

18. Normale Endomorphismen

18.1. Die adjungierte lineare Abbildung

Seien V, W \mathbb{K} -Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$

Lemma:

Sei $\phi \in \text{Hom}(V, W)$. Falls $\Psi \in \text{Hom}(W, V)$ mit der Eigenschaft

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle x, \Psi(y) \rangle_V \quad \forall x \in V, y \in W,$$

so ist Ψ hierdurch eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $\Psi' : W \rightarrow V$ ein Homomorphismus mit derselben Eigenschaft

\implies Für $\Omega := \Psi - \Psi' \in \text{Hom}(W, V)$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in V, y \in W : \langle x, \Omega(y) \rangle_V &= \langle x, \Psi(y) - \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle x, \Psi(y) \rangle_V - \langle x, \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle \phi(x), y \rangle_W - \langle \phi(x), y \rangle_W \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\implies \langle \Omega(y), \Omega(y) \rangle_V = 0 \implies \Omega(y) = 0 \quad \forall y$$

Also: $\Omega = 0$, d.h. $\Psi = \Psi'$. ■

Definition: Falls Ψ existiert wie oben, so heißt Ψ der zu ϕ adjungierte Homomorphismus.

Schreibe: $\Psi =: \phi^* \quad \text{Hom}^a(V, W) := \{\phi \in \text{Hom}(V, W) \mid \phi^* \text{ existiert}\}$

Beispiel: $V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m$ mit Standardskalarprodukt.

$A \in \mathbb{K}^{n \times m}, \phi := \Lambda_A : x \mapsto A \cdot x$

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle Ax, y \rangle_W = \overline{y}^T Ax = (y^* A)x = (A^* y)^* = \langle x, A^* y \rangle_V = \langle x, \Lambda_{A^*}(y) \rangle$$

Das heißt: $(\Lambda_A)^* = \Lambda_{A^*}$. Insbesondere existiert die Adjungierte.

Proposition: (1) $\text{Hom}^a(V, W) \leq \text{Hom}(V, W)$

(2) Für die Abbildung $*$: $\text{Hom}^a(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W, V), \phi \mapsto \phi^*$ gilt:

$$(\alpha\phi + \beta\Psi)^* = \overline{\alpha}\phi^* + \overline{\beta}\Psi^*$$

Die Abbildung ist **semilinear**.

(3) Aus $\phi \in \text{Hom}^a(V, W)$, $\Theta \in \text{Hom}^a(W, U)$ folgt $\Theta \circ \phi \in \text{Hom}^a(V, U)$ und $(\Theta \circ \phi)^* = \phi^* \circ \Theta^*$

(4) Aus $\phi \in \text{Hom}^a(V, W)$ folgt $\phi^* \in \text{Hom}^a(W, V)$ und $(\phi^*)^* = \phi$, sowie $\text{Kern } \phi = \text{Bild}(\phi^*)^\perp$.

Beweis: (1) +(2) Sei $\phi, \Psi \in \text{Hom}^a(V, W)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
 $\bar{\alpha}\phi^* + \bar{\beta}\Psi^*$ ist die Adjungierte zu $\alpha\phi + \beta\Psi$, denn

$$\begin{aligned} \langle (\alpha\phi + \beta\Psi)(x), y \rangle &= \alpha \underbrace{\langle \phi(x), y \rangle}_{\langle x, \phi^*(y) \rangle} + \beta \underbrace{\langle \Psi(x), y \rangle}_{\langle x, \Psi^*(y) \rangle} \\ &= \langle x, \bar{\alpha}\phi^*(y) + \bar{\beta}\Psi^*(y) \rangle \end{aligned}$$

(3) Für alle $x \in V$, $y \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \Theta \circ \phi(x), y \rangle &= \langle \Theta(\phi(x)), y \rangle \\ &= \langle \phi(x), \Theta^*(y) \rangle \\ &= \langle x, \phi^*(\Theta^*(y)) \rangle \end{aligned}$$

(4) Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi^*(y), x \rangle &= \overline{\langle x, \phi^*(y) \rangle} \\ &= \overline{\langle \phi(x), y \rangle} \\ &= \langle y, \phi(x) \rangle \end{aligned}$$

Das heißt ϕ^* hat die Adjungierte $(\phi^*)^* = \phi$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} x \in \text{Kern}(\phi) &\iff \phi(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in W : \underbrace{\langle \phi(x), y \rangle}_{\langle x, \phi^*(y) \rangle} = 0 \\ &\iff x \perp \phi^*(W) \end{aligned}$$

■

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\phi \in \text{End}(V)$ mit $\langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi^*(y) \rangle$.

