# Geometrische Maßtheorie

PD. Dr. Daniel Hug

Wintersemester 2009/2010

Die Mitarbeiter von http://mitschriebwiki.nomeata.de/

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

## Über dieses Skriptum

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Geometrische Maßtheorie“ von Herrn PD. Dr. Daniel Hug im Wintersemester 2009/2010 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Hug hier veröffentlicht, Herr Hug ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

## Wer

Beteiligt am Mitschrieb ist Joachim Breitner.

## Wo

Alle Kapitel inklusive LaTeX-Quellen können unter `http://mitschriebwiki.nomeata.de` abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die LaTeX-Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.

# 1 Grundlagen: Maß und Integral

## 1.1 Äußere Maße und Messbarkeit

**Definition**
Sei $X$ eine Menge. Eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$$

heißt *äußeres Maß* auf $X$, falls gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) Für $A, A_n \subset X$, $i \in \mathbb{N}$ mit $A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i$ gilt

$$\mu(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(A_i).$$

Beobachte folgende einfache Folgerungen der Definition:

- $A \subset B \subset X \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- $A \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(B)$

**Beispiele**

$$\mu_1(A) = \begin{cases} \#A, & A \text{ endlich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \mu_2(A) = \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_3(A) = \begin{cases} \infty, & A \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \mu_4(A) = \begin{cases} \infty, & A^c \text{ endlich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_5(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Konstruktion eines äußeren Maßes aus Rohdaten ist folgender Satz nützlich:

**Satz 1.1**
Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$, sei $\eta : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ mit $\eta(\emptyset) = 0$. Dann wird durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \eta(A_i) : A_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i \right\}$$

$(\inf \emptyset = \infty)$ für $A \subset X$ ein äußeres Maß erklärt, das von $(\mathcal{E}, \eta)$ induzierte äußere Maß.

**Beweis**
Es ist $0 \leq \mu(\emptyset) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta(\emptyset) = 0$, da $\emptyset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset$ und $\emptyset \in \mathcal{E}$.

Seien $A, A_i \subset X$ und $A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i$. Wir müssen zeigen: $\mu(A) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$.

Ist für ein $i \in \mathbb{N}$ bereits $\mu(A_i) = \infty$, so sind wir fertig. Sei also $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $E_{ij} \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$ mit $A_i \subset \bigcup_{j \geq 1} E_{ij}$ und

$$\mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \sum_{j \geq 1} \eta(E_{ij}) \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Also gilt

$$A \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i \subset \bigcup_{i,j \geq 1} E_{ij},$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \sum_{i,j \geq 1} \eta(E_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \eta(E_{ij}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ ergibt dies

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

■

**Definition**
Sei $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$. Eine Menge $A \subset X$ heißt $\mu$-messbar, falls für alle $M \subset X$ gilt:

$$\mu(M) = \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c).$$

Die Menge aller $\mu$-messbaren Mengen wird mit $\mathcal{A}_\mu$ bezeichnet.

Es genügt bereits: $A$ ist $\mu$-messbar genau dann, wenn für alle $M \subset X$ gilt:

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c).$$

Denn wegen

$$M \subset (M \cap A) \cup (M \cap A^c) \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots$$

gilt

$$\mu(M) \leq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c) + \mu(\emptyset) + \cdots .$$

Es gilt stets $\emptyset, X \in \mathcal{A}_\mu$.

**Bemerkung:** Für $Y \subset X$ ist $\mu\lfloor Y$ das durch

$$(\mu\lfloor Y)(M) := \mu(M \cap Y), \quad M \subset X$$

erklärte äußere Maß. Ferner ist $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\mu\lfloor Y}$. Denn für $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $M \subset X$ ist

$$\begin{aligned}\mu_{\lfloor Y}(M) &= \mu(Y \cap M) = \mu(Y \cap M \cap A) + \mu(Y \cap M \cap A^c)\\ &= (\mu\lfloor Y)(M \cap A) + (\mu\lfloor Y)(M \cap A^c).\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$A \in \mathcal{A}_\mu \iff \mu = (\mu\lfloor A) + (\mu\lfloor A^c).$$

**Proposition 1.2**
Für ein äußeres Maß $\mu$ auf $X$ gelten die folgenden Aussagen:

a) $\emptyset$, $X \in \mathcal{A}_\mu$ sowie $A \in \mathcal{A}_\mu \iff A^c \in \mathcal{A}_\mu$.

b) Für $A \subset X$ mit $\mu(A) = 0$ gilt $A \in \mathcal{A}_\mu$.

c) Für $A_i \in \mathcal{A}_\mu$, $i \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}_\mu$ und $\bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_\mu$.

d) Für $A \in \mathcal{A}_\mu$, $B \subset X$ gilt

$$\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

e) Für $A_i \in \mathcal{A}_\mu$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, gilt

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

f) Für $A_i \in \mathcal{A}_\mu$, $i \in \mathbb{N}$ und $A_i \subset A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

g) Für $A_i \in \mathcal{A}_\mu$, $i \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_1) < \infty$ und $A_i \supset A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

**Beweis**

c) Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_\mu$, $M \supset X$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\mu(M) &= \mu(M \cap A_1) + \mu(M \cap A_1^c)\\ &= \mu(M \cap A_1) + \mu(M \cap A_1^c \cap A_2) + \mu(M \cap A_1^c \cap A_2^c)\\ &\geq \mu(M \cap (A_1 \cup (A_1^c \cap A_2))) + \mu(M \cap A_1^c \cap A_2^c)\\ &= \mu(M \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(M \cap (A_1 \cup A_2)^c).\end{aligned}$$

Daraus folgt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_\mu$. Per Induktion sieht man dann, dass für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_\mu$ gilt: $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}_\mu$.

e) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_\mu$ und paarweise disjunkt, dann gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

woraus

$$\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

folgt. Wegen

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)$$

gilt

$$\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

und damit Gleichheit.

f) Wir definieren $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$, $B_3 := A_3 \setminus A_2 \ldots$ Nun ist $B_i \in \mathcal{A}_\mu$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und die $B_i$ sind paarweise disjunkt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^k B_i) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^k \mu(B_i) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) && \text{(nach e))} \\
&= \mu(\bigcup_{i=1}^\infty B_i) \\
&= \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i).
\end{aligned}$$

g) Es ist

$$\mu(A_1) = \mu(A_2 \cup (A_1 \setminus A_2)) = \mu(A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2),$$

das heißt

$$\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2).$$

Damit zeigt man

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i\geq 1} A_i) &= \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i\geq 1} A_i) \\ &= \mu(A_1 \cap (\bigcap_{i\geq 1} A_i)^c) \\ &= \mu(A_1 \cap (\bigcup_{i\geq 1} A_i^c)) \\ &= \mu(\bigcup_{i\geq 1}(A_1 \cap A_i^c)) \\ &= \lim_{i\to\infty} \mu(\underbrace{\mathcal{A}_1 \cap A_i^c}_{=A_1\setminus A_i}) & \text{(nach f))} \\ &= \lim_{i\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_i)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

c) Sei $M \subset X$. Wir definieren $C_k \coloneqq \bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}_\mu$. Damit gilt $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu(M) < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\infty > \mu(M) &= (\mu\lfloor M)(X) \\ &= (\mu\lfloor M)(C_k) + (\mu\lfloor M)(C_k^c) \\ &= \lim_{k\to\infty} (\mu\lfloor M)(C_k) + \lim_{k\to\infty} (\mu\lfloor M)(C_k^c) \\ &= (\mu\lfloor M)(\bigcup_{i\geq 1} C_i) + (\mu\lfloor M)(\bigcap_{i\geq 1} C_i^c) \\ &= (\mu\lfloor M)(\bigcup_{i\geq 1} C_i) + (\mu\lfloor M)((\bigcup_{i\geq 1} C_i)^c) \\ &= \mu(M \cap (\bigcup_{i\geq 1} A_i)) + \mu(M \cap (\bigcup_{i\geq 1} A_i)^c)\end{aligned}$$

und somit $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}_\mu$.

d) Für $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $B \subset X$ gilt:

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= \mu((A \cup B) \cap A) + \mu((A \cup B) \cap A^c) \\ &= \mu(A) + \mu(B \cap A^c)\end{aligned}$$

sowie

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c).$$

Hiermit so erhält man

$$\begin{aligned}\mu(A) + \mu(B) &= \mu(A) + \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) \\ &= \mu(B \cap A) + \mu(A \cup B).\end{aligned}$$

■

Hinweis: Es ist $\mathcal{A}_\mu$ eine (bezüglich $\mu$ vollständige) $\sigma$-Algebra und $\mu$ ist ein $\sigma$-additives Maß auf $\mathcal{A}_\mu$, wobei „$\mathcal{A}_\mu$ ist $\mu$-vollständig“ heißt, dass jede $\mu$-Nullmenge in $\mathcal{A}_\mu$ liegt. $(X, \mathcal{A}_\mu)$ ist ein messbarer Raum und $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ ist ein Maßraum.

**Definition**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$. Ein äußeres Maß $\mu$ auf $X$ heißt $\mathcal{A}$-regulär, falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ gilt und zu jeder Menge $M \subset X$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $M \subset A$ und $\mu(M) = \mu(A)$. Das äußere Maß $\mu$ heißt regulär, falls $\mu$ ein $\mathcal{A}_\mu$-reguläres Maß ist.

**Proposition 1.3**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $X$, $\mu$ ein $\mathcal{A}$-reguläres äußeres Maß auf $X$. Dann gilt:

a) Ist $M_i \subset X$, $M_i \subset M_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist

$$\mu(\bigcup_{i\geq 1} M_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(M_i).$$

b) Zu jedem $M \subset X$ mit $\mu(M) < \infty$ existiert ein $A \in \mathcal{A}$, so dass für alle $B \in \mathcal{A}_\mu$ gilt:

$$\mu(B \cap M) = \mu(B \cap A)$$

c) Ist $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{A}$ und $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) < \infty$, so existiereren $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $M_i \subset A_i$, $i = 1, 2$ und $\mu(A_i \setminus M_i) = 0$. Insbesondere ist $M_1, M_2 \in \mathcal{A}_\mu$.

**Beweis**
a) Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ finden wir ein $A_i \in \mathcal{A}$ so dass $M_i \subset A_i$ und $\mu(M_i) = \mu(A_i)$. Dazu definieren wir $B_i \coloneqq \bigcap_{j\geq i} A_j$. Damit gilt $M_i \subset B_i \subset A_i$, $B_i \subset B_{i+1}$ und $B_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{i\geq 1} M_i) &\leq \mu(\bigcup_{i\geq 1} B_i) \\ &= \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) \\ &\leq \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \\ &= \lim_{i\to\infty} \mu(M_i) \\ &\leq \lim_{i\to\infty} \mu(\bigcup_{i\geq 1} M_i).\end{aligned}$$

b) Zu $M$ existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $M \subset A$ und $\mu(M) = \mu(A)$. Sei $B \in \mathcal{A}_\mu$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mu(M) &= \mu(M \cap B) + \mu(M \cap B^c) \\ &\leq \mu(A \cap B) + \mu(M \cap B^c) \\ &\leq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) = \mu(A),\end{aligned}$$

woraus Gleichheit in obigen Ungleichungen folgt. Wegen $\mu(M) < \infty$ ist auch $\mu(M \cap B^c) < \infty$, und wir können dies von zwei obigen Termen abziehen und erhalten

$$\mu(M \cap B) = \mu(A \cap B).$$

c) Zu $M_1$ existiert $\tilde{A}_1 \in \mathcal{A}$ mit $M_1 \subset \tilde{A}_1$ und $\mu(M_1) = \mu(\tilde{A}_1)$. Wir definieren $A_1 := \tilde{A}_1 \cap (M_1 \cup M_2)$. Für diese Menge gilt nun $M_1 \subset A_1 \subset M_1 \cup M_2$. Wir folgern

$$\mu(M_1) \leq \mu(A_1) \leq \mu(\tilde{A}_1) = \mu(M_1)$$

und wegen $M_1 \cup M_2 = A_1 \cup M_2$ weiter

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cap M_2) + \mu(A_1 \cup M_2) &= \mu(A_1) + \mu(M_2) \\ &= \mu(M_1) + \mu(M_2) \\ &= \mu(M_1 \cup M_2) \\ &= \mu(A_1 \cup M_2) < \infty,\end{aligned}$$

woraus $\mu(A_1 \cap M_2) = 0$ folgt.

Nun ist $A_1 \setminus M_1 \subset A_1 \cap M_2$, also gilt $\mu(A_1 \setminus M_1) = 0$ und somit $A_1 \setminus M_1 \in \mathcal{A}_\mu$. Damit gilt dann $M_1 = A_1 \cap (A_1 \setminus M_1)^c \in \mathcal{A}_\mu$. ∎

**Satz 1.4**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $X$ und $\nu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann wird durch

$$\mu(M) := \inf \{\nu(A) : A \in \mathcal{A},\, M \subset A\}$$

für $M \subset X$ ein $\mathcal{A}$-reguläres äußeres Maß auf $X$ erklärt mit $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$. Ist $M \in \mathcal{A}_\mu$ und $\mu(M) < \infty$, so existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $M \subset A$ und $\mu(A \setminus M) = 0$.

**Beweis**
Für $M \subset X$ sieht man leicht, dass

$$\mu(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) : A_i \in \mathcal{A},\, i \in \mathbb{N},\, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Also ist $\mu$ das von $(\mathcal{A}, \nu)$ induzierte äußere Maß. Da $\nu$ monoton ist und nach der Definition von $\mu$ ist $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$.

Um die $\mathcal{A}$-Regularität zu zeigen, nehmen wir ein $A \in \mathcal{A}$ und ein $M \subset X$. Für $B \in \mathcal{A}$ mit $M \subset B$ gilt:

$$\begin{aligned}\mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c) &\le \nu(B \cap A) + \nu(B \cap A^c)\\ &= \nu(B)\end{aligned}$$

und daher

$$\mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c) \le \mu(M).$$

also ist $A \in \mathcal{A}_\mu$. Sei nun $M \subset X$ beliebig und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu(M) < \infty$. Es existiert also eine Folge $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ mit $M \subset A_i$ und $\nu(A_i) \to \mu(M)$. Setze $A := \bigcap_{i\ge 1} A_i$. Dann gilt $A \in \mathcal{A}$, $M \subset A$, sowie

$$\mu(M) = \lim_{i\to\infty} \nu(A_i) \ge \nu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A) \ge \mu(M),$$

woraus $\mu(M) = \mu(A)$ folgt.

Sei schließlich $M \in \mathcal{A}_\mu$ mit $\mu(M) < \infty$. Es gibt ein $A \in \mathcal{A}$ mit $M \subset A$ und $\mu(M) = \mu(A) < \infty$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\infty > \mu(A) &= \mu(A \cap M) + \mu(A \cap M^c)\\ &= \mu(M) + \mu(A \cap M^c)\\ &= \mu(A) + \mu(A \setminus M).\end{aligned}$$

Wegen $\mu(A) = \mu(M) < \infty$ gilt also $\mu(A \setminus M) = 0$. ■

**Anwendung:** Sei $\vartheta$ ein beliebiges äußeres Maß auf $X$. Dann ist $\vartheta|_{\mathcal{A}_\vartheta}$ ein Maß. Durch

$$\mu(M) := \inf\{\vartheta(A) : A \in \mathcal{A}_\vartheta,\ M \subset A\}$$

wird also ein $\mathcal{A}_\vartheta$-reguläres äußeres Maß auf $X$ erklärt, das $\vartheta$ fortsetzt (also $\mu|_{\mathcal{A}_\vartheta} = \vartheta|_{\mathcal{A}_\vartheta}$).

**Definition**
Seien $X, Y$ Mengen, $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ und $f : X \to Y$. Dann wird durch

$$(f\mu)(M) := \mu(f^{-1}(M))$$

für $M \subset Y$ ein äußeres Maß $f\mu$ auf $Y$ erklärt. Man nennt $f\mu$ das *Bild* von $\mu$ unter $f$ oder auch *„push forward“* von $\mu$ bezüglich $f$ und schreibt hierfür auch $f_{\#}\mu$.

**Bemerkung:** Für $B \subset Y$ gilt

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu \iff \forall M \subset X : B \in \mathcal{A}_{f(\mu\lfloor M)}.$$

Seien hierzu $M \subset X$, $A, B \subset Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\mu(M \cap f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) + \mu(M \cap f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)^c)\\ &= (\mu\lfloor M)(f^{-1}(A \cap B)) + (\mu\lfloor M)(f^{-1}(A \cap B^c))\\ &= f(\mu\lfloor M)(A \cap B) + f(\mu\lfloor M)(A \cap B^c).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt: Ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_\mu$, so ist $A \in \mathcal{A}_{f(\mu)}$.

**Sprechweisen:** Sei $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$. Eine Menge $N \subset X$ heißt $\mu$-Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$. Eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ gilt für $\mu$-fast-alle $x \in X$ bzw. $\mu$-fast-überall, falls

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{E} \text{ gilt für } x \text{ nicht}\}) = 0.$$

Mit $\mathbb{F}_\mu(X,Y)$ wird die Menge aller Abbildungen $f : D \to Y$ bezeichnet mit $D \subset X$ und $\mu(X \setminus D) = 0$.

**Definition**
Seien $X, Y$ Mengen, $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ und $\mathcal{C}$ eine $\sigma$-Algebra in $Y$. Dann heißt $f \in \mathbb{F}_\mu(X,Y)$ $\mu$-messbar bezüglich $\mathcal{C}$, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_\mu$.

Beachte, dass für $f : D \to Y$ mit $\mu(X \setminus D) = 0$ gilt: $D = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}_\mu$.

**Lemma 1.5**
Seien $X, Y$ Mengen, $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$. Für $f \in \mathbb{F}_\mu(X,Y)$ sind äquivalent:

a) $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_\mu$

b) $f$ ist $\mu$-messbar bezüglich $\sigma(\mathcal{E})$.

**Definition**
Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so nennt man die von den offenen Mengen erzeugte $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{T})$ die Borelsche $\sigma$-Algebra des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ mit der Notation $\mathfrak{B}(X)$.

Spezielle Borelsche Algebren sind $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \in \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$.

**Definition**
Sei $X$ eine Menge, $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ und $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$. Man nennt $f$ eine $\mu$-messbare Abbildung, falls $f$ dies bezüglich $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}})$ ist.

Im Folgenden schreiben wir für eine Relation $\varrho$ auf $\bar{\mathbb{R}}$, Mengen $D, D' \subset X$ und Abbildungen $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$, $g : D' \to \bar{\mathbb{R}}$:

$$\{f \;\varrho\; g\} := \{x \in D \cap D' : f(x) \;\varrho\; g(x)\}$$

**Lemma 1.6**
Sei $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ und $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$. Genau dann ist $f$ eine $\mu$-messbare Abbildung, wenn eine der folgenden Bedingungen für alle $a \in \mathbb{R}$ erfüllt ist:

$$\{f > a\} \in \mathcal{A}_\mu, \qquad \{f \geq a\} \in \mathcal{A}_\mu, \qquad \{f < a\} \in \mathcal{A}_\mu, \qquad \{f \leq a\} \in \mathcal{A}_\mu.$$

**Lemma 1.7**
Sei $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$, seien $f, g, f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu$-messbar. Dann gilt

(a) $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$ sind $\mu$-messbare Mengen.

(b) Die Funktionen

$$\begin{array}{lll} f+g, & f-g, & f \cdot g \text{ (falls } \mu\text{-fast-überall definiert)}, \\ \sup\limits_n f_n, & \inf\limits_n f_n, & \\ f^+ := \max\{f, 0\}, & f^- := -\min\{f, 0\}, & |f|, \\ \limsup\limits_n f_n, & \liminf\limits_n f_n & \end{array}$$

sind $\mu$-messbar.

**Satz 1.8**
Ist $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$, so ist $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ genau dann $\mu$-messbar, wenn für alle $M \subset X$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap \{f \leq a\}) + \mu(M \cap \{f \geq b\}).$$

**Beweis**
Sei $f$ zunächst $\mu$-messbar. Dann gilt mit $a < b$, $M \subset X$:

$$\begin{aligned} \mu(M) &\geq \mu(M \cap \{f \leq a\}) + \mu(M \cap \{f > a\}) \\ &\geq \mu(M \cap \{f \leq a\}) + \mu(M \cap \{f \geq b\}) \end{aligned}$$

Jetzt gelte die Bedingung des Satzes für alle $M \subset X$, $a < b$. Zu zeigen ist: $\{f \leq r\} \in \mathcal{A}_\mu$ für beliebige $r \in \mathbb{R}$. Sei $M \subset X$ beliebig mit $\mu(M) < \infty$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei

$$A_i := M \cap \{r + \frac{1}{i+1} \leq f \leq r + \frac{1}{i}\}.$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_{2i+1}) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_{2i+1})$$

gilt.

Für $n = 0$ ist dies klar. Die Ungleichung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_{2i+1}) &\geq \mu(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_{2i+1} \cap \{f \geq \underbrace{r + \frac{1}{2n+2}}_{b}\}) + \mu(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_{2i+1} \cap \{f \leq \underbrace{r + \frac{1}{2n+3}}_{a}\}) \\
&= \mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_{2i+1}) + \mu(A_{2n+3}) \\
&\geq \sum_{i=0}^{n} \mu(A_{2i+1}) + \mu(A_{2n+3}) \\
&\geq \sum_{i=0}^{n+1} \mu(A_{2i+1})
\end{aligned}
$$

Analog zeigt man

$$
\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_{2i}) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_{2i})
$$

und erhält zusammen

$$
\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq 2\mu(M) < \infty.
$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i \geq n} \mu(A_i) < \varepsilon$. Zunächst schätzen wir ab

$$
\begin{aligned}
\mu(M \cap \{r < f < r + \frac{1}{n}\}) &\leq \mu(M \cap \{r < f \leq r + \frac{1}{n}\}) \\
&= \mu(M \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} \{r + \frac{1}{i+1} \leq f \leq r + \frac{1}{i}\}) \\
&= \mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \\
&\leq \sum_{i \geq n} \mu(A_i) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
&\mu(M \cap \{f \leq r\}) + \mu(M \cap \{f > r\}) \\
\leq\ &\mu(M \cap \{f \leq r\}) + \mu(M \cap \{r < f < r + \frac{1}{n}\}) + \mu(M \cap \{f \geq r + \frac{1}{n}\}) \\
\leq\ &\mu(M) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

■

**Satz 1.9**
Seien $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$, $f : X \to [0, \infty]$ eine $\mu$-messbare Abbildung und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$. Dann gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\mu$-messbarer Mengen mit
$$f = \sum_{n\geq 1} r_n \mathbb{1}_{A_n}.$$

**Beweis**
Setze $A_1 := \{f \geq r_1\}$ und $A_n := \{f \geq r_n + \sum_{j=1}^{n-1} r_j \mathbb{1}_{A_j}\}$, $n > 1$.

**Behauptung:** Es ist $f \geq \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbb{1}_{A_i}$, $n \in \mathbb{N}$. Dies gilt für $n = 1$, und wenn es für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt: Ist $x \notin A_{n+1}$, dann ist

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) + \underbrace{r_{n+1} \mathbb{1}_{A_{n+1}}(x)}_{=0}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Ist dagegen $x \in A_{n+1}$, so gilt nach der Definition von $A_{n+1}$

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) + r_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) + r_{n+1} \underbrace{\mathbb{1}_{A_{n+1}}(x)}_{=1}.$$

Folglich ist $f \geq \sum_{i=1}^{\infty} r_i \mathbb{1}_{A_i}$.

**Annahme:** Es gelte $f(x) > \sum_{i=1}^{\infty} r_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ für ein $x \in X$.

Also ist $\sum_{i=1}^{\infty} r_i \mathbb{1}_{A_i}(x) < \infty$. Da $\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \infty$ gilt, muss es eine Folge natürlicher Zahlen $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ geben mit $\mathbb{1}_{A_{j_k}}(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{k\to\infty} r_{j_k} = 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$r_{j_k} < f(x) - \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$$

und damit

$$\begin{aligned} f(x) &> \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j}(x) + r_{j_k} \\ &\geq \sum_{j=1}^{j_k - 1} r_j \mathbb{1}_{A_j}(x) + r_{j_k}. \end{aligned}$$

Das bedeutet $x \in A_{j_k}$ im Widerspruch zu $\mathbb{1}_{A_{j_k}}(x) = 0$. ∎

## 1.2 Integration

In diesem Abschnitt wird generell vorausgesetzt, dass $X$ eine Menge und $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ ist.

**Definition**
Eine $\mu$-Treppenfunktion auf $X$ ist eine $\mu$-messbare Abbildung $h \in \mathbb{F}_\mu(X, \mathbb{R})$ mit abzählbarer Wertemenge $\operatorname{im}(h)$ und

$$\sum_{\substack{r\in \operatorname{im}(h)\\ r<0}} r \cdot \mu(\{h = r\}) > -\infty \quad \text{oder} \quad \sum_{\substack{r\in \operatorname{im}(h)\\ r>0}} r \cdot \mu(\{h = r\}) < \infty.$$

Ist $h$ eine $\mu$-Treppenfunktion auf $X$, so wird durch

$$\int h d\mu = \sum_{r \in \operatorname{im}(h)} r \cdot \mu(\{h = r\})$$

das $\mu$-Integral von $h$ erklärt, wobei „$0 \cdot \infty := 0$“ gelte.

**Bemerkung:** (1) Es gilt

$$\int h d\mu = \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu.$$

(2) $h = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{A}_\mu$ ist eine $\mu$-Treppenfunktion, $\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$.

**Lemma 1.10**
Seien $h, g$ $\mu$-Treppenfunktionen auf $X$. Es gelte $\int h^+ d\mu < \infty$ und $\int g^+ d\mu < \infty$ oder $\int h^- d\mu < \infty$ und $\int g^- d\mu < \infty$. Dann ist $h + g$ eine $\mu$-Treppenfunktion und es gilt

$$\int (h+g) d\mu = \int h d\mu + \int g d\mu.$$

**Beweis**
Es gilt zunächst $h+g \in \mathbb{F}_\mu(X, \mathbb{R})$. Zur Additivität: Wir definieren $A(r,s) := \{h = r\} \cap \{g = s\}$ für $r, s \in \mathbb{R}$. Die Voraussetzungen des Lemmas stellen sicher, dass die nachfolgend vorgenommenen Vertauschungen der Summationsreihenfolge zulässig sind. Es gilt damit

$$\begin{aligned}
\int h d\mu + \int g d\mu &= \sum_{r \in \operatorname{im}(h)} r \cdot \mu(\{h = r\}) + \sum_{s \in \operatorname{im}(g)} s \cdot \mu(\{g = s\}) \\
&= \sum_{r \in \operatorname{im}(h)} r \cdot \sum_{s \in \operatorname{im}(g)} \mu(A(r,s)) + \sum_{s \in \operatorname{im}(g)} s \cdot \sum_{r \in \operatorname{im}(h)} \mu(A(r,s)) \\
&= \sum_{\substack{r \in \operatorname{im}(h) \\ s \in \operatorname{im}(g)}} (r+s) \cdot \mu(A(r,s)) \\
&= \sum_{t \in \operatorname{im}(g+h)} t \cdot \sum_{\substack{r \in \operatorname{im}(h) \\ s \in \operatorname{im}(g) \\ r+s=t}} \mu(A(r,s)) \\
&= \sum_{t \in \operatorname{im}(g+h)} t \cdot \mu\Big( \bigcup_{\substack{r \in \operatorname{im}(h) \\ s \in \operatorname{im}(g) \\ r+s=t}} A(r,s)\Big) \\
&= \sum_{t \in \operatorname{im}(g+h)} t \cdot \mu(\{g + h = t\}) \\
&= \int (h+g) d\mu.
\end{aligned}$$

Übung: Zeige, dass $\int (g+h)^+ d\mu < \infty$ oder $\int (g+h)^- d\mu < \infty$ gilt. ■

**Bemerkung:** Sei $h$ eine $\mu$-Treppenfunktion mit $h \geq 0$, dann gilt $\int h d\mu \geq 0$. Mit Lemma 1.10 folgt für $\mu$-Treppenfunktionen $h, g$:

$$h \leq g \implies \int h d\mu \leq \int g d\mu$$

**Definition**
Sei $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$. Eine $\mu$-Oberfunktion (bzw. $\mu$-Unterfunktion) von $f$ ist eine $\mu$-Treppenfunktion $h$ auf $X$ mit $f \leq h$ $\mu$-fast-überall auf $X$ (bzw. $h \leq f$ $\mu$-fast-überall auf $X$).

Durch

$$\int^* f d\mu := \inf \left\{ \int h d\mu : h \text{ ist eine } \mu\text{-Oberfunktion von } f \right\}$$

wird das $\mu$-Oberintegral von $f$ erklärt. Analog wird durch

$$\int_* f d\mu := \sup \left\{ \int h d\mu : h \text{ ist eine } \mu\text{-Unterfunktion von } f \right\}$$

das $\mu$-Unterintegral von $f$ erklärt.

**Lemma 1.11**
Für $f, g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ gelten die folgenden Aussagen:

(1) $\int_* f d\mu = -\int^* (-f) d\mu$.

(2) Gilt $\mu$-fast-überall $f \leq g$, so ist $\int^* f d\mu \leq \int^* g d\mu$ und $\int_* f d\mu \leq \int_* g d\mu$.

(3) Gilt $\mu$-fast-überall $f \geq 0$, so ist $\int^* f d\mu \geq 0$ und $\int_* f d\mu \geq 0$.

(4) Gilt $\int^* f d\mu < \infty$, so auch $\int^* f^+ d\mu < \infty$ und $f < \infty$ $\mu$-fast-überall.

(5) Für $c \in (0, \infty)$ gilt $\int^* (cf) d\mu = c \cdot \int^* f d\mu$ und $\int_* (cf) d\mu = c \cdot \int_* f d\mu$.

(6) Ist $\int^* f d\mu < \infty$ und $\int^* g d\mu < \infty$, so ist $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ und

$$\int^* (f+g) d\mu \leq \int^* f d\mu + \int^* g d\mu.$$

Analog gilt: Ist $\int_* f d\mu > -\infty$ und $\int_* g d\mu > -\infty$, so ist $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ und

$$\int_* (f+g) d\mu \geq \int_* f d\mu + \int_* g d\mu.$$

(7) $\int_* f d\mu \leq \int^* f d\mu$.

**Beweis**
Übung ■

**Bemerkung:** Ist $h$ eine $\mu$-Treppenfunktion, so ist $h$ eine $\mu$-Oberfunktion und eine $\mu$-Unterfunktion von $h$. Das heißt insbesondere

$$\int h d\mu \leq \int_* h d\mu \leq \int^* h d\mu \leq \int h d\mu.$$

**Definition**
Ist $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ eine $\mu$-messbare Abbildung und stimmt das $\mu$-Oberintegral mit dem $\mu$-Unterintegral von $f$ überein, so wird durch

$$\int f d\mu := \int^* f d\mu = \int_* f d\mu$$

das $\mu$-Integral von $f$ erkärt. Man sagt in diesem Fall, dass das $\mu$-Integral von $f$ existiert. Ist $\int f d\mu \in \mathbb{R}$, so heißt $f$ $\mu$-integrierbar.

**Satz 1.12**
Sei $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ nicht-negativ und $\mu$-messbar. Dann existiert das $\mu$-Integral von $f$. Es gilt $\int f d\mu \geq 0$ und

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h d\mu : h \text{ ist } \mu\text{-Unterfunktion, } \operatorname{im}(h) \text{ ist endlich} \right\}.$$

**Beweis**
Ist $\mu(\{f = \infty\}) > 0$, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $n \cdot \mathbb{1}_{\{f=\infty\}}$ eine $\mu$-Unterfunktion von $f$ und

$$\int^* f d\mu \geq \int_* f d\mu \geq \int n \cdot \mathbb{1}_{\{f=\infty\}} d\mu = n \cdot \mu(\{f = \infty\}) \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Also ist $\int^* f d\mu = \int_* f d\mu = \infty$.

Sei jetzt $f < \infty$ $\mu$-fast-überall. Für $t \in (1, \infty)$ sei

$$U_t := \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \cdot \mathbb{1}_{\{t^n \leq f < t^{n+1}\}}.$$

Offenbar ist

$$U_t \leq f \leq t U_t$$

$\mu$-fast-überall, d.h. $U_t$ ist eine $\mu$-Unterfunktion von $f$, $tU_t$ eine $\mu$-Oberfunktion von $f$. Damit gilt

$$\int^* f d\mu \leq \int t U_t d\mu = t \cdot \int U_t d\mu \leq t \int_* f d\mu.$$

Ist $\int_* f d\mu < \infty$, dann folgt $\int^* f d\mu \leq \int_* f d\mu$ aus $t \to 1$. Ist dagegen $\int_* f d\mu = \infty$, so ist $\int^* f d\mu = \int_* f d\mu = \infty$. ∎

**Satz 1.13**
Seien $f, g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ $\mu$-messbar. Dann gilt:

(1) Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es existiert $\int f d\mu$ genau dann, wenn $\int (cf) d\mu$ existiert. In diesem Fall ist
$$\int (cf) d\mu = c \cdot \int f d\mu.$$

(2) Angenommen, es existieren $\int f d\mu$ und $\int g f \mu$ und $(\int f d\mu, \int g d\mu) \neq (\pm\infty, \mp\infty)$. Dann ist $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$, $\int (f+g) d\mu$ existiert und

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

(3) Ist $f \leq g$ $\mu$-messbar und existiert $\int g d\mu$ (bzw. $\int f d\mu$), so existiert auch $\int f d\mu$ (bzw. $\int g d\mu$), und es gilt in jedem Fall

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

**Beweis**

(1) Es existiere $\int f d\mu$. Sei $c > 0$. Dann folgt

$$\int^* (cf) d\mu = c \cdot \int^* f d\mu = c \cdot \int_* f d\mu = \int_* (cf) d\mu.$$

Sei $c < 0$. Dann folgt

$$\int^* (cf) d\mu = \int^* (-c)(-f) d\mu = (-c) \cdot \int^* (-f) d\mu = (-c) \cdot (-1) \int_* f d\mu$$
$$= c \cdot \int f d\mu = c \int^* f d\mu = (-c) \int_* (-f) d\mu = \int_* (-c)(-f) d\mu = \int_* (cf) d\mu.$$

(2) Seien $f, g$ $\mu$-integrierbar. Dann ist $f, g < \infty$ $\mu$-fast-überall, und somit ist $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$. Ferner gilt

$$\int f d\mu + \int g d\mu = \int^* f d\mu + \int^* g d\mu \geq \int^* (f+g) d\mu$$
$$\geq \int_* (f+g) d\mu \geq \int_* f d\mu + \int_* g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu,$$

woraus die Aussage folgt.

Sei nun $\int f d\mu = \infty$. Nach Voraussetzung gilt dann $\int g d\mu > -\infty$ und damit $g > -\infty$ $\mu$-fast-überall. Das heißt $f + g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$. Ferner gilt

$$\infty \geq \int^* (f+g) d\mu \geq \int_* (f+g) d\mu \geq \int_* f d\mu + \int_* g d\mu = \infty.$$

Analog kann der Fall $\int f d\mu = -\infty$ gezeigt werden.

(3) Sei $\int g d\mu < \infty$, das heißt $f \leq g < \infty$ $\mu$-fast-überall. Dann ist $(f - g)\mathbb{1}_{\{g > -\infty\}} \in F_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ nicht positiv. Wegen $f \leq g < \infty$ $\mu$-fast-überall ist $g + (f - g)\mathbb{1}_{\{g > -\infty\}} = f$ und damit ergibt (2)

$$\int g d\mu \geq \int g d\mu + \int (f-g)\mathbb{1}_{\{g > -\infty\}} d\mu = \int f d\mu. \qquad \blacksquare$$

**Satz 1.14**
Sei $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ $\mu$-messbar. Dann gilt:

(1) $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ existieren stets. Es existiert $\int f d\mu$ genau dann, wenn $\int f^+ d\mu < \infty$ oder $\int f^- d\mu < \infty$. In diesem Fall ist

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Ferner ist

$$\Big| \int f d\mu \Big| \leq \int |f| d\mu.$$

(2) Ist $f$ $\mu$-integrierbar, so auch $|f|$.

**Beweis**

(1) Es existiere $\int f d\mu$. Ist $\int f d\mu < \infty$, so ist $\int f^+ d\mu < \infty$ nach Lemma 1.11 (4). Ist dagegen $\int f d\mu = \infty$, so ist $\int (-f) d\mu = -\infty$ und daher $\int f^- d\mu = \int (-f)^+ d\mu < \infty$.

Umgekehrt sei $\int f^+ d\mu < \infty$ oder $\int f^- d\mu < \infty$. Dann existiert nach Satz 1.13 (2) das Integral $\int (f^+ - f^-) d\mu$ wegen Satz 1.13 (1) ist $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

Stets existiert das Integral von $|f|$ und

$$\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \geq \Big| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \Big| = \Big| \int f d\mu \Big|.$$

(2) Ist $f$ $\mu$-integrierbar, so folgt aus (1), dass $\int f^+ d\mu < \infty$ *und* $\int f^- d\mu < \infty$. ∎

**Satz 1.15 (Lemma von Fatou)**
Sei $f_n \in \mathbb{F}_n(X, \bar{\mathbb{R}})$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \geq 0$ und $\mu$-messbar. Dann gilt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

**Beweis**
Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Sei $h$ eine $\mu$-Unterfunktion von $\liminf_{n\to\infty} f_n$ mit $\operatorname{im}(h) = \{r_1, \dots, r_m\} \subset [0, \infty)$ (vergleiche Satz 1.12). Für $i = 1, \dots, m$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_{i,n} := \{h = r_i\} \cap \{\inf_{k\geq n} f_k \geq \varepsilon \cdot r_i\} \in \mathcal{A}_\mu.$$

Es gilt $A_{i,n} \subset A_{i,n+1}$ für $i = 1, \dots, m$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $\mu$-fast-alle $x \in X$ mit $h(x) = r_i$ gilt:

$$\varepsilon r_i < r_i \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon r_i < \inf_{k\geq n} f_k(x)$, das heißt $x \in A_{i,n}$. Also

$$\mu(\{h = r_i\}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{i,n}).$$

Die Mengen $A_{i,n}$, $i = 1, \dots, m$, sind paarweise disjunkt und aus ihrer Definition folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon r_i \mathbb{1}_{A_{i,n}}$$

eine $\mu$-Unterfunktion von $f_n$ ist.

