11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein **Gebiet**. Fast wörtlich wie in Analysis I zeigt man:

Satz 11.1 (Identitätssatz für Potenzreihen)
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$,
es sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $z \in U_r(z_0)$, es sei (z_k) eine
Folge in $\dot{U}_r(z_0)$ mit $z_k \to z_0$ und es gelte $f(z_k) = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$.
Dann: $a_n = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 11.2 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)
Es sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$, (z_k) eine Folge in $G \setminus \{z_0\}$ mit $f(z_k) = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$
und $z_k \to z_0$.
Dann: $f = 0$ auf G.

Beweis
$\exists r > 0$: $U_r(z_0) \subseteq G$. 10.4 $\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \ \forall\ z \in U_r(z_0)$
$\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $z_k \in U_r(z_0) \ \forall\ k \geq k_0$. 11.1 $\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow z_0 \in A := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0\}$. $B := G \setminus A$, $A \cap B = \emptyset$
Sei $a \in A$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(a) \subseteq G$. 10.4 $\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \ \forall\ z \in U_\delta(a)$
$a \in A \Rightarrow f^{(n)}(a) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f \equiv 0$ auf $U_\delta(a)$
$\Rightarrow f^{(n)} \equiv 0$ auf $U_\delta(a) \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow U_{(\delta)}(a) \subseteq A$. A ist also offen. Sei $b \in B$. $\exists k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(b) \neq 0$;
$f^{(k)}$ stetig $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(b) \subseteq G$ und $f^{(k)}(z) \neq 0 \ \forall\ z \in U_\epsilon(b)$
$\Rightarrow U\epsilon(b) \subseteq B$; d.h. B ist offen. G ist ein Gebiet $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow G = A \Rightarrow$ Beh. ∎

Bezeichnung
für $f \in H(G)$: $Z(f) := \{z \in G : f(z) = 0\}$.

Folgerung 11.3

(1) Ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv 0$ auf G und $z_0 \in Z(f)$, so existiert ein $\epsilon > 0$:
$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$, $f(z) \neq 0 \ \forall\ z \in \dot{U}_\epsilon(z_0)$

(2) Ist $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und gilt: $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$, so ist $f = 0$ auf G.

Beweis

(1) folgt aus 11.2

(2) Verfahre wie im Beweis von 11.2 ∎

Satz 11.4
Sei G ein EG und $f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset$

(1) $\exists h \in H(G)$: $e^h = f$ auf G

(2) Ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $g \in H(G)$: $g^n = f$ auf G

Beweis

(1) Es ist $\frac{f'}{f} \in H(G)$. G ist ein EG $\Rightarrow \exists F \in H(G)$: $F' = \frac{f'}{f}$ auf G. $\phi := \frac{e^F}{f}$.
Dann: $\phi \in H(G)$ und $\phi' = 0$ auf G. (nachrechnen!)
$\exists c \in \mathbb{C}$: $e^F = c \cdot f$ auf G.
Klar: $c \neq 0$. 7.1 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{C}$: $c = e^a \Rightarrow f = e^{F-a}$ auf G.

(2) Sei h wie in (1), $g := e^{\frac{1}{n}h}$. Dann: $g^n = e^h = f$ auf G. ∎

Satz 11.5
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(1) Ist $F \in H(D)$, $0 \in D$, $F(0) = 0$ und $F'(0) \neq 0$, so gilt: $0 \in (F(D))^o$

(2) Ist $f \in H(G)$ **nicht** konstant, so ist $f(G)$ offen.

(3) **Satz von der Gebietstreue:**
Ist $f \in H(G)$ **nicht** konstant, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis

(1) $u := \operatorname{Re} F$, $v := \operatorname{Im} F$. 4.1 $\Rightarrow u_x(0) = v_y(0), u_y(0) = -v_x(0)$
und $F'(0) = u_x(0) + iv_x(0)$
$\Rightarrow det \begin{pmatrix} u_x(0) & u_y(0) \\ v_x(0) & v_y(0) \end{pmatrix} = u_x(0)^2 + v_x(0)^2 = |F'(0)|^2 \neq 0$
Umkehrsatz (Analysis II) $\Rightarrow \exists U \subseteq D$: $0 \in U$, U ist offen und $F(U)$ ist offen. $F(0) = 0 \Rightarrow$ $0 \in F(U) \Rightarrow \exists \delta > 0$: $U_\delta(0) \subseteq F(U) \subseteq F(D)$.

