21. Affine Koordinaten und affine Abbildungen

21.1. Grundbegriffe

Definition: Sei A ein affiner Raum mit Richtungs-VRm V der Dimension n.

(a) Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen von V. Ein Paar $\mathcal{K} := (\mathcal{O}, B) \in A \times \mathcal{B}$ heißt **affines Koordinatensystem**, wobei $\mathcal{O}$ der **Ursprung** heißt.

(b) Durch die Koordinatendarstellung $D_B : V \to K^n$ zur Basis B definiert:

$$D_{\mathcal{K}} : A \to K^n, P \mapsto D_B(\overrightarrow{\mathcal{O}P})$$

den **Koordinatenvektor** $D_{\mathcal{K}}(P)$ von P bezüglich $\mathcal{O}$.

(c) Die Abbildung $D_{\mathcal{K}} : A \to \mathbb{A}^n(K)$ heißt **Koordinatendarstellung** zum Koordinatensystem $\mathcal{K}$.

Aufgabe: Was entspricht Homomorphismen von VRmen bei affinen Räumen?

Definition: Seien A, B affine Räume mit Richtungen V, W. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt **affine Abbildung** oder **Morphismus affiner Räume**, falls ein $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in V, \forall P \in A : \varphi(x + P) = \Phi(x) + \varphi(P)$$

Schreibe: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B) := \{\varphi : A \to B \mid \varphi \text{ affin }\}$.

Beispiel: (1) Die Identität $\mathrm{id}_A : A \to A$ ist affin mit zugehörigem $\Phi = \mathrm{id}_V$.

(2) Für **festes** $Q \in B$ ist die konstante Abbildung $\varphi_Q : A \to B, P \mapsto Q$ affin, mit der Nullabbildung als zugehörigem Homomorphismus.

Bemerkung: (1) $\varphi : A \to B$ mit zugehörigem $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists P_0 \in A : \forall x \in V : \varphi(x + P_0) = \Phi(x) + \varphi(P_0)$$

(2) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$, so ist der zugehörige Homomorphismus $\Phi =: \Lambda_\varphi$ eindeutig bestimmt.

(3) Die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen ist affin, d.h.:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, C), (\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

(4) $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ ist genau dann injektiv (bzw. surjektiv), wenn Λ_φ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

(5) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ bijektiv, so existiert $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(B, A)$.

Definition: Ein bijektives $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ heißt **Isomorphismus affiner Räume** oder **Affinität**.
Ist zusätzlich $A = B$, so heißt $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, A)$ **Automorphismus**. Diese Automorphismen bilden die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(A)$, genannt die **affine Gruppe** von A.

Beweis: (1) Sei $P \in A$ beliebig und $y := \overrightarrow{P_0P}$. Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x + P) &= \varphi(x + y + P_0) \\
&= \Phi(x + y) + \varphi(P_0) \\
&= \Phi(x) + \Phi(y) + \varphi(P_0) \\
&= \Phi(x) + \varphi(y + P_0) \\
&= \Phi(x) + \varphi(P)
\end{aligned}$$

(2) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ gegeben, dann gilt für alle $P \in A, x \in V$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(x + P) = \Phi(x) + \varphi(P) \\
&\implies \Phi(x) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(x + P)}
\end{aligned}$$

Also ist Φ durch φ eindeutig bestimmt.

(3) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(B, C)$. Dann gilt für alle $P \in A, x \in V$:

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(x + P) &= \psi(\varphi(x + P)) \\
&= \psi(\Lambda_\varphi(x) + \varphi(P)) \\
&= \Lambda_\psi(\Lambda_\varphi(x)) + \psi(\varphi(P)) \\
&= \Lambda_\psi \circ \Lambda_\varphi(x) + \psi \circ \varphi(P)
\end{aligned}$$

Also ist $\psi \circ \varphi$ affin mit zugehörigem Homomorphismus $\Lambda_{\psi\circ\varphi} = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\varphi$.