Hiermit gilt

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu &\geq \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon r_i \mu(A_{i,n}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \varepsilon r_i \liminf_{n\to\infty} \mu(A_{i,n}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \varepsilon r_i \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{i,n}) \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^{m} r_i \mu(\{h = r_i\}) \\
&= \varepsilon \int h d\mu.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

für ein beliebiges $\varepsilon \in (0, 1)$. Lässt man $\varepsilon$ gegen 1 gehen, so folgt die Behauptung. ■

**Satz 1.16 (von der monotonen Konvergenz)**
Ist $f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ $\mu$-messbar, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

**Beweis**
Grenzwerte und Integrale existieren offenbar. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu &\leq \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. && \text{(nach Satz 1.15)}
\end{aligned}$$

■

**Satz 1.17 (Lebesgue)**
Sei $f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$, $n \in \mathbb{N}$ eine konvergente Folge $\mu$-messbarer Funktionen. Es existiere eine $\mu$-integrierbare Funktion $g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ mit $|f_n| \leq g$ $\mu$-fast-überall für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $f_n$ und $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ $\mu$-integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Schärfer gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0.$$

**Beweis**
Wegen $|f_n|, |f| \leq g$ ist $\int |f_n| d\mu < \infty$ und $\int |f| d\mu < \infty$. Die Folge $(2g - |f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer Funktionen in $\mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ konvergiert für $n \to \infty$ $\mu$-fast-überall gegen $2g$. Mit dem Lemma von Fatou (Satz 1.15) folgt:

$$\begin{aligned}\int 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu &= \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &\geq \int \underbrace{\liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|)}_{=2g} d\mu = \int 2g d\mu\end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$ ■

**Notation:** Für $A \subset X$ und $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ sei

$$\int_A^* f d\mu := \int^* \mathbb{1}_A f d\mu \qquad \text{und} \qquad \int_{*A} f d\mu := \int_* \mathbb{1}_A f d\mu.$$

Existiert das $\mu$-Integral von $\mathbb{1}_A \cdot f$, so setzt man

$$\int_A f d\mu := \int \mathbb{1}_A f d\mu.$$

**Lemma 1.18**
(Übungsblatt 2, Aufgabe 4) Sei $f_n \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge nichtnegativer Funktionen. Dann gilt

$$\int^* \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu \leq \sum_{n=1}^\infty \int^* f_n d\mu.$$

**Satz 1.19**
Sei $g \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ eine nichtnegative Funktion. Dann wird durch

$$\psi(A) := \int_A^* g d\mu, \;\; A \subset X,$$

ein äußeres Maß auf $X$ definiert. Es gilt $\mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}_\psi$. Ist $g$ sogar $\mu$-messbar und $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ $\mu$-messbar, dann existiert $\int f d\psi$ genau dann, wenn $\int fg d\mu$ existiert. In diesem Fall gilt

$$\int f d\psi = \int fg d\mu.$$

**Beweis**
Es gilt $\psi(\emptyset) = 0$. Die Subsigmaadditivität folgt direkt aus Lemma 1.18.

Sei $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $M \subset X$ mit $\psi(M) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert eine $\mu$-Oberfunktion $h$ zu $\mathbb{1}_M \cdot g$ mit $h \geq 0$ und

$$\int h d\mu \leq \int^* \mathbb{1}_M g d\mu + \varepsilon.$$

Dann ist $\mathbb{1}_A \cdot h$ eine $\mu$-Oberfunktion zu $\mathbb{1}_{M \cap A} \cdot g$ und $\mathbb{1}_{A^c} \cdot h$ ist eine $\mu$-Oberfunktion zu $\mathbb{1}_{M \cap A^c} \cdot g$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
\psi(M \cap A) + \psi(M \cap A^c) &= \int^* \mathbb{1}_{M \cap A} g d\mu + \int^* \mathbb{1}_{M \cap A^c} g d\mu \\
&\leq \int \mathbb{1}_A \cdot h d\mu + \int \mathbb{1}_{A^c} \cdot h d\mu \\
&= \int h d\mu \leq \int^* \mathbb{1}_M g d\mu + \varepsilon = \psi(M) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sei nun $g$ $\mu$-messbar und $f \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ und sei zunächst $f \geq 0$. Also existieren $\int f d\psi$ und $\int gf d\mu$. Es gibt eine Folge $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $A_\mu$ mit $f = \sum_{j=1}^\infty r_j \mathbb{1}_{A_j}$. Zweimalige

Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (Satz 1.16) ergibt

$$\begin{aligned}\int f d\psi &= \int \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j} d\psi \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} r_j \int \mathbb{1}_{A_j} d\psi \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} r_j \psi(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} r_j \int \mathbb{1}_{A_j} g d\mu \\ &= \int \left( \sum_{j=1}^{\infty} r_j \mathbb{1}_{A_j} \right) g d\mu \\ &= \int f g d\mu.\end{aligned}$$

Sei nun $f$ eine beliebige $\mu$-messbare Funktion. Wegen $(fg)^{\pm} = f^{\pm} \cdot g$ gilt $\int f^{\pm} d\psi < \infty$ genau dann, wenn $\int (fg)^{\pm} d\mu < \infty$. Somit existiert $\int f d\psi$ genau dann, wenn $\int fg d\mu$ existiert und

$$\int f d\psi = \int f^{+} d\psi - \int f^{-} d\psi = \int f^{+} g d\mu - \int f^{-} g d\mu = \int (f^{+} - f^{-}) g d\mu = \int f g d\mu. \quad \blacksquare$$

**Satz 1.20**
Sei $f \in \mathbb{F}_{\mu}(X, \bar{\mathbb{R}})$ $\mu$-integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $A \in \mathcal{A}_{\mu}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

**Beweis**
Betrachte $g_n := \min\{|f|, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $0 \leq g_n \nearrow |f|$ für $n \to \infty$. Damit ist

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n d\mu = \int |f| d\mu < \infty.$$

Zu einem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq \int |f| d\mu - \int g_N d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $A \in \mathcal{A}_\mu$ mit $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2N} =: \delta$ folgt nun

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\mu &= \int_A \underbrace{(|f| - g_N)}_{\geq 0} d\mu + \int_A g_N d\mu \\ &\leq \int \underbrace{(|f| - g_N)}_{\geq 0} d\mu + N \cdot \mu(A) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Seien $X, Y \neq \emptyset$ Mengen mit äußeren Maßen $\mu$ auf $X$, $\nu$ auf $Y$. Durch

$$(\mu \times \nu)(M) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : A_i \in \mathcal{A}_\mu, B_i \in \mathcal{A}_\nu,\ i \in \mathbb{N},\ M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i)\}$$

wird ein äußeres Maß auf $X \times Y$ erklärt, nämlich das von $\mathcal{E}_0 := \{A \times B : A \in \mathcal{A}_\mu,\ B \in \mathcal{A}_\nu\}$ und $\lambda$ mit $\lambda(A \times B) := \mu(A) \cdot \nu(B)$ für $A \in \mathcal{A}_\mu$, $B \in \mathcal{A}_\nu$ induzierte äußere Maß.

**Satz 1.21 (Fubini)**
Seien $X, Y \neq \emptyset$ Mengen mit äußeren Maßen $\mu$ auf $X$ und $\nu$ auf $Y$. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu \subset \mathcal{A}_{\mu\times\nu}$ und $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ für $A \in \mathcal{A}_\mu$, $B \in \mathcal{A}_\nu$.

(2) Das Maß $\mu \times \nu$ ist $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu$-regulär.

(3) Existiert das $(\mu \times \nu)$-Integral von $f \in \mathbb{F}_{\mu\times\nu}(X \times Y, \bar{\mathbb{R}})$ und gilt $\{f \neq 0\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \in \mathcal{A}_{\mu\times\nu}$, $(\mu \times \nu)(M_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, so gilt:

$f(\cdot, y) \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ ist $\mu$-messbar für $\nu$-fast-alle $y \in Y$. Es ist $\int f(x,y)\mu(dx)$ $\nu$-messbar und $\iint f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$ existiert (und symmetrisch in $x$ und $y$) und schließlich:

$$\int f d(\mu \times \nu) = \iint f(x,y)\mu(dx)\nu(dy) = \iint f(x,y)\nu(dy)\mu(dx).$$

**Beweis**
Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{E} := \{M \subset X \times Y : \mathbb{1}_M(\cdot, y) \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}}) \text{ ist } \mu\text{-messbar für } \nu\text{-fast-alle } y \in Y, \\ \int \mathbb{1}_M(x,y)\mu(dx) \in \mathbb{F}_\nu(Y, \bar{\mathbb{R}}) \text{ ist } \nu\text{-messbar}\}. \end{aligned}$$

Für $M \in \mathcal{E}$ sei

$$\varrho(M) := \iint \mathbb{1}_M(x,y)\mu(dx)\nu(dy).$$

Wir zeigen zwei Hilfsbehauptungen:

($\alpha$) Ist $M_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$, eine Folge paarweise disjunkter Mengen, so ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathcal{E}$, denn:

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j}(\cdot, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{M_j}(\cdot, y)$$

ist $\mu$-messbar für $\nu$-fast-alle $y \in Y$ und

$$\int \mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j}(x, y)\mu(dx) = \sum_{j=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{M_j}(x, y)\mu(dx)$$

ist $\nu$-messbar.

($\beta$) Ist $M_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$, $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ sowie $\varrho(M_1) < \infty$, so gilt $\bigcap_{j\geq 1} M_j \in \mathcal{E}$, denn:

$$\mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j}(\cdot, y) = \lim_{j\to\infty} \mathbb{1}_{M_j}(\cdot, y)$$

ist $\mu$-messbar für $\nu$-fast-alle $y \in Y$ und

$$\int \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j}(x, y)\mu(dx) = \lim_{j\to\infty} \int \mathbb{1}_{M_j}(x, y)\mu(dx)$$

ist $\nu$-messbar.

Betrachte nun folgende Mengensysteme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 &\coloneqq \{A \times B : A \in \mathcal{A}_\mu,\, B \in \mathcal{A}_\nu\},\\
\mathcal{E}_1 &\coloneqq \{\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i : G_i \in \mathcal{E}_0\},\\
\mathcal{E}_2 &\coloneqq \{\bigcap_{j\geq 1}^{\infty} H_j : H_j \in \mathcal{E}_1\}.
\end{aligned}$$

Für $A \times B \in \mathcal{E}_0$ ist $\mathbb{1}_{A\times B}(\cdot, y) = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B(y)$ $\mu$-messbar für alle $y \in Y$ und $\int \mathbb{1}_{A\times B}(x, y)\mu(dx) = \mu(A) \cdot \mathbb{1}_B(y)$ ist $\nu$-messbar. Also ist $A \times B \in \mathcal{E}$, und damit $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$.

Für $A \times B \in \mathcal{E}_0$, $C \times D \in \mathcal{E}_0$ ist

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{E}_0$$

und

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \big(\underbrace{(A \setminus C) \times B}_{\in\mathcal{E}_0}\big) \,\dot{\cup}\, \big(\underbrace{(A \cap C) \times (B \setminus D)}_{\in\mathcal{E}_0}\big).$$

Jede abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}_0$ kann als abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{E}_0$ erhalten werden, das heißt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ nach ($\alpha$).

Da $\mathcal{E}_1$ stabil bezüglich der Bildung endlicher Durchschnitte ist, folgt mit Hilfe von ($\beta$)

$$\{\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i : H_i \in \mathcal{E}_1,\, i \in \mathbb{N},\, \varrho(H_1) < \infty\} \subset \mathcal{E}.$$

**Behauptung:** Für $M \subset X \times Y$ gilt

$$(\mu \times \nu)(M) = \inf\{\varrho(V) : M \subset V, V \in \mathcal{E}_1\}$$

und es gibt zu $M$ ein $W \in \mathcal{E}_2$ mit $M \subset W$ und $(\mu \times \nu)(M) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W)$.

**Nachweis:** Für $i \in \mathbb{N}$ sei $A_i \times B_i \in \mathcal{E}_0$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i) =: V \in \mathcal{E}_1$. Dann gilt

$$\mathbb{1}_V \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i \times B_i},$$

wobei Gleichheit gilt, falls die Mengen $A_i \times B_i$ paarweise disjunkt sind. Somit erhält man

$$\varrho(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varrho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i),$$

wobei auch hier Gleichheit gilt, falls die Mengen $A_i \times B_i$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind.

Der erste Teil der Behauptung folgt somit aus

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(M) &= \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : A_i \times B_i \in \mathcal{E}_0, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i)\} \\ &= \inf\{\varrho(V) : M \subset V, V \in \mathcal{E}_1\}.\end{aligned}$$

Ist $(\mu \times \nu)(M) < \infty$, so existieren $V_i \in \mathcal{E}_1$, $i \in \mathbb{N}$, $M \subset V_i$ mit

$$\lim_{i \to \infty} \varrho(V_i) = (\mu \times \nu)(M).$$

Setze $M \subset W := \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \in \mathcal{E}_2$. Es gilt

$$(\mu \times \nu)(M) \leq (\mu \times \nu)(W) \leq \lim_{i \to \infty} \varrho(V_i) = \varrho(W) = (\mu \times \nu)(M).$$

Ist $(\mu \times \nu)(M) = \infty$, so setze $W := X \times Y \in \mathcal{E}_2$.

Nun beweisen wir die eigentlichen Aussagen des Satzes:

(1) Sei $A \times B \in \mathcal{E}_0$. Zunächst gilt offenbar

Für ein beliebiges $V \in \mathcal{E}_1$ mit $A \times B \subset V$ gilt

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \inf\{\varrho(V) : A \times B \subset V, V \in \mathcal{E}_1\} = \varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Für $T \subset X \times Y$ und $U \in \mathcal{E}_1$ mit $T \subset U$ sind $U \cap (A \times B)$ und $U \cap (A \times B)^c$ disjunkte Mengen in $\mathcal{E}_1$. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}&(\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)^c) \\ &\qquad\leq \varrho(U \cap (A \times B)) + \varrho(U \cap (A \times B)^c) = \varrho(U).\end{aligned}$$

Bildet man das Infimum über alle $U \in \mathcal{E}_1$ mit $U \supset T$, so ergibt diese Ungleichung

$$(\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)^c) \leq (\mu \times \nu)(T),$$

woraus $A \times B \in \mathcal{A}_{\mu \times \nu}$ folgt.

(2) Ist $M \subset X \times Y$ und $(\mu \times \nu)(M) < \infty$, so gibt es $W \in \mathcal{E}_2$ mit $\varrho(W) < \infty$ und mit der gewünschten Eigenschaft $(\mu \times \nu)(M) = (\mu \times \nu)(W)$.

(3) Sei $f = \mathbb{1}_M$, $M \in \mathcal{A}_{\mu\times\nu}$ und $(\mu \times \nu)(M) < \infty$. Zu $M$ existiert ein $W \in \mathcal{E}_2$ mit $M \subset W$ und $(\mu \times \nu)(M) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W)$.

Fall 1: $(\mu \times \nu)(M) = 0$. Dann gilt $\varrho(W) = 0$ und $\mathbb{1}_M(\cdot, y) = 0$ $\mu$-fast-überall für $\nu$-fast-alle $y \in Y$. Insbesondere ist $M \in \mathcal{E}$ und $\varrho(M) = 0$.

Fall 2: $(\mu \times \nu)(M) > 0$. Dann gilt $(\mu \times \nu)(W \setminus M) = 0$, $M \subset W$. Fall 1 liefert $W \setminus M \in \mathcal{E}$ und $\varrho(W \setminus M) = 0$. Also ist $\mathbb{1}_M(\cdot, y) = (\mathbb{1}_W - \mathbb{1}_{W\setminus M})(\cdot, y)$ $\mu$-messbar für $\nu$-fast-alle $y \in Y$ und $\mathbb{1}_M(\cdot, y) = \mathbb{1}_W(\cdot, y)$ $\mu$-fast-überall für $\nu$-fast-alle $y \in Y$. Insbesondere ist $M \in \mathcal{E}$ und $\varrho(M) = \varrho(W) = (\mu \times \nu)(M)$. ■

# 2 Äußere Maße auf metrischen Räumen

## 2.1 Regularität und metrische äußere Maße

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum mit der von $d$ induzierten Topologie $\mathcal{T}$. Sei $\mathfrak{B}(X)$ die Borel-$\sigma$-Algebra. Ist $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ und sind alle offenen (alle abgeschlossenen) Mengen in $\mathcal{A}_\mu$, so gilt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$. Wir nennen $\mu$ Borel-regulär, wenn $\mu$ $\mathfrak{B}(X)$-regulär ist, das heißt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ und zu jedem $M \subset X$ existiert ein $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \subset B$ und $\mu(M) = \mu(B)$.

**Lemma 2.1**
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gelte $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$ und $\bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$. Enthält $\mathcal{A}$ ferner alle offenen Mengen oder alle abgeschlossenen Mengen, so gilt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

**Beweis**
Übungsblatt 2, Aufgabe 2 (a). ∎

**Satz 2.2**
Sei $\mu$ ein äußeres Maß auf dem metrischen Raum $(X, d)$ mit $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ und $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dann gilt:

(1) Ist $\mu$ Borel-regulär und $\mu(A) < \infty$, so existieren $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(X)$ mit $B_2 \subset A \subset B_1$ und $\mu(B_1 \setminus B_2) = 0$.

(2) Gilt $\mu(A) < \infty$ und ist $A \in \mathfrak{B}(X)$ oder $\mu$ Borel-regulär, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C \subset A$ mit $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$. In diesem Fall gilt
$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A,\ C \text{ abgeschlossen}\}.$$

(3) Gibt es eine abzählbare, offene Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $A$ mit $\mu(U_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und ist $A \in \mathfrak{B}(X)$ oder $\mu$ Borel-regulär, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supset A$ mit $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$. In diesem Fall gilt
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A,\ U \text{ offen}\}.$$

**Beweis**
Teil (1) und (2): Übungsblatt 2, Aufgabe 2. Zu (3):

Seien $A$ und $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie vorausgesetzt. Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ existiert nach (2) eine abgeschlossene Menge $C_i \subset U_i \setminus A$ mit $\mu((U_i \setminus A) \setminus C_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Setze $U := \bigcup_{i=1}^\infty (U_i \setminus C_i)$. Dann ist $U$ offen und $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap U_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \setminus C_i) = U$. Ferner ist

$$\mu(U \setminus A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \setminus C_i) \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((U_i \setminus C_i) \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((U_i \setminus A) \setminus C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Definition**
Seien $X$ eine Menge, $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ und $f \in \mathbb{F}_\mu(X, Y)$. Man nennt $f$ $\mu$-messbar, falls $f$ $\mu$-messbar bezüglich $\mathfrak{B}(Y)$ ist, das heißt $f^{-1}(\mathfrak{B}(Y)) \subset \mathcal{A}_\mu$.

Für einen metrischen Raum $(X, d)$, für Mengen $A, B \subset X$ und $x \in X$ sei

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \qquad d(A, B) := \inf\{d(x, y), x \in A,\ y \in B\}.$$

**Satz 2.3**
Seien $X$ eine Menge, $(Y, d)$ ein metrischer Raum, $\mu$ ein äußeres Maß auf $X$ sowie $f \in \mathbb{F}_\mu(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

(1) $f$ ist $\mu$-messbar.

(2) Für jede Menge $M \subset X$ und alle Mengen $A, B \subset Y$ mit $d(A, B) > 0$ gilt

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap f^{-1}(A)) + \mu(M \cap f^{-1}(B)).$$

**Beweis**
(1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $f$ $\mu$-messbar. Seien $M \subset X$, $A, B \subset Y$ mit $d(A, B) > 0$. Es gibt $U_A \supset A$, $U_A$ offen mit $U_A \cap B = \emptyset$. Somit gilt $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(U_A^c) = f^{-1}(U_A)^c$ und $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(U_A)$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(U_A) \in \mathcal{A}_\mu$. Es folgt

$$\mu(A) \geq \mu(M \cap f^{-1}(U_A)) + \mu(M \cap f^{-1}(U_A)^c) \geq \mu(M \cap f^{-1}(A)) + \mu(M \cap f^{-1}(B)).$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Zeige $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}_\mu$ für eine beliebige abgeschlossene Menge $C \subset Y$. Für $y \in Y$ sei $g(y) := d(y, C)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $C \neq \emptyset$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$d(\underbrace{\{g \leq a\}}_{=:A}, \underbrace{\{g \geq b\}}_{=:B}) \geq b - a > 0.$$

Für $M \subset X$ erhält man nun

$$\mu(M) \geq \mu(M \cap f^{-1}(A)) + \mu(M \cap f^{-1}(B)) = \mu(M \cap \{g \circ f \leq a\}) + \mu(M \cap \{g \circ f \geq b\}).$$

Da $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ die Bedingung von Satz 1.8 erfüllt, folgt die Messbarkeit von $g \circ f$, das heißt insbesondere ist $\{g \circ f = 0\} \in \mathcal{A}_\mu$. Ferner ist

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : d(f(x), C) = 0\} = \{g \circ f = 0\} \in \mathcal{A}_\mu,$$

wobei die Abgeschlossenheit von $C$ verwendet wurde. $\blacksquare$

**Satz 2.4 (Kriterium von Carathéodory)**
Für ein äußeres Maß $\mu$ auf $(X, d)$ sind äquivalent:

(1) $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$.

(2) Für $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$ gilt $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$.

**Beweis**
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ist $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$, so ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ $\mu$-messbar. Für Mengen $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$ folgt nun aus Satz 2.3, (1) $\Longrightarrow$ (2), dass

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(\underbrace{(A \cup B) \cap \mathrm{id}_X^{-1}(A)}_{=A}) + \mu(\underbrace{(A \cup B) \cap \mathrm{id}_X^{-1}(B)}_{=B}) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Seien $M \subset X$, $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$. Dann ist auch $d(M \cap A, M \cap B) > 0$ und daher

$$\begin{aligned} \mu(M) &\geq \mu(M \cap (A \cup B)) \\ &= \mu((M \cap A) \cup (M \cap B)) \\ &\geq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap B) \\ &= \mu(M \cap \mathrm{id}_X^{-1}(A)) + \mu(M \cap \mathrm{id}_X^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Nach Satz 2.3, (2) $\Longrightarrow$ (1), ergibt dies die $\mu$-Messbarkeit von $\mathrm{id}_X$, das heißt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$. ■

## 2.2 Vitali-Relationen

In dem metrischen Raum $(X, d)$ sei

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(X) := \{\mu : \mu \text{ ist ein Borel-reguläres Maß auf } X \text{ und} \\ \mu(A) < \infty \text{ für alle beschänkten Mengen } A \subset X\}. \end{aligned}$$

**Motivation:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Für $x \in [a, b)$ sei

$$\bar{L}_f(x) := \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Mit $\lambda$ wird das äußere Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet, das heißt

$$\lambda(M) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : a_i < b_i, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]\}.$$

**Behauptung:** Für $\lambda$-fast-alle $x \in [a, b]$ ist $\bar{L}_f(x) < \infty$.

Zum Nachweis sei

$$¥ := \{[x, x + h] : x \in [a, b],\ 0 < h < b - x\}.$$

Für $t > 1$ sei
$$\yen_t := \{[x, x+h] \in \yen : f(x+h) - f(x) \geq t \cdot h\}.$$
Wir wollen zeigen, dass die Menge
$$A := \{x \in [a,b) : \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \infty\}$$
Lebesguemaß Null hat.

Für $x \in A$, $t > 1$ gilt:
$$\inf\{h > 0 : [x, x+h] \in \yen_t\} = 0.$$
Falls es gelingt, eine disjunkte Folge $([x_i, x_i + h_i])_{i \in \mathbb{N}}$ in $\yen_t$ zu finden mit
$$\lambda(A \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} [x_i, x_i + h_i]}_{=:S}) = 0,$$
dann folgt
$$\begin{aligned} \lambda(A) = \lambda(A \cap S) + \lambda(A \cap S^c) = \lambda(A \cap S) \\ \leq \lambda(S) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(x_i + h_i) - f(x_i)}{t} \leq \frac{f(b) - f(a)}{t}. \end{aligned}$$
Da $t > 1$ beliebig ist, folgt $\lambda(A) = 0$.

Wichtig war hierbei:

(1) Die betrachteten Intervalle sind beliebig kurz.

(2) Bis auf eine Nullmenge lässt sich eine abzählbare disjunkte Teilüberdeckung finden.

(3) Oft genügt es auch, den Grad der Mehrfachüberlappung beschränken zu können.

**Definition**
Sei $\mu$ ein äußeres Maß auf $(X, d)$, $M \subset X$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Man nennt $\mathcal{A}$ eine (offene, abgeschlossene, Borelsche) $\mu$-Überdeckung von $M$ wenn $\mu(M \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = 0$ und $\mathcal{A}$ aus (offenen, abgeschlossenen, Borelschen) Mengen besteht.

**Definition**
Sei $\mu \in \mathbb{M}(X)$. Eine $\mu$-Vitali-Relation $V$ auf $X$ ist eine Teilmenge des Mengensystems $\{(x, S) : x \in S, S \in \mathfrak{B}(X)\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (x, S) \in V\} = 0$ für alle $x \in X$.

(2) Für $Z \subset X$, $C \subset V$ mit $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (z, S) \in C\} = 0$ für alle $z \in Z$ enthält die Familie $C(Z) := \{S : (z, S) \in C$ für ein $z \in Z\}$ eine abzählbare disjunkte $\mu$-Überdeckung von $Z$.

Im Folgenden werden Methoden und Kriterien zum Nachweis von Eigenschaft (2) vorgestellt und Vitali-Relationen bei der Differentation von Maßen verwendet.

**Beispiel**
Seien $X = \mathbb{R}$, $V := \{(x, [x, x + h]) : [x, x + h] \in ¥\}$. Dann ist (1) erfüllt. Später wird (2) für $\mu = \lambda$ gezeigt, so dass $V$ eine $\lambda$-Vitali-Relation ist. Wähle $Z = A$ wie oben, $C := \{(x, [x, x+h]) : [x, x+h] \in ¥_t\}$. Dann ist die Voraussetzung für $Z$ aus (2) erfüllt und es existiert eine abzählbare disjunkte $\lambda$-Überdeckung von $Z$, das heißt es existiert $([x_i, x_i + h_i])_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt mit $[x_i, x_i + h_i] \in ¥_t$ und $\lambda(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}[x_i, x_i + h_i]) = 0$.

Rahmensituationen, in denen (2) verifiziert werden kann:

(1) Der metrische Raum $(X, d)$ ist allgemein, $\mu$ erfüllt eine diametrische Regularitätsbedingung.

(2) Der Raum $(X, d)$ ist spezieller, geeignet ist etwa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $\mu$ ist ein beliebiges Radonmaß.

**Satz 2.5**
Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\sup\{\operatorname{diam}(\mathcal{S}) : S \in \mathcal{S}\} < \infty$, $1 < t < \infty$ und $\emptyset \notin \mathcal{S}$. Für $T \in \mathcal{S}$ sei $\mathcal{S}_T^t := \{S \in \mathcal{S} : S \cap T \neq \emptyset, \operatorname{diam}(S) \leq t \cdot \operatorname{diam}(T)\}$. Dann existiert eine disjunkte Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ mit $\mathcal{S} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}} \mathcal{S}_T^t$.

**Beweis**
Definiere

$$\Omega := \{\mathcal{R} \subset \mathcal{S} : \mathcal{R} \text{ ist eine disjunkte Familie von Mengen, für alle } S \in \mathcal{S} \text{ gilt:}$$
$$S \cap \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R = \emptyset \text{ oder } S \in \mathcal{S}_R^t \text{ für ein } R \in \mathcal{R}\}.$$

Dann ist $(\Omega, \subset)$ eine geordnete Menge. Nach Voraussetzung gibt es ein $T \in \mathcal{S}$ mit $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in \mathcal{S}\} < t \cdot \operatorname{diam}(T)$. Daher ist $\{T\} \in \Omega$.

**Behauptung:** Jede linear geordnete Teilmenge $\Lambda \subset \Omega$ hat eine obere Schranke.

**Nachweis:** Die obere Schranke ist $\bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \mathcal{R}$. Dies ist eine disjunkte Familie: Wenn $R, R' \in \bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \mathcal{R}$, so ist $R \in \mathcal{R}$, $R' \in \mathcal{R}'$ mit $\mathcal{R}, \mathcal{R}' \in \Lambda$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathcal{R}' \supset \mathcal{R}$, also $R, R' \in \mathcal{R}'$. Da aber $\mathcal{R}'$ eine disjunkte Familie ist, ist $R \cap R' = \emptyset$ oder $R = R'$. Sei $S \in \mathcal{S}$. Ist nun $S \cap (\bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R) \neq \emptyset$, so ist für ein $\mathcal{R}' \in \Lambda$ schon $S \cap \bigcup_{R\in\mathcal{R}'} R \neq \emptyset$. Wegen $\mathcal{R}' \in \Omega$ ist dann $S \in \mathcal{S}_{R'}^t$ für ein $R' \in \mathcal{R}'$ und damit auch $S \in \mathcal{S}_R^t$ für ein $R \in \bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \bigcup_{R\in\mathcal{R}} \mathcal{S}_R^t$. Folglich ist $\bigcup_{\mathcal{R}\in\Lambda} \mathcal{R} \in \Omega$.

Aufgrund des Zornschen Lemmas existiert ein maximales Element $\mathcal{T} \in \Omega$. Sei

$$\mathcal{K} := \{S \in \mathcal{S} : S \cap \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T = \emptyset\}.$$

Angenommen, $K \neq \emptyset$. Dann existiert ein $K \in \mathcal{K}$ mit $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in \mathcal{K}\} < t \cdot \operatorname{diam}(K)$. Es ist $\mathcal{T} \cup \{\mathcal{K}\}$ eine disjunkte Familie. Ist schließlich $S \in \mathcal{S}$ und $S \cap \bigcup\{T : T \in \mathcal{T} \cup \{\mathcal{K}\}\} \neq \emptyset$. Dann gilt $S \cap \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T \neq \emptyset$, und somit $S \in \mathcal{S}_T^t$ für ein $T \in \mathcal{T}$, oder $S \cap K \neq \emptyset$ und $S \in \mathcal{K}$, $\operatorname{diam}(S) < t \cdot \operatorname{diam}(K)$, so dass $S \in \mathcal{S}_K^t$. In jedem Fall ist $\mathcal{T} \cup \{\mathcal{K}\} \in \Omega$ im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{T}$.

Folglich ist $\mathcal{K} = \emptyset$. Für jedes $S \in \mathcal{S}$ existiert also ein $T \in \mathcal{T}$ mit $S \cap T \neq \emptyset$. Da $\mathcal{T} \in \Omega$, folgt $S \in \mathcal{S}_T^t$ für ein $T \in \mathcal{T}$, also ist $\mathcal{S} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}} \mathcal{S}_T^t$. ∎

Dieser Satz ist ein entscheidentes Hilfsmittel im Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 2.6**
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ sowie $t > 1$ und $r > 0$. Sei $\mathcal{S}$ eine abgeschlossene Überdeckung von $A$ mit

(1) $\sup\{\mathrm{diam}(S) : S \in \mathcal{S}\} < \infty$,

(2) $\inf\{\mathrm{diam}(S) : S \in \mathcal{S}, x \in S\} = 0$ für alle $x \in A$,

(3) $\mu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}_B^t} S) < r \cdot \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{S}$.

Dann gibt es zu jeder offenen Menge $U \subset X$ eine abzählbare, disjunkte $\mu$-Überdeckung $\mathcal{C}$ von $A \cap U$ mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ und $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset U$.

**Beweis**
Sei zunächst $A$ beschränkt. Sei $U \subset X$ offen. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \cap U \neq \emptyset$ und $U$ beschränkt. Wir betrachten $\mathcal{U} := \{S \in \mathcal{S} : \emptyset \neq S \subset U\}$. Nach Satz 2.5 existiert eine disjunkte Familie $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{U} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{U}_C^t \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_C^t$. Wegen $\mu \in \mathbb{M}(X)$ ist $\mu(U) < \infty$ und wegen (3) ist $\mu(B) > 0$ für $B \in \mathcal{C}$. Da $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subset \mathcal{U}$ und $\mathcal{C}$ disjunkt, folgt die Abzählbarkeit von $\mathcal{C}$.

Weiterhin gilt
$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(\bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') < \sum_{C \in \mathcal{C}} r \cdot \mu(C) \leq r \cdot \mu(U) < \infty.$$
Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ mit
$$\sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \mu(\bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') < \varepsilon.$$

Sei nun $x \in A \cap U \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$. Da $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ abgeschlossen ist und nach (2) gibt es ein $S \in \mathcal{S}$ mit $S \cap \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D = \emptyset$, $x \in S \subset U$. Insbesondere ist $S \in \mathcal{U} \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_C^t$. Dann gilt aber $S \in \bigcup_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \mathcal{S}_C^t$. Nun kann man abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) &\leq \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{D}} D) \\
&\leq \mu(\bigcup_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') \\
&\leq \sum_{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}} \mu(\bigcup_{C' \in \mathcal{S}_C^t} C') < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist folgt $\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) = 0$.

Sei nun $A$ beliebig. Wähle $a \in A$. Induktiv werden beschränkte Mengen $A_j \subset X$, offene Mengen $W_j \subset X$ und endliche disjunkte Folgen $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{S}$ abgeschlossener Mengen konstruiert. Setze hierzu $W_0 := U$, $A_0 := \emptyset$, $\mathcal{C}_0 := \emptyset$ und falls $W_{j-1}$, $A_{j-1}$ und $\mathcal{C}_{j-1}$ für $j > 0$ schon definiert sind, so sei $W_j := W_{j-1} \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}_{j-1}} C$, $A_j := \{x \in A : d(a, x) \leq j\}$. Da $A_j$ beschränkt ist und $W_{j-1} \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}_{j-1}} C = W_j$ offen, gibt es eine endliche disjunkte Teilfamilie $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{S}$ mit

$\bigcup_{C\in\mathcal{C}_j} C \subset W_j$ und $\mu(W_j \cap A_j \setminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}_j} C) < \frac{1}{2^j}$. Die Mengen $W_j = \mathcal{U} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \bigcup_{C\in\mathcal{C}_i} C$, $j \in \mathbb{N}$, sind absteigend, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sind aufsteigend, $\mathcal{C} := \bigcup_{j\geq 1} \mathcal{C}_j$ ist nach Konstruktion eine abzählbare disjunkte Mengenfolge in $\mathcal{S}$. Ferner ist $U \setminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C \subset W_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}$ beliebig gibt also:

$$\begin{aligned}
\mu(U \cap A \setminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C) &= \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}((U \setminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C) \cap A_j)) \\
&= \mu(\bigcup_{j=k}^{\infty}((U \setminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C) \cap A_j)) \\
&= \mu(\bigcup_{j=k}^{\infty}(W_{j+1} \cap A_j)) \\
&\leq \mu(\bigcup_{j=k}^{\infty}(W_j \cap A_j \setminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}_j} C)) \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j}.
\end{aligned}$$

Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig, folgt $\mu(U \cap A \setminus \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C) = 0$. ∎

**Beispiel**
Sei $V = \{(x, [x, x+h]) : x \in [a, b),\ 0 < h < b - x\}$. Dann gilt:

(1) $\inf\{\mathrm{diam}([x, x+h]) : 0 < h < b - x\} = 0$ für alle $x \in [a, b)$.

(2) Seien $Z \subset [a, b)$, $C \subset V$ mit $\inf\{\mathrm{diam}(S) : (z, S) \in C\} = 0$ für alle $z \in Z$.

Betrachte $C(Z) := \{S : (z, S) \in C$ für ein $z \in Z\}$.

Wir werden Satz 2.6 verwenden und weisen die folgenden Voraussetzungen nach:

(i) $\sup\{\mathrm{diam}(S) : S \in C(Z)\} \leq b - a < \infty$.

(ii) $\inf\{\mathrm{diam}(S) : S \in C(Z),\ x \in S\} = \inf\{\mathrm{diam}(S) : (z, S) \in C$ für ein $z \in Z, x \in S\} \leq \inf\{\mathrm{diam}(S) : (x, S) \in C\} = 0$ für alle $x \in Z$.

(iii) Sei $B := [x, x+h] \in C(Z) =: \mathcal{S}$. Dann ist $\mathcal{S}$ eine abgeschlossene Überdeckung von $Z$. Ferner: $[y, y+\bar{h}] \in \mathcal{S}_B^t$ impliziert $[y, y+\bar{h}] \cap [x, x+h] \neq \emptyset$ und $\mathrm{diam}([y, y+\bar{h}]) \leq t \cdot \mathrm{diam}([x, x+h])$, das heißt $\bar{h} \leq h$, also gilt $[y, y+\bar{h}] \subset [x - th, x + h + th]$ und damit $\lambda(\bigcup_{S\in\mathcal{S}_B^t} S) \leq \lambda([x - th, (1+t)h]) = (1+2t)h = (1+2t)\lambda(B)$.

Nach Satz 2.6 existiert eine abzählbare disjunkte $\lambda$-Überdeckung von $Z$ mit Mengen aus $\mathcal{S} = C(Z)$.

Somit ist $V$ eine $\lambda$-Vitali-Relation.

**Definition**
Eine metrische abgeschlossene Kugel in $(X, d)$ ist $\mathbb{B}(x, r) := \{z \in X : d(z, x) \leq r\}$ für $r > 0$.

**Korollar 2.7**
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $A \subset X$, $r > 0$, $t > 1$. Sei $\mathcal{S}$ eine Überdeckung von $A$ durch abgeschlossene Kugeln mit

(1) $\sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in \mathcal{S}\} < \infty$,

(2) $\inf\{\operatorname{diam}(\mathbb{B}(y, s)) : y \in A, x \in \mathbb{B}(y, s) \in \mathcal{S}\} = 0$ für alle $x \in A$,

(3) für alle $x \in A$ und alle $\mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S}$ gilt: $\mu(\mathbb{B}(x, (1 + 2t)s)) < r \cdot \mu(\mathbb{B}(x, s))$.

Dann gibt es zu jeder offenen Menge $U \subset X$ eine abzählbare disjunkte $\mu$-Überdeckung $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ von $U \cap A$, mit $C \subset U$ für alle $C \in \mathcal{C}$ (wobei alle $C \in \mathcal{C}$ ihren Mittelpunkt in $A$ haben).

**Beweis**
Sei $\mathcal{S}' := \{\mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S} : x \in A\}$. Dann ist $\mathcal{S}'$ eine abgeschlossene Überdeckung von $A$ wegen (2). Bedingung (1) in Satz 2.6 folgt aus der Voraussetzung (1) hier, die Bedingung (2) in Satz 2.6 folgt aus der Voraussetzung (2) hier. Wir weisen die Bedingung (3) in Satz 2.6 nach. Hierzu sei $\mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S}'$, das heißt $x \in A$.

**Behauptung:**

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}'^t_{\mathbb{B}(x,s)}} S \subset \mathbb{B}(x, (1 + 2t)s)$$

**Nachweis:** Sei $S = \mathbb{B}(y, \varrho) \in \mathcal{S}'^t_{\mathbb{B}(x,s)}$. Dann ist $\mathbb{B}(y, \varrho) \cap \mathbb{B}(x, s) \neq \emptyset$ und außerdem gilt $\operatorname{diam}(\mathbb{B}(y, \varrho)) \leq t \cdot \operatorname{diam}(\mathbb{B}(x, s))$. Sei $\bar{z} \in \mathbb{B}(y, \varrho)$ und $z_0 \in \mathbb{B}(y, \varrho) \cap \mathbb{B}(x, s)$. Dann gilt

$$d(\bar{z}, x) \leq d(\bar{z}, z_0) + d(z_0, x) \leq \operatorname{diam}(\mathbb{B}(y, \varrho)) + s \leq t \cdot 2s + s = (1 + 2t)s.$$

Hiermit:

$$\mu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}'^t_{\mathbb{B}(x,s)}} S) \leq \mu(\mathbb{B}(x, (1 + 2t)s) < r \cdot \mu(\mathbb{B}(x, s)).$$

Die Aussage des Korollars folgt nun mit Satz 2.6. ∎

**Bemerkungen:** (1) Die Bedingung (2) ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\inf\{\operatorname{diam}(\mathbb{B}(s, x)) : \mathbb{B}(x, s) \in \mathcal{S}\} = 0$ für alle $x \in A$. Falls jetzt $\mu$ eine diametrische Regularitätsbedingung erfüllt, dann ist $V := \{(x, \mathbb{B}(x, s)) : x \in X, s > 0\}$ eine $\mu$-Vitali-Relation.

In Satz 2.8 werden wir einen Überdeckungssatz formulieren, mit dessen Hilfe zum Beispiel für $X = \mathbb{R}^n$, $d = \|\cdot\|$, gezeigt werden kann dass $V$ für jedes (!) Maß $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ eine $\mu$-Vitali-Relation ist.

(2) Ist $\mu \in \mathbb{M}(X)$ und gibt es $0 < u < v$, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < u < \frac{\mu(\mathbb{B}(x, s))}{s^n} < v$$

für alle $a \in X$, $s > 0$, so folgt

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{B}(x,(2t+1)s)) &\le s^n \cdot v \cdot (2t+1)^n \\ &= s^n \cdot u \cdot \frac{v}{u} \cdot (2t+1)^n \\ &< \mu(\mathbb{B}(x,s)) \cdot \underbrace{\frac{v}{u} \cdot (2t+1)^n}_{=:r} \\ &= r \cdot \mu(\mathbb{B}(x,s)).\end{aligned}$$

**Satz 2.8 (Besicovitch)**
Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_n \in \mathbb{N}$ so dass gilt: Ist $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Kugeln mit positiven Radien in $\mathbb{R}^n$ und $\sup\{\operatorname{diam}(B) : B \in \mathcal{F}\} < \infty$ und ist $A$ die Menge der Mittelpunkte dieser Kugeln, dann gibt es $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{N_n} \subset \mathcal{F}$ derart, dass $\mathcal{G}_i$ eine abzählbare disjunkte Teilfamilie von $\mathcal{F}$ ist und

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B.$$

**Beweis**
Übung bzw. Literatur (Evans & Gariepy, Mattila, allgemeiner Federer) ■

**Korollar 2.9**
Seien $\mu$ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Bälle mit positiven Radien in $\mathbb{R}^n$. Sei $A$ die Menge der Mittelpunkte dieser Bälle. Sei $\mu(A) < \infty$ und $\inf\{r > 0 : \mathbb{B}(a,r) \in \mathcal{F}\} = 0$ für alle $a \in A$. Dann gibt es zu jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare disjunkte Teilfamilie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, so dass $B \subset U$ für alle $B \in \mathcal{G}$ und $\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0$, das heißt, $\mathcal{G}$ ist eine $\mu$-Überdeckung von $A \cap U$.

**Beweis**
Wähle $\theta \in (1 - \frac{1}{N_n}, 1)$.

**Behauptung:** Es gibt $M_1 \in \mathbb{N}$ und disjunkte Bälle $B_1, \dots, B_{M_1} \in \mathcal{F}$ mit $B_i \subset U$ und

$$\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \le \theta \cdot \mu(A \cap U).$$

**Nachweis:** Sei $\mathcal{F}_1 := \{B \in \mathcal{F} : \operatorname{diam}(B) \le 1,\, B \subset U\}$. Die Menge der Mittelpunkte von Bällen aus $\mathcal{F}_1$ ist gerade $A \cap U$. Wegen Satz 2.8 gibt es zu $\mathcal{F}_1$ Teilfamilien $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{N_n} \subset \mathcal{F}_1$, wobei $\mathcal{G}_i$ abzählbar viele disjunkte Bälle enthält mit $A \cap U \subset A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B$. Hieraus folgt

$$\mu(A \cap U) \le \mu(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B) \le \sum_{i=1}^{N_n} \mu(A \cap U \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B).$$

Es gibt ein $i \in \{1, \dots, N_n\}$, so dass

$$\mu(A \cap U \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B) \geq \frac{1}{N_n} \mu(A \cap U).$$

Da $\mu$ Borel-regulär ist, gibt es $M_1 \in \mathbb{N}$ und $B_1, \dots, B_{M_n} \in \mathcal{G}_i$ mit

$$\mu(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \geq (1-\theta)\mu(A \cap B).$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \infty > \mu(A \cap U) &= \mu(A \cap U \cap \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) + \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \\ &\geq (1-\theta)\mu(A \cap U) + \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i), \end{aligned}$$

also die Behauptung.

