

ii Projektive Varietäten

Wir hatten bereits gesehen: Ein Manko an $\mathbb{A}^n(K)$ ist, dass sich Geraden nicht immer schneiden. Daher wollen wir $\mathbb{A}^n(K)$ zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(K)$ vergrößern. Die Punkte darin sollen die Geraden in $\mathbb{A}^{n+1}(K)$ sein.

1 Der Projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$



Sei k immer ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

DEFINITION 1.1: Der n -dimensionale projektive Raum über k besteht aus allen Ursprungsgeraden in k^{n+1} :

$$\mathbb{P}^n(k) := k^{n+1} \setminus \{0\} / \sim,$$

wobei $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1}) : \iff \exists \lambda \in k^\times : y_i = \lambda x_i \ \forall i$. Für die Äquivalenzklasse von (x_0, \dots, x_n) schreiben wir

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

und nennen sie die *homogenen Koordinaten des Punktes*.

BEISPIEL 1.2: (a) Für $n = 0$ ist $\mathbb{P}^0(k) = \{(1)\} =: \{\infty\}$.

(b) Für $n = 1$ ist

$$\mathbb{P}^1(k) = \{(x_0, x_1) \mid (x_0, x_1) \neq (0, 0)\} / \sim = \{(1 : t) \mid t \in k\} \cup \{(0 : 1)\}.$$

Wir sehen:

$$\mu: \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow k \cup \{\infty\}, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_0}, & x_0 \neq 0, \\ \infty, & x_0 = 0, \end{cases}$$

ist eine Bijektion und ordnet jeder Geraden ihre Steigung zu.

SPEZIALFALL:

- Für $k = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^1 / \{\pm 1\}$, entspricht also einer Kreislinie.
 - Für $k = \mathbb{C}$ ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Das lässt sich (z.B. mit Hilfe der riemannschen Zahlenkugel) mit der \mathcal{S}^2 identifizieren.
- (c) Es gilt $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^n(\mathbb{R}) / \{\pm 1\}$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}^n(\mathbb{C}) / \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$. Bezüglich der Quotiententopologie, die von k^{n+1} mit der euklidischen Topologie herkommt, sind das kompakte Hausdorffräume.



Das ist nicht die Zariski-Topologie!

(d) Für $k = \mathbb{F}_p$ ist

$$|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)| = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} = 1 + \dots + p^n.$$

DEFINITION/BEMERKUNG 1.3: Für $i \in \{0, \dots, n\}$ sei

$$\mathfrak{U}_i := \{x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}.$$

Das ist wohldefiniert(!) und es gilt:

$$(a) \quad \mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{U}_i$$

(b) Sei

$$\varphi_i: \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (y_1, \dots, y_n) \longmapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n).$$

Das ist eine Einbettung mit Bild \mathfrak{U}_i . Die Abbildung

$$\mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(k), \quad (x_0 : \dots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

ist wohldefiniert und bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist φ_i .

(c) Die Abbildung $\mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k)$,

$$(x_0 : \dots : x_n) \longmapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n) \\ =: (x_0 : \dots : \widehat{x}_i : \dots : x_n)$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

(d) Damit erhalten wir eine Bijektion:

$$\mathbb{P}^n(k) \longleftrightarrow \mathbb{A}^n(k) \cup \mathbb{A}^{n-1}(k) \cup \dots \cup \mathbb{A}^1(k) \cup \{\infty\}.$$

Beweis: (a) ist klar nach Definition der \mathfrak{U}_i .

(b) Man rechnet einfach nach, dass die Abbildungen zueinander invers sind.

(c) Da $x_i \neq 0$ ist, gibt es ein $j \neq i$ mit $x_j \neq 0$, also ist die Abbildung wohldefiniert. Wir geben wieder eine Umkehrabbildung an:

$$\mathbb{P}^{n-1}(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i, \\ (y_0 : \dots : y_{n-1}) \longmapsto (y_0 : \dots : y_{i-1} : 0 : y_i : \dots : y_{n-1}).$$

(d) Das folgt induktiv aus (b) und (c). □

2 Projektive Varietäten



Auch in diesem Abschnitt sei k immer ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein unmittelbares Problem im Projektiven ist das Folgende: Sei $f \in k[X_0, \dots, X_n]$. Dann ist die dazugehörige Polynomfunktion

$$\mathbb{P}^n(k) \longrightarrow k, \quad x = (x_0 : \dots : x_n) \longmapsto f(x_0, \dots, x_n)$$

nur wohldefiniert, falls $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = f(x_0, \dots, x_n)$ für alle $\lambda \in k^\times$ ist. Das ist aber fast nie der Fall.

Um Varietäten zu definieren, genügt es aber, dass „ $f(x) = 0$ “ wohldefiniert ist, das heißt

$$\forall \lambda \in k^\times: f(x_0, \dots, x_n) = 0 \iff f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0.$$

Das erfüllen gerade die homogenen Polynome.

ERINNERUNG 2.1: (a) $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ heißt *homogen vom Grad d* , wenn

$$f = \sum_{i=0}^l a_i X_0^{r_{i,0}} \cdots X_n^{r_{i,n}} \text{ mit } r_{i,0} + \dots + r_{i,n} = d \quad \forall i.$$

(b) Falls k unendlich ist, so gilt:

$$f \text{ ist homogen vom Grad } d \iff f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \in k^\times.$$

(c) Die Voraussetzung „unendlich“ kann in (b) nicht weggelassen werden: Seien $k = \mathbb{F}_3$ und $f(X) = X^3 + X$. Dann ist f nicht homogen, aber es gilt

$$\forall \lambda \in k^\times: f(\lambda x) = \lambda^3 x^3 + \lambda x = \lambda(x^3 + x) = \lambda f(x),$$

da $\lambda^3 = \lambda$ im \mathbb{F}_3 .

Beweis: (b) Für homogene Polynome gilt die Eigenschaft nach Definition. Sei also f ein Polynom, das die rechte Seite der Äquivalenz erfülle. Wir zerlegen f in seine homogenen Komponenten, schreiben also

$$f = \sum_{i=0}^l f_i \text{ mit } \deg f_i = i \text{ und } f_i \text{ homogen.}$$

Nun setzen wir $g_{(x_0, \dots, x_n)}(\lambda) := f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$, fassen also den Ausdruck als Polynom in λ auf. Da die f_i homogen sind und wegen der Voraussetzung an f , gilt:

$$\sum_{i=0}^l \lambda^i f_i(x) = \sum_{i=0}^l f_i(\lambda x) = f(\lambda x) = \lambda^d f(x) = \lambda^d \left(\sum_{i=0}^l f_i(x) \right).$$

Da k unendlich ist, stimmen die Ausdrücke für alle x als Polynome in λ überein, es gilt also $f_i = 0$ für $i \neq d$. Daher ist $f = f_d$ und damit homogen vom Grad d . \square

II Projektive Varietäten

DEFINITION 2.2: $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt *projektive Varietät*, wenn es in $k[X_0, \dots, X_n]$ eine Menge \mathcal{F} von homogenen Polynomen gibt, so dass

$$V = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0 \forall f \in \mathcal{F}\}.$$

BEISPIEL 2.3: (a) Die Menge $H_i := \mathfrak{V}(X_i) = \mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i$ ist eine projektive Varietät und nach Definition/Bemerkung 1.3 (c) bijektiv zu \mathbb{P}^{n-1} .

Allgemein nennen wir $H = \mathfrak{V}(f)$ mit $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ eine *Hyperfläche* und wenn f sogar linear ist, nennen wir H eine *Hyperebene*.

(b) Es gilt $\mathfrak{V}(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$.

(c) Betrachte $V = \mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$.

- Zuerst bilden wir $V \cap \mathfrak{U}_0$ in den \mathbb{A}^2 durch

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right)$$

ab. Ein Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(k)$ liegt genau dann in V , wenn er

$$x_0x_2 - x_1^2 = 0$$

erfüllt und für einen Punkt aus $V \cap \mathfrak{U}_0$ ist diese Bedingung äquivalent zu $\frac{x_2}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 = 0$. Das heißt ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{A}^2$ liegt genau dann im Bild von $V \cap \mathfrak{U}_0$, wenn $y - x^2 = 0$. Diese Punkte liegen also alle auf einer Parabel.