Lemma:

Sei $\dim V < \infty$, $\phi \in \text{End}(V)$. Dann gilt:

$$\lambda \in \text{Spec}(\phi) \implies \bar{\lambda} \in \text{Spec}(\phi^*)$$

Beweis: Sei $u \neq 0$, $\phi(u) = \lambda \cdot u$. Dann gilt für alle $y \in V$:

$$0 = \langle (\phi - \lambda \text{id})(u), y \rangle = \langle u, e(\phi - \lambda \text{id})^*(y) \rangle$$

Nach Proposition gilt $(\phi - \lambda \text{id})^* = \phi^* - \bar{\lambda} \text{id}$.

Dann ist $0 = \langle u, \underbrace{(\phi^* - \bar{\lambda} \text{id})(y)}_{\neq u} \rangle$ (wegen der positiven Definitheit und $u \neq 0$).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \phi^* - \bar{\lambda} \text{id} \text{ ist nicht surjektiv} &\iff \phi^* - \bar{\lambda} \text{id} \text{ ist nicht injektiv} \\ &\iff \exists v \neq 0 : \phi^*(v) = \bar{\lambda}v \\ &\implies \bar{\lambda} \in \text{Spec}(\phi^*) \end{aligned}$$

■

18.2. Der Spektralsatz

Proposition: Sei $\phi \in \text{End}^a(V)$

(1) Für $\lambda, \mu \in \text{Spec}(\phi)$ mit $\lambda \neq \mu$ gilt:

$$E_\lambda(\phi) \perp E_\mu(\phi)$$

(2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$

(b) $\forall x, y \in V : \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle \phi^*(x), \phi^*(y) \rangle$
 ϕ heißt **normal**.

(3) Ist ϕ normal, dann folgt $\text{Kern}(\phi) = \text{Kern}(\phi^*)$, insbesondere $E_\lambda(\phi) = E_{\bar{\lambda}}(\phi^*)$.

Beweis: (1) Seien $u \in E_\lambda(\phi)$, $v \in E_\mu(\phi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, v \rangle &= \langle \lambda u, v \rangle \\ &= \langle \phi(u), v \rangle \\ &= \langle u, \phi^*(v) \rangle \\ &= \langle u, \bar{\mu}v \rangle \\ &= \bar{\mu} \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Mit $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle u, v \rangle = 0$

■

Satz 17 (Spektralsatz):

Sei $\dim V < \infty$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt mit $\phi \in \text{End}(V)$ normal.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ habe das charakteristische Polynom $f_\phi(T)$ nur reelle Nullstellen. Dann existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von ϕ .

Beweis: Sei $n := \dim V$, $\lambda_1 \in \text{Spec}(\phi)$, $b_1 \neq 0 \in E_{\lambda_1}(\phi)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\|b_1\| = 1$.

Betrachte das orthogonale Komplement $U := b_1^\perp$. Es gilt

$$V = \langle b_1 \rangle \oplus U,$$

wobei $\phi(U) \subseteq U$, $\phi^*(U) \subseteq U$ ist, denn für alle $u \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi(u), b_1 \rangle &= \langle u, \phi^*(b_1) \rangle \\ &= \langle u, \overline{\lambda_1} b_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \underbrace{\langle u, b_1 \rangle}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $\phi(u) \perp b_1$, das heißt $\phi(U) \perp b_1$, damit folgt $\phi(U) \subseteq U$.

Für ϕ^* ist die Vorgehensweise analog.

Insbesondere ist $\phi|_U \in \text{End}(U)$.

Ferner gilt $(\phi|_U)^* = \phi^*|_U$, also

$$\begin{aligned} \phi|_U \phi^*|_U &= (\phi\phi^*)|_U \\ &\stackrel{\phi \text{ normal}}{=} (\phi^*\phi)|_U \\ &= \phi^*|_U \phi|_U \end{aligned}$$

Also ist ϕ normal.

Vollständige Induktion nach n :

$n - 1 \rightsquigarrow n$: U hat eine Orthonormalbasis $\{b_2, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von $\phi|_U$.

Dann ist $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ die gesuchte Orthonormalbasis. ■

Lemma (Transfer zu Matrizen):

Für beliebiges $\phi \in \text{End}(V)$ sei s_ϕ die Sesquilinearform

$$s_\phi(x, y) := \langle \phi(x), y \rangle$$

B sei eine Orthonormalbasis von V . Dann gilt:

$$(1) \quad D_{BB}(\phi^*) = D_{BB}(\phi)^*$$

$$(2) \quad D_{BB}(s_\phi) = D_{BB}(\phi)^\top$$

$$(3) \quad \phi \text{ ist normal, genau dann wenn für } A := D_{BB}(\phi) \text{ gilt:}$$

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Beweis: Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Erinnere: $D_{BB}(\phi) = (x_{ij})$ ist definiert durch $\phi(b_{ij}) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$.