(4) Es gilt für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ injektiv } &\iff (\varphi(P) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\
&\iff (\varphi(\overrightarrow{QP} + Q) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\
&\iff (\Lambda_\varphi(\overrightarrow{QP}) + \varphi(Q) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\
&\iff (\Lambda_\varphi(\overrightarrow{QP}) = 0 \implies \overrightarrow{QP} = 0) \\
&\iff \Lambda_\varphi \text{ ist injektiv}
\end{aligned}$$

Der Beweis für Surjektivität erfolgt analog.

(5) Leichte Übung! ∎

Satz 28:
Seien A, B affine Teilräume mit Richtungen V, W. Zu $(P_0, Q_0) \in A \times B$ und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ existiert genau eine affine Abbildung $\varphi : A \to B$ mit $\Lambda_\varphi = \Phi$ und $\varphi(P_0) = Q_0$.

Beweis: Es ist $A = V + P_0$. Definiere $\varphi(x + P_0) := \Phi(x) + Q_0$, so ergibt sich nach Bemerkung (1) eine affine Abbildung mit $\varphi(P_0) = Q_0$. Dies legt φ bereits eindeutig fest. ∎

Satz 29:
Die Koordinatenabbildung $D_\mathcal{K} : A \to \mathbb{A}^n(K)$ zu einem Koordinatensystem $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, B)$ ist ein affiner Isomorphismus (mit zugehöriger linearer Abbildung $D_B : V \to K^n$).

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} D_\mathcal{K}(x + \mathcal{O}) &\overset{Def.}{=} D_B(x) \\ &= D_B(x) + 0 \\ &= D_B(x) + D_\mathcal{K}(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Nach Satz 29 existiert genau eine affine Abbildung, die dies tut. Dass es sich bei $D_\mathcal{K}$ um eine Isometrie handelt, wurde bereits früher eingesehen, da D_B Isometrie ist. ∎

Korollar:
Affine Räume über festen Körper sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension gleich ist.

Satz 30 (Erhaltung von Teilräumen):
Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ und $C \subseteq A$. Falls C affiner Teilraum mit Richtung $U := U_C$ ist, so ist $\varphi(C) \subseteq B$ affiner Teilraum mit Richtung $\Lambda_\varphi(U)$.
Ist φ Isomorphismus, so gilt:

(1) $C \subseteq A$ ist genau dann affiner Teilraum, wenn $\varphi(C) \subseteq B$ affiner Teilraum ist.

(2) Es gilt $\dim C = \dim \varphi(C)$ für jeden affinen Teilraum C.

(3) Sind $C, C' \subseteq A$ affine Teilräume, so gilt:

$$\varphi([C \cup C']) = [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

und:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

(4) $C \parallel C' \implies \varphi(C) \parallel \varphi(C')$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A,B), P \in C$ (d.h. $C = U + P$). Nach Teilraumkriterium gilt dann:

$$\varphi(C) = \Phi(U) + \varphi(P)$$

Daraus folgt, dass $\varphi(C)$ affiner Teilraum ist.

(1) Leichte Übung!

(2) Leichte Übung!

(3) Sogar für beliebige Teilmengen $C, C' \subseteq A$ gilt, wenn φ bijektiv ist:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

Für alle affinen Teilräume D, die $C \cup C'$ enhalten, gilt:

$$\varphi(D) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Also gilt insbesondere auch für $D := [C \cup C']$:

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Daraus folgt (für jede affine Abbildung, also insbesondere auch für φ^{-1}):

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
[C \cup C'] &\supseteq \varphi^{-1}([\varphi(C) \cup \varphi(C')]) \\
&\supseteq [\varphi^{-1}(\varphi(C)) \cup \varphi^{-1}(\varphi(C'))] \\
&= [C \cup C']
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit.

(4) Leichte Übung! ∎

21.1.1. Grundaufgaben im affinen Standardraum $\mathbb{A}_n(K)$

Seien $P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_s \in K^n$ und $B := [P_0, \ldots, P_m], C := [Q_0, \ldots, Q_s]$ gegeben. Ziel ist es $[B \cup C]$ und $B \cap C$ zu berechnen.