- Nun bilden wir $V \cap \mathfrak{U}_1$ nach \mathbb{A}^2 ab. Analog betrachten wir die Abbildung

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1} \right)$$

und sehen mit dem gleichem Argument, dass für die betroffenen Punkte

$$\frac{x_0x_2}{x_1^2} - 1 = 0$$

gilt, also im \mathbb{A}^2 entsprechend: $xy - 1 = 0$. Diese Punkte liegen also alle auf einer Hyperbel.

ERINNERUNG 2.4: (a) Der Polynomring $S := k[X_0, \dots, X_n]$ ist ein *graduierter Ring* mit Graduierung

$$S_d := \{f \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f \text{ homogen von Grad } d\},$$

d.h.: • $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$; die Elemente in S_d bezeichnen wir als *homogene Elemente*.

- Es gilt: $S_d \cdot S_l \subseteq S_{d+l}$.

S ist sogar eine *graduierte k -Algebra*, d.h. $k = S_0$ und die S_d sind k -Vektorräume.

- (b) Ein Ideal I heißt *homogen*, wenn es von homogenen Elementen (nicht notwendigerweise von gleichem Grad) erzeugt wird.
- (c) Die Summe, das Produkt, der Durchschnitt und die Radikale von homogenen Idealen sind wieder homogen.
- (d) Es gilt: I ist genau dann homogen, wenn

$$\forall f \in I: f = \sum_{i=0}^d f_i \text{ mit } f_i \in S_i \implies f_i \in I.$$

Beweis: Als Beispiel beweisen wir, dass das Radikal eines homogenen Ideals wieder homogen ist. Für die restlichen Beweise verweisen wir auf Algebra II.

Sei also I ein homogenes Ideal und $f \in \sqrt{I}$. Seien $f_d \in S_d$ mit $f = \sum_{d=0}^n f_d$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f^m \in I$ und wir sehen:

$$f^m = f_n^m + \text{Terme von kleinerem Grad.}$$

f_n^m ist auch ein homogenes Element, also gilt nach (d): $f_n^m \in I$. Daher ist $f_n \in \sqrt{I}$ und rekursiv auch alle f_d . Damit ist, wieder nach (d), \sqrt{I} ein homogenes Ideal. \square

DEFINITION/BEMERKUNG 2.5: (a) Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Dann nennen wir

$$\mathfrak{I}(V) = \langle \{f \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f \text{ homogen, } f(x) = 0 \ \forall x \in V\} \rangle$$

das *Verschwindungsideal* von V .

- (b) Für ein homogenes Ideal I heißt

$$\mathfrak{V}(I) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I\}$$

Nullstellenmenge von I . Das ist eine projektive Varietät.

- (c) $\mathfrak{I}(V)$ ist ein Radikalideal.
- (d) Seien I_1, I_2 homogene Ideale, V_1, V_2 projektive Varietäten. Dann gilt:
 - $I_1 \subseteq I_2 \implies \mathfrak{V}(I_1) \supseteq \mathfrak{V}(I_2)$,
 - $V_1 \subseteq V_2 \implies \mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2)$, sowie
 - $V_1 = V_2 \iff \mathfrak{I}(V_1) = \mathfrak{I}(V_2)$.

Beweis: (c) Sei $I := \mathfrak{I}(V)$ homogen. Dann ist nach Erinnerung 2.4 (c) auch \sqrt{I} homogen. Sei $f \in \sqrt{I}$ ein homogenes Element. Dann ist $f \in I$ nach dem gleichen Argument, wie im Affinen (Bemerkung 1.3 (c)).

- (d) Hier wirken die Argumente aus Kapitel I, Bemerkung 1.3 und Bemerkung 1.5. \square

PROPOSITION 2.6 (Projektiver Nullstellensatz): Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und I ein homogenes Ideal in $K[X_0, \dots, X_n]$. Dann gilt:

- (a) $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$, falls $\sqrt{I} \neq (X_0, \dots, X_n)$,
- (b) $\mathfrak{V}(I) = \emptyset \iff I = K[X_0, \dots, X_n]$ oder $\sqrt{I} = (X_0, \dots, X_n)$.

Der Beweis kommt später.

II Projektive Varietäten

- DEFINITION/BEMERKUNG 2.7: (a) Die projektiven Varietäten im $\mathbb{P}^n(k)$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$. Diese heißt *Zariski-Topologie*.
 (b) Für $M \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M)) = \overline{M}$.
 (c) Sei V eine projektive Varietät. Dann gilt:

$$V \text{ ist irreduzibel} \iff \mathfrak{I}(V) \text{ ist ein Primideal.}$$

- (d) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis: Genau wie im Affinen. Siehe dazu Definition/Bemerkung 2.1, Bemerkung 2.3, Bemerkung 2.9 und Satz 1 aus Kapitel I. \square

Frage: Wie sieht das Bild einer affinen Varietät $V = \mathfrak{V}(I)$ in \mathbb{P}^n aus?

DEFINITION/LEMMA 2.8: Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: k[X_1, \dots, X_n] &\longrightarrow k[X_0, \dots, X_n], \\ f = \sum_{i=0}^d f_i &\longmapsto \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} =: F(X_0, \dots, X_n), \end{aligned}$$

wobei die f_i homogen mit $\deg f_i = i$ sind, die *Homogenisierung* und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: k[X_0, \dots, X_n] &\longrightarrow k[X_1, \dots, X_n], \\ F(X_0, \dots, X_n) &\longmapsto F(1, X_1, \dots, X_n) =: f(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

die *Dehomogenisierung*. Dann gilt:

- (a) $\mathcal{D} \circ \mathcal{H} = \text{id}$ und für homogenes F gilt $X_0^e \cdot \mathcal{H} \circ \mathcal{D}(F) = F$ für ein $e \in \mathbb{N}$.
 (b) Sei $F = \mathcal{H}(f)$. Dann ist, nach Definition, F homogen und es gilt $\deg F = d = \deg f$. Außerdem gilt:

$$\forall x_0, \dots, x_n \in k, x_0 \neq 0: F(x_0, \dots, x_n) = x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Insbesondere ist $F(1, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

- (c) \mathcal{D} ist ein k -Algebrenhomomorphismus und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f \cdot g) &= \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g) \\ X_0^j \cdot \mathcal{H}(f + g) &= \mathcal{H}(f) + X_0^{\deg f - \deg g} \cdot \mathcal{H}(g). \end{aligned}$$

Insbesondere liegt $\mathcal{H}(f + g)$ nicht notwendigerweise im Ideal $(\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g))$.

Beweis: Sei $f = \sum_{i=0}^d f_i$ wie in der Definition.

(a) Es ist $\mathcal{D}(\mathcal{H}(f)) = \mathcal{D}\left(\sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i}\right) = \sum_{i=0}^d f_i = f$.

Sei nun F homogen vom Grad d . Schreibe F als

$$F = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i}.$$

Dann hat jedes f_i Grad i und sei $e = \deg \sum_{i=0}^d f_i$. Insbesondere ist $e \leq d$.
Damit:

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(F)) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^d f_i\right) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^e f_i\right) = \sum_{i=0}^e f_i X_0^{e-i} = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{e-i}.$$

Also ist $F = X_0^{d-e} \cdot \mathcal{H}(\mathcal{D}(F))$.

(b) Sei F homogen vom Grad d und $f := \mathcal{D}(F)$. Seien $x_0, \dots, x_n \in k$ mit $x_0 \neq 0$.
Dann gilt:

$$F(x_0, \dots, x_n) = x_0^d \cdot F\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

(c) \mathcal{D} ist die Auswertungsabbildung für $X_0 = 1$ und mit Skalarmultiplikation verträglich, damit also ein k -Algebrenhomomorphismus.