(2) Sei $w_0 \in f(D)$. z.z. $\exists \delta > 0$: $U_\delta(w_0) \subseteq f(D)$.
O.B.d.A. $w_0 = 0$. $\exists z_0 \in D$: $f(z_0) = w_0 = 0$. O.B.d.A. $z_0 = 0$.
Also: $f(0) = 0$. $\exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$.
10.4 $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \ \forall z \in U_\varepsilon(0)$;
$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. 11.3 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$: $a_n \neq 0$
$m := min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ (≥ 1)
Dann: $f(z) = z^m(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \ldots) = z^m \cdot g(z) \ \forall z \in U_\varepsilon(0)$,
wobei $g \in H(U_\varepsilon(0))$ und $g(0) = a_m \neq 0$.
g stetig $\Rightarrow \exists r \in (0, \varepsilon)$: $g(z) \neq 0 \ \forall z \in U_r(0)$

$U_r(0)$ ist ein EG $\overset{11.4}{\Rightarrow} \exists h \in H(U_r(0))$: $h^m = g$ auf $U_r(0)$
Def. $F \in H(U_r(0))$ durch $F(z) := zh(z)$.
Dann: $F(0) = 0$, $F'(z) = h(z) + zh'(z)$
also $F'(0)^m = h(0)^m = g(0) \neq 0$, also $F'(0) \neq 0$.
Weiter: $F^m = f$ auf $U_r(0)$. (1)$\Rightarrow \exists R > 0$: $U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$.
$\delta := R^m$. Sei $w \in U_\delta(0)$. 1.5 $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}$: $v^m = w$
Dann: $|v|^m = |w| < \delta = R^m \Rightarrow |v| < R \Rightarrow v \in U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$
$\Rightarrow \exists z \in U_r(0) \subseteq D$ mit: $F(z) = v$.
$\Rightarrow w = v^m = F(z)^m = f(z) \in f(D)$
Also: $U_\delta(0) \subseteq f(D)$

(3) 3.6 $\Rightarrow f(G)$ ist zusammenhängend $\overset{(2)}{\Rightarrow} f(G)$ ist ein Gebiet.

Satz 11.6 (Maximimum-, Minimimumsprinzip (I))
$f \in H(G)$ sei nicht konstant.

(1) $|f|$ hat auf G kein lokales Maximum

(2) Ist $Z(f) = \emptyset$, so hat $|f|$ auf G kein lokales Minimum.

Beweis

(1) Sei $z_0 \in G$ und $\epsilon > 0$ so, dass $U_\epsilon(z_0) \subseteq G$. $w_0 := f(z_0)$. 11.5 $\Rightarrow f(U_\epsilon(z_0))$ ist offen.
$w_0 \in f(U_\epsilon(z_0)) \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(w_0) \subseteq f(U_\epsilon(z_0))$.
$\exists w \in U_\delta(w_0) : |w| > |w_0|$. $\exists z \in U_\epsilon(z_0) : w = f(z)$.
Dann: $|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)|$

(2) Wende (1) auf $\frac{1}{f}$ an. ■

Satz 11.7 (Maximimum-, Minimimumsprinzip (II))
G sei beschränkt, $f \in C(\overline{G})$ und es sei $f \in H(G)$.

