

Kapitel 3

2 Hauptsätze der Operatorentheorie

3.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (PUB)

Theorem 3.1 (Baire) Sei (M, d) ein vollständiger Raum, $O_n \subseteq M$ offen und dicht, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht in M .

Beweis Sei $x_0 \in M$, $\delta > 0$, $B_0 = B(x_0, \delta)$. z.z: $B_0 \cap D \neq \emptyset$.

Da O_1 offen und dicht $\exists x_1 \in O_1 \cap B_0$, $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2}\delta)$ mit $\overline{B(x_1, \delta_1)} \subseteq O_1 \cap B_0$. Induktiv findet man $x_n \in O_n \cap B_{n-1}$, $\delta_n \in (0, \frac{1}{2}\delta_{n-1})$. $B_n = B(x_n, \delta_n)$ mit $\overline{B_n} \subseteq O_n \cap B_{n-1} \subseteq O_n \cap O_{n-1} \cap B_{n-2} \subseteq \dots \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_n \cap B_0$ (*). Da $\delta_m < 2^{-m}\delta$ gilt ferner, dass $x_n \in \overline{B_m} \subseteq B(x_m, 2^{-m}\delta)$ für $n \geq m$.

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist CF. $\xrightarrow{\text{vollst.}} \exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{B_m} \forall m \in \mathbb{N}$.

$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \cap B_0$. ■

Korollar 3.2 Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A_n \subseteq M$ abg ($n \in \mathbb{N}$) mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\mathring{A}_N \neq \emptyset$.

Beweis Annahme: $\mathring{A}_n = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$.

Setze $O_n = M \setminus A_n \Rightarrow O_n$ ist offen und dicht (nach Satz 1.12), $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Theo 3.1}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ ist dicht in M .

Aber: $M \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M \setminus O_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M$. Wid! ■

Theorem 3.3 (PUB) Seien X ein BR, Y ein normierter VR und $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y)$. Wenn \mathcal{T} punktweise beschränkt ist ($\forall x \in X \exists c_x > 0 : \|Tx\| \leq c_x \forall T \in \mathcal{T}$), dann ist \mathcal{T} gleichmäßig beschränkt (d.h. $\exists c > 0 : \|T\| \leq c \forall T \in \mathcal{T}$)

Beweis Sei $A_n = \{x \in X : \|Tx\| \leq n \forall T \in \mathcal{T}\}$ $n \in \mathbb{N}$. Nach Vor: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$. Sei $x_k \in A_n$, $x_k \mapsto x$ in X ($k \rightarrow \infty$). Dann: $\|Tx\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_k\| \leq n \forall T \in \mathcal{T}$. Korollar 3.2 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$, $y \in A_N$, $\varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subseteq A_N$.

Da $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y) : A_N$ ist konvex und aus $x \in A_N$ folgt $-x \in A_N$, also $-B(y, \varepsilon) \subseteq -A_N = A_N$.

Damit $\|z\| < \varepsilon \Rightarrow z = \frac{1}{2}(\underbrace{y+z}_{\in B(y,\varepsilon)} + \underbrace{z-y}_{\in -B(y,\varepsilon)}) \Rightarrow z \in \frac{1}{2}(A_N + A_N) \stackrel{A_N \text{ konvex}}{\subseteq} A_N (*)$.

Sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann: $z = \varepsilon x \in A_N$ nach $(*) \Rightarrow N \geq \|Tz\| = \varepsilon \|Tx\| \forall T \in \mathcal{T} \Rightarrow \|T\| \leq \frac{N}{\varepsilon} \forall T \in \mathcal{T}$. ■

Beispiel 3.4 Sei $X = c_\infty$ mit sup Norm (kein BR!), $Y = \mathbb{K}$, $T_n x = nx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann: $T_n \in B(X, Y) = X^*$, $\|T_n\| = n \rightarrow \infty$. Sei $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in c_\infty \Rightarrow |T_n x| \leq m \|x\|_\infty =: c_x \Rightarrow$ Theorem 3.3 benötigt vollst. von X .