Seien $f = \sum_{i=0}^d f_i$ und $g = \sum_{i=0}^e g_i$, mit f_i bzw. g_i homogen vom Grad i . Dann ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g) &= \left(\sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i}\right) \left(\sum_{i=0}^e g_i X_0^{e-i}\right) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^k f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k} \\ \mathcal{H}(f \cdot g) &= \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^e f_i g_j\right) = \mathcal{H}\left(\sum_{k=0}^{d+e} \sum_{j=0}^k f_i g_{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^k f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k} \end{aligned}$$

da $f_i g_{k-i}$ Grad k hat. Also ist $\mathcal{H}(f \cdot g) = \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g)$.

Sei, ohne Einschränkung, $e \leq d$. Dann gilt für die Summe von f und g :

$$f + g = \sum_{i=0}^d (f_i + g_i) = \sum_{i=0}^{d-j} (f_i + g_i),$$

für ein $j \in \mathbb{N}_0$, denn eventuell heben sich Summanden weg. Es gilt also

$$\mathcal{H}(f + g) = \sum_{i=0}^{d-j} (f_i + g_i) X_0^{d-i-j}$$

und damit

$$X_0^j \mathcal{H}(f + g) = \mathcal{H}(f) + \sum_{i=0}^d g_i X_0^{d-i} = \mathcal{H}(f) + \sum_{i=0}^e g_i X_0^{d-i} = \mathcal{H}(f) + X_0^{d-e} \cdot \mathcal{H}(g),$$

da $g_i = 0$ für $i > e = \deg g$. Das zeigt die Behauptung. \square

II Projektive Varietäten

DEFINITION: Für ein Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$I^* = (\mathcal{H}(I)) = (\mathcal{H}(f) \mid f \in I)$$

das von den Homogenisierungen aller Polynome aus I erzeugte Ideal.

LEMMA 2.9: Seien $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und I^* wie oben, sowie $\varphi_0: \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ wie in Definition/Bemerkung 1.3 (b). Seien $\mathfrak{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $\mathfrak{V}(I^*) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die zugehörigen Varietäten. Dann gilt $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{V}(I^*)$.

Beweis: Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{V}(I) &\iff \forall f \in I: f(x) = 0 \\ &\iff \forall f \in I: F(1 : x_1 : \dots : x_n) = 0 \text{ für } F = \mathcal{H}(f) \\ &\iff \forall f \in I: F(\varphi_0(x)) = 0 \\ &\iff \varphi_0(x) \in \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{V}(I^*)$. □

PROPOSITION 2.10: Sei $\varphi_0: \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ wie vorher. Dann ist φ_0 ein Homöomorphismus auf \mathfrak{U}_0 .

Beweis: Wir zeigen, dass Bilder und Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Eine abgeschlossene Teilmenge von \mathfrak{U}_0 hat die Form $\mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$ mit einem homogenen Ideal J . Für eine solche sei $I = (\mathcal{D}(F) \mid F \in J, F \text{ homogen})$ und $I^* = (\mathcal{H}(I))$ wie vorher.

Dann gilt $J \subseteq I^*$, denn: Sei $F \in J$ homogen und $f = \mathcal{D}(F) \in I$ seine Dehomogenisierung. Dann gilt $F = X_0^e \mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) \in I^*$, also $\mathfrak{V}(J) \supseteq \mathfrak{V}(I^*)$.

Wir zeigen $\varphi_0^{-1}(\mathfrak{V}(J)) = \mathfrak{V}(I)$, also $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$. Lemma 2.9 sagt

$$\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0,$$

also wissen wir $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) \subseteq \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$. Seien umgekehrt

$$z = (1 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

und $f \in I$; sei dabei ohne Einschränkung f ein Erzeuger, also $f = \mathcal{D}(F)$ für ein $F \in J$. Es gilt dann $f(x_1, \dots, x_n) = F(1 : x_1 : \dots : x_n) = 0$, also $x \in \mathfrak{V}(I)$. Damit ist φ_0 stetig. Wegen Lemma 2.9 ist

$$\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0$$

eine abgeschlossene Teilmenge von \mathfrak{U}_0 , also ist φ_0^{-1} auch stetig. □

LEMMA 2.11: Sei wieder K algebraisch abgeschlossen, $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Radikalideal, φ_0 und I^* wie oben. Dann ist $\mathfrak{V}(I^*)$ die kleinste Varietät in $\mathbb{P}^n(K)$, die $\varphi_0(\mathfrak{V}(I))$ enthält.

Beweis: Wir zeigen: $\overline{\varphi_0(\mathfrak{V}(I))} = \mathfrak{V}(I^*)$. Aus Lemma 2.9 folgt $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) \subseteq \mathfrak{V}(I^*)$. Sei nun J ein homogenes Ideal mit $\mathfrak{V}(J) \supseteq \varphi_0(\mathfrak{V}(I))$. Wir zeigen $J \subseteq I^*$. Sei dazu $F \in J$ homogen und $f = \mathcal{D}(F)$ seine Dehomogenisierung. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{V}(I)$:

$$F(\varphi_0(x)) = f(x) = 0, \text{ also } f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I} = I.$$

Damit folgt $\mathcal{H}(f) \in I^*$, also $F = X_0^e \cdot \mathcal{H}(\mathcal{D}(F)) \in I^*$. \square

KOROLLAR 2.12: Sei K algebraisch abgeschlossen, $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ und $F = \mathcal{H}(f)$. Dann gilt $\overline{\varphi_0(\mathfrak{V}(f))} = \mathfrak{V}(F)$.

Beweis: Das folgt aus Lemma 2.11: sei $I = (f)$, dann ist $I^* = (F)$. \square

DEFINITION 2.13: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Die Menge

$$\tilde{V} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k) \mid (x_0 : \dots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$$

heißt *affiner Kegel* zu V .

BEISPIEL: Für $\mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist das wirklich ein Kegel.

PROPOSITION 2.14: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät.

- (a) Der affine Kegel \tilde{V} über V ist eine affine Varietät in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.
Genauer: ist $V = \mathfrak{V}^{\text{proj}}(\mathcal{F})$ für eine Menge $\mathcal{F} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$, die aus homogenen nichtkonstanten Polynomen besteht, dann gilt $\tilde{V} = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F})$ in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.
- (b) Sei k unendlich und V nichtleer. Dann gilt $\mathfrak{I}^{\text{aff}}(V) = \mathfrak{I}^{\text{proj}}(V)$.

Beweis: (a) Sei $V = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$. Falls \mathcal{F} ein vom Nullpolynom verschiedenes konstantes Polynom enthält, ist $V = \emptyset$ und damit $\tilde{V} = \{(0, \dots, 0)\}$, was eine affine Varietät ist. Sonst sei $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(K)$. Ist x der Nullpunkt, so liegt x sowohl in \tilde{V} als auch in $\mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F})$, da ein nichtkonstantes homogenes Polynom immer $(0, \dots, 0)$ als Nullstelle hat. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$x \in \mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F}) \iff \forall f \in \mathcal{F}: f(x_0, \dots, x_n) = 0 \iff (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{V}^{\text{proj}}(\mathcal{F}).$$

Also gilt $\mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F}) = \tilde{V}$.

- (b) Wir zeigen $\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(\tilde{V})$, falls $V \neq \emptyset$.

Sei zunächst $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom. Es gilt

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{I}(V) &\iff \forall (x_0 : \dots : x_n) \in V: f(x_0 : \dots : x_n) = 0 \\ &\iff \forall x \in \tilde{V} \setminus \{0\}: f(x) = 0 \\ &\iff f \in \mathfrak{I}(\tilde{V}). \end{aligned}$$

Wir benutzen hierbei, dass für ein $f \in \mathfrak{I}(V)$, das homogen und nicht konstant ist, $f(0) = 0$ gilt (falls $V \neq \emptyset$).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathfrak{I}(\tilde{V})$ ein homogenes Ideal ist. Dazu zeigen wir: Ist $f \in \mathfrak{I}(\tilde{V})$ mit

$$f = \sum_{i=0}^d f_i, \quad (f_i \text{ homogen von Grad } i)$$

dann gilt $f_i \in \mathfrak{I}(\tilde{V})$ für alle $i \in \{0, \dots, d\}$. Da mit einem $x \in \tilde{V}$ auch $\lambda x \in \tilde{V}$ für alle $\lambda \in k$ gilt, haben wir für alle $x \in \tilde{V}$:

$$0 = f(x) = f(\lambda x) = \sum_{i=0}^d f_i(\lambda x) = \sum_{i=0}^d \lambda^i f_i(x).$$

Wenn wir das als Polynom in λ auffassen, folgt $f_i(x) = 0$ für alle i , da k unendlich ist. Also ist $f_i \in \mathfrak{I}(\tilde{V})$ für alle i . \square

Wir können nun den projektiven Nullstellensatz beweisen.

