§ 4 Konstruktion des Lebesgueintegrals

In diesem Paragraphen sei $\varnothing \neq X \in \mathfrak{B}_d$. Wir schreiben außerdem λ statt λ_d.

Definition
Sei $f : X \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion mit der Normalform $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$.
Das **Lebesgueintegral** von f ist definiert durch:

$$\int_X f(x)\ \mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j)$$

Satz 4.1
Sei $f : X \to [0, \infty)$ einfach, $z_1, \dots, z_k \in [0, \infty)$ und $B_1, \dots, B_k \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\bigcup B_j = X$ und $f = \sum_{j=1}^{k} z_j \mathbb{1}_{B_j}$. Dann gilt:

$$\int_X f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{k} z_j \lambda(B_j)$$

Beweis
In der großen Übung. ∎

Satz 4.2
Seien $f, g : X \to [0, \infty)$ einfach, $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $A \in \mathfrak{B}(X)$.

(1) $\int_X \mathbb{1}_A(x)\ \mathrm{d}x = \lambda(A)$

(2) $\int_X (\alpha f + \beta g)(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_X f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_X g(x)\ \mathrm{d}x$

(3) Ist $f \leq g$ auf X, so ist $\int_X f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_X g(x)\ \mathrm{d}x$.

Beweis

(1) Folgt aus der Definition und 4.1.

(2) Es seien $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ und $g = \sum_{j=1}^{k} z_j \mathbb{1}_{B_j}$ die Normalformen von f und g. Dann gilt:

$$\alpha f + \beta g = \sum_{j=1}^{m} \alpha y_j \mathbb{1}_{A_j} + \sum_{j=1}^{k} \beta z_j \mathbb{1}_{B_j}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha f + \beta g) &\overset{4.1}{=} \sum_{j=1}^{m} \alpha y_j \lambda(A_j) + \sum_{j=1}^{k} \beta z_j \lambda(B_j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j) + \beta \sum_{j=1}^{k} z_j \lambda(B_j) \\ &= \alpha \int_X f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_X g(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

(3) Definiere $h := g - f$. Dann ist $h \geq 0$ und einfach. Sei $h = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbb{1}_{C_j}$ die Normalform von h, d.h. $x_1, \ldots, x_m \geq 0$. Dann gilt:

$$\int_X h(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} x_j \lambda(C_j) \geq 0$$

Also folgt aus $g = f + h$ und (2):

$$\int_X g(x)\ \mathrm{d}x = \int_X f(x)\ \mathrm{d}x + \int_X h(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_X f(x)\ \mathrm{d}x$$

■

Definition
Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. (f_n) sei eine für f zulässige Folge. Das **Lebesgueintegral** von f ist definiert als:

$$\int_X f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x \tag{$*$}$$

Bemerkung:

(1) In 4.3 werden wir sehen, dass $(*)$ unabhängig ist von der Wahl der für f zulässigen Folge (f_n).

(2) $(f_n(x))$ ist wachsend für alle $x \in X$, d.h.:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = (\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x)$$

(3) Aus 4.2(3) folgt dass $(\int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x)$ wachsend ist, d.h.:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x = \sup\{\int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x \mid n \in \mathbb{N}\} = \int_X f_(x)\ \mathrm{d}x$$

Bezeichnung:
Für messbare Funktionen $f : X \to [0, \infty]$ definiere

$$M(f) := \{\int_X g\ \mathrm{d}x \mid g : X \to [0, \infty) \text{ einfach und } g \leq f \text{ auf } X\}$$

Satz 4.3
Ist $f : X \to [0, \infty]$ messbar und (f_n) zulässig für f, so gilt:

$$L := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}x = \sup M(f)$$

Insbesondere ist $\int_X f(x) \, \mathrm{d}x$ wohldefiniert.

Folgerungen 4.4
Ist $f : X \to [0, \infty]$ messbar, so ist $\int_X f(x) \, \mathrm{d}x = \sup M(f)$.