(1) $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \; \forall z \in \overline{G}$

(2) Ist $f(z) \neq 0 \; \forall z \in G$, so gilt $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \; \forall z \in \overline{G}$

Beweis

(1) $\overline{G}$ ist kompakt, 3.3 $\Rightarrow \exists w_0 \in \overline{G} : |f(z)| \leq |f(w_0)| \; \forall z \in \overline{G}$
Fall 1: $w_0 \in \partial G$: fertig
Fall 2: $w_0 \in G$. Dann: $|f(z)| \leq |f(w_0)| \; \forall z \in G$. 11.6 $\Rightarrow f$ ist konstant auf G. f stetig $\Rightarrow$ f konstant auf $\overline{G} \Rightarrow$ Beh.

(2) Fall1: $f(z) \neq 0 \; \forall z \in \overline{G}$. Wende (1) auf $\frac{1}{f}$ an.
Fall 2: $\exists z_0 \in \overline{G} : f(z_0) = 0$ Vor. $\Rightarrow z_0 \in \partial G \Rightarrow \min_{w \in \partial G} |f(w)| = 0 \Rightarrow$ Behauptung. ■

Definition
Sei $A \subseteq G$. A heißt **diskret in G** $:\iff$ A hat in G keinen Häufungspunkt. ($\iff$ $\forall z_0 \in G\ \exists r = r(z_0) > 0 : A \cap \dot{U}_r(z_0) = \emptyset$)

Aufgabe: Ist A diskret in G, so ist A höchstens abzählbar.

Satz 11.8
Sei $f \in H(G)$ und f nicht identisch 0 auf G.
Dann ist $Z(f)$ diskret in G.
Ist $z_0 \in Z(f)$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $g \in H(G)$:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)\ \forall z \in G\ \underline{\text{und}}\ g(z_0) \neq 0$$

m und g sind eindeutig bestimmt. m heißt **Ordnung** (oder **Vielfachheit**) der Nullstelle z_0 von f. ("f hat eine m-fache Nullstelle")

Beweis
11.3 $\Rightarrow Z(f)$ ist diskret in G. O.B.d.A: $z_0 = 0$. $\exists r > 0 : U_r(0) \subseteq G$.
10.4 $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\ \forall z \in U_r(0)$. $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$
11.2 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, $m := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$
Dann: $f(z) = z^m \underbrace{(a_m + a_{m+1} z + \dots)}_{:=\varphi(z)} = z^m \varphi(z)\ \forall z \in U_r(0)$
Es ist $\varphi \in H(U_r(0))$ und $\varphi(0) = a_m \neq 0$
Definiere $g : G \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & , z \neq 0 \\ a_m & , z = 0 \end{cases}$$

Dann: $f(z) = z^m g(z)\ \forall z \in G$, $g(0) = a_m \neq 0, g = \varphi$ auf $U_r(0)$, also $g \in H(G)$ ■

Aufgabe: Sei f wie in 11.8, $z_0 \in G$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann:
f hat in z_0 eine m-fache Nullstelle $\iff$ $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

Satz 11.9
Sei $f \in H(G)$.

(1) Sei $g : G \times G \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & , z \neq w \\ f'(z) & , z = w \end{cases}$$

.
Dann ist g stetig.

(2) Ist $z_0 \in G$, so existiert ein $\epsilon > 0$:
$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ und (*) $|f(z) - f(w)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)||z - w|\ \forall z, w \in U_\epsilon(z_0)$
Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist f auf $U_\epsilon(z_0)$ injektiv und f^{-1} ist auf $f(U_\epsilon(z_0))$ stetig.

Beweis

(1) Es genügt zu zeigen: ist $z_0 \in G$, so ist g stetig in $(z_0, z_0) \in G \times G$, $\epsilon > 0$: $|g(z,w) - f'(z_0)| < \epsilon$
Sei $\epsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq G$ und $|f'(w) - f'(z_0)| \leq \epsilon \ \forall w \in U_\delta(z_0)$
Seien $z, w \in U_\delta(z_0). \gamma(t) := z + t(w-z)$ $(t \in [0,1])$, dann :
$Tr(\gamma) \subseteq U_\delta(z_0)$.
$U_\delta(z_0)$ ist ein Sterngebiet und f' hat auf $U_\delta(z_0)$ die Stammfunktion f.
$9.2 \Rightarrow \int\limits_\gamma f'(\xi)d\xi = f(w) - f(z) \Rightarrow f(w) - f(z) = \int\limits_0^1 f'(\gamma(t))(w-z)dt$
Ist $z \neq w \Rightarrow g(z,w) = \int\limits_0^1 f'(\gamma(t))dt$
Ist $z = w \Rightarrow \gamma(t) = z \ \forall t \in [0,1]$
$\Rightarrow \int\limits_0^1 f'(\gamma(t))dt = \int\limits_0^1 f'(z)dt = f'(z) = g(z,z)$
Also: $g(z,w) = \int\limits_0^1 f'(\gamma(t))dt$
Dann:

