

5. Wurzeln und rationale Exponenten

Hilfssatz 5.1

- (1) Sind $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt: $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$
- (2) Ist $\beta > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \beta$

Beweis

- (1) „ \Rightarrow “ (induktiv)
 I.A. $n = 1$ ✓
 I.V. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x^n \leq y^n$
 I.S. $x^{n+1} = x^n x \leq y^n x \leq y^n y = y^{n+1}$
 „ \Leftarrow “: Annahme: $y < x \xrightarrow{\text{wie oben}} y^k < x^k \forall k \in \mathbb{N}$, Wid.
- (2) $2.1(4) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : m > \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{m} < \beta$. ■

Definition 5.2 (Wurzeln)

Sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit: $x \geq 0$ und $x^n = a$. Dieses x heißt die n -te **Wurzel** aus a und wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet ($\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$).

Bemerkung: (1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$ (Beispiel: $\sqrt{4} = 2, \sqrt{4} \neq -2$; die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen)

- (2) $\sqrt{b^2} = |b| \forall b \in \mathbb{R}$

Beweis

Eindeutigkeit: Sei $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n \xrightarrow{5.1(1)} x = y$

Existenz: O.B.d.A.: $a > 0$ und $n \geq 2$

$M := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0, y^n < a\}, M \neq \emptyset$, denn $0 \in M$

Sei $y \in M \Rightarrow y^n < a < 1 + na \stackrel{\text{BU}}{\leq} (1+a)^n \xrightarrow{5.1(1)} y < 1+a$. M ist nach oben beschränkt.

(A15) $\Rightarrow \exists x := \sup M$. Wir zeigen: $x^n = a$

Annahme: $x^n < a$. Sei $m \in \mathbb{N}$:

$$\left(x + \frac{1}{m}\right)^n \stackrel{4.4}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{1}{m^k} = x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \underbrace{\frac{1}{m^k}}_{\leq \frac{1}{m}} \leq x^n + \underbrace{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k}}_{\alpha}$$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{m}\right)^n \leq x^n + \frac{\alpha}{m}$. 4.1(2) $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \frac{a-x^n}{\alpha} \Rightarrow x^2 + \frac{\alpha}{m} < a$. Dann
 $\left(x + \frac{1}{m}\right)^n \leq x^n + \frac{\alpha}{m} < a \Rightarrow x + \frac{1}{m} \in M \Rightarrow x + \frac{1}{m} \leq x \Rightarrow \frac{1}{m} < 0$. Widerspruch
 $\Rightarrow x^n \geq a$

Annahme: $x^n > a$. $\left(x - \frac{1}{m}\right)^n = \left(x\left(1 - \frac{1}{mx}\right)\right)^n = x^n \left(1 - \frac{1}{mx}\right)^n \stackrel{\text{BU}}{\geq} x^n \left(1 - \frac{n}{mx}\right)$ falls $-\frac{1}{mx} \geq -1$, also falls $\frac{1}{m} \leq x$. Also: $\left(x - \frac{1}{m}\right)^n \geq x^n \left(1 - \frac{n}{mx}\right)$ für $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \leq x$. [Nebenrechnung: $x^n \left(1 - \frac{n}{mx}\right) > a \iff \frac{1}{m} < \frac{x(x^n - a)}{nx^n} =: \alpha$] 5.1(2) $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \leq x$ und $\frac{1}{m} \leq \alpha$.

5. Wurzeln und rationale Exponenten

Dann $(x - \frac{1}{m})^n > a$. $x - \frac{1}{m}$ ist keine obere Schranke von $M \implies \exists y \in M : y > x - \frac{1}{m} \xrightarrow{5.1(1)} y^n > (x - \frac{1}{m})^n > a$. Also $y^n > a$. Widerspruch, denn $y \in M$.
Daraus folgt: $x^n = a$. ■

Satz 5.3 (Eindeutigkeit von rationalen Potenzen)

Sei $a \geq 0$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ und es sei $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Dann $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$.

Beweis

$x := (\sqrt[n]{a})^m$, $y := (\sqrt[q]{a})^p$. Wegen 5.1(1) genügt es zu zeigen: $x^q = y^q$. Es ist $mq = np$.
 $x^q = \sqrt[n]{a}^{mq} = \sqrt[n]{a}^{np} = a^p = \sqrt[q]{a}^{pq} = y^q$ ■

Definition (Rationale Potenzen)

(1) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$. Dann existiert $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Es sei $a^r := \sqrt[n]{a}^m$. (Wegen 5.3 ist a^r wohldefiniert).

(2) Sei $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$

Es gelten die Rechenregeln $(a^{r+s} = a^r a^s, \dots)$ als bekannt.