

2. Topologische Begriffe

Definition

(a_n) sei eine Folge in \mathbb{C} .

- (1) (a_n) heißt **beschränkt** $\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) (a_n) heißt eine **Cauchy-Folge** (CF) : $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \ \forall n, m \geq n_0$
- (3) (a_n) heißt **konvergent** : $\iff \exists a \in \mathbb{C} : |a_n - a| \rightarrow 0$ ($\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$)
In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt (Übung) und heißt der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) . Man schreibt : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$
- (4) (a_n) heißt **divergent** : $\iff (a_n)$ konvergiert nicht.

Beispiel

$$a_n = \frac{1}{n} + i(1 + \frac{1}{n}); |a_n - i| = |\frac{1}{n} - i\frac{1}{n}| = \frac{|1-i|}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_n \rightarrow i$$

Wie in \mathbb{R} bzw. mit 1.3, zeigt man:

Satz 2.1

$(a_n), (b_n)$ seien Folgen in $\mathbb{C}; a, b \in \mathbb{C}$

- (1) (a_n) konvergent $\Rightarrow a_n$ ist beschränkt.
- (2) (a_n) konvergent : $\iff (\operatorname{Re} a_n), (\operatorname{Im} a_n)$ sind konvergent. In diesem Fall gilt $\lim a_n = \lim \operatorname{Re} a_n + i \lim \operatorname{Im} a_n$
- (3) Es gelte $(a_n) \rightarrow a, (b_n) \rightarrow b$. Dann:
 $a_n + b_n \rightarrow a + b, a_n b_n \rightarrow ab, \bar{a}_n \rightarrow \bar{a}, |a_n| \rightarrow |a|$
Ist $a \neq 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \ \forall n \geq m$ und $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$
Ist a_{n_k} eine Teilfolge (TF) von $(a_n) \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$
- (4) Ist (a_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ enthält eine konvergente TF (**Bolzano-Weierstraß**)
- (5) (a_n) ist eine CF $\iff (a_n)$ ist konvergent (**Cauchy Kriterium**)

Definition

(a_n) sei eine Folge in \mathbb{C} und $s_n := \sum_{i=1}^n a_i \ n \in \mathbb{N}$. (s_n) heißt eine **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent/divergent $\iff (s_n)$ konvergent/divergent. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so schreibt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Beispiel (Geometrische Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \dots \ (z \in \mathbb{C})$. Wie in \mathbb{R} zeigt man:

2. Topologische Begriffe

- (1) $1 + z + \dots + z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & , \text{ falls } z \neq 1 \\ n+1 & , \text{ falls } z = 1 \end{cases}$
- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergent $\iff |z| < 1$. In diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Definition

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent** : $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Wörtlich wie in \mathbb{R} beweist, bzw. formuliert man:

Satz 2.2

(a_n) sei eine Folge in \mathbb{C}

- (1) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$
- (2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
- (3) Es gelten Cauchy Kriterium, Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium und der Satz über das Cauchyprodukt.

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$

- (1) $U_{\epsilon}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$ **ϵ -Umgebung von z_0** oder **offene Kreisscheibe** von z_0 mit Radius ϵ
 $\bar{U}_{\epsilon}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$ (**abgeschlossene Kreisscheibe** von z_0 mit Radius ϵ)
 $\dot{U}_{\epsilon}(z_0) := U_{\epsilon}(z_0) \setminus \{z_0\}$ (**punktierte Kreisscheibe**)
- (2) $z_0 \in A$ heißt **innerer Punkt von A** : $\iff \exists \epsilon > 0 : U_{\epsilon}(z_0) \subseteq A$
 $A^{\circ} := \{z \in A | z \text{ innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere von A**. Klar ist: $A^{\circ} \subseteq A$
 A heißt **offen** : $\iff A = A^{\circ}$
- (3) A heißt **abgeschlossen** : $\iff \mathbb{C} \setminus A$ ist offen.
- (4) A heißt **beschränkt** : $\iff \exists c \geq 0 : |a| \leq c \ \forall a \in A$
- (5) A heißt **kompakt** : $\iff A$ ist beschränkt und abgeschlossen.
- (6) z_0 heißt ein **Häufungspunkt** von A : $\iff \forall \epsilon > 0 : \dot{U}_{\epsilon}(z_0) \cap A \neq \emptyset$.
 $\bar{A} := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist HP von } A\} \cup A$ heißt die **Abschließung** von A
- (7) z_0 heißt ein **Randpunkt** von A
: $\iff \forall \epsilon > 0 : U_{\epsilon}(z_0) \cap A \neq \emptyset$ und $U_{\epsilon}(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$
 $\partial A := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist Randpunkt von } A\}$ wird als **Rand von A** bezeichnet

Wie in \mathbb{R} zeigt man:

Satz 2.3

- (1) A heißt abgeschlossen $\iff A = \bar{A} \iff$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A gehört zu A .
- (2) z_0 ist HP von $A \iff \exists$ Folge (z_n) in $A \setminus \{z_0\} : z_n \rightarrow z_0$
- (3) A ist kompakt : \iff jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge deren Limes zu A gehört
 \iff jede offene Überdeckung von A enthält eine endliche Überdeckung von A .