Beweis von Proposition 2.6: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und I ein homogenes Ideal in $K[X_0, \dots, X_n]$.

- (b) Sei $I \neq K[X_0, \dots, X_n]$ und $V = \mathfrak{V}^{\text{proj}}(I) = \mathfrak{V}(I^{\text{homogen}}) \subseteq \mathbb{P}^n(K)$. Ist dann $V = \emptyset$, gilt, nach Proposition 2.14 (b), $\{(0, \dots, 0)\} = \tilde{V} = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(I^{\text{homogen}}) = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)$ und damit nach dem affinen Hilbertschen Nullstellensatz $\sqrt{I} = \mathfrak{I}(\mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)) = (X_0, \dots, X_n)$. Die umgekehrte Implikation ist klar.
- (a) Wenn $I = K[X_0, \dots, X_n]$, stimmt die Aussage. Sei also $I \neq K[X_0, \dots, X_n]$ und $\sqrt{I} \neq (X_0, \dots, X_n)$. Nach (b) gilt dann $\mathfrak{V}^{\text{proj}}(I) \neq \emptyset$, also, nach Korollar 2.12 und dem affinen Hilbertschen Nullstellensatz,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{I}(\tilde{V}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)) = \sqrt{I}. \quad \square$$

DEFINITION 2.15: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Dann heißt

$$k[V] := k[X_0, \dots, X_n] / \mathfrak{I}(V)$$

homogener Koordinatenring. $k[V]$ ist eine graduierte k -Algebra mit Graduierung

$$k[V]_d = k[X_0, \dots, X_n]_d / \mathfrak{I}(V) \cap k[X_0, \dots, X_n]_d.$$

3 Quasi-projektive Varietäten



DEFINITION 3.1: $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt *quasi-projektive Varietät*, wenn W offene Teilmenge einer projektiven Varietät ist.

BEMERKUNG 3.2: Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät. Dann gilt:

- (a) Jede offene Teilmenge $\widehat{W} \subseteq W$ ist Vereinigung affiner Varietäten, also

$$\widehat{W} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \text{ mit } U_\lambda \subseteq \mathfrak{U}_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\},$$

wobei die U_λ offen und die $\varphi_i^{-1}(U_\lambda)$ affin als abstrakte Varietät sind.

(b) W ist quasikompakt.

Beweis: (a) Wir identifizieren, via φ_i , die \mathfrak{U}_i mit $\mathbb{A}^n(k)$ und schreiben

$$\widehat{W} = \bigcup_{i=0}^n \widehat{W} \cap \mathfrak{U}_i.$$

Nun gilt die Aussage für die $\widehat{W} \cap \mathfrak{U}_i \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ nach Bemerkung 5.9 (c) und Beispiel 5.15 (a) aus Kapitel I, da die $\mathfrak{D}(f)$ eine Basis der Topologie bilden und affin als abstrakte Varietäten sind.

(b) Sei $W = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ eine offene Überdeckung. Dann gilt auch

$$W = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cap \mathfrak{U}_i.$$

Nach Bemerkung 5.9 (b) aus Kapitel I genügen aber für jedes i endlich viele offene Mengen, also genügen auch insgesamt endlich viele. \square

4 Reguläre Funktionen



Seien, wie bisher, k ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{U}_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}$ und $\varphi_i: \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$, $(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \cdots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n)$.

BEMERKUNG: Seien F, G homogene Polynome mit $\deg F = \deg G$. Dann ist $\frac{F}{G}$ wohldefiniert auf $\mathfrak{D}(G) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$.

DEFINITION 4.1: Seien $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät und $r: W \longrightarrow k$ eine Abbildung.

(a) Wir nennen r *regulär in* $p \in W$, wenn es eine offene Umgebung $U_p \subseteq W$ von p und homogene Polynome G und H mit $\deg G = \deg H$ und $G(z) \neq 0$ für alle $z \in U_p$ gibt, so dass

$$r = \frac{H}{G} \text{ auf } U_p.$$

(b) Wir nennen r *regulär*, wenn r regulär in jedem $p \in W$ ist.

BEMERKUNG 4.2: Sei $r: W \longrightarrow k$ eine Abbildung. Dann ist r genau dann regulär, wenn $r|_{W \cap \mathfrak{U}_i}$ regulär für jedes i ist, d.h. $r \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(W)}$ ist reguläre Funktion der quasi-affinen Varietät $\varphi_i^{-1}(W)$, definiert wie in Kapitel I, Definition 5.3 (a).

Beweis: Sei zunächst r regulär. Dann gibt es für jedes $p \in \varphi_i^{-1}(W)$ eine offene $U_{\varphi_i(p)}$ mit homogenen Polynomen G und H , so dass dort $r = \frac{G}{H}$ gilt. Dann gilt

$$r \circ \varphi_i = \frac{G \circ \varphi_i}{H \circ \varphi_i} = \frac{g}{h},$$

wobei g und h die Dehomogenisierungen bzgl. X_i von G bzw. H sind, also ist $r \circ \varphi_i$ regulär im Affinen.

Sei nun $q \in W$, ohne Einschränkung sei q schon in \mathfrak{U}_0 , also gibt es $p \in \varphi_0^{-1}(W)$ mit $\varphi_0(p) = q$. Nach Voraussetzung gibt es g und h , so dass $r \circ \varphi_0 = \frac{g}{h}$ auf einer Umgebung U_p von p . Dann ist dort aber schon

$$r = \frac{G}{H} \cdot \frac{X_0^{D-\deg G}}{X_0^{D-\deg H}},$$

wobei $D := \max\{\deg G, \deg H\}$ und G und H die Homogenisierungen von g bzw. h sind. Damit ist r regulär. \square

DEFINITION/BEMERKUNG 4.3: Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq W$ definieren wir

$$\mathcal{O}_W(U) := \{r: U \longrightarrow k \mid r \text{ ist regulär}\}.$$

- (a) $\mathcal{O}_W(U)$ ist eine k -Algebra.
- (b) $U \longmapsto \mathcal{O}_W(U)$ ist eine Garbe von k -Algebren (dabei: $\emptyset \longmapsto \mathcal{O}_W(\emptyset) = \{0\}$).



Ab jetzt: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Satz 5: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine projektive Varietät. Dann gilt:

- (a) V zusammenhängend $\implies \mathcal{O}_V(V) = K$.
- (b) Es sei $K[V] = K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{I}(V)$ der homogene Koordinatenring und $F \in K[V]$ homogen mit $\deg F \geq 1$. Dann gilt:

$$\mathcal{O}(\mathfrak{D}(F)) \cong (K[V]_F)_0 := \left\{ \frac{G}{F^k} \mid G \in K[V] \text{ homogen, } \deg G = k \cdot \deg F \right\}.$$

Wir nennen das homogene Lokalisierung.

Beweis: (b) Wir definieren eine Abbildung

$$\Psi: (K[V]_F)_0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{D}(F)), \quad \frac{G}{F^k} \longmapsto \left(z \longmapsto \frac{G(z)}{F^k(z)} \right).$$

Ψ ist wohldefiniert und injektiv, denn

$$\frac{G_1(z)}{F^n(z)} = \frac{G_2(z)}{F^m(z)} \quad \forall z \in \mathfrak{D}(F) \implies G_1 \cdot F^m = G_2 \cdot F^n \text{ auf } \mathfrak{D}(F).$$

Dann ist aber schon $(G_1 \cdot F^m - G_2 \cdot F^n) \cdot F = 0$ auf ganz V , also $\frac{G_1}{F^n} = \frac{G_2}{F^m}$ in $(K[V]_F)_0$.