Im Folgenden wenden wir die bewiesene Behauptung wiederholt an. Setze $U_2 := U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i$ sowie $\mathcal{F}_2 := \{B \in \mathcal{F} : \operatorname{diam}(B) \leq 1,\, B \subset U_2\}$. Wie eben findet man $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq M_1$ und disjunkte abgeschlossene Bälle $B_{M_1+1}, \dots, B_{M_2} \in \mathcal{F}_2$ mit

$$\begin{aligned} \mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_2} B_i) &= \mu(A \cap U_2 \setminus \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} B_i) \\ &\leq \theta\mu(A \cap U_2) \\ &= \theta\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} B_i) \\ &\leq \theta^2 \mu(A \cap U). \end{aligned}$$

Man erhält so eine Folge disjunkter Bälle in $\mathcal{F}$, die in $U$ enthalten ist, so dass

$$\mu(A \cap U \setminus \bigcup_{i=1}^{M_k} B_i) \leq \theta^k \cdot \underbrace{\mu(A \cap U)}_{<\infty} \to 0 \text{ für } k \to \infty. \qquad \blacksquare$$

## 2.3 Differentiation von Maßen

**Definition**
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation auf $X$, $x \in X$. Seien $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Dann wird für jede Teilfamilie $C \subset V$ mit $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (x,S) \in C\} = 0$ erklärt:

$$C\text{-}\limsup_{x} f := C\text{-}\limsup_{S \to x} f(S) := \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \{f(S) : (x,S) \in C,\, S \in \mathcal{D},\, \operatorname{diam}(S) < \varepsilon\}$$

und

$$C\text{-}\liminf_x f := C\text{-}\liminf_{S\to x} f(S) := \liminf_{\varepsilon\searrow 0}\{f(S) : (x,S)\in C,\, S\in\mathcal{D},\, \operatorname{diam}(S)<\varepsilon\}.$$

Falls $C\text{-}\limsup_x f = C\text{-}\liminf_x f$ gilt, so wird erklärt:

$$C\text{-}\lim_x f := C\text{-}\lim_{S\to x} f(S) := C\text{-}\limsup_x f = C\text{-}\liminf_x f.$$

Insbesondere: Seien $\mu,\nu\in\mathbb{M}(X)$ und $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation. Dann wird erklärt:

$$\mathbb{D}(\nu,\mu,V,x) := V\text{-}\lim_x \frac{\nu}{\mu},$$

falls dieser Grenzwert existiert.

**Satz 2.10**
Seien $\mu,\nu\in\mathbb{M}(X)$. Für $M\subset X$ sei

$$\nu_\mu(M) := \inf\{\nu(A) : A\in\mathfrak{B}(X),\, \mu(M\setminus A)=0\}.$$

Dann ist $\nu_\mu\in\mathbb{M}(X)$. Es gibt ein $B\in\mathfrak{B}(X)$ mit $\nu_\mu=\nu\lfloor B$ und $\mu(B^c)=0$. Ferner ist $\nu_\mu=\nu$ genau dann, wenn jede $\mu$-Nullmenge auch eine $\nu$-Nullmenge ist.

**Beweis**
Sei $M\subset X$. Wir zeigen zunächst, dass es $A\in\mathfrak{B}(X)$ gibt mit $\mu(M\setminus A)=0$ und $\nu_\mu(M)=\nu(A)$. Hierzu sei $\nu_\mu(M)<\infty$ (sonst wähle $A=X$). Zu $k\in\mathbb{N}$ existiert $A_k\in\mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(M\setminus A_k)=0$ und

$$0\le \nu(A_k)-\nu_\mu(M)\le \frac{1}{k}.$$

Setze $A:=\bigcap_{k=1}^\infty A_k\in\mathfrak{B}(X)$. Es gilt:

$$\mu(M\setminus A)=\mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty (M\setminus A_k)\Big)\le\sum_{k=1}^\infty \mu(M\setminus A_k)=0$$

und damit

$$\nu_\mu(M)\le\nu(A)\le\nu(A_k)\le\nu_\mu(M)+\frac{1}{k}\to\nu_\mu(M)$$

für $k\to\infty$.

**Behauptung:** $\nu_\mu$ ist ein äußeres Maß.

Hierzu ist

$$0\le\nu_\mu(\emptyset)\le\nu(\emptyset)=0.$$

Seien $M, M_1, M_2, \ldots \subset X$ mit $M \subset \bigcup_{i=1}^\infty M_i$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ gibt es $A_i \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(M_i \setminus A_i) = 0$ und $\nu_\mu(M_i) = \nu(A_i)$. Damit ist

$$\begin{aligned}\mu(M \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i) &\leq \mu((\bigcup_{i=1}^\infty M_i) \setminus (\bigcup_{i=1}^\infty A_i)) \\ &\leq \mu(\bigcup_{i=1}^\infty (M_i \setminus A_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \mu(M_i \setminus A_i) = 0.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\nu_\mu(M) \leq \nu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \nu_\mu(M_i).$$

**Behauptung:** $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$.

Sei $A \in \mathfrak{B}(X)$, $M \subset X$. Zu $M$ existiert $C \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(M \setminus C) = 0$ und $\nu_\mu(M) = \nu(C)$. Es gilt nun

$$\mu((M \cap A) \setminus (C \cap A)) = \mu((M \setminus C) \cap A) \leq \mu(M \setminus C) = 0$$

und ebenso

$$\mu((M \cap A^c) \setminus (C \cap A^c)) = \mu((M \setminus C) \cap A^c) \leq \mu(M \setminus C) = 0.$$

Daher ist

$$\nu_\mu(M) = \nu(C) = \nu(C \cap A) + \nu(C \cap A^c) \geq \nu_\mu(M \cap A) + \nu_\mu(M \cap A^c).$$

Dies zeigt $A \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$.

Sei $A \in \mathfrak{B}(X)$ beschänkt. Dann existiert ein $C \in \mathfrak{B}(X)$ mit $C \subset A$, $\mu(A \setminus C) = 0$ und $\nu_\mu(A) = \nu(C)$.

**Behauptung:** Für $M \subset A$ gilt $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap C)$.

Fall 1: $M \subset A$, $M \in \mathfrak{B}(X)$. Es gilt

$$\mu(M \setminus \underbrace{(C \cap M)}_{\in \mathfrak{B}(X)}) = \mu((M \cap A) \setminus (C \cap M)) \leq \mu(A \setminus C) = 0$$

und ebenso

$$\mu((M^c \cap A) \setminus \underbrace{(C \cap M^c)}_{\in \mathfrak{B}(X)}) \leq \mu(A \setminus C) = 0.$$

Daher ist $\nu_\mu(M) \leq \nu(M \cap C)$ und $\nu_\mu(M^c \cap A) \leq \nu(M^c \cap C)$ und weiter

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(M) + \nu_\mu(M^c \cap A) &= \nu_\mu(M \cap A) + \nu_\mu(M^c \cap A) \\
&\geq \nu_\mu(A) \\
&= \nu(C) \\
&= \nu(C \cap M) + \nu(C \cap M^c) && (\text{wegen } M \in \mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\nu) \\
&\geq \nu(M \cap C) + \nu_\mu(M^c \cap A) \\
&\geq \nu_\mu(M) + \nu_\mu(M^c \cap A).
\end{aligned}$$

Es besteht also überall Gleichheit, insbesondere ist

$$\infty > \nu(M \cap C) + \nu(M^c \cap C) = \nu_\mu(M) + \nu_\mu(M^c \cap A).$$

Da der erste (bzw. zweite) Summand links größer gleich dem ersten (bzw. zweiten) Summand rechts ist, folgt insbesondere $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap C)$.

Fall 2: $M \subset A$ beliebig. Dann existieren $D_1, D_2 \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \subset D_i$ und $\nu(M \cap S) = \nu(D_1 \cap S)$ und $\mu(M \cap S) = \mu(D_2 \cap S)$ für alle $S \in \mathfrak{B}(X)$, da $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu$ (vgl. Proposition 1.3 (b)). Setze $D := D_1 \cap D_2 \cap A \in \mathfrak{B}(X)$. Es gilt $M \subset D \subset A$. Ferner ist

$$\nu(M \cap S) \leq \nu(D \cap S) \leq \nu(D_1 \cap S) = \nu(M \cap S)$$

also $\nu(D \cap S) = \nu(M \cap S)$ und ebenso $\mu(D \cap S) = \mu(M \cap S)$. Insbesondere ist dann auch $\mu(M \setminus S) = \mu(D \setminus S)$. Wegen $D \in \mathfrak{B}(X)$, $D \subset A$ ist $\nu_\mu(D) = \nu(C \cap D)$ nach Fall 1. Zusammen erhält man

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(M) &= \inf\{\nu(S) : S \in \mathfrak{B}(X),\, \mu(M \setminus S) = 0\} \\
&= \inf\{\nu(S) : S \in \mathfrak{B}(X),\, \mu(D \setminus S) = 0\} \\
&= \nu_\mu(D) = \nu(C \cap D) = \nu(M \cap C).
\end{aligned}$$

Wir zerlegen nun $X$ in der Form $X = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ mit beschränkten disjunkten Borelmengen $A_i$. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ existiert $C_i \in \mathfrak{B}(X)$ mit $C_i \subset A_i$, $\mu(A_i \setminus C_i) = 0$ und $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap C_i)$ für alle $M \subset A_i$. Setze

$$B := \bigcup_{i \geq 1} C_i \in \mathfrak{B}(X).$$

Dann folgt

$$\mu(B^c) = \mu(X \setminus B) = \mu((\bigcup_{i \geq 1} A_i) \setminus (\bigcup_{i \geq 1} C_i)) \leq \mu(\bigcup_{i \geq 1} (A_i \setminus C_i)) = 0.$$

Es folgt für $M \subset X$, wobei für die zweiten Gleichung $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu} \subset \mathcal{A}_{(\nu_\mu \lfloor M)}$ verwendet wird,

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(M) &= (\nu_\mu \lfloor M)(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} (\nu_\mu \lfloor M)(A_i) \\
&= \sum_{i \geq 1} \nu_\mu(\underbrace{M \cap A_i}_{\subset A_i}) = \sum_{i \geq 1} \nu(\underbrace{M \cap A_i \cap C_i}_{= M \cap C_i}) \\
&= \sum_{i \geq 1} (\nu \lfloor M)(C_i) = (\nu \lfloor M)(\bigcup_{i \geq 1} C_i) = (\nu \lfloor M)(B) \\
&= \nu(M \cap B).
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\nu_\mu = \nu\lfloor B$.

Zu $M \subset X$ existiert $C \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \cap B \subset C$ und $\nu(M \cap B) = \nu(C)$. Damit ist $M \subset B^c \cup C \in \mathfrak{B}(X)$ und

$$\nu_\mu(M) \leq \nu_\mu(B^c \cup C) = \nu(B \cap C) \leq \nu(C) = \nu(M \cap B) = \nu(M),$$

das heißt

$$\nu_\mu(M) = \nu_\mu(B^c \cup C).$$

Dies schließt den Nachweis ab, dass $\nu_\mu$ Borel-regulär ist. Ist $M$ beschränkt, so ist $\nu_\mu(M) = \nu(M \cap B) < \infty$.

Ist jede $\mu$-Nullmenge eine $\nu$-Nullmenge, so ist $\nu(B^c) = 0$, also $\nu = \nu\lfloor B = \nu_\mu$. Ist schließlich $M \subset X$ und $\mu(M) = 0$, so ist $\nu_\mu(M) = \nu(\emptyset) = 0$. Aus $\nu_\mu = \nu$ folgt damit $\nu(M) = 0$, so dass jede $\mu$-Nullmenge eine $\nu$-Nullmenge. ∎

**Bemerkung:** Für $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$ schreibt man $\nu \ll \mu$ und sagt $\nu$ ist absolut stetig bezüglich $\mu$, falls für alle $M \subset X$ gilt:

$$\mu(M) = 0 \Rightarrow \nu(M) = 0.$$

Das Maß $\nu_\mu$ ist absolut stetig bezüglich $\mu$ und $\nu_\mu = \nu\lfloor B$ mit $\mu(B^c) = 0$, $B \in \mathfrak{B}(X)$. Also ist

$$\nu = \nu_\mu + \underbrace{(\nu - \nu_\mu)}_{=:\nu_\mu^\perp}$$

wobei $\nu_\mu^\perp \in \mathbb{M}(X)$ wegen $\nu_\mu^\perp = \nu\lfloor B^c$, d.h. $\nu_\mu^\perp \perp \nu_\mu$. Letzteres bedeutet, dass es eine Menge $B \subset X$ gibt mit $\nu_\mu(B^c) = \nu_\mu^\perp(B) = 0$.

**Lemma 2.11**
Seien $\mu, \nu, \tau \in \mathbb{M}(X), V$ eine $\mu-$Vitali-Relation, $c \in (0, \infty)$ und

$$A \subset \{x \in X : V\text{-}\liminf_{S \searrow x} \frac{\nu(S)}{\tau(S)} < c\}.$$

Dann gilt:

$$\nu_\mu(A) \leq c \cdot \tau_\mu(A).$$

**Beweis**
Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund des Beweises von Satz 2.10 gibt es zu $A$ ein $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\mu(A \setminus B) = 0$ und $\tau_\mu(A) = \tau(B)$. Wegen Satz 2.2 gibt es zu $B$ eine offene Menge $U \subset X$ mit $B \subset U$ und $\tau(U \setminus B) \leq \varepsilon$. Also ist $\mu(A \setminus U) \leq \mu(A \setminus B) = 0$ und

$$\tau(U) = \tau(U \cap B) + \tau(U \setminus B) \leq \tau(B) + \varepsilon = \tau_\mu(A) + \varepsilon.$$

Sei

$$C := \{(x, S) \in V : S \subset U, \frac{\nu(S)}{\tau(S)} < c\}.$$

Für $z \in A \cap U$ gilt: $V\text{-}\liminf \frac{\nu(S)}{\mu(S)} < c$, also $\inf\{\operatorname{diam}(S) : (z, S) \in C\} = 0$ für alle $z \in A \cap U$.

Da $V$ eine $\mu-$Vitali-Relation ist, enthält $C(A\cap U)$ eine abzählbare, disjunkte $\mu$-Überdeckung $\mathcal{S}$ von $A\cap U$. Aus $\mu(A\setminus U)=0$, $\mu(A\cap U\setminus\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S)=0$, $\nu_\mu\ll\mu$ und $\nu_\mu\le\nu$ folgt

$$\begin{aligned}\nu_\mu(A)&=\nu_\mu(A\cap U\cap\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S)\\&\le\nu_\mu(\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S)\\&\le\nu(\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S)\\&\le\sum_{S\in\mathcal{S}}\underbrace{\nu(S)}_{\le c\tau(S)}\\&\le c\sum_{S\in\mathcal{S}}\tau(S)=c\cdot\tau(\underbrace{\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S}_{\subset U})\\&\le c\cdot\tau(U)\\&\le c\cdot(\tau_\mu(A)+\varepsilon)\\&=c\cdot\tau_\mu(A)+c\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $c<\infty$ und $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ∎

**Bemerkungen:** (1) Sind $\nu,\tau\ll\mu$, so gilt $\nu_\mu=\nu,\tau_\mu=\tau$ und in Lemma 2.11 lautet die Folgerung $\nu(A)\le c\cdot\tau(A)$.

(2) Es gilt $\mu_\mu=\mu$.

**Korollar 2.12**
Seien $\mu,\nu\in\mathbb{M}(X)$, $V$ eine $\mu-$Vitali-Relation, $c>0$. Seien ferner

$$A\subset\{x\in X:\liminf_{S\searrow x}\frac{\nu(S)}{\mu(S)}<c\}\quad\text{und}\quad B\subset\{x\in X:\limsup_{S\searrow x}\frac{\nu(S)}{\mu(S)}>c\}.$$

Dann gilt:

$$\nu_\mu(A)\le c\cdot\mu(A),\quad\nu_\mu(B)\ge c\cdot\mu(B).$$

**Beweis**
Wegen Lemma 2.11 gilt $\nu_\mu(A)\le c\mu_\mu(A)=c\mu(A)$. Ferner gilt:

$$V\text{-}\liminf_{S\searrow x}\frac{\mu(S)}{\nu(S)}=\frac{1}{V\text{-}\limsup_{S\searrow x}\frac{\nu(S)}{\mu(S)}}<\frac{1}{c}$$

und damit aufgrund von Lemma 2.11 $\mu(B)=\mu_\mu(B)\le\frac{1}{c}\nu_\mu(B)$, so dass $\nu_\mu(B)\ge c\mu(B)$. ∎

**Lemma 2.13**
Seien $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$ und $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation. Dann ist $\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) \in \mathbb{F}_\mu(X, \bar{\mathbb{R}})$ und $0 \leq \mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) < \infty$ $\mu-$fast-überall in $X$.

**Beweis**
Seien

$$\begin{aligned} C &:= \{(x, S) \in V : \mu(S) = 0\}, \\ P &:= \{x \in X : \inf\{\operatorname{diam} S : (x, S) \in C\} = 0\}, \\ Q &:= \{x \in X : \limsup_x \frac{\nu}{\mu} = \infty\} \end{aligned}$$

und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei

$$R(a, b) := \{x \in X : V\text{-}\liminf_x \frac{\nu}{\mu} < a < b < V\text{-}\limsup_x \frac{\nu}{\mu}\}.$$

Da $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation ist, enthält $C(P)$ eine abzählbare, disjunkte $\mu$-Überdeckung $\mathcal{S}$ von $P$, so dass

$$0 \leq \mu(P) \leq \mu(P \cap \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) \leq \mu(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \underbrace{\mu(S)}_{=0} = 0,$$

das heißt $\mu(P) = 0$.

Seien nun $a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}$ und $A \subset Q,\ B \subset R(a, b)$ beschränkt. Für ein beliebiges $c > 0$ gilt:

$$\infty > \nu_\mu(A) \geq c \cdot \mu(A),$$

also $\mu(A) = 0$. Ebenso gilt

$$b \cdot \mu(B) \leq \nu_\mu(B) \leq a \cdot \mu(B)$$

für $a < b$. Wegen $\mu(B) < \infty$ folgt $\mu(B) = 0$.

Es folgt $\mu(Q) = \mu(R(a, b)) = 0$ und damit die Behauptung. ∎

**Lemma 2.14**
Sei $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$, $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation. Dann ist $\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot)$ eine $\mu$-messbare Funktion.

**Beweis**
Seien $a < b$,

$$M_1 := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) < a\} \quad \text{und} \quad M_2 := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) > b\}.$$

Seien weiter $A_i \subset M_i$ beschränkt $(i = 1, 2)$. Es existieren $B_i \in \mathfrak{B}(X)$ mit $A_i \subset B_i$, so dass für alle $C \in \mathfrak{B}(X)$ gilt

$$\mu(A_i \cap C) = \mu(B_i \cap C) \quad \text{und} \quad \nu_\mu(A_i \cap C) = \nu_\mu(B_i \cap C). \tag{$*$}$$

Wegen $a < b$ gilt mit Korollar 2.12 und $(*)$

$$\begin{aligned} a \cdot \mu(B_1 \cap B_2) &= a \cdot \mu(A_1 \cap B_2) \\ &\geq \nu_\mu(A_1 \cap B_2) \\ &= \nu_\mu(B_1 \cap B_2) \\ &= \nu_\mu(B_1 \cap A_2) \\ &\geq b \cdot \mu(B_1 \cap A_2) \\ &= b \cdot \underbrace{\mu(B_1 \cap B_2)}_{<\infty} \end{aligned}$$

und damit $\mu(B_1 \cap B_2) = 0$.

Nun folgt:

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(\underbrace{(A_1 \cup A_2)}_{\supset A_1} \cap B_1) + \mu(\underbrace{(A_1 \cup A_2) \cap B_1^c}_{= A_2 \cap B_1^c}) \\ &\geq \mu(A_1) + \mu(A_2 \cap B_1^c) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \cap B_1^c \cap B_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(\underbrace{A_2}_{\subset B_2} \cap B_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2). \end{aligned}$$

Sei $T \subset X$ beliebig, $y \in X$. Für $i = 1, 2$ setze

$$A_{i,n} := M_i \cap T \cap B(y, n).$$

Es ist $A_{i,n} \subset M_i$, $A_{i,n} \nearrow M_i \cap T$ und $A_{1,n} \cup A_{2,n} \subset T$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \mu(T) &\geq \lim_{n\to\infty} \mu(A_{1,n} \cup A_{2,n}) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \mu(A_{1,n}) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_{2,n}) \\ &= \mu(M_1 \cap T) + \mu(M_2 \cap T). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.8. ■

**Satz 2.15**
Seien $\nu, \mu \in \mathbb{M}(X)$ und $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation. Dann gilt $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$ und für $A \in \mathcal{A}_\mu$ ist

$$\nu_\mu(A) = \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx).$$

**Beweis**
Sei $A \in \mathcal{A}_\mu$ beschränkt. Dann gibt es eine Borelmenge $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $A \subset B$ und $\mu(A) = \mu(B)$, also $\mu(B \setminus A) = 0$. Dann ist auch $\nu_\mu(B \setminus A) = 0$, das heißt $B \setminus A \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$ und folglich

$A = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$, da $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$ (vgl. Satz 2.10). Wegen $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ mit beschränkten $A_i \in \mathcal{A}_\mu$ folgt allgemein $A \in \mathcal{A}_{\nu_\mu}$, das heißt $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_{\nu_\mu}$.

Sei nun $Z_0 := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) = 0\}$, $Z_\infty := \{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) = \infty\}$. Da aufgrund von Lemma 2.13 $\mu(Z_\infty) = 0$ ist, ist $\nu_\mu(Z_\infty) = 0$ und daher ist

$$\nu_\mu(Z_\infty) = 0 = \int_{Z_\infty} \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx).$$

Ferner ist $Z_0 = \bigcup_{n=1}^\infty Z_n$ mit $Z_n$ beschränkt. Aus Korollar 2.12 erhält man für $\varepsilon > 0$ die Abschätzung $\nu_\mu(Z_n) \leq \varepsilon \cdot \underbrace{\mu(Z_n)}_{<\infty}$, das heißt $\nu_\mu(Z_n) = 0$, also auch $\nu_\mu(Z_0) = 0$. Daher ist

$$\nu_\mu(Z_0) = 0 = \int_{Z_0} \underbrace{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)}_{=0} \mu(dx).$$

Sei schließlich $t \in (1, \infty)$, $n \in \mathbb{Z}$ und $P_n^t := \{t^n \leq \mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot) < t^{n+1}\}$. Man erhält

$$A \setminus (Z_0 \cup Z_\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{(P_n^t \cap A)}_{\in \mathcal{A}_\mu}$$

mit disjunkter Vereinigung und daher

$$\nu_\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n^t \cap A).$$

Andererseits ist wegen $\mu(Z_\infty) = 0$

$$\begin{aligned} t^{-1} \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-1} \int_{P_n^t \cap A} \underbrace{\mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)}_{<t^{n+1}} \mu(dx) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \cdot \mu(P_n^t \cap A) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n^t \cap A) = \nu_\mu(A) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{n+1} \cdot \mu(P_n^t \cap A) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t \int_{P_n^t \cap A} \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx) \\ &= t \cdot \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx). \end{aligned}$$

Da $t > 1$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

**Satz 2.16**
Sind $\mu, \nu \in \mathbb{M}(X)$ und $V_1, V_2$ zwei beliebige $\mu$-Vitali-Relationen auf $X$, dann gilt

$$\mathbb{D}(\nu, \mu, V_1, \cdot) = \mathbb{D}(\nu, \mu, V_2, \cdot)$$

$\mu$-fast-überall.

**Beweis**
Sei $y \in X$ fest. Für $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, sei

$$A_{ij}^n := \{x \in \mathbb{B}(y, n) : \mathbb{D}(\nu, \mu, V_i, x) \geq \mathbb{D}(\nu, \mu, V_j, x) + \frac{1}{n}\}.$$

Hiermit ist

$$\frac{1}{n} \cdot \mu(A_{ij}^n) \leq \int_{A_{ij}^n} (\mathbb{D}(\nu, \mu, V_i, x) - \mathbb{D}(\nu, \mu, V_j, x))\mu(dx) = \nu_\mu(A_{ij}^n) - \nu_\mu(A_{ij}^n) = 0.$$

Dies zeigt $\mu(A_{ij}^n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\mu(\mathbb{D}(\nu, \mu, V_1, \cdot) \neq \mathbb{D}(\nu, \mu, V_2, \cdot)) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{12}^n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{21}^n) = 0.$$

■

**Satz 2.17 (Lebesguescher Dichtesatz)**
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $V$ eine $\mu$-Vitali-Relationen auf $X$ , $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sei $\mu$-messbar und $\int_A |f| d\mu < \infty$ für jede beschränkte Menge $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dann gilt:

$$V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \cdot \int_S f d\mu = f(x)$$

für $\mu$-fast-alle $x \in X$.

**Beweis**
Sei zunächst $f \geq 0$. Sei $A \subset X$, $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $\bar{\nu}(A) := \int_A f d\mu$. Dann ist $\bar{\nu}$ ein Maß auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\mu$. Setze

$$\nu(M) := \inf\{\bar{\nu}(A) : A \in \mathcal{A}_\mu,\ M \subset A\}.$$

Dann ist $\nu$ ein $\mathcal{A}_\mu$-reguläres äußeres Maß (vgl. Satz 1.4). Ferner ist $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_\nu$. Ist $M \subset X$, so gibt es ein $A \in \mathcal{A}_\mu$ mit $M \subset A$ und $\nu(M) = \nu(A)$. Zu $A \in \mathcal{A}_\mu$ existiert $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $A \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$ (vgl. Satz 2.2 (3)). Daraus folgt

$$\nu(M) = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{B\setminus A} f d\mu = \int_B f d\mu = \nu(B),$$

da $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $M \subset A \subset B$. Also ist $\nu \in \mathbb{M}(X)$, denn für ein beschränktes $A \in \mathcal{A}_\mu$ ist $\nu(A) = \int_A f d\mu < \infty$ nach Voraussetzung.

Offenbar ist $\nu \ll \mu$ und daher $\nu_\mu = \nu$. Wegen $A \in \mathcal{A}_\mu$ ist aufgrund von Satz 2.15

$$\int_A f d\mu = \nu(A) = \nu_\mu(A) = \int_A \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x)\mu(dx)$$

für alle $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dies zeigt $f = \mathbb{D}(\nu, \mu, V, \cdot)$ $\mu$-fast-überall, das heißt, für $\mu$-fast-alle $x \in X$ gilt

$$f(x) = \mathbb{D}(\nu, \mu, V, x) = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} = V\text{-}\lim_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f d\mu,$$

wobei $S \in \mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ benutzt wurde.

Für die allgemeine Aussage wird die Zerlegung $f = f^+ - f^-$ verwendet. ■

**Definition**
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation, $M \subset X$ und $x \in x$. Dann nennt man

$$V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{\mu(M \cap S)}{\mu(S)} = V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{(\mu \lfloor M)(S)}{\mu(S)}$$

die $(\mu, V)$-Dichte von $M$ in $x$, falls der Limes existiert.

**Satz 2.18**
Seien $\mu \in \mathbb{M}(X)$, $V$ eine $\mu$-Vitali-Relation, $M \subset X$. Dann existiert die $(\mu, V)$-Dichte von $M$ für $\mu$-fast-alle $x \in X$. Setze

$$P := \{x \in X : V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{\mu(S \cap M)}{\mu(S)} = 1\} \quad \text{und} \quad Q := \{x \in X : V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{\mu(S \cap M)}{\mu(S)} = 0\}.$$

Dann gilt $P, Q \in \mathcal{A}_\mu$ und $\mu(M \cap P^c) = \mu(Q \cap M) = 0$.

Ferner sind äquivalent:

(1) $M \in \mathcal{A}_\mu$,

(2) $\mu(P \cap M^c) = 0$,

(3) $\mu(M^c \cap Q^c) = 0$.

**Beweis**
Zu $M \subset X$ existiert $A \in \mathcal{A}_\mu$ mit $M \subset A$ und $\mu(M \cap B) = \mu(A \cap B)$ für alle $B \in \mathcal{A}_\mu$ (vgl. Aufgabe 2, Übungsblatt 1). Es gilt $\mu \lfloor A \in \mathbb{M}(X)$ und daher ist $\{\mathbb{D}(\mu \lfloor A, \mu, V, \cdot) = 1\} \in \mathcal{A}_\mu$. Ferner existiert wegen $S \in \mathfrak{B}(X)$ der Limes

$$\mathbb{D}(\mu \lfloor A, \mu, V, x) = V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{(\mu \lfloor A)(S)}{\mu(S)} = V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{\mu(M \cap S)}{\mu(S)}$$

für $\mu$-fast-alle $x \in X$. Dies zeigt insbesondere $P, Q \in \mathcal{A}_\mu$.

Für $\mu$-fast-alle $x \in X$ gilt wegen Satz 2.17

$$\mathbb{1}_A(x) = V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S \mathbb{1}_A(x) \mu(dx) = V\text{-}\lim_{S \to x} \frac{\mu(A \cap S)}{\mu(S)} = \mathbb{D}(\mu \lfloor A, \mu, V, x).$$

Sei nun $x \notin P$. Dann ist $x \notin A$ für $\mu$-fast-alle $x \in X$, das heißt $\mu(A \setminus P) = 0$. In analoger Weise sieht man $\mu(P \setminus A) = 0$ ein. Wegen $M \subset A$ ist $\mu(M \setminus P) \leq \mu(A \setminus P) = 0$. Hieraus folgt $\mu(M \cap P^c) = 0$ und damit $M \setminus P \in \mathcal{A}_\mu$.

Ist $M \in \mathcal{A}_\mu$, so wähle $A = M$, das heißt $\mu(P \setminus M) = 0$.

Ist dagegen $\mu(P \setminus M) = 0$, so ist $P \setminus M \in \mathcal{A}_\mu$ und $M = (M \setminus P) \cup (M \cap P) = (M \setminus P) \cup (P \setminus (P \setminus M)) \in \mathcal{A}_\mu$.

Die Argumentation für $Q$ verläuft analog. ∎

## 2.4 Hausdorffmaße und Hausdorffdimension

**Definition**
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Wir definieren für $\delta > 0$ und $M \subset X$

$$\Omega_\delta(M) := \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} : A_i \subset X, \operatorname{diam}(A_i) \le \delta, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i\ge 1} A_i\},$$

$$\tilde{\Omega}_\delta(M) := \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} : X \supset A_i \text{ offen}, \operatorname{diam}(A_i) \le \delta, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i\ge 1} A_i\}$$

und

$$\bar{\Omega}_\delta(M) := \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} : X \supset A_i \text{ abgeschlossen}, \operatorname{diam}(A_i) \le \delta, i \in \mathbb{N}, M \subset \bigcup_{i\ge 1} A_i\},$$

wobei $\operatorname{diam}(\emptyset) := 0$.

**Lemma 2.19**
Sei $s \in [0, \infty)$. Für $\delta > 0$ und $M \subset X$ sei

$$\mu^s_\delta(M) := \inf\{\sum_{A\in\mathcal{A}} (\operatorname{diam}(A))^s : \mathcal{A} \in \Omega_\delta(M)\},$$

$$\tilde{\mu}^s_\delta(M) := \inf\{\sum_{A\in\mathcal{A}} (\operatorname{diam}(A))^s : \mathcal{A} \in \tilde{\Omega}_\delta(M)\}$$

und

$$\bar{\mu}^s_\delta(M) := \inf\{\sum_{A\in\mathcal{A}} (\operatorname{diam}(A))^s : \mathcal{A} \in \bar{\Omega}_\delta(M)\}.$$

Dann gilt:

(1) $\mu^s_\delta$, $\tilde{\mu}^s_\delta$, $\bar{\mu}^s_\delta$ sind äußere Maße auf $X$,

(2) $\tilde{\mu}^s_\varepsilon(M) \le \bar{\mu}^s_\delta(M) = \mu^s_\delta(M) \le \tilde{\mu}^s_\delta(M)$ für alle $0 < \delta < \varepsilon$.

Beweis: Übung.

**Satz 2.20**
Sei $s \in [0, \infty)$. Für $M \subset X$ wird durch

$$\mu^s(M) := \sup\{\mu^s_\delta(M) : \delta > 0\}$$

ein Borel-reguläres, äußeres Maß auf $X$ erklärt, das $s$-dimensionale Hausdorffmaß auf $(X, d)$.
Es gilt:

(1) $\mu^s(M) = \sup\{\bar{\mu}^s_\delta(M) : \delta > 0\} = \sup\{\tilde{\mu}^s_\delta(M) : \delta > 0\}$.

(2) $\mu^s(M) = \lim_{\delta\searrow 0} \mu^s_\delta(M) = \lim_{\delta\searrow 0} \bar{\mu}^s_\delta(M) = \lim_{\delta\searrow 0} \tilde{\mu}^s_\delta(M)$.

**Beweis**
Die Aussagen (1), (2) sind klar. Ebenso ist offenbar $\mu^s(\emptyset) = 0$. Sei $A \subset \bigcup_{i\geq 1} A_i,\ A, A_i \subset X$. Dann ist für $\delta > 0$:

$$\mu^s_\delta(A) \leq \sum_{i\geq 1} \mu^s_\delta(A_i) \leq \sum_{i\geq 1} \mu^s(A_i).$$

Hieraus folgt aber

$$\mu^s(A) \leq \sum_{i\geq 1} \mu^s(A_i).$$

Wir zeigen $\mathfrak{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^s}$ mit Hilfe von Satz 2.4. Hierzu seien $A, B \subset X$ mit $d(A, B) > 0$ und o.B.d.A. sei $\mu(A \cup B) < \infty$. Wir setzen $\delta := \frac{1}{2} d(A, B) > 0$. Sei $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$. Es folgt

$$\underbrace{\{M_i : M_i \cap A \neq \emptyset\}}_{\in\Omega_\delta(A)} \cap \underbrace{\{M_i : M_i \cap B \neq \emptyset\}}_{\in\Omega_\delta(B)} = \emptyset,$$

und daher

$$\sum_{i\geq 1} (\mathrm{diam}(M_i))^s \geq \sum_{\substack{i\geq 1\\ M_i\cap A\neq\emptyset}} (\mathrm{diam}(M_i))^s + \sum_{\substack{i\geq 1\\ M_i\cap B\neq\emptyset}} (\mathrm{diam}(A_i))^s \geq \mu^s_\delta(A) + \mu^s_\delta(B).$$

Das zeigt

$$\mu^s(A \cup B) = \lim_{\delta\searrow 0} \mu^s_\delta(A \cup B) \geq \lim_{\delta\searrow 0} \mu^s_\delta(A) + \lim_{\delta\searrow 0} \mu^s_\delta(B) = \mu^s(A) + \mu^s(B).$$

Sei jetzt $M \subset X$ und o.B.d.A. $\mu^s(M) < \infty$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $\mathcal{C}^n \in \tilde{\Omega}_{\frac{1}{n}}(M)$ mit

$$\sum_{C\in\mathcal{C}^n} (\mathrm{diam}(C))^s \leq \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + \frac{1}{n}.$$

Setze

$$B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{C\in\mathcal{C}^n} C.$$

Dann ist $M \subset B \in \mathfrak{B}(X)$ und

$$\tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(B) \leq \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(\bigcup_{C\in\mathcal{C}^n} C) \leq \sum_{C\in\mathcal{C}^n} (\mathrm{diam}(C))^s \leq \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt erhält man

$$\mu^s(M) \leq \mu^s(B) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(B) \leq \lim_{n\to\infty} (\tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}^s_{\frac{1}{n}}(M) + 0 = \mu^s(M),$$

d.h. $\mu^s(M) = \mu^s(B)$, was die Borel-Regularität ergibt. ∎

**Proposition 2.21**
Zu $M \subset X$ gibt es genau ein $s \in [0,\infty]$ mit

$$\mu^p(M) = \begin{cases} 0, & p > s, \\ \infty, & p < s. \end{cases}$$

Man nennt diese Zahl $s$ die Hausdorffdimension von $M$, $\dim_H(M)$. Also:

$$\dim_H(M) \coloneqq \inf\{p \geq 0 : \mu^p(M) = 0\}.$$

**Beweis**
Seien $p, q \in [0,\infty)$ mit $p < q$. Sei $\mu^p(M) < \infty$. Dann existiert zu $\delta > 0$ eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$ mit $\sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(A_i))^p \leq \mu^p_\delta(M) + 1 \leq \mu^p(M) + 1$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mu^q_\delta(M) &\leq \sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(A_i))^q \\ &= \sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(A_i))^p \cdot \underbrace{(\operatorname{diam}(A_i))}_{\leq\delta}{}^{q-p} \\ &\leq \Big(\sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(A_i))^p\Big) \cdot \delta^{q-p} \\ &\leq \delta^{q-p} \cdot \underbrace{(\mu^p(M) + 1)}_{<\infty}, \end{aligned}$$

und damit

$$0 \leq \mu^p(M) = \lim_{\delta\searrow 0} \mu^q_\delta(M) \leq \lim_{\delta\searrow 0}(\delta^{q-p}) \cdot (\mu^p(M) + 1) = 0.$$

Sei nun $s \coloneqq \inf\{p \geq 0 : \mu^p(M) = 0\}$. Ist $p > s$, so gibt es ein $q \in (s,p)$ mit $\mu^q(M) = 0$ und daher $\mu^p(M) = 0$.

Sei jetzt $p < s$. Wäre $\mu^p(M) < \infty$, so würde $\mu^q(M) = 0$ für alle $q > p$ gelten, im Widerspruch zur Definition von $s$. Also ist $\mu^p(M) = \infty$ für $p < s$. ∎

**Beispiel**

$$\mu^0(M) = \begin{cases} \#M, & M \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{sonst}. \end{cases}$$

und $\dim_H(M) = 0$ für $\#M < \infty$.

**Definition**
Seien $(X,d)$ und $(\bar{X},\bar{d})$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to \bar{X}$ heißt Isometrie, falls $\bar{d}(f(x), f(y)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in X$.

Zu $f : X \to \bar{X}$ wird

$$\operatorname{Lip}(f) \coloneqq \sup\left\{\frac{\bar{d}(f(x), f(y))}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y\right\}$$

erklärt. Ist $\operatorname{Lip}(f) < \infty$, so nennt man $f$ eine Lipschitzfunktion und $\operatorname{Lip}(f)$ die Lipschitz-Konstante von $f$.

**Lemma 2.22**
Ist $f : (X, d) \to (\bar{X}, \bar{d})$ eine Lipschitzfunktion, so gilt $\bar{\mu}^s(f(M)) \leq \operatorname{Lip}(f)^s \cdot \mu^s(M)$ und $\dim_H(f(M)) \leq \dim_H(M)$.

**Beweis**
Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$. Dann gilt $f(M) \subset \bigcup_{i\geq 1} f(A_i)$ und

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(f(A_i)) &= \sup\{\bar{d}(f(x), f(y)) : x, y \in A_i\}\\ &\leq \sup\{\operatorname{Lip}(f)\cdot d(x,y) : x,y \in A_i\}\\ &= \operatorname{Lip}(f)\cdot \operatorname{diam}(A_i) \leq \operatorname{Lip}(f)\cdot\delta,\end{aligned}$$

d.h. $(f(A_i))_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_{\operatorname{Lip}(f)\cdot\delta}(f(M))$ und

$$\mu^s_{\operatorname{Lip}(f)\cdot\delta}(f(M)) \leq \sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(f(A_i)))^s \leq \operatorname{Lip}(f)^s\cdot\sum_{i\geq 1}(\operatorname{diam}(A_i))^s.$$

Dies zeigt

$$\mu^s_{\operatorname{Lip}(f)\cdot\delta}(f(M)) \leq \operatorname{Lip}(f)^s\cdot\mu^s_\delta(M).$$

Aus $\delta \searrow 0$ folgt die Behauptung. ∎

Sei nun $K(X) := \{f : X \to X : \operatorname{Lip}(f) < 1\}$. Für $m \geq 2$ induziert $\Psi := (\psi_1, \dots, \psi_m) \in K(X)^m$ eine Abbildung

$$\Psi^* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad M \mapsto \bigcup_{i=1}^m \psi_i(M).$$

Man erklärt $\Psi^{*k} := \underbrace{\Psi^* \circ \dots \circ \Psi^*}_{k\text{ mal}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $M \subset M' \Rightarrow \Psi^{*k}(M) \subset \Psi^{*k}(M')$.