Es gilt

$$\begin{aligned} s_\phi(b_j, b_k) &= \langle \phi(b_j), b_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \underbrace{\langle b_i, b_k \rangle}_{=\delta_{ik}} \\ &= \alpha_{kj} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (2).

Sei $D_{BB}(\phi^*) = (\beta_{ij})$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_{ji}} &= \overline{\langle \phi(b_i), b_j \rangle} \\ &= \langle b_j, \phi(b_i) \rangle \\ &= \langle \phi^*(b_j), b_i \rangle \\ &= \beta_{ij} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (1).

Es bleibt noch Behauptung (3) zu zeigen:

$$\phi \cdot \phi^* \iff \underbrace{D_{BB}(\phi\phi^*)}_{=AA^*} = \underbrace{D_{BB}(\phi^*\phi)}_{=A^*A}$$

■

Korollar (zum Spektralsatz):

Für $\lambda \in \text{Spec}(\phi)$ sei $U_\lambda := E_\lambda(\phi)$ und $\Pi_\lambda := \Pi_{U_\lambda}$ (orthogonale Projektion). Dann gilt für $p(T) \in \mathbb{K}[T]$:

$$p(\phi) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} p(\lambda) \cdot \Pi_\lambda$$

und

$$\phi^* = \sum_{\lambda} \bar{\lambda} \cdot \Pi_\lambda$$

Beweis: Da $U_\lambda \perp U_\mu$ für $\lambda \neq \mu$ folgt $\Pi_\lambda \Pi_\mu = \delta_{\lambda\mu} \Pi_\lambda$.

Spektralsatz: Aus $V = \bigoplus_{\lambda} U_\lambda$ folgt $\text{id}_V = \sum_{\lambda} \Pi_\lambda$.

Aus $p(\phi)|_{U_\lambda} = p(\lambda) \cdot \text{id}_{U_\lambda}$ folgt $p(\phi) = \sum_{\lambda} p(\lambda) \Pi_\lambda$.

$\phi^*|_{U_\lambda} = \bar{\lambda} \cdot \text{id}_{U_\lambda}$ liefert

$$\begin{aligned} \phi^* &= \phi^* \cdot \text{id}_{U_\lambda} \\ &= \phi^* \cdot \sum_{\lambda} \Pi_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} \phi^* \Pi_\lambda \\ &= \sum_{\lambda} \bar{\lambda} \Pi_\lambda \end{aligned}$$

■

Satz 18:

Seien $\phi, \Psi \in \text{End}(V)$ normal und $\phi \cdot \Psi = \Psi \cdot \phi$.

Falls in V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren existiert und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu Ψ , dann existiert eine Orthonormalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren zu ϕ und Ψ .

Beweis: Seien $V = \bigoplus_{\lambda} U_{\lambda}$, $U_{\lambda} := E_{\lambda}(\phi)$.

Zeige: $\Psi(U_{\lambda}) \subseteq U_{\lambda}$ und $\Psi|_{U_{\lambda}}$ sind diagonalisierbar.

Dazu:

$$\begin{aligned} u \in U_{\lambda} &\implies \phi(u) = \lambda u \\ &\implies \Psi(\phi(u)) = \Psi(\lambda u) = \lambda \Psi(u) \\ &\iff \phi(\Psi(u)) = \lambda \Psi(u) \implies \Psi(u) \in U_{\lambda} \end{aligned}$$

Analog: $\phi(E_{\mu}(\Psi)) \subseteq E_{\mu}(\Psi)$.

Da $V = \bigoplus_{\mu} E_{\mu}(\Psi)$, gilt insbesondere für alle $u \in U_{\lambda}$: $u = \sum_{\mu} x_{\mu} \in E_{\mu}(\Psi)$. Es gilt sogar: jedes $x_{\mu} \in U_{\lambda}$, denn:

$$\phi(x_{\mu}) = x'_{\mu} \in E_{\mu}(\Psi)$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{\mu}^{\oplus} x_{\mu} &= \lambda u \\ &= \phi(u) \\ &= \sum_{\mu} \phi(x_{\mu}) \\ &= \sum_{\mu}^{\oplus} x'_{\mu} \end{aligned}$$

Da die Summe direkt ist, folgt für alle μ

$$\lambda \cdot x_{\mu} = x'_{\mu} = \phi(x_{\mu}),$$

das heißt $x_{\mu} \in U_{\lambda}$.