Wir zeigen nun: Ψ ist auch surjektiv.

Sei dazu $r \in \mathcal{O}(\mathfrak{D}(F))$. Falls $\mathfrak{U}_i \cap V \neq \emptyset$ ist, nach Bemerkung 4.2, $r \circ \varphi_i$ auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_i = \mathfrak{D}(f_i)$ regulär, wobei f_i die Dehomogenisierung von F bzgl. X_i

ist. Jetzt sind wir im Affinen und nach Kapitel I, Korollar 5.11 (a), gibt es dort ein $g_i \in K[X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n]$ und $k_i \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$r \circ \varphi_i = \frac{g_i}{f_i^{k_i}}.$$

Diesen Ausdruck können wir wieder homogenisieren und eventuell mit einer X_i -Potenz multiplizieren und erhalten so

$$r|_{\mathcal{U}_i} = \frac{G_i}{F_i^{k_i} \cdot X_i^{e_i}}, \text{ mit } G_i \in K[X_0, \dots, X_n] \text{ und } e_i \in \mathbb{N}_0.$$

Da $\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{D}(F^k)$ können wir eventuell zu einer Potenz von F übergehen. Sei also ohne Einschränkung $k_i = 1$. Also ist

$$r = \frac{G_i}{X_i^{e_i} \cdot F} \text{ auf } \mathfrak{D}(F) \cap \mathcal{U}_i.$$

Insbesondere gilt $\frac{G_i}{X_i^{e_i} F} = \frac{G_j}{X_j^{e_j} F}$ auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j)$ und damit bereits

$$G_i \cdot X_j^{e_j} \cdot F \cdot X_j \cdot X_i = G_j \cdot X_i^{e_i} \cdot F \cdot X_j \cdot X_i \text{ auf ganz } V, \quad (*)$$

denn außerhalb von $\mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j) \cap \mathfrak{D}(F)$ ist der Ausdruck konstant 0.

Da F homogen mit $\deg F \geq 1$ ist, ist $F \in (X_0, \dots, X_n)$. Wir finden sogar ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $F^m \in (X_0^{e_0+1}, \dots, X_n^{e_n+1})$, denn es gilt $\deg F^m = m \cdot \deg F$, wir können also

$$F^m = \sum_i a_{\alpha^{(i)}} X_0^{\alpha_0^{(i)}} \cdots X_n^{\alpha_n^{(i)}} \text{ mit } \alpha_0^{(i)} + \cdots + \alpha_n^{(i)} = m \cdot \deg F$$

schreiben und dabei m so groß wählen, dass

$$m \cdot \deg F \geq \sum_{i=0}^n (e_i + 1).$$

Es gibt also ein j mit $\alpha_j^{(i)} \geq e_{j+1}$ und damit wird F^m von $X_j^{e_j+1}$ geteilt und liegt, wie behauptet, in dem Ideal.

Damit liegt F^{m+1} in $(F \cdot X_0^{e_0+1}, \dots, F \cdot X_n^{e_n+1})$, also finden wir $h_i \in K[X_0, \dots, X_n]$, so dass

$$F^{m+1} = \sum_{i=0}^n h_i \cdot F \cdot X_i^{e_i+1}$$

gilt. Wir setzen $G := \sum_{i=0}^n h_i G_i X_i$ und mit Hilfe von $(*)$ lässt sich

$$X_j \cdot F^{m+1} \cdot G_j = \sum_{i=0}^n X_j h_i F X_i^{e_i+1} G_j = \sum_{i=0}^n X_i h_i F X_j^{e_j+1} G_i = F \cdot G \cdot X_j^{e_j+1}$$

einsehen. Somit gilt, auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_j$, gerade

$$\frac{G}{F^{m+1}} = \frac{G_j}{X_j^{e_j} \cdot F} = r|_{\mathfrak{U}_j}.$$

Also ist, nach Bemerkung 4.2, $\Psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right) = r$, damit ist Ψ surjektiv und die Isomorphie ist gezeigt.

- (a) Ohne Einschränkung genügt es die Aussage nur für irreduzible V zu zeigen, denn: Sei

$$V = \bigcup_{i=1}^r V_i$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Wenn $f \in \mathcal{O}_V$ auf jedem V_i konstant ist, so ist es, da V als zusammenhängend vorausgesetzt war, schon auf ganz V konstant.

Sei also V irreduzibel. Dann ist $\mathfrak{I}(V)$ ein Primideal und $K[V]$ nullteilerfrei und demnach $L := \text{Quot}(K[V])$ ein Körper.

Sei $r \in \mathcal{O}_V(V)$. Definiere

$$f_i := r|_{\mathfrak{U}_i} \in \mathcal{O}_V(\mathfrak{U}_i) = (K[V]_{X_i})_0.$$

Also ist $f_i = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ mit G_i homogen vom Grad d_i . Wir können nun f_i als Element von L auffassen.

ZEIGE: f_i ist ganz über $K[V]$, d.h. $f_i^m + a_{m-1}f_i^{m-1} + \dots + a_0 = 0$ mit $a_j \in K[V]$.

Dann können wir das nämlich mit $X_i^{d_i m}$ multiplizieren und erhalten

$$G_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j G_i^j X_i^{d_i(m-j)} = 0.$$

Dabei hat G_i^m Grad $d_i \cdot m$ und auch $G_i^j X_i^{d_i(m-j)}$ Grad $d_i \cdot j + d_i(m-j) = d_i \cdot m$. Ohne Einschränkung haben also alle a_j Grad 0 und sind damit in K . Damit ist f_i ganz über K und da K algebraisch abgeschlossen ist, liegt es somit schon in K , ist also konstant.

Damit ist auch $r|_{\mathfrak{U}_i}$ konstant für jedes i und somit auch r .

Es bleibt zu zeigen: f_i ist ganz über $K[V]$.

Zunächst sieht man, dass die $\frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ alle in L das selbe Element definieren, denn

$$\frac{G_i}{X_i^{d_i}} = \frac{G_j}{X_j^{d_j}} \iff X_j^{d_j} G_i - G_j X_i^{d_i} = 0$$

auf $\mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j)$ und das liegt dicht in V , denn V ist irreduzibel. Damit sind die Ausdrücke nach Kapitel I, Bemerkung 5.13 (b), schon auf ganz V gleich.

Wir setzen also $f := f_i$ in L und zeigen, dass f ganz über $K[V]$ ist.

Sei dazu $d := d_0 + \cdots + d_n$, wobei $d_i := \deg G_i$. Wir zeigen noch:

- (i) $K[V]_d \cdot f^t \subseteq K[V]_d \forall t \in \mathbb{N}$, denn sind $\alpha_i \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = d$, so ist

$$X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n} \cdot f \in K[V]_d \cdot f$$

und sogar in $K[V]$, denn $f = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ und es gibt sicherlich ein i mit $\alpha_i \geq d_i$. Damit sehen wir

$$X_i^{\alpha_i} \cdot f = X_i^{\alpha_i} \cdot \frac{G_i}{X_i^{d_i}} = X_i^{\alpha_i - d_i} \cdot g_i$$

und $X_i^{\alpha_i - d_i} g_i$ hat gerade Grad α_i , insgesamt hat der Ausdruck also wieder Grad d , wir erhalten also

$$K[V]_d \cdot f \subseteq K[V]_d$$

und iterativ $K[V]_d f^t \subseteq K[V]_d$.

- (ii) $K[V][f] \subseteq \frac{1}{X_0^d} \cdot K[V]$, denn aus (i) folgt, dass insbesondere $X_0^d f^t \in K[V]$, also für alle $t \in \mathbb{N}$

$$f^t \in \frac{1}{X_0^d} \cdot K[V].$$

- (iii) Daraus folgt: f ist ganz über $K[V]$, denn $\frac{1}{X_0^d} K[V]$ ist ein endlich erzeugter $K[V]$ -Modul und aus Algebra II wissen wir, dass dann auch $K[V][f]$ als Untermodul endlich erzeugt ist und damit f ganz über $K[V]$ ist. \square

5 Morphismen



DEFINITION/BEMERKUNG 5.1: Seien $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, $W' \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ quasi-projektive Varietäten.

