17. Quadrierbare Mengen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A heißt **quadrierbar** (qb) $:\iff 1_A \in L(\mathbb{R}^n)$ ($\iff 1 \in L(A)$)

In diesem Fall heißt $v_n(A) := \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx = \int_A 1 dx$ das n-dimensionale **Volumen** oder **Lebesguemaß** von A. **Beachte:** $v_n(A) \in \mathbb{R}$

Satz 17.1
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Ist A offen oder abgeschlossen, dann ist A quadrierbar.

Beweis
16.11, 16.12 ■

Beispiele:

(1) $\emptyset$ ist quadrierbar und $v_n(\emptyset) = 0$.

(2) Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n \implies 1_Q \in \mathscr{T}_n \subseteq L(\mathbb{R}^n) \implies Q$ ist quadrierbar und n-dimensionale Volumen von oben gleich dem n-dimensionalen Volumen aus §15

(3) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D beschränkt und abgeschlossen, $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $f \geq 0$ auf D. $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, 0 \leq y \leq f(x)\}$. A ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{17.1}{\implies}$ A ist quadrierbar (im $\mathbb{R}^{n+1}$). $v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, y) \overset{16.3}{=} \int D \left(\int_0^{f(x)} 1 dy\right) dx = \int_D f(x) dx$

(4) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ $(r > 0)$. $A = \overline{U_r(0)}$. A ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{17.1}{\implies}$ A ist quadrierbar. $v_2(A) = \int_A 1 dx$. Für $x \in [-r, r]$: $A_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}] \implies$ $v_n(A) = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 dy\right) dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} dx \overset{\text{AI}}{=} \pi r^2$.

Satz 17.2
$A, B, A_1, \dots, A_m$ seien $\subseteq \mathbb{R}^n$ und quadrierbar.

(1) $A \cap B, A \cup B, A \backslash B$ sind quadrierbar und
$v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$.

(2) Aus $A \subseteq B$ folgt $v_n(A) \leq v_n(B)$.

(3) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ ist quadrierbar und
$v_n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \leq v_n(A_1) + \cdots + v_n(A_m)$

Beweis

(1) $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B \overset{16.5}{\implies} 1_{A \cap B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cup B$ ist quadrierbar.
$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B} \overset{16.5}{\implies} 1_{A \cup B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A \cup B$ ist quadrierbar. $v_n(A \cup B) =$

$\int_{\mathbb{R}^n} 1_{A\cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx - \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A\cap B} dx = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A\cap B)$.
$1_{A\setminus B} = 1_A(1-1_B) \overset{16.5}{\Longrightarrow} 1_{A\setminus B} \in L(\mathbb{R}^n) \implies A\setminus B$ ist quadrierbar.

(2) $A \subseteq B \implies 1_A \le 1_B$ auf $\mathbb{R}^n \implies v_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx \le \int_{\mathbb{R}^n} 1_B dx = v_n(B)$

(3) folgt aus (1) mit Induktion ■

Satz 17.3 (Prinzip von Cavalieri)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} = \{(x,z) : x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$ beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im $\mathbb{R}^{n+1}$). Dann:

(1) $\forall z \in \mathbb{R}$ ist A_z beschränkt und abgeschlossen (also quadrierbar im $\mathbb{R}^n$).

(2) $v_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}} v_n(A_z) dz$

Beweis
(1) Übung

(2) $v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x,z) \overset{16.3}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{A_z} 1 dx\right)}_{=v_n(A_z)} dz.$ ■

Beispiele:
(1) $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], x^2+y^2 \le z^2\}$. A ist beschränkt und abgeschlossen $\implies$ A ist quadrierbar. Für $z \notin [0,1] : A_z = \emptyset$. Für $z \in [0,1] : A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : x^2+y^2 \le z^2\} \implies v_2(A_z) = \pi z^2 \implies v_3(A) = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}$

(2) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $f \ge 0$ auf $[a,b]$. Graph von f rotiert um die x-Achse $\longrightarrow$ Rotationskörper A. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2+z^2 \le f(x)^2\}$. $A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2 \le f(x)^2\}$ für $x \in [a,b]$. $v_2(A_X) = \pi f(x)^2$. $v_3(A) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.

Speziell: $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ $(r>0)$, $x \in [-r,r]$.
Rotationskörper $A = \overline{U_r(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$. $v_3(A) = \pi \int_{-r}^r (r^2-x^2) dx = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Definition
Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N heißt eine **Nullmenge** genau dann, wenn F quadrierbar und $v_n(N) = 0$ ist.

Satz 17.4
Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N ist eine Nullmenge $\iff \|1_N\|_1 = 0$.

Beweis
„$\Rightarrow$“: N Nullmenge $\implies 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$. 16.5 $\implies \|1_N\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} 1_N dx = v_n(N) = 0$. „$\Leftarrow$“: Setze $(\varphi_k) := (0,0,0,\dots)$; (φ_k) ist eine Folge in $\mathscr{T}_n$: $\|1_N - \phi_k\|_1 = \|1_N\|_1 = \|1_N\|_1 \overset{\text{Vor.}}{=} 0 \; \forall k \in \mathbb{N} \implies 1_N \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int 1_N dx = \lim \int \varphi_k dx = 0 \implies N$ ist quadrierbar und $v_n(N) = 0$. ■

Satz 17.5
$N, N_1, N_2, \ldots$ seien Nullmengen im $\mathbb{R}^n$.