Beweis
Sei $\int_X f_n \, dx \in M(f) \, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$L = \sup \left\{ \int_X f_n \, dx \mid n \in \mathbb{N} \right\} \leq \sup M(f)$$

Sei nun g einfach und $0 \leq g \leq f$. Sei weiter

$$g = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

die Normalform von g.
Sei $\alpha > 1$ und $B_n := \{\alpha f_n \geq g\}$. Dann ist

$$B_n \in \mathfrak{B}(X) \text{ und } (B_n \subseteq B_{n+1}, \text{ sowie } \mathbb{1}_{B_n} g \leq \alpha f_n.$$

Sei $x \in X$.
Fall 1: Ist $f(x) = 0$, so ist wegen $0 \leq g \leq f$ auch $g(x) = 0$. Somit ist $x \in B_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Fall 2: Ist $f(x) > 0$, so ist

$$\frac{1}{\alpha} g(x) < f(x)$$

(Dies ist klar für $g(x) = 0$ und falls gilt: $g(x) > 0$, so ist $\frac{1}{\alpha} g(x) < g(x) \leq f(x)$)
Da f_n zulässig für f ist, gilt: $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$, weshalb ein $n(x) \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\frac{1}{\alpha} g(x) < f(x) \text{für jedes } n \geq n(x)$$

Es folgt $x \in B_n$ für jedes $n \geq n(x)$.
Fazit: $X = \bigcup B_n$.

$$A_j = A_j \cap X = A_j \cap \left(\bigcup B_n \right) = \bigcup (A_j \cap B_n) \text{ und } A_j \cap B_n \subseteq A_j \cap B_{n+1}$$

Aus 1.7 folgt $\lambda(A_j) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_j \cap B_n)$. Das liefert:

$$\begin{aligned}
\int_X g \, dx &= \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j \lim_{n\to\infty} \lambda(A_j \cap B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(A_j \cap B_n) \overset{4.1}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{B_n} g \, dx \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_X \alpha f_n \, dx = \alpha L
\end{aligned}$$

g war einfach und $0 \leq g \leq f$ beliebig, sodass

$$\sup M(f) \leq \alpha L \overset{\alpha \to 1}{\Longrightarrow} \sup M(f) \leq L$$

■

Satz 4.5
Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $\alpha, \beta \geq 0$.

(1) $\int_X (\alpha f + \beta g)(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_X f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_X g(x)\ \mathrm{d}x$

(2) Ist $f \leq g$ auf X, so gilt $\int_X f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_X g(x)\ \mathrm{d}x$

(3) $\int_X f(x)\ \mathrm{d}x = 0 \iff \lambda(\{f > 0\}) = 0$

Beweis

(1) (f_n) und (g_n) seien zulässig für f bzw. g. Weiter sei $(h_n) := \alpha(f_n) + \beta(g_n)$. Dann ist wegen 3.7 und $\alpha, \beta \geq 0$, dass (h_n) zulässig für $\alpha f + \beta g$ ist. Dann:

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha f + \beta g)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\alpha(f_n) + \beta(g_n))\ dx \\ &\overset{4.2}{=} \alpha \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n)\, dx + \beta \lim_{n\to\infty} \int_X (g_n)\, dx \\ &= \alpha \int_X f\, dx + \beta \int_X g\, dx \end{aligned}$$

(2) Wegen $f \leq g$ auf X ist $M(f) \subseteq M(g)$ und somit auch $\sup M(f) \leq \sup M(g)$. Aus 4.4 folgt nun die Behauptung.

(3) Setze $A := \{f > 0\} = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

„ $\Longrightarrow$ “ Sei $\int_X f\, dx = 0$ und $A_n := \{f > \frac{1}{n}\}$. Dann ist $A = \bigcup A_n$ und $f \geq \frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}$. Damit folgt:

$$0 = \int_X f\, dx \overset{(2)}{\geq} \int_X \frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}\, dx = \frac{1}{n}\lambda(A_n)$$

Es ist also $\lambda(A_n) = 0$ und damit gilt weiter

$$\lambda(A) = \lambda(\bigcup A_n) \overset{1.7}{\leq} \sum \lambda(A_n) = 0$$

Also ist auch $\lambda(A) = 0$.

„ $\Longleftarrow$ “ Sei $\lambda(A) = 0$, (f_n) zulässig für f und $c_n := \max\{f_n(x) : x \in X\}$. Dann ist $f_n \leq c_n \mathbb{1}_A$ und es gilt:

$$0 \leq \int_X f_n\, dx \overset{(2)}{\leq} \int_X c_n \mathbb{1}_A\, dx = c_n \lambda(A) \overset{\text{Vor.}}{=} 0$$

Es ist also $\int_X f_n\, dx = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit auch $\int_X f\, dx = 0$ ■

Satz 4.6 (Satz von Beppo Levi (Version I))
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ und es gelte $f_n \leq f_{n+1}$ auf X für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(1) Für alle $x \in X$ existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(2) Die Funktion $f : X \to [0, \infty]$ definiert durch:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ist messbar.