Mit $x_i := \overrightarrow{P_0 P_i} = P_i - P_0$ gilt:

$$B = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle + P_0$$

Analog gilt mit $z_j := \overrightarrow{Q_0 Q_i} = Q_i - Q_0$:

$$C = \langle z_1, \ldots, z_s \rangle + Q_0$$

Daraus folgt dann mit $y := \overrightarrow{P_0 Q_0}$:

$$[B \cup C] = \langle x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_s, y \rangle + P_0$$

(1) Finde mit dem Gauß-Algorithmus eine Basis $\{b_1, \ldots, b_r\}$ von U, dann gilt:

$$[B \cup C] = [b_1 + P_0, \ldots, b_r + P_0, P_0]$$

mit erzeugenden Punkten in allgemeiner Lage.

(2) Interpretiere B als Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ eines LGS $Ax = b$.
Sei $x_0 = P_0 \in K^n$, dann liefert der Spezialfall $B = C$ in (1):

$$B = U + x_0$$

wobei $b_1, \ldots, b_r$ Basis von U ist.
Ziel ist es nun, eine Matrix $A \in K^{n-r \times n}$ zu finden, mit $U = \text{Kern}(\Lambda_A)$. Dazu betrachte die Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt $\text{rg}(M) = r$.
Betrachte nun die Rechtsmultiplikation:

$$P_M : K^n \to K^r, y \mapsto yM$$

Dann hat der Kern von ρ_M Dimension $n-r$ und eine Basis aus Zeilenvektoren $\{c_1, \ldots, c_{n-r}\}$.
Damit lässt sich nun die Matrix A wie folgt definieren:

$$A := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Da der Rang von A offensichtlich $n - r$ ist, ist die Dimension des Kerns genau r, und es gilt:

$$\begin{aligned} &\forall t \in \{1, \ldots, n-r\} : c_t M = 0 \\ \iff &\forall t \in \{1, \ldots, n-r\}, j \in \{1, \ldots, r\} : c_t \cdot b_j = 0 \\ \iff &\forall j \in \{1, \ldots, r\} : Ab_j = 0 \end{aligned}$$

Also ist U Unterraum von $\text{Kern}(\Lambda_A)$ und aus der Gleichheit der Dimensionen beider Räume folgt dann:

$$B = \mathcal{L}(A, b)$$

(3) Durchschnittsberechnung:
Finde mit Hilfe von (2) Matrizen A, A' und $b, b' \in K^n$, sodass $B = \mathcal{L}(A, b), C = \mathcal{L}(A', b')$ ist. Dann gilt:

$$B \cap C = \mathcal{L}(D, d) \text{ mit } D := \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

Es genügt nun das LGS $Dx = d$ zu lösen, um $B \cap C$ zu erhalten.

Beispiel: Betrachte den affinen Raum $\mathbb{A}_3(\mathbb{F}_2) = \{0, 1\}^3$. Gegeben seien die Ebenen:

$$E := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [e_1, e_2, 0]$$

$$F := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3]$$

Zur Bestimmung von $E \cap F$ werden zunächst die zu E und F gehörigen Gleichungssysteme aufgestellt:

$$E = \{x \in \mathbb{F}_2^3 \mid x_3 = 0\} = \mathcal{L}((0,0,1),0)$$
$$F = \mathrm{Kern}(\Lambda_{(0,1,0)}) + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathcal{L}((0,1,0),1)$$

Daraus folgt:

$$E \cap F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \{e_2, e_1 + e_2\}$$

Satz 31 (Satz von Pappos):
In einem affinen Raum A mit Dimension 2 seien G, G' verschiedene Geraden mit $G \cap G' = \{O\} \in A$. Ferner seien $P_1, P_2, P_3 \in G \setminus \{O\}$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in G' \setminus \{O\}$, sodass gilt:

$$P_1Q_3 \parallel P_3Q_1 \text{ und } P_1Q_2 \parallel P_2Q_1$$

Daraus folgt:

$$P_2Q_3 \parallel P_3Q_2$$

Beweis: Da $Q_3 \notin G$ ist, sind O, P_1, Q_3 in allgemeiner Lage. Daraus erhalten wir folgendes Koordinatensystem:

$$\mathcal{K} := (O, \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OQ_3}\})$$