Ist $A_i \subset X,\ i \in \mathbb{N}$, so sei

$$\limsup_{i\to\infty} A_i := \{x \in X : x \text{ liegt in unendlich vielen } A_i\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\geq n} A_i.$$

**Lemma 2.23**
Seien $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) \in K(X)^m$ und $\emptyset \neq C \subset X$ kompakt mit $\Psi^*(C) \subset C$. Dann gilt für eine beliebige beschränkte Menge $M \subset X$ die Inklusion

$$\limsup_{k\to\infty} \Psi^{*k}(M) \subset C.$$

**Beweis**
Sei $M \subset X$ beschränkt. Sei $y \in \limsup_{k\to\infty}\Psi^{*k}(M)$, d.h. $y \in \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\Psi^{*k}(M)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert also ein $k \geq n$ mit $y \in \Psi^{*k}(M)$, d.h. $\exists y_k \in M$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ mit $y = \psi_{i_k} \circ \dots \circ \psi_{i_1}(y_k)$.

Sei $z \in C$ beliebig. Dann gilt $\psi_{i_k} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(z) \in C$ sowie

$$\begin{aligned}
d(y, C) &\leq d(y, \psi_{i_k} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(z)) \\
&\leq \operatorname{Lip}(\psi_{i_k}) \cdot d(\psi_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(y_k), \psi_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(z)) \\
&\leq \operatorname{Lip}(y_{i_k}) \cdots \operatorname{Lip}(y_{i_1}) \cdot d(y_k, z) \\
&\leq \underbrace{\max\{\operatorname{Lip}(\psi_i) : 1 \leq i \leq m\}}_{=: r < 1}{}^k \cdot d(y_k, z) \\
&\leq r^k \cdot \underbrace{\operatorname{diam}(M \cup C)}_{<\infty}.
\end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ (und damit $k \to \infty$) folgt $d(y, C) = 0$, d.h. $y \in C$, da $C$ abgeschlossen ist. ■

**Satz 2.24**
Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in K(X)^m$. Dann gibt es genau eine kompakte Menge $\emptyset \neq E \subset X$ mit $\Psi^*(E) = E$. Ist $s \in [0, \infty)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $\sum_{i=1}^m \operatorname{Lip}(\psi_i)^s = 1$, so gilt $\mu^s(E) < \infty$ und daher $\dim_H(E) \leq s$.

**Beweis**
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat jedes $\psi_i$ einen Fixpunkt $x_i \in X$, das heißt $\psi_i(x_i) = x_i$. Setze $F := \{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ und

$$E := \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)}.$$

Zunächst ist $\Psi^{*k}(F) \subset \Psi^{*(k+1)}(F)$ für $k \in \mathbb{N}$, da

$$\psi_{i_1} \circ \cdots \circ \psi_{i_k}(x_j) = \psi_{i_1} \circ \cdots \circ \psi_{i_k} \circ \psi_j(x_j) \in \Psi^{*(k+1)}(F).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\Psi^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)\Big) &= \bigcup_{i=1}^{m} \psi_i\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)\Big) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m} \psi_i(\Psi^{*k}(F)) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^*(\Psi^{*k}(F)) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*(k+1)}(F) \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F).
\end{aligned}$$

Es folgt für $\Psi^*(E)$ wegen der Stetigkeit der $\psi_i$:

$$\begin{aligned}
\Psi^*(E) &= \Psi^*\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)}\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{m} \psi_i \left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)}\right) \\
&\subset \overline{\bigcup_{i=1}^{m} \psi_i \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)\right)} \\
&\subset \overline{\bigcup_{i=1}^{m} \Psi^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)\right)} \\
&= \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)} = E.
\end{aligned}$$

Wir zeigen als nächstes, dass $E$ totalbeschränkt ist. Sei hierzu

$$r := \max\{\mathrm{Lip}(\psi_i) : i \in \{1, \dots, m\}\} < 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\underbrace{\mathrm{diam}(\Psi^*(F))}_{<\infty} \cdot \sum_{i=k}^{\infty} r^i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $x \in E$. Nach Definition von $E$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \geq k+1$, und ein $y \in \Psi^{*p}(F)$ mit $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Also gibt es Indizes $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $y = \psi_{i_p} \circ \dots \circ \psi_{i_1}(x_j)$. Wiederholte Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned}
d(x, \Psi^{*k}(F)) &\leq d(x, y) + d(y, \Psi^{*k}(F)) \\
&\leq d(x, y) + \sum_{l=1}^{p-k} d(\psi_{i_p} \circ \dots \circ \psi_{i_l}, \psi_{i_p} \circ \dots \circ \psi_{i_{l+1}}(x_j)) \\
&\leq d(x, y) + \sum_{l=1}^{p-k} r^{p-l} \underbrace{d(\psi_{i_l}(x_j), x_j)}_{\leq \mathrm{diam}(\Psi^*(F))} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $E$ total beschränkt ist. Als abgeschlossene Menge in einem vollständigen metrischen Raum ist $E$ selbst vollständig, und somit ist $E$ sogar kompakt.

Hiermit zeigen wir nun $E \subset \Psi^*(E)$. Sei $z \in E$. Es existieren dann $z_i \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F)$ mit $z_i \to z$. Hierbei ist $z_i = \psi_{l(i)}(y)$ mit $y_i \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \Psi^{*k}(F) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Psi^{*k}(F) \subset E$ und $l(i) \in \{1, \dots, m\}$. Es existiert eine Teilfolge von $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Folge selbst, mit $y_i \to y \in E$. Ferner gibt es ein $l \in \{1, \dots, m\}$ mit $l(i) = l$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt: $z \leftarrow z_i = \psi_l(y_i) \to \psi_l(y)$. Daher ist $z = \psi_l(y) \in \Psi^*(E)$, das heißt $E \subset \Psi^*(E)$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\emptyset \neq \tilde{E} \subset X$ kompakt und $\Psi^*(\tilde{E}) = \tilde{E}$. Aus Lemma 2.23 folgt:

$$E = \limsup_{k\to\infty} \Psi^{*k}(E) \subset \tilde{E} = \limsup_{k\to\infty} \Psi^{*k}(\tilde{E}) \subset E,$$

das heißt $E = \tilde{E}$.

Zur Hausdorffdimension: Ist $\delta > 0$, so existiert zunächst $k \in \mathbb{N}$ mit $r^k \cdot \operatorname{diam}(E) < \delta$. Wegen $\Psi^{*k}(E) = E$ folgt $\{\psi_{i_k} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(E) : i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}\} \in \Omega_\delta(E)$ und damit

$$\begin{aligned}
\mu_\delta^s(E) &\leq \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \operatorname{diam}(\psi_{i_k} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}(E))^s \\
&\leq \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \operatorname{Lip}(\psi_{i_k})^s \cdots \operatorname{Lip}(\psi_{i_1})^s (\operatorname{diam}(E))^s \\
&= (\operatorname{diam}(E))^s \cdot \underbrace{(\operatorname{Lip}(\psi_1)^s + \cdots + \operatorname{Lip}(\psi_m)^s)}_{=1}{}^k = \operatorname{diam}(E)^s.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\mu^s(E) = \lim_{\delta\searrow 0} \mu_\delta^s(E) \leq (\operatorname{diam}(E))^s < \infty.$$

■

**Zusatz:** Sei $\emptyset \neq C \subset X$ kompakt mit $\Psi^*(C) \subset C$. Dann ist $E := \bigcap_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(C)$.

In der Tat ist $E = \limsup_{k\to\infty} \Psi^{*k}(E) \subset C$ nach Lemma 2.23, $\Psi^{*k}(E) = E$, $\Psi^{*(k+1)}(C) \subset \Psi^{*k}(C)$ und damit, wiederum mit Lemma 2.23,

$$E = \bigcap_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(E) \subset \bigcap_{k=1}^\infty \Psi^{*k}(C) = \limsup_{k\to\infty} \Psi^{*k}(C) \subset E.$$

**Satz 2.25 (Hutchinson, 1981)**
Für $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in K(\mathbb{R}^n)^m$ seien die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(1) Für $i = 1, \ldots, m$ gibt es $r_i \in (0,1)$ mit $|\psi_i(x) - \psi_i(y)| = r_i|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Es gibt eine beschränkte, offene Menge $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass $\psi_1(U), \ldots, \psi_m(U)$ paarweise disjunkt sind und $\Psi^*(U) \subset U$.

Dann gilt für die durch $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$ festgelegte Zahl $s > 0$ und das $\Psi^*$-invariante Kompaktum $E \subset \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $0 < \mu^s(E) < \infty$, das heißt insbesondere $\dim_H(E) = s$. Man nennt $s$ die Ähnlichkeitsdimension von $R$.

**Beweis**
Übung.

■

Konstruktion von Mengen mit Hausdorffdimension $s \in [0, n]$. Für $r \in (0, \frac{1}{2}]$ und für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top \in \{0,1\}^n$ sei $\psi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$\psi_\alpha(x) := r \cdot x + \sum_{k=1}^n (1 - r)\alpha_k e_k,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Nun sei $\Psi = (\psi_\alpha : \alpha \in \{0,1\}^n)$. Setze $U := (0,1)^n$. Für $x \in U$ ist

$$0 < (\psi_\alpha(x))_k = r \cdot x_k + (1-r)\alpha_k < r + (1-r) = 1,$$

das heißt $\Psi(x) \in U$.

Seien $\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$, $\alpha \neq \beta$. Dann gibt es $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|\alpha_k - \beta_k| = 1$. Seien $x, y \in U$. Wegen $0 < r \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} |(\psi_\alpha(x))_k - (\psi_\beta(y))_k| &= |rx_k + (1-r)\alpha_k - ry_k - (1-r)\beta_k| \\ &\geq |(1-r)(\alpha_k - \beta_k)| - |r(x_k - y_k)| \\ &> (1-r) - r \geq 0, \end{aligned}$$

das heißt $(\psi_\alpha(x))_k \neq (\psi_\beta(x))_k$. Ferner gilt $|\psi_\alpha(x) - \psi_\beta(x)| = r|x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nach Satz 2.25 erhält man für die $\Psi^*$-invariante Menge $E$ die Abschätzungen $0 < \mu^s(E) < \infty$.

Genauer: Wegen $r_1 = \ldots = r_{2^n} = r \in (0, \frac{1}{2}]$ ist $1 = \sum_{i=1}^{2^n} r_i^s = 2^n \cdot r^s$ und damit

$$s = -\frac{n \ln 2}{\ln r}.$$

**Beispiele**

(1) Für $n = 1$, $r = \frac{1}{3}$ ist $\dim_H(E^1_{\frac{1}{3}}) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

(2) Für $n = 2$, $r = \frac{1}{4}$ ist $\dim_H(E^2_{\frac{1}{4}}) = 1$.

## 2.5 Hausdorffmaße auf euklidischen Räumen

**Definition**
Das $n$-dimensionale äußere Lebesguemaß $\lambda^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist erklärt durch

$$\begin{aligned} \lambda^n(M) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}(b_i^{(j)} - a_i^{(j)}) : -\infty < a_i^{(j)} < b_i^{(j)} < \infty : \\ i \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n,\ M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i^{(1)}, b_i^{(1)}) \times \cdots \times (a_i^{(n)}, b_i^{(n)})\}. \end{aligned}$$

Bei der Definition kann man sich auf Überdeckungsmengen mit Durchmesser kleiner $\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ beschränken oder halboffene bzw. abgeschlossene Intervalle verwenden. Wie beim Hausdorffmaß zeigt man dann, dass $\lambda^n$ Borel-regulär ist. Ferner ist $\lambda^n$ das einzige Borel-reguläre und translationsinvariante äußere Maß auf $\mathbb{R}^n$, das $[0,1]^n$ den Wert 1 zuordnet. Außerdem gilt

$$\lambda^n = \underbrace{\lambda^1 \otimes \cdots \otimes \lambda^1}_{n\text{-mal}},$$

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$

und

$$\lambda^n(r \cdot M) = r^n \cdot \lambda^n(M)$$

für $r \geq 0$, $M \subset \mathbb{R}^n$.

**Satz 2.26 (Brunn-Minkowski-Ungleichung)**
Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nicht leere Mengen. Dann gilt

$$\lambda^n(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}},$$

wobei $A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$.

**Beispiel**
Sei $B = sA$, $s > 0$.

$$\lambda^n(A+sA)^{\frac{1}{n}} = \lambda^n((1+s)A)^{\frac{1}{n}} = (1+s)\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} = \\ \lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + (s^n\lambda^n(A))^{\frac{1}{n}} = \lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(sA)^{\frac{1}{n}} = \lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}.$$

**Beweis**
Seien zunächst $A = I_1 \times \cdots \times I_n$, $B = J_1 \times \cdots \times J_n$ mit beschränken Intervallen $I_j, J_j \subset \mathbb{R}$ mit nichtleerem Inneren. Dann gilt $A + B = (I_1 + J_1) \times \cdots \times (I_n + J_n)$. Wir setzen $\lambda := \lambda^1$, $u_k = \frac{\lambda(I_k)}{\lambda(I_k+J_k)}$ und $v_k = \frac{\lambda(J_k)}{\lambda(I_k+J_k)}$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(A+B)^{\frac{1}{n}}} &= \frac{(\prod_{k=1}^n \lambda(I_k))^{\frac{1}{n}} + (\prod_{k=1}^n \lambda(J_k))^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^n \lambda(I_k+J_k)^{\frac{1}{n}}} \\
&= \prod_{k=1}^n u_k^{\frac{1}{n}} + \prod_{k=1}^n v_k^{\frac{1}{n}} \\
&= e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\ln u_k} + e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\ln v_k} \\
&\leq e^{\ln(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}u_k)} + e^{\ln(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}v_k)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \underbrace{(u_k+v_k)}_{=1} = 1.
\end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, dass ln konkav und die Exponentialfunktion monoton wachsend ist.

Seien nun $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ endliche Familien von paarweise disjunkten Elementen aus

$$\{[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) : -\infty < a_i < b_i < \infty\ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Sei $A := \bigcup_{P \in \mathcal{G}} P$, $B := \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q$. Durch vollständige Induktion über $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{F}$ wird nun gezeigt, dass die Brunn-Minkowski-Ungleichung für solche Mengen $A, B$ gilt. Der Induktionsanfang ist bereits oben gegeben.

Die Brunn-Minkowski-Ungleichung gelte für $\#\mathcal{G} \geq 1$, $\#\mathcal{F} \geq 1$ mit $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{F} \leq p$ für ein $p \geq 2$. Sei nun $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{F} \leq p+1$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\#\mathcal{G} > 1$). Wähle ein $i \in \{1, \dots, m\}$ und $a \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$A_1 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i < a\}, \qquad A_2 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i \geq a\}$$

jeweils mindestens ein Element aus $\mathcal{G}$ enthalten. Wähle dann $b \in \mathbb{R}$ derart, dass für

$$B_1 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i < b\}, \qquad B_2 \coloneqq \{x = (x_1, \dots, x_n) \in A : x_i \geq b\}$$

gilt:

$$\frac{\lambda^n(B_i)}{\lambda^n(B)} = \frac{\lambda^n(A_i)}{\lambda^n(A)}$$

für $i = 1, 2$.

Sei $\mathcal{G}_i \coloneqq \{P \cap A_i : P \in \mathcal{G},\, P \cap A_i \neq \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_i \coloneqq \{Q \cap B_i : Q \in \mathcal{F},\, Q \cap B_i \neq \emptyset\}$ für $i = 1, 2$. Dann ist $A_i = \bigcup_{P \in \mathcal{G}_i} P$, $B_i = \bigcup_{G \in \mathcal{F}_i} Q$, $\#\mathcal{G}_i < \#\mathcal{G}$ und $\#\mathcal{F}_i \leq \#\mathcal{F}$ für $i = 1, 2$. Folglich gilt die Induktionsannahme für $(A_i, B_i)$, $i = 1, 2$. Die Mengen $A_1 + B_1$ und $A_2 + B_2$ werden durch die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = a + b\}$ getrennt. Also ist wegen

$$A + B = (A_1 \cup A_2) + (B_1 \cup B_2) \supset (A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2)$$

und der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
\lambda^n(A+B) &\geq \lambda^n(A_1 + B_1) + \lambda^n(A_2 + B_2) \\
&\geq \left(\lambda^n(A_1)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B_1)^{\frac{1}{n}}\right)^n + \left(\lambda^n(A_2)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B_2)^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \left(\left(\frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(B)}\lambda^n(B_1)\right)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B_1)^{\frac{1}{n}}\right)^n + \left(\left(\frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(B)}\lambda^n(B_2)\right)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B_2)^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \lambda^n(B_1)\left(\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}} + 1\right)^n + \lambda^n(B_2)\left(\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}} + 1\right)^n \\
&= \underbrace{(\lambda^n(B_1) + \lambda^n(B_2))}_{=\lambda^n(B)} \cdot \left(\frac{\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}}\right)^n \\
&= \left(\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda^n(B)^{\frac{1}{n}}\right)^n,
\end{aligned}$$

d.h. die behauptete Ungleichung im betrachteten Fall.

Seien schließlich $A, B$ nichtleer und kompakt. Setze für $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_p &\coloneqq \{[0, 2^{-p}]^n + 2^{-p} \cdot z : z \in \mathbb{Z}^n\}, \\
A_p &\coloneqq \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{C}_p \\ C \cap A \neq \emptyset}} C, \\
B_p &\coloneqq \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{C}_p \\ C \cap B \neq \emptyset}} C.
\end{aligned}$$

Dann gilt $A_p \searrow A$, $B_p \searrow B$ für $p \to \infty$. Außerdem ist $A+B$ kompakt und $A_p + B_p \searrow A+B$. Es folgt

$$\lambda^n(A+B) = \lim_{p\to\infty} \lambda^n(A_p+B_p) \geq \lim_{p\to\infty} \left(\lambda^n(A_p)^{\frac{1}{n}} + \lambda_n(B_p)^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda_n(B)^{\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Für beliebige beschränkte Mengen folgt die Behauptung nun aus der inneren Regularität des Lebesguemaßes (vgl. Satz 2.2), die allgemeine Aussage erhält man mit Hilfe von Proposition 1.3 a). ■

**Satz 2.27 (Isodiametrische Ungleichung)**
Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^n(A) \leq \frac{\lambda^n(B(0,1))}{2^n} \cdot \operatorname{diam}(A)^n.$$

**Beweis**
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A$ beschränkt und kompakt, da $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A})$ und $\lambda^n(A) \leq \lambda^n(\bar{A})$. Setze $A - A := A + (-A) = \{x - y : x, y \in A\}$. Aus Satz 2.26 folgt

$$\lambda^n(\frac{1}{2}(A-A)) = \frac{1}{2^n}\lambda^n(A+(-A)) \geq \frac{1}{2^n}\left(\lambda^n(A)^{\frac{1}{n}} + \underbrace{\lambda^n(-A)^{\frac{1}{n}}}_{=\lambda^n(A)}\right)^n = \lambda^n(A).$$

Ist $z \in \frac{1}{2}(A-A)$, also $z = \frac{1}{2}(x-y)$ mit $x, y \in A$, so ist $|z| = \frac{1}{2}|x-y| \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A)$. Folglich ist $\frac{1}{2}(A-A) \subset B(0, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(A))$, also

$$\lambda^n(A) \leq \lambda^n(\frac{1}{2}(A-A)) \leq \lambda^n(B(0,\frac{1}{2}\operatorname{diam}(A))) \leq \frac{1}{2^n}\operatorname{diam}(A)^n \cdot \lambda^n(B(0,1)).$$ ■

**Bemerkung:**

- Ein alternativer Beweis der vorangehenden beiden Ungleichungen kann mit Hilfe von Steinersymmetrisierung erfolgen.
- In den obigen beiden Ungleichungen ist es natürlich, nach dem Gleichheitsfall zu fragen. Die Schwierigkeit bei der Beantwortung der Frage hängt dann wesentlich von der betrachteten Mengenklasse ab.

**Definition**
Für $\delta > 0, p > 0$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathscr{H}^p_\delta := \inf\left\{\sum_{A\in\mathcal{A}} \alpha(p)2^{-p}\operatorname{diam}(A)^p \colon \mathcal{A} \in \Omega_\delta(M)\right\}$$

und

$$\mathscr{H}^p(M) := \lim_{\varepsilon\searrow 0} \mathscr{H}^p_\varepsilon(M).$$

Notation: Für $p > 0$ sei

$$\alpha(p) := \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)}.$$

Für $p \in \mathbb{N}$ ist dann $\alpha(p) = \lambda^p(B^p(0,1))$ mit $B^p(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq 1\}$.

**Lemma 2.28**
Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt: $\mathscr{H}^n \ll \lambda^n$.

**Beweis**
Ein allgemeines Argument folgt aus Übungsblatt 6, Nr. 1.

Die überdeckenden Mengen $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ bei der Definition des Maßes $\lambda^n$ können so gewählt werden, dass $\operatorname{diam}(A) < \delta$ für ein vorgegebenes $\delta > 0$ und

$$|a_i - b_i| \leq 2 \min\{|b_j - a_j| : 1 \leq j \leq n\} = 2|b_{i_0} - a_{i_0}|, \ i_0 \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.1}$$

Dann gilt:

$$\lambda^n(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq (b_{i_0} - a_{i_0})^n$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(A)^n &= \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2\right)^{\frac{n}{2}} \\ &\leq 2^n \sqrt{n}^n |b_{i_0} - a_{i_0}|^n \\ &\leq 2^n n^{\frac{n}{2}} \lambda^n(A).\end{aligned}$$

Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(M) = 0$. Sei $\delta > 0$ fest. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, wie oben beschrieben, d.h. $\operatorname{diam}(A_i) < \delta$ und mit (2.1), $M \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ und $\sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i) < \varepsilon$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(A_i)^n \leq 2^n \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \varepsilon$$

also

$$\mathscr{H}^n_\delta(M) \leq \alpha(n) \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \varepsilon.$$

Da $\varepsilon$ beliebig war, ist $\mathscr{H}^n_\delta(M) = 0$. Folglich ist auch $\mathscr{H}^n(M) = 0$. ∎

**Satz 2.29**
In $\mathbb{R}^n$ gilt: $\mathscr{H}^n = \lambda^n = \mathscr{H}^n_\delta$ für $\delta > 0$.

**Beweis**
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U$ mit $M \subseteq U$ und $\lambda^n(U) \leq \lambda^n(M) + \varepsilon$ (vgl. Satz 2.2 c)).

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Kugeln in $\mathbb{R}^n$ mit Radius kleiner als $\frac{\delta}{2}$. Wegen Korollar 2.9 und Übung Nr. 1 auf Blatt 4 gibt es eine abzählbare Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}$ paarweise disjunkter Kugeln in $U$

mit $\lambda^n(M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$. Mit Lemma 2.28 folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_\delta^n(M) &\leq \underbrace{\mathscr{H}_\delta^n(M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)}_{=0} + \mathscr{H}_\delta^n(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\
&\leq \sum_{i\geq 1} \underbrace{\alpha(n) \cdot 2^{-n} \operatorname{diam}(B_i)^n}_{=\lambda^n(B_i)} \\
&= \lambda^n(\bigcup_{i\geq 1} B_i) \\
&\leq \lambda^n(U) \\
&\leq \lambda^n(M) + \varepsilon
\end{aligned}$$

folglich also

$$\mathscr{H}_\delta^n(M) \leq \mathscr{H}^n(M) \leq \lambda^n(M).$$

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Omega_\delta(M)$. Dann ist mit Satz 2.27

$$\lambda^n(M) \leq \lambda^n(\bigcup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} \lambda^n(A_i) \leq \sum_{i\geq 1} \alpha(n) \cdot 2^{-n} \operatorname{diam}(A_i)^n.$$

Wir erhalten

$$\lambda^n(M) \leq \mathscr{H}_\delta^n(M) \leq \mathscr{H}^n(M) \leq \lambda^n(M),$$

das heißt die Behauptung. ■

# 3 Lipschitzfunktionen und Rektifizierbarkeit

## 3.1 Fortsetzbarkeit und Differenzierbarkeit von Lipschitzfunktionen

**Definition**
Seien $(X, d), (\bar{X}, \bar{d})$ metrische Räume, $f : A \to \bar{X}$, $\emptyset \neq A \subseteq X$. Setze

$$\mathrm{Lip}(f) \coloneqq \sup\{\frac{\bar{d}(f(x), f(y))}{d(x, y)} \colon x, y \in A, x \neq y\}.$$

Man nennt $f$ eine *Lipschitz-Abbildung*, falls $\mathrm{Lip}(f) < \infty$.

**Satz 3.1**
Sei $(X, d)$ metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subseteq X$.

(1) Ist $f : A \to \mathbb{R}$ Lipschitzfunktion, so ist

$$g(x) \coloneqq \inf\{f(z) + \mathrm{Lip}(f) \cdot d(x, z) \colon z \in A\} \quad (x \in X)$$

eine Lipschitzfunktion mit $\mathrm{Lip}(g) = \mathrm{Lip}(f)$ und $g|_A = f$.

(2) Ist $f : A \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzfunktion, so gibt es eine Lipschitzfunktion $h : X \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{Lip}(h) \leq \sqrt{n}\,\mathrm{Lip}(f)$ und $h|_A = f$.

**Bemerkung:** (1) Johnson, Lindenstrauss und Schechtman ’86 zeigen, dass im Allgemeinen nicht $\mathrm{Lip}(h) = \mathrm{Lip}(f)$ möglich ist. Siehe auch Lang ’99.

(2) Ist $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzfunktion, so existiert eine Lipschitz-Fortsetzung mit gleicher Lipschitzkonstante (Satz von Kirszbraun ’34, Valentine ’45).

**Beweis**
(1) Sei $f : A \to \mathbb{R}$. Für $x, y \in X$ ist

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \inf\{f(x) + (d(x, y) + d(y, z)) \cdot \mathrm{Lip}(f) \colon z \in A\} \\ &\leq g(y) + \mathrm{Lip}(f) \cdot d(x, y) \end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen also $|g(x) - g(y)| \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot d(x, y)$. Insbesondere ist $\mathrm{Lip}(g) \leq \mathrm{Lip}(f)$. Für $x \in A$ gilt

$$f(x) + \mathrm{Lip}(f) \cdot d(x, x) = f(x) \leq f(z) + \mathrm{Lip}(f) \cdot d(x, z)$$

also $g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, d.h. $g(x) = f(x)$ für $x \in A$. Somit ist $\mathrm{Lip}(g) \geq \mathrm{Lip}(f)$.

(2) Wir haben $f = (f_1, \dots, f_n)^T, f_i : A \to \mathbb{R}, \operatorname{Lip}(f_i) \leq \operatorname{Lip}(f)$. Zu $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt es nach (1) eine Lipschitz-Fortsetzung $h_i : X \to \mathbb{R}$ von $f_i$ mit $\operatorname{Lip}(h_i) = \operatorname{Lip}(f_i)$. Dann ist $h \coloneqq (h_1, \dots, h_n)^T$ eine Lipschitz-Fortsetzung von $f$ und $\operatorname{Lip}(h) \leq \sqrt{n} \operatorname{Lip}(f)$, denn

$$\begin{aligned}
\|h(x) - h(y)\| &= \left( \sum_{i=1}^{n} (h_i(x) - h_i(y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Lip}(h_i)^2 d(x,y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \operatorname{Lip}(f) \cdot (n d(x,y)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{n} \operatorname{Lip}(f) d(x,y)
\end{aligned}$$

■

**Satz 3.2 (Kirszbraun, Valentine)**
Seien $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ und $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ Hilberträume, $\emptyset \neq D \subseteq \mathcal{H}_1$, $f : D \to \mathcal{H}_2$ eine Lipschitz-Abbildung. Dann existiert eine Lipschitz-Fortsetzung $h$ von $f$ mit $\operatorname{Lip}(h) = \operatorname{Lip}(f)$ und $h|_D = f$.

**Beweis (Reich und Simons '05)**
Es genügt, den Fall $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ zu betrachten, sowie $\operatorname{Lip}(f) = 1$.

*Skizze*: $\mathcal{H} \coloneqq \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \coloneqq \{(x,y) \colon x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}, \langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle \coloneqq \langle x_1,x_2 \rangle_1 + \langle y_1,y_2 \rangle_2$, $(x_i,y_i) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Zu $f : D \subseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ betrachte $\tilde{f} : D \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $(x,y) \mapsto (0, f(x))$, usw. (Übung)

Sei nun $f : D \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $\operatorname{Lip}(f) = 1$. Zu $f$ gebe es keine echte 1-Lipschitz-Fortsetzung. Seien

$$\mathcal{H}^2 \coloneqq \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

und

$$\chi : \mathcal{H}^2 \to (-\infty, \infty], \qquad \chi(x,y) \coloneqq \sup\{\|y - f(z)\|^2 - \|x - z\|^2 \colon z \in D\}.$$

**Lemma A:** Es gilt $\chi \geq 0$ und $\{\chi = 0\} = G(f) \coloneqq \{(z, f(z)) \colon z \in D\}$.

**Beweis des Lemmas:** Seien $x, y \in \mathcal{H}$. Ist $x \in D$, so ergibt die Wahl $z \coloneqq x \in D$

$$\chi(x,y) \geq \|y - f(x)\|^2 - \|x - x\|^2 = \|y - f(x)\|^2 \geq 0.$$

Sei nun $x \notin D$. Sei $\tilde{f}$ die Fortsetzung von $f$ auf $D \cup \{x\}$ mit $\tilde{f}(x) \coloneqq y$. Da $\tilde{f}$ keine 1-Lipschitz-Abbildung ist, muss es ein $z \in D$ geben mit

$$\|y - f(z)\|^2 = \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)\|^2 > \|x - z\|^2,$$

also ist $\chi(x,y) > 0$. Damit ist $\chi \geq 0$ und $\{\chi = 0\} \subseteq G(f)$ gezeigt.

Sei nun $(x,y) \in G(f)$, d.h. $x \in D$ und $y = f(x)$. Also ist für $z \in D$

$$\|y - f(z)\|^2 = \|f(x) - f(z)\|^2 \leq \|x - z\|^2.$$

Dies ergibt $\chi(x,y) \leq 0$ und daher $\chi(x,y) = 0$, d.h. $G(f) \subseteq \{\chi = 0\}$.

**Lemma B:** Definiere die Abbildung $\varphi : \mathcal{H}^2 \to (-\infty, \infty]$, $\quad \varphi(x,y) \coloneqq \frac{1}{4}\chi(x+y, x-y) + \langle x, y\rangle$ für $x, y \in \mathcal{H}$.

(1) Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$4 \cdot \varphi(x,y) = \sup\{\|f(z)\|^2 - \|z\|^2 + 2\langle x, z - f(z)\rangle + 2\langle y, z + f(z)\rangle \colon z \in D\}.$$

(2) Für $z \in D$ gilt

$$4 \cdot \varphi(\frac{z+f(z)}{2}, \frac{z-f(z)}{2}) = \|z\|^2 - \|f(z)\|^2.$$

(3) $\varphi$ ist eine eigentliche ($\varphi \not\equiv \infty$), unterhalbstetige, konvexe Funktion mit $\varphi^*(x,y) \geq \varphi(y,x)$ für $x, y \in \mathcal{H}$. Hierbei ist $\varphi^*$ die zu $\varphi$ konjugierte Funktion, die erklärt ist durch

$$\varphi^*(\zeta) \coloneqq \sup\{\langle \zeta, \xi\rangle - \varphi(\xi) \colon \xi \in \mathcal{H}^2\}, \qquad \zeta \in \mathcal{H}^2.$$

**Beweis des Lemmas:**

(1) Für $x, y \in \mathcal{H}, z \in D$ gilt:

$$\begin{aligned} &\|x - y - f(z)\|^2 - \|x + y - z\|^2 \\ =& -4\langle x, y\rangle - 2\langle x - y, f(z)\rangle + 2\langle x + y, z\rangle + \|f(z)\|^2 - \|z\|^2 \\ =& -4\langle x, y\rangle + 2\langle x, z - f(z)\rangle + 2\langle y, z + f(z)\rangle + \|f(z)\|^2 - \|z\|^2. \end{aligned}$$

Bildung des Supremums über $z \in D$ ergibt die Behauptung.

(2) Direkt durch Einsetzen in die Definition erhält man für $z \in D$

$$4\varphi(\frac{z+f(z)}{2}, \frac{z-f(z)}{2}) = \underbrace{\chi(z, f(z))}_{=0} + \langle z + f(z), z - f(z)\rangle = \|z\|^2 - \|f(z)\|^2.$$

(3) Aus der rechten Seite von (1) erkennt man, dass $\varphi$ als Supremum von stetigen, konvexen Funktionen konvex und unterhalbstetig ist. Aus (2) folgt, dass $\varphi \not\equiv \infty$ gilt. Für $x, y \in \mathcal{H}$ und $z \in D$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi^*(x,y) &\geq \left\langle \left(\frac{z+f(z)}{2}, \frac{z-f(z)}{2}\right), (x,y) \right\rangle - \varphi\left(\frac{z+f(z)}{2}, \frac{z-f(z)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\langle x, z + f(z)\rangle + 2\langle y, z - f(z)\rangle + \|f(z)\|^2 - \|z\|^2\right), \end{aligned}$$

wobei zuletzt (2) verwendet wurde. Aufgrund von (1) ist das Supremum über $z \in D$ auf der rechten Seite gerade $\varphi(y,x)$.

**Lemma C:** Sei $\tilde{\mathcal{H}}$ ein Hilbertraum, $h(\zeta) \coloneqq \frac{1}{2}\|\zeta\|^2$, $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$. Sei ferner $\psi : \tilde{\mathcal{H}} \to (-\infty, \infty]$ eine eigentliche, unterhalbstetige konvexe Funktion. Gilt $\psi(\zeta) + h(\zeta) \geq 0$ für alle $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$, dann gibt es ein $v \in \tilde{\mathcal{H}}$ mit $\psi^*(v) + h(v) \leq 0$.

**Beweis des Lemmas:** Nach Voraussetzung gilt $\psi(\zeta) \geq -h(\zeta)$ für $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$. Sei

$$\operatorname{epi}(\psi) \coloneqq \{(\zeta, t) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{R} : \psi(\zeta) \leq t\}, \quad \widetilde{\operatorname{epi}}(-h) \coloneqq \{(\zeta, s) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{R} : s \leq -h(\zeta)\}.$$

Dann sind $\operatorname{epi}(\psi)$, $\widetilde{\operatorname{epi}}(-h)$ abgeschlossene, konvexe, nicht leere Mengen, die keine gemeinsamen inneren Punkt haben. Dann gibt es eine „nicht vertikale“ trennende Hyperebene, das heißt es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in \tilde{\mathcal{H}}$ mit:

$$\psi(\zeta) \geq \langle \zeta, v\rangle + \alpha \geq -h(\zeta)$$

für alle $\zeta \in \tilde{\mathcal{H}}$. Insbesondere

$$\begin{aligned} \psi^*(v) &= \sup\{\langle \zeta, v\rangle - \psi(\zeta) : \zeta \in \tilde{\mathcal{H}}\} \\ &\leq -\alpha \\ &\leq \inf\{\langle \zeta, v\rangle + h(\zeta) : \zeta \in \tilde{\mathcal{H}}\} \\ &\leq \langle -v, v\rangle + \frac{1}{2}\|v\|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\|v\|^2 = -h(v), \end{aligned}$$

also $\psi^*(v) + h(v) \leq 0$.

**Lemma D**: Hat $f : D \to \mathcal{H}$ keine echte 1-Lipschitzfortsetzung, so gilt $D = \mathcal{H}$.

**Beweis des Lemmas:** Sei $h(x, y) := \frac{1}{2}\|(x, y)\|^2$, $(x, y) \in \mathcal{H}^2$. Es gilt für $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} 4(\varphi(x, y) + h(x, y)) &= \chi(x + y, x - y) + 4\langle x, y\rangle + 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ &= \chi(x + y, x - y) + 2\|x + y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen Lemma B gilt somit

$$\varphi^*(y, x) + h(y, x) \geq \varphi(x, y) + h(x, y) \geq 0$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Nach Lemma C gibt es ein $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}^2$ mit $\varphi(y_0, x_0) + h(y_0, x_0) \leq 0$, das heißt $\varphi^*(y_0, x_0) + h(y_0, x_0) = 0 = \varphi(x_0, y_0) + h(x_0, y_0)$ also $\chi(x_0 + y_0, x_0 - y_0) + 2\|x_0 + y_0\|^2 = 0$ und somit $x_0 = -y_0$ und $\chi(0, 2x_0) = 0$. Dies führt wegen Lemma A auf $(0, 2x_0) \in G(f)$, das heißt $0 \in D$.

Sei nun $x_1 \in \mathcal{H}$ beliebig. Definiere $f_{x_1} : D - x_1 \to \mathcal{H}$ durch $f_{x_1}(x) := f(x + x_1)$. Da $f_{x_1}$ keine echte 1-Lipschitzfortsetzung hat, muss $0 \in= D - x_1$ gelten, also $x_1 \in D$ und somit $D = \mathcal{H}$.

**Beweis des Satzes:** Sei $f : D \to \mathcal{H}$ eine 1-Lipschitzabbildung mit $\emptyset \neq D \subset \mathcal{H}$. Betrachte

$$\mathcal{S} := \{(E, g) : D \subset E,\ g|_D = f,\ g \text{ ist 1-Lipschitzabbildung}\}.$$

Durch

$$(E, g) \prec (\tilde{E}, \tilde{g}) :\Longleftrightarrow\ E \subset \tilde{E} \text{ und } \tilde{g}|_E = g$$

für $(E, g), (\tilde{E}, \tilde{g}) \in \mathcal{S}$ wird auf $\mathcal{S}$ eine Ordnung eingeführt, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element in $\mathcal{S}$, etwa $(E, g)$. Dann ist wegen Lemma D aber $E = \mathcal{H}$, das heißt $(\mathcal{H}, g)$ ist die gesuchte 1-Lipschitzfortsetzung von $f$. ■

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar an der Stelle $x \in \mathbb{R}^m$, falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - L(y - x)}{\|y - x\|} = 0.$$

In diesem Fall schreiben wir $Df(x) \coloneqq Df_x \coloneqq L$. Ferner ist

$$D_u f(x) \coloneqq Df_x(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

für $u \in \mathbb{R}^m$.

**Satz 3.3 (Rademacher)**
Jede Lipschitzfunktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist $\lambda^m$-fast-überall differenzierbar.

**Beweis**
Sei stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n = 1$.

Teil 1: $m = 1$ und $f$ ist monoton wachsend. Definiere

$$\nu_f(M) \coloneqq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{(f(b_i) - f(a_i))}_{\geq 0} : a_i < b_i,\ M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\}.$$

Wie im Fall $\lambda^1$ ist $\nu_f \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$. Beachte hierzu $\nu_f(M) \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot \lambda^1(M)$. Dies zeigt auch $\nu_f \ll \lambda^1$ und daher $(\nu_f)_{\lambda^1} = \nu_f$. Das System

$$V \coloneqq \{(x, [a,b]) : x \in [a,b]\}$$

ist eine $\lambda^1$-Vitali-Relation. Also ist $\lambda^1$-fast-überall $\mathbb{D}(\nu_f, \lambda^1, V, \cdot) \in [0, \infty)$ und

$$\mathbb{D}(\nu_f, \lambda^1, V, x) = V\text{-}\lim_{[a,b] \to x} \frac{\nu_f([a,b])}{\lambda^1([a,b])} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x)$$

für $\lambda^1$-fast-alle $x \in \mathbb{R}$.

Teil 2: $m = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht notwendigerweise monoton. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \sup\{\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| : 0 = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = x,\ m \in \mathbb{N}\}, & x \geq 0, \\ -\sup\{\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| : x = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = 0,\ m \in \mathbb{N}\}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Damit ist $g$ monoton wachsend. Für $x > y$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= g(y) + \sup\{\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| : y = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = x,\ m \in \mathbb{N}\} \\ &\leq g(y) + \mathrm{Lip}(f) \cdot \sup\{\sum_{i=1}^m |a_i - a_{i-1}| : y = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = x,\ m \in \mathbb{N}\} \\ &= g(y) + \mathrm{Lip}(f) \cdot |y - x| \end{aligned}$$

also $|g(x) - g(y)| \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot |x - y|$. Außerdem erhalten wir für $x > y$, dass

$$g(x) \geq g(y) + |f(x) - f(y)| \geq g(y) + f(x) - f(y),$$

und somit $(g - f)(x) \geq (g - f)(y)$, das heißt $g - f$ ist ebenfalls monoton wachsend und ebenfalls Lipschitz. Nach Teil 1 sind daher $g$ und $g - f$ $\lambda^1$-fast-überall differenzierbar. Somit auch $f = g - (g - f)$.

**Nebenbemerkung:** Aus dem Beweis folgt zunächst im Fall einer monotonen Lipschitzfunktion

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \nu_f([a,b]) = (\nu_f)_{\lambda^1}([a,b]) \\ &= \int_{[a,b]} \mathbb{D}(\nu_f, \lambda^1, V, x)\lambda(dx) \\ &= \int_{[a,b]} f'(x)\lambda(dx). \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(x)\lambda(dx)$$

erhält man dann sogar für jede Lipschitzfunktion aufgrund der in Teil 2 beschriebenen Zerlegung. Dies ist der Hauptsatz der Differenzial- und Integrationsrechnung für Lipschitzfunktionen.