(1) Ist $M \subseteq N \implies M$ ist eine Nullmenge.

(2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ ist eine Nullmenge.

Beweis
(1) $1_M \leq 1_N \overset{16.1}{\implies} \|1_M\|_1 \leq \|1_N\|_1 \overset{17.4}{=} 0 \implies \|1_M\|_1 = 0 \implies$ Beh.

(2) $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$; $1_A \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{N_K} \overset{16.1}{\implies} \|1_A\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{N_k}\|_1 \overset{17.4}{=} 0 \implies$ Beh. ∎

Beispiele:
(1) Sei $x_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N := \{x_0\} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_0\}$. N ist ein Quader, also quadrierbar, $v_n(N) = 0$, N ist eine Nullmenge.

(2) Beispiel (1) und 17.5(2) liefern: Jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge

(3) Ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$. Q ist eine Nullmenge $\iff a_j = b_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Satz 17.6
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei beschränkt und abgeschlossen, es sei $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $G_f := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist G_f eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis
G_f ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{17.1}{\implies}$ G_f ist qb. $v_{n+1}(G_f) = \int_{G_f} 1 d(x,y) \overset{16.13}{=} \int_D \left(\int_{f(x)}^{f(x)} 1 dy \right) dx = 0$. ∎

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (E) eine Eigenschaft, welche die Elemente von A betrifft. (E) gilt **fast überall (f.ü.)** auf $A :\iff \exists$ Nullmenge $N \subseteq A$ mit: (E) gilt für alle $x \in A \backslash N$.

Beispiel
$f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ sei eine Funktion. $f = 0$ f.ü. auf $A \iff \exists$ Nullmenge $N \subseteq A : f(x) = 0\ \forall x \in A \backslash N$.

Satz 17.7
(1) $f, g : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ seien Funktionen mit $f = g$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$. Dann: $f \in L(\mathbb{R}^n) \iff g \in L(\mathbb{R}^n)$. I. d. Fall: $\int f dx = \int g dx$.

(2) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L(A) \cap L(B)$ und $A \cap B$ sei eine Nullmenge. Dann: $f \in L(A \cup B)$ und $\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$.

Beweis

(1) $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash N$. Sei $f \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists$ Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit: $||f - \varphi_k||_1 \to 0$ und $\int f dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx$.

$f_k := 1_N\ (k \in N),\ h := \sum_{k=1}^{\infty} f_k,\ ||h||_1 \overset{16.1}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_1 \overset{17.4}{=} 0 \implies ||h||_1 = 0.$

Es ist $|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + h$ auf $\mathbb{R}^n \overset{16.1}{\implies} ||g - \varphi_k||_1 \leq ||f - \varphi_k||_1 + ||h||_1 = ||f - \varphi_k||_1 \implies ||g - \varphi_k||_1 \to 0 \implies g \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int g dx = \lim \int \varphi_k dx = \int f dx$.

(2) Wegen (1) o.B.d.A: $f = 0$ auf $A \cap B$. Dann: $f_{A\cup B} = f_A + f_B \overset{16.5}{\in} L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A \cup B)$ und $\int_{A\cup B} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_{A\cup B} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_B dx = \int_A f dx + \int_B f dx$. ■

Satz 17.8
$f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ sei eine Funktion.

(1) Ist $||f||_1 < \infty$ und $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} \implies N$ ist eine Nullmenge. Dies ist z.B. der Fall, wenn $f \in L(\mathbb{R}^n)$ (16.5: $||f||_1 = \int |f| dx$)

(2) $||f||_1 = 0 \iff f = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis

(1) Sei $\varepsilon > 0 : 1_N \leq \varepsilon |f|$ auf $\mathbb{R}^n \overset{16.1}{\implies} ||1_N||_1 \leq \varepsilon ||f||_1 \overset{\varepsilon\to 0}{\implies} ||1_N||_1 = 0 \overset{17.4}{\implies}$ Beh.

(2) „$\Rightarrow$“: Für $k \in N : N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$. Dann: $1_{N_k} \leq k|f|$ auf $\mathbb{R}^n \overset{16.1}{\implies} ||1_{N_k}||_1 \leq k||f||_1 = 0 \overset{17.4}{\implies} N_k$ ist eine Nullmenge $\overset{17.5}{\implies} N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ist eine Nullmenge. Es ist $N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \implies f = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$.

„$\Leftarrow$“: $|f| = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n \overset{17.7}{\implies} |f| \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int |f| dx = \int 0 dx = 0$. 16.5 $\implies ||f||_1 = \int |f| dx = 0$. ■

Definition
Seien $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ *abgeschlossene* Quader im $\mathbb{R}^n$ und $A := Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_m$. Dann heißt A eine **Figur**.

