

§ 16 \mathfrak{L}^p -Räume und L^p -Räume

Stets in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$

Definition

Sei $p \in [1, +\infty]$.

$$p' := \begin{cases} \infty & , p = 1 \\ 1 & , p = \infty \\ \frac{p}{p-1} & , 1 < p < \infty \end{cases}$$

Dann gilt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $p = p' \Leftrightarrow p = 2$.

Hilfssatz

Seien $x, y \geq 0$, $p \in (1, \infty)$, dann gilt: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$

Beweis

Für $t > 0$: $f(t) := \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} - t^{\frac{1}{p}}$

Übung: $\min\{f(t) \mid t > 0\} = f(1) = 0$

D.h.: $t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} \quad \forall t > 0$

Seien $u, v > 0$, $t := \frac{u}{v}$. Dann: $\frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{u}{vp} + \frac{1}{p'}$. Daraus folgt $u^{\frac{1}{p}} v^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'} \implies u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'}$

Seien $x, y > 0$: $u := x^p$, $v := y^{p'}$. Dann: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$.

Im Falle $x = 0$ oder $y = \infty$ ist die Ungleichung trivialerweise richtig. ■

Erinnerung: Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $p > 0$, so ist $|f|^p$ messbar (vgl. Kapitel 3).

Es gilt: $|f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \Leftrightarrow \int_X |f|^p dx < \infty$

Definition

(1) Sei $p \in [1, \infty)$. $\mathfrak{L}^p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_X |f|^p dx < \infty\}$.

Für $f \in \mathfrak{L}^p(X)$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

(2) $\mathfrak{L}^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } f \text{ ist f.ü. beschränkt}\}$

Für $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$: $\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{x \in X} \|f(x)\| = \inf\{c > 0 \mid \exists \text{ Nullmenge } N_c \subseteq X : |f(x)| \leq c \forall x \in X \setminus N_c\}$

Bemerkung: Es sei $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ und stetig. Außerdem habe jede in X offene, nichtleere Teilmenge positives Maß. Dann ist f auf X beschränkt und $\sup_{x \in X} |f(x)| = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Beweis

Übung (ist $N \subseteq X$ eine Nullmenge, so ist $N^\circ = \emptyset$ und $\overline{X \setminus N} = X$) ■

Beispiel

Sei $d = 1$, $X = [1, \infty)$, $p > 1$ ($p < \infty$), $\alpha, \beta > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $g(x) = \frac{1}{x^\beta}$

(1)

$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \stackrel{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}} dx$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$

(2)

$$fg \in \mathfrak{L}^1(X) \stackrel{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} dx$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha + \beta > 1$

Satz 16.1

Sei $p \in [1, \infty]$ und p' wie zu Anfang dieses Kapitels, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

- (1) Sei $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $g \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$. Dann ist $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und es gilt die **Höldersche Ungleichung**:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

Ist $p = 2$ ($\implies p' = 2$), so heißt obige Ungleichung auch **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**.

- (2) $\mathfrak{L}^p(X)$ ist ein reeller Vektorraum und für $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$ gilt die **Minkowskische Ungleichung**:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis

- (1) Unterscheide die folgenden Fälle:

Fall 1: $p = 1$ (also $p' = \infty$) oder $p = \infty$ (also $p' = 1$). Etwa $p = 1$, $p' = \infty$.

Sei $c > 0$ und $N_c \subseteq X$ Nullmenge mit: $|g(x)| \leq c \forall x \in X \setminus N_c$. $\tilde{g} := \mathbf{1}_{X \setminus N_c} \cdot g$

Dann: $g = \tilde{g}$ fast überall und $|\tilde{g}| \leq c$ auf X . Weiter: $fg = f\tilde{g}$ fast überall, bzw. $|fg| = |f\tilde{g}|$ fast überall.