Da die Koordinatendarstellung $D_{\mathcal{K}} : A \overset{\sim}{\to} \mathbb{A}_2(K)$ Parallelitäten und Schnittpunkte erhält, können wir o.B.d.A annehmen:

$$A = \mathbb{A}_2(K) \text{ und } O = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$P_1 = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\0\end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix}\lambda_3\\0\end{pmatrix}$$
$$Q_3 = \overrightarrow{OQ_3} = \begin{pmatrix}0\\\mu_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix}0\\\mu_2\end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix}0\\\mu_3\end{pmatrix}$$

Wobei $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3 \neq 0$ sind. Daraus folgt für die Richtungen:

$$\forall i, j \in \{1,2,3\} : U_{P_iQ_j} = \langle \overrightarrow{P_iQ_j} \rangle = \langle \begin{pmatrix}\lambda_i\\-\mu_j\end{pmatrix} \rangle$$
$$\implies U_{P_1Q_3} = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rangle$$

Nach Vorraussetzung ist $\lambda_3 = \mu_1$ und es existiert ein $\rho \in K^\times$, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix}\lambda_2\\-\mu_1\end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix}1\\-\mu_2\end{pmatrix}$$

Daraus folgt mit $\lambda_3 = \rho\mu_2 = \lambda_2\mu_2$:

$$\begin{aligned} U_{P_2Q_3} &= \langle\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\mu_3 \end{pmatrix}\rangle \\ &= \langle\begin{pmatrix} \lambda_2\mu_2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix}\rangle \\ &= \langle\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ -\mu_2 \end{pmatrix}\rangle \\ &= U_{P_3Q_2} \end{aligned}$$

Also sind P_2Q_3 und P_3, Q_2 parallel. ∎

21.2. Koordinatenwechsel und Darstellung affiner Abbildungen

Lemma:
Seien $\mathcal{K} = (O, B)$ und $\mathcal{L} = (Q, C)$ Koordinatensysteme des affinen Raums A mit Richtung V. Sei $M_{CB} := D_{CB}(\mathrm{id}_V)$ die Basiswechselmatrix.
Dann rechnen sich Koordinaten eines Punktes P bzgl. $\mathcal{K}$ in die Koordinaten bzgl. $\mathcal{L}$ wie folgt um:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q))$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{L}}(P) &= D_C(\overrightarrow{QP}) \\ &= M_{CB} \cdot D_B(\overrightarrow{QP}) \\ &= M_{CB} \cdot D_B(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \\ &= M_{CB} \cdot (D_B(\overrightarrow{OP}) - D_B(\overrightarrow{OQ})) \\ &= M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q) \end{aligned}$$

∎

Anwendung: Ist ein beliebiges Koordinatensystem $\mathcal{L} = (Q, B)$ gegeben, so lässt sich ein Punkt P einfach in das Koordinatensystem $\mathcal{K} = (0, S)$ von $\mathbb{A}_n(K)$ mit Standardbasis S überführen. Schreibe dazu B als:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in K^{(n \times n)}$$

Dann ist $M_{SB} = B$ und es gilt:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{BS}(P - Q) = B^{-1}(P - Q)$$

Lemma:

(1) Die Abbildung $\psi : K^n \to K^m$ ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists A \in K^{m\times n}, a \in K^m : \Psi(x) = Ax + a$$

Schreibe daher kurz: $\psi =: (A, a)$

(2) Ist ferner $C \in K^{t\times m}, c \in K^t$, so gilt:

$$(C, c) \circ (A, a) = (CA, Ca + c)$$

(3) Ist $m = n$ und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist (A, a) bijektiv und es gilt:

$$(A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$$

Beweis: (1) Die Abbildung ψ ist genau dann affin, wenn ein $\Lambda_\varphi = \Lambda_A \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(K^n, K^m)$ für ein $A \in K^{m\times n}$, sodass gilt:

$$\psi(x) = \psi(x + 0) = \Lambda_\varphi(x) + \psi(0)$$

Die Behauptung folgt mit $a := \psi(0)$.

(2) Leichte Übung!

