1. Komplexe Zahlen

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ Für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir :
$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d); (a,b) \cdot (c,d) := (ac-bd, ad+bc)$
Wir setzen abkürzend: $i := (0,1)$ **(imaginäre Einheit)**. Dann: $i^2 = (-1,0)$

Satz 1.1
$\mathbb{R}^2$ ist mit obiger Addition und Multiplikation ein Körper. Dieser wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und heißt **Körper der Komplexen Zahlen**.

(1) $(0,0)$ ist das neutrale Element bzgl. der Addition. $(1,0)$ ist das neutrale Element bzgl. der Multiplikation.

(2) Für $(a,b) \in \mathbb{C}$ ist $(-a,-b)$ das inverse Element bzgl. der Addition Für $(a,b) \in \mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$ ist $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ das inverse Element bzgl. der Multiplikation

Beweis
Nachrechnen! ∎

Definiere $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $\varphi(a) := (a,0) \quad (a \in \mathbb{R})$. Dann gilt:
$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \varphi(0) = (0,0), \varphi(1) = (1,0)$. φ ist also ein injektiver Körperhomomorphismus. Also: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
Wir schreiben a statt $(a,0)$ für $a \in \mathbb{R}$. Insbesondere: $i^2 = -1$.

Satz 1.2
Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung $z = a + ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$
$\operatorname{Re} z := a$ **(Realteil von z)**, $\operatorname{Im} z := b$ **(Imaginärteil von z)**

Beweis
Sei $z = (a,b) \in \mathbb{C} \quad (a,b \in \mathbb{R}); z = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = a + ib$
Eindeutigkeit: klar ∎

Definition
Sei $z = a + ib \in \mathbb{C} \quad (a,b \in \mathbb{R})$

(1) $\bar{z} := a - ib$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**

(2) $|z| := (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} (= \|(a,b)\| =$ eukl. Norm von $(a,b) \in \mathbb{R}^2)$ heißt **Betrag von** z; $|z| \geq 0$

Geometrische Veranschaulichung von $\mathbb{C}$: Komplexe Ebene
$|z|$ = Abstand von z und 0

Satz 1.3
Seien $z, w \in \mathbb{C}$

(1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}); \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}); z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}; \overline{\overline{z}} = z; z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w; |z| = 0 \iff z = 0$

(2) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}; \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}; \overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\overline{w}}$, falls $w \neq 0$

(3) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|; |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

(4) $|\overline{z}| = |z|; |z|^2 = z \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z$; für $z \neq 0: \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

(5) $|zw| = |z| \cdot |w|; |\frac{1}{w}| = \frac{1}{|w|}$ falls $w \neq 0$

(6) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

(7) $\big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$

Beweis
(1) - (5): nachrechnen!
(7) folgt aus (6) wörtlich wie in $\mathbb{R}$
(6) $|z+w|^2 \overset{(3)}{=} (z+w)(z\bar{+}w) \overset{(2)}{=} (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$
$\overset{(1),(3)}{=} |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2$
$\overset{(3)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$ ■

Polarkoordinaten
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \quad (x, y \in \mathbb{R})$. $\quad r := |z|$
Bekannt: $\exists \varphi \in \mathbb{R} : x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$
Dann: $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Die Zahl φ heißt **ein** Argument von z und wird mit $\arg z$ bezeichnet. Mit φ ist auch $\varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ein Argument von z.

Aber: es gibt genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dieses φ heißt der **Hauptwert des Arguments** und wird mit Arg z bezeichnet.
Seien $z_1 = |z|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = |z|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \in \mathbb{C}\backslash\{0\}(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R})$.

Aus Additionstheoremen von Sinus und Cosinus folgt:
$(*) \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$
Aus $(*)$ folgt induktiv:

Satz 1.4 (Formel von de Moivre)
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \, \forall \varphi \in \mathbb{R}$

Wurzeln:
Beachte: $z^0 := 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Definition
Sei $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt eine **n-te Wurzel aus a.**

Satz 1.5
Sei $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$ und $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R})$
Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ setze $z_k = \sqrt[n]{|a|}\big(\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})\big)$
Dann:

(1) $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$

(2) für $z \in \mathbb{C} : z^n = a \iff z \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$

Spezialfall: $a = 1$
$z_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n}) \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$n$-te Einheitswurzeln

Beispiel
$a = 1, n = 4, z_k = \cos(\frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{k\pi}{2}) \quad (k = 0, \ldots, 3)$
$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$

Beweis (von 1.5)
(1) Übung

(2) $" \Leftarrow " : \; {z_k}^n \overset{1.4}{=} |a|\big(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\big) = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a$
$" \Rightarrow " :$ Sei $z^n = a \implies |z| = \sqrt[n]{|a|}, z \neq 0;$
Sei $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z^n \overset{1.4}{=} \underbrace{|z|^n}_{=|a|}\big(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\big)$
$\implies \cos\varphi = \cos(n\alpha), \sin\varphi = \sin(n\alpha)$
$\implies \exists j \in \mathbb{Z} : n\alpha = \varphi + 2\pi j \implies \alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi j}{n}$
$\exists l \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \ldots, n-1\} : j = ln + k$
$\implies \frac{j}{n} = l + \frac{k}{n} = \alpha = \frac{\varphi}{n} + 2\pi(l + \frac{k}{n}) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi l$
$\implies \cos\alpha = \cos\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \sin\alpha = \sin\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$
$\implies z = z_k$ ■