

**Bemerkung:** (1) Falls  $T$  existiert, so hat man eine Bijektion:

$$\text{Bil}(V \times W, U) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T, U), \beta \mapsto \Phi_\beta$$

- (2) Sind  $(T_1, \tau_1), (T_2, \tau_2)$  Tensorprodukte von  $V$  und  $W$ , so existiert genau ein Isomorphismus  $\Phi : T_1 \rightarrow T_2$  mit  $\tau_2 = \Phi \circ \tau_1$ .

**Aufgabe:** Beweise die Existenz von Tensorprodukten.

**Beispiel:** (1) Sei  $V := K^{n \times 1}, W := K^{m \times 1}, T := K^{n \times m}$  und die bilineare Abbildung:

$$\tau : K^n \times K^m \rightarrow T, (v, w) \mapsto v \cdot w^T$$

Für die Standardbasen  $\{e_i\} \subseteq V, \{e'_j\} \subseteq W$  ist  $\tau(e_i, e'_j) = E_{ij}$  die Elementarmatrix.  $D := \{E_{ij} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  ist Basis von  $T$ .

Im folgenden wollen wir die UAE nachweisen. Sei dazu  $\beta : V \times W \rightarrow U$  bilinear. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung  $\Phi : K^{n \times m} \rightarrow U$  für jede Vorgabe einer Abbildung  $D \rightarrow U$  (vgl. lineare Fortsetzung). Insbesondere also auch für die Vorgabe:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} : \Phi(E_{ij}) := \beta(e_i, e'_j)$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} \beta(v, w) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^m \gamma_j e'_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \cdot \beta(e_i, e'_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \cdot \Phi(E_{ij}) \\ &= \Phi\left(\sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \cdot E_{ij}\right) \\ &= \Phi\left(\tau\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^m \gamma_j e'_j\right)\right) \\ &= \Phi(\tau(v, w)) = (\Phi \circ \tau)(v, w) \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass  $\beta = \Phi \circ \tau$  gilt.

Falls für ein  $\Phi' : T \rightarrow U$  auch  $\beta = \Phi' \circ \tau$  gilt, folgt insbesondere  $\beta(e_i, e'_j) = \Phi'(\tau(e_i, e'_j))$  und damit:

$$\Phi'(E_{ij}) = \beta(e_i, e'_j) = \Phi(\tau(e_i, e'_j)) = \Phi(E_{ij})$$

D.h.  $\Phi|_D = \Phi'|_D$ , also ist  $\Phi = \Phi'$  eindeutig.

- (2) Seien  $V, W$  beliebige VRme mit endlichen Dimensionen  $\dim V = n, \dim W = m$ . Die Existenz des Tensorproduktes folgt etwa durch Koordinatenisomorphismen und Beispiel (1) Für eine **koordinatenfreie Konstruktion** nehme  $T := \text{Hom}(V^*, W)$  und

$$\tau : V \times W \rightarrow T, (v, w) \mapsto (V^* \rightarrow W, f \mapsto f(v) \cdot w)$$

Leichte Übung:  $(T, \tau)$  ist Tensorprodukt von  $V, W$  und für Basen  $B, C$  von  $V, W$  gilt:

$$D := \{b \otimes c \in T \mid b \in B, c \in C\}$$

ist Basis von  $T = V \otimes_K W$ .

**Satz 10:**

Sind  $V, W$  beliebige  $K$ -VRme, so existiert ein Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ .

**Beweis:** Finde einen  $K$ -Vektorraum  $T$  und eine lineare Abbildung  $\tau : V \times W \rightarrow T$  mit der universellen Abbildungseigenschaft. Dazu benutze den  $K$ -Vektorraum  $F := \text{Abb}(V \times W, K)_0$ .

Sei  $f : V \times W \rightarrow K$  eine Abbildung mit endlichem Träger  $\text{Supp}(f) := \{(v, w) \mid f(v, w) \neq 0\}$ .

$B := \{f_{(v,w)} \mid (v, w) \in V \times W\}$  ist eine Basis von  $F$  (da für beliebiges  $f \in F$  gilt:  $f(x, y) = \sum_{(v,w) \in \text{Supp}(f)} f(v, w) \cdot f_{(v,w)}$ ).

Setze  $\varphi : V \times W \rightarrow F, (v, w) \mapsto f_{(v,w)}$ . Vorsicht:  $\varphi$  ist nicht bilinear!