(3) Leichte Übung! ■

Definition: Seien A, A' affine Räume mit Koordinatensystemen $\mathcal{K} = (O, B), \mathcal{K}' = (O', B')$ und zugehörigen Koordinatenisomorphismen $D_\mathcal{K}, D_{\mathcal{K}'}$. Definiere:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) := D_{\mathcal{K}'} \circ \varphi \circ D_\mathcal{K}^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(K^n, K^m)$$

Lemma:
Es gilt:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) = (D_{B'B}(\Lambda_\varphi), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))$$

Beweis: Sei $P \in A$ beliebig, so entspricht es $D_\mathcal{K}(P) \in K^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)(D_\mathcal{K}(P)) &\overset{Def.}{=} D_{\mathcal{K}'}(\varphi(P)) \\
&\overset{Def.}{=} D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(P)}) \\
&= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\
&= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + D_{B'}(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\
&= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + D_{B'}(\Lambda_\varphi(\overrightarrow{OP})) \\
&= D_{B'B}(\Lambda_\varphi) \cdot D_B(\overrightarrow{OP}) + D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) \\
&= (D_{B'B}(\Lambda_\varphi), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))(D_\mathcal{K}(P))
\end{aligned}$$

Da also beide Abbildungen auf einen beliebigen Punkt P die selbe Wirkung haben, müssen sie gleich sein. ∎

Bemerkung: Das Zusammenfügen von kommutativen Diagrammen liefert für einen weiteren affinen Raum A'' mit Koordinatensystem $\mathcal{K}'' = (O'', B'')$ und einer affinen Abbildung $\Psi : A' \to A''$:

$$D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}}(\psi \circ \varphi) = D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}'}(\psi) \circ D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)$$

Korollar:

(1) Speziell für eine affine Abbildung $\varphi : A \to A$ und zwei Koordinatensysteme $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ gilt:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{L}\mathcal{K}}(\mathrm{id}) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\mathrm{id})$$

(2) Insbesondere gilt für $\varphi = \mathrm{id}$:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi)$$

(3) Für $\mathbb{A}_n(K)$ mit Standardkoordinatensystem $\mathcal{K} = (0, S)$, sei $D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\mathrm{id}) =: (M, b)$. Dann gilt für $\varphi = (A, a) = D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi)$:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = (M^{-1}AM, M^{-1}((A - I)b + a))$$

Beweis:

(1) Folgt aus zweimaligem anwenden der obigen Bemerkung.

(2) Folgt aus (1).

(3) Es gilt:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{K}}(\mathrm{id}) = (M, b)^{-1} = (M^{-1}, -M^{-1}b)$$

Der restliche Beweis ergibt sich aus (1). ∎

21.3. Geometrische Eigenschaften von affinen Abbildungen

Wir haben gesehen, dass Koordinaten für den Umgang mit affinen Abbildungen **nützlich** sind. Nun stellen wir die Frage, inwiefern Koordinaten **nötig** sind, d.h. welche Eigenschaften von der Koordinatenwahl abhängen.

Definition: Sei A affiner Raum und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, A)$.

(a) $P \in A$ heißt **Fixpunkt** von φ, falls gilt:

$$\varphi(P) = P$$

(b) Ein affiner Teilraum $\emptyset \neq B \subseteq A$ heißt **Fixraum** von φ, falls gilt:

$$\varphi(B) \subseteq B$$

(c) Ein Untervektorraum U des Richtungsvektorraums U_A heißt **Fixrichtung** von φ, falls gilt:

$$\Lambda_\varphi(U) \subseteq U$$

Beispiel: (1) Sei $x \in V := U_A$ fest und eine **Translation**

$$\varphi = \tau_x : A \to A, P \mapsto x + P$$

gegeben, dann gilt:

(a) Für alle $U \leq V$ ist U Fixrichtung, da $\Lambda_\varphi = \mathrm{id}_V$ ist.

(b) Für $x \neq 0$ existieren keine Fixpunkte.

