

4. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie

In diesem §en sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition

- (1) f heißt in $z_0 \in D$ **komplex differenzierbar** (komplex differenzierbar) : \iff es ex. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h})$. I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die Ableitung von f in z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet.
- (2) f heißt auf D **holomorph** (analytisch) : $\iff f$ ist zu jedem $z \in D$ differenzierbar.
- (3) $H(D) := \{g : D \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ ist auf } D \text{ holomorph}\}$.

Beispiele:

- (1) $D = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, f(z) := z^n$.
Wie in \mathbb{R} zeigt man: $f \in H(\mathbb{C})$ und $f'(z) = nz^{n-1} \forall z \in \mathbb{C}$.
- (2) $D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 $Q(h) := \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{z_0 + h} - \bar{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$; z.B. ist $Q(h) = 1$, falls $h \in \mathbb{R}$ und $Q(h) = -1$, falls $h \in i\mathbb{R} := \{it : t \in \mathbb{R}\}$. Also ex. $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$ **nicht**. f ist also in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Sei $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$. Fasst man D als Teilmenge des \mathbb{R}^2 auf, und schreibt man $z = (x, y)$ statt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), so ist $f = (u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine vektorwertige Funktion.
 $f(z) = u(z) + iv(z) = (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$.

Erinnerung (Ana II): f heißt im $(x_0, y_0) \in D$ reell differenzierbar : \iff es ex. reelle 2×2 -Matrix A :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h, k)\|} = 0$$

Beispiel

$D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$, reelle Auffassung: $f(x, y) = (x, -y)$. f ist in **jedem** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar, aber in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Satz 4.1

Sei $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$; Sei $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0 \in D$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$).

f ist in z_0 komplex differenzierbar. : $\iff f$ ist in (x_0, y_0) reell differenzierbar und es gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** (CRD):

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$

Beweis

Sei $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ und $s = h + ik \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R}$)

f ist in z_0 komplex differenzierbar und $f'(z_0) = a \iff \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0+s) - f(z_0) - as}{|s|} = 0$

$$\begin{aligned} \xLeftrightarrow{\text{Zerlegen}} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} & \left(\underbrace{\frac{u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h + \beta k)}{\|(h, k)\|}}_{=:\varphi_1(h,k)} \right. \\ & \left. + i \underbrace{\frac{v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) - \beta h - \alpha k}{\|(h, k)\|}}_{=:\varphi_2(h,k)} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \varphi_1(h, k) \rightarrow 0, \varphi_2(h, k) \rightarrow 0 ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

$$\iff u \text{ und } v \text{ sind in } (x_0, y_0) \text{ reell differenzierbar, } u'(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta) \text{ und } v'(x_0, y_0) = (\beta, \alpha)$$

$$\iff f \text{ ist in } (x_0, y_0) \text{ reell differenzierbar und es gelten die CRD. Ist } f \text{ in } z_0 \text{ komplex differenzierbar} \implies f'(z_0) = a = \alpha + i\beta = u_x(z_0) + iv_x(z_0) \quad \blacksquare$$

Folgerung 4.2

Es sei $f \in H(D)$

$$(1) \quad f \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant} \iff f' = 0 \text{ auf } D.$$

$$(2) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq \mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(3) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq i\mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(4) \quad \text{Ist } D \text{ ein Gebiet so gilt:}$$

$$(i) \quad f \text{ ist auf } D \text{ konstant} \iff f' = 0 \text{ auf } D.$$

$$(ii) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq \mathbb{R} \text{ oder } \subseteq i\mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ konstant.}$$

Beweis

$u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$.

$$(1) \quad " \implies " \text{ klar!}$$

$$" \Leftarrow " \quad 4.1 \implies u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \text{ auf } D. \text{ Ana II} \implies u, v \text{ sind auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(2) \quad f(D) \subseteq \mathbb{R} \implies v = 0 \text{ auf } D \implies v_x = v_y = 0 \text{ auf } D \xrightarrow{\text{CRD}} u_x = u_y = 0 \text{ auf } D. \text{ Weiter wie bei (1).}$$

$$(3) \quad \text{Sei } f(D) \subseteq i\mathbb{R}, g := if \implies g \in H(D), g(D) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{(2)} g \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant.} \implies f \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(4) \quad \text{folgt aus (1),(2),(3) und 3.4} \quad \blacksquare$$

Satz 4.3

Sei $z_0 \in D$ und f in z_0 komplex differenzierbar.

(1) f ist in z_0 stetig.

(2) Sei $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und g sei komplex differenzierbar in z_0

(i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ komplex differenzierbar in z_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$

(ii) fg ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(iii) Ist $g(z_0) \neq 0$, so ex. ein $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D, g(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$,
 $\frac{f}{g} : U_\delta(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$\frac{f'}{g}(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

(3) **Kettenregel:** Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, E$ offen, $f(D) \subseteq E$ und $h : E \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(z_0)$. Dann ist $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 und

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Definition

Sei $f \in H(D)$ und $z_0 \in D$. f heißt in z_0 **zweimal komplex differenzierbar** : $\iff f'$ ist in z_0 komplex differenzierbar. I.d. Fall: $f''(z_0) := (f')'(z_0)$ (2. Ableitung von f in z_0). Entsprechend definiert man höhere Ableitungen von f in z_0 , bzw. auf D . Übliche Bezeichnungen: $f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(0)} := f$