Teil 3: $m \geq 1$. Sei $e \in S^{m-1}$. Sei $N_e$ die Menge aller $x \in \mathbb{R}^m$, für die $t \mapsto f(x+te)$ in $t = 0$ nicht differenzierbar ist. Dann ist $N_e$ eine Borelmenge und $\mathscr{H}^1(N_e \cap (x + \mathbb{R}e)) = 0$ nach Teil 2. Der Satz von Fubini zeigt $\lambda^m(N_e) = 0$ für beliebige $e \in S^{m-1}$.

Für $\lambda^m$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^m$ existiert dann

$$\nabla f(x) \coloneqq (D_1 f(x), \ldots, D_m f(x)),$$

wobei $D_i f(x) \coloneqq D_{e_i} f(x)$ für die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_m)$ des $\mathbb{R}^m$. Für festes $e \in S^{m-1}$ existiert $D_e f(x)$ für $\lambda^m$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^m$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Für $t > 0$ und $e \in S^{m-1}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} \cdot \varphi(x)\lambda^m(dx) = -\int f(x) \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x-te)}{t}\varphi(x)\lambda^m(dx).$$

Wegen $|\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{supp}(\varphi)}$ und da $f$ Lipschitz-stetig ist, erhält man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} D_e f(x)\varphi(x)\lambda^m(dx) &= -\int f(x) D_e\varphi(x)\lambda^m(dx) \\ &= -\sum_{j=1}^m \langle e, e_j\rangle \cdot \int f(x) \cdot D_j\varphi(x)\lambda^m(dx) \\ &= -\sum_{j=1}^m \langle e, e_j\rangle \cdot (-1) \int_{\mathbb{R}^m} D_{e_j} f(x)\varphi(x)\lambda^m(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \langle e, \nabla f(x)\rangle\varphi(x)\lambda^m(dx). \end{aligned}$$

Hieraus liest man $D_e f(x) = \langle e, \nabla f(x)\rangle$ für $\lambda^m$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^m$ ab, und zwar für ein beliebiges (aber festes) $e \in S^{m-1}$.

Sei $E \subset S^{m-1}$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Dann ist das Komplement der Menge

$$A \coloneqq \bigcap_{e \in E} \{x \in \mathbb{R}^m : D_e f(x) = \langle e, \nabla f(x)\rangle\}$$

eine $\lambda^m$-Nullmenge. Wir zeigen, dass $f$ in $x \in A$ differenzierbar ist. Sei also $x \in A$. Für $t > 0$ und $e \in S^{m-1}$ sei

$$\Delta_t(e) \coloneqq \frac{f(x+te) - f(x)}{t} - \langle e, \nabla f(x) \rangle.$$

Wir zeigen: $\Delta_t(e) \to 0$ für $t \to 0$ gleichmäßig in $e \in S^{m-1}$.

Setze $M \coloneqq 2\max\{\mathrm{Lip}(f), \|\nabla f(x)\|, 1\}$. Dann gilt für $e, \bar{e} \in S^{m-1}$:

$$|\Delta_t(e) - \Delta_t(\bar{e})| \le |\frac{f(x+te) - f(x+t\bar{e})}{t}| + \|\nabla f(x)\| \cdot \|e - \bar{e}\| \le M \cdot \|e - \bar{e}\|.$$

Ferner gilt $\Delta_t(e) \to 0$ für alle $e \in E$, wenn $t \to 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\bar{E} \subset E$ mit $d(e, \bar{E}) \le \frac{\varepsilon}{2M}$ für jedes $e \in S^{m-1}$. Bei fest gewählter Menge $\bar{E}$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|\Delta_t(\bar{e})| \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\bar{e} \in \bar{E}$ und $0 < t \le \delta$. Für $e \in S^{m-1}$ und $0 < t \le \delta$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
|\Delta_t(e)| &\le \min_{\bar{e} \in \bar{E}} \{|\Delta_t(e) - \Delta_t(\bar{e})| + |\Delta_t(\bar{e})|\} \\
&\le \min_{\bar{e} \in \bar{E}} \{M \cdot \|e - \bar{e}\| + \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\Delta_t \to 0$ gleichmäßig für $t \to 0$, und daraus folgt die Behauptung. ∎

## 3.2 Die Flächenformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein $C^1$-Diffeomorphismus. Dann ist für eine beliebige $\lambda^n$-messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$

$$\int_U g \circ f(x) \cdot Jf(x) \lambda^n(dx) = \int_{f(U)} g(y) \lambda^n(dy), \tag{$*$}$$

wobei $Jf(x) \coloneqq |\det(Df(x))|$.

**Ansätze für Verallgemeinerungen:**

- Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ oder sogar allgemeiner $f : M \to N$ mit gewissen $m$-dimensionalen bzw. $n$-dimensionalen Mengen $M, N$.
- $f$ nicht notwendig injektiv.
- $f$ nicht notwendig differenzierbar, aber Lipschitz.

Ist speziell $A \subset U$ eine Borelmenge und $g(y) \coloneqq \mathbb{1}_{f(A)}(y)$, dann geht $(*)$ über in

$$\int_A Jf(x) \lambda^n(dx) = \lambda^n(f(A)).$$

Für eine lineare Abbildung ist dies fast trivial. Umformulierung ergibt

$$\int_A Jf(x)\lambda^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \#\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) \lambda^n(dy),$$

wobei

$$\#\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1, & y \in f(A), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

da $f$ injektiv ist.

**Beispiel**
Wie sieht es dagegen in der folgenden Situation aus? Es seien $n = 1$, $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1 - t^2$. Es ist $f'(t) = -2t$ und damit $Jf(t) = 2|t|$.

$$\int_{[-1,1]} Jf(y)dy = \int_{[-1,1]} 2|t|dt = 2 \cdot d \int_0^1 tdt = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.$$

Aber es ist $f([-1,1]) = [0,1]$ und $\int_{f(A)} dt = \lambda(f(A)) = 1$. Man beachte jedoch

$$\int \underbrace{\#([-1,1] \cap f^{-1}(\{t\}))}_{= \begin{cases} 2, & t \in (0,1) \\ 1, & t \in \{0,1\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} = 2 \cdot 1.$$

**Definition**
Eine lineare Abbildung $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt lineare Isometrie, falls

$$\langle \varrho(x), \varrho(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.

**Bemerkungen:** (1) Eine lineare Isometrie ist injektiv und $\|\varrho(x) - \varrho(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.

(2) $\mathscr{H}^t(\varrho(A)) = \mathscr{H}^t(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}^m$ und $t \geq 0$.

**Lemma 3.4**
Sei $m \leq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es eine symmetrische lineare Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und eine lineare Isometrie $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $f = \varrho \circ \sigma$. Ist $(a_1, \ldots, a_m)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$, so gilt

$$[\![f]\!] := |\det(\sigma)| = \sqrt{\det(\langle f(a_i), f(a_j)\rangle)_{i,j=1,\ldots,m}},$$

und $\mathscr{H}^m(f(A)) = [\![f]\!] \cdot \mathscr{H}^m(A)$ für $A \subset \mathbb{R}^m$.

**Beweis**
Wir definieren eine Hilfsabbildung $\varphi = f^* \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Sie ist symmetrisch, da

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle f^* \circ f(x), y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle,$$

und $\varphi$ ist positiv semidefinit. Somit existiert eine Orthonormalbasis $a_1, \ldots, a_m$ aus Eigenvektoren von $\varphi$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$. Wir setzten $b_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot f(a_i)$, falls $\lambda_i \neq 0$. Beachte dabei

$$\langle b_i, b_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \cdot \langle f(a_i), f(a_j) \rangle = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \cdot \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij},$$

falls $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$. Wir ergänzen diese Vektoren zu einer Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_m)$ des $\mathbb{R}^m$.

Wir definieren nun $\sigma(a_i) := \sqrt{\lambda_i} \cdot a_i$, $i = 1, \ldots, m$. $\sigma$ ist symmetrisch, da $(a_1, \ldots, a_m)$ eine Orthonormalbasis ist. Wir definieren weiter $\varrho(a_i) := b_i$, $i = 1 \ldots, m$. $\varrho$ ist eine lineare Isometrie. Nun gilt für $\lambda_i \neq 0$

$$\varrho \circ \sigma(a_i) = \varrho(\sqrt{\lambda_i} \cdot a_i) = \sqrt{\lambda_i} \cdot b_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot f(a_i) = f(a_i),$$

und für $\lambda_i = 0$ ist $\varrho \circ \sigma(a_i) = 0$ und es gilt

$$\langle f(a_i), f(a_i) \rangle = \langle \varphi(a_i), a_i \rangle = \langle \lambda_i a_i, a_i \rangle = 0$$

also $f(a_i) = 0$.

Seien $\varrho$, $\sigma$ und $(a_1, \ldots, a_m)$ wie in den Voraussetzungen des Lemmas gewählt:

$$\langle f(a_i), f(a_j) \rangle = \langle \varrho \circ \sigma(a_i), \varrho \circ \sigma(a_j) \rangle = \langle \sigma(a_i), \sigma(a_j) \rangle.$$

Sei $S$ die beschreibende Matrix von $\sigma$ bezüglich $(a_1, \ldots, a_m)$. Dann:

$$\begin{aligned}(\det(\sigma))^2 &= \det(S^\top) \cdot \det(S) = \det(S^\top \cdot S) = \\ &= \det((\langle \sigma(a_i), \sigma(a_j) \rangle)_{i,j=1,\ldots,m}) \\ &= \det((\langle f(a_i), f(a_j) \rangle)_{i,j=1,\ldots,m}).\end{aligned}$$

Ferner gilt für $A \subset \mathbb{R}^m$:

$$\mathscr{H}^m(f(A)) = \mathscr{H}^m(\varrho \circ \sigma(A)) = \mathscr{H}^m(\sigma(A)) = |\det(\sigma)| \cdot \mathscr{H}^m(A) = [\![f]\!] \cdot \mathscr{H}^m(A). \qquad \blacksquare$$

**Bemerkungen:** (1) Sei

$$\Lambda(n, m) := \{\alpha : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\} : \alpha \text{ ist streng monoton wachsend}\}$$

für $m \leq n$. Für $\alpha \in \Lambda(n, m)$ sei $p_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$p_\alpha((x_1, \ldots, x_n)^\top) := (x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(m)})^\top$$

erklärt. Dann gilt

$$[\![f]\!]^2 = \sum_{\alpha \in \Lambda(n,m)} \det(p_\alpha \circ f)^2.$$

Dies ist der verallgemeinerte Satz des Pythagoras.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear mit $f = \varrho \circ \sigma$ und $a_1, \ldots, a_m$ eine Orthonormalbasis. Dann ist

$$\begin{aligned}[\![f]\!] &= \det(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)) \\ &\leq \|\sigma(a_1)\| \cdot \cdots \cdot \|\sigma(a_m)\| \\ &= \|f(a_1)\| \cdot \cdots \cdot \|f(a_m)\|.\end{aligned}$$

**Proposition 3.5**
Seien $m \leq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Dann ist die Abbildung

$$y \mapsto \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))$$

eine $\mathscr{H}^m$-messbare Abbildung $\mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) \leq \operatorname{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(A).$$

**Bemerkung:** Eine entsprechende Aussage gilt allgemein für $f : (X, d) \to (Y, \bar{d})$, wobei $(X, d)$ ein polnischer, das heißt separabler, vollständiger metrischer Raum ist.

**Beweis**
Betrachte Folgen von Zerlegungen für $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i &:= \{[0, 2^{-i})^m + 2^i \cdot z : z \in \mathbb{Z}^m\}, \\ \mathcal{B}_i &:= \{C \cap A : C \in \mathcal{C}_i\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine abzählbare disjunkte Zerlegung des $\mathbb{R}^m$ mit

$$\sup\{\operatorname{diam}(C) : C \in \mathcal{C}_i\} \to 0$$

für $i \to \infty$, und ferner ist jedes $C \in \mathcal{C}_i$ disjunkte Vereinigung von gewissen Mengen $\tilde{C} \in \mathcal{C}_{i+1}$.

Zu $B \in \mathcal{B}_i$ existiert eine Folge $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen mit $K_j \subset B$ und $\mathscr{H}^m(B \setminus K_j) < \frac{1}{j}$ und damit $\mathscr{H}^m(B \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) = 0$. Wegen

$$f(B) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j) = f(B) \setminus f(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) \subset f(B \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j)$$

folgt

$$0 \leq \mathscr{H}^m(f(B) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j)) \leq \operatorname{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(B \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) = 0.$$

Da $f(K_j) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$ und $f(B) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j) \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$ folgt $f(B) \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$. Wegen

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_i} \mathbb{1}_{f(B)} \nearrow \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))$$

für $i \to \infty$ folgt die Messbarkeitsbehauptung.

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{i\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}_i} \mathbb{1}_{f(B)}(y)\mathscr{H}^m(dy) \\ &= \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{B\in\mathcal{B}_i} \mathbb{1}_{f(B)}(y)\mathscr{H}^m(dy) \\ &= \lim_{i\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}_i} \underbrace{\mathscr{H}^m(f(B))}_{\leq \mathrm{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(B)} \\ &\leq \mathrm{Lip}(f)^m \cdot \lim_{i\to\infty} \mathscr{H}^m(\underbrace{\bigcup_{B\in\mathcal{B}_i} B}_{=A}) \\ &= \mathrm{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(A).\end{aligned}$$

■

**Lemma 3.6**
Ist $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig, so ist

$$\{x \in \mathbb{R}^m : f \text{ ist in } x \text{ differenzierbar}\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m).$$

**Beweis**
Übung ■

**Definition**
Sei $m \leq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^m$. Dann heißt

$$Jf(x) := [\![Df_x]\!]$$

die Jakobische (Jakobi-Determinante) von $f$ in $x$.

Unser Ziel im folgenden ist es, $\{x \in \mathbb{R}^m : Jf(x) \neq 0\}$ in Teile zu zerlegen, auf denen $f$ injektiv ist und auf denen $Df_x$ kontrolliert ist.

**Lemma 3.7**
Sei $m \leq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Sei $t > 1$. Dann existiert eine abzählbare Borel-Überdeckung $\mathcal{E}$ der Menge

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ ist differenzierbar in } x,\, Jf(x) \neq 0\}$$

derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt:

(1) $f|_E$ ist injektiv.

(2) Es existiert ein Automophismus $\tau_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit

   (i) $\mathrm{Lip}(f|_E \circ \tau_E^{-1}) \leq t$ und $\mathrm{Lip}(\tau_E \circ (f|_E)^{-1}) \leq t$.

(ii) $t^{-1} \cdot \|\tau_E(v)\| \leq \|Df_b(v)\| \leq t \cdot \|\tau_E(v)\|$ für alle $b \in B$ und $v \in \mathbb{R}^m$.

(iii) $t^{-m} \cdot |\det(\tau_E)| \leq J(f)|_E \leq t^m \cdot |\det(\tau_E)|$.

**Beweis**
Sei $\varepsilon > 0$ mit $t^{-1} + \varepsilon < 1 < t - \varepsilon$. Wähle abzählbare dichte Teilmengen $C \subset \mathbb{R}^m$ und $T \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Für $c \in C$, $\tau \in T$ und $i \in \mathbb{N}$ sei $E(c, \tau, i)$ die Menge aller $b \in B \cap B(c, \frac{1}{i})$, für die gilt:

(a) $(t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau(v)\| \leq \|Df_b(v)\| \leq (t - \varepsilon) \cdot \|\tau(v)\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ und

(b) $\|f(a) - f(b) - Df_b(a - b)\| \leq \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\|$ für alle $a \in B(c, \frac{1}{i})$.

Sei $b \in E(c, \tau, i)$ und $a \in B(c, \frac{1}{i})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f(a) - f(b)\| &\leq \|Df_b(a - b)\| + \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &\leq (t - \varepsilon)\|\tau(a - b)\| + \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &= t \cdot \|\tau(a - b)\| = t \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|f(a) - f(b)\| &\geq \|Df_b(a - b)\| - \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &\geq (t^{-1} + \varepsilon)\|\tau(a - b)\| - \varepsilon \cdot \|\tau(a - b)\| \\ &= t^{-1} \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\|. \end{aligned}$$

Zusammen erhält man für $a, b \in E(c, \tau, \frac{1}{i})$:

$$t^{-1} \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\| \leq \|f(a) - f(b)\| \leq t \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\|.$$

Dies zeigt (1). Für $a, b \in E(c, \tau, i)$ gilt also

$$\|f \circ \tau^{-1}(\tau(a)) - f \circ \tau^{-1}(\tau(b))\| \leq t \cdot \|\tau(a) - \tau(b)\|,$$

das heißt

$$\mathrm{Lip}(\underbrace{f|_{E(c,\tau,i)} \circ \tau^{-1}}_{\text{Abbildung auf } \tau(E(c,\tau,i))}) \leq t$$

sowie

$$\|\tau \circ f^{-1}(f(a)) - \tau \circ f^{-1}(f(b))\| \leq t \cdot \|f(a) - f(b)\|,$$

das heißt

$$\mathrm{Lip}(\underbrace{\tau \circ (f|_{E(c,\tau,i)})^{-1}}_{\text{Abbildung auf } f(E(c,\tau,i))}) \leq t.$$

Sei $b \in E(c, \tau, i)$. Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasis. Da $Df_b$ injektiv ist, ist in der Zerlegung $Df_b = \rho \circ \sigma$, wobei $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ symmetrisch und $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Isometrie ist, die

Abbildung $\sigma$ ein Automophismus. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned}
Jf(b) &= |\det(\sigma)| = |\det(\sigma \circ \tau^{-1})| \cdot |\det(\tau)| \\
&= |\det(\sigma \circ \tau^{-1}(e_1), \ldots, \sigma \circ \tau^{-1}(e_m))| \cdot |\det(\tau)| \\
&\leq \prod_{i=1}^{m} \|\sigma \circ \tau^{-1}(e_i)\| \cdot |\det(\tau)| \\
&= \prod_{i=1}^{m} \underbrace{\|Df_b(\tau^{-1}(e_i))\|}_{\leq t \cdot \|\tau(\tau^{-1}(e_i))\| = t} \cdot |\det(\tau)| \\
&\leq t^m \cdot |\det(\tau)|.
\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
(Jf(b))^{-1} &= |\det(\sigma)|^{-1} = |\det(\sigma^{-1})| = |\det(\tau \circ \sigma^{-1})| \cdot |\det(\tau^{-1})| \\
&\leq |\det(\tau \circ \sigma^{-1}(e_1), \ldots, \tau \circ \sigma^{-1}(e_m))| \cdot |\det(\tau)|^{-1} \\
&\leq \prod_{i=1}^{m} \|\tau \circ \sigma^{-1}(e_i)\| \cdot |\det(\tau)|^{-1} \\
&\leq \prod_{i=1}^{m} t \cdot \|Df_b(\sigma^{-1}(e_i))\| \cdot |\det(\tau)|^{-1} \\
&= t^m \cdot |\det(\tau)|^{-1},
\end{aligned}$$

das heißt

$$Jf(b) \geq t^{-1} \cdot |\det(\tau)|.$$

Zu zeigen ist noch, dass die Mengen $E(c, \tau, i)$ mit $c \in C, \tau \in T, i \in \mathbb{N}$ die Menge $B$ überdecken. Sei hierzu $b \in B$. Dann ist $Df_b = \varrho \circ \sigma$ mit $\varrho, \sigma$ wie oben. Wähle $\delta > 0$ so, dass

$$(1 - \delta \cdot \|\sigma^{-1}\|)^{-1} < t - \varepsilon \quad \text{und} \quad 1 + \delta \cdot \|\sigma^{-1}\| < (t^{-1} + \varepsilon)^{-1}$$

und $\tau \in T$ so, dass $\|\sigma - \tau\| < \delta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\tau \circ \sigma^{-1}\| &= \|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} + \tau \circ \sigma^{-1} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\| \\
&\leq 1 + \|\tau \circ \sigma - \sigma \circ \sigma^{-1}\| \\
&= 1 + \|(\tau - \sigma) \circ \sigma^{-1}\| \\
&\leq 1 + \|\tau - \sigma\| \cdot \|\sigma^{-1}\| \\
&< 1 + \delta \cdot \|\sigma^{-1}\| \\
&< (t^{-1} + \varepsilon)^{-1}
\end{aligned}$$

und ähnlich folgt

$$\begin{aligned}\|\sigma \circ \tau^{-1}\| &\le 1 + \|\sigma - \tau\| \cdot \|\tau^{-1}\| \\ &< 1 + \delta \cdot \|\tau^{-1}\| \\ &= 1 + \delta \cdot \|\sigma^{-1} \circ \sigma \circ \tau^{-1}\| \\ &\le 1 + \delta \cdot \|\sigma^{-1}\| \cdot \|\sigma \circ \tau^{-1}\|\end{aligned}$$

und damit

$$\|\sigma \circ \tau^{-1}\| \le (1 - \delta \cdot \|\sigma^{-1}\|)^{-1} < t - \varepsilon.$$

Wähle $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f(a) - f(b) - Df_b(a-b)\| \le \varepsilon \cdot \frac{\|a-b\|}{\mathrm{Lip}(\tau^{-1})}$$

für alle $a \in B(b, \frac{2}{i})$ und wähle $c \in C$ mit $\|c - b\| < \frac{1}{i}$. Für $v \in \mathbb{R}^m$ gilt dann

$$\begin{aligned}(t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau(v)\| &= (t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau \circ \sigma^{-1}(\sigma(v))\| \\ &\le (t^{-1} + \varepsilon) \cdot \|\tau \circ \sigma^{-1}\| \cdot \|\sigma(v)\| \\ &\le \|\sigma(v)\| \\ &= \|Df_b(v)\|\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|Df_b(v)\| = \|\sigma(v)\| &= \|\sigma \circ \tau^{-1}(\tau(v))\| \\ &\le \|\sigma \circ \tau^{-1}\| \cdot \|\tau(v)\| \\ &\le (t - \varepsilon)\|\tau(v)\|.\end{aligned}$$

Dies zeigt Bedingung (a).

Für $a \in B(c, \frac{1}{i}) \subset B(b, \frac{2}{i})$ ist

$$\begin{aligned}\|f(a) - f(b) - Df_b(a-b)\| &\le \varepsilon \cdot \frac{\|a-b\|}{\mathrm{Lip}(\tau^{-1})} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{\|\tau^{-1}(\tau(a)) - \tau^{-1}(\tau(b))\|}{\mathrm{Lip}(\tau^{-1})} \\ &\le \varepsilon \cdot \|\tau(a-b)\|.\end{aligned}$$

Dies zeigt Bedingung (b). Somit ist eine Überdeckung gegeben.

Nun kommen wir zur Borel-Messbarkeit der überdeckenden Mengen.

Sei $M$ die Menge aller $x \in \mathbb{R}^m$, für die $f$ in $x$ differenzierbar ist. Nach einer Übungsaufgabe, ist diese Menge messbar. Sei $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Da $\tau$ und $Df_b(\cdot)$ stetig sind, gilt

$$\{b \in M: \text{ (a) gilt in } b\} = \underbrace{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{b \in M : (t^{-1}+\varepsilon)\|\tau(x_j)\| \le \|Df_b(x_j)\| \le (t-\varepsilon)\|\tau(x_j)\|\}}_{\in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)}$$

und

$$\{b \in M: \text{ (b) gilt in } b\} = \underbrace{\bigcap_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ x_j\in B(c,1/i)}} \{b \in M : \|f(x_j) - f(b) - Df_b(x_j - b)\| \le \varepsilon\|\tau(x_j - b)\|\}}_{\in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)}.$$

Zusammen ergibt dies die behauptete Messbarkeitsaussage. ■

**Satz 3.8**
Sei $m \le n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $A \subset \mathbb{R}^m$ eine $\lambda^m$-messbare Menge. Dann gilt

$$\int_A Jf(x)\lambda^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy).$$

**Beweis**
Die Abbildung $y \mapsto \#(A\cap f^{-1}(\{y\}))$ ist messbar, falls $A$ eine Borelmenge ist. Zu der gegebenen $\mathscr{H}^m$-messbaren Menge $A$ gibt es eine Borelmenge $A'$ mit $A \subset A'$ und $\mathscr{H}^m(A' \setminus A) = 0$. Nach Proposition 3.5 ist $y \mapsto \#((A' \setminus A) \cap f^{-1}(\{y\}))$ $\mathscr{H}^m$ fast überall die Nullfunktion und damit $\mathscr{H}^m$-messbar. Hieraus folgt die Messbarkeit der Abbildung $y \mapsto \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))$ allgemein.

Aufgrund des Satzes von Rademacher, Proposition 3.5, und der Regularität des Lebesguemaßes kann man annehmen, dass $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ und $f$ in jedem Punkt von $A$ differenzierbar ist. Ferner kann $\lambda^m(A) < \infty$ angenommen werden.

Fall (a): $A \subset \{x \in \mathbb{R}^m : Jf(x) \neq 0\}$. Sei $t > 1$ beliebig. Wähle eine Borel-Überdeckung $\mathcal{E}$ von $B := \{x \in \mathbb{R}^m : Jf(x) \neq 0\}$ wie in Lemma 3.7. Sei $\mathcal{G}$ eine abzählbare Zerlegung von $A$ derart, das für jedes $G \in \mathcal{G}$ gilt: $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ und $G \subset E$ für ein $E \in \mathcal{E}$ mit $\tau_E$ wie in Lemma 3.7. Dann folgt

$$\begin{aligned}
t^{-2m}\cdot \mathscr{H}^m(f(G)) &= t^{-2m}\cdot \mathscr{H}^m(((f|_E)\circ \tau_E^{-1})(\tau_E(G)))\\
&\le t^{-2m}\cdot \underbrace{\operatorname{Lip}((f|_E)\circ\tau_E^{-1})^m}_{\le t^m}\cdot \mathscr{H}^m(\tau_E(G))\\
&\le t^{-m}\cdot \mathscr{H}^m(\tau_E(G))\\
&= t^{-m}\cdot |\det(\tau_E)|\cdot \mathscr{H}^m(G)\\
&= \int_G t^{-m}|\det(\tau_E)|d\lambda^m\\
&\le \int_G Jf d\lambda^m.
\end{aligned}$$

Die Abschätzungen lassen sich nun in analoger Weise fortsetzen:

$$\begin{aligned}\int_G Jf d\lambda^m &\leq \int_G t^m |\det(\tau_E)| d\lambda^m \\ &= t^m \cdot |\det(\tau_E)| \cdot \mathscr{H}^m(G) \\ &= t^m \cdot \mathscr{H}^m(\tau_E(G)) \\ &= t^m \cdot \mathscr{H}^m(\tau_E \circ (f|_E)^{-1}(f|_E(G))) \\ &\leq t^m \cdot \mathrm{Lip}(\tau_E \circ (f|_E)^{-1})^m \cdot \mathscr{H}^m(f(G)) \\ &\leq t^{2m} \cdot \mathscr{H}^m(f(G)).\end{aligned}$$

Da $f|_G$ für alle $G \in \mathcal{G}$ injektiv ist, erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\sum_{G\in\mathcal{G}} \mathscr{H}^m(f(G)) &= \sum_{G\in\mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{f(G)} d\mathscr{H}^m \\ &= \sum_{G\in\mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^n} \#(G \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy)\end{aligned}$$

und hiermit

$$\begin{aligned}t^{-2m} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) &\leq \int_A Jf d\lambda^m \\ &\leq t^{2m} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy).\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $t > 1$ und somit folgt die Gleichheit.

Fall (b): $A \subset \{x : Jf(x) = 0\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann werden Lipschitzabbildungen $g, p$ erklärt;

$$\begin{aligned}&p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, && (y, z) \mapsto y \\ &g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, && x \mapsto (f(x), \varepsilon \cdot x).\end{aligned}$$

Dann ist $f = p \circ g$. Für $x \in A$ gilt $Dg_x(v) = (Df_x(v), \varepsilon \cdot v)$ für $v \in \mathbb{R}^m$. Somit ist $Dg_x$ injektiv und daher $Jg(x) \neq 0$ für $x \in A$. Da $Jf(x) = 0$ für $x \in A$ ist $q \coloneqq \dim(\mathrm{Kern}(Df_x)) \geq 1$. Sei $(b_1, \dots, b_q)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Kern}(Df_x)$ und $(b_1, \dots, b_m)$ eine Ergänzung zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$. Somit gilt

$$\|Dg_x(b_i)\| = \|(0, \varepsilon \cdot b_i)\| = \varepsilon$$

für $i = 1, \dots, q$ und

$$\|Dg_x(b_j)\| = \|(Df_x(b_j), \varepsilon \cdot b_j)\| \leq \mathrm{Lip}(f) + \varepsilon$$

für $j = q+1, \dots, m$. Nach Fall $(a)$ ist

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^m(f(A)) &= \mathscr{H}^m(p \circ g(A)) \\ &\leq \mathscr{H}^m(g(A)) = \int_A Jg d\lambda^m \\ &\leq \varepsilon^q \cdot (\mathrm{Lip}(f) + \varepsilon)^{m-q} \cdot \lambda^m(A).\end{aligned}$$

Dies zeigt $\mathscr{H}^m(f(A)) = 0$ und somit $\#(A \cap f^{-1}(\{y\})) = 0$ für $\mathscr{H}^m$-fast alle $y \in \mathbb{R}^n$. Dies zeigt die Gleichheit auch in diesem Fall. ■

**Korollar 3.9**
Seien $m \le n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren $\lambda^m$-Integral existiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} h(x) Jf(x)\, \lambda^m(dx) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} h(x) \right) \mathscr{H}^m(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(\{y\})} h(x)\, \mathscr{H}^0(dx)\, \mathscr{H}^m(dy).\end{aligned}$$

**Beweis**
Übung ■

*Anwendung:* Sei $m \le n$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sei $C^1$ und injektiv. Dann gilt:

$$\mathscr{H}^m(f(A)) = \int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_A \sqrt{g(x)}\, \mathscr{H}^m(dx)$$

mit $g(x) = \det((\langle D_i f(x), D_j f(y) \rangle)_{i,j=1,\dots,m})$. Ist $f$ nicht injektiv, so nennt man

$$\int_{\mathbb{R}^n} \#(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^m(dy) \quad \ge \mathscr{H}^m(f(A))$$

die Hausdorff-Fläche von $f|_A$.

## 3.3 Die Koflächenformel

Sei jetzt $m \ge n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Sei ferner $g : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Abbildung. Dann besagt die Koflächenformel, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(\{y\})} g(x)\, \mathscr{H}^{m-n}(dx)\, \mathscr{H}^n(dy)$$

gilt. Die Jakobische $Jf$ von $f$ wird nachfolgend erklärt. Im Spezialfall $g(x) = \mathbb{1}_A(x)$ mit einer $\mathscr{H}^m$-messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ besagt dies gerade

$$\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).$$

Aus diesem Spezialfall erhält man umgekehrt die allgemeine Aussage durch die üblichen Routineargumente.

**Beispiel**
Für die Abbildung $d : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$, $x \mapsto \|x\|$ gilt $d^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \|x\| = r\}$. Die Berechnung der Jakobischen $Jd$ von $d$ erfolgt in den Übungen.

**Lemma 3.10**
Sei $k \geq m \geq n$, $A \subset \mathbb{R}^k$ und $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Abbildung. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \;\leq\; \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \operatorname{Lip}(f)^m \cdot \mathscr{H}^m(A).$$

**Beweis**
Für $j \in \mathbb{N}$ gilt $\mathscr{H}^m_{\frac{1}{j}}(A) \leq \mathscr{H}^m(A) \leq \mathscr{H}^m(A) + \frac{1}{j}$. Dann existiert eine Folge $\mathcal{B}_j \in \bar{\Omega}_{\frac{1}{j}}(A)$ mit

$$\mathscr{H}^m_{\frac{1}{j}}(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m)}{2^m} \operatorname{diam}(B)^m \leq \mathscr{H}^m(A) + \frac{1}{j}.$$

Für $B \in \mathcal{B}_j$ ist $f(B)$ kompakt, also Borelmenge. Erkläre

$$g_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \cdot \operatorname{diam}(B)^{m-n} \cdot \mathbb{1}_{f(B)}(y).$$

Insbesondere ist $g_B$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Funktion und

$$\operatorname{diam}(B \cap f^{-1}(\{y\})) \leq \operatorname{diam}(B) \cdot \mathbb{1}_{f(B)}(y) \leq \frac{1}{j}.$$

Es folgt

$$\mathscr{H}^{m-n}_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}(\{y\})) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(B \cap f^{-1}(\{y\}))^{m-n} \leq \sum_{B \in \mathcal{B}_j} g_B(y).$$

Mit dem Lemma von Fatou und dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man nun

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) &= \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \lim_{j\to\infty} \mathscr{H}^{m-n}_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} g_B(y)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} g_B(y)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \int_{\mathbb{R}^n} g_B(y)\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(B)^{m-n} \cdot \mathscr{H}^n(\underbrace{f(B)}_{\subset \mathbb{R}^n}).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der isodiametrichen Ungleichung ergibt dies

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}^* \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) &\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(B)^{m-n} \cdot \frac{\alpha(n)}{2^n} \operatorname{diam}(f(B))^n \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \operatorname{Lip}(f)^n \cdot \underbrace{\sum_{B\in\mathcal{B}_j} \frac{\alpha(m)}{2^m} \operatorname{diam}(B)^m}_{\leq \mathscr{H}^m(A)+\frac{1}{j}} \\ &\leq \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \operatorname{Lip}(f)^n \mathscr{H}^m(A).\end{aligned}$$

■

**Lemma 3.11**
Sei $m \geq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Abbildung. Sei ferner $A \subset \mathbb{R}^m$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Menge. Dann gilt:

(1) $A \cap f^{-1}(\{y\})$ ist $\mathscr{H}^{m-n}$-messbar für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $y \mapsto \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))$ ist $\mathscr{H}^n$-messbar.

**Beweis**
Sei $A$ kompakt. Dann ist $A \cap f^{-1}(\{y\})$ kompakt, also Borelmenge. Sei $t > 0$ beliebig. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $U_j$ die Menge aller $y \in \mathbb{R}^n$, für die es eine endliche, offene Überdeckung $\mathcal{G}$ von $A \cap f^{-1}(\{y\})$ gibt mit $\operatorname{diam}(G) \leq \frac{1}{j}$ $(G \in \mathcal{G})$ und

$$\sum_{G\in\mathcal{G}} \frac{\alpha(m-n)}{2^{m-n}} \operatorname{diam}(G)^{m-n} \leq t + \frac{1}{j}.$$

Dann bestätigt man leicht

$$\{y \in \mathbb{R}^n \colon \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\})) \leq t\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} U_j.$$

Wir zeigen, dass $U_j$ eine offene Menge und damit eine Borelmenge ist. Sei hierzu $y \in U_j$ und $\mathcal{G}$ eine offene, endliche Überdeckung von $A\cap f^{-1}(\{y\})$. Da $A$ kompakt ist, ist $A\setminus\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$ kompakt und somit auch $f(A \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G)$. Daher ist $f(A \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \subset \mathbb{R}^n)^c$ offen.

*Behauptung*: Für $z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$z \in f(A \setminus \bigcup_{G\in\mathcal{G}})^c \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(\{z\}) \subseteq \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G.$$

Dies ist leicht einzusehen.

Eine zweimalige Anwendung der Behauptung zeigt $y \in f(A\cap\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G)^c \subseteq U_j$. Also ist $U_j$ offen.

Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ nun eine beliebige $\mathscr{H}^m$-messbare Menge. Es genügt, $\mathscr{H}^m(A) < \infty$ zu betrachten. Zu $A$ gibt es eine aufsteigende Folge kompakter Mengen $A_i \subset A$ mit $\mathscr{H}^m(A \setminus \bigcup_{i\geq 1} A_i) = 0$. Lemma 3.10 zeigt

$$\mathscr{H}^{m-n}((A \setminus \bigcup_{i\geq 1} A_i) \cap f^{-1}(\{y\})) = 0$$

für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $y \in \mathbb{R}^n$. Hieraus folgt (1) und wegen

$$\mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\})) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{H}^{m-n}(A_i \cap f^{-1}(\{y\}))$$

auch (2). ∎

*Notation:* Zu $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist $f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die adjungierte Abbildung, die durch die Bedingung $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ festgelegt ist.

**Lemma 3.12**
Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $m \geq n$. Dann gilt:

(1) $f^{**} = f$.

(2) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \;\Rightarrow\; (g \circ f)^* = f^* \circ g^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$.

(3) Ist $\varrho \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ orthogonal, so gilt $\varrho^* \circ \varrho = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\mathrm{Bild}(\varrho) = \mathrm{Kern}(\varrho^*)^\perp$.

(4) Zu $f$ existiert $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symmetrisch und $\varrho \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ orthogonal mit $f = \sigma \circ \varrho^*$.

(5) Ist $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, so gilt $[\![h]\!] = [\![h^*]\!] = |\det(h)| = |\det(h^*)|$.

(6) Setze $[\![f]\!] := [\![f^*]\!]$. Dann gilt:

   (a) $[\![f]\!] = 0$, falls $\dim(f(\mathbb{R}^m)) < n$.

   (b) Ist $\dim(f(\mathbb{R}^m)) = n$ und $(b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Kern}(f)^\perp$, so gilt:

$$[\![f]\!] = |\det(f(b_1), \dots, f(b_n))|.$$

(7) Ist $(a_1, \dots, a_n)$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$, so gilt:

$$[\![f]\!] = \sqrt{\det(f \circ f^*)} = \sqrt{\det(\langle f^*(a_i), f^*(a_j)\rangle_{i,j=1,\dots,n})}.$$

**Beweis**
Übung ∎

**Lemma 3.13**
Sei $m \leq n$ und seien $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-Abbildungen. Sei ferner $E \subset \{x \in \mathbb{R}^m : \tilde{h} \circ h(x) = x\}$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Menge. Dann gibt es eine $\mathscr{H}^m$-messbare Menge $S_E \subset E$ mit $\mathscr{H}^m(E \setminus S_E) = 0$, so dass für $x \in S_E$ gilt:

- $h$ ist in $x$ differenzierbar.
- $\tilde{h}$ ist in $h(x)$ differenzierbar.
- $D\tilde{h}_{h(x)} \circ Dh_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$.

**Beweis**
Sei $Z \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^m \colon \tilde{h} \circ h(x) - x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m \colon (\tilde{h} \circ h - \mathrm{id})(x) = 0\}$. Dann gilt (nach Übung) für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in Z$, dass $D(\tilde{h} \circ h - \mathrm{id})_x = 0$, d.h. $D(\tilde{h} \circ h)_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$. Ist $E \subset Z$, so gilt dies auch für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in E$.

Sei $F \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^m \colon h$ ist differenzierbar in $x\}$, $G \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n \colon \tilde{h}$ ist differenzierbar in $y\}$ und $D \coloneqq F \cap \{x \in \mathbb{R}^m \colon h(x) \in G\}$. Dann gilt:

$$E \setminus D = (E \setminus F) \cup (E \setminus \{x \in \mathbb{R}^m \colon h(x) \in G\}) = (E \setminus F) \cup \{x \in E \colon h(x) \notin G\},$$

wobei aufgrund des Satzes von Rademacher $\mathscr{H}^m(E \setminus F) = 0$ und wegen $\{x \in E \colon h(x) \notin G\} \subset \tilde{h}(\mathbb{R}^n \setminus G)$ auch

$$\mathscr{H}^m(\{x \in E \colon h(x) \notin G\}) \leq \mathscr{H}^m(\tilde{h}(\mathbb{R}^n \setminus G)) \leq \mathrm{Lip}(\tilde{h})^m \cdot \mathscr{H}^m(\mathbb{R}^n \setminus G) = 0.$$

Hieraus folgen leicht alle Behauptungen. ■

**Lemma 3.14**
Sei $m \geq n$ und sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert eine abzählbare Borelüberdeckung $\mathcal{E}$ von $B \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^m \colon f$ differenzierbar in $x$ und $Df_x(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\}$ derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ eine (lineare) Orthogonalprojektion $p_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ und Lipschitzabbildungen $h_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\tilde{h}_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ existieren mit

$$h_E(x) = (f(x), p_E(x)) \quad \text{und} \quad \tilde{h}_E \circ h_E(x) = x \qquad \text{für alle } x \in E.$$

**Beweis**
Für $\gamma \in \Lambda(m, m-n)$ sei $p_\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ gegeben durch

$$p_\gamma(x_1, \dots, x_m) \coloneqq (x_{\gamma(1)}, \dots, x_{\gamma(m-n)}).$$

Ferner sei $h_\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ gegeben durch $h_\gamma(x) \coloneqq (f(x), p_\gamma(x))$. Setze

$$A_\gamma \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^m : h_\gamma \text{ ist differenzierbar in } x \text{ und } Dh_\gamma(x) \text{ ist injektiv}\}.$$

Die Abbildung $f$ ist differenzierbar in $x$ genau dann, wenn $h_\gamma$ in $x$ differenzierbar ist und $\mathrm{Kern}((Dh_\gamma)_x) = \mathrm{Kern}(Df_x) \cap \mathrm{Kern}(p_\gamma)$. Hieraus folgt leicht

$$B = \bigcup_{\gamma \in \Lambda(m, m-n)} A_\gamma.$$

Nach Lemma 3.7 gibt es zu jedem $t > 1$ eine abzählbare Borel-Überdeckung $\mathcal{E}_\gamma$ von $A_\gamma$ derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}_\gamma$ ein Automorphismus $\tau_E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ existiert, so dass gilt: $(h_\gamma)|_E$ ist injektiv und $\mathrm{Lip}((h_\gamma)|_E \circ \tau_E^{-1}) \leq t$ sowie $\mathrm{Lip}(\tau_E \circ ((h_\gamma)|_E)^{-1}) \leq t$.