(c) Für eine Fixgerade G muss gelten:

$$\varphi(G) = x + G \subseteq G$$
$$\iff x \in U_G$$

Also ist die Menge aller Fixgeraden für $X \neq 0$:

$$\{Kx + P \mid P \in A\}$$

Beachte dass eine Fixgerade hier **keinen** Fixpunkt enthält.

(2) Seien $\mu \in K \setminus \{0\}$ und $P \in A$ fest und eine **Streckung**

$$\varphi : A \to A, x + P \mapsto \mu x + P$$

mit Zentrum P und Streckungsfaktor μ gegeben.
Da im Fall $\mu = 1$ $\varphi = \mathrm{id} = \tau_0$ gilt, wollen wir im Folgenden $\mu \neq 1$ annehmen.

(a) Die Menge der Fixpunkte ist gleich $\{P\}$.

(b) Für alle $U \leq V$ ist U Fixrichtung.

(c) Fixgeraden sind genau die Geraden, die P enthalten.

Lemma:
Für $A \in K^{n\times n}, a \in K^n$ und $\varphi = (A, a)$ gilt:

(1) Die Fixpunkte bilden den affinen Teilraum $\mathcal{L}(A - I, -a)$.

(2) Genau dann, wenn 1 kein Eigenwert von A ist, ist die Menge der Fixpunkte einelementig.

(3) B ist genau dann Fixraum von φ, wenn U_B Fixrichtung ist und ein Punkt $P \in B$ mit $\varphi(P) \in B$ existiert.

Beweis: (1) Es ist $\varphi = Ax + a$, also gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x &\iff Ax + a = x \\ &\iff Ax - x = -a \\ &\iff (A - I)x = -a \\ &\iff x \in \mathcal{L}(A - I, -a)\end{aligned}$$

(2) Ist 1 kein Eigenwert von φ, so existiert $(A-I)^{-1}$, daraus folgt für einen Fixpunkt x:

$$x = (A - I)^{-1}(-a)$$

Also ist x eindeutig bestimmt.

(3) $B = U + P$ ist genau dann Fixraum, wenn gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(B) \subseteq B &\iff \varphi(U + P) \subseteq U + P = B \\ &\iff \Lambda_\varphi(U) + \varphi(P) \subseteq U + P \\ &\iff \varphi(P) \in B \wedge \Lambda_\varphi(U) \subseteq U\end{aligned}$$

Also ist U Fixrichtung. ∎

21.4. Geometrische Charakterisierung von Affinitäten

Definition: Sei A ein affiner Raum mit einer (nicht notwendigerweise affinen) Abbildung $\varphi : A \to A$. φ heißt **geradentreu**, wenn für $G \subseteq A$ gilt:

$$G \text{ Gerade} \iff \varphi(G) \text{ Gerade}$$

Beispiel: (1) Affinitäten sind geradentreu.

(2) Die Abbildung:

$$\varphi : \mathbb{A}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}_2(\mathbb{C}), (\alpha, \beta) \mapsto (\overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

ist geradentreu, aber **nicht** affin.

Lemma:
Sei A ein affiner Raum über $K \neq \mathbb{F}_2$ und sei $\varphi : A \to A$ bijektiv und geradentreu.

Dann gilt für $O, P, Q \in A$: $\varphi([P, Q]) = [\varphi(Q), \varphi(P)]$ und $\varphi([O, P, Q]) = [\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)]$.
Falls $\dim(A) = 2$, so gilt:

(1) Sind $P \neq Q$ Fixpunkte von φ, so folgt: $G := [P, Q]$ ist Fixgerade

(2) Sind $H \nparallel G$ Fixgeraden, so folgt: $H \cap G = \{Q\}$ mit Fixpunkt Q.

(3) Ist G Fixgerade und P Fixpunkt, so folgt: H mit $H \parallel G \wedge P \in H$ ist Fixgerade.

Vorbemerkung: Auch φ^{-1} ist geradentreu

$$\underbrace{\varphi^{-1}(G)}_{=:L} \text{ Gerade } \iff \underbrace{\varphi(L)}_{=G} \text{ Gerade}$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $P \neq Q$.