(3) $\int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_X f(x)\ \mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mathrm{d}x$

Beweis

(1) Für alle $x \in X$ ist $(f_n(x))$ wachsend, also konvergent in $[0, +\infty]$.

(2) folgt aus 3.5.

(3) Sei $\left(u_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ zulässig für f_n und $v_j := \max\left\{u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, \ldots, u_j^{(j)}\right\}$. Aus 3.7 folgt, dass v_j einfach ist und aus der Konstruktion lässt sich nachrechnen, dass gilt:

$$0 \leq v_j \leq v_{j+1} \text{ und } v_j \leq f_n \leq f \text{ und } f_n = \sup_{j\in\mathbb{N}} u_j^{(n)} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} v_j \text{ (auf } X)$$

Damit ist (v_j) zulässig für f und es gilt:

$$\int_X f\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_X v_j\,dx \leq \lim_{j\to\infty} \int_X f_j\,dx \leq \int_X f\,dx$$

■

Satz 4.7 (Satz von Beppo Levi (Version II))
Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$.

(1) Für alle $x \in X$ existiert $s(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$.

(2) $s : X \to [0, \infty]$ ist messbar.

(3) $\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j(x)\ \mathrm{d}x$

Beweis
Setze

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$$

Dann erfüllt (s_n) die Voraussetzungen von 4.6. Aus 4.6 und 4.5(1) folgt die Behauptung. ■

Satz 4.8
Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und es sei $\varnothing \neq Y \in \mathfrak{B}(X)$ (also $Y \subseteq X$ und $Y \in \mathfrak{B}_d$). Dann sind die Funktionen $f_{|Y} : Y \to [0, \infty]$ und $\mathbb{1}_Y \cdot f : X \to [0, \infty]$ messbar und es gilt:

$$\int_Y f(x)\ \mathrm{d}x := \int_Y f_{|Y}(x)\ \mathrm{d}x = \int_X (\mathbb{1}_Y \cdot f)(x)\ \mathrm{d}x$$

Beweis
Fall 1: Die Behauptung ist klar, falls f einfach ist. (Übung!)
Fall 2: Sei (f_n) zulässig für f und $g_n := f_{n|Y}, h_n := \mathbb{1}_Y f_n$ Dann ist (g_n) zulässig für $f_{|Y}$ und (h_n) ist zulässig für $\mathbb{1}_Y f_n$. Insbesondere sind $f_{n|Y}$ und $\mathbb{1}_Y f_n$ nach 3.5 messbar. Weiter gilt:

$$\int_Y f_{|Y}\, dx \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_Y g_n\, dx \overset{Fall 1}{=} \int_X h_n\, dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \mathbb{1}_Y f\, dx$$

■

Definition
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. f heißt (Lebesgue-)**integrierbar** (über X), genau dann wenn $\int_X f_+(x)\ \mathrm{d}x < \infty$ **und** $\int_X f_-(x)\ \mathrm{d}x < \infty$.
In diesem Fall heißt:

$$\int_X f(x)\ \mathrm{d}x := \int_X f_+(x)\ \mathrm{d}x - \int_X f_-(x)\ \mathrm{d}x$$

das (Lebesgue-)**Integral** von f (über X).

Beachte:
Ist $f : X \to [0, \infty]$ messbar, so ist f genau dann integrierbar, wenn gilt:

$$\int_X f(x)\ \mathrm{d}x < \infty$$

Beispiel
Sei $X \in \mathfrak{B}_1$, $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in X \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in X \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \mathbb{1}_{X\cap\mathbb{Q}}$. $X, \mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1 \implies X \cap \mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1 \implies f$ ist messbar.

$$0 \leq \int_X f(x)\ \mathrm{d}x = \int_X \mathbb{1}_{X\cap\mathbb{Q}}\ \mathrm{d}x = \lambda(X \cap \mathbb{Q}) \leq \lambda(\mathbb{Q}) = 0$$

Das heißt: $f \in \mathfrak{L}^1(X)$, $\int_X f\ \mathrm{d}x = 0$. Ist speziell $X = [a, b]$ $\quad (a < b)$, so gilt: $f \in \mathfrak{L}^1([a, b])$, aber $f \notin R([a, b])$.