Dann:

$$\int_X |fg| dx = \int_X |f\tilde{g}| dx = \int_X |f| \underbrace{|\tilde{g}|}_{\leq c} dx \leq \int_X |f| dx = c \cdot \|f\|_1 < \infty$$

Also: $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $\|fg\|_1 \leq c\|f\|_1$. Übergang zum Infimum über alle $c > 0$ liefert: $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$

Fall 2: Sei $1 < p < \infty$. Ist $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_{p'} = 0$, so ist $f = 0$ fast überall oder $g = 0$ fast überall. Daraus folgt: $|fg| = 0$ fast überall. Mit 5.2 folgt: $\int_X |fg| dx = 0$. Daraus folgen die Behauptungen.

Sei $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_{p'} > 0$.

Aus obigem Hilfssatz:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \quad \forall x \in X$$

Integration liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \int_X |f(x)g(x)| dx &\leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p dx + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \int_X |g|^{p'} dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ &= 1 < \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt: $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ und

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \leq 1 \Leftrightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

(2) Klar: Ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f \in \mathfrak{L}^p(X)$

Fall 1: $p = 1$: Mit 4.11 folgt: $\mathfrak{L}^1(X)$ ist ein reeller Vektorraum.

Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1(X)$. Dann: $|f + g| \leq |f| + |g|$ auf X . Damit:

$$\int_X |f + g| dx \leq \int_X |f| dx + \int_X |g| dx$$

Fall 2: $p = \infty$: Seien $f, g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$. Seien $c_1, c_2 > 0$ und $N_1, N_2 \subseteq X$ Nullmengen und $|f(x)| \leq c_1 \forall x \in X \setminus N_1$, $|g(x)| \leq c_2 \forall x \in X \setminus N_2$.

$N = N_1 \cup N_2$ ist eine Nullmenge. Dann: $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c_1 + c_2 \forall x \in X \setminus N$. Es folgt: $f + g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ und $\|f + g\|_\infty \leq c_1 + c_2$.

Übergang zum Infimum über alle solche c_1 , bzw. c_2 , liefert: $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Fall 3: Sei $1 < p < \infty$ und $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$. Es ist $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$ auf X . Mit 4.9 folgt: $|f + g|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f + g \in \mathfrak{L}^p(X)$

$p' = \frac{p}{p-1}$; $h := |f + g|^{p-1}$, dann: $h^{p'} = (|f + g|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} = |f + g|^p \in \mathfrak{L}^1(X)$. Dann ist $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$. Also: $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$, $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ (und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt: $\|f \cdot f_1\| \leq \|f\|_p \|h\|_{p'} \implies \int_X h|f| dx \leq \|f\|_p \left(\int_X h^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_X |f| |f + g|^{p-1} dx &\leq \|f\|_p \left(\int_X (|f + g|^{p-1})^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p (\|f + g\|_p^p)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Genauso: $\int_X |g||f + g|^{p-1} dx \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1}$

Dann:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p dx \\ &= \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} dx \\ &= \int_X |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_X |g| |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

■

Teilen durch $\|f + g\|_p^{p-1}$ liefert die Minkowski-Ungleichung.

Satz 16.2

Sei $\lambda_d(X) < \infty$, $p, q \geq 1$ und $p \leq q \leq \infty$. Dann ist $\mathfrak{L}^q(X) \subseteq \mathfrak{L}^p(X)$ und es gilt:

$$\forall f \in \mathfrak{L}^q(X) : \|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Beweis

Sei $f \in \mathfrak{L}^q(X)$.

Fall $p = q$: Klar.

Fall $q = \infty$: Leichte Übung!