Korollar 3.5 (Banach-Steinhaus) Seien X, Y BRe, $D \subseteq X$ dichter UVR, $T_n \in B(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann sind äquivalent:

1. $\exists T \in B(X, Y)$ mit $T_n x \rightarrow Tx$ ($n \rightarrow \infty$) für alle $x \in X$ ("starke Konvergenz")
2. $T_n x$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ und alle $x \in X$.
3. $T_n x$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ und alle $x \in D$ und $\|T_n\| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis \Rightarrow b) trivial.

b) \Rightarrow c) Nach Vor. gilt $\|T_n x\| \leq c_x \forall n \in \mathbb{N} \stackrel{\text{PUB}}{\Rightarrow} \exists c > 0 : \|T_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) \Rightarrow a) Setze $T_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ für $x \in D$. Da T_n linear ist, ist T_0 linear. Ferner: $\|T_0 x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \stackrel{c)}{\leq} c \|x\|$ für alle $x \in D \Rightarrow T_0 \in B(D, Y) \stackrel{\text{Lemma 1.64}}{\Rightarrow} \exists T \in B(X, Y)$ mit $Tx = T_0 x \forall x \in D$.

Sei $\varepsilon > 0$, $x \in X$. Dann existiert ein $y \in D$ mit $\|x - y\| \leq \varepsilon$ (da $\overline{D} = X$).

Damit $\overline{\lim} \|T_n x - Tx\| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\|T_n(x - y)\| + \|T_n y - Ty\| + \|T(y - x)\|) \stackrel{c)}{\leq} c\varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n y - Ty\| + c\varepsilon = 2c\varepsilon \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\Rightarrow} \text{Beh.}$ ■

Beispiel 3.6 Sei $X = Y = c_0$, $T_n x = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, 0, \dots)$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in X$) $\Rightarrow T_n \in B(c_0)$ mit $\|T_n\| \geq \|T_n e_n\| = n \rightarrow \infty$.

Aber: Für $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in c_0$ gilt: $T_n x \rightarrow (x_1, 2x_2, \dots, mx_m, 0, \dots) \Rightarrow$ man kann in c) die Beh $\|T_n\| \leq c$ nicht weglassen.

Beispiel 3.7 (Fourierreihen) Sei $X = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(t) = f(t + 2\pi), t \in \mathbb{R}\}$ mit sup Norm (BR). Setze

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Wie in Bsp 2.22 konvergiert $s_n(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ für $n \rightarrow \infty$ in $L^2([-\pi, \pi])$, Werner S.130 zeigt:

$$\begin{aligned} s_n(f, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(s+t) D_n(s) ds \text{ mit} \\ D_n(t) &= \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, & t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ n + \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Setze $T_n f = s_n(f, 0) \Rightarrow T_n \in X^*$.

Annahme: T_n konvergiert für alle $f \in X \xrightarrow{\text{Kor 3.5}} \|T_n\| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$.

Aber: Wie in Bsp 1.67 gilt: $\|T_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. (Werner IV, 2.10) Wid!
 $\Rightarrow \exists f \in X : s_n(f, 0)$ divergiert.

“richtiges Gegenbeispiel” (Du Bois-Raymond 1876)

Beispiel 3.8 (Links-Translation) Sei $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Setze $(T(t)f)(s) = f(s+t)$, $s \in \mathbb{R}$, $(t \in \mathbb{R}, f \in X)$. Klar. $T(t)f$ ist mb, $T(t)$ ist linear, $\|T(t)f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(\underbrace{s+t}_{=r})|^p dt)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \Rightarrow T(t) \in B(X)$ ist Isometrie. Seien $f \in X, t, s, r \in \mathbb{R}$, $(T(t), T(s), f) = (T(s)f)(r+t) = f(r+t+s) = (T(t+s)f)(r) \Rightarrow T(t)T(s) = T(t+s) = T(s)T(t)$.