Satz 4.9 (Charakterisierung der Integrierbarkeit)
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist integrierbar.

(2) Es existieren integrierbare Funktionen $u, v : X \to [0, +\infty]$ mit $u(x) = v(x) = \infty$ für **kein** $x \in X$ und $f = u - v$ auf X.

(3) Es existiert eine integrierbare Funktion $g : X \to [0, +\infty]$ mit $|f| \leq g$ auf X.

(4) $|f|$ ist integrierbar.

Zusatz:

(1) $\mathfrak{L}^1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_X |f| \, dx < \infty\}$ (folgt aus (1)-(4)).

(2) Sind u, v wie in (2), so gilt: $\int_X f \, dx = \int_X u \, dx - \int_X v \, dx$.

Beweis (des Satzes)

(1) $\Rightarrow$ (2) $u := f_+$, $v := f_-$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $g := u + v$, dann ist $u, v \geq 0$, $g \geq 0$, $\int_X g \, dx \overset{4.5}{=} \int_X u \, dx + \int_X v \, dx < \infty$. $\implies$ g ist integrierbar und: $|f| = |u - v| \leq |u| + |v| = u + v = g$ auf X.

(3) $\Rightarrow$ (4) 4.5 $\implies \int_X |f| \, dx \leq \int_X g \, dx < \infty \implies f$ ist integrierbar.

(4) $\Rightarrow$ (1) $f_+, f_- \leq |f|$ auf X. $\implies 0 \leq \int_X f_\pm \, dx \leq \int_X |f| \, dx < \infty \overset{Def.}{\implies} f$ ist integrierbar. ■

Beweis (des Zusatzes)

(1) ✓

(2) Es ist $f = u - v = f_+ - f_- \implies u + f_- = f_+ + v$.

$$\implies \int_X u \, dx + \int_X f_- \, dx \overset{4.5}{=} \int_X (u + f_-) \, dx = \int_X (f_+ + v) \, dx \overset{4.5}{=} \int_X f_+ \, dx + \int_X v \, dx$$

$$\implies \int_X u \, dx - \int_X v \, dx = \int_X f_+ \, dx - \int_X f_- \, dx \overset{Def.}{=} \int_X f \, dx.$$

■

Folgerungen 4.10

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $N := \{|f| = +\infty\} = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$. Dann ist $N \in \mathfrak{B}(X)$ und $\lambda(N) = 0$.

Beweis

3.4 $\implies N \in \mathfrak{B}(X)$. $n\mathbb{1}_N \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$n \cdot \lambda(N) = \int_X n\mathbb{1}_N \, dx \overset{4.5}{\leq} \int_X |f| \, dx \overset{4.9}{<} \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Also: $0 \leq n\lambda(N) \leq \int_X |f| \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \lambda(N) = 0$ ■

Satz 4.11

$f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien integrierbar und es sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) αf ist integrierbar und $\int_X (\alpha f) \, dx = \alpha \int_X f \, dx$.

(2) Ist $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auf X definiert, so ist $f + g$ integrierbar und es gilt:

$$\int_X (f + g) \, dx = \int_X f \, dx + \int_X g \, dx$$

(Für $f = +\infty$ und $g = -\infty$ ist $f + g$ beispielsweise nicht definiert.)

(3) $\mathfrak{L}^1(X)$ ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung $f \mapsto \int_X f \, dx$ ist linear auf $\mathfrak{L}^1(X)$.

(4) $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ sind integrierbar.

(5) Ist $f \leq g$ auf X, so ist $\int_X f \text{ d}x \leq \int_X g \text{ d}x$.

(6) $|\int_X f \text{ d}x| \leq \int_X |f| \text{ d}x$. (Dreiecksungleichung für Integrale)

(7) Sei $\varnothing \neq Y \in \mathfrak{B}(X)$. Dann sind die Funktionen $f_{|Y} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{1}_Y \cdot f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und

$$\int_Y f(x) \text{ d}x := \int_Y f_{|Y}(x) \text{ d}x = \int_X (\mathbb{1}_Y \cdot f)(x) \text{ d}x$$

(8) Sei $\lambda(X) < \infty$ und $h : X \to \mathbb{R}$ sei messbar und beschränkt. Dann: $h \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $|\int_X h \text{ d}x| \leq \|h\|_\infty \lambda(X)$ (mit $\|h\|_\infty := \sup\{|h(x)| : x \in X\}$)

Beweis

(1) folgt aus $\alpha f)_\pm = \alpha f_\pm$, falls $\alpha \geq 0$ und $\alpha f)_\pm = -\alpha f_\mp$, falls $\alpha < 0$.

