20. Homotopie und einfacher Zusammenhang

Lemma 20.1
Sei $\emptyset \neq K \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und K kompakt. Dann existiert ein $r > 0$: $U_r(a) \subseteq D\ \forall a \in K$.

Beweis
$\forall a \in K\ \exists r_a > 0$: $U_{2r_a}(a) \subseteq D$. Dann: $K \subseteq \bigcup\limits_{a \in K} U_{r_a}(a)$.
2.3 $\implies \exists a_1, \ldots, a_n \in K$: $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{r_{a_j}}(a_j)$.
$r := \min\{r_{a_1}, \ldots, r_{a_n}\}$. Sei $a \in K$ und $z \in U_r(a)$.
Zu zeigen: $z \in D$.
$\exists j \in \{1, \ldots, n\}$: $a \in U_{r_{a_j}}(a_j)$.
Dann: $|z - a_j| = |z - a + a - a_j| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |z - a| + |a - a_j| < r + r_{a_j} \leq 2r_{a_j} \implies z \in U_{2r_{a_j}}(a_j) \subseteq D$ ■

Lemma 20.2
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq D$. ($\gamma$ also „nur" stetig)
Dann existiert ein $r > 0$ und eine Zerlegung $Z = \{a_0, \ldots, a_n\}$ von $[a, b]$ mit:

(1) für $z_j := \gamma(a_j)$ gilt: $U_r(z_j) \subseteq D$ $(j = 0, \ldots, n)$

(2) $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subseteq U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$ $(j = 0, \ldots, n)$

Beweis
20.1 $\implies \exists r > 0$: $U_r(z) \subseteq D\ \forall z \in K := \mathrm{Tr}(\gamma) \implies$ (1).
OBdA: $[a, b] = [0, 1]$. γ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig $\implies \exists \delta > 0$: $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r\ \forall s, t \in [0, 1]$ mit $|s - t| < \delta$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{1}{n} < \delta$. $a_j := \frac{j}{n}$ $(j = 0, \ldots, n)$ und $Z := \{a_0, \ldots, a_n\}$. Sei $t \in [a_j, a_{j+1}]$. $\implies |t - a_j| < \delta$, $|t - a_{j+1}| < \delta$. $\implies |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_j)}_{=z_j}| < r$, $|\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_{j+1})}_{=z_{j+1}}| < r \implies \gamma(t) \in U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$. ■

In §8 haben wir $\int\limits_\gamma f(z)dz$ definiert für γ stückweise glatt und $f \in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$. Jetzt definieren wir $\int\limits_\gamma f(z)dz$ für γ „nur" stetig und f holomorph.

Definition
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq D$. Seien r, z_j, Z wie in 20.2.
$z_0 = \gamma(a_0) = \gamma(a)$, $z_n = \gamma(a_n) = \gamma(b)$
$\gamma_j(t) := z_j + t(z_{j+1} - z_j)$ $(t \in [0,1])$ $(j = 0, \dots, n-1)$.
$\Gamma := \gamma_0 \oplus \cdots \oplus \gamma_{n-1}$ ist stückweise glatt. 20.2 $\implies$ $\mathrm{Tr}(\Gamma) \subseteq D$. Setze

$$(+) \quad \int_\gamma f(z)dz := \int_\Gamma f(z)dz$$

Lemma 20.3
Bezeichnungen wie in obiger Definition.

(1) Ist γ stückweise glatt, so stimmt obige Definition $(+)$ mit der Definition von $\int_\gamma f(z)dz$ aus §8 überein.

(2) Die Definition $(+)$ ist unabhängig von der Zerlegung Z, solange Z die Eigenschaft aus 20.2 hat.

(3) $|\int_\gamma f(z)dz| \leq (\max_{z \in \mathrm{Tr}(\Gamma)} |f(z)|) L(\Gamma)$.

Beweis

(1) $\tilde{\gamma_j} := \gamma_{|[a_j, a_{j+1}]}$. Dann: $\gamma = \tilde{\gamma_0} \oplus \tilde{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}$
Sei $j \in \{0, \dots, n-1\}$: $\tilde{\gamma_j} \oplus \gamma_j^-$ ist ein geschlossener, stückweise glatter Weg im Sterngebiet $U_r(z_j)$ (siehe 20.2).
$\overset{9.2}{\implies} \int_{\tilde{\gamma_j} \oplus \gamma_j^-} f(z)dz = 0 \implies \int_{\tilde{\gamma_j}} f(z)dz = \int_{\gamma_j} f(z)dz.$
$\overset{\text{Summation}}{\implies} \int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz.$

(2) Übung. (Ist $\tilde{Z}$ eine weitere Zerlegung von $[a,b]$ mit den Eigenschaften aus 20.2, so betrachte die gemeinsame Verfeinerung $Z \cup \tilde{Z}$. Verfahre ähnlich wie in (1).)

(3) folgt aus 8.4 ■

Definition
$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen.

(1) Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\mathrm{Tr}(\gamma_0), \mathrm{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.
γ_0 und γ_1 heißen **in D homotop** $:\Leftrightarrow \exists H : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$: H ist stetig, $H([0,1]^2) \subseteq D$ und

$$H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$H(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0),\ H(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \quad \forall s \in [0,1]$$

In diesem Fall heißt H eine **Homotopie von γ_0 nach γ_1 in D**.

Anschaulich: Sei $s \in [0,1]$.

$\Gamma_s(t) := H(t,s)$ $(t \in [0,1])$, Γ_s ist ein Weg mit $\text{Tr}(\Gamma_s) \subseteq D$. $\Gamma_s(0) = H(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \Gamma_s(1) = H(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, $\Gamma_0 = \gamma_0, \Gamma_1 = \gamma_1$
„γ_0 kann in D stetig nach γ_1 deformiert werden.“

(2) $\gamma :\ [0,1] \to \mathbb{C}$ sei ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. $z_0 : 0\gamma(0) = \gamma(1)$.
$\gamma_{z_0}(t) := z_0$ $(t \in [0,1])$ heißt ein **Punktweg**.

γ heißt **nullhomotop in D** $:\Leftrightarrow$ γ und γ_{z_0} sind in D homotop.
„γ lässt sich in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen.“

(3) $G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. G heißt **einfach zusammenhängend** $:\Leftrightarrow$ jeder geschlossene Weg $\gamma :\ [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ ist in G nullhomotop.
„G hat keine Löcher.“

Satz 20.4
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet.

(1) Sind $\gamma_0, \gamma_1 :\ [0,1] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ und $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G$, so sind γ_0 und γ_1 homotop in G.

(2) G ist einfach zusammenhängend

Beweis

(1) $H(s,t) := \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)), (s,t \in [0,1])$. H ist eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 in G

(2) folgt aus (1) ∎