

§ 12.

Wege im \mathbb{R}^n

Definition

- (1) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig. Dann heißt γ ein **Weg** im \mathbb{R}^n .
- (2) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg. $\Gamma_\gamma := \gamma([a, b])$ heißt der zu γ gehörende **Bogen**, $\Gamma_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.
 3.3 $\implies \Gamma_\gamma$ ist beschränkt und abgeschlossen. $\gamma(a)$ heißt der **Anfangspunkt** von γ , $\gamma(b)$ heißt der **Endpunkt** von γ . $[a, b]$ heißt **Parameterintervall** von γ .
 γ heißt **geschlossen** : $\iff \gamma(a) = \gamma(b)$.
- (3) $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$ heißt der zu γ **inverse Weg**.
 Beachte: $\gamma^- \neq \gamma$, aber $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma^-}$.

Beispiele:

- (1) Sei $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$, $t \in [0, 1]$. $\Gamma_\gamma = S[x_0, y_0]$
- (2) Sei $r > 0$ und $\gamma(t) := (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
 $\Gamma_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} = \partial U_r(0)$
 $\tilde{\gamma}(t) := (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 4\pi]$. $\tilde{\gamma} \neq \gamma$, aber $\Gamma_{\tilde{\gamma}} = \Gamma_\gamma$.
- (3) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\gamma(t) := (t, f(t))$ ($t \in [a, b]$). Dann: $\Gamma_\gamma = \text{Graph von } f$.

Erinnerung: \mathfrak{Z} ist die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg. Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$.

$$L(\gamma, Z) := \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

Übung: Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ und gilt $Z_1 \subseteq Z_2 \implies L(\gamma, Z_1) \leq L(\gamma, Z_2)$

γ heißt **rektifizierbar** (rb) : $\iff \exists M \geq 0 : L(\gamma, Z) \leq M \ \forall Z \in \mathfrak{Z}$. In diesem Fall heißt $L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$ die **Länge** von γ .

Ist $n = 1$, so gilt: γ ist rektifizierbar $\iff \gamma \in \text{BV}[a, b]$. In diesem Fall: $L(\gamma) = V_\gamma([a, b])$.

Satz 12.1 (Rektifizierbarkeit und Beschränkte Variation)

Sei $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg. γ ist rektifizierbar $\iff \eta_1, \dots, \eta_n \in \text{BV}[a, b]$.

Beweis

Sei $Z = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathfrak{Z}$ und $J = \{1, \dots, n\}$.

$|\eta_j(t_k) - \eta_j(t_{k-1})| \stackrel{1.7}{\leq} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \stackrel{1.7}{\leq} \sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})|$. Summation über $k \implies V_{\eta_j} \leq L(\gamma, Z) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^n |\eta_\nu(t_k) - \eta_\nu(t_{k-1})| = \sum_{\nu=1}^n V_{\eta_\nu}(Z) \implies$ Behauptung \blacksquare

Übung: γ ist rektifizierbar $\iff \gamma^-$ ist rektifizierbar. In diesem Fall: $L(\gamma) = L(\gamma^-)$

Summe von Wegen: Gegeben: $a_0, a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$, $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_l$ und Wege $\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k = 1, \dots, l$) mit $\gamma_k(a_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$ ($k = 1, \dots, l-1$). Definiere $\gamma : [a_0, a_l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\gamma(t) := \gamma_k(t)$, falls $t \in [a_{k-1}, a_k]$. γ ist ein Weg im \mathbb{R}^n , $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1} \cup \Gamma_{\gamma_2} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_l}$. γ heißt die Summe der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ und wird mit $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_l$ bezeichnet.

Bemerkung: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg und $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}$ und $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ ($k = 1, \dots, m$) $\implies \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$. Aus Analysis I, 25.1(7) und 12.1 folgt:

Satz 12.2 (Summe von Wegen)

Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$, so gilt: γ ist rektifizierbar $\iff \gamma_1, \dots, \gamma_m$ sind rektifizierbar. In diesem Fall: $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_m)$

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Sei $t \in (a, b]$. Dann: $\gamma|_{[a, t]}$ ist rektifizierbar (12.2).