Fall $p < q < \infty$:

Sei $r := \frac{q}{p} > 1$, dann ist $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$. Aus $|f|^{pr} = |f|^q \in \mathfrak{L}^1(X)$ folgt $|f|^p \in \mathfrak{L}^r(X)$. Definiere $g := \mathbb{1}_X$, dann ist $g \in \mathfrak{L}^{r'}(X)$, da $\lambda_d(X) < \infty$. Wegen 16.1 gilt dann:

$$g \cdot |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \|g \cdot |f|^p\|_1 \\ &\leq \|g\|_{r'} \cdot \| |f|^p \|_r \\ &= \left(\int_X g^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \lambda_d(X)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_X |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \lambda_d(X)^{1 - \frac{p}{q}} \cdot \|f\|_q^p \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

■

Beispiel

(1) Sei $X := (0, 1]$, $1 \leq p < q < \infty$ (also $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$) und $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$). Dann gilt nach 4.14

und Analysis I:

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{L}^p(X) &\iff \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha p}} dx \text{ konvergiert} \\ &\iff \alpha p < 1 \\ &\iff \alpha < \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Sei $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$, dann ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $f \notin \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$ und aus 16.2 folgt $\mathfrak{L}^q(X) \subseteq \mathfrak{L}^p(X)$.

(2) Sei $X := [1, \infty)$, $p = 1$, $q \in (1, \infty)$ und $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann gilt nach 4.14 und Analysis I: $f \notin \mathfrak{L}^p(X)$ und $f \in \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. also $\mathfrak{L}^q(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^p(X)$.

Definiere $g(x) := \mathbb{1}_{[1,2)} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{q}}$. Übung: $g \in \mathfrak{L}^p(X)$ und $g \notin \mathfrak{L}^q(X)$. D.h. also $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$.

Satz 16.3 (Satz von Lebesgue (\mathfrak{L}^p -Version))

Sei $1 \leq p < \infty$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei messbar, $g : X \rightarrow [0, \infty]$ integrierbar und (f_n) eine Folge in $\mathfrak{L}^p(X)$ mit den Eigenschaften:

- (1) $f_n \rightarrow f$ f.ü. auf X
- (2) $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n|^p \leq g$ f.ü. auf X .

Dann ist $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und es gilt

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Beweis

Aus (i) und (ii) folgt: $|f|^p \leq g$ f.ü. Im Paragraphen 5 haben wir gesehen, dass dann gilt:

$$\int_X |f|^p dx \leq \int_X g dx < \infty$$

(denn g ist nach Voraussetzung integrierbar). Daraus folgt: $f \in \mathfrak{L}^p(X)$.

Setze $g_n := |f_n - f|^p$. Aus (i): $g_n \rightarrow 0$ f.ü. Es sind $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$ (erstes nach Voraussetzung, zweites haben wir gerade gezeigt), und weil $\mathfrak{L}^p(X)$ ein reeller Vektorraum ist (16.1(2)), folgt:

$$f_n - f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Also $g_n \in \mathfrak{L}^1(X)$. Es ist

$$0 \leq g_n \leq (|f_n| + |f|)^p \leq \left(g^{\frac{1}{p}} + g^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(2g^{\frac{1}{p}}\right)^p = 2^p g \quad \text{f.ü.}$$

Mit 6.2 folgt schließlich:

$$\underbrace{\int_X g_n dx}_{=\|f_n - f\|_p^p} \rightarrow 0.$$

■

Aus 16.1 folgt: $\mathfrak{L}^p(X)$ ist ein reeller Vektorraum (VR), wobei für $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$ gilt:

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Aber $\|\cdot\|_p$ ist **keine** Norm auf $\mathfrak{L}^p(X)$! Denn aus $\|f\|_p = 0$ folgt nur $f = 0$ f.ü.

Definition

Es sei $\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$, dann ist \mathcal{N} ein Untervektorraum von $\mathfrak{L}^p(X)$. Definiere

$$L^p(X) := \mathfrak{L}^p(X) / \mathcal{N} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} \mid f \in \mathfrak{L}^p(X)\}$$

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $L^p(X)$ durch die Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot \hat{f} := \widehat{\alpha f}$$

und die Addition

$$\hat{f} + \hat{g} := \widehat{f + g}$$

zu einem Vektorraum über \mathbb{R} wird.