Für $x, y \in E$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|h_\gamma(x) - h_\gamma(y)\| &= \|(h_\gamma)|_E \circ \tau_E^{-1}(\tau_E(x)) - (h_\gamma)|_E \circ \tau_E^{-1}(\tau_E(y))\| \\ &\leq t \cdot \|\tau_E(x) - \tau_E(y)\| \leq t \cdot \mathrm{Lip}(\tau_E) \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

und für $u, v \in h_\gamma(E)$ gilt

$$\begin{aligned}\|(h_\gamma|_E)^{-1}(u) - (h_\gamma|_E)^{-1}(v)\| &= \|\tau_E^{-1} \circ \tau_E \circ (h_\gamma|_E)^{-1}(u) - \tau_E^{-1} \circ \tau_E \circ (h_\gamma|_E)^{-1}(v)\| \\ &\leq \operatorname{Lip}(\tau_E^{-1}) \cdot t \cdot \|u - v\|.\end{aligned}$$

Also sind $h_\gamma|_E$ und $(h_\gamma|_E)^{-1}$ Lipschitzabbildungen. Somit existieren Lipschitzfortsetzungen $h$ von $(h_\gamma|_E)$ und $\tilde{h}$ von $(h_\gamma|_E)^{-1}$ mit $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ und $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, wobei $h|_E = (h_\gamma)|_E$ und $\tilde{h}|_{h(E)} = (h_\gamma|_E)^{-1}|_{h_\gamma(E)}$. Daher ist $h(x) = (f(x), p_\gamma(x))$ für $x \in E$ und $\tilde{h} \circ h(x) = x$ für $x \in E$. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Der folgende Hilfssatz stellt gewissermaßen eine lokale Version der Koflächenformel dar. Die hierbei auftretenden Annahmen sind nach dem vorangehenden Hilfssatz stets erfüllbar. Zusammen erhalten wir dann schließlich die allgemeine Aussage.

**Lemma 3.15**
Sei $m > n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $E \subset \mathbb{R}^m$ eine Borelmenge derart, dass für alle $x \in E$ die Abbildung $f$ differenzierbar in $x$ ist und $Df_x$ surjektiv. Sei $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ eine Orthogonalprojektion und $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ seien Lipschitzabbildungen so dass $\tilde{h} \circ h(x) = x$ für $x \in E$ und $h(x) = (f(x), p(x))$ für $x \in E$. Dann gilt für alle $A \subset E$ mit $A \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$

$$\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).$$

**Beweis**
Nach Voraussetzung sind $h|_E$ und $\tilde{h}|_{h(E)}$ injektiv. Für $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}h(E \cap f^{-1}(\{y\})) &= \{(f(x), p(x)) : x \in E \cap f^{-1}(\{y\})\} \\ &= \{(y, p(x)) : x \in E \cap f^{-1}(\{y\})\} \\ &= \{y\} \times p(E \cap f^{-1}(\{y\})).\end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ setzte $\tilde{h}_y : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{h}_y(z) := \tilde{h}(y, z)$ für $z \in \mathbb{R}^{m-n}$. Da $\tilde{h}$ auf der Menge $\{y\} \times p(E \cap f^{-1}(\{y\})) \subset h(E)$ injektiv ist, ist $\tilde{h}_y$ injektiv auf $p(E \cap f^{-1}(\{y\}))$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\tilde{h}_y(p(E \cap f^{-1}(\{y\}))) &= \tilde{h}(\{y\} \times p(E \cap f^{-1}(\{y\})) \\ &= \tilde{h}(h(E \cap f^{-1}(\{y\}))) \\ &= E \cap f^{-1}(\{y\}). \qquad (*)\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.14 ist für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in E$ die Abbildung $h$ in $x$ und die Abbildung $\tilde{h}$ in $h(x)$ differenzierbar und $D\tilde{h}_{h(x)} = (Dh_x)^{-1}$. Für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in E$ existiert somit die Abbildung $L_x : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ mit $L_x := D(\tilde{h}_{f(x)})_{p(x)}$, wobei die Existenz und die erste Gleichung

$$L_x = D(\tilde{h}_{f(x)})_{p(x)} = D\tilde{h}_{(f(x),p(x))} \circ (0_{n,n-m}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}) = (Dh_x)^{-1} \circ (0_{n,n-m}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}})$$

aus der Kettenregel (betrachte hierzu: $z \mapsto (y,z) \mapsto \tilde{h}(y,z)$) folgt. Wegen $Dh_x = (Df_x, p)$ erhält man

$$L_x(\mathbb{R}^{m-n}) = (Dh_x)^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^{m-n}) = \operatorname{Kern}(Df_x).$$

Dies zeigt insbesondere, dass $L_x$ maximalen Rang hat. Sei nun $(b_1, \dots, b_m)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$, so dass $(b_1, \dots, b_{m-n})$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Kern}(Df_x)$ ist, das heißt $(b_{m-n+1}, \dots, b_m)$ ist eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Kern}(Df_x)^\perp$. Damit folgt

$$\begin{aligned} Jh(x) &= |\det(Dh_x(b_1), \dots, Dh_x(b_m))| \\ &= \left|\det\big((0, p(b_1)), \dots, (0, p(b_{m-n})), (Df_x(b_{m-n+1}), p(b_{m-n+1})), \dots, (Df_x(b_m), p(b_m))\big)\right| \\ &= \left|\det\big((0, p(b_1)), \dots, (0, p(b_{m-n})), (Df_x(b_{m-n+1}), 0), \dots, (Df_x(b_m), 0)\big)\right| \\ &= \left|\det\big(p(b_1), \dots, p(b_{m-n})\big)\right| \cdot Jf(x), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $(0, p(b_1)), \dots, (0, p(b_{m-n}))$ linear unabhängig sind. Für $v \in \mathbb{R}^{m-n}$ gilt

$$(0_{n,m-n}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}})(v) = Dh_x \circ L_x(v) = (Df_x(L_x(v)), p(L_x(v)))$$

und daher

$$p \circ L_x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}},$$

das heißt $\det(p \circ L_x) = 1$. Sei nun $\sigma : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^{m-n}$ eine symmetrische und $\varrho : \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ eine orthogonale Abbildung, so dass $L_x = \varrho \circ \sigma$. Da $L_x$ maximalen Rang hat, ist $\sigma$ ein Automorphismus. Daher ist $\operatorname{Kern}(Df_x) = L_x(\mathbb{R}^{m-n}) = \varrho \circ \sigma(\mathbb{R}^{m-n}) = \varrho(\mathbb{R}^{m-n})$. Da $\varrho$ orthogonal ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-n}$ in $\mathbb{R}^{m-n}$ mit $\varrho(\bar{b}_i) = b_i$. Somit folgt

$$\begin{aligned} 1 = \det(p \circ L_x) &= \det(p \circ \varrho \circ \sigma) = \det(p \circ \varrho) \cdot \det(\sigma) \\ &= |\det(p \circ \varrho(\bar{b}_1), \dots, p \circ \varrho(\bar{b}_{m-n}))| \cdot [\![L_x]\!] \\ &= |\det(p(b_1), \dots, p(b_{m-n}))| \cdot J(\tilde{h}_{f(x)})(p(x)). \end{aligned}$$

Dies ergibt schließlich

$$Jf(x) = Jh(x) \cdot J(\tilde{h}_{f(x)})(p(x)).$$

Da $h$ auf $E$ und $\tilde{h}$ auf $h(E)$ injektiv sind, folgt für $A \subset E$ mit $A \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}^m}$ durch zweimalige Anwendung der Flächenformel

$$\begin{aligned} \int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_A(x) \cdot J(\tilde{h}_{f(x)})(p(x)) \cdot Jh(x)\, \mathscr{H}^m(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}} \mathbb{1}_{h(A)}(y,z) \cdot J(\tilde{h}_y)(z)\, (\mathscr{H}^n \otimes \mathscr{H}^{m-n})(d(y,z)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{p(A \cap f^{-1}(\{y\}))} J(\tilde{h}_y)(z)\, \mathscr{H}^{m-n}(dz)\, \mathscr{H}^n(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}\big(\underbrace{\tilde{h}_y(p(A \cap f^{-1}(\{y\})))}_{\overset{(*)}{=} A \cap f^{-1}(\{y\})}\big)\, \mathscr{H}^n(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy). \end{aligned}$$

■

**Satz 3.16**
Seien $m \geq n$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung. Für jede $\mathscr{H}^m$-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ gilt
$$\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).$$

**Korollar 3.17**
Seien $m \geq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitzabbildung und $h : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Abbildung. Dann gilt
$$\int h(x) Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(\{y\})} h(x)\, \mathscr{H}^{m-n}(dx)\, \mathscr{H}^n(dy).$$

**Beweis (von Satz 3.16)**
Ist $\mathscr{H}^m(A) = 0$, so sind beide Seiten der behaupteten Gleichung Null (Lemma 3.10). Daher können wir den Beweis wie früher auf den Fall $\mathscr{H}^m(A) < \infty$, $f$ differenzierbar in allen $x \in A$ sowie $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ reduzieren.

(a) Sei $Jf(x) > 0$ für alle $x \in A$. Also ist $Df_x(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine abzählbare Borel-Überdeckung $\mathcal{E}$ von $A$ derart, dass für jedes $E \in \mathcal{E}$ eine Orthogonalprojektion $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ und Lipschitzabbildungen $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ existieren mit $h(x) = (f(x), p(x))$ und $\tilde{h} \circ h(x) = x$ für $x \in E$. Wähle eine abzählbare Zerlegung $\mathcal{G}$ von $A$, so dass für jedes $G \in \mathcal{G}$ ein $E \in \mathcal{E}$ existiert mit $G \subset E$. Aus Lemma 3.15 folgt nun
$$\begin{aligned}\int_A Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) &= \sum_{G \in \mathcal{G}} \int_G Jf(x)\, \mathscr{H}^m(dx) \\ &= \sum_{G \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(G \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy).\end{aligned}$$

(b) Sei $Jf(x) = 0$ für alle $x \in A$, das heißt $\mathrm{Rang}(Df_x(\mathbb{R}^m)) < n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Definiere Abbildungen $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch
$$g(x, y) := f(x) + \varepsilon y \qquad \text{und} \qquad p(x, y) := y \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n.$$
Für $x \in A$ und $y \in \mathbb{R}^n$ erhält man
$$Dg_{(x,y)}(v, w) = Df_x(v) + \varepsilon w, \qquad v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$$
und folglich
$$\|Dg_{(x,y)}(v, w)\| \leq \|Df_x(v)\| + \varepsilon\|w\| \leq \mathrm{Lip}(f)\|v\| + \varepsilon\|w\| \leq (\mathrm{Lip}(f) + \varepsilon)\|(v, w)\|,$$

also

$$\|Dg_{(x,y)}(v,w)\| \leq \mathrm{Lip}(f) + \varepsilon.$$

Ferner ist

$$\mathrm{Kern}(Dg_{(x,y)}) = \left\{ \left( v, -\frac{1}{\varepsilon} Df_x(v) \right) : v \in \mathbb{R}^m \right\},$$

also $\dim(\mathrm{Kern}(Dg_{(x,y)})) = m$ und $\dim(\mathrm{Bild}(Dg_{(x,y)})) = n$. Unter (b) gibt es einen Vektor $w \in Df_x(\mathbb{R}^m)^\perp$ mit $\|w\| = 1$, und wir können hiermit $b_1 := \left(\frac{1}{\varepsilon} Df_x^*(w), w\right) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definieren. Dann gilt

$$\|b_1\|^2 = \left\langle \frac{1}{\varepsilon} Df_x^*(w), \frac{1}{\varepsilon} Df_x^*(w) \right\rangle + \langle w, w \rangle = \frac{1}{\varepsilon^2} \langle w, Df_x \circ Df_x^*(w) \rangle + 1 = 1,$$

wobei

$$\|Df_x \circ Df_x^*(w)\|^2 = \langle \underbrace{w}_{\in Df_x(\mathbb{R}^m)^\perp}, \underbrace{Df_x \circ Df_x^* \circ Df_x \circ Df_x^*(w)}_{\in Df_x(\mathbb{R}^m)} \rangle = 0,$$

also $Df_x \circ Df_x^*(w) = 0$ verwendet wurde. Wir erhalten $b_1 \in \mathrm{Kern}(Dg_{(x,y)})^\perp$, da für alle $v \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\left\langle b_1, (v, -\frac{1}{\varepsilon} Df_x(v)) \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle Df_x^*(w), v \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle w, Df_x(v) \rangle = 0,$$

und ferner

$$\|Dg_{(x,y)}(b_1)\| = \left\| \frac{1}{\varepsilon} Df_x \circ Df_x^*(w) + \varepsilon w \right\| = \varepsilon.$$

Wir ergänzen nun $b_1$ zu einer Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$ von $\mathrm{Kern}(Dg_{(x,y)})^\perp$. Hierfür gilt die Abschätzung

$$Jg(x,y) = |\det(Dg_{(x,y)}(b_1), \ldots, Dg_{(x,y)}(b_n))| = \prod_{i=1}^n \|Dg_{(x,y)}(b_i)\| \leq \varepsilon(\mathrm{Lip} + \varepsilon)^{n-1}.$$

Die Translationsinvarianz des Hausdorff-Maßes zeigt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\})) \, \mathscr{H}^n(dy)$$

von $\varepsilon$ und $z$ unabhängig ist. Setze $B := A \times B^n(0,1)$, wobei $B^n(0,1)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist. Hierbei gilt wegen $\{(x,z) : x \in A, f(x) + \varepsilon z = y\} = \{(x,z) : x \in A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\})\}$

$$B \cap g^{-1}(\{y\}) \cap p^{-1}(\{z\}) = \begin{cases} \{(x,z) : x \in A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\})\}, & \text{falls } z \in B^n(0,1), \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es bezeichne $\alpha(n)$ das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel. Mit Hilfe von Lemma 3.10 (mit $k = m + n$) und Anwendung des Resultats aus Teil (a) folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\})) \, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \alpha(n)^{-1} \int_{B^n(0,1)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y - \varepsilon z\})) \, \mathscr{H}^n(dy) \, \mathscr{H}^n(dz) \\
&= \alpha(n)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(B \cap g^{-1}(\{y\}) \cap p^{-1}(\{z\})) \, \mathscr{H}^n(dz) \, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \alpha(n)^{-1} \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \mathrm{Lip}(p)^n \mathscr{H}^m(B \cap g^{-1}(\{y\})).
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{Lip}(p) = 1$ und da $Dg_{(x,y)}$ vollen Rang hat, folgt schließlich mit Hilfe von Teil (a), der für die Abbildung $g$ anwendbar ist,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&\leq \frac{\alpha(m-n)}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^m(B \cap g^{-1}(\{y\}))\, \mathscr{H}^n(dy) \\
&= \frac{\alpha(m-n)}{\alpha(m)} \int_B Jg\, d(\mathscr{H}^m \otimes \mathscr{H}^n) \\
&\leq \frac{\alpha(m-n)\alpha(n)}{\alpha(m)} \cdot \mathscr{H}^m(A) \cdot \varepsilon \cdot (\operatorname{Lip}(f) + \varepsilon)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, ist das Integral Null. ■

## 3.4 Rektifizierbare Mengen

**Motivation:**

- Verallgemeinerung von Mannigfaltigkeit
- Allgemeine Fassung der Flächenformel und Koflächenformel
- Trägermengen für rektifizierbare Ströme und rektifizierbare Varifaltigkeiten

**Definition**

- Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^p$ heißt $n$-rektifizierbar, falls es eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Lipschitzabbildung $f : A \to \mathbb{R}^p$ gibt mit $f(A) = M$.
- Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^p$ heißt abzählbar $n$-rektifizierbar, falls es eine Menge $M_0 \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(M_0) = 0$ und Lipschitzabbildungen $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ für $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$M \subset M_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f_j(\mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Die Terminlogie im Buch von Federer weicht von dieser hier ab.

**Beispiele**

(1) $\mathbb{R}^m$ ist abzählbar $n$-rektifizierbar für $m \leq n$.

(2) Teilmengen und abzählbare Vereinigungen von abzählbar $n$-rektifizierbaren Mengen sind abzählbar $n$-rektifizierbare Mengen.

(3) Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ abzählbar, dicht. Dann ist

$$M := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S^1(x_i, 2^{-i})$$

abzählbar 1-rektifizierbar, $\mathscr{H}^1(M) < \infty$ und $\overline{M} = \mathbb{R}^2$.

(4) Sei $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt und konvex. Der Rand $\partial K$ von $K$ ist $(p-1)$-rektifizierbar.

(5) Ist $A \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar $n$-rektifizierbar, so gibt es $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$ mit $A \subset B$ und $B$ ist abzählbar $n$-rektifizierbar.

(6) $D$ sei ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit Kantenlänge 1. Eine Kante von $D$ sei parallel zur $x$-Achse. $D_1$ sei die Vereinigung von drei gleichseitigen Dreiecken in $\mathbb{R}^2$ mit Kantenlänge $\frac{1}{3}$ „in den Ecken von $D$". Definiere $D_i$, $i > 1$, analog und

$$\hat{D} := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \subset \mathbb{R}^2.$$

Es ist $\mathscr{H}^1(\hat{D}) = 1$, aber $\mathscr{H}^1(\pi_1(\hat{D})) = 0$, wobei $\pi_1$ die Orthogonalprojektion auf die $y$-Achse ist. Seien $\pi_2$, $\pi_3$ Orthogonalprojektionen auf die Geraden, die mit der $y$-Achse den Winkel 120° einschließen. Dann gilt $\mathscr{H}^1(\pi_i(\hat{D})) = 0$, $i = 1, 2$. Somit ist $\hat{D}$ nicht abzählbar 1-rektifizierbar.

**Satz 3.18 (Struktursatz)**
Sei $A \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(A) < \infty$. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $A = R \dot{\cup} N$, so dass gilt

(a) $R = A \cap R_0$ mit einer abzählbar $n$-rektifizierbaren Borelmenge $R_0 \subset \mathbb{R}^p$.

(b) Für jede abzählbar $n$-rektifizierbare Menge $F \subset \mathbb{R}^p$ gilt $\mathscr{H}^n(N \cap F) = 0$.

**Beweis**
Sei $s := \sup\{\mathscr{H}^n(A \cap B) : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$, abzählbar $n$-rektifizierbar$\} < \infty$. Es gibt $B_j \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$, abzählbar $n$-rektifizierbar mit $\mathscr{H}^n(A \cap B_j) \geq s - \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$R_0 := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$$

abzählbar $n$-rektifizierbar. Setze $N := A \setminus R_0$. Sei $F \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar $n$-rektifizierbar. Es gibt $\tilde{F} \supset F$ mit $\tilde{F} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$ und abzählbar $n$-rektifizierbar.

Dann folgt

$$\begin{aligned} s &\geq \mathscr{H}^n(A \cap (R_0 \cup \tilde{F})) \\ &= (\mathscr{H}^n \lfloor A)(R_0 \cup \tilde{F}) \\ &= (\mathscr{H}^n \lfloor A)(R_0 \cup (\tilde{F} \setminus R_0)) \\ &= (\mathscr{H}^n \lfloor A)(R_0) + (\mathscr{H}^n \lfloor A)(\tilde{F} \setminus R_0) \\ &= \underbrace{\mathscr{H}^n(A \cap R_0)}_{=s} + \mathscr{H}^n(\underbrace{(A \setminus R_0)}_{=N} \cap \tilde{F}). \end{aligned}$$

Also ist $\mathscr{H}^n(N \cap \tilde{F}) = 0$. Setze $R := A \cap R_0$. ∎

**Definition**
Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^p$ heißt rein nicht $n$-rektifizierbar, falls $\mathscr{H}^n(N \cap F) = 0$ für jede abzählbar $n$-rektifizierbare Mengen $F \subset \mathbb{R}^p$ gilt.

**Satz 3.19 (Charakterisierungssatz)**

(a) Ist $N \subset \mathbb{R}^p$ rein nicht $n$-rektifizierbar, so gilt für fast alle $E \in G(p, n)$:

$$\mathscr{H}^n(N \mid E) = 0.$$

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}^p$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mathscr{H}^n(A_i) < \infty$ und gilt für alle $B \subset A$ mit $\mathscr{H}^n(B) > 0$ stets $\mathscr{H}^n(B \mid E) > 0$ für eine Menge von $E \in G(p, n)$ positiven Maßes, so ist $A$ abzählbar $n$-rektifizierbar.

(c) Ist $A \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar $n$-rektifizierbar und $0 < \mathscr{H}^n(A) < \infty$, so ist $\mathscr{H}^n(A \mid E) = 0$ für höchstens ein $E \in G(p, n)$.

**Beweis**

Aussage (a) ist eine aufwändig zu beweisende Aussage. Wir können hier keinen Beweis angeben.

(b) folgt leicht aus (a) und dem Struktursatz.

(c) ist ebenfalls leicht zu zeigen. ∎

**Proposition 3.20**

Für $M \subset \mathbb{R}^p$ sind äquivalent:

(a) $M$ ist abzählbar $n$-rektifizierbar.

(b) Es gibt $M_0 \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(M_0) = 0$ und Mengen $A_j \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitzabbildungen $f_j : A_j \to \mathbb{R}^p$, so dass

$$M \subset M_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(A_j).$$

(c) Es gibt $N_0 \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(N_0) = 0$ und $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten $N_j \subset \mathbb{R}^p$ der Klasse $C^1$ mit $\mathscr{H}^n(N_j) < \infty$ und

$$M \subset N_0 \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j.$$

**Beweis**

- (a) $\Longrightarrow$ (c): Wir verwenden den folgenden $C^1$-Approximationssatz für Lipschitzabbildungen, der unter anderem auf einm Spezialfall eines Satzes von Whitney beruht:

  Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine $C^1$-Abbildung $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

  $$\mathscr{H}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x) \text{ oder } \nabla f(x) \neq \nabla g(x)\}) < \varepsilon.$$

  Wiederholte Anwendung dieses Approximationssatz zeigt: Zu $j \in \mathbb{N}$ existieren eine Menge

$E_j \subset \mathbb{R}^p$ und $C^1$-Abbildungen $g_i^{(j)} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ mit

$$f_j(\mathbb{R}^n) \subset E_j \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{(j)}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathscr{H}^n(E_j) = 0$.

Setze $C_{ij} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rg}(Dg_i^{(j)}(x)) < n\}$. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $p \geq n$). Die Flächenformel ergibt $\mathscr{H}^n(g_i^{(j)}(C_{ij})) = 0$. Für

$$N_0 \coloneqq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i^{(j)}(C_{ij})$$

ist $\mathscr{H}^n(N_0) = 0$.

Zu $x \in \mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$ gibt es eine Umgebung $U_{ij}(x)$, so dass $g_j^{(i)}(U_{ij}(x)) \subset \mathbb{R}^p$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^1$ ist. Da $\mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$ offen ist, kann es durch abzählbar viele solcher Umgebungen überdeckt werden. (Hierzu schreibt man $\mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$ zunächst als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen und dann von kompakten Teilmengen.) ■

**Beispiele**

(1) $M = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x, \frac{1}{n} \cdot x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine abzählbar 1-rektifizierbare Menge.

(2) $M = \bigcup_{n=1}^{\infty}([-e_1, e_1] + \frac{1}{n} \cdot e_2) \subset \mathbb{R}^2$ ist eine abzählbar 1-rektifizierbare Menge.

(3) $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar 1-rektifizierbar. Diese Menge ist aber nicht *gleich* einer abzählbaren Vereinigung von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten der Klasse $C^1$, da sie überabzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat.

**Definition**

Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge und $(\mathscr{H}^n \lfloor M) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$, das heißt $\mathscr{H}^n(M \cap K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^p$. Sei $x \in \mathbb{R}^p$ und $P \in G(p,n)$. Dann heißt $P$ *approximativer Tangentialraum* von $M$ in $x$, falls

$$\mathscr{H}^n \lfloor \left(\frac{M-x}{\lambda}\right) \xrightarrow{\text{v}} \mathscr{H}^n \lfloor P \qquad \text{für } \lambda \searrow 0,$$

das heißt, für jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$ gilt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\frac{M-x}{\lambda}} f(y)\, \mathscr{H}^n(dy) = \int_P f(y)\, \mathscr{H}^n(dy).$$

**Bemerkungen:** (1) Man kann umformen:

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\frac{M-x}{\lambda}} f(y)\, \mathscr{H}^n(dy) = \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_M f\left(\frac{z-x}{\lambda}\right) \mathscr{H}^n(dz).$$

(2) Sei $\eta_{x,\lambda} \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $z \mapsto \frac{1}{\lambda}(z-x)$. Dann ist

$$\mathscr{H}^n \lfloor \left(\frac{M-x}{\lambda}\right) = (\eta_{x,\lambda})_{\#}(\lambda^{-n} \cdot (\mathscr{H}^n \lfloor M)).$$

(3) Falls der approximative Tangentialraum von $M$ in $x$ existiert, so ist er eindeutig bestimmt und wird mit $T_xM$ bezeichnet. In diesem Fall ist $x \in \overline{M}$.

(4) Ist $N \subset \mathbb{R}^p$ eine $n$-dimensionale $C^1$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$ und $x_0 \in N$, dann existiert der approximative Tangentialraum und stimmt mit dem differenzialgeometrischen Tangentialraum $\widetilde{T_{x_0}N}$ überein.

**Ansatz:** $N \cap V = \{x + g(x) \coloneqq G(x) : x \in (x_0 + \widetilde{T_{x_0}N}) \cap U\}$ mit $V, U$ Umgebungen von $x_0$, $g : (\widetilde{T_{x_0}N} + x_0) \cap U \to (\widetilde{T_{x_0}N}^{\perp})$, wobei $g(x_0) = 0$ und $Dg(x_0) = 0$. Weiter folgt für $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$, falls $\lambda > 0$ hinreichend klein ist,

$$\begin{aligned}\lambda^{-n} \cdot \int_N f\Big(\frac{z - x_0}{\lambda}\Big)\mathscr{H}^n(dz) &= \lambda^{-n} \int_{x_0 + T_{x_0}N} f\Big(\frac{x + g(x) - x_0}{\lambda}\Big) JG(x) \mathscr{H}^n(dx) \\ &= \lambda^{-n} \int_{T_{x_0}N} f\Big(z + \frac{1}{\lambda} g(x_0 + \lambda z)\Big) JG(x_0 + \lambda z) \lambda^n \mathscr{H}^n(dz) \\ &\to \int_{T_{x_0}N} f(z) \mathscr{H}^n(dz)\end{aligned}$$

für $\lambda \searrow 0$, wobei $G(x) \coloneqq x + g(x)$, $x \in T_{x_0}N + x_0$.

**Definition**
Ist $\mu$ ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^p$, $A \subset \mathbb{R}^p$ und $x \in \mathbb{R}^p$, so nennt man

$$\theta^{n*}(\mu, A, x) \coloneqq \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x, r))}{\alpha(n) \cdot r^n}$$

die $n$-dimensionale obere Dichte und

$$\theta^n_*(\mu, A, x) \coloneqq \liminf_{r \searrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x, r))}{\alpha(n) \cdot r^n}$$

die $n$-dimensionale untere Dichte von $A$ in $x$ bezüglich $\mu$.

Ist $\theta^{n*}(\mu, A, x) = \theta^n_*(\mu, A, x)$, so nennt man $\theta^n(\mu, A, x) \coloneqq \theta^n_*(\mu, A, x)$ die Dichte von $A$ in $x$ bezüglich $\mu$.

**Lemma 3.21**
Sei $\mu$ ein Borelreguläres äußeres Maß auf $\mathbb{R}^p$, $A \subset \mathbb{R}^p$ $\mu$-messbar und $\mu \lfloor A \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$. Dann gilt $\theta^n(\mu, A, x) = 0$ für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in \mathbb{R}^p \setminus A$.

Ohne Beweis (ist kompliziert).

**Proposition 3.22**
Ist $M \subset \mathbb{R}^p$ abzählbar $n$-rektifizierbar, $\mathscr{H}^n$-messbar und $\mathscr{H}^n \lfloor M \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$, dann existiert $T_xM$ für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M$.

**Beweis**
Die Menge $M$ kann in der Form $M = M_0 \dot\cup \dot\bigcup_{j\geq 1} M_j$ mit paarweise disjunkten Mengen $M_j$, $M_j$ $\mathscr{H}^n$-messbar und $M_j \subset N_j$, geschrieben werden, wobei $N_j$ eine $n$-dimensionale $C^1$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$ ist mit $\mathscr{H}^n(N_j) < \infty$. ($M_0 := N_0$, $M_1 := M \cap N_1 \setminus M_0$, $M_2 := M \cap N_2 \setminus (M_0 \cup M_1)$, …). Für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_j$ gilt wegen Lemma 3.21:

$$\theta^n(\mathscr{H}^n, M \setminus M_j, x) = \theta^n(\mathscr{H}^n, N_j \setminus M_j, x) = 0.$$

Für jedes solches $x$ existieren die approximativen Tangentialräume $T_x M$ und $T_x N_j$. Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,R)$ (für ein $R \in (0,\infty)$). Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\lambda^{-n} \cdot \int_{M\setminus M_j} f(\frac{z-x}{\lambda})\mathscr{H}^n(dz)\right| &\leq \lambda^{-n} \cdot \int_{M\setminus M_j} \|f\|_\infty \mathbb{1}_{B(x,\lambda R)} d\mathscr{H}^n \\ &\leq \|f\|_\infty \lambda^{-n} \mathscr{H}^n(M \setminus M_j \cap B(x,\lambda R)) \\ &= \alpha(n) R^n \|f\|_\infty \frac{\mathscr{H}^n(M \setminus M_j \cap B(x,\lambda R))}{\alpha(n)(\lambda R)^n}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M\setminus M_j} f(\frac{z-x}{\lambda})\mathscr{H}^n(dz) = 0.$$

Ebenso folgt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{N_j\setminus M_j} f(\frac{z-x}{\lambda})\mathscr{H}^n(dz) = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\int_{T_{x_0} N_j} f(z)\mathscr{H}^n(dz) &= \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{N_j} f(\frac{z-x}{\lambda})\mathscr{H}^n(dz) \\ &= \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_j} f(\frac{z-x}{\lambda})\mathscr{H}^n(dz) \\ &= \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M} f(\frac{z-x}{\lambda})\mathscr{H}^n(dz)\end{aligned}$$

folgt die Behauptung. ∎

**Definition**
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge. Man nennt eine $\mathscr{H}^n$-messbare Funktion $\theta : M \to (0,\infty)$, die

$$\int_{M\cap K} \theta d\mathscr{H}^n < \infty$$

für alle $\mathscr{H}^n$-messbaren und beschränkten Mengen $K \subset \mathscr{H}^n$ erfüllt, eine Gewichtsfunktion zu $M$.

**Bemerkung:** Sind $M, \theta$ wie in der Definition, so ist

$$\mathscr{H}^n \lfloor \theta(\bullet) := \int_\bullet \theta(x)\mathscr{H}^n(dx) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p).$$

**Lemma 3.23**
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge. Dann gilt:

(a) Genau dann existiert eine Gewichtsfunktion $\theta$ zu $M$, wenn $M = \bigcup_{j \geq 1} M_j$ mit $\mathscr{H}^n$-messbaren Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^p$ und $\mathscr{H}^n \lfloor M_j \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$.

(b) Ist $M$ abzählbar $n$-rektifizierbar, so existiert eine Gewichtsfunktion zu $M$.

**Beweis**
Übung. ■

**Definition**
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge und $\theta : M \to (0, \infty)$ eine Gewichtsfunktion zu $M$. Dann heißt $P \in G(p, n)$ $n$-dimensionaler *approximativer Tangentialraum* von $M$ in $x$ bezüglich $\theta$, falls

$$(\eta_{x,\lambda})_{\#} \left(\lambda^{-n} (\mathscr{H}^n \lfloor \theta)\right) \overset{v}{\to} \theta(x)(\mathscr{H}^n \lfloor P) \quad \text{für } \lambda \searrow 0,$$

das heißt für $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$ gelte

$$\int_{\frac{M-x}{\lambda}} f(y)\theta(x+\lambda y)\mathscr{H}^n(dy) = \lambda^{-n} \int_M f(\frac{z-x}{\lambda})\theta(z)\mathscr{H}^n(dz) \xrightarrow{\lambda \searrow 0} \theta(x) \int_P f(y)\mathscr{H}^n(dy).$$

**Bemerkungen:** (1) Ist $\theta$ fest, so ist der approximative Tangentialraum $P$ von $M$ in $x$ bezüglich $\theta$ eindeutig bestimmt, falls er existiert. In diesem Fall schreiben wir $T_x^\theta M := P$.

(2) Sei $x \in M$. Für $\eta > 0$ sei $M_\eta := \{y \in M : \theta(y) > \eta\}$. Dann hat $M_\eta$ lokal endliches Hausdorffmaß, das heißt $\mathscr{H}^n \lfloor M_\eta \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p)$. Zu $x \in M$ existiert stets $\eta > 0$ mit $x \in M_\eta$. Für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_\eta$ gilt:

$$T_x M_\eta \quad \text{existiert genau dann, wenn } T_x^\theta M \text{ existiert.}$$

In diesem Fall gilt $T_x M_\eta = T_x^\theta M$.

(3) Sind $\theta$ und $\tilde{\theta}$ Gewichtsfunktionen zu $M$, so gilt für $M_\theta := \{x \in M : T_x^\theta M \text{ existiert}\}$, $M_{\tilde{\theta}} := \{x \in M : T_x^{\tilde{\theta}} M \text{ existiert}\}$:

$$\mathscr{H}^n(M_\theta \,\Delta\, M_{\tilde{\theta}}) = \mathscr{H}^n \left((M_\theta \setminus M_{\tilde{\theta}}) \cup (M_{\tilde{\theta}} \setminus M_\theta)\right) = 0,$$

und für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_\theta \cap M_{\tilde{\theta}}$ ist $T_x^\theta M = T_x^{\tilde{\theta}} M$.

**Satz 3.24**
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare Menge. Dann sind äquivalent:

(a) $M$ ist abzählbar $n$-rektifizierbar.

(b) $M$ hat eine Gewichtsfunktion $\theta$, so dass $T_x^\theta M$ für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M$ existiert.

(c) Für jede Gewichtsfunktion $\theta$ von $M$ gilt: $T_x^\theta M$ existiert für $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M$.

**Beweis (Skizze)**
(a) $\Rightarrow$ (c): Zu $M$ betrachtet man eine Zerlegung $M = M_0 \dot\cup \dot\bigcup_{j\geq 1} M_j$ mit $\mathscr{H}^n$-messbaren Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^p$, wobei $\mathscr{H}^n(M_0) = 0$ und $M_j \subset N_j$, $N_j$ ist $n$-dimensionale $C^1$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^n(N_j) < \infty$. Sei $\theta$ eine beliebige Gewichtsfunktion zu $M$ und $\mu := \mathscr{H}^n \lfloor \theta$. Betrachte $x \in M_j$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\theta^n(\mu, M \setminus M_j, x) = 0$,

(2) $\theta^n(\mathscr{H}^n, N_j \setminus M_j, x) = 0$,

(3) $\theta^n(\mu, M_j \setminus S_\varepsilon, x) = 0$, wobei $S_\varepsilon := \{z \in M \colon |\theta(z) - \theta(x)| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$,

(4) $\theta^n(\mathscr{H}^n, M_j \setminus S_\varepsilon, x) = 0$.

Mit Hilfe von Lemma 3.21 für (1) und (2) und mit Hilfe des Satzes von Lusin für (3) und (4) folgt, dass $\mathscr{H}^n$-fast-alle $x \in M_j$ diese Eigenschaften erfüllen. Dann folgert man in mehreren Schritten, dass

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \cdot \int_M f(\frac{z-x}{\lambda}) \theta(z) \mathscr{H}^n(dz) = \theta(x) \int_{T_x N_j} f(z) \mathscr{H}^n(dz)$$

für $f \in C_0(\mathbb{R}^p)$. Dies zeigt insbesondere $T_x^\theta M = T_x N_j$. Die Details werden in den Übungen besprochen. ∎

**Beispiel**
Sei

$$M = [-e_1, e_1] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( [-e_1, e_1] + \frac{1}{n} e_2 \right)$$

und setze $\theta|_{M_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ und $\theta|_{[-e_1,e_1]} := \theta(0)$. Man kann nun $T_0^\theta M = \mathbb{R} e_1$ zeigen. Die Details werden in den Übungen besprochen.

Das Ziel im Folgenden ist es, eine allgemeine Form der Flächen- und Koflächenformel zu finden, sowie eine Definition von Ableitungen von Lipschitz-Abbildungen relativ zu rektifizierbaren Mengen.

Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine abzählbare $m$-rektifizierbare Menge. Dazu sei $M = \dot\bigcup_{j=0} M_j$ eine disjunkte Zerlegung von $M$ in $\mathscr{H}^m$-messbare Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^p$ mit $\mathscr{H}^m(M_0) = 0$, wobei $M_j \subset N_j$ mit $m$-dimensionalen $C^1$-Untermannigfaltigkeiten $N_j$, $j \geq 1$, $\mathscr{H}^m(N_0) = 0$ sowie $\mathscr{H}^m(N_j) < \infty$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $M \subset U$ und $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzfunktion. Sei $x \in M$. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in M_j$. Ist $j \geq 1$ und $f|_{N_j}$ differenzierbar in $x$, so erklärt man

$$\nabla^M f(x) := \nabla^{N_j} f(x) := \sum_{k=1}^m D_{\tau_k} f(x) \cdot \tau_k \in T_x N_j,$$

wobei $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ eine Orthonormalbasis von $T_x N_j$ ist.

In diesem Fall existiert eine in $x$ differenzierbare Fortsetzung $\bar f \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ von $f|_{N_j}$ und für diese gilt

$$\nabla^M f(x) = \sum_{k=1}^m \langle \nabla \bar f(x), \tau_k \rangle \cdot \tau_k,$$

wobei der Gradient hier im umgebenden Raum $\mathbb{R}^p$ gebildet wird.

**Bemerkungen:** (1) Ist die Zerlegung von $M$ gewählt, so existiert $\nabla^M f(x)$ für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in M$ und ist eindeutig bestimmt.

(2) Tatsächlich ist $\nabla^M f(x)$ von der Wahl der Zerlegung von $M$ unabhängig.

Ist nämlich $x \in M_j \subset N_j$, existiert $\nabla^M f(x) = \nabla^{N_j} f(x)$, das heißt ist $f|_{N_j}$ in $x$ differenzierbar und existiert $T_x M = T_x N_j$, so ist $f|_{(x+T_xM)}$ differenzierbar in $x$ und $\nabla^M f(x) = \nabla^{N_j} f(x) = \nabla(f|_{(x+T_xM)})$. Für den Nachweis dieser Aussage wird verwendet, dass $f$ Lipschitzfunktion auf $U$ ist.

**Fazit:** Ist $M \subset \mathbb{R}^p$ eine abzählbar $m$-rektifizierbare Menge, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen mit $M \subset U$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine *lokale Lipschitzfunktion*, dann existiert $\nabla^M f(x)$ für $\mathscr{H}^m$-fast-alle $x \in M$ und die Definition $\nabla^M f(x) = \nabla^{N_j} f(x)$ ist korrekt.

In dieser Situation definieren wir:

$$\begin{aligned} d^M f_x\colon T_xM &\to \mathbb{R} \\ \tau &\mapsto d^M f_x(\tau) := \langle \nabla^M f(x), \tau \rangle. \end{aligned}$$

Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^q$ lokal Lipschitz, $f = (f^1, \dots, f^q)^\top$ und existiert $\nabla^M f_x^j$ für $j = 1, \dots, q$, so sei

$$\begin{aligned} d^M f_x\colon T_xM &\to \mathbb{R}^q \\ \tau &\mapsto d^M f_x(\tau) := \sum_{j=1}^q d^M f_x^j(\tau) \cdot e_j = \sum_{j=1}^q \langle \nabla^M f^j(x), \tau \rangle \cdot e_j. \end{aligned}$$

**Definition (Jakobi-Determinante)**
Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, sei $M$ abzählbar $m$-rektifizierbar und es existiere $\nabla^M f(x)$ in $x \in M$.