(2) Es gilt $f + g = \underbrace{f_+ + g_+}_{=:u} - \underbrace{(f_- + g_-)}_{=:v} = u - v$. Dann:

$$\int_X u\text{d}x = \int_X f_+ + g_+\text{d}x \overset{4.5}{=} \int_X f_+\text{d}x + \int_X g_+\text{d}x < \infty$$

Genauso: $\int_X v\text{d}x < \infty$
Mit Satz 4.9 folgt: $f + g$ ist integrierbar. Weiter:

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\text{d}x &\overset{4.9}{=} \int_X u\text{d}x - \int_X v\text{d}x \\ &= \int_X f_+\text{d}x + \int_X g_+\text{d}x - \left(\int_X f_-\text{d}x + \int_X g_-\text{d}x\right) \\ &= \int_X f\text{d}x + \int_X g\text{d}x\end{aligned}$$

(3) folgt aus (1) und (2).

(4) Mit Satz 3.5 folgt: $\max\{f, g\}$ ist messbar. Es gilt:

$$0 \leq |\max\{f, g\}| \leq |f| + |g|$$

Mit 4.9 und Aussage (2) folgt $|f| + |g|$ ist integrierbar. Dann folgt mit Satz 4.9: $\max\{f, g\}$ ist integrierbar.
Analog zeigt man: $\min\{f, g\}$ ist integrierbar.

(5) Nach Voraussetzung ist $f \leq g$ auf X. Dann gilt: $f_+ \leq g_+$ auf X und $f_- \geq g_-$ auf X. Es folgt:

$$\int_X f\text{d}x = \int_X f_+\text{d}x - \int_X f_-\text{d}x \overset{4.5}{\leq} \int_X g_+\text{d}x - \int_X g_-\text{d}x = \int_X g\text{d}x$$

(6) Es ist $\pm f \leq |f|$. Mit Aussage (1) und (5) folgt: $\pm \int_X f\text{d}x = \int_X (\pm f)\text{d}x \leq \int_X |f|\text{d}x$.
Es ist $\int_X f\text{d}x = |\int_X f\text{d}x|$ oder $-\int_X f\text{d}x = |\int_X f\text{d}x|$

(7) Mit Bemerkung (2) vor 3.1 und Satz 3.6.(2) folgt: $f_{|Y}$ und $\mathbb{1}_Y \cdot f$ sind messbar. Es gilt: $(f_{|Y})_\pm = (f_\pm)_{|Y}$ und $(\mathbb{1}_Y \cdot f)_\pm = \mathbb{1} \cdot f_\pm$. Weiterhin gilt $0 \leq \mathbb{1}_Y f_\pm \leq f_\pm$. Mit 4.9 folgt dann, daß $\mathbb{1}_Y f_\pm$ integrierbar ist. Dann:

$$\begin{aligned}\int_X (\mathbb{1}_Y f)\mathrm{d}x &= \int_X \mathbb{1} f_+ \mathrm{d}x - \int_X \mathbb{1}_Y f \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_Y (f_+)_{|Y}\mathrm{d}x}_{<\infty} - \underbrace{\int_Y (f_-)_{|Y}\mathrm{d}x}_{<\infty}\end{aligned}$$

Es folgt: $f_{|Y}$ ist integrierbar und $\int_Y f_{|Y}\mathrm{d}x = \int_Y (f_+)_{|Y}\mathrm{d}x - \int_Y (f_-)_{|Y}\mathrm{d}x = \int_X (\mathbb{1}_Y f)\mathrm{d}x$.