Setze für $\hat{f} \in L^1(X)$:

$$\int_X \hat{f}(x) \, dx := \int_X f(x) \, dx$$

dabei ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ von \hat{f} , denn: ist auch noch $g \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $\hat{g} = \hat{f}$, so ist $f - g \in \mathcal{N}$, also $f - g = 0$ f.ü. und damit: $\int_X f \, dx = \int_X g \, dx$.

Für $\hat{f} \in L^p(X)$ definiere

$$\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$$

wobei diese Definition unabhängig ist von der Wahl des Repräsentanten $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ von \hat{f} .

Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$ setze

$$(\hat{f}|\hat{g}) := \int_X f(x)g(x) \, dx$$

(auch diese Definition ist Repräsentanten-unabhängig) (Beachte: $f \cdot g \in \mathfrak{L}^1(X)$)

Dann gilt:

(1) $L^p(X)$ ist unter $\|\cdot\|_p$ ein normierter Raum (NR).

(2) Für $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$ gilt:

$$|(\hat{f}|\hat{g})| = \left| \int_X f(x)g(x) \, dx \right| \leq \int_X |fg| \, dx = \|fg\|_1 \stackrel{16.1}{\leq} \|f\|_2 \|g\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2$$

(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Nachrechnen: $(\hat{f}|\hat{g})$ definiert ein Skalarprodukt auf $L^2(X)$. Es gilt:

$$(\hat{f}|\hat{f}) = \int_X f(x)^2 \, dx = \|\hat{f}\|_2^2$$

Also: $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{(\hat{f}|\hat{f})}$

Definition

Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Gilt mit einem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf B :

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)} \quad \forall v \in B \quad (*)$$

so heißt B ein **Prähilbertraum**. Ist B ein Banachraum mit $(*)$, so heißt B ein **Hilbertraum**.

Vereinbarung: ab jetzt sei stets in diesem Paragraphen $1 \leq p < \infty$.

Bemerkung: Seien $f, f_n \in \mathfrak{L}^p(X)$

(1) $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \rightarrow 0$ genau dann, wenn (\hat{f}_n) eine konvergente Folge im normierten Raum $L^p(X)$ mit dem Grenzwert \hat{f} ist.

(2) (\hat{f}_n) ist eine **Cauchyfolge** (CF) in $L^p(X)$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad (*)$$

(3) Wie in Analysis II zeigt man: gilt $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \rightarrow 0$, so ist (\hat{f}_n) eine Cauchyfolge in $L^p(X)$.

Satz 16.4 (Satz von Riesz-Fischer)

(\hat{f}_n) sei eine Cauchyfolge in $L^p(X)$, das heißt es gilt $(*)$ aus obiger Bemerkung (2). Dann existiert ein $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) mit:

(1) $f_{n_j} \rightarrow f$ fast überall auf X .

(2) $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Das heißt $L^p(X)$ ist ein Banachraum ($L^2(X)$ ist ein Hilbertraum).

Bemerkung: Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in 16.4. Im Allgemeinen wird **nicht** gelten, dass fast überall $f_n \rightarrow f$ ist.

Beispiel

Sei $X = [0, 1]$ und (I_n) sei die folgende Folge von Intervallen:

$$I_1 = [0, 1], I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right], I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \dots$$

Es sei $f_n := \mathbb{1}_{I_n}$, sodass $\int_X f_n dx = \int_{I_n} 1 dx = \lambda_1(I_n) \rightarrow 0$. Also $\hat{f}_n \in L^1(X)$ und $\|\hat{f}_n - \hat{0}\|_1 \rightarrow 0$. Ist $x \in X$, so gilt: $x \in I_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass eine Teilfolge I_{n_j} mit $x \in I_{n_j}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert. Somit ist $f_{n_j}(x) = 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und deshalb gilt fast überall $f_n \rightarrow 0$.