- (a) Eine Abbildung $f: W \longrightarrow W'$ heißt *Morphismus*, wenn es zu jedem $z \in W$, eine offene Umgebung $U_z \subseteq W$ von z und Polynome $F_0, \dots, F_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ vom gleichen Grad gibt, so dass für alle $y \in U_z$ gilt:

$$f(y) = (F_0(y) : \cdots : F_m(y))$$

- (b) Betrachte $f: \mathbb{P}^n(k) \supseteq W \longrightarrow W' \subseteq \mathbb{P}^m(k)$. Das liefert eine Abbildung

$$\mathbb{A}^n(k) \supseteq f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j \subseteq \mathbb{A}^m(k).$$

Jetzt gilt: f ist genau dann ein Morphismus, wenn für alle i, j mit

$$U_{ij} := f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \neq \emptyset$$

die Abbildung $f|_{U_{ij}}: U_{ij} \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j$ ein Morphismus von quasi-affinen Varietäten ist (siehe Definition/Bemerkung 5.14 in Kapitel I).

- (c) Morphismen $W \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ entsprechen bijektiv den regulären Funktionen.
- (d) Morphismen sind stetig.
- (e) Die quasi-projektiven Varietäten bilden mit den Morphismen eine Kategorie. Diese heißt \mathcal{Var}_k .

Beweis: (b) Sei zunächst f ein Morphismus. Dann kann man f lokal schreiben als (ohne Einschränkung: $i = 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= (F_0(1 : x_1 : \dots : x_n) : \dots : F_m(1 : x_1 : \dots : x_n)) \\ &= (f_0(x) : \dots : f_m(x)) = \left(\frac{f_0(x)}{f_j(x)}, \dots, \frac{f_{j-1}(x)}{f_j(x)}, \frac{f_{j+1}(x)}{f_j(x)}, \dots, \frac{f_m(x)}{f_j(x)} \right) \end{aligned}$$

wobei f_j die Dehomogenisierung von F_j nach X_0 bezeichnet.

Für die Rückrichtung weiß man, dass, nach Definition/Bemerkung 5.14 (d), f auf U_{ij} gegeben ist durch

$$f(y) = (r_1(y), \dots, r_m(y))$$

wobei $r_i = \frac{f_i}{g_i}$. Wir setzen $z = (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n)$. Damit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 : \frac{f_1(y)}{g_1(y)} : \dots : \frac{f_m(y)}{g_m(y)} \right) \\ &= (G_1(z) \cdot \dots \cdot G_m(z) X_0^{e_0} : F_1(z) X_0^{e_1} : \dots : F_m(z) X_0^{e_m}) \end{aligned}$$

wobei F_i und G_i die Homogenisierungen von f_i bzw. g_i bzgl. X_0 sind und die e_i so gewählt seien, dass am Ende alle Polynome denselben Grad haben.

- (c) Zu zeigen:

$$\{f: W \longrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^1(k) \mid f \text{ ist Morphismus}\} \longleftrightarrow \mathcal{O}(W).$$

Wir identifizieren \mathfrak{U}_0 mit k durch die Bijektion $\Psi: (x_0 : x_1) \longmapsto \frac{x_1}{x_0} \in k$. Als Zuordnung findet sich dann

$$f \longmapsto r := \Psi \circ f, \quad r \longmapsto f = \Psi^{-1} \circ r$$

Außerdem sehen wir: Ist f ein Morphismus, so gilt lokal: $f(z) = (F(z) : G(z))$. Also gilt lokal:

$$r(z) = \frac{G(z)}{F(z)},$$

also ist r regulär.

Ist umgekehrt r regulär, so gilt lokal: $r(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$. Damit haben wir

$$f(z) = \Psi^{-1}(r(z)) = (1, \frac{G(z)}{F(z)}) = (F(z) : G(z))$$

und f ist ein Morphismus.

(d) ZEIGE: Jeder Morphismus $f: W \longrightarrow W'$ ist stetig.

IDEE: Führe Stetigkeit zurück auf die affine Situation. Wir wissen, es gilt:

$$\bigcup_{i=0}^n \mathfrak{U}_i = \mathbb{P}^n, \quad \bigcup_{j=0}^m \mathfrak{U}_j = \mathbb{P}^m \quad \text{und} \quad f: \mathbb{P}^n \supseteq W \longrightarrow W' \subseteq \mathbb{P}^m.$$

Betrachte also

$$f_{ij} = f|_{U_{ij}}: U_{ij} = f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j =: W'_j \subseteq \mathfrak{U}_j \cong \mathbb{A}^m$$

Nach (b) sind die f_{ij} Morphismen im affinen Sinn und damit insbesondere stetig (siehe Proposition 2.10 und Kapitel I, Bemerkung 4.4).

Wir zeigen nun, dass U_{ij} offen in W ist: f ist lokal (auf einer offenen Umgebung U_z von z) gegeben durch

$$f(w) = (F_0(w) : \cdots : F_m(w)).$$

Also ist

$$U_{ij} \cap U_z = \{w \in U_z \cap \mathfrak{U}_i \mid f(w) \in \mathfrak{U}_j\} = \{w \in U_z \cap \mathfrak{U}_i \mid F_j(w) \neq 0\}$$

offen. Damit ist aber auch U_{ij} offen.

Insgesamt sehen wir: f ist auf jedem U_{ij} stetig, und deshalb auch insgesamt stetig.

(e) ist klar. □

KOROLLAR 5.2: (a) Für eine Abbildung $f: W \longrightarrow W'$ zwischen quasi-projektiven Varietäten gilt:

$$f \text{ ist ein Morphismus} \iff f \text{ ist stetig und für offenes } U \subseteq W', g \in \mathcal{O}(U) \text{ gilt:} \\ g \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)).$$

(b) Seien W_1 und W_2 affine Varietäten. Durch die Einbettungen

$$\begin{aligned} W_1 &\subseteq \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k) \\ W_2 &\subseteq \mathbb{A}^m(k) \hookrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^m(k) \end{aligned}$$

können wir sie als quasi-projektive Varietäten auffassen. Dann ist $f: W_1 \longrightarrow W_2$ genau dann ein Morphismus im Sinn von Definition/Bemerkung 5.1, wenn f auch ein Morphismus im Sinn von Definition 4.1 aus Kapitel I ist.

Beweis: (a) Die Richtung von links nach rechts folgt aus Definition/Bemerkung 5.1 (d) (Stetigkeit), Definition/Bemerkung 5.1 (c) (reguläre Abbildungen entsprechen Morphismen nach \mathbb{A}^1) sowie Definition/Bemerkung 5.1 (e) (Verkettung von Morphismen funktioniert).

Zur Rückrichtung: Nach den Voraussetzungen ist f_{ij} stetig und zieht reguläre Funktionen zu regulären Funktionen zurück. Nach Proposition 5.12 aus Kapitel I ist f_{ij} ein Morphismus und nach Definition/Bemerkung 5.1 (b) ist damit auch f ein Morphismus.

(b) Aus (a) folgt: Ist f ein Morphismus in der projektiven Welt, so ist f stetig und respektiert die Strukturgarbe. Wieder nach Proposition 5.12 aus Kapitel I ist f ein Morphismus im affinen Sinn. \square

BEISPIEL 5.3: (a) Sei k ein unendlicher Körper und der Morphismus f wie folgt gegeben:

$$f: \mathbb{P}^2 \setminus \{(0:0:1)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 : x_1)$$

Dann lässt sich f in $(0:0:1)$ nicht stetig fortsetzen.

Denn: Wir nehmen an, es gäbe $(r:s) \neq (0:0)$ mit $f(0:0:1) = (r:s)$. Dann müsste für $(\tilde{r}:\tilde{s}) \neq (r:s)$ die Menge $f^{-1}(\{(\tilde{r}:\tilde{s})\})$ abgeschlossen in \mathbb{P}^2 sein.