Für $m \le q$ sei

$$J_M f(x) := \sqrt{\det\big((d^M f_x)^* \circ (d^M f_x)\big)}$$

und für $m > q$ sei

$$J_M f(x) := \sqrt{\det\big((d^M f_x) \circ (d^M f_x)^*\big)}.$$

**Satz 3.25**
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare, abzählbar $m$-rektifizierbare Menge. Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und $M \subset U$ sowie $f\colon U \to \mathbb{R}^q$ eine lokale Lipschitzabbildung. Sei schließlich $g\colon M \to [0, \infty]$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare Funktion.

(a) Dann gilt für $m \le q$:

$$\int_M g(x) \cdot J_M f(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{f^{-1}(\{z\})} g(x)\, \mathscr{H}^0(dx)\, \mathscr{H}^m(dz).$$

(b) Dann gilt für $m \ge q$:

$$\int_M g(x) \cdot J_M f(x)\, \mathscr{H}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{f^{-1}(\{z\})} g(x)\, \mathscr{H}^{m-q}(dx)\, \mathscr{H}^q(dz).$$

Auch diese Fassung lässt sich weiter verallgemeinern:

**Satz 3.26**
Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine $\mathscr{H}^m$-messbare, abzählbar $m$-rektifizierbare Menge, und $Z \subset \mathbb{R}^q$ eine $\mathscr{H}^n$-messbare, abzählbar $n$-rektifizierbare Menge. Sei $f\colon M \to Z$ eine lokale Lipschitzabbildung und $g : M \to [0, \infty]$ $\mathscr{H}^m$-messbar. Dann gilt

$$\int_M g(x) \cdot J_M f(x) \, \mathscr{H}^m(dx) = \int_Z \int_{f^{-1}(\{z\})} g(x) \, \mathscr{H}^{m-n}(dx) \, \mathscr{H}^n(dz).$$

# 4 Ströme

## 4.1 Differentialformen und äußere Ableitung

**Ziel:** Integration über orientierte Flächen.

**Definition**
Sei $k \in \mathbb{R}$ und $V$ ein $n$-dimensionaler reeller Vektorraum.

(1) Eine Abbildung $\Phi\colon V^k \to \mathbb{R}$ heißt multilinear, falls $\Phi$ in jeder Komponente linear ist.

(2) Eine Abbildung $\Phi\colon V^k \to \mathbb{R}$ heißt alternierend, falls $\Phi$ nur das Vorzeichen wechselt, wenn zwei Komponenten vertauscht werden:

$$\Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\Phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

(3) $\bigwedge^k V \coloneqq \{(\Phi\colon V^k \to \mathbb{R}) : \Phi \text{ ist multilinear und alternierend}\}$.

(4) $\bigwedge^k V$ wird in kanonischer Weise zu einem Vektorraum. Die Elemente von $\bigwedge^k V$ nennt man $k$-Kovektoren, falls $V = \mathbb{R}^n$. Ist $V = (\mathbb{R}^n)^*$, so werden die Elemente von $\bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* =: \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ als $k$-Vektoren bezeichnet.

**Bemerkungen:** (1) $\bigwedge^1 \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^*$

(2) $\bigwedge_1 \mathbb{R}^n = ((\mathbb{R}^n)^*)^* = \mathbb{R}^n$ (mit der üblichen Identifikation).

(3) Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die Dualbasis. Wir schreiben

$$\langle e_j^*, e_i \rangle \coloneqq e_j^*(e_i) = \delta_{ij}.$$

Statt $e_j^*$ wird auch $dx_j$ geschrieben.

(4) $\bigwedge^n \mathbb{R}^n$ sind gerade die Determinantenfunktionen.

**Definition**
Seien $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1, \ldots, v_k) \coloneqq \det\left(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\ldots,k}\right)$$

erklärt. Man beachte hierbei $\langle \eta_i, v_j \rangle \coloneqq \eta_i(v_j)$.

**Alternativ:** Ist $\eta_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} dx_j$, $\eta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, so kann man auch

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1, \ldots, v_k) \coloneqq \det\left((\eta_{ij}) \cdot (v_1 | \cdots | v_k)\right)$$

erklären.

**Ergänzung:** Mit $\mathcal{T}^k(V) \coloneqq \{(T\colon V^k \to \mathbb{R}) : T \text{ ist } k\text{-linear}\}$ bezeichnet man die Tensoren der Stufe $k$ über dem Vektorraum $V$. Die Abbildung

$$\mathcal{T}^k(V) \otimes \mathcal{T}^l(V) \to \mathcal{T}^{k+l}(V)$$
$$(T, S) \mapsto T \otimes S$$

ist erklärt durch

$$(T \otimes S)(u_1, \ldots, u_{k+l}) \coloneqq T(u_1, \ldots, u_k) \cdot S(u_{k+1}, \ldots, u_{k+l}).$$

Man bezeichnet $T \otimes S$ als das Tensorprodukt von $T$ und $S$. Um für $p \in \mathbb{N}$ einen $p$-Tensor in einen alternierenden $p$-Tensor zu überführen, erklärt man die Abbildung

$$\mathrm{Alt}\colon \mathcal{T}^p(V) \to \bigwedge\nolimits^p V$$
$$T \mapsto \mathrm{Alt}(T),$$

wobei

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_p) \coloneqq \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}).$$

Hier ist $S_p$ die Menge aller Permutationen (Bijektionen) der Menge $\{1, \ldots, p\}$. Für $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ sei

$$\omega \wedge \eta \coloneqq \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \bigwedge\nolimits^{k+l} \mathbb{R}^n.$$

Man stellt fest, dass dieses „Dachprodukt“ assoziativ ist. Ferner gilt

$$\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k = k! \cdot \mathrm{Alt}(\eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_k).$$

In gleicher Weise erklären wir nun auch ein Dachprodukt für $k$-Vektoren.

**Definition**
Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge\nolimits_k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)(\eta_1, \ldots, \eta_k) \coloneqq \det\left(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\ldots,k}\right)$$

erklärt, wobei $\eta_1, \ldots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Man kann zeigen, dass $\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}$ eine Linearform auf $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$ ist, wenn man

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \coloneqq (\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k)(v_1, \ldots, v_k)$$

für $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ erklärt. Die Wohldefiniertheit ist leicht einzusehen. Im Folgenden schreiben wir für $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$

$$\langle \omega, \xi \rangle \coloneqq \omega(\xi).$$

In gleicher Weise wird $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ als Linearform auf $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ erklärt, indem man

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k) \coloneqq (v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)(\eta_1, \ldots, \eta_k)$$

setzt. Auch hier ist die Wohldefiniertheit leicht zu bestätigen.

Man kann ferner nachweisen, dass

$$e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*, \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ ist. Ebenso ist

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$. Diese Basen sind zueinander dual in Bezug auf obige Deutung von $k$-Kovektoren als Linearformen auf $k$-Vektoren.

**Notation:** Sei

$$I_k^n := \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}.$$

Für $I \in I_k^n$ ist $e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ und $dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ und so weiter.

**Bemerkungen:** (1) Für $\sigma \in S_k$, $\eta_1, \ldots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^* = \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ gilt

$$\eta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \eta_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k.$$

(2) Sei $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \Phi_{(i_1, \ldots, i_k)} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I \cdot dx_I.$$

Hierbei ist also $\Phi_I = \Phi(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \Phi(e_I) \in \mathbb{R}$.

**Definition**
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Phi \colon W \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ heißt Differentialform vom Grad $k$ (kurz: $k$-Form). Die $k$-Form $\Phi$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, falls $p \mapsto \Phi(p)(v_1, \ldots, v_k)$ von der Klasse $\mathcal{C}^r$ ist für jede Wahl von $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

**Bemerkungen:** (1) Die $k$-Form $\Phi$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^r$ genau dann, wenn

$$p \mapsto \Phi_I(p) := \Phi(p)_I = \langle \Phi(p), e_I \rangle = \langle \Phi(p), e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \rangle$$

von der Klasse $\mathcal{C}^r$ ist für alle $I \in I_k^n$.

(2) Die $k$-Form $\Phi$ lässt sich schreiben als

$$p \mapsto \Phi(p) = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I(p) dx_I$$

mit $\Phi_I(p) \in \mathbb{R}$.

**Definition (Dachprodukt)**
Für $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ wird $\Phi \wedge \eta \in \bigwedge^{k+l} \mathbb{R}^n$ in folgender Weise erklärt: Ist $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$ und $\eta = \sum_{J \in I_l^n} \eta_J dx_J$, dann ist

$$\Phi \wedge \eta := \sum_{I \in I_k^n,\, J \in I_l^n} \Phi_I \cdot \eta_J \underbrace{dx_I \wedge dx_J}_{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}}.$$

Eine „invariante Definition“ kann mit Hilfe des Alt-Operators gegeben werden (s.o.).

**Bemerkungen:** (1) Assoziativgesetz: Für $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$, $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ und $\Theta \in \bigwedge^r \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\Phi \wedge \eta) \wedge \Theta = \Phi \wedge (\eta \wedge \Theta).$$

(2) Distributivgesetz: Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\Phi_1, \Phi_2 \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2) \wedge \eta = \alpha_1(\Phi_1 \wedge \eta) + \alpha_2(\Phi_2 \wedge \eta).$$

**Ausblick:**

- Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-Fläche, das heißt es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, $F$ ist injektiv, $DF_x$ ist injektiv und $S = F(U)$.

  Die Fläche $S$ wird „orientiert“ durch die Orientierung von $\mathbb{R}^k$ und durch $F$.

- Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $S \subset W$. Sei ferner $\Phi$ eine $k$-Form auf $W$, das heißt $\Phi(p) \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ für $p \in W$.

- Das Integral von $\Phi$ über $S$ kann erklärt werden durch

$$\int_S \Phi := \int_U \left\langle \underbrace{\Phi \circ F(x)}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n}, \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)}_{\in \bigwedge_k \mathbb{R}^n} \right\rangle \lambda^k(dx).$$

  Man zeigt mit Hilfe des Transformationssatz für Gebietsintegrale, dass diese Defintion von der Wahl von $F$ unabhängig ist.

**Definition (Äußeres Differential)**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ eine $k$-Form der Klasse $\mathcal{C}^r$ mit $r \geq 1$.

(a) Ist $k = 0$, so ist $\Phi = f$ eine Funktion und $d\Phi = df$ ist als 1-Form auf $U$ erklärt durch $df(p)(v) := D_v f(p)$, das heißt

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

denn

$$df(p)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = \langle \nabla f(p), v\rangle = D_v f(p).$$

(b) Ist $k \geq 1$ und $\Phi = f \cdot dx_I$ für ein $I \in I_k^n$, dann sei $d\Phi := df \wedge dx_I$, das heißt $d\Phi(p) \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n$ mit

$$d\Phi(p) = \underbrace{df(p)}_{\in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n} \wedge \underbrace{dx_I}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n} \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n.$$

(c) Sei $k \geq 1$ und $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$ allgemein. $d\Phi$ wird durch lineare Fortsetzung erklärt, das heißt

$$d\Phi := \sum_{I \in I_k^n} d(\Phi_I dx_I) = \sum_{I \in I_k^n} d\Phi_I \wedge dx_I.$$

**Bemerkungen:** Es gilt

$$\langle d\Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \langle D_{v_i}\Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{v_i} \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle.$$

**Lemma 4.1**
Seien $\Phi, \Psi$ jeweils $k$-Formen der Klasse $C^r$, $r \geq 1$, und $\Theta$ eine $l$-Form der Klasse $C^s$, $s \geq 1$. Dann gilt

(1) $d(\Phi + \Psi) = d\Phi + d\Psi$

(2) $d(\Phi \wedge \Theta) = d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta$.

**Beweis**
(2) Seien $\Phi = f dx_I$, $\Theta = g dx_J$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} d(\Phi \wedge \Theta) &= d(f \cdot dx_I \wedge g \cdot dx_J) = d((f \cdot g) \cdot dx_I \wedge dx_J) = d(f \cdot g) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (g \cdot df + f \cdot dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= g \cdot df \wedge dx_I \wedge dx_J + f \cdot dg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g \cdot dx_J) + (-1)^k \cdot (f \cdot dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta. \end{aligned}$$

■

**Lemma 4.2**
Ist die $k$-Form $\Phi \colon U \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ von der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, so gilt $dd\Phi = 0$ (als $(k+2)$-Form).

**Beweis**
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Phi = f \cdot dx_I$, $I \in I_k^n$. Dann gilt

$$d\Phi = df \wedge dx_I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I$$

und ferner

$$\begin{aligned}
d(d\Phi) &= d(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I) \\
&= (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i) \wedge dx_I \\
&= \sum_{i<j} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \cdot \underbrace{dx_i \wedge dx_j}_{-dx_j \wedge dx_i}) \wedge dx_I = 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Bemerkung:** Eine $k$-Form $\Phi$ mit $d\Phi = 0$ heißt geschlossen. Eine $k$-Form $\Phi$, zu der es eine $k-1$-Form $\eta$ gibt mit $d\eta = \Phi$ heißt exakt. Lemma 4.2 besagt, dass jede exakte Form geschlossen ist.

**Frage:** Gilt auch die Umkehrung? Das heißt: Ist eine geschlossene Form stets exakt?

Im Allgemeinen gilt dies nicht. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ ist dies jedoch richtig (Lemma von Poincaré).

**Ziele:**

- Integration von Differetialformen
- Satz von Stokes (Spezialfall)

**Definition**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine $\lambda^n$-messbare Menge und $\omega$ eine stetige $n$-Form auf $U$. Dann wird das Integral von $\omega$ über $U$ erklärt durch

$$\int_U \omega := \int_U \langle \omega(x), e_1 \wedge \dots \wedge e_n \rangle \, \lambda^n(dx)$$

wobei das $U$ im linken Integral als Menge mit Orientierung (durch die rechts verwendete geordnete Standardbasis) zu verstehen ist. So legt man auch fest, dass

$$\int_{-U} \omega := \int_U -\langle \omega(x), e_1 \wedge \dots \wedge e_n \rangle \, \lambda^n(dx).$$

Niederdimensionale Mengen und Integration:

**Beispiel**
Sei $F = \{p\}$ eine 0-dimensionale Menge, sei $\omega$ eine 0-Form, das heißt eine Funktion $\omega \colon U \to \mathbb{R}$, $p \in U$. Dann wird erklärt

$$\int_F \omega := \omega(p) =: \delta_p(\omega).$$

**Definition**
Sei $n \geq 1$.

(1) Ein $(n-1)$-dimensionaler Quader $F$, der zur $i$-ten Koordinatenachse orthogonal ist, ist von der Form

$$F = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

mit $a_i = b_i$ und $a_j < b_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$.

(2) Orientierung von $F$ durch den $(n-1)$-Vektor

$$\hat{e}_i \coloneqq \bigwedge_{j \neq i} e_j \coloneqq e_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{e_i} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

(3) Integration einer $(n-1)$-Form $\omega$ über $F$. Sei $\omega\colon F \to \bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n$ stetig (oder $\lambda^{n-1}$-messbar). Dann sei

$$\int_F \omega \coloneqq \int_F \langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \, \lambda^{n-1}(dx)$$

und

$$\int_{-F} \omega \coloneqq \int_F -\omega = \int_F -\langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \, \lambda^{n-1}(dx).$$

(4) Seien $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $F_k$ orientierte „Seitenflächen“ von $n$-dimensionalen Quadern, $k \in \mathbb{N}$. Sei $\sum \alpha_k F_k$ eine formale, endliche Linearkombination. Sei $\omega$ eine $(n-1)$-Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$, $F_k \subset U$. Dann sei

$$\int_{\sum \alpha_k F_k} \omega \coloneqq \sum \alpha_k \cdot \int_{F_k} \omega.$$

**Definition (Orientierter Rand)**
Sei $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader mit $a_i < b_i$. Dann sei für $1 \leq i \leq n$

$$R_i^+ \coloneqq [a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n],$$
$$R_i^- \coloneqq [a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

und

$$\partial_o R \coloneqq \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (R_i^+ - R_i^-)$$

sei eine formale Linearkombination von Flächen.

**Satz 4.3**
Seien $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $a_i < b_i$ und $\varphi$ eine $(n-1)$-Form der Klasse $C^k$ mit $k \geq 1$, auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $R \subset U$. Dann gilt

$$\int_R d\varphi = \int_{\partial_o R} \varphi.$$

**Beweis**
Sei zunächst $n = 1$, $\varphi$ eine 0-form, das heißt eine Funktion auf $U$. Es gilt $d\varphi(x) = \varphi'(x) \cdot dx$. Nun gilt

$$\int_{\partial_o R} \varphi = \int_{\partial_o [a_1, b_1]} \varphi = \int_{\{b\} - \{a\}} \varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$$

und

$$\begin{aligned}\int_R d\varphi = \int_{[a,b]} \varphi'(x) dx = \int_{[a,b]} \langle \varphi'(x) dx_1, e_1 \rangle \, \lambda^1(dx) \\ = \int_a^b \varphi'(x) \, \lambda^1(dx) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_{\partial_o R} \varphi,\end{aligned}$$

wobei der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurde.

Sei nun $n \geq 2$. Dann hat $\varphi$ eine Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Es genügt, zu zeigen, dass für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) = \int_{\partial_0 R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned}d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \, \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) \, \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \cdot \left( \int_{R_i^+} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_{R_i^-} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} \right),\end{aligned}$$

wobei der Satz von Fubini und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurden.

Andererseits gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial_o R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \Big( \int_{R_j^+} \varphi_i(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n - \int_{R_j^-} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \Big) \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \Big( \int_{R_j^+} \varphi_i(x) \underbrace{\langle dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle}_{= \begin{cases} 0, & \text{für } j \neq i \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}} \mathscr{H}^{n-1}(dx) \\
&\qquad - \int_{R_j^-} \varphi_i(x) \langle dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle \, \mathscr{H}^{n-1}(dx) \Big) \\
&= (-1)^{i-1} \Big( \int_{R_i^+} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_{R_i^+} \varphi_i \, d\mathscr{H}^{n-1} \Big).
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die Gleichheit. ■

Im vorangehenden Beweis ist die Fallunterscheidung $n = 1$ bzw. $n \geq 2$ nicht zwingend erforderlich. Der Fall $n = 1$ kann dem Fall $n \geq 2$ untergeordnet werden.

**Spezialfall:** Divergenzsatz/Satz von Gauß-Green.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Setze $V_i(x) := \langle V(x), e_i \rangle$, $x \in U$. Sei $V$ von der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Die Divergenz von $V$ ist

$$\operatorname{div}(V)(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x).$$

Ist $\varphi$ eine $(n-1)$-Form auf $\mathbb{R}^n$ mit einer Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

so setzt man

$$V(x) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \varphi_i \cdot e_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
d\varphi &= \Big(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\Big) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\
&= (\operatorname{div}(V)(x)) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet nun $n$ den äußeren Normaleneinheitsvektor von $R$ in $\partial R$, so folgt:

**Korollar 4.4**
Für ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf einer Umgebung von $R$ gilt

$$\int_R \operatorname{div}(V)\, d\mathscr{H}^n = \int_{\partial R} \langle V, n\rangle\, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

**Zurückholen von Formen:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ mit $k \geq 1$. Sei $x \in U$ und sei $\varphi$ eine in $F(x)$ erklärte $r$-Form. dann wird eine $r$-Form $(F^\# \varphi)(x)$ erklärt als $r$-Kovektor durch:

$$\Big(F^\# \varphi\Big)(x)(v_1, \ldots, v_r) \coloneqq \varphi\Big(F(x)\Big)\big(DF_x(v_1), \ldots, DF_x(v_r)\big).$$

Im Spezialfall $r = 0$ ist $\varphi$ eine Funktion und

$$(F^\# \varphi)(x) = \varphi(F(x)) = (\varphi \circ F)(x).$$

**Bemerkungen:** (1) Ist $\varphi$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, und $F$ von der Klasse $\mathcal{C}^{k+1}$, so ist $F^\# \varphi$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$.

(2) $F^\# \varphi(x)$ kann als lineare Abbildung $\bigwedge_r \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

(3) Sei $L\colon V \to W$ linear. Dann wird durch

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits_r L\colon \bigwedge\nolimits_r V &\to \bigwedge\nolimits_r W \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_r &\mapsto L(v_1) \wedge \cdots \wedge L(v_r) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung erklärt.

(4) $(F^\# \varphi)(x)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = (\varphi \circ F)(x)(\bigwedge_r DF_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r))$.

Wir haben nun vier Operationen für Formen ($\wedge$, $d$, $f^\#$, $+$), für die nun Rechenregeln angegeben werden:

**Lemma 4.5**
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^l$ offene Mengen. Seien $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ Abbildungen der Klasse $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Für $k$-Formen $\varphi$, $\omega$ auf $V$, eine $h$-Form $\eta$ auf $V$ und eine $k$-Form $\zeta$ auf $W$ gelten die folgenden Aussagen:

(1) $f^\#(\omega + \varphi) = f^\# \omega + f^\# \varphi$,

(2) $f^\#(\varphi \wedge \eta) = (f^\# \varphi) \wedge (f^\# \eta)$,

(3) $d(f^\# \omega) = f^\#(d\omega)$,

(4) $(g \circ f)^\# \zeta = f^\#(g^\#(\zeta))$.

**Beweis**
Die Aussagen (1), (2), (4) folgen leicht aus den Definitionen (Übung). Zum Nachweis von (3) sei zunächst $k = 0$ und daher $\omega$ eine Funktion auf $V$. Dann gilt $f^{\#}\omega = \omega \circ f$. Für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(f^{\#}\omega)_x(v) = d(\omega \circ f)_x(v) = D(\omega \circ f)_x(v) = D\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = d\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = (f^{\#}d\omega)_x(v),$$

und damit die Behauptung im Fall $k = 0$. Sei nun $k = 1$ und $\omega = d\xi$ mit einer 0-Form $\xi$ auf $V$. Dann gilt

$$d(f^{\#}\omega) = d(f^{\#}d\xi) = d(d(f^{\#}\xi)) = 0 = f^{\#}(dd\xi) = f^{\#}(d\omega).$$

Die Aussage (3) folgt nun wegen (1) und (2) daraus, dass jede „einfache“ $k$-Form äußeres Produkt einer 0-Form und äußeren Ableitungen von 0-Formen ist. ■

**Definition**
Seien $R$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $R \subset U$. Sei $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ mit $k \geq 1$, injektiv und $DF_x$ injektiv für $x \in U$. Dann ist $F(R)$ eine $n$-dimensionale Fläche in $\mathbb{R}^m$, die mit $F_{\#}R$ bezeichnet wird. Formal erklärt man für $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und Quader $R_i$ in $\mathbb{R}^n$

$$F_{\#}(\sum_i \alpha_i R_i) := \sum_i \alpha_i F_{\#} R_i.$$

Ist $\omega$ eine $n$-Form auf einer Umgebung von $F(R)$ in $\mathbb{R}^m$, so sei

$$\begin{aligned} \int_{F_{\#}R} \omega &:= \int_R \langle \omega \circ F(x), \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x)}_{=DF_x(e_1)} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \rangle \, \lambda^n(dx) \\ &= \int_R \underbrace{\langle \omega \circ F(x), \bigwedge\nolimits_n DF_x(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \rangle}_{\langle (F^{\#}\omega)_x, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle} \, \lambda^n(dx) \\ &= \int_R F^{\#}\omega \end{aligned}$$

und analog für formale Linearkombination von Quadern.

**Definition**
Für einen Quader $R$ in $\mathbb{R}^n$ (und analog für formale Linearkombination) erklärt man

$$\partial_o F_{\#} R := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (F_{\#} R_i^+ - F_{\#} R_i^-) = F_{\#} \partial_0 R.$$

**Satz 4.6**
Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $R \subset U$, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ sei $\mathcal{C}^k$ mit $k \geq 1$, injektiv und $DF_x$ injektiv für $x \in U$. Sei $\omega$ eine $(n-1)$-Form auf einer Umgebung von $F(R)$ in $\mathbb{R}^m$ von der Klasse $\mathcal{C}^2$. Dann gilt:

$$\int_{F_{\#}R} d\omega = \int_{\partial_o F_{\#} R} \omega.$$

**Beweis**
Man erhält

$$\int_{F_{\#}R} d\omega = \int_R F^{\#}(d\omega) = \int_R d(F^{\#}\omega) = \int_{\partial_o R} F^{\#}\omega = \int_{F_{\#}\partial_o R} \omega = \int_{\partial_0 F_{\#} R} \omega.$$ ■

## 4.2 Grundlagen und Beispiele

Wir definieren im Folgenden eine Topologie auf Differentialformen und Strömen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\mathcal{E}^k(U) \coloneqq \{(\varphi\colon U \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n) : \varphi \text{ ist von der Klasse } \mathcal{C}^\infty\}.$$

Definiere zu $i \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset U$, $K$ kompakt, eine Seminorm $\nu_K^i$ auf $\mathcal{E}^k(U)$ durch

$$\nu_K^i(\varphi) \coloneqq \sup\{\|D^j\varphi(x)\| : 0 \leq j \leq i,\, x \in K\}.$$

Es sei

$$\mathcal{O}(\varphi, i, K, \varepsilon) \coloneqq \{\psi \in \mathcal{E}^k(U) : \nu_K^i(\varphi - \psi) < \varepsilon\}$$

für $i \in \mathbb{N}_0$, $K \subset U$ kompakt, $\varepsilon > 0$ $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$. Diese Mengen bilden eine Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $\mathcal{E}^k(U)$. Dann ist $(\mathcal{E}^k(U), \mathcal{O})$ ein topologischer Raum (genauer: ein lokal konvexer, Hausdorffscher, topologischer Vektorraum; vgl. Walter Rudin, Functional Analysis, Seite 7).

**Definition**
Es sei

$$\mathcal{E}_k(U) \coloneqq \{(T\colon \mathcal{E}^k(U) \to \mathbb{R}) : T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Zu $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sei

$$\mathcal{O}'(\varphi, a, b) \coloneqq \{T \in \mathcal{E}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}.$$

Auf $\mathcal{E}_k(U)$ wird die „schwache Topologie“ betrachtet, das heißt $\mathcal{O}'(\varphi, a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ bilden eine Subbasis dieser Topologie.

**Definition (Träger)**
Für $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ sei

$$\operatorname{supp}(\varphi) \coloneqq U \setminus \bigcup\{W \subset U : W \text{ offen}, \varphi|_W = 0\}.$$

Für $T \in \mathcal{E}_k(U)$ sei

$$\operatorname{spt}(T) \coloneqq U \setminus \bigcup\{W \subset U : W \text{ offen}, T(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{E}^k(U) \text{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset W\}.$$

**Lemma 4.7**

(a) Zu $T \in \mathcal{E}_k(U)$ gibt es $M > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset U$ kompakt, so dass gilt:

$$T(\varphi) \leq M \cdot \nu_K^i(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$.

(b) Seien $T_i, T \in \mathcal{E}_k(U)$, $i \in \mathbb{N}$, und $T_i \xrightharpoonup{s} T$ für $i \to \infty$. Dann existiert $K \subset U$, $K$ kompakt, mit $\operatorname{spt}(T_i), \operatorname{spt}(T) \subset K$ für $i \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten jetzt Teilmengen von $\mathcal{E}^k(U)$. Sei hierzu $K \subset U$ kompakt und

$$\mathcal{D}_K^k(U) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(U) : \operatorname{supp}(\varphi) \subset K\} \subset \mathcal{E}^k(U),$$

$$\mathcal{D}^k(U) := \bigcup \{\mathcal{D}_K^k(U) : K \subset U \text{ kompakt}\}.$$

Auf $\mathcal{D}^k(U)$ wird die feinste Topologie betrachtet, für die alle Inklusionsabbildungen

$$i_K \colon \mathcal{D}_K^k(U) \to \mathcal{D}^k(U), \qquad \varphi \mapsto \varphi$$

stetig sind. Das heißt, $W \subset \mathcal{D}^k(U)$ ist offen genau dann, wenn $W \cap \mathcal{D}_K^k(U)$ offen ist in der Spurtopologie von $\mathcal{E}^k(U)$ auf $\mathcal{D}_K^k(U)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset U$.

**Definition**
Es sei

$$\mathcal{D}_k(U) := \{(T \colon \mathcal{D}^k(U) \to \mathbb{R}) : T \text{ linear und stetig}\}.$$

Auf $\mathcal{D}_k(U)$ wird durch die Subbasis

$$\{T \in \mathcal{D}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$ eine Topologie festgelegt.

**Bemerkungen:**

- Jedes $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$ hat kompakten Träger.
- $T \in D_k(U)$ hat im Allgemeinen keinen kompakten Träger.
- $\mathcal{D}^k(U) \subset \mathcal{E}^k(U)$, $\mathcal{E}_k(U) \subset \mathcal{D}_k(U)$. Dies folgt etwa aus dem nachfolgenden Lemma 4.9.

**Lemma 4.8**
Seien $\varphi_i, \varphi \in \mathcal{D}^k(U)$, $i \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\varphi_i \to \varphi \text{ für } i \to \infty$$

genau dann, wenn es eine kompakte Menge $K \subset U$ gibt, so dass $\operatorname{supp}(\varphi_i), \operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ für $i \in \mathbb{N}$ und für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt $\|D_j(\varphi_i - \varphi)\| \to 0$ für $i \to \infty$.

**Lemma 4.9**
Sei $T \colon \mathcal{D}^k(U) \to \mathbb{R}$ linear. Genau dann ist $T \in \mathcal{D}_k(U)$, wenn es zu jeder kompakten Menge $K \subset U$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ und $M > 0$ gibt mit

$$T(\varphi) \leq M \cdot \nu_K^i(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}_K^k(U).$$

**Definition**

- Die Elemente von $\mathcal{D}_k(U)$ heißen $k$-dimensionale Ströme auf $U$. ($k = 0$: Distributionen).
- Die Elemente von $\mathcal{E}_k(U)$ heißen $k$-dimensionale Ströme auf $U$ mit kompaktem Träger.

**Beispiele**

(1) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ wird erklärt durch

$$S_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx \text{ für } f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}).$$

Zum Nachweis sei $f \in \mathcal{D}^0_K(\mathbb{R})$, $K \subset U$ kompakt. Wegen

$$|S_g(f)| = |\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,d(x)| \leq \int_R |g(x)|\underbrace{|f(g)|}_{\leq \nu_k^0(f)}\,dx \leq \nu_K^0(f) \cdot \underbrace{\int_K |g(x)|\,dx}_{=:M}$$

und Lemma 4.9 ist dies ein Strom.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$, $\delta_a(f) := f(a)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$. Es ist $\delta_a \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$.

(3) Sei $a \in \mathbb{R}$, $T(f) := f'(a)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$. Es ist $T \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$.

(4) Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. $[\![a, b]\!] \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$[\![a, b]\!](f(x)dx) := \int_a^b f(x)dx \text{ für } f(x)dx \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}).$$

(5) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist $M$ orientierbar, dann gibt es ein stetiges $k$-Vektorfeld $x \mapsto (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \in T_xM$, für $x \in M$, mit der Eigenschaft $\|(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x\| = 1$ für alle $x \in M$. (Die Existenz eines solchen stetigen $k$-Vektorfeldes ist äquivalent zur Orientierbarkeit von $M$; vgl. den Anhang, Abschnitt 5.4.) Dann ist $[\![M]\!] \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$ erklärt durch

$$[\![M]\!](\omega) := \int_M \omega := \int_M \langle \omega(x), (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \rangle\, \mathscr{H}^k(dx) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n).$$

(6) Sei $\xi \in \mathcal{E}^{n-k}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \leq k \leq n$. Dann sei $T_\xi \in \mathcal{D}_k(U)$ erklärt durch

$$T_\xi(\omega) := \int_U \omega \wedge \xi = \int_U \langle \omega \wedge \xi, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

(7) Sei $T \in \mathcal{D}_k(U)$, $\psi \in \mathcal{E}^m(U)$, $m \leq k$. Dann ist $T\lfloor\psi \in \mathcal{D}_{k-m}(U)$ erklärt durch

$$(T\lfloor\psi)(\omega) := T(\psi \wedge \omega) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^{k-m}(U).$$

**Definition (Rand eines Stroms)**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Für $k \geq 1$ ist der Rand $\partial T$ von $T$ erklärt durch $\partial T \in \mathcal{D}_{k-1}(U)$ mit

$$\partial T(\omega) := T(d\omega)$$

für $\omega \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$.

**Beispiele**

(1) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$\partial([\![a, b]\!])(f) = [\![a, b]\!](df) = [\![a, b]\!](f'(x)dx) = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = (\delta_b - \delta_a)(f)$$

Also ist $\partial[\![a, b]\!] = \delta_b - \delta_a$.

(2) Sei $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist $T_g \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ erklärt durch

$$T_g(\omega(x)dx) := \int_{\mathbb{R}} g(x)\omega(x)dx.$$

Ferner sei $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ wie im vorigen Beispiel. Dann folgt

$$\partial T_g(f) = T_g(df) = T_g(f'(x)dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} g'(x)f(x)dx = -S_{g'}(f) = S_{-g'}(f)$$

Also ist $\partial T_g = S_{-g'}$.

(3) Sei in (2) nun $g$ nur noch stetig, etwa $g(x) = |x|$. Dann ist $\partial T_g = S_{-\operatorname{sgn}}$.

(4) Sei $M$ eine orientierte, kompakte $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial M$ und $[\![M]\!] \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$ der induzierte Strom. Mit dem Satz von Stokes folgt: Für $\eta \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$ gilt

$$\partial[\![M]\!](\eta) = [\![M]\!](d\eta) = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = [\![\partial M]\!](\eta)$$

also gilt $\partial[\![M]\!] = [\![\partial M]\!]$.

(5) Sei $k \geq j+1$, $\xi \in \mathcal{E}^j(U)$, $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $\omega \in \mathcal{D}^{k-j-1}(U)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\partial(T\lfloor\xi)(\omega) &= T\lfloor\xi(d\omega) = T(\xi \wedge d\omega) \\
&= T((-1)^j d(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1} d\xi \wedge \omega) \\
&= (-1)^j T(d(\xi \wedge \omega)) + (-1)^{j-1} T(d\xi \wedge \omega) \\
&= (-1)^j \partial T(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1}(T\lfloor d\xi)(\omega) \\
&= (-1)^j ((\partial T)\lfloor\xi)(\omega) + (-1)^{j-1}(T\lfloor d\xi)(\omega),
\end{aligned}$$

also gilt

$$\partial(T\lfloor\xi) = (-1)^j((\partial T)\lfloor\xi) + (-1)^{j-1}(T\lfloor d\xi)$$

und somit

$$(\partial T)\lfloor\xi = T\lfloor(d\xi) + (-1)^j \partial(T\lfloor\xi).$$

(6) $\partial\partial T = 0$, für $T \in \mathcal{D}_k(U)$ mit $k \geq 2$, da $\partial\partial T(\omega) = \partial T(d\omega) = T(dd\omega) = T(0) = 0$.

**Definition (Masse von Differentialformen und Strömen)**

- Euklidische Masse von Differentialformen $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ in $x \in U$:

$$|\omega(x)| := \Big(\sum_{I \in I_k^n} \omega_I(x)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

- Komasse von $\omega(x)$:

$$\|\omega(x)\| := \sup\{\omega(x)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) : v_i \in \mathbb{R}^n, \|v_i\| \leq 1\}$$

- Euklidische Masse eines Stromes $T \in \mathcal{D}_k(U)$:

$$\underline{\mathbf{M}}(T) := \sup\{T(\omega) : |\omega(x)| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

- Masse von $T$:
$$\mathbf{M}(T) \coloneqq \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

Wegen
$$|\omega(x)| \geq \|\omega(x)\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega(x)|$$
folgt
$$\binom{n}{k}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}(T) \leq \underline{\mathbf{M}}(T) \leq \cdot \mathbf{M}(T)$$
mit einer Konstanten $c$, die nur von $n$ abhängt.

**Beispiel**
Ist $T = [\![M]\!]$, $M$ eine orientierbare, kompakte, $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(T) &= \sup\{\int_M \omega : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\} \\
&= \sup\{\int_M \underbrace{\langle \omega(x), \xi(x) \rangle}_{\leq \|\omega(x)\| \cdot \|\xi(x)\| \leq 1} \mathscr{H}^k(dx) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\} \\
&\leq \mathscr{H}^k(M).
\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass hier sogar Gleichheit gilt.

**Definition**
Eine Folge $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$ konvergiert in der Massenorm gegen ein $T \in \mathcal{D}_k(U)$, falls $\mathbf{M}(T_i - T) \to 0$ für $i \to \infty$.

**Bemerkung:**

- Ist $\mathbf{M}(0) = 0$, so gilt $T = 0$.
- Gilt $T_i \to T$ in der Massenorm, so gilt $T_i \overset{s}{\rightharpoonup} T$, denn:

  Sei $T_j \to 0$ in der Massenorm für $j \to \infty$, das heißt $\mathbf{M}(T_j) \to 0$. Für $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ gilt:
  $$|T_j(\omega)| \leq \mathbf{M}(T_j) \cdot \sup_{x \in U} \|\omega(x)\| \to 0$$
  also $T_j(\omega) \overset{s}{\rightharpoonup} 0$ für $j \to \infty$.

  Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Seien $T_j = \delta_j \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbf{M}(T_j) = 1$, aber $T_j \overset{s}{\rightharpoonup} 0$, da $T_j(f) \to 0$ für $j \to \infty$ und $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$.

**Lemma 4.10**
Seien $T_j, T \in \mathcal{D}_k(U)$, $j \in \mathbb{N}$ und $T_j \overset{s}{\rightharpoonup} T$ für $j \to \infty$. Dann gilt
$$\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathbf{M}(T_j).$$

**Beweis**
Sei $\mathbf{M}(T) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ mit $\|\omega(x)\| \leq 1$ für alle $x \in U$ und $T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$. Daher folgt:

$$\liminf_{j\to\infty} \mathbf{M}(T_j) \geq \liminf_{j\to\infty} T_j(\omega) = T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$$

also $\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathbf{M}(T_j)$.

Sei $\mathbf{M}(T) = \infty$. Dann existiert zu $m \in \mathbb{N}$ ein $\omega$ wie oben mit $T(\omega) \geq m$. Weiter wie oben. ∎

**Beispiel**
Ströme mit minimaler Masse
$T = [\![B^2]\!] \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$, d.h. $T(\omega) = \int_B \langle \omega(x), e_1 \wedge e_2 \rangle \mathscr{H}^2(dx)$, $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^2)$.

Frage: Hat $T$ minimale Masse unter allen 2-Strömen $S \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial S = \partial T = [\![\partial B^2]\!]$.

<++>

**Lemma 4.11**
Sei $T \in \mathcal{D}_n(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{M}(T) < \infty$. Es gebe ein $\Omega = d\varphi \in \mathcal{D}^n(U)$ mit $\|\Omega\| \leq 1$ und $\mathbf{M}(T) = T(\Omega)$. Dann gilt für alle $S \in \mathcal{D}_n(U)$ mit $\partial S = \partial T$:

$$\mathbf{M}(T) \leq \mathbf{M}(S).$$

**Beweis**
$\mathbf{M}(T) = T(\Omega) = T(d\varphi) = \partial T(\varphi) = \partial S(\varphi) = S(d\varphi) = S(\Omega) \leq \mathbf{M}(S)$. ∎

**Zurück zum Beispiel:** Sei $\Omega \coloneqq dx_1 \wedge dx_2 \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\|\Omega\| = 1$ und

$$T(\Omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle dx_1 \wedge dx_2, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{=1} \mathscr{H}^2(dx) = \mathscr{H}^2(B^2) = \mathbf{M}(T),$$

da

$$T(\omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle \omega, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{\leq \|\omega\| \cdot \|e_1 \wedge e_2\|} d\mathscr{H}^2.$$

Ferner gilt für $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ gerade $d\varphi_x = \frac{1}{2} \cdot (dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_1) = \Omega$. Mit obigem Lemma folgt, dass $T$ minimierend ist. Zur Berechnung von $\partial T$ betrachten wir

$\eta = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}
\partial T(\eta) = T(d\eta) &= T(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2) \\
&= T((\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}) dx_1 \wedge dx_2) \\
&= \int_{B^2} (\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}) \mathscr{H}^2(dx) \\
&= \int_{B^2} \div \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} \mathscr{H}^2(dx) \\
&= \int_{S^1} \underbrace{\langle \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} (x), x \rangle}_{= \eta_2(x) \cdot x_1 - \eta_1(x) x_2} \mathscr{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2, \underbrace{-x_2 e_1 + x_1 e_2}_{\xi \in T_x S^1} \rangle \mathscr{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta, \xi \rangle d\mathscr{H}^1 \\
&= [\![ S^1 ]\!](\eta).
\end{aligned}$$

## 4.3 Ströme mit lokalendlicher Masse

Für Ströme mit lokalendlicher Masse liefert der Rieszsche Darstellungssatz eine „explizite“ Integraldarstellung. Dazu sei

$$\mathbf{M}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty\}$$

die Menge der *Ströme endlicher Masse* und

$$\mathbf{N}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty \text{ und } \mathbf{M}(\partial T) < \infty\}$$

die Menge der *normalen Ströme*.