Weiter $T(0) = T \Rightarrow T(t)$ ist invertierbar mit $T(t)^{-1} = T(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Sei $f \in C_0(\mathbb{R})$, $t, t_0 \in \mathbb{R} : \|T(t)f - T(t_0)f\|_{\infty} := \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s+t) - f(s+t_0)| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow t_0$), da f glm stetig. Sei $\text{supp} \subseteq [a, b]$ und $|t - t_0| \leq 1$. Dann $\text{supp}(T(t)f - T(t_0)f) \subseteq [a - t_0 - 1, b + t_0 + 1] \xrightarrow{1.39} \|T(t)f - T(t_0)f\|_p \leq c_{a,b} \|T(t)f - T(t_0)f\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow t_0$) $\xrightarrow{\text{Kor 3.5, Sa 1.44}} T(t)(f) \rightarrow T(t_0)f$ für $f \in X$, $t \rightarrow t_0$.

$(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ heißt **stark stetige Operatorengruppe**.

Bemerkung $t \mapsto T(t) \in B(X)$ ist bzgl der Operatornorm unstetig.

Beweis Sei $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f &= t^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,t]}, \quad t > 0 \Rightarrow \|f\|_p = 1 \\ (T(t)f)(s) &= t^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,t]}(s+t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & -t \leq s \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T(t) - I\| \geq \|T(t)f - f\|_p = t^{-\frac{1}{p}} (\int_{-t}^0 1^p dt)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \Rightarrow T(t) \not\rightarrow I = T(0)$, $t \rightarrow 0$ (in $B(X)$).

(entsprechend für $X = C_c(\mathbb{R})$) ■

Beispiel 3.9 (Faltungsoperatoren) Seien $k \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$. AE, Lemma X 7.2 zeigt: $\mathbb{R}^{d+d} \ni (x, y) \mapsto k(x-y) \in \mathbb{K}$ ist mb $\Rightarrow (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = k(x-y)f(y)$ ist mb.

Sei $p = 1$. Fubini a) $\int_{\mathbb{R}^{d+d}} |\varphi(x, y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|k(x-y)|}_{=z} |f(y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |k(z)| dz |f(y)| dy =$

$\|k\|_1 \|f\|_1 \Rightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R}^{d+d})$. Fubini b) zeigt: $Tf(x) := (k * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} k(x-y)f(y) dy$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert, in x int'bar und $\|Tf\|_X \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^{d+d})} \leq \|k\|_1 \|f\|_X$.

Sei $p \in (1, \infty)$. Dann

$$\begin{aligned} \Psi(x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x, y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{1}{p}} |k(x-y)|^{\frac{1}{p'}} |f(y)| dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{p}{p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |k(x-y)|^{\frac{p}{p}} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|k\|_1^{\frac{1}{p'}} (|k| + |f|^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

für f.a. $x \in \mathbb{R}^d$ (vgl. Fubini a))

Da $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ liefert Fubini a): $\Psi^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|\Psi\|_p^p = \|\Psi^p\|_1 \stackrel{a)}{\leq} \|k\|_1^{\frac{p}{p'}} \cdot \|k\|_1 \cdot \| |f|^p \|_1 = \|k\|_1^p \cdot \|f\|_p^p (*)$$

$\stackrel{\text{Fub a), Kor 1.35}}{\implies} \varphi \in L^1(B(0, n) \times \mathbb{R}^d) \forall n \in \mathbb{N}$.

$\stackrel{\text{Fub b)}}{\implies} Tf = k * f$ ist f.ü. definiert, mb und $(*)$ liefert:

$$\textbf{Youngsche Ungleichung} \quad \|\Psi\|_p = \|k + f\|_p \leq \|k\|_1 \|f\|_p \quad (3.1)$$

für $1 \leq p < \infty$.

Insbesondere: $T \in B(L^p(\mathbb{R})^d)$ mit $\|T\| \leq \|k\|_1$.