

5 Differentialrechnung

Stets sei I ein Intervall das stets mehr als einen Punkt enthält.

5.1 Rechenregeln

Ziel: Finde beste lineare Approximation für f nahe bei x_0 . *Idee:* Betrachte Tangente bei $(x_0, f(x_0))$

$t(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, wobei m = Tangentensteigung in x_0 = Grenzwert der Steigung

der Sekante in x_0, x_1 also $s(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m(x_1)}(x - x_0)$

Definition 5.1. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ differenzierbar (diff'bar), falls $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0)$ $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an x . f heißt diff'bar (auf I), wenn f in jedem $x_0 \in I$ diff'bar ist. Dann definiert man iterativ $f'' = (f')'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ ($n \in \mathbb{N}$) die n -te Ableitung. Entsprechend def. man die rechts/linksseite Ableitung:

$$\frac{d \pm f}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.1)$$

Beweis. a) Die Fkt. $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist für $I \setminus \{x_0\}$ definiert

b) Wenn $I = [a, b]$ und $x_0 = a, b$, dann stimmen überein soweit existent.

c) Sei f in x diff'bar. Sei $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ mit $a \neq f'(x_0)$ eine weitere Gerade durch $(x_0, f(x_0))$. Beh. $\exists \delta > 0 : |f(x) - g(x)| > |f(x) - t(x)|$ für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta$

Beweis. $\left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| \rightarrow |f'(x_0) - a| \neq 0, x \rightarrow x_0$ genauso: $\left| \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} \right| \rightarrow 0, x \rightarrow x_0 \implies \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| \geq \frac{1}{2} |f'(x_0) - a| > \frac{1}{4} |f'(x_0) - a| \geq \left| \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} \right| \implies$
Beh. □

d) Andere Interpretation:

Sei $u(t) \in \mathbb{R}$ eine Größe zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ (z.B. Stoffmenge, Ort) und $h > 0$. Dann ist $\frac{1}{h}u(t+h) - u(t)$ der mittlere Zuwachs der Größe im Zeitintervall $[t, t+h]$. Somit

ist $n'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t))$ die momentane Änderungsgeschwindigkeit der Größe. $u''(t)$ ist die Beschleunigung. □

Beispiel 5.2. a) Seien $a, m \in \mathbb{R}$ fest gegeben. Setzte $f(x) = mx + a$, $x \in \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m (\forall x \neq x_0)$. $\implies \exists f'(x_0) = m$

b) $f(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists f'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ Ferner $\exists \frac{d^+ f}{dx}(0) =$

c) ...

Satz 5.3.

Beweis. □

Satz 5.4. ...

a) ...

b) ...

c) ...

Beweis. a) ...

b) ...

c) ... □

Korollar 5.5.

Satz 5.6.

Beweis. □

Satz 5.7.

Bemerkung.

Beweis. □

Beispiel 5.8. a) ...

b) ...

Theorem 5.9.

Beweis. a) ...

b) ...

□

Beispiel 5.10. a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

Beispiel 5.11.

Definition 5.12.

Bemerkung.

5.2 Qualitative Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Definition 5.13.

Satz 5.14. a) ...

b) ...

c) ...

Beweis.

□

Bemerkung.

Beispiel.

Beweis.

□

Theorem 5.15.

Beweis.

□

Satz 5.16.

Beweis.

□

Definition 5.17.

Bemerkung 5.18. a) ...

b) ...

c) ...

Korollar 5.19.

Beweis.

□

Satz 5.20. a) ...

b) ...

Bemerkung.

Beweis.

□

Beispiel 5.21.

Beweis.

□

Korollar 5.22. a) ...

b) ...

Bemerkung.

Beweis. a) ...

b) ...

□

Definition 5.23.

Bemerkung.

Satz 5.24.

Beispiel 5.25. a) ...

Beweis.

□

Beispiel 5.26. a) ...

Beweis.

□

Theorem 5.27. a) ...

b) ...

Beweis.

□

Beispiel 5.28. a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

5.3 Der Satz von Taylor

Theorem 5.29.

Beweis.

□

Definition 5.30.

Bemerkung 5.31. a) ...

 b) ...

Theorem 5.32. a) ...

 b) ...

 c) ...

Beispiel.

Beweis.

□

Definition 5.33.

Beispiel 5.34. a) ...

 b) ...

 c) ...

Newton-Verfahren

Theorem 5.35.

Beweis.

□

Beispiel 5.36.