

13. Wegintegrale

Definition

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein *rektifizierbarer* Weg, $\Gamma := \Gamma_\gamma$ und $f = (f_1, \dots, f_n) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei *stetig*. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$; $\gamma_j \in BV[a, b]$ (12.1). $f_j \circ \gamma$ ist *stetig*. Ana I, 26.6 $\implies f_j \circ \gamma \in R_{\gamma_j}[a, b]$.

$$\int_{\gamma} f_j(x) dx_j := \int_a^b f_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \cdot dx &:= \int_{\gamma} f_1(x) dx_1 + \dots + f_n(x) dx_n := \int_{\gamma} f_1(x) dx_1 + \dots + \int_{\gamma} f_n(x) dx_n \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t)) d\gamma_1(t) + \dots + \int_a^b f_n(\gamma(t)) d\gamma_n(t). \end{aligned}$$

Wegintegral von f längs γ .

Aus Ana I, 26.3 folgt:

Satz 13.1 (Berechnung des Wegintegrals)

γ, Γ und f seien wie oben. γ sei stetig differenzierbar. Dann:

$$\int_{\gamma} f_j(x) dx_j = \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \quad (j = 1, \dots, n)$$

und

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Beispiel

$f(x, y, z) := (z, y, x)$, $\gamma(t) = (t, t^2, 3t)$, $t \in [0, 1]$. $f(\gamma(t)) = (3t, t^2, t)$, $\gamma'(t) = (1, 2t, 3)$, $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 3t + 2t^3 + 3t = 6t + 2t^3$.

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \int_0^1 (6t + 2t^3) dt = \frac{7}{2}.$$

Satz 13.2 (Rechnen mit Wegintegralen)

γ, Γ, f seien wie oben, $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig, $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei rektifizierbar und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

- $$(1) \int_{\gamma} (\xi f(x) + \eta g(x)) \cdot dx = \xi \int_{\gamma} f(x) \cdot dx + \eta \int_{\gamma} g(x) \cdot dx$$
- $$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma^{(1)}} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma^{(2)}} f(x) \cdot dx$$
- $$(3) \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$$
- $$(4) \left| \int_{\gamma} f(x) \cdot dx \right| \leq L(\gamma) \cdot \max\{\|f(x)\| : x \in \Gamma\}$$
- $$(5) \text{ Ist } \hat{\gamma} \sim \gamma \implies \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx.$$

Beweis

(1) klar

(2) Ana I, 26.1(3)

(3) nur für γ stetig differenzierbar. $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$, $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(b + a - t)) \cdot \gamma'(b + a - t)(-1)dt = (\text{subst. } \tau = b + a - t, d\tau = -dt) \\ &= \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = - \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = - \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

(4) Übung

(5) Sei $\hat{\gamma} = \gamma \circ h$, $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig und streng wachsend. $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$. Nur für γ und h stetig db. Dann ist $\hat{\gamma}$ stetig db.

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}} f(x) \cdot dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t)) \cdot h'(t)dt = (\text{subst. } \tau = h(t), d\tau = h'(t)dt) = \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Definition

γ, Γ seien wie immer in diesem Paragraphen. s sei die zu γ gehörende Weglängenfunktion und $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. 12.4 $\implies s$ ist wachsend $\xrightarrow{\text{Ana I}} s \in BV[a, b]$; $g \circ \gamma$ stetig $\xrightarrow{\text{Ana I, 26.6}} g \circ \gamma \in R_s[a, b]$.

$$\int_{\gamma} g(x)ds := \int_a^b g(\gamma(t))ds(t)$$

Integral bzgl. der Weglänge.**Satz 13.3 (Rechnen mit Integralen bzgl. der Weglänge)**Seien γ, g wie oben.

$$(1) \int_{\gamma^-} g(x)ds = \int_{\gamma} g(x)ds$$

$$(2) \text{ Ist } \gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_{\gamma} g(x) ds = \int_{\gamma^{(1)}} g(x) ds + \int_{\gamma^{(2)}} g(x) ds.$$

$$(3) \text{ Ist } \gamma \text{ stetig db} \implies \int_{\gamma} g(x) ds = \int_a^b g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Beispiel

$$g(x, y) = (1 + x^2 + 3y)^{1/2}, \quad \gamma(t) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1].$$

$$g(\gamma(t)) = (1 + t^2 + 3t^2)^{1/2} = (1 + 4t^2)^{1/2}, \quad \gamma'(t) = (1, 2t), \quad \|\gamma'(t)\| = (1 + 4t^2)^{1/2} \implies \int_{\gamma} g(x, y) ds = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \frac{7}{3}$$

Gegeben: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ rektifizierbare Wege, $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3), \dots, \gamma_{m-1}(b_{m-1}) = \gamma_m(a_m)$. $\Gamma := \Gamma_{\gamma_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_m}$.

$\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) := \{\gamma : \gamma \text{ ist ein rektifizierbarer Weg im } \mathbb{R}^n \text{ mit: } \Gamma_{\gamma} = \Gamma, L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m) \text{ und } \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \dots + \int_{\gamma_m} f(x) \cdot dx \text{ f\"ur jedes stetige } f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n\}$.

Ist $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, so sagt man γ entsteht durch **Aneinanderhängen** der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Satz 13.4 (Stetige Differenzierbarkeit der Aneinanderhängung)

$\gamma_1, \dots, \gamma_m$ seien wie oben. Dann: $\text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq \emptyset$.

Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ stetig differenzierbar, so existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

Beweis

O.B.d.A: $m = 2$.

Def. $h : [b_1, c] \rightarrow [a_2, b_2]$ linear wie folgt: $h(x) = px + q$, $h(b_1) = a_2$, $h(c) = b_2$. $\hat{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ h$. Dann: $\gamma_2 \sim \hat{\gamma}_2$. $\gamma := \gamma_1 \oplus \hat{\gamma}_2$. 12.2, 12.7, 13.2 $\implies \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. ■

Beispiel

In allen Beispielen sei $f(x, y) = (y, x - y)$ und $t \in [0, 1]$.

$$(1) \quad \gamma_1(t) = (t, 0), \quad \gamma_2(t) = (1, t).$$

Sei $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. Anfangspunkt von γ ist $(0, 0)$, Endpunkt von γ ist $(1, 1)$. Nachrechnen: $\int_{\gamma_1} f(x, y) \cdot d(x, y) = 0$, $\int_{\gamma_2} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$. Also: $\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

$$(2) \quad \gamma_1(t) = (0, t), \quad \gamma_2(t) = (t, 1).$$

Sei $\gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$, Anfangspunkt von γ ist $(0, 0)$, Endpunkt von γ ist $(1, 1)$. Nachrechnen: $\int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$

$$(3) \quad \gamma(t) = (t, t^3). \text{ Anfangspunkt von } \gamma \text{ ist } (0, 0), \text{ Endpunkt von } \gamma \text{ ist } (1, 1). \text{ Nachrechnen: } \int_{\gamma} f(x, y) \cdot d(x, y) = \frac{1}{2}$$