Insgesamt gezeigt:

$$U_{\lambda} = \bigoplus_{\mu} E_{\mu}(\Psi) \cap U_{\lambda}$$

(d.h. $\Psi|_{U_{\lambda}}$ ist diagonalisierbar). Damit folgt

$$V = \bigoplus_{\lambda} \bigoplus_{\mu} E_{\mu}(\Psi) \cap E_{\lambda}(\phi)$$

■

18.3. Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition: $\phi \in \text{End}(V)$ heißt **selbstadjungiert**, falls $\phi^* = \phi$.

Bemerkung: (1) ϕ ist selbstadjungiert impliziert ϕ ist normal.

(2) Ist $\dim V < \infty$, B Orthonormalbasis und $A := D_{BB}(\phi)$, dann ist ϕ selbstadjungiert genau dann wenn $A = A^*$, d.h. A ist hermitesch.

Hintergrund: Viele Problem in Physik und Technik führen auf hermitesche Matrizen.

Satz 19:

(1) $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit $A = A^\top$ impliziert $\text{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ (oder: das charakteristische Polynom hat nur reelle Nullstellen).

(2) Für hermitesche A gilt:

$$A \text{ ist positiv definit} \iff \forall \lambda \in \text{Spec}(A) : \lambda > 0$$

Beweis: (1) Sei $\lambda \in \text{Spec}(A)$ und $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Dann:

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle \\ &= \langle v, A^* v \rangle \\ &= \langle v, Av \rangle \\ &= \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{= \|v\|^2 \neq 0} \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = \bar{\lambda}$, das heißt $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) A ist nach Definition genau dann positiv definit wenn $s_A(x, y) = x^\top A y$ positiv definit ist.

Für eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von $A = A^*$ gilt

$$Ab_i = \lambda b_i$$

und Basisdarstellung

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i \rightsquigarrow x = \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \bar{b}_i$$

und somit

$$\begin{aligned}
 s_A(x, x) &= x^\top A \bar{y} \\
 &= \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \bar{b}_i \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{A b_j}_{\lambda_j b_j} \\
 &= \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j \lambda_j \bar{b}_i^\top b_j \\
 &= \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j \lambda_j \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
 &= \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i
 \end{aligned}$$

Also: $s_A(x, x) = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i$.

Dann folgt:

$$s_A(x, x) \geq 0 \forall x \iff \forall \lambda_i \geq 0$$

und

$$s_A(x, x) = 0 \implies x = 0$$

genau dann, wenn alle λ_i größer Null sind. ■

Bemerkung: Für selbstadjungierte, reelle A ist die Extravoraussetzung im Spektralsatz immer erfüllt.

Korollar:

Ist V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V < \infty$ und $\phi \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu ϕ .

Definition: Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\phi \in \text{End}(V)$.

Dann heißt $\rho(\phi) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Spec}(\phi)\}$ der **Spektralradius** von ϕ . Für $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ setze $\rho(A) := \rho(\Lambda_A)$.

Bemerkung: Auf $\mathbb{K}^{m \times n}$ ist durch

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1\}$$

eine Norm definiert.

Satz 20:

Es gilt $\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Falls $m = n$ und A normal ist, gilt sogar $\|A\| = \rho(A)$.

Beweis: A^*A ist selbstadjungiert, das heißt es gilt $(A^*A)^* = A^* \cdot (A^*)^* = A^*A$.

Dann existiert eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren, etwa $A^*Ab_i = \mu_i b_i$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle \\ &= \langle x, A^*Ax \rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i b_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \underbrace{\overline{\mu_i}}_{=\mu_i} \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &\leq \sum_i |\alpha_i|^2 \underbrace{\max\{|\mu_i|\}}_{=\rho(A^*A)} \\ &= \rho(A^*A) \|x\|^2 \end{aligned}$$

Sei $x = \sum_i \alpha_i b_i$ die Basisdarstellung. Dann ist $\|Ax\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 \mu_i$, also alle $\mu_i \geq 0$.

Weiterhin: $A^*Ab_i = \mu_i b_i$ und $\rho(A^*A) = \mu_{\max} = \mu_{i_0}$, dazu b_{i_0} . Mit $x := b_{i_0}$ folgt $\|Ax\|^2 = \mu_{\max}$.

Speziell für normales A ($m = n$):

Es gilt $E_\lambda(A) = E_{\overline{\lambda}}(A^*)$. Dann:

$$\mu_i = \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2$$

und damit folgt

$$\|A\| = |\mu_{\max}| = \rho(A)$$

■

Vorsicht: Im allgemeinen ist $\|A\| \neq \rho(A)$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\rho(A) = 0$ aber $\|A\| = 1$. Es ist

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