(8) Es ist $|h| \leq \|h\|_\infty \cdot \mathbb{1}_X$. Dann folgt:

$$\int_X |h|\mathrm{d}x \leq \int_X \|h\|_\infty \mathbb{1}_X \mathrm{d}x = \|h\|_\infty \lambda(X) < \infty$$

Damit: $|h|$ ist integrierbar und mit 4.9 auch h. Da h beschränkt ist, folgt: $h \in \mathfrak{L}^1(X)$. Schließlich:

$$\left|\int_X h\mathrm{d}x\right| \leq \int_X |h|\mathrm{d}x \leq \|h\|_\infty \lambda(X)$$

■

Satz 4.12

(1) Sind $\varnothing \neq A, B \in \mathfrak{B}(X)$ disjunkt, $X = A \cup B$ und ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar (über X), so ist f integrierbar über A und integrierbar über B und es gilt:

$$\int_X f \, \mathrm{d}x = \int_A f \, \mathrm{d}x + \int_B f \, \mathrm{d}x$$

(2) Ist $\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in \mathfrak{L}^1(K)$.

Beweis

(1) Aus 4.11(7) folgt: f ist integrierbar über A und integrierbar über B. Es ist

$$\int_X f(x) \, \mathrm{d}x = \int_X (\mathbb{1}_{A\cup B} \cdot f)(x) \, \mathrm{d}x = \int_X ((\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) f)(x) \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_X (\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f)(x) \, \mathrm{d}x \overset{4.11(2)}{=} \int_X \mathbb{1}_A f \, \mathrm{d}x + \int_X \mathbb{1}_B f \, \mathrm{d}x \overset{4.11(7)}{=} \int_A f \, \mathrm{d}x + \int_B f \, \mathrm{d}x.$$

(2) K ist kompakt, also gilt: $\lambda(K) < \infty$. Aus 3.2(1) folgt, dass f messbar ist. Analysis II („stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Minimum und Maximum an“) liefert: f ist beschränkt. Insgesamt folgt mit 4.11(8) schließlich: $f \in \mathfrak{L}^1(K)$. ■

Satz 4.13

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $X := [a, b]$ und $f \in C(X)$. Dann ist $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und es gilt:

$$L - \int_X f(x) \, \mathrm{d}x = R - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

Beweis
Sei $n \in \mathbb{N}$, $t_j^{(n)} := a + j\frac{b-a}{n}$ $(j = 0, \dots, n)$ und $I_j^{(n)} := \left[t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]$ $(j = 1, \dots, n)$.

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} f\left(t_j^{(n)}\right) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=\lambda_1\left(I_j^{(n)}\right)} \quad \text{ist Riemannsche Zwischensumme für R-}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Aus Analysis I folgt $S_n \to$ R- $\int_a^b f(x)\, dx$ $(n \to \infty)$. Definiere $f_n := \sum_{j=1}^{n} f\left(t_j^{(n)}\right) \mathbb{1}_{I_j^{(n)}}$. Dann ist f_n einfach und

$$\int_X f_n(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} f\left(t_j^{(n)}\right) \lambda_1\left(I_j^{(n)}\right) = S_n$$

f ist auf X gleichmäßig stetig also konvergiert f_n auf X gleichmäßig gegen f (Übung!), also gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \to 0 \ (n \to \infty)$$

Aus 4.12(2) folgt $f \in \mathfrak{L}^1(X)$

$$\left|\text{L-}\int_X f(x)\, dx - S_n\right| = \left|\text{L-}\int_X (f - f_n)\, dx\right| \overset{4.11}{\leq} \int_X (f - f_n)\, dx \overset{4.11}{\leq} \|f - f_n\|_\infty \underbrace{\lambda(X)}_{=b-a} \to 0$$

Daraus folgt $S_n \to$ L- $\int_X f\, dx$ ∎

Satz 4.14
Sei $a \in \mathbb{R}, X := [a, \infty)$ und $f \in C(X)$. Dann gilt:

(1) f ist messbar.

(2) $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ genau dann wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ **absolut** konvergent ist. In diesem Fall gilt:

$$L - \int_X f(x)\ \mathrm{d}x = R - \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$$

Entsprechendes gilt für die anderen Typen uneigentlicher Riemann-Integrale.

Beweis
Eine Hälfte des Beweises folgt in Kapitel 6. ∎

Beispiel

(1) Sei $X = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Aus Analysis I wissen wir, dass R-$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (absolut) konvergent ist. Also ist $f \in \mathfrak{L}^1(X)$.
Außerdem wissen wir aus Analysis I, dass R-$\int_0^1 \frac{1}{x}$ divergent ist. Also ist $f^2 \notin \mathfrak{L}^1(X)$.

(2) Sei $X = [0, \infty)$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Aus Analysis I wissen wir, dass R-$\int_1^\infty f(x)\, dx$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Also ist $f \notin \mathfrak{L}^1(X)$.