

4. Wie Sie Wollen

Definition (Potenz, Fakultät, Binominalkoeffizienten)

- (1) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $a^n := a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n Faktoren) und heißt die n -te Potenz von a
 $a^0 := 1$
Für $a \neq 0$ gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- (2) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ und heißt die **Fakultät** von n , $0! := 1$.
- (3) Für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ („ n über k “)

Satz 4.1 (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten)

- (1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) Für $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$
- (3) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + b^n) = (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$

Satz 4.2 (Folgerung)

Für $b = 1$ und $x = a$ liefert 4.1 (3):

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} n+1 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}.$$

Satz 4.3 (Bernoullische Ungleichung (BU))

Ist $x \geq -1$, so gilt: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis

$n = 1$: $1+x \geq 1+x \quad \checkmark$

4. Wie Sie Wollen

$n \Rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &\geq 1+nx & \text{(IV)} \\
 (1+x)(1+x)^n &\geq (1+nx)(1+x) \\
 (1+x)^{n+1} &\geq 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x \\
 \Rightarrow (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Satz 4.4 (Der binomische Satz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beispiel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beweis

$$n = 1: \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b \quad \checkmark$$

$n \longrightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
 &(a+b)^{n+1} \\
 &= (a+b)(a+b)^n \\
 &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k & \text{(IV)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} & \text{(4.1 (2))} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
 \end{aligned}$$