Beweis (von 16.4)

Setze $\varepsilon_j := \frac{1}{2^j}$ ($j \in \mathbb{N}$). Zu ε_1 existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_l - f_{n_1}\|_p < \varepsilon_1$ für alle $l \geq n_1$. Zu ε_2 existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $\|f_l - f_{n_2}\|_p < \varepsilon_2$ für alle $l \geq n_2$. Etc.

Wir erhalten eine Teilfolge (f_{n_j}) mit

$$(+)\quad \|f_l - f_{n_j}\|_p < \varepsilon_j \quad \text{für alle } l \geq n_j \text{ mit } j \in \mathbb{N}$$

16. \mathfrak{L}^p -Räume und L^p -Räume

Setze $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$ ($j \in \mathbb{N}$). Klar: $g_l \in \mathfrak{L}^p(X)$. Für $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N := \int_X \left(\sum_{j=1}^N |g_j(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dann:

$$S_N = \left\| \sum_{j=1}^N |g_j| \right\|_p \leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_p \stackrel{(+)}{\leq} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j} \leq 1$$

Setze

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| \text{ für } x \in X$$

Es ist $g \geq 0$ und messbar. Weiter gilt:

$$0 \leq \int_X g^p dx = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N |g_j| \right)^p dx \stackrel{6.2}{\leq} \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N^p \leq 1$$

Somit ist g^p integrierbar. Aus 5.2 folgt, dass eine Nullmenge $N_1 \subseteq X$ existiert mit $0 \leq g^p(x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus N_1$. Es ist dann auch $0 \leq g(x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus N_1$ und somit folgt nach Konstruktion von g , dass $\sum_{j=1}^{\infty} g_j dx$ konvergiert absolut in jedem $x \in X \setminus N_1$. Aus Analysis I folgt, dass damit $\sum_{j=1}^{\infty} g_j dx$ in jedem $x \in X \setminus N_1$ konvergiert.

Für $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{m-1} g_j = f_{n_m} - f_{n_1} \implies f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$$

Deshalb ist (f_{n_m}) konvergent (in \mathbb{R}) für alle $x \in X \setminus N_1$.

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x) & , x \in X \setminus N_1 \\ 0 & , x \in N_1 \end{cases}$$

Aus §3 ist bekannt, dass f messbar ist. Klar: $f_{n_m} \rightarrow f$ fast überall und $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Es ist $f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$ und somit

$$|f_{n_m}| = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{m-1} g_j \leq |f_{n_1}| + |g|$$

Wie im Beweis von Satz 16.1 folgern wir

$$|f_{n_m}|^p \leq 2^p (|f_{n_1}|^p + g^p) =: \tilde{g}$$

$f_{n_1} \in \mathfrak{L}^p(X)$, g^p ist integrierbar. Aus 16.3 folgt, dass $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und

$$\|f_{n_m} - f\|_p \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|f - f_{n_m}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $l \geq n_m$ gilt:

$$\|f_l - f\|_p = \|f_l - f_{n_m} + f_{n_m} - f\|_p \leq \|f_l - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p \stackrel{(+)}{<} \frac{1}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Das heißt

$$\|f_l - f\|_p \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

■

Satz 16.5

Sei auch noch $1 \leq q < \infty$. (f_n) sei eine Folge in $\mathfrak{L}^p(X) \cap \mathfrak{L}^q(X)$. Es sei

$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \text{ und } g \in \mathfrak{L}^q(X)$$

Weiter gelte:

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \text{ und } \|f_n - g\|_q \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Dann ist fast überall $f = g$.

