4 Das starke Gesetz der großen Zahlen

Satz 4.1 (Borel-Cantelli Lemma) *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *eine Folge von Ereignissen.*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

ist das Ereignis, dass unendlich viele der A_n*'s eintreten.*

a) Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Longrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

b) Sind die Ereignisse $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ *stochastisch unabhängig, so gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Longrightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Beweis

a) Sei $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(B_n) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
Da $B_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ folgt:

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0.$$

b) Sei $P_n := P(A_n),\ n \in \mathbb{N}.(A_n)$ stoch. unabh $\Rightarrow (A_n^c)$ stoch unabh. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \le P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k^c) &\overset{\text{stetig von oben}}{=} \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{n=1}^{N} A_k^c) \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} (1 - P_k) \\ &\le \lim_{N\to\infty} \exp(-\sum_{k=1}^{N} P_k) \overset{\text{nach Vor.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Somit:

$$0 \le P((\limsup_{n\to\infty} A_n)^c) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = 0 \qquad \blacksquare$$

Definition *Es seien $X, X_1, X_2, \dots$ ZV auf einem W'Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*
X_n konvergiert P-fast sicher gegen X, ($X_n \stackrel{f.s.}{\to} X$) wenn gilt:

$$P\left(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1.$$

Bemerkung $\{\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \in \mathcal{A}$, denn:

(i) $\sup_{n\geq 1} X_n$ ist $\mathcal{A}$-messbar, da $\{\sup_{n\geq 1} X_n \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X_n \leq a\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

$\inf\limits_{n\geq 1} X_n = -\sup\limits_{n\geq 1}(-X_n)$ ist $\mathcal{A}$-mb. $\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} X_n = \inf\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{k\geq n} X_k, \liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ $\mathcal{A}$-messbar.

(ii) $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = (\liminf\limits_{n\to\infty}(X_n - X))^{-1}(\{0\}) \cap (\limsup\limits_{n\to\infty}(X_n - X))^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}$

Im Folgenden sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von ZV auf einem W'Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Starke Gesetz der großen Zahlen sind Resultate der Form

$$\frac{1}{a_n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - b_n\right) \stackrel{f.s.}{\to} 0$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Der wichtigste Satz ist hier:

Satz 4.2 (Starkes Gesetz der großen Zahlen) *Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. ZV mit $E|X_1| < \infty$, so gilt:*

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} X_i}_{=s_n} \stackrel{f.s.}{\to} EX_1.$$

Beweis Sei zunächst $X_k \geq 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ und $Y_k := X_k \cdot \mathbf{1}_{[X_k \leq k]}$ (Y_k entsteht aus X_k durch Abschneiden bei k). Sei $S_n^* := \sum_{k=1}^{n} Y_k$ $EY_k = E[X_k \cdot \mathbf{1}_{[X_k\leq k]}] = E\left[X_1 \cdot \mathbf{1}_{[X_1 \leq k]}\right] \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} EX_1$ mit S.2.1 (Monotone Konvergenz).
Aus der Analysis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a.$$

Damit folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ES_n^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EY_k = EX_1.$$

Die Y_n's sind wieder unabhängig und es gilt:

$$\mathrm{Var}(S_n^*) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_k) \leq \sum_{k=1}^{n} EY_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2 \cdot \mathbf{1}_{[X_k\leq n]}] = n \cdot E[X_1^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}(X_1)]\ (*)$$

Sei $\alpha > 1$ und $m_n := \lfloor \alpha^n \rfloor\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ sei $\Psi(x) := \sum_{n=N(x)}^{\infty} \frac{1}{m_n}$ mit $N(x) := \min\{n \mid m_n \geq x\}$

Für beliebige $z \geq 1$ gilt: $\lfloor z \rfloor \geq \frac{z}{2}$ und somit $\frac{1}{m_n} = \frac{1}{\lfloor \alpha^n \rfloor} \leq \frac{2}{\alpha^n}$ und $\alpha^{N(x)} \geq \lfloor \alpha^{N(x)} \rfloor = m_{N(x)} \geq x$. Mit $k := \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$ gilt:

$$\Psi(x) = \sum_{n=N(x)}^{\infty} \frac{1}{m_n} \leq 2 \cdot \sum_{n=N(x)}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} = 2 \cdot \alpha^{-N(x)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} \leq \frac{k}{x} \ (**)$$