Aber: $f^{-1}(\{(\tilde{r}:\tilde{s})\}) = \{(\lambda\tilde{r}:\lambda\tilde{s}:1) \mid \lambda \in k \setminus \{0\}\} \cup \{(\tilde{r}:\tilde{s}:0)\}$. Also:

$$f^{-1}(\{(\tilde{r}:\tilde{s})\}) \cap \mathfrak{U}_2 \longleftarrow \{(\lambda\tilde{r}, \lambda\tilde{s}) \mid \lambda \in k \setminus \{0\}\} \subsetneq \{(\lambda\tilde{r}, \lambda\tilde{s}) \mid \lambda \in k\} \cong \mathbb{A}^1$$

Folglich enthält $\{(\lambda\tilde{r}, \lambda\tilde{s}) \mid \lambda \in k \setminus \{0\}\}$ unendlich viele Elemente und ist nicht isomorph zum Bild von \mathbb{A}^1 und damit nicht abgeschlossen in \mathbb{A}^2 . Also kann f nicht stetig auf ganz \mathbb{P}^2 sein.

(b) Sei $E := \mathfrak{V}(X_0X_2^2 - X_1^3 + X_1X_0^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$. Also gilt:

$$E \cap \mathfrak{U}_0 = \{(1:x_1:x_2) \in \mathfrak{U}_0 \mid x_2^2 - x_1^3 + x_1 = 0\} \longleftrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = x^3 - x\}$$

Weiter ist $E \setminus (E \cap \mathfrak{U}_0) = \{(0:0:1)\}$. Nun lässt sich

$$f: E \cap \mathfrak{U}_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 : x_1)$$

auf E in $(0:0:1)$ fortsetzen durch

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = \begin{cases} (x_0 : x_1), & \text{falls } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (0:0:1), \\ (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0), & \text{falls } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (1:0:0). \end{cases}$$

Das ist wohldefiniert, denn für $(x_0 : x_1 : x_2) \notin \{(0:0:1), (1:0:0)\}$ gilt:

$$(x_0 : x_1) = (x_0(x_2^2 + x_1x_0) : x_1(x_2^2 + x_1x_0)) = (x_1^3 : x_1x_2^2 + x_0x_1^2) = (x_1^2 : x_2^2 + x_0x_1)$$

Dabei wurde benutzt, dass der Punkt auf E liegt und $x_2^2 + x_1x_0 \neq 0$ sowie $x_1 \neq 0$.

Jetzt erhält man einen Morphismus $E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ „vom Grad 2“.

(c) Betrachte

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow W := \mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2)$$

f ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$g: \mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \begin{cases} (x_0 : x_1), & x_0 \neq 0, \\ (x_1 : x_2), & x_1 \neq 0, \end{cases}$$

Die Koordinatenringe dazu sind: $K[\mathbb{P}^1] = K[X_0, X_1]$ sowie

$$K[W] = K[\mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2)] = K[X_0, X_1, X_2] / (X_0X_2 - X_1^2).$$

Wir sehen: $K[W]$ ist nicht faktoriell, denn $\overline{X_1}^2 = \overline{X_0X_2}$.

Insbesondere sind $K[\mathbb{P}^1]$ und $K[W]$ nicht isomorph.

Folglich sind auch die affinen Kegel nicht isomorph, d.h. \mathbb{A}^2 und

$$\mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{A}^3$$

sind nicht isomorph.

(d) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto (cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0)$$

ein Automorphismus des \mathbb{P}^1 .

DEFINITION 5.4: Eine quasi-projektive Varietät $W \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt *affin*, wenn W isomorph zu einer affinen Varietät in einem $\mathbb{A}^m \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^m$ ist.

DEFINITION/BEMERKUNG 5.5: Sei K algebraisch abgeschlossen und $W \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine quasi-projektive Varietät.

(a) Eine *rationale Funktion* auf W ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f) , wobei U offen und dicht in W ist, $f \in \mathcal{O}(U)$ und

$$(U, f) \sim (U', f') \iff f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$$

(b) Ist W irreduzibel, so ist

$$K(W) := \text{Rat}(W) := \{f: W \dashrightarrow K \mid f \text{ ist rationale Funktion}\}$$

ein Körper. Dieser heißt *Funktionenkörper*.

II Projektive Varietäten

- (c) Ist W irreduzibel, so gilt für jede dichte, offene, affine Teilmenge U von W :

$$K(W) \cong \text{Quot}(\mathcal{O}(U))$$

- (d) Ist $W = V$ eine irreduzible projektive Varietät, so gilt:

$$K(V) \cong \text{Quot}^{\text{homogen}}(K[V]) := (K[V]_S)_0$$

mit $S := \{f \in K[V] \mid f \text{ ist homogen, } f \neq 0\}$. $K(V)$ ist der homogene Quotientenkörper, also:

$$(K[V]_S)_0 = \left\{ \frac{f}{g} \in \text{Quot}(K[V]) \mid f, g \text{ homogen, } \deg f = \deg g \right\}$$

Beweis: (c) Sei $U \subseteq W$ wie in der Behauptung gegeben. Betrachte

$$\text{Rat}(W) \longrightarrow \text{Rat}(U), \quad [(\tilde{U}, f)] \longmapsto [(U \cap \tilde{U}, f|_{U \cap \tilde{U}})].$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da U dicht in W ist. Außerdem ist sie nach Definition der Äquivalenzrelation auch injektiv. Jetzt folgt aus Definition/Bemerkung 6.1 in Kapitel I:

$$\text{Rat}(W) \cong \text{Rat}(U) = \text{Quot}(\mathcal{O}(U)).$$

- (b) Dass $K(W)$ ein Körper ist, folgt aus (c).
 (d) Die Abbildung

$$\text{Quot}^{\text{homogen}}(K[V]) \longrightarrow \text{Rat}(V), \quad \frac{f}{g} \longmapsto \left[\mathfrak{D}(g), x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \right]$$

ist ein Isomorphismus. □

DEFINITION/BEMERKUNG 5.6: Seien W_1, W_2 quasi-projektive Varietäten.

- (a) Eine *rationale Abbildung* $f: W_1 \dashrightarrow W_2$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U) , wobei $U \subseteq W_1$ offen und dicht, $f_U: U \longrightarrow W_2$ ein Morphismus ist und

$$(U, f_U) \sim (\tilde{U}, f_{\tilde{U}}) \iff f_U|_{U \cap \tilde{U}} = f_{\tilde{U}}|_{U \cap \tilde{U}}$$

- (b) f heißt *dominant*, wenn das Bild in W_2 für einen Repräsentanten (U, f_U) (und damit für alle) dicht ist.
 (c) Die Zuordnung $W \longmapsto K(W) = \text{Rat}(W)$ definiert eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible quasi-projektive} \\ \text{Varietäten mit dominanten} \\ \text{rationalen Abbildungen} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{endlich erzeugte} \\ \text{Körpererweiterungen } L/K \\ \text{mit } K\text{-Algebrenhomomorphismen} \end{array} \right\}$$

Beweis: (c) folgt aus dem Affinen (vgl. Satz 4) beziehungsweise Definition/Bemerkung 5.5.

Denn: Für ein $r: W_1 \dashrightarrow W_2$ erhalten wir durch die Wahl eines Repräsentanten, affines $U_2 \subseteq W_2$ und affines $U_1 \subseteq r^{-1}(U_2) \subseteq W_1$ und durch Einschränken von r eine Abbildung $U_1 \rightarrow U_2$.

Jeder Körper wird bis auf Isomorphie getroffen, denn: Aus der affinen Situation (vgl. Satz 4) wissen wir, dass es für jede endliche Körpererweiterung L/K eine affine Varietät U mit $K(U) \cong L$ gibt.