$$|g(z,w) - f'(z_0)| = |\int\limits_0^1 f'(\gamma(t)) - f'(z_0)dt| \leq \int\limits_0^1 \underbrace{|f'(\gamma(t)) - f'(z_0)|}_{\leq \epsilon} dt \leq \epsilon$$

(2) Aus (1): $|g(z,w)| \to |f'(z_0)|$ $((z,w) \to (z_0,z_0)) \Rightarrow \exists \epsilon > 0 :\ U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ und $|g(z,w)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \ \forall z, w \in U_\epsilon(z_0) \Rightarrow (*)$
Sei $f'(z_0) \neq 0. (*) \Rightarrow f$ ist injektiv auf $U_\epsilon(z_0)$
Seien $\lambda, \mu \in f(U_\epsilon(z_0)); z := f^{-1}(\lambda), w := f^{-1}(\mu)$
$|f^{-1}(\lambda) - f^{-1}(\mu)| = |z - w| \leq \frac{2}{|f'(z_0)|}|\lambda - \mu|$ ■

Satz 11.10
Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$
Dann existiert ein $r > 0$: $U_r(z_0) \subseteq G$,

(1) f ist auf $U_r(z_0)$ injektiv und $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in U_r(z_0)$

(2) $f(U_r(z_0))$ ist ein Gebiet

(3) $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \ \forall w \in f(U_r(z_0))$

Beweis

(1) Sei $\epsilon > 0$ wie in 11.9(2), f' ist stetig $\Rightarrow \exists r \in (0, \epsilon) : f'(z) \neq 0 \ \forall z \in U_r(z_0)$

(2) folgt aus 11.5

(3) Sei $w_0 \in f(U_r(z_0))$ und (w_n) eine Folge in $f(U_r(z_0)) \backslash \{w_0\}$ mit: $w_n \to w_0$.
$z_n := f^{-1}(w_n)$, $\tilde{z} := f^{-1}(w_0)$. 11.4 $\Rightarrow f^{-1}$ stetig in $w_0 \Rightarrow z_n \to \tilde{z}$
$\Rightarrow \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - \tilde{z}}{f(z_n) - f(\tilde{z})} \to \frac{1}{f'(\tilde{z})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$
Also ist f^{-1} in w_0 komplex differenzierbar und $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$ ■

Satz 11.11
Sei $f \in H(G)$ auf G injektiv. Dann:

(1) $Z(f') = \emptyset$

(2) $f^{-1} \in H(f(G))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für $\forall w \in f(G)$