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma|_{[a, t]}), & \text{falls } t \in (a, b] \\ 0, & \text{falls } t = a \end{cases}$$

heißt die zu γ gehörende **Weglängenfunktion**.

Satz 12.3 (Eigenschaften der Weglängenfunktion)

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Dann:

- (1) $s \in C[a, b]$
- (2) s ist wachsend.

Beweis

(1) **In der großen Übung**

(2) Sei $t_1, t_2 \in [a, b]$ und $t_1 < t_2$. $\gamma_1 := \gamma|_{[a, t_1]}$, $\gamma_2 := \gamma|_{[t_1, t_2]}$, $\gamma_3 := \gamma|_{[a, t_2]}$. Dann $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$.
 $12.2 \implies \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind rektifizierbar und $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t_2)} = \underbrace{L(\gamma_1)}_{s(t_1)} + \underbrace{L(\gamma_2)}_{\geq 0} \implies s(t_2) \geq s(t_1)$. \blacksquare

Satz 12.4 (Rechenregeln für Wegintegrale)

Sei $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_n \in R[a, b]$.

$$\int_a^b f(t) dt := \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right) \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

Dann:

(1)

$$x \cdot \int_a^b f(t) dt = \int_a^b (x \cdot f(t)) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(2)

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Beweis

(1) Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \implies$

$$x \cdot \int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_a^b f_j(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n x_j f_j(t) \right) dt = \int_a^b (x \cdot f(t)) dt$$

(2) $y := \int_a^b f(t) dt$. O.B.d.A: $y \neq 0$. $x := \frac{1}{\|y\|} y \implies \|x\| = 1, y = \|y\| x$. $\|y\|^2 = y \cdot$

$$y = \|y\| (x \cdot y) = \|y\| \left(x \cdot \int_a^b f(t) dt \right) = \|y\| \int_a^b (x \cdot f(t)) dt \leq \|y\| \int_a^b \underbrace{|x \cdot f(t)|}_{\leq \|x\| \|f(t)\| = \|f(t)\|} dt \leq$$

$$\|y\| \int_a^b \|f(t)\| dt$$

■

Satz 12.5 (Eigenschaften stetig differenzierbarer Wege)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein stetig differenzierbarer Weg. Dann:

(1) γ ist rektifizierbar

(2) Ist s die zu γ gehörende Weglängenfunktion, so ist $s \in C^1[a, b]$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \quad \forall t \in [a, b]$

(3) $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

Beweis

(1) $\gamma = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\eta_j \in C^1[a, b] \xrightarrow{A1,25.1} \eta_j \in BV[a, b] \xrightarrow{12.1} \gamma$ ist rektifizierbar.

(2) Sei $t_0 \in [a, b)$. Wir zeigen:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \|\gamma'(t_0)\| \quad (t \rightarrow t_0+0). \quad (\text{analog zeigt man: } \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \|\gamma'(t_0)\| \quad (t \rightarrow t_0-0)).$$

Sei $t \in (t_0, b]$; $\gamma_1 := \gamma|_{[a, t_0]}$, $\gamma_2 := \gamma|_{[t_0, t]}$, $\gamma_3 := \gamma|_{[a, t]}$. Dann: $\gamma_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ und $\underbrace{L(\gamma_3)}_{=s(t)} =$

$$\underbrace{L(\gamma_1)}_{=s(t_0)} + L(\gamma_2) \implies s(t) - s(t_0) = L(\gamma_2) \quad (I).$$

$\tilde{Z} := \{t_0, t\}$ ist eine Zerlegung von $[t_0, t] \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$

Definition: $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $F(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$. 2.Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\implies F$ ist differenzierbar und $F'(t) = \|\gamma'(t)\| \forall t \in [a, b]$. Sei $Z = \{\tau_0, \dots, \tau_m\}$ eine beliebige Zerlegung von $[t_0, t]$.