Die Ungleichung von Tschebyscheff liefert $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{m_n}|S^*_{m_n} - ES^*_{m_n}| > \varepsilon\right) &\overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 m_n} E[X_1^2 \cdot \mathbf{1}_{[0,m_n]}(X_1)] \\ &\overset{\text{S.2.1}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} E[X_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \cdot \mathbf{1}_{[0,m_x]}(X_1)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} E[X_1^2 \Psi(X_1)] \overset{(**)}{\leq} \frac{k}{\varepsilon^2} EX_1 \end{aligned}$$

$\overset{\text{Üb}}{\Longrightarrow} \frac{1}{m_n}(S^*_{m_n} - ES^*_{m_n}) \overset{f.s.}{\to} 0 \overset{\text{Üb}}{\Longrightarrow} \frac{1}{m_n} S^*_{m_n} \overset{f.s.}{\to} EX_1$.

Nächstes Ziel: $*$ weg bekommen.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 > n) \\ &\leq \int_{[0,\infty]} P(X_1 > x) \mathbf{1}(x) \overset{\text{Bsp 3.1}}{=} EX_1 < \infty. \end{aligned}$$

$\overset{S.4.1a)}{\Longrightarrow} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega \,|\, X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \text{ für unendlich viele } n\}}_{=:N_0}) = 0$
$\forall\, \omega \notin N_0 \,\exists\, k(\omega) \in \mathbb{N}$ mit $X_n(\omega) = Y_n(\omega) \ \forall\, n \geq k(\omega)$.
Auf N_0^C gilt also:

$$\frac{1}{n}(S_n(\omega) - S^*_n(\omega)) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k(\omega)} X_i(\omega) - Y_i(\omega)) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n}(S_n - S^*_n) \overset{f.s.}{\to} 0 \quad \Longrightarrow \frac{1}{m_n} S_{m_n} \overset{f.s.}{\to} EX_1 \quad (\Delta)$$

Jetzt muss die Einschränkung auf die Teilfolge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weg.
Da $S_n \geq 0$, gilt für $m_n \leq k \leq m_{n+1}$:

$$\frac{m_n}{m_{n+1}} \cdot \frac{S_{m_n}}{m_n} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{m_{n+1}}{m_n} \cdot \frac{S_{m_{n+1}}}{m_{n+1}}$$

Da $\frac{m_{n+1}}{m_n} \overset{n\to\infty}{\to} \alpha$ folgt mit (Δ):

$$\frac{1}{\alpha} EX_1 \leq \liminf_{k\to\infty}(\frac{S_k}{k}) \leq \limsup_{k\to\infty}(\frac{S_k}{k}) \leq \alpha EX_1 \quad P\text{-f.s.}$$

Sei N_α die Ausnahmemenge zu α in der Konvergenz (Δ). Da $\alpha > 1$ beliebig, gilt auf $\underbrace{(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_{1+\frac{1}{j}})}_{P\text{-Nullmenge}}{}^C$:

$$EX_1 \leq \liminf_{k\to\infty}(\frac{S_k}{k}) \leq \limsup_{k\to\infty}(\frac{S_k}{k}) \leq EX_1$$

$$\implies \overline{X_n} := \frac{1}{n} S_n \overset{f.s.}{\to} EX_1$$

Jetzt muss noch die Bedingung $X_k \geq 0$ weg. Es folgt:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^+ \; - \; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^- \overset{f.s.}{\to} EX_1^+ \; - \; EX_1^- = EX_1.$$

■

Beispiel 4.1 (Wiederholte Spiele)
Gegeben 2 Spieler. Spieler A erzielt in Runde n X_n Punkte und Spieler B Y_n Punkte. Die Zufallsvariablen seien alle unabhängig und identisch verteilt. Es sei $D_n := X_n - Y_n$. Spieler A gewinnt Runde n, falls $D_n > 0$.
Sei $p_n = P(\sum_{k=1}^{n} D_k > 0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A nach n Runden mehr Punkte hat. Es gilt nach S.4.2:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[D_k>0]} \overset{f.s.}{\to} E\left[\mathbf{1}_{[D_1>0]}\right] = p_1.$$

Ist $p_1 > \frac{1}{2}$, so gewinnt Spieler A langfristig mehr Runden als B. Dies gilt jedoch nicht, wenn die Punkte addiert werden! Beispiel dazu:

$$X_k := \begin{cases} n+1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_1 \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p_1 \end{cases}, \quad Y_k \equiv n \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1$$

Sei $p_1 = 0,999,\ n = 1000. \implies p_{1000} = (0,999)^{1000} \approx 0,37$