Für die Bilinearität benötigen wir den Untervektorraum  $R \leq F$ , erzeugt von den "fehlenden Relationen".

$$f_{(\alpha v_1 + v_2, \beta w_1 + w_2)} - \alpha \beta f_{(v_1, w_1)} - \beta f_{(v_2, w_1)} - \alpha f_{(v_1, w_2)} - f_{(v_2, w_2)} \quad \forall \alpha, \beta \in K, v_i \in V, w_i \in W$$

Bilde den Faktorraum  $T := \frac{F}{R}$  versehen mit der kanonischen Abbildung

$$\pi : F \rightarrow T, f \mapsto f + R =: [f]$$

Betrachte

$$\tau : V \times W \rightarrow T, (v, w) \mapsto \pi(\varphi(v, w)) = [f_{(v,w)}]$$

Nun gilt offenbar Bilinearität:

$$\begin{aligned} [f_{(\alpha v_1 + v_2, \beta w_1 + w_2)}] &= \alpha \beta [f_{(v_1, w_1)}] + \beta [f_{(v_2, w_1)}] + \alpha [f_{(v_1, w_2)}] + [f_{(v_2, w_2)}] \\ \tau(\alpha v_1 + v_2, \beta w_1 + w_2) &= \alpha \beta \tau(v_1, w_1) + \beta \tau(v_2, w_1) + \alpha \tau(v_1, w_2) + \tau(v_2, w_2) \end{aligned}$$

**Nachweis der universellen Abbildungseigenschaft:** Sei wieder  $\beta : V \times W \rightarrow U$  bilinear gegeben. Da  $F = \langle B \rangle = \langle \text{Bil}(\varphi) \rangle$  und  $\pi$  surjektiv sind, folgt  $T = \langle \text{Bil}(\tau) \rangle$ .

Jede lineare Abbildung  $\phi : T \rightarrow U$  ist eindeutig bestimmt durch  $\phi|_{\text{Bil}(\tau)}$ , also ist durch die Forderung  $\beta = \phi \circ \tau$   $\phi$  eindeutig bestimmt (falls existent).

**Existenz von  $\phi$ :** Zunächst definiere die lineare Abbildung

$$\phi_F : F \rightarrow U$$

durch Vorgabe auf der Basis  $B$ .

$$\phi_F(f_{(v,w)}) := \beta(v, w)$$

Da  $\beta$  bilinear ist, folgt

$$\phi_F(f_{(\alpha v_1 + v_2, \beta w_1 + w_2)} - \alpha \beta f_{(v_1, w_1)} - \beta f_{(v_2, w_1)} - \alpha f_{(v_1, w_2)} - f_{(v_2, w_2)}) = 0$$

also  $R \leq \text{Kern } \phi_F$ .

Mit dem Homomorphiesatz folgt: Es existiert eine lineare Abbildung  $\phi : \frac{F}{R} = T \rightarrow U$  mit

$$\phi([f]) = \phi_F(f)$$

und

$$\phi(\tau(v, w)) = \phi([\varphi(v, w)]) = \phi_F(f_{(v, w)}) = \beta(v, w)$$

■

**Anwendung:** Das Tensorprodukt wird zur Erweiterung des Skalarbereiches eines VRms genutzt. Sei  $V$   $K$ -VRm,  $L$  ein Körper mit Teilkörper  $K \leq L$ . Insbesondere ist also  $L$  ein  $K$ -VRm (vgl. früher). Nach Satz 10 existiert das Tensorprodukt  $L \otimes_K V =: V_L$  ( $K$ -VRm).

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass  $V_L$  ein  $L$ -Vektorraum ist. Dazu fehlt die Skalarmultiplikation  $L \times V_L \rightarrow V_L$ , die wir mittels der UAE definieren. Für alle  $l \in L$  ist:

$$\beta_l : L \times V \rightarrow V_L, (x, v) \mapsto lx \otimes v$$

bilinear, sodass  $\beta_l(x, v) = \Phi_{\beta_l}(x \otimes v)$ .

Nehme nun  $\Phi_{\beta_l}$  als Skalarmultiplikation mit  $l \in L$ :

$$L \times V_L \rightarrow V_L, (l, u) \mapsto \Phi_{\beta_l}(u)$$

Leichte Übung: Dies erfüllt die Axiome für eine Skalarverknüpfung.

**Bemerkung:**  $V_L$  enthält  $V$  als  $K$ -Untervektorraum über die Einbettung:

$$V \rightarrow V_L, v \mapsto 1 \otimes v$$

Für eine Basis  $B$  von  $V$  ist das Bild  $\{1 \otimes b \mid b \in B\} \subseteq V_L$  eine Basis des  $L$ -VRms  $V_L$ . Insbesondere ist

$$L \otimes_K K^n \cong L^n$$

eine Isomorphie von  $L$ -VRmen.