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \gamma'(\tau) d\tau = \left(\dots, \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \eta'_k(\tau) d\tau, \dots \right) \stackrel{A1}{=} (\dots, \eta_k(\tau_j) - \eta_k(\tau_{j-1}), \dots) = \gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})$$

$$\implies \|\gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})\| \stackrel{12.4}{\leq} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \|\gamma'(\tau)\| d\tau. \text{ Summation } \implies L(\gamma_2, Z) \leq \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = F(t) - F(t_0) \implies L(\gamma_2) \leq F(t) - F(t_0) \text{ (III).}$$

$$(I), (II), (III) \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \stackrel{(II)}{\leq} L(\gamma_2) \stackrel{(I)}{=} s(t) - s(t_0) \stackrel{(III)}{\leq} F(t) - F(t_0)$$

$$\implies \underbrace{\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} \|\gamma'(t_0)\|} \leq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leq \underbrace{\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} F'(t_0) = \|\gamma'(t_0)\|}$$

$$(3) L(\gamma) = s(b) = s(b) - s(a) \stackrel{AI}{=} \int_a^b s'(t) dt \stackrel{(2)}{=} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad \blacksquare$$

Beispiele:

$$(1) x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0) \ (t \in [0, 1]). \ \gamma'(t) = y_0 - x_0 \implies L(\gamma) = \int_0^1 \|y_0 - x_0\| dt = \|y_0 - x_0\|.$$

$$(2) \text{ Sei } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und } \gamma(t) := (t, f(t)), t \in [a, b]. \ \gamma \text{ ist ein Weg im } \mathbb{R}^2. \ \gamma \text{ ist rektifizierbar } \iff f \in \text{BV}[a, b]. \ \Gamma_\gamma = \text{Graph von } f. \text{ Jetzt sei } f \in C^1[a, b] \xrightarrow{12.5} L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt.$$

$$(3) \gamma(t) := (\cos t, \sin t) \ (t \in [0, 2\pi]). \ \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t). \ \|\gamma'(t)\| = 1 \ \forall t \in [0, 2\pi] \xrightarrow{12.5} s'(t) = 1 \ \forall t \in [0, 2\pi] \implies s(t) = t \ \forall t \in [0, 2\pi] \text{ (Bogenmaß). Winkelmaß: } \varphi := \frac{180}{\pi} t. L(\gamma) = 2\pi.$$

Definition

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein Weg.

$$(1) \gamma \text{ heißt } \mathbf{st\ddot{u}ckweise \text{ stetig differenzierbar}} : \iff \exists z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z} \text{ mit: } \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \text{ sind stetig differenzierbar } (k = 1, \dots, m) \iff \exists \text{ stetig differenzierbare Wege } \gamma_1, \dots, \gamma_l : \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l.$$

$$(2) \gamma \text{ heißt } \mathbf{glatt} : \iff \gamma \text{ ist stetig differenzierbar und } \|\gamma'(t)\| > 0 \ \forall t \in [a, b].$$

$$(3) \gamma \text{ heißt } \mathbf{st\ddot{u}ckweise \text{ glatt}} : \iff \exists \text{ glatte Wege } \gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_l$$

Aus 12.2 und 12.5 folgt:

Satz 12.6 (Rektifizierbarkeit von Wegsummen)

Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_l$ stückweise stetig differenzierbar, mit stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_l \implies \gamma$ ist rektifizierbar und $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_l)$.

Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg. γ heißt eine **Parameterdarstellung** von Γ_γ .

Beispiele:

- (1) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n, \gamma_1(t) := x_0 + t(y_0 - x_0) \ t \in [0, 1], \gamma_2(t) := \gamma_1^-(t) \ t \in [0, 1], \gamma_3(t) := x_0 + 7t(y_0 - x_0) \ t \in [0, \frac{1}{7}]$. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind Parameterdarstellungen von $S[x_0, y_0]$.
- (2) $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), (t \in [0, 2\pi]), \gamma_2(t) := (\cos t, \sin t), (t \in [0, 4\pi])$. γ_1, γ_2 sind Parameterdarstellungen von $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Definition

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien Wege.

γ_1 und γ_2 heißen **äquivalent**, in Zeichen $\gamma_1 \sim \gamma_2 : \iff \exists h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ stetig und streng wachsend, $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$ und $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t)) \ \forall t \in [a, b]$ (also $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$). h heißt eine **Parametertransformation** (PTF). $\text{Analysis 1} \implies h([a, b]) = [\alpha, \beta] \implies \Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$. Es gilt: $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h^{-1} \implies \gamma_2 \sim \gamma_1$. „ \sim “ ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiele:

- (1) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seien wie in obigem Beispiel (1). $\gamma_1 \sim \gamma_3, \gamma_1 \sim \gamma_2$.
- (2) γ_1, γ_2 seien wie in obigem Beispiel (2). $\gamma_1 \approx \gamma_2$, denn $L(\gamma_1) = 2\pi \neq 4\pi = L(\gamma_2)$

Satz 12.7 (Eigenschaften der Parametertransformation)

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien äquivalente Wege und $h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ eine Parametertransformation.

