0.6.4 Aufgabe 4

a) $G = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) | A^\top JA = J\}$ z.Z.: G ist Gruppe

Beweis: $G \subset GL(4, \mathbb{R})$, d.h. wir können das UGK anwenden.

(1) $E_4^\top JE_4 = J$, als ist $E_4 \in G$ und $G \neq \emptyset$

(2) Seien $A, B \in G$: $(A \cdot B^{-1})^\top J(AB) = B^{-1\top} A^\top JAB^{-1} = (B^{-1})^\top JB^{-1}$. Nach Vors.: $B^\top JB = J \Leftrightarrow J = (B^\top)^{-1} JB^{-1} = (B^{-1})^\top JB^{-1} = AB^{-1} \in G$

Damit ist G eine Gruppe □

0.7 Übung 6, 13.12.2004

0.7.1 Aufgabe 1

a) Grad q =: m m = Grad q = Grad r_1 > Grad r_2 > ... > Grad r_n > Grad r_{n+1} > Grad r_{n+2}

Falls kein $n \in \mathbb{N}$ ex. mit $k_n = 0$, dann gilt: k_{n+1} ex., Grad $k_{n+1} \geq 0$

Also gibt es $m + 2$ verschiedene Elemente in der Menge $\{0, ..., m\}$.`

b) Der Eukl.-Algo liefert

$$\begin{aligned}
r_0 &= s_1 r_1 + r2 \\
r_1 &= s_2 r_2 + r3 \\
r_2 &= s_3 r_3 + r4 \\
&\dots \\
r_{n-2} &= s_{n-1} r_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= s_n r_n + 0
\end{aligned}$$

Wir zeigen: r_n teilt r_{n-k} für alle $k = 0, ..., n$

Beweis:

I.A.: r_n teilt $r_n = r_{n-0}$; r_n teilt r_{n-1} wg. der letzten Gleichung
I.V.: r_n teilt $r_{n-(k-1}$ und r_n teilt r_{n-i}
I.S.: z.Z.: r_n teilt $r_{n-(k-1}$

Wir wissen: $r_{n-(k+1)} = s_{n-k} \cdot r_{n-k} + r_{n-(k-1)}$

Nach I.V.: $\exists l, m \in \mathbb{K}[x]$ $k_{r-k} = l \cdot r_n$ und $r_{n-(k-1)} = n \cdot r_n$

Damit: $r_{n \cdot (k-1)} = s_{n-k} l r_n + m \cdot kn = (s_{n-k} l + m) r_n$, d.h. r_n teilt $r_{n-(k+1)}$

Also ist r_n ein Teiler von $r_0 = p, r_1 = q$ □

c) Ist d ein Teiler von p und q, so teilt d auch r_k für alle $k \in \{0, ..., n\}$

Beweis:
IA: d teilt r_0, d teilt r_1 nach Vor.
IV: d teilt r_{k-1} und d teil r_2
IS: $r_{k-1} = s_k r_k + r_{k+1}$

Nach IV: $\exists l, m \in \mathbb{K}[x] : r_{k-1} = d$ und $r_m = md$
Damit $r_{k+1} = (l - s_k m)d$, d teilt also r_{k+1}
Insbesondere teilt d also k $\square$

0.7.2 Aufgabe 2

$$\underbrace{(x^4+3x^3+2x^2-3)}_{r_0} = \underbrace{(x^3-x)}_{r_1}\underbrace{(x+3)}_{s_1} + \underbrace{(3x^2+3x-3)}_{r_2}$$
$$\underbrace{(x^3-x)}_{r_1} = \underbrace{(3x^2+3x-3)}_{r_2}\underbrace{(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})}_{s_2} + \underbrace{(x-1)}_{r_3}$$
$$\underbrace{(3x^2+3x-3)}_{r_2} = \underbrace{(x-1)}_{r_3}\underbrace{(3x+6)}_{s_3} + \underbrace{3}_{r_4}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \tfrac{1}{3}((s_2 - s_3) + 1)r_0 + (-s_1 s_2 s_3 - s_1 - s_3)r_1 \\
d.h.:\quad r &= \tfrac{1}{3}s_2 s_3 + 1 = \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3} \\
s &= -\tfrac{1}{3}s_1 s_2 s_3 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_3 \\
&= -\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{5}{3}x - 1
\end{aligned}$$

0.7.3 Aufgabe 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -18 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -6 \end{array}\right)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}:$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
$$L = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{F}_3 \}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$
$$L = \emptyset$$