6. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Bekannt aus §5: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut in jedem $z \in \mathbb{C}$

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (z \in \mathbb{C})$$

klar: $e^0 = 1, e^1 = e$

Satz 6.1

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig.

(2) $\exp \in H(\mathbb{C})$ und $\exp'(z) = \exp(z) \forall z \in \mathbb{C}$

(3) **Additionstheorem**: $e^{z+w} = e^z e^w \forall z, w \in \mathbb{C}$

(4) $e^z \cdot e^{-z} = 1$, insbesondere $e^z \neq 0$

(5) Für $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R}) : e^z = e^x e^{iy}, |e^{iy}| = 1, |e^z| = e^x$

Beweis

(1) folgt aus 5.2

(2) 5.4 $\implies$ $\exp \in H(\mathbb{C})$ und $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)(z \in \mathbb{C})$

(3) Sei $c \in \mathbb{C}$ zunächst fest.
$f(z) := e^z e^{c-z} (z \in \mathbb{C})$,
$f \in H(\mathbb{C})$ und $f'(z) = e^z e^{c-z} + e^z e^{c-z}(-1) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ ist ein Gebiet $\overset{4.2}{\implies}$ f ist auf $\mathbb{C}$ konstant.
$f(0) = e^c$. Also: $e^z e^{c-z} = e^c \quad \forall z \in \mathbb{C} \forall c \in \mathbb{C}$
Setze $c := z + w$

(4) folgt aus (3)

(5) Nur zu zeigen: $|e^{iy}| = 1 (y \in \mathbb{R})$

$$\overline{e^{iy}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{iy})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} = e^{-iy}$$

$\implies |e^{iy}|^2 = e^{iy}\overline{e^{iy}} = e^{iy}e^{-iy} \overset{(4)}{=} 1$ ■

Definition
Für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \textbf{Cosinus} \\ \sin z &:= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \textbf{Sinus} \end{aligned}$$

Satz 6.2
(1)

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(2) $\cos, \sin \in H(\mathbb{C})$
$\cos' z = -\sin z,\ \sin' z = \cos z\ \forall z \in \mathbb{C}$

(3) $e^{iz} = \cos z + i \sin z\ \forall z \in \mathbb{C}$.
Insbesondere: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi\ \forall \varphi \in \mathbb{R}$. Damit lautet für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Darstellung in Polarkoordinaten: $z = |z| e^{i \arg z}$.

(4) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

(5) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1\ \forall z \in \mathbb{C}$

Beweis
(1) nur für cos:
$\forall z \in \mathbb{C}:$

$$\cos z = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{i^n + (-i)^n}{n!}}_{\begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2(-1)^n, & n = 2k \end{cases}} z^n$$

$\implies \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

(2) Aus der Definition folgt: $\cos \in H(\mathbb{C})$ und
$\cos' z = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{-1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z$
Analog für den Sinus.

(3) , (4) , (5) folgen aus der Definition. ∎

Folgerung 6.3

(1) $e^{2k\pi i} = 1 \; \forall k \in \mathbb{Z}$; insbesondere: $e^{2\pi i} = 1$

(2) $e^{i\pi} + 1 = 0$

(3) Für $z \in \mathbb{C} : e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$

(4) $e^{z+2\pi i} = e^z \; \forall z \in \mathbb{C}$ (Die Exponentialfkt. hat die Periode 2π)

(5) Für $z \in \mathbb{C}$:
$\sin z = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi$
$\cos z = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : z = \frac{2k+1}{2}\pi$

Beweis

(1) 6.2 (3) $\implies e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 (k \in \mathbb{Z})$

(2) $e^{i\pi} \overset{6.2(3)}{=} \cos\pi + i\sin\pi = -1$

(3) " $\implies$ " Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}(x, y \in \mathbb{R})$ und $e^z = 1$
$\implies e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = 1$
$\implies e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0 \implies \sin y = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : y = k\pi$
$1 = |e^z| = e^x \implies x = 0 \implies \cos y = 1 \implies k = 2j (j \in \mathbb{Z}) \implies z = i2j\pi$

(4) $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$

(5) Nur für sin. Sei $z \in \mathbb{C}$:
$\sin z = 0 \iff e^i z = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \overset{(3)}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : 2iz = 2k\pi i$
$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi.$ ■

Definition

Für $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \textbf{Tangens} \\ \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \textbf{Cotangens} \end{aligned}$$

tan und cot sind auf ihrem Definitionsbereichen holomorph.