- (1) γ_1 ist rektifizierbar $\iff \gamma_2$ ist rektifizierbar. In diesem Falle: $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$
- (2) Sind γ_1 und γ_2 glatt $\implies h \in C^1[a, b]$ und $h' > 0$.

Beweis

(2) **In den großen Übungen.**

- (1) Es genügt zu zeigen: Aus γ_2 rektifizierbar folgt: γ_1 ist rektifizierbar und $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$.
Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z} \implies \tilde{Z} := \{h(t_0), \dots, h(t_m)\}$ ist eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$.

$$L(\gamma_1, Z) = \sum_{j=1}^m \|\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^m \|\gamma_2(h(t_j)) - \gamma_2(h(t_{j-1}))\| = L(\gamma_2, \tilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$$

$\implies \gamma_1$ ist rektifizierbar und $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$. ■

Weglänge als Parameter Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein *glatter* Weg. 12.5 $\implies \gamma$ ist rb. $L := L(\gamma)$. 12.5 $\implies s \in C^1[a, b]$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \forall t \in [a, b]$. s ist also *streng wachsend*. Dann gilt: $s([a, b]) = [0, L]$, $s^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$ ist streng wachsend und stetig db. $(s^{-1})'(\sigma) = \frac{1}{s'(t)}$ für $\sigma \in [0, L]$, $s(t) = \sigma$.

Definition

$\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{\gamma}(\sigma) := \gamma(s^{-1}(\sigma))$, also $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$; $\tilde{\gamma}$ ist ein Weg im \mathbb{R}^n und $\tilde{\gamma} \sim \gamma$; $\Gamma_{\gamma} = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$.

12.7 $\implies \tilde{\gamma}$ ist rb, $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) = L$, $\tilde{\gamma}$ ist stetig db. $\tilde{\gamma}$ heißt Parameterdarstellung von Γ_{γ} mit der Weglänge als Parameter. Warum?

Darum: Sei \tilde{s} die zu $\tilde{\gamma}$ gehörende Weglängenfunktion. $\forall \sigma \in [0, L] : \tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma))$. Sei $\sigma \in [0, L]$, $t := s^{-1}(\sigma) \in [a, b]$, $s(t) = \sigma$.

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = (s^{-1})'(\sigma) \cdot \gamma'(s^{-1}(\sigma)) = \frac{1}{s'(t)} \gamma'(t) \stackrel{12.5}{=} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \implies \|\gamma'(\sigma)\| = 1 \quad (\implies \tilde{\gamma} \text{ ist glatt}).$$

$$\tilde{s}'(\gamma) \stackrel{12.5}{=} \|\gamma'(\sigma)\| = 1 \stackrel{\tilde{s}(0)=0}{\implies} \tilde{s}(\sigma) = \sigma.$$

Also: $\|\tilde{\gamma}'(\sigma)\| = 1$, $\tilde{s}(\sigma) = \sigma \forall \sigma \in [0, L]$.

Beispiel

$\gamma(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 1]$; γ ist stetig db; Nachrechnen: $\|\gamma'(t)\| = e^t \forall t \in [0, 1] \implies \gamma$ ist glatt.

$$s'(t) \stackrel{12.5}{=} \|\gamma'(t)\| = e^t \implies s(t) = e^t + c \implies 0 = s(0) = 1 + c \implies c = -1, \quad s(t) = e^t - 1 \quad (t \in [0, 1]) \implies L = L(\gamma) = s(1) = e - 1. \quad e^t = 1 + s(t), \quad t = \log(1 + s(t)).$$

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma)) = \gamma(\log(1 + \sigma)) = \frac{1+\sigma}{\sqrt{2}}(\cos(\log(1 + \sigma)), \sin(\log(1 + \sigma))), \quad \sigma \in [0, e - 1].$$