Satz 17.9
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ex. Figuren $A_1, A_2, \ldots$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Ist U qb $\implies v_n(U) = \lim\limits_{k\to\infty} v_n(A_k) = \sup\{v_n(A_k) : k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis
Für $a \in \mathbb{Q}^n$ und $r \in \mathbb{Q}^+$ sei $W_r(a)$ wie im Beweis von 16.10.

$\mathscr{Q} := \{W_r(a) : a \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}^+,\ W_r(a) \subseteq U\},\ U$ offen $\implies \mathscr{Q} \neq \emptyset$.

Es ist $\mathscr{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots\},\ A_k := Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k\ (k \in \mathbb{N})$. (A_k) leistet das Verlangte.

Sei U qb. $\varphi_k := 1_{A_k}$ $(k \in \mathbb{N}) \implies \varphi_k \in \mathscr{T}_n,\ \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\varphi_k(x) \to 1_U(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi_1 \leq \varphi_k \leq 1_U$ auf $\mathbb{R}^n \implies \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \int 1_U dx = v_n(U)$. 16.7 $\implies \lim \underbrace{\int \varphi_k dx}_{v_n(A_k)} = \int 1_u dx = v_n(U)$. ■

> **Satz 17.10**
> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ex. Quader $Q_1, Q_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$ mit:
>
> $$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } Q_k^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset\ (j \neq k)$$
>
> Ist U qb $\implies v_n(U) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k)$.

Beweis
In der gr. Übung. ■

> **Satz 17.11**
> Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N ist eine Nullmenge $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists$ Quader $Q_1, Q_2, \dots$ im $\mathbb{R}^n$ mit: (*) $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon$.

Beweis
„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Seien $Q_1, Q_2, \dots$ wie in (*). Dann: $1_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$ auf $\mathbb{R}^n \overset{16.1}{\implies} ||1_N||_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||1_{Q_k}||_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int 1_{Q_k} dx = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon \implies ||1_N||_1 = 0 \overset{17.4}{\implies} N$ ist eine Nullmenge.

„$\Rightarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt z.z.: $\exists$ offene Menge U mit: $N \subseteq U$, U ist qb und $v_n(U) < \varepsilon$ (wegen 17.10).

$||2 \cdot 1_N||_1 = 2||1_N||_1 \overset{17.4}{=} 0 \implies \exists \Phi \in \mathscr{H}(2 \cdot 1_N) : I(\Phi) < \varepsilon$. Sei $\Phi = \sum_k c_k 1_{R_k}$, wobei $c_k \geq 0$, R_k offene Quader. O.B.d.A: $\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{R_k}$.

$\varphi_m := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{R_k} \in \mathscr{T}_n;\ \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \Phi;\ \varphi_m(x) \to \Phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. $\int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_m dx = \sum_{k=1}^{m} c_k v_n(R_k) \overset{m \to \infty}{\to} \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(R_k) = I(\Phi) < \varepsilon$.

16.7 $\implies \Phi \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int \Phi dx = \lim \int \varphi_m dx = I(\Phi) < \varepsilon$.

$U := \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) > 1\}$. $x \in N \implies \Phi(x) \geq 2 \cdot 1_N(x) = 2 \implies x \in U$. Also: $N \subseteq U$. U offen, U qb, $v_n(U) < \varepsilon$. ■

Folgerung 17.12
Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$: U ist offen, U ist quadrierbar, $N \subseteq U$ und $v_n(U) < \varepsilon$.

Beweis
Beweis von 17.11 ■

Satz 17.13
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, $f : A \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und fast überall stetig auf A. Dann: $f \in L(A)$.

Beweis
$\exists \gamma \geq 0 : |f| \leq \gamma$ auf A. $\exists$ Nullmenge $N \subseteq A$: f ist stetig auf $A \setminus N$. Sei $\varepsilon > 0$. 17.12 $\implies \exists$ offene und quadrierbare Menge U mit $N \subseteq U, v_n(U) < \varepsilon$. $A \setminus U \subseteq A \setminus N$, f stetig auf $A \setminus U$, $A \setminus U$ ist beschränkt und abgeschlossen. 16.12 $\implies f \in L(A \setminus U) \implies f_{A \setminus U} \in L(\mathbb{R}^n) \implies \exists \varphi \in \mathscr{T}_n : \|f_{A\setminus U} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. Es ist $|f_A - f_{A\setminus U}| \leq \gamma \cdot 1_U$ auf $\mathbb{R}^n$. $\overset{16.1}{\implies} \|f_A - f_{A\setminus U}\|_1 \leq \gamma \|1_U\|_1 \overset{16.5}{=} \gamma \int 1_U \mathrm{d}x = \gamma v_n(U) < \gamma\varepsilon$. Dann:

$$\begin{aligned} \|f_A - \varphi\|_1 &= \|f_A - f_{A\setminus U} + f_{A\setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \|f_A - f_{A\setminus U}\|_1 + \|f_{A\setminus U} - \varphi\|_1 \\ &\leq \gamma\varepsilon + \varepsilon \\ &= (\gamma+1)\varepsilon \end{aligned}$$

D.h: $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \varphi_k \in \mathscr{T}_n : \|f_A - \varphi_k\| < \frac{\gamma+1}{k} \implies f_a \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$. ■