

- Ist  $N$  Poissonprozess und  $Y_n$  Markov-Kette mit  $P = E + \frac{1}{\lambda}Q$ , dann ist  $X_t = Y_{N_t}$  Markov-Kette mit Intensitätsmatrix  $Q$ .
- $\mu$  ist invariantes Maß  $\iff \mu Q = 0$
- Ist  $X_n$  rekurrent, irreduzibel, dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{m_j q_j}$

Ist  $(B_t)$  eine Brownsche Bewegung, dann auch:

- $(-B_t), (B_{a+t} - B_a), (cB_{\frac{t}{c^2}})$
- Zeitumkehr:  $(tB_{\frac{1}{t}})$
- Spiegelungsprinzip: Der nach  $\tau$  gespiegelte Prozess.

Eigenschaften der Brownschen Bewegung:

- $\sup B_t = \infty, \inf B_t = -\infty$ , also unendlich oft weit hoch und runter.
- $P$ -fast-sicher nie Lipschitzs-Stetig
- Totalvariation  $\infty$ , quadratische Variation  $\xrightarrow{P} t$ .
- Stochastischer Kern  $P_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(x, t)$
- $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}f''$
- Ist  $\tau$  endliche Stoppzeit, dann ist  $(B_{\tau+t} - B_\tau)$  verteilt wie  $(B_t)$  und unabhängig von  $\mathcal{F}_\tau$ .
- Identisch verteilt sind:  $M_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s, M_t - B_t, |B_t|$
- $P$ -fast-sicher Nullstellenmenge perfekt

Invarianzprinzip von Dansker: Ist  $E\xi_i = 0, 0 < \text{Var}(\xi_i) =: \sigma^2 < \infty, S_k = \sum_{j=1}^k \xi_j, Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}, (X_t^{(n)}) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}Y_{nt}$ , dann konvergieren die Wahrscheinlichkeitsmaße  $P_n$  schwach gegen  $P$ , wobei  $P$  so ist, dass die Projektionen  $\pi_t$  eine Brownsche Bewegung sind.

## 3 Wichtige Beweismethoden

### 3.1 Konvergenz gegen stationäre Verteilung

Voraussetzungen:  $(X_n)$  irreduzibel, aperiodisch, positiv rekurrent. „Kopplungs-Argument“:  $(Y_n)$  Kette mit gleicher Übergangsmatrix,  $Y_n \sim \pi, T := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = Y_n\}$ .

- Zeige  $P(T < \infty) = 1$
- Definiere

$$Z_n := \begin{cases} X_n, n \leq T \\ Y_n, n > T \end{cases}$$

- Schätze ab

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi(j)| \leq 2 \cdot P_\nu(T > n) \rightarrow P(T = \infty) = 0$$