Aus φ geradentreu folgt

$$\varphi([P,Q]) \text{ Gerade } \ni \varphi(P), \varphi(Q) \supseteq [\varphi(P), \varphi(Q)]$$

Daraus folgt die Gleichheit, da die Dimension gleich ist.

Behauptung: $B := \varphi([O,P,Q])$ ist ein affiner Teilraum.

Wende das Teilraumkriterium an
[Sei $\varphi(R), \varphi(S) \in B$ mit $R, S \in [O,P,Q]$, dann folgt $[\varphi(R), \varphi(S)] = \varphi([R,S]) \subseteq B$]
und $B \supseteq [\underbrace{\varphi(O)}_{=:O'}, \underbrace{\varphi(P)}_{=:P'}, \underbrace{\varphi(Q)}_{=:Q'}]$

Gleicher Schluss für vp^{-1}:

$$\varphi^{-1}([O', P', Q']) \supseteq [\varphi^{-1}(O'), \varphi^{-1}(P'), \varphi^{-1}(Q')] = [O,P,Q]$$

Wende φ an:

$$[O', P', Q'] \supseteq \varphi([O,P,Q]) = B$$

Damit folgt die Gleichheit.

Speziell für $\dim A = 2$:

(1) Für $G := [P,Q]$ gilt:

$$\varphi(G) = [\varphi(P), \varphi(Q)] = [P,Q] = G$$

(2) $G \not\parallel H$, $G \cap H =: \{Q\}$; dann folgt

$$\{\varphi(Q)\} = \varphi(G \cap H) \subseteq \varphi(G) \cap \varphi(H) = G \cap H$$

Daraus folgt $\{\varphi(Q)\} \subseteq G \cap H = \{Q\}$, also $\varphi(Q) = Q$.

(3) Fall $P \in G$: also $H = G$. Fertig.
Fall $P \notin G$:

$$H \parallel G \implies H \cap G = \varnothing \overset{\varphi \text{ bij.}}{\iff} \varphi(H) \cap \underbrace{\varphi(G)}_{G} = \varnothing \implies \varphi(H) \parallel G$$

Aus $P = \varphi(P) \in \varphi(H)$ folgt $H = \varphi(H)$. ∎

Satz 32:

(1) Sei A ein affiner Raum mit $\dim A > 1$ über dem Körper $K = \mathbb{F}_p$ $(p > 2)$ oder $K = \mathbb{Q}$. Für eine Abbildung $\varphi : A \to A$ gilt:

$$\varphi \text{ Affinität} \iff \varphi \text{ bijektiv und geradentreu}$$

(2) Sei K ein Körper mit Teilkörper $\mathbb{Q}$, $n > 1$. Ist $\varphi : K^n \to K^n$ bijektiv und geradentreu mit $\varphi(0) = 0$, so folgt: φ ist $\mathbb{Q}$-linear.

Beweis: (1) " $\Longrightarrow$ ": bekannt ✓

" $\Longleftarrow$ ": Wähle Koordinatensystem $\mathcal{K} = (0, B)$ und $\mathcal{L} = (\varphi(0), B)$.
Schachtele mit den affinen Bijektionen $D_{\mathcal{K}}^{-1}$ und $D_{\mathcal{L}}$ zu

$$\tilde{\varphi} := D_{\mathcal{L}} \circ \varphi \circ D_{\mathcal{K}}^{-1} : K^n \to K^n \qquad (\text{mit } \tilde{\varphi}(0) = 0)$$

Es gilt: φ ist geradentreu, bijektiv (bzw. Affinität) genau dann, wenn $\tilde{\varphi}$ die entsprechende Eigenschaft hat.
Daher gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\varphi : K^n \to K^n$ und $\varphi(0) = 0$.

(1)$\wedge$(2) Restbehauptung: Für $K_0 := \mathbb{F}_p$ oder $\mathbb{Q}$ gilt: φ ist K_0-linear.

Zu zeigen: Für $P, Q \in K^n$, $\lambda \in K_0$ gilt: $\varphi(\lambda P) = \lambda\varphi(P)$, $\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
Oder: Auf $U_0 := K_0 P + K_0 Q$ ist $\varphi|_{U_0}$ K_0-linear.

