

19. Funktionsfolgen und -reihen

In diesem Paragraphen seien: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) sei eine **Folge von Funktionen**. $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Unter $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ versteht man die Folge (s_n) . $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **Funktionsreihe**.

Definition

(f_n) heißt auf D **punktweise konvergent** : \iff für jedes $x \in D$ ist $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergent. In diesem Fall heißt $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ die Grenzfunktion von f_n .

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D **punktweise konvergent** : \iff für jedes $x \in D$ ist $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergent. In diesem Fall heißt $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ die Summenfunktion von $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Beispiele:

- (1) $D = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ ($x \in D, n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases} =: f(x)$$

(f_n) konvergiert punktweise auf D gegen f .

- (2) $D = (0, \infty)$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) $\forall x \in D$. Das heißt: (f_n) konvergiert auf D punktweise gegen $f(x) = 0$.

Übung: $0 \leq f_n \leq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$.

- (3) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (-r, r)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($x \in D$). $(f_n(x) = a_n x^n)$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf D punktweise gegen f

Konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, so bedeutet dies: Ist $\varepsilon > 0$ und $x \in D$, so existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_0$

Definition

(f_n) heißt auf D **gleichmäßig (glm) konvergent** : $\iff \exists$ Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \forall x \in D$.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D **gleichmäßig (glm) konvergent** : $\iff \exists$ Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \forall x \in D$.

Klar: gleichmäßige Konvergenz \implies punktweise Konvergenz. (\Leftarrow im Allgemeinen falsch)

Bemerkung: (f_n) sei auf D punktweise konvergent gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f : $\iff \exists m \in \mathbb{N}$: $f_n - f$ ist auf D beschränkt $\forall n \geq m$ und für $M_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\}$ ($n \geq m$) gilt $M_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

Beispiele:

- (1) D , f_n und f seien wie in obigem Beispiel (1). $f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$. $f_n - f$ ist beschränkt auf $D \forall n \in \mathbb{N}$. $|f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) - f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})| = \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies M_n \geq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies M_n \not\rightarrow 0 \implies (f_n)$ konvergiert nicht gleichmäßig auf D .

- (2) Sei $0 < \alpha < 1$, $D := [0, \alpha]$, $f_n(x) = x^n$, (f_n) konvergiert auf D punktweise gegen $f \equiv 0$. Sei $x \in D = [0, \alpha]$. $|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq \alpha^n \implies M_n = \alpha^n$. $\alpha < 1 \implies \alpha^n \rightarrow 0 \implies M_n \rightarrow 0$. Das heißt (f_n) konvergiert auf $[0, \alpha]$ gleichmäßig gegen f .
- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf $D = (-1, 1)$ punktweise gegen $f(x) := \frac{1}{1-x}$. $s_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. $|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty \implies s_n - f$ ist auf D nicht beschränkt $\forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf D nicht gleichmäßig.

Satz 19.1 (Funktionskonvergenzkriterien)

- (1) f_n konvergiert auf D punktweise gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f : \iff \exists$ Nullfolge $(\alpha_n) \in \mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \forall n \geq m \forall x \in D$.
- (2) **Kriterium von Weierstraß:** Sei (c_n) eine Folge in \mathbb{R} sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, sei $m \in \mathbb{N}$ und es gelte: $(*) |f_n(x)| \leq c_n \forall n \geq m \forall x \in D$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig.
- (3) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (-r, r)$ und $[a, b] \subseteq D$. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleichmäßig.

Beweis

- (1) Klar
- (2) Aus $(*)$ und 12.2 folgt: $\forall x \in D$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent. $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. $|f_n(x) - f(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k =: \alpha_n \forall n \geq m \forall x \in D$. $11.1 \implies \alpha_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(1)} \text{Behauptung.}$
- (3) Sei $\delta > 0$ so, dass $[a, b] \subseteq [-\delta, \delta] \subseteq D$. Sei $x \in [a, b] \implies |x| \leq \delta \implies |a_n x^n| = |a_n| |x^n| \leq |a_n| \delta^n =: c_n \forall n \in \mathbb{N}$. $\sum c_n = \sum |a_n| \delta^n$ ist konvergent $\xrightarrow{(2)} \text{Behauptung.}$ ■

Satz 19.2 (Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz)

(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f .

- (1) Ist $x_0 \in D$ und sind alle f_n stetig in $x_0 \implies f$ ist stetig in x_0
- (2) Gilt $f_n \in C(D) \forall n \in \mathbb{N} \implies f \in C(D)$

Bemerkung: Voraussetzung und Bezeichnungen wie in 19.2. Sei x_0 auch noch Häufungspunkt von D .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{13.1(1)}{=} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$$

Beweis

- (1) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \forall x \in D$ (i).
 $17.1 \implies \exists \delta > 0 : |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ (ii).

$$\text{Für } x \in D \cap U_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \\ \underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{\substack{(i) \\ \leq \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(x_0)|}_{\substack{(ii) \\ \leq \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{|f_m(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{(i) \\ \leq \frac{\varepsilon}{3}}} < \varepsilon. \quad 17.1 \implies f \text{ stetig in } x_0.$$

(2) Folgt aus (1) ■

Beweis (Nachtrag: Beweis von 17.2)

17.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius > 0 , $D := (-r, r)$. $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Behauptung: $f \in C(D)$. Sei $x_0 \in D$. Sei $[a, b]$ so, dass $x_0 \in [a, b] \subseteq D$. 19.1(3) $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig. $\implies f \in C[a, b] \implies f$ ist stetig in x_0 . $x_0 \in D$ beliebig \implies Behauptung ■

Satz 19.3 (Identitätssatz für Potenzreihen)

Sei $r > 0$, $D := (-r, r)$, ($r = \infty$ zugelassen). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien Potenzreihen, die auf D konvergieren. $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ($x \in D$). Weiter sei x_k eine Folge in $D \setminus \{0\}$ mit $x_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) und $f(x_k) = g(x_k) \forall k \in \mathbb{N}$. Dann: $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis

$$h(x) := f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n - b_n)}_{:=c_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \text{ z.z.: } c_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0. \underbrace{h(x_k)}_{=0} \xrightarrow{17.2} h(0) =$$

$$c_0 \implies c_0 = 0.$$

Annahme: $\exists n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0$. $m := \min\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$. Also: $c_m \neq 0$, $c_1, \dots, c_{m-1} = 0 \implies$

$$h(x) = c_m x^m + c_{m+1} x^{m+1} + \dots. \text{ Für } x \in D \setminus \{0\} : \frac{h(x)}{x^m} = \underbrace{c_m + c_{m+1} x + c_{m+2} x^2 + \dots}_{\text{Potenzreihen, die auf D konvergieren}} \xrightarrow{17.2}$$

$$c_m(x \rightarrow \infty) \implies \underbrace{\frac{h(x_k)}{x_k^m}}_{=0} \rightarrow c_m(k \rightarrow \infty) \implies c_m = 0, \text{ Widerspruch!} \quad \blacksquare$$