Fasse nun U als quasi-projektive Varietät auf. Der Funktor aus Satz 4 induziert ein Isomorphismus auf den Morphismenmengen.

$$\Phi(r: W_1 \dashrightarrow W_2) = \begin{cases} K(W_2) \longrightarrow K(W_1) \\ g \longmapsto g \circ r \end{cases}$$

Nach der Überlegung zu Beginn des Beweises entsprechen die rationalen Abbildungen zwischen W_1 und W_2 bijektiv den rationalen Abbildungen zwischen den entsprechenden affinen Varietäten und diese entsprechen nach Satz 4 den Morphismen zwischen $K(U_2)$ und $K(U_1)$. Nach Definition/Bemerkung 5.5 ist $K(U_2)$ isomorph zu $K(W_2)$ und genauso ist $K(U_1) \cong K(W_1)$. \square

6 Graßmann-Varietäten



Sei $G(d, n) := \{U \subseteq K^n \mid U \text{ ist Untervektorraum vom } K^n \text{ von Dimension } d\}$.

BEISPIEL: • $d = 1$: $G(1, n)$ entspricht dem $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.

- $d = n$: $G(n, n)$ ist einelementig.

Ziel: Wir wollen versuchen, $G(d, n)$ mit der Struktur einer projektiven Varietät zu versehen. Dafür brauchen wir eine „natürliche“ Einbettung in einen $\mathbb{P}^D(k)$.

DEFINITION/BEMERKUNG 6.1: Sei $1 \leq d \leq n$, $V = K^n$, $\bigwedge^d V$ die d -te äußere Potenz und

$$\mathbb{P}(V) := V \setminus \{0\} / \sim, \text{ wobei } w_1 \sim w_2 :\iff \exists \lambda \in K^\times \text{ mit } w_2 = \lambda w_1.$$

Dann ist die Abbildung

$$\Psi: G(d, n) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d V), \quad U = \langle u_1, \dots, u_d \rangle \longmapsto [u_1 \wedge \dots \wedge u_d]$$

wohldefiniert und injektiv.

ERINNERUNG: • $\bigwedge^d V$ hat die Basis $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\}$. Insbesondere ist $\dim \bigwedge^d V = \binom{n}{d}$.

- \wedge ist multilinear und alternierend, insbesondere gilt $v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0$, wenn $v_i = v_j$ für $i \neq j$. Genauer:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0 \iff v_1, \dots, v_d \text{ sind linear abhängig.}$$

II Projektive Varietäten

Beweis von Definition/Bemerkung 6.1: Sei v_1, \dots, v_d eine Basis von U . Sei $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_d$ eine andere Basis von U . Dann gibt es

$$\tilde{v}_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} v_j$$

mit $A := (a_{ij}) \in \text{GL}_d(K)$. Damit gilt aber

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_d &= \sum_{j=1}^d a_{1j} v_j \wedge \dots \wedge \sum_{j=1}^d a_{dj} v_j = \sum_{\sigma \in S_d} a_{1\sigma(1)} v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge a_{d\sigma(d)} v_{\sigma(d)} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_d} (-1)^\sigma \cdot \prod_{j=1}^d a_{j\sigma(j)} \right) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \det A \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_d \end{aligned}$$

(wobei $(-1)^\sigma$ das Signum von σ bedeutet), und da $\det A \neq 0$ ist, sind die beiden Punkte äquivalent, die Abbildung ist also wohldefiniert.

Für die Injektivität überlegen wir uns, dass $U = \{v \in V \mid v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0\}$ ist, wobei v_1, \dots, v_d eine Basis von U ist. Das ist so, denn es gilt:

$$\begin{aligned} v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0 &\iff v, v_1, \dots, v_d \text{ sind linear abhängig} \\ &\iff v \in \langle v_1, \dots, v_d \rangle = U, \end{aligned}$$

da v_1, \dots, v_d als Basis linear unabhängig sind. □

DEFINITION/BEMERKUNG 6.2: Sei $[w] \in \mathbb{P}(\bigwedge^d(V))$. Dann gilt

$$[w] \in \text{Bild } \Psi \iff \exists v_1, \dots, v_d \in V \text{ linear unabhängig mit } w = v_1 \wedge \dots \wedge v_d.$$

In diesem Fall heißt w *total zerlegbar*. Insbesondere gilt, wenn $w \wedge v_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, für die lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \bigwedge^{d+1} V, \quad \varphi_w: v \longmapsto w \wedge v,$$

dass $\dim(\text{Kern } \varphi_w) \geq d$.

LEMMA 6.3: Sei $d \geq 2$ und $w \in \bigwedge^d V$. Dann gilt:

- (a) $v \in \text{Kern } \varphi_w \iff \exists w' \in \bigwedge^{d-1} V$ mit $w = v \wedge w'$,
- (b) Seien $v_1, \dots, v_k \in V$ linear unabhängig. Dann gilt:

$$v_1, \dots, v_k \in \text{Kern } \varphi_w \iff \exists w' \in \bigwedge^{d-k} V \text{ mit } w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge w'.$$

- (c) $\dim(\text{Kern } \varphi_w) \leq d$,
- (d) $\dim(\text{Kern } \varphi_w) = d \iff w$ ist total zerlegbar.

Beweis: Die Aussagen (a), (c) und (d) folgen sofort aus (b). Es genügt also das zu zeigen. Die eine Implikation ist nach Definition von φ_w sofort klar.

Seien also $v_1, \dots, v_k \in \text{Kern } \varphi_w$. Diese ergänzen wir zu einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V mit

$$e_1 = v_1, \dots, e_k = v_k.$$

Für w finden wir also

$$w = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \\ \bar{i} = (i_1, \dots, i_d)}} \lambda_{\bar{i}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}.$$

Für $j \in \{1, \dots, k\}$ gilt dann $e_j \in \text{Kern } \varphi_w$, also:

$$0 = w \wedge e_j = \sum_{\bar{i}} \lambda_{\bar{i}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_j = \sum_{\substack{\bar{i} \\ j \notin \{i_1, \dots, i_d\}}} \lambda_{\bar{i}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_j$$

und das ist eine Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren. Also ist $\lambda_{\bar{i}} = 0$ für die $\bar{i} = (i_1, \dots, i_d)$, für die es ein solches j gibt, also wenn $\{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_d\} \neq \emptyset$ gilt. Damit $\lambda_{\bar{i}} \neq 0$ gelten kann, muss also $\{1, \dots, k\} \subseteq \{i_1, \dots, i_d\}$ gelten, also sind nur solche Summanden in unserer Darstellung von w relevant. Damit haben wir

$$w = \sum_{\bar{i}} \lambda_{\bar{i}} e_1 \wedge \dots \wedge e_k \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_d} = (e_1 \wedge \dots \wedge e_k) \wedge \left(\sum_{\bar{i}} \lambda_{\bar{i}} e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \right)$$

und $\left(\sum_{\bar{i}} \lambda_{\bar{i}} e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \right)$ liegt in $\bigwedge^{d-k} V$, ist also eine geeignete Wahl für w' . \square

PROPOSITION 6.4: Das Bild von Ψ ist in $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ abgeschlossen, d.h. Bild Ψ ist eine projektive Varietät.

Beweis: Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ von V . Dann finden wir

$$\mathcal{S}_d := \{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\}$$

als zugehörige Basis von $\bigwedge^d V$. Sei wieder, für $w \in \bigwedge^d V$,

$$\varphi_w: V \longrightarrow \bigwedge^{d+1} V, \quad v \longmapsto w \wedge v,$$

und $\mathcal{L}_w := (l_{ij}(w))_{i,j}$ die Abbildungsmatrix von φ_w bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{S}_{d+1} . Außerdem sind die l_{ij} linear in w .

Aus Definition/Bemerkung 6.2 und Lemma 6.3 folgt, dass

$$w \in \text{Bild } \Psi \iff \dim(\text{Kern } \varphi_w) \geq d \iff \text{Rang } \varphi_w \leq n-d \iff \det(l_{ij}(w))_{I,J} = 0,$$

für alle $|I| = |J| = n-d+1$, also alle $n-d+1$ -Minoren der Matrix 0 sind (d.h. wenn beliebige $n-d+1$ Zeilen bzw. Spalten linear abhängig sind).

Diese sind homogene Polynome in den Koordinaten von w (bzgl. \mathcal{S}_d) von Grad $n-d+1$. Bild Ψ ist Nullstelle von diesen und damit projektive Varietät. \square

