

## 2. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

31. Oktober 2007

### Nachtrag

$F$  heißt Faserprodukt von  $A$  und  $B$  über  $S$ ,  $:\Leftrightarrow$  wenn für jede Menge  $M$  und jedes Paar von Abb.  $g_A, g_B$  nach  $A$  bzw.  $B$  mit  $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$  genau eine Abb.  $h : M \rightarrow F$  ex. mit  $g_A = \pi_a \circ h, g_B = \pi_B \circ h$ .

### Aufgabe 1

$(X, d), (Y, e)$  metr. Räume,  $f_2 : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$  gegeben durch ÜB  
Behauptung:  $f_2$  ist Metrik.

- Symmetrie: klar
- Definitheit: klar, da  $d, e$  Metriken.
- Dreiecksungleichung: Sei  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$   
$$\Rightarrow f_2((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = (d(x_1, x_3)^2 + e(y_1, y_3)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left( (d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3))^2 + (e(y_1, y_2) + e(y_2, y_3))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (d(x_1, x_2)^2 + e(y_1, y_2)^2)^{\frac{1}{2}} + (d(x_2, x_3)^2 + e(y_2, y_3)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow f_2$  ist Metrik.

2te Metrik

- Symmetrie: klar
- Definitheit: klar
- Dreiecksungl. Sei  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$   
$$\Rightarrow f_{\infty}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = \max(d(x_1, x_3), e(y_1, y_3))$$
$$\leq \max(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), e(y_1, y_2) + e(y_2, y_3))$$
$$\leq \max(d(x_1, x_2), e(y_1, y_2)) + \max(d(x_2, x_3), e(y_2, y_3))$$

$\Rightarrow f_{\infty}$  ist Metrik.

Gesucht:  $c > 0$  mit:  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y : \frac{1}{c} f_2(\dots) \leq f_{\infty}(\dots) \leq c f_2(\dots)$ .

z.B.  $\sqrt{2}$  erfüllt das, denn: Seien  $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , dann gilt

- $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\max(x,y)^2 + \max(x,y)^2)^{\frac{1}{2}} = (2\max(x,y)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\max(x,y)$   
 $\Rightarrow (1)$
- $\max(x,y) = \sqrt{\max(x,y)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (2)$

### Aufgabe 2

Definiere  $D := X \uplus Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$

Disjunkte Vereinigung von  $X$  und  $Y$ .

$f : X \rightarrow D, x \mapsto (x, 0)$

$g : Y \rightarrow D, y \mapsto (y, 1)$ .

Definiere  $c : D \rightarrow Z$  durch  $m \mapsto \begin{cases} k(x) & , \text{ falls } m = (x, 0) \\ l(y) & , \text{ falls } m = (y, 1) \end{cases}$

$c$  erfüllt das Gewünschte. Soll gelten:

$\forall x \in X : c(f(x)) = k(x)$

$\forall y \in Y : c(g(y)) = l(y)$ , dann muss nach Def. von  $f, g$  gelten:

$c((x, 0)) = k(x)$

$c((y, 1)) = l(y)$ .

Seien  $D_1, D_2$  Mengen mit obiger Eigenschaft

$\exists! c_1 : D_1 \rightarrow D_2 : f_2 = c_1 \circ f_1$

$\Rightarrow \begin{matrix} g_2 = c_1 \circ g_1 \\ \exists! c_2 : D_2 \rightarrow D_1 : f_1 = c_2 \circ f_2 \\ g_2 = c_1 \circ g_1 \end{matrix}$

$\Rightarrow c_2 \circ c_1$  ist Abb. mit  $c_2 \circ c_1 \circ f_1 = f_1, c_2 \circ c_1 \circ g_1 = g_1$

$\Rightarrow c_2 \circ c_1 = \text{id}_{D_1}$  genauso  $c_1 \circ c_2 = \text{id}_{D_2}$

$c_1$  ist Bijektion zw.  $D_1$  und  $D_2$ , und zwar die einzig sinnvolle.

### Aufgabe 3

Beweis:

Nachrechnen:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet z = z$

$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \right) \bullet z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \bullet z \right)$

Noch zu zeigen:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z \in L \setminus K$  für alle  $z \in L \setminus K$ .

Wäre  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = \frac{az+b}{cz+d} = k \in K$  dann wäre das äquivalent zu

$(a - ck)z = dk - b \Leftrightarrow a - ck = 0 = dk - b \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

lin. abh. über  $K \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin \text{GL}_2(K)$

Sei  $K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}$ , dann ist die Operation transitiv, denn:

Alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  liegen in der Bahn von  $i$ .

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , dann ist  $\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{yi+x}{1} = x + iy = z$ .

Welche Elemente aus  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  haben Fixpunkte in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ?

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Fall  $c \neq 0$ . Dann gilt  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z$   
 $\Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Mitternachtsformel: Diese Gleichung hat

- (i) 1 reelle Lösung, falls  $(a-d)^2 + 4bc = 0$
- (ii) 2, reelle Lösungen, falls  $(a-d)^2 + 4bc > 0$
- (iii) 2 echt komplexe Lösungen, falls  $(a-d)^2 + 4bc < 0$
- (iii)  $\Leftrightarrow \text{Spur}(A)^2 < 4 \det(A)$

2. Fall  $c = 0$

- (i)  $a = d : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow az + b = az \Leftrightarrow b = 0$

Daraus folgt  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  fixiert alle Elemente aus  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

- (ii)  $a \neq d : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \bullet z = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{d} = \frac{b}{d-a} \in \mathbb{R} \Rightarrow A$  hat keine Fixpunkte in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Insgesamt: Fixpunkte in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  haben Matrizen der Form  $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$  und Matrizen mit  $\text{Spur} A^2 < 4 \det A$