Dies ist leicht zu reduzieren auf den Fall: P, Q sind linear unabhängig: $O := 0, P, Q$ in allgemeiner Lage, $E := [O, P, Q]$ ist Ebene mit zwei verschiedenen Geraden $[O, P]$, $[O, Q] \subseteq E$.
Mit φ geradentreu und bijektiv folgt: $[\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)] = \varphi(E) \supseteq 2$ verschiedene Geraden; daraus folgt $\varphi(E)$ ist Ebene, also $\{\underbrace{\varphi(0)}_{=0}, \varphi(P), \varphi(Q)\}$ in allgemeiner Lage, d.h. $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ sind linear unabhängig.

Daraus folgt: es existiert $\rho \in \mathrm{Aut}(K^n)$ mit $\rho(P)\varphi(P)$, $\rho(Q) = \varphi(Q)$

Beachte: $\Psi|_{U_0} := \rho^{-1} \circ \varphi|_E : E \to E$ ist bijektiv, geradentreu und hat mindestens die Fixpunkte O, P, Q.

Zeige: $\Psi|_{U_0} = \mathrm{id}$ $\quad$ ($\rightsquigarrow$ $\varphi|_{U_0}$ ist K_0-linear; mit anderen Worten: U_0 besteht aus Fixpunkten von Ψ) **1. Schritt:** Für alle $n \in \mathbb{N} :$ nP Fixpunkte von Ψ (mit vollständiger Induktion)

$n = 0, 1$: ✓

$n - 1 \to n$: Falls $(n - 1)P = 0$, so ist $nP = P$ Fixpunkt. Fertig.
Falls $R := (n - 1)P \neq 0$ Fixpunkt ist, dann folgt nach Lemma: die parallelen

Geraden $G_1 \parallel [O,Q]$ mit $R \in G_1$ und $G_2 \parallel [O,P]$ mit $Q \in G_2$ sind Fixgeraden G_i und $G_1 \cap G_2 = \{R+Q\}$ ist Fixpunkt. Damit und mit $[Q,P]$ Fixgerade folgt, dass eine parallele Gerade G_3 durch $R+Q$ Fixgerade ist.

Also ist

$$(R + Q + K(P - Q)) \cap K \cdot P = G_3 \cap [O,P] = \{nP\}$$

ein Fixpunkt.

Analog: für alle $m \in \mathbb{N} :\ mQ$ ist Fixpunkt.

2. Schritt: $K_0 \cdot P$ (und analog $K_0 \cdot Q$) besteht aus Fixpunkten.

Fall $K_0 = \mathbb{F}_p$: Fertig nach dem ersten Schritt, da $\mathbb{F}_p = \{n - 1_{\mathbb{F}_p} \mid n \in \mathbb{N}\}$
Fall $K_0 = \mathbb{Q}$: Seien $m\, n > 0$ in $\mathbb{N}$. $[mQ, nP]$ ist Fixgerade.

Die Parallele G_4 durch Q ist Fixgerade

$$G_4 = K \cdot (mQ - nP) + Q$$

Daraus folgt: $G_4 \cap [O,P] =: \{S\}$ ist Fixpunkt mit $S = \frac{n}{m}P$. Ferner ist $-S$ Fixpunkt, denn:

$$\{S + Q\} = \underbrace{(K \cdot Q + S)}_{\|[O,Q]} \cap \underbrace{(K \cdot S + Q)}_{\|[O,S]}$$

Beides sind Fixgeraden, also ist $\{S + Q\}$ Fixpunkt

$$\{-S\} = [O,S] \cap (K \cdot (S + Q) + Q)$$

3. Schritt: Zu zeigen: für alle $T \in U_0 :\ T$ ist Fixpunkt

$$\exists \alpha, \beta \in K_0 : T = \alpha P \beta Q$$

$$\{T\} = \underbrace{(KP + \underbrace{\beta Q}_{\mathit{Fixpunkt}})}_{\|[O,P]} \cap \underbrace{(KQ + \underbrace{\alpha P}_{\mathit{Fixpunkt}})}_{\|[O,Q]}$$

■