Beweis

1. Aus Bemerkung (3) vor 16.4 folgt, dass (\hat{f}_n) ist eine Cachyfolge in $L^p(X)$. Wegen 16.4 existiert dann ein $\varphi \in \mathfrak{L}^p(X)$ und eine Teilfolge (f_{n_j}) mit: $f_{n_j} \rightarrow \varphi$ fast überall und $\|f_{n_j} - \varphi\|_p \rightarrow 0$

$$\|f - \varphi\|_p = \|f - f_{n_j} + f_{n_j} - \varphi\|_p \leq \|f - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - \varphi\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Somit ist $\|f - \varphi\|_p = 0$ und deshalb fast überall $f = \varphi$. Also gilt fast überall $f_{n_j} \rightarrow f$. Das heißt, dass es eine Nullmenge $N_1 \subseteq X$ gibt, für die gilt:

$$f_{n_j}(x) \rightarrow f(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_1$$

2. Setze $g_j := f_{n_j}$, dann gilt $\|g_j - g\|_q \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$. Wie im ersten Schritt zeigt man, dass eine Nullmenge $N_2 \subseteq X$ und eine Teilmenge (g_{j_k}) existiert mit, für die gilt:

$$g_{j_k}(x) \rightarrow g(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_2$$

Wir wissen, dass $N := N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge ist. Sei nun $x \in X \setminus N$. Dann folgt aus dem ersten Schritt $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$ und daraus

$$\underbrace{f_{n_{j_k}}(x)}_{=g_{n_{j_k}}(x)} \rightarrow f(x)$$

Aus dem Zweiten Schritt folgt dann, dass $f_{n_{j_k}}(x) \rightarrow g(x)$ und somit $f(x) = g(x)$. ■

Bemerkung: Seien $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$ und es gelte $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. Der Beweis von 16.5 zeigt, dass eine Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) existiert mit $f_{n_j} \rightarrow f$ fast überall.

Bemerkung: Konvergenz im Sinne der Norm $\|\cdot\|_p$ und punktweise Konvergenz fast überall haben im Allgemeinen **nichts** miteinander zu tun!

Beispiel

Sei (f_n) wie im Beispiel vor 16.4. Also $\|f_n - 0\|_p \rightarrow 0$, aber $f_n \not\rightarrow 0$ fast überall.

Beispiel

Sei $X = [0, 1]$ und f_n sei wie im Bild. f_n ist stetig, also messbar.

$$\int_X f_n dx = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Somit ist $f_n \in \mathfrak{L}^1(X)$.

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Damit gilt fast überall $f_n \rightarrow 0$, aber $\|f_n - 0\|_1 = 1 \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

Definition

Seien $(E, \|\cdot\|_1), (F, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume.

- (1) Sei (x_n) eine Folge in E und $s_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann heißt (s_n) eine **unendliche Reihe** und wird mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

bezeichnet. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **konvergent** genau dann, wenn (s_n) konvergiert. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

- (2) $\Phi: E \rightarrow F$ sei eine Abbildung. Φ heißt **stetig** in $x_0 \in E$ genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) in E mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt:

$$\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0)$$

Φ heißt auf E stetig genau dann, wenn Φ in jedem $x \in E$ stetig.

- (3) Für $(x, y) \in E \times E$ setze

$$\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2}$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $E \times E$ (nachrechnen!). Weiter gilt, dass $E \times E$ genau dann ein Banachraum ist, wenn E einer ist. Für eine Folge $((x_n, y_n))$ in $E \times E$ und $(x, y) \in E \times E$ gilt

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} (x, y) \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \wedge y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$$

Bemerkung: Ist (x_n) eine konvergente Folge in E , so ist (x_n) beschränkt (d.h. $\exists c > 0 : \|x_n\|_1 \leq c \forall n \in \mathbb{N}$).

(Beweis wie in Ana I)

Vereinbarung: Für den Rest dieser Vorlesung schreiben wir (meist) f statt \hat{f} und identifizieren $\mathfrak{L}^p(X)$ mit $L^p(X)$. Ebenso schreiben wir $\int_X f \, dx$ statt $\int_X \hat{f} \, dx$ und $(f|g)$ statt $(\hat{f}|\hat{g})$.