Beweis

(1) Annahme: Sei $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) = 0$, $w_0 := f(z_0)$. O.B.d.A. $w_0 = 0 = z_0$. Also $f(0) = f'(0) = 0$
$11.8 \Rightarrow \exists m \geq 2; \exists g \in H(G)$ mit $f(z) = z^m g(z)\ \forall z \in G$ und $g(0) \neq 0$.
$11.3 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(z) \neq 0\ \forall z \in \dot{U}_\varepsilon(0)$ und $U_\varepsilon(0) \subseteq G$. Also $g(z) \neq 0\ \forall z \in U_\varepsilon(0)$. $11.4 \Rightarrow \exists \psi \in H(U_\varepsilon(0))$ mit $\psi^m = g$ auf $U_\varepsilon(0)$. Def. $\varphi \in H(U_\varepsilon(0))$ durch $\varphi(z) := z\psi(z)$ $(z \in U_\varepsilon(0))$.
Dann: $\varphi^m = f$ auf $U_\varepsilon(0)$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(z) = \psi(z) + z\psi'(z)$, $\varphi'(0)^m = \psi(0)^m = g(0) \neq 0$ also $\varphi'(0) \neq 0$. O.B.d.A. $\varphi'(z) \neq 0\ \forall z \in U_\varepsilon(0)$. Klar: φ ist auf $U_\varepsilon(0)$ injektiv.
$0 = \varphi(0) \in \varphi(U_\varepsilon(0))$. $11.5 \Rightarrow \exists \delta > 0$: $U_\delta(0) \subseteq \varphi(U_\varepsilon(0))$ $11.10 \Rightarrow \varphi^{-1} \in H(\varphi(U_\varepsilon(0)))$, 11.5 $\Rightarrow U := \varphi^{-1}(U_\delta(0))$ ist offen. Klar: $0 \in U$, $U \subseteq U_\varepsilon(0)$ und $(*)\varphi(U) = U_\delta(0)$.
Sei $z_1 \in U \backslash \{0\}$; $a_1 := \varphi(z_1)$; $w_1 := f(z_1) \neq 0$. $a_1^m = \varphi(z_1)^m = f(z_1) = w_1 \Rightarrow a_1 \neq 0$. 1.5 $\Rightarrow a_1$ ist eine m-te Wurzel von w_1; $m \geq 2 \Rightarrow \exists a_2 : a_2^m = a_1^m = w_1$ mit $a_1 \neq a_2$.
$a_2^m = w_1 = \varphi(z_1)^m$; $|a_2| = |\varphi(z_1)| \overset{(*)}{<} \delta \Rightarrow a_2 \in \varphi(U) \Rightarrow \exists z_2 \in U : a_2 = \varphi(z_2) \Rightarrow f(z_2) = \varphi(z_2)^m = a_2^m = w_1 = a_1^m = f(z_1) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$ Widerspruch zu f injektiv!

(2) folgt aus (1) und 11.10 ∎

Definition
Sei $z_0 \in G$; $a > 0$; $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \to \mathbb{C}$ seien glatte Wege und
$\gamma_j'(t) \neq 0\ \forall t \in [0, a], j = 1, 2$ und $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$. $\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := arg\gamma_2'(0) - arg\gamma_1'(0) = arg\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ Orientierter Winkel von γ_1 nach γ_2 in z_0.

Satz 11.12 (Winkeltreue)
Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann:
$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$

Beweis
$\Gamma_j := f \circ \gamma_j$ $(j = 1, 2)$. $\Gamma_j'(t) = f'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)$ $\Gamma_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$.
$\exists b \in (0, a)$ mit $\Gamma_j'(t) \neq 0\ \forall t \in [0, b]$.
$\angle(\Gamma_1, \Gamma_2, f(z_0)) = arg\frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = arg\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$ ∎

Definition

(1) G_1 und G_2 seien Gebiete in $\mathbb{C}$. Ist $f \in H(G_1)$ injektiv auf G_1 und gilt $f(G_1) = G_2$, so heißt f eine **konforme Abbildung** von G_1 auf G_2.

(2) Ist $f : G \to G$ eine konforme Abbildung von G auf G, so heißt f ein **Automorphismus** von G:
$f \in \mathrm{Aut}(G)$.

Satz 11.13
G_1, G_2 seien Gebiete, $f : G_1 \to G_2$ sei eine konforme Abbildung von G_1 auf G_2 und G_1 sei ein Elementargebiet. Dann ist G_2 ebenfalls ein Elementargebiet.

Beweis
Sei $g \in H(G_2)$, $h := (g \circ f)f'$. Dann $h \in H(G_1), G_1$ EG $\Rightarrow \exists$ eine Stammfunktion Φ von h, $F := \Phi \circ f^{-1}$ ist dann SF von g, g war beliebig $\Rightarrow G_2$ ebenfalls EG. ∎