Beispiel 16.6

- (1) Die Abbildung $\Phi: L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(f) := \|f\|_p$$

ist stetig auf $L^p(X)$. D.h. für $f_n, f \in L^p(X)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ gilt $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, also

$$\int_X |f_n|^p \, dx \rightarrow \int_X |f|^p \, dx$$

Beweis

Aus Analysis II §17 folgt:

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

(2) Die Abbildung $\Phi : L^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f) := \int_X f \, dx$$

ist stetig auf $L^1(X)$. D.h. aus $f_n, f \in L^1(X)$ und $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ folgt

$$\int_X f_n \, dx \rightarrow \int_X f \, dx$$

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_X f_n \, dx - \int_X f \, dx \right| &= \left| \int_X f_n - f \, dx \right| \\ &\leq \int_X |f_n - f| \, dx \\ &= \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

■

(3) Die Abbildung $\Phi : L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f, g) := (f|g)$$

ist stetig auf $L^2(X) \times L^2(X)$. D.h. für $f_n, g_n, f, g \in L^2(X)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ und $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$ gilt

$$(f_n|g_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f|g)$$

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned} |(f_n|g_n) - (f|g)| &= |(f_n|g_n) - (f_n|g) + (f_n|g) - (f|g)| \\ &= |(f_n|g_n - g) + (f_n - f|g)| \\ &\leq |(f_n|g_n - g)| + |(f_n - f|g)| \\ &\leq \|f_n\|_2 \cdot \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

■

Satz 16.7

Sei $f = f_+ - f_- \in L^p(X)$ und (g_n) und (h_n) seien zulässige Folgen für f_+ bzw. f_- (d.h. g_n, h_n einfach, $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$, $g_n \rightarrow f_+$, $0 \leq h_n \leq h_{n+1}$, $h_n \rightarrow f_-$). Setze $f_n := g_n - h_n$. Dann sind $f_n, g_n, h_n \in L^p(X)$ und es gilt:

$$\|g_n - f_+\|_p \rightarrow 0$$

$$\|h_n - f_-\|_p \rightarrow 0$$

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$$

Beweis

Es genügt den Fall $f \geq 0$ zu betrachten (also $f = f_+$, $f_- \equiv 0$). Sei also (f_n) zulässig für f . Definiere $\varphi := |f_n - f|^p$. Es ist klar, dass punktweise gilt $\varphi_n \rightarrow 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_n &\leq (|f_n| + |f|)^p \\ &= |f_n + f|^p \leq (2f)^p \\ &= 2^p f^p =: g \end{aligned}$$

Dann ist $g \in L^1(X)$ integrierbar.

Aus 4.9 folgt:

$$\begin{aligned} \varphi \in L^1(X) &\implies f_n - f \in L^p(X) \\ &\implies f_n = (f_n - f) + f \in L^p(X) \end{aligned}$$

Aus 6.2 folgt:

$$\int_X \varphi_n \, dx \rightarrow 0 \implies \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

■

Definition

(1) Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

der **Träger** von f

(2) $C_c(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(f) \subseteq X \text{ und } \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$

Satz 16.8

(1) $C_c(X, \mathbb{R}) \subseteq L^p(X)$

(2) Ist X offen, so liegt $C_c(X, \mathbb{R})$ **dicht** in $L^p(X)$, d.h. ist $f \in L^p(X)$ und $\varepsilon > 0$, so existiert $g \in C_c(X, \mathbb{R})$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Beweis

(1) Sei $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ und $K := \text{supp}(f)$, dann ist $K \subseteq X$ kompakt, also $K \in \mathfrak{B}_d$. Es gilt für alle $x \in X \setminus K$ $f(x) = 0$ und damit folgt aus 4.12 $\int_K |f|^p \, dx < \infty$. Dann gilt:

$$\int_X |f|^p \, dx = \int_{X \setminus K} |f|^p \, dx + \int_K |f|^p \, dx = \int_K |f|^p \, dx < \infty$$

Also ist $f \in L^p(X)$.

(2) Siehe Übungsblatt 13.

■