**Beispiel**
$T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ mit $T(\omega(x)\, dx) := \omega(0)$. Dann ist $\|\omega(x)\, dx\| = |\omega(x)|$ und daher $\mathbf{M}(T) = 1$. Aber $\partial T(f) = T(df) = T(f'(x)\, dx) = f'(0)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$ und somit $\mathbf{M}(\partial T) = \infty$.

**Lokalisierung:** Sei $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$, $V$ und $U$ offen, $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Es sei

$$\underline{\mathbf{M}}_V(T) := \sup\{T(\omega) : \ |\omega(x)| \ \leq 1 \ \forall x \in U, \operatorname{supp}(\omega) \subset V\}$$

und

$$\mathbf{M}_V(T) := \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U, \operatorname{supp}(\omega) \subset V\}.$$

Weiter seien definiert:

$$\underline{\mathbf{M}}_{k,\mathrm{loc}}(U) \coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{M}}_V(T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{M}_{k,\mathrm{loc}}(U) \coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}_V(T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\underline{\mathbf{N}}_{k,\mathrm{loc}}(U) \coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{N}}_V(T) < \infty,\ \underline{\mathbf{N}}_V(\partial T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(U) \coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{N}_V(T) < \infty,\ \mathbf{N}_V(\partial T) < \infty \ \forall V \subset U,\ V \text{ offen},\ \bar{V} \text{ kompakt in } U\}.$$

**Satz 4.12**
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_V(T_i) < \infty \qquad \text{für alle } V \subset U \text{ offen },\bar{V} \text{ kompakt },\bar{V} \subset U.$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(T_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und $T \in \mathcal{D}_k(U)$ mit $T_{n_i} \xrightarrow{s} T$ für $i \to \infty$.

**Beweis (Skizze)**
Verwende, dass Ströme stetige, lineare Funktionale auf $\mathcal{D}^k(U)$ (topologischer Vektorraum) sind. Jetzt kann man lokal den Satz von Banach-Alaoglu anwenden, der die Auswahl einer lokal schwach* konvergenten Teilfolge erlaubt. Diagonalargument. ∎

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\mu$ ein borelreguläres Maß auf $U$ mit $\mu(K) < \infty$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (Radonmaß). Sei $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ eine $\mu$-messbare Abbildung und $\|\xi\| = 1$ $\mu$-fast-überall. Dann wird durch

$$L(f) \coloneqq \int_U \langle f(x), \xi(x)\rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^n)$$

ein lineares Funktional $L : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ erklärt. Es gilt

$$|L(f)| \le \int_U |\langle f(x), \xi(x)\rangle| \mu(dx) \le \mu(K) < \infty$$

falls $f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m)$, $\mathrm{supp}(f) \subset K$, $K \subset U$ kompakt, $\|f\| \le 1$. In dieser Situation gilt

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \le 1, \mathrm{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

für alle $K \subset U$, $K$ kompakt.

**Satz 4.13 (Riesz)**
Sei $L\colon \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein lineares Funktional, das

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \le 1, \mathrm{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

erfüllt. Dann existiert ein Radonmaß $\mu$ auf $U$ und eine $\mu$-messbare Abbildung $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\|\xi(x)\| = 1$ für $\mu$-fast-alle $x \in U$ und

$$L(f) = \int_U \langle f(x), \xi(x)\rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m).$$

Ferner gilt für $V \subset U$ offen:

$$\mu(V) = \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m),\ \mathrm{supp}(f) \subset V,\ \|f\| \le 1\}.$$

**Beweis**
Siehe L. Simon, Lecture Notes of the ANU, Canberra, GMT. ∎

Als Folge erhält man für Ströme lokalendlicher Masse.

**Satz 4.14**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Dann sind äquivalent:

(1) $T \in \mathbf{M}_{k,\mathrm{loc}}(U)$.

(2) Es gibt ein Radonmaß $\mu_T$ auf $U$ und eine $\mu_T$-messbare Abbildung $\xi : U \to \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ mit $|\xi(x)| = 1$ für $\mu_T$-fast-alle $x \in U$, so dass gilt:

$$T(\omega) = \int \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \mu_T(dx), \quad \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

Hierbei ist für $V \subset U$ offen:

$$\mu_T(V) = \sup\{T(\omega) : \omega \in \mathcal{D}^k(U), \forall x \in U\colon |\omega(x)| \leq 1, \operatorname{supp}(\omega) \subset V\} = \underline{\mathbf{M}}_V(T).$$

**Bemerkung:** (1) In der Situation des Satzes sagt man, dass $T$ als Integral darstellbar ist.

(2) Auf $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ gibt es die euklidische Norm $|\cdot|$, sowie die Komassen-Norm $\|\cdot\|$. Ferner existiert auf $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$ neben der euklidischen Norm $|\cdot|$ die Masse-Norm $\|\cdot\|$:

$$\|\xi\| := \sup\{\langle \omega, \xi \rangle : \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n,\ \|\omega\| \leq 1\}$$

**Zusammenhänge:**

$$|\omega| \geq \|\omega\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega|, \qquad \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n,$$

$\|\omega\| = |\omega|$ für einen einfachen Kovektor $\omega$. Hierbei nennt man $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ einfach, falls es $\eta_1, \dots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ gibt mit $\omega = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k$. Es gilt nun

$$|\xi| \leq \|\xi\| \leq \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} |\xi|, \qquad , \xi \in \bigwedge\nolimits_k \mathbb{R}^n, \qquad \text{und } \|\xi\| = |\xi|$$

für $\xi$ einfach. Für die Verknüpfung mit dem äußeren Produkt gilt dann

$$\|\xi \wedge \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|,\ \|\varphi \wedge \omega\| \leq \binom{p+q}{p} \|\varphi\| \cdot \|\omega\|,$$

$\xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n$, $\eta \in \bigwedge_q \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n$, $\omega \in \bigwedge^q \mathbb{R}^n$.

$$|\langle \varphi, \xi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\xi\|$$

für $\varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n$, $\xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n$.

(3) Im vorangehenden Satz setzt man $\overrightarrow{T}(x) := \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$ und $\|T\| := \|\xi\| \cdot \mu_T$, wobei

$$\|T\|(M) = \int \mathbb{1}_M(x)\|\xi(x)\|\mu_T(dx)$$

und erhält so:

$$T(\omega) = \int_U \langle \omega(x), \overrightarrow{T}(x)\rangle \, \|T\|(dx)$$

mit $\|\overrightarrow{T}\| = 1$, $\|T\|$-fast-überall auf $U$, $\|T\|(V) = \sup\{T(\omega : \omega \in \mathcal{D}^k(U),\ \|\omega(x)\| \leq 1$ für $x \in U$, $\operatorname{supp}(\omega) \subset V\}$, sowie $\mathbf{M}_V(T) = \|T\|(V)$.

(4) Ist $T$ durch ein Integral darstellbar, so erklärt man für $A \subset U$, $A$ Borelsch:

$$(T\lfloor A)(\omega) := \int_A \langle \omega, \overrightarrow{T}\rangle \, d\|T\|$$

oder für eine beschränkte Borelfunktion $f : U \to \mathbb{R}$:

$$(T\lfloor f)(\omega) := \int_U f \cdot \langle \omega, \overrightarrow{T}\rangle \, d\|T\|.$$

## 4.4 Produkt, Push-forward und Homotopieformel

**Produkt von Strömen.** Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ offen und $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$, $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$ Ströme. Im Folgenden sind $x_1, \dots, x_{n_1}$ Koordinaten von $\mathbb{R}^{n_1} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ und $y_1, \dots, y_{n_2}$ sind Koordinaten (bzw. Koordinatenfunktionen) von $\mathbb{R}^{n_2} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ (mit naheliegenden Identifikationen).

Sei $\omega \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$. Dann kann man $\omega$ in der Form

$$\omega = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ |\alpha|+|\beta|=m_1+m_2}} \omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta$$

geschrieben werden.

**Definition**
Mit obiger Notation setzen wir

$$S \times T(\omega) := \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ |\alpha|=m_1 \\ |\beta|=m_2}} S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta}(x,y)dy_\beta)dx_\alpha).$$

Man kann sich leicht überlegen, dass diese Definition korrekt ist, das heißt etwa, dass das Argument von $S$ im Definitionsbereich von $S$ ist und $S \times T \in \mathcal{D}_{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$ wieder ein Strom ist.

**Satz 4.15**
Seien $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$ und $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$ Ströme.

(1) Seien $p\colon \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $(x,y) \mapsto x$ und $q\colon \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$, $(x,y) \mapsto y$ die Projektionsabbildungen. Seien $\varphi \in \mathcal{D}^k(U_1)$, $\eta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-k}(U_2)$. Dann gilt:

$$S \times T(p^{\#}\varphi \wedge q^{\#}\eta) = \begin{cases} S(\varphi) \cdot T(\eta), & k = m_1, \\ 0, & k \neq m_1 \end{cases}$$

und für

$$\omega = \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha(x)\omega_\beta(y) dx_\alpha \wedge dy_\beta = \underbrace{\Big(\sum_\alpha \omega_\alpha(x) dx_\alpha\Big)}_{:=\omega_1(x)} \wedge \underbrace{\Big(\sum_\beta \omega_\beta(y) dy_\beta\Big)}_{:=\omega_2(y)}$$

gilt

$$S \times T(\omega) = S(\omega_1) \cdot T(\omega_2).$$

(2) $\operatorname{spt}(S \times T) = \operatorname{spt}(S) \times \operatorname{spt}(T)$.

(3) $\partial(S \times T) = \partial S \times T + (-1)^{m_1} S \times \partial T$.

(4) Seien $P : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $x \mapsto (x,0)$, $Q : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $y \mapsto (0,y)$. Haben $S$ und $T$ lokalendliche Massen, so auch $S \times T$ und

$$S \times T(\cdot) = \int \langle \cdot, (\textstyle\bigwedge_{m_1} P)\overrightarrow{S} \wedge (\textstyle\bigwedge_{m_2} Q)\overrightarrow{T} \rangle \, d(\|S\| \otimes \|T\|)$$

**Beweis**

(3) Sei $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-1}(U_1 \times U_2)$. Dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\partial(S \times T)(\omega) &= S \times T(dw) \\
&= S\Big(\sum_{i=1}^{n_1} T\Big(\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dy_\beta\Big) dx_i \wedge dx_\alpha\Big) + (-1)^{|\alpha|} S\Big(T\Big(\sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_\beta\Big) dx_\alpha\Big) \\
&= S(d_x(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) + (-1)^{|\alpha|} S(T(d_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) \\
&= \partial S(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) + (-1)^{m_1} S(\partial T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\
&= \partial S \times T(\omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) + (-1)^{m_1} (S \times \partial T)(\omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\
&= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\
&= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega).
\end{aligned}$$

(4) Sei $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$. Die Voraussetzung besagt, dass

$$S = \int_{U_1} \langle \cdot, \overrightarrow{S} \rangle d\|S\|$$

und

$$T = \int_{U_2} \langle \cdot, \overrightarrow{T} \rangle d\|T\|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
S \times T(\omega) &= S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\
&= \int \langle T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha, \overrightarrow{S} \rangle d\|S\| \\
&= \int T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) \langle dx_\alpha, \overrightarrow{S} \rangle d\|S\| \\
&= \int_{U_1} \int_{U_2} \langle \omega_{\alpha\beta} dy_\beta, \overrightarrow{T} \rangle \, d\|T\| \langle dx_\alpha, \overrightarrow{S} \rangle \, d\|S\| \\
&= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x,y) dy_\beta, \overrightarrow{T}(y) \rangle \langle dx_\alpha, \overrightarrow{S}(x) \rangle \, d(\|S\| \otimes \|T\|) \\
&= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x,y) dx_\alpha \wedge dy_\beta, (\textstyle\bigwedge_{n_1} P) \overrightarrow{S}(x) \wedge (\textstyle\bigwedge_{n_2} Q) \overrightarrow{T}(y) \rangle \, d(\|S\| \otimes \|T\|). \blacksquare
\end{aligned}$$

Fazit: Es gilt insbesondere

$$\|S \times T\| = \|S\| \otimes \|T|, \qquad \overrightarrow{S \times T} = (\textstyle\bigwedge_{n_1} P) \overrightarrow{S} \wedge (\textstyle\bigwedge_{n_2} Q) \overrightarrow{T}.$$

**Beispiel**
Ist $T$ durch ein Integral darstellbar, so auch $[\![0,1]\!] \times T$ mit $\|[\![0,1]\!] \times T\| = \lambda^1_{[0,1]} \otimes \|T\|$ und $\overrightarrow{[\![0,1]\!] \times T} =$„$e_1 \wedge \overrightarrow{T}$“ (hier wurden die Einbettungsabbildungen weggelassen).

**Bild eines Stromes.** Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ferner seien $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $f \colon U \to V$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung. **Voraussetzung:** $f|_{\operatorname{spt}(T)}$ sei eigentlich (das heißt, für $K \subset V$, $K$ kompakt sei $f^{-1}(K) \cap \operatorname{spt}(T) \subset U$ stets kompakt).

**Beispiel**
Seien $f \colon U := (0,\infty) \to V := \mathbb{R}$ und $T := [\![0,b]\!] \in \mathcal{D}_0(U)$ für $b > 0$. Dann ist

$$f^{-1}([0,b]) \cap \operatorname{spt}(T) = (0,b] \cap [0,b] = (0,b] \subset U$$

nicht kompakt.

**Definition**
Seien $f$ und $T$ wie oben. Sei $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$. Sei $\gamma \in \mathcal{D}_0(U)$ mit

$$\operatorname{spt}(T) \cap \underbrace{\operatorname{supp}(f^\# \omega)}_{\subset f^{-1}(\operatorname{supp}(\omega))} \subset \{\gamma = 1\}^o.$$

Dann setzt man

$$(f_\# T)(\omega) := T(\gamma \wedge f^\# \omega).$$

**Bemerkungen:** (i) $\operatorname{supp}(f^\# \omega) \subset f^{-1}(\operatorname{supp}(\omega))$ und $\operatorname{supp}(\omega) \subset V$ ist kompakt, das heißt $\operatorname{spt}(T) \cap \operatorname{supp}(f^\# \omega) \subset \operatorname{spt}(T) \cap f^{-1}(\operatorname{supp}(\omega))$. Dabei ist $\operatorname{spt}(T) \cap f^{-1}(\operatorname{supp}(\omega))$ kompakt und $\operatorname{spt}(T) \cap \operatorname{supp}(f^\# \omega)$ abgeschlossen und damit auch kompakt.

(ii) Auf die Einführung von $\gamma$ kann man im Allgemeinen nicht verzichten, da $\operatorname{supp}(f^{\#}\omega)$ nicht kompakt sein muss.

(iii) Die Definition von $(f_{\#}T)(\omega)$ ist von der konkreten Wahl von $\gamma$ unabhängig. Seien nämlich $\gamma_1, \gamma_2$ wie oben. Es ist

$$\operatorname{supp}((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^{\#}\omega) \cap \operatorname{spt}(T) = \emptyset.$$

Daraus folgt mittels einer Zerlegung der Eins

$$T((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^{\#}\omega) = 0.$$

Dies schließlich ergibt

$$T(\gamma_1 \wedge f^{\#}\omega) = T(\gamma_2 \wedge f^{\#}\omega).$$

(iv) Manchmal geht es auch ohne $\gamma$.

**Lemma 4.16**
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $T \in \mathcal{D}_k(U)$, $f\colon U \to V$ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$, wobei $f|_{\operatorname{spt}(T)}$ eigentlich ist. Dann gilt

(1) $\operatorname{spt}(f_{\#}T) \subset f(\operatorname{spt}(T))$

(2) $\partial(f_{\#}T) = f_{\#}(\partial T)$.

(3) Ist $T$ durch ein Integral darstellbar, so gilt das auch für $f_{\#}T$ und

$$\|f_{\#}T\| \leq f_{\#}\big(\|T\| \llcorner \|(\textstyle\bigwedge_m Df)\overrightarrow{T}\|\big).$$

Hierbei ist für eine messbare Menge $A \subset V$ die rechte Seite erklärt durch

$$f_{\#}\big(\|T\| \llcorner \|(\textstyle\bigwedge_m Df)\overrightarrow{T}\|\big)(A) = \displaystyle\int_{f^{-1}(A)} \|\textstyle\bigwedge_m Df_x \overrightarrow{T}(x)\| \, \|T\|(dx).$$

**Satz 4.17 (Homotopieformel)**
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, seien $f, g\colon U \to V$ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ und $h\colon [0,1] \times U \to V$ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ mit $h(0,\cdot) = f$ und $h(1,\cdot) = g$. Sei $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $h|_{[0,1]\times\operatorname{spt}(T)}$ sei eigentlich. Dann gilt

$$g_{\#}T - f_{\#}T = h_{\#}([\![0,1]\!] \times \partial T) + \partial h_{\#}([\![0,1]\!] \times T),$$

wobei für $k = 0$ der erste Term in der Summe entfällt.

**Beweis**
Wegen $\operatorname{spt}([\![0,1]\!] \times T) = [0,1] \times \operatorname{spt}(T)$ und $\operatorname{spt}(\partial T) \subset \operatorname{spt}(T)$ und nach Voraussetzung sind alle

Ströme erklärt. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\partial h_\#([\![0,1]\!] \times T) &= h_\# \partial([\![0,1]\!] \times T) \\
&= h_\#(\partial[\![0,1]\!] \times T + (-1)^1 [\![0,1]\!] \times \partial T) \\
&= h_\#((\delta_1 - \delta_0) \times T - [\![0,1]\!] \times \partial T) \\
&= h_\#(\delta_1 \times T) - h_\#(\delta_0 \times T) - h_\#([\![0,1]\!] \times \partial T) \\
&= g_\# T - f_\# T - h_\#([\![0,1]\!] \times \partial T).
\end{aligned}$$

Sei für den letzten Schritt $\tau \colon U \to \mathbb{R} \times U$, $x \mapsto (0,x)$. Dann ist $\delta_0 \times T = \tau_\# T$. In der Tat:

$$\delta_0 \times T(\omega(t,x)dx) = \delta_0(T(\omega(t,x)dx) = T(\omega(0,x)dx)$$

und

$$\tau_\# T(\omega(t,x)dx) = T(\gamma \wedge \tau^\#(\omega(t,x)dx)) = T(\gamma \wedge \omega(0,x)dx) = T(\omega(0,x)dx).$$

Hiermit folgt

$$h_\#(\delta_0 \times T) = h_\#(\tau_\# T) = (h \circ \tau)_\# T = f_\# T.$$

Die hierbei benutzte Eigenschaft $h_\# \circ \tau_\# = (h \circ \tau)_\#$ ist leicht einzusehen. ■

**Beispiel**
Sei $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial T = 0$, $\operatorname{spt}(T)$ kompakt, $k \geq 1$. Nach der Homotopieformel gilt

$$g_\# T - f_\# T = \partial h_\#([\![0,1]\!] \times T) + 0.$$

Ist spezieller: $g(x) := x$, $f(x) := 0$, so gilt $g_\# T = T$, $f_\# T = 0$ und somit:

$$T = \partial \underbrace{h_\#([\![0,1]\!] \times T)}_{\in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Korollar 4.18**
Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.17.

(a) Ist $T$ durch ein Integral darstellbar, so gilt mit der affinen Homotopie $h(t,x) = (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$:

$$\mathbf{M}(h_\#([\![0,1]\!] \times T)) \leq \|T\|\big(|g-f| \cdot \max\{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\}\big).$$

(b) Ist $\mathbf{M}(T) < \infty$ und $h$ wie in (a), so gilt

$$\mathbf{M}(h_\#([\![0,1]\!] \times T)) \leq \sup_{\operatorname{spt}(T)} |g-f| \cdot \sup_{\operatorname{spt}(T)} \{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\} \cdot \mathbf{M}(T).$$

**Beweis**
Für $\psi \in \mathcal{D}^{k+1}(V)$ folgt:

$$\begin{aligned} h_{\#}([\![0,1]\!] \times T)(\psi) &= \int_{(0,1)\times U} \langle e_1 \wedge \overrightarrow{T}, h^{\#}\psi\rangle \, (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t,x)) \\ &= \int_{(0,1)\times U} \langle \psi(h(t,x)), \underbrace{\textstyle\bigwedge_{k+1} Dh_{(t,x)}(e_1 \wedge \overrightarrow{T})}_{=(g(x)-f(x))\wedge \underbrace{\bigwedge_k D_x h_{(t,x)} \overrightarrow{T}}_{=(1-t)Df_x(\overrightarrow{T})+t\cdot Dg_x(\overrightarrow{T})}}\rangle \, (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t,x)) \\ &= \int_{(0,1)\times U} \|\psi(h(t,x))\| \cdot \big((1-t)\|Df_x\|^k + t\cdot \|Dg_x\|^k\big) \, (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t,x)). \blacksquare \end{aligned}$$

**Anwendung:** Sei $U$ sternförmig in $\mathbb{R}^n$ bezüglich $u \in U$. Betrachte: $g(x) := x$, $f(x) := u$, $x \in U$, $h(t,x) := (1-t)\cdot u + t\cdot x$. Für $\psi \in \mathcal{D}^k(U)$ ist $f^{\#}\psi = 0$ $(k \geq 1)$ und $g^{\#}\psi = \psi$. Wir betrachten den speziellen Strom

$$T(\beta) := \langle \beta, \eta\rangle, \quad \beta \in \mathcal{D}^k(U),$$

wobei $\eta\colon U \to \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ fest gewählt ist mit kompaktem Träger in $U$ und von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_{\#}T(\psi) &= T(\gamma \wedge g^{\#}\psi) = T(\gamma\wedge\psi) = \langle \gamma\wedge\psi, \eta\rangle = \langle \psi, \eta\rangle \\ f_{\#}T(\psi) &= 0 \\ h_{\#}([\![0,1]\!] \times \partial T)(\psi) &= [\![0,1]\!] \times \partial T(h^{\#}\psi) = \partial T\big((h^{\#}\psi)_{[\![0,1]\!]}\big) = T\big(d((h^{\#}\psi)_{[\![0,1]\!]})\big) \\ \partial h_{\#}([\![0,1]\!] \times T)(\psi) &= h_{\#}([\![0,1]\!] \times T)(d\psi) = \ldots \end{aligned}$$

Ist $d\psi = 0$, so erhält man aus der Homotopieformel für Ströme:

$$\langle \psi, \eta\rangle = T\big(d((h^{\#}\psi)_{[\![0,1]\!]})\big) + 0$$

und damit

$$\langle \psi, \eta\rangle = \langle d((h^{\#}\psi)_{[\![0,1]\!]}), \eta\rangle.$$

Dies zeigt

$$\varphi = d((h^{\#}\psi)_{[\![0,1]\!]}).$$

Also ist $\psi$ exakt. Dies ist ein Beweis des Lemmas von Poincaré.

**Bild eines Stromes unter einer Lipschitzabbildung**. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathbf{N}_{k,loc}(U)$ und sei $f\colon U \to V$ Lipschitz sowie $f|_{\operatorname{spt}(T)}$ eigentlich. Zu $f$ gibt es eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen von $U$ nach $V$ mit einer globalen Schranke für die Lipschitzkonstante, wobei $f_i \to f$ gleichmäßig konvergiert. Mit der Homotopieformel sieht man nun

$$\big|(f_{i\#}T)(\omega) - (f_{j\#}T)(\omega)\big| \leq c \cdot \sup_{f^{-1}(K)\cap \operatorname{spt}(T)} |f_i - f_j|,$$

falls $K \subset V$, $K$ kompakt und $\operatorname{supp}(\omega) \subset K^o$. Folglich ist $(f_{i\#}T)(\omega)$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen, und es existiert also

$$(f_{\#}T)(\omega) := \lim_{i\to\infty} (f_{i\#}T)(\omega).$$

Man kann zeigen:

- $f_{\#}T \in \mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(V)$.
- Die Definition ist von der Wahl der Folge unabhängig.
- $\partial f_{\#}T = f_{\#}\partial T$.
- $\operatorname{spt}(f_{\#}T) \subset f(\operatorname{spt}(T))$.

## 4.5 Rektifizierbare Ströme

**Definition**

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein Strom $T \in \mathcal{D}_k(U)$ heißt rektifizierbar, falls es

- eine $\mathscr{H}^k$-messbare, abzählbar $k$-rektifizierbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{H}^k(M \cap K) < \infty$ für $K \subset U$, $K$ kompakt,
- eine $\mathscr{H}^k$-messbare Abbildung $\xi\colon M \to \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| = 1$ $\mathscr{H}^k$-fast-überall auf $M$ und $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ mit $v_i(x) \in \bigwedge_k T_xM$ für $\mathscr{H}^k$-fast-alle $x \in M$,
- eine $\mathscr{H}^k$-messbare Funktion $\theta\colon M \to [0, \infty]$

gibt, so dass gilt
$$T(\omega) = \int_M \langle \omega, \xi \rangle \theta \, d\mathscr{H}^k.$$

(b) Ist $\theta$ sogar ganzzahlig, so heißt ein solcher Strom $T$ ganzzahlig rektifizierbar. Die Menge der ganzzahlig rektifizierbaren Ströme wird mit $\mathcal{R}_k(U)$ bezeichnet.

(c) T heißt integraler Strom, falls $T$ und $\partial T$ ganzzahlig rektifizierbare Ströme sind. Die Menge der integralen Ströme wird mit $\mathcal{I}_k(U)$ bezeichnet.

**Bemerkungen:** (1) Übersicht:
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_k(U) & \subset & \mathcal{R}_k(U) \\ \cap & & \cap \\ \mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(U) & \subset & \mathbf{M}_{k,\mathrm{loc}}(U) \end{array}$$

(2) Sei $T \in \mathcal{R}_k(U)$ und sei $\theta$ auf $M$ integrierbar. Dann ist
$$\mathbf{M}(T) = \int_M \theta \, d\mathscr{H}^k.$$

(3) $\mathcal{I}_k(U) \subset \mathcal{R}_k(U) \cap \mathbf{N}_{k,\mathrm{loc}}(U)$. Gilt „$\supset$"? Die positive Antwort wird nachfolgenden als Satz formuliert (Randrektifizierbarkeit).

**Beispiele**

(1) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt
$$[\![M]\!] \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n).$$

(2) Sei $M$ wie in (1) und $\mathscr{H}^{k-1}(\partial M) < \infty$. Dann gilt
$$[\![M]\!] \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n),$$
denn $\partial [\![M]\!] = [\![\partial M]\!]$.

(3) $\tilde{T} \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^2)$ sei definiert durch

$$\tilde{T}(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_2(s,0)\, ds.$$

Dann ist $\tilde{T}$ nicht 1-rektifizierbar. Aber

$$T(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_1(s,0) ds$$

ist 1-rektifizierbar.

(4) Es ist

$$T_j := \sum_{i=1}^{j} [\![\{-\frac{i}{j}\} \times [0, \frac{1}{j}]]\!] \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^2).$$

Es gilt $\mathbf{M}(T_j) = 1$, $\mathbf{M}(\partial T_j) = 2j$, $T_j \overset{s}{\rightharpoonup} \tilde{T}$ für $j \to \infty$. Wir erhalten so eine Folge integraler Ströme, deren schwacher Limes nicht rektifizierbar ist.

**Satz 4.19**

(1) (Randrektifizierbarkeit) Sei $T \in \mathcal{R}_k(U)$ und $\mathbf{M}_V(\partial T) < \infty$ für alle $V \subset U$ mit $V$ offen, so dass $\bar{V}$ kompakte Teilmenge von $U$ ist. Dann ist $T \in \mathcal{I}_k(U)$.

(2) (Closure Theorem) Seien $T_j \in \mathcal{R}_k(U)$, $j \in \mathbb{N}$, und

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}(\mathbf{M}_V(T_j) + \mathbf{M}_V(\partial T_j)) < C_V < \infty$$

für alle $V \subset U$ mit $V$ offen, so dass $\bar{V}$ eine kompakte Teilmenge von $U$ ist. Gilt $T_j \overset{s}{\rightharpoonup} T \in \mathcal{D}_k(U)$ für $j \to \infty$, so ist $T \in \mathcal{R}_k(U)$.

(3) (Kompaktheitssatz) Seien $T_j$ wie in (2). Dann gibt es eine Teilfolge $T_{j'}$ von $T_j$ und $T \in \mathcal{R}_k(U)$ mit $T_{j'} \overset{s}{\rightharpoonup} T$.

**Beweis**
Idee: Simultaner Beweis von (1) und (2)/(3) durch vollständige Induktion über $k$. Aus (2)/(3) für $k-1$ und dem Deformationssatz folgt (1) für $k$. Ferner geht das Konzept „Schnitt eines Stroms“ ein. ∎

**Polyedrische Ströme** Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $[0,\varepsilon]^n + \varepsilon \cdot z$, $z \in \mathbb{Z}^n$ ein kompakter $\varepsilon$-Würfel. Ein $k$-dimensionaler $\varepsilon$-Würfel ist erklärt als das relative Innere einer $k$-dimensionalen Seite eines solchen $\varepsilon$-Würfels.

**Definition**
Ein $k$-dimensionaler polyedrischer Strom in $\mathbb{R}^n$ der Seitenlänge $\varepsilon$ ist ein Strom der Form

$$P := \sum_Q a_Q [\![Q]\!],$$

wobei $Q$ ein $k$-dimensionaler $\varepsilon$-Würfel ist. Ein solcher Strom heißt ganzzahlig polyedrischer, falls $a_Q \in \mathbb{Z}$.

**Bemerkungen:** (1) $\mathbf{M}(P) = \sum_Q |a_Q| \varepsilon^k$

(2) $\mathbf{M}(\partial P) \leq 2^k \mathbf{M}(P)$. $\partial P$ ist stets polyedrisch.

**Satz 4.20 (Deformationssatz)**
Es gibt eine Konstante $c = c(n)$, so dass für jedes $T \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $k$-dimensionaler polyedrischer Strom $P$ existiert und ferner $R \in \mathbf{N}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathbf{M}_k(\mathbb{R}^n)$ existieren, so dass gilt

$$T = P + \partial R + S$$

mit

(1) $\mathbf{M}(P) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)$, $\mathbf{M}(\partial P) \leq c \cdot \mathbf{M}(\partial T)$,

(2) $\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(T)$, $\mathbf{M}(S) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T)$,

(3) $\mathbf{M}(\partial R) \leq c \cdot \big(\mathbf{M}(T) + \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T)\big)$,

(4) $\operatorname{spt}(P), \operatorname{spt}(R) \subset \operatorname{spt}(T)_{\delta(\varepsilon)}$ und $\operatorname{spt}(\partial P), \operatorname{spt}(\partial R) \subset \operatorname{spt}(\partial T)_{\delta(\varepsilon)}$ mit $\delta(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

(5) Ist $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, so können $P$, $R$ als rektifizierbare Ströme gewählt werden. Ist $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$, so kann auch $S$ als rektifizierbarer Strom gewählt werden.

Wir formulieren noch einige Anwendungen:

**Satz 4.21 (Schwache Polyedrische Approximation)**
Sei $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Folge $P_i$ von polyedrischen Strömen mit $P_i \overset{s}{\rightharpoonup} T$, wobei die Massen der $P_i$ uniform beschränkt sind.

**Beweis**
Wähle $\epsilon_i := 1/i$ im Deformationssatz. Dann gibt es Ströme $P_i, R_i, S_i$ mit den im Deformationssatz beschriebenen Eigenschaften. Wegen (1) sind die Massen von $P_i$ und $\partial P_i$ uniform beschränkt. Aus $\mathbf{M}(R_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(T) \to 0$ folgt $R_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$ und daher auch $\partial R_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$. Wegen $\mathbf{M}(S_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(\partial T) \to 0$ folgt $S_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$. Insgesamt ist also $\partial R_i + S_i \overset{s}{\rightharpoonup} 0$ und daher $P_i \overset{s}{\rightharpoonup} T$. ∎

Sei $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq n-1$ und $\operatorname{spt}(T)$ kompakt.

Gibt es $S \in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial S = T$? Notwendige Bedingung: $\partial T = 0$. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie wir schon gesehen haben.

**Isoperimetrisches Problem**: Finde eine Massenschranke für die „Füllung S“ von $T$.

**Satz 4.22 (Isoperimetrische Ungleichung)**
Sei $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$, $\operatorname{spt}(T)$ kompakt. Dann gibt es ein $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt}(R)$ kompakt, $\partial R = T$ und

$$\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}$$

mit $c = c(n)$.

**Beweis**
Sei o.B.d.A. $\mathbf{M}(T) \neq 0$. Setze $\epsilon := (2c\mathbf{M}(T)^{1/k}$, wobei $c$ wie im Deformationssatz gewählt wird. Zu $T$ seien $P, R, S$ wie im Deformationssatz gewählt. Wegen (2) und der Voraussetzung folgt $S = 0$. Weiterhin gilt

$$\mathbf{M}(P) \leq c\mathbf{M}(T) = \frac{1}{2}\epsilon^k < \epsilon^k,$$

und daher ist $\mathbf{M}(P) = 0$, das heißt $P = 0$. Somit ist $P = \partial R$ und

$$\mathbf{M}(R) \leq c\epsilon\mathbf{M}(T) = c(2c\mathbf{M}(T))^{1/k}\mathbf{M}(T) = c'\mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}.$$

Zusammen ergibt dies die Behauptung. ■

Schließlich ergeben die zur Verfügung stehenden Sätze auch einen raschen Beweis für eine Lösung des Plateauschen Problems in der Kategorie der Ströme.

**Satz 4.23 (Plateau Problem)**
Sei $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$, $\operatorname{spt}(T)$ kompakt. Dann existiert $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial S = T$, $\operatorname{spt}(S)$ kompakt und

$$\mathbf{M}(S) = \inf\{\mathbf{M}(R) : R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n), \partial R = T\}.$$

**Beweis**
Zu $T$ existiert ein $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = \partial R$ und $\operatorname{spt}(R)$ kompakt (vgl. den Beweis der isoperimetrischen Ungleichung). Da $T$ lokalendliche Masse hat, gilt dies auch für $\partial R$, so dass der Randrektifizierbarkeitssatz ergibt, dass $R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist klar, dass sich das Infimum über eine nichtleere Menge erstreckt. Sei $R_i$, $i \in \mathbb{N}$ eine minimierende Folge. Wegen $\partial R_i = T$ ist die Voraussetzung des Kompaktheitssatzes erfüllt. Es existiert somit ein $S \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = \partial R_i \overset{s}{\rightharpoonup} \partial S$, also $T = \partial S$. Eine erneute Anwendung des Randrektifizierbarkeitssatzes zeigt sogar $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Unterhalbstetigkeit der Masse ist auch $\mathbf{M}(S)$ gleich dem Infimum. Durch die Projektion $\pi_\#(R_i)$ der Ströme einer minimierenden Folge auf die abgeschlossene, konvexe Hülle von $\operatorname{spt}(T)$ erreicht man, dass auch $\operatorname{spt}(S)$ kompakt ist. ■

# 5 Anhang: Geometrische Integrationstheorie

## 5.1 Multilineare Algebra

In diesem Abschnitt sind $V, W$ stets endlich-dimensionale reelle Vektorräume. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $V^p := V \times \cdots \times V$ das $p$-fache kartesische Produkt von $V$. Schließlich sei $V^*$ der duale Vektorraum der Linearformen auf $V$. Wir werden Tensoren und alternierende Tensoren auf elementarem Weg einführen und die Bildung von Restklassen sowie die Verwendung universeller Eigenschaften vermeiden.

**Definition.** Ein $p$-*Tensor* über $V$ ist eine multilineare Abbildung $T : V^p \to \mathbb{R}$. Die Menge $\mathcal{T}^p(V)$ aller $p$-Tensoren über $V$ ist mit den Operationen

$$\begin{aligned}(S+T)(v_1,\ldots,v_p) &:= S(v_1,\ldots,v_p)+T(v_1,\ldots,v_p)\\ (\lambda S)(v_1,\ldots,v_p) &:= \lambda S(v_1,\ldots,v_p)\end{aligned}$$

für $v_1, \ldots, v_p \in V$ ein reeller Vektorraum. Wir setzen $\mathcal{T}^0(V) := \mathbb{R}$.

Die aufgestellten Behauptungen gelten offensichtlich. Ferner ist $V^* = \mathcal{T}^1(V)$.

Eine wichtige Verknüpfung von Tensoren ist gegeben durch das Tensorprodukt.

**Definition.** Für $S \in \mathcal{T}^p(V)$, $T \in \mathcal{T}^q(V)$ ist das *Tensorprodukt* $S \otimes T$ erklärt durch

$$(S \otimes T)(v_1,\ldots,v_p,v_{p+1},\ldots,v_{p+q}) := S(v_1,\ldots,v_p)T(v_{p+1},\ldots,v_{p+q})$$

für $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$. Es gilt $S \otimes T \in \mathcal{T}^{p+q}(V)$ (leicht!).

**Satz 5.1**
Für $S, S_i \in \mathcal{T}^p(V)$, $T, T_i \in \mathcal{T}^q(V)$, $U \in \mathcal{T}^r(V)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$,

(b) $S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$,

(c) $(\lambda S) \otimes T = S \otimes (\lambda T) = \lambda(S \otimes T)$,

(d) $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$.

*Wegen* (d) *können wir*

$$S \otimes T \otimes U := (S \otimes T) \otimes U$$

*erklären.*

In der linearen Algebra erklärt man zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ die duale lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*$. Dies wird jetzt verallgemeinert.

**Definition.** Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Abbildung $f^* : \mathcal{T}^p(W) \to \mathcal{T}^p(V)$ werde definiert durch

$$(f^*T)(v_1, \dots, v_p) := T(f(v_1), \dots, f(v_p))$$

für $v_1, \dots, v_p \in V$ und $T \in \mathcal{T}^p(W)$. Die Abbildung $f^*$ ist linear (leicht!).

Man beachte, daß $f^*$ eigentlich von $p$ abhängt.

**Definition.** Ein $p$-Tensor $\omega \in \mathcal{T}^p(V)$ $(p \geq 2)$ heißt *alternierend*, wenn

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) \quad \text{für } i \neq j$$

und $v_1, \dots, v_p \in V$ gilt. Sei $\Omega^p(V)$ die Menge aller alternierenden $p$-Tensoren; sei ferner $\Omega^0(V) := \mathbb{R}$ und $\Omega^1(V) := \mathcal{T}^1(V)$. Dann ist $\Omega^p(V)$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{T}^p(V)$; seine Elemente heißen auch $p$-Kovektoren über $V$.

**Beispiel.** Ist $n := \dim(V)$, so ist $\det \in \Omega^n(V)$.

Sei $S_p$ die Gruppe der Permutationen (Bijektionen) von $\{1, \dots, p\}$. Sie hat $p!$ Elemente. Mit $(i, j) \in S_p$ wird die Permutation bezeichnet, die $i$ und $j$ vertauscht und die übrigen Elemente fest läßt. Jede solche Permutation heißt *Transposition.* Jedes $\sigma \in S_p$ $(p > 1)$ läßt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Ob die Anzahl der dabei verwendeten Transpositionen gerade oder ungerade ist, hängt nur von $\sigma$ ab. Im geraden Fall nennt man $\sigma$ gerade und setzt $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, im ungeraden Fall heißt $\sigma$ ungerade und man setzt $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. Die Abbildung sgn ist ein Gruppenhomomorphismus von $(S_p, \circ)$ nach $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

**Definition.** Für $T \in \mathcal{T}^p(V)$ sei

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \dots, v_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

für $v_1, \dots, v_p \in V$.

**Satz 5.2**
Die Abbildung Alt: $\mathcal{T}^p(V) \to \Omega^p(V)$ ist eine lineare Projektionsabbildung, d.h.

(a) $T \in \mathcal{T}^p(V) \Rightarrow \mathrm{Alt}(T) \in \Omega^p(V)$;

(b) $\omega \in \Omega^p(V) \Rightarrow \mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.

*Beweis.* Die Linearität ist offensichtlich gegeben.

(a) Sei $i \neq j$ (fest), $(i,j) \in S_p$ die zugehörige Transposition und $\sigma' := \sigma \circ (i,j)$ für $\sigma \in S_p$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p) \\
= \; & \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j)}, \ldots, v_{\sigma(i)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \\
= \; & \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(p)}) \\
= \; & \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} -\mathrm{sgn}(\sigma') T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(p)}) \\
= \; & -\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p).
\end{aligned}$$

(b) Für $\omega \in \Omega^p(V)$ und $\sigma = (i,j)$ gilt

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = -\omega(v_1, \ldots, v_p) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_p).$$

Da jede Permutation Produkt von Transpositionen ist und da sgn multiplikativ ist, gilt diese Gleichung für jede Permutation $\sigma$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \\
&= \frac{1}{p!} \left( \sum_{\sigma \in S_p} 1 \right) \omega(v_1, \ldots, v_p) = \omega(v_1, \ldots, v_p).
\end{aligned}$$

Jetzt wird die Bildung des Tensorprodukts mit der Alt-Operation verknüpft. Man beachte, daß i.a. $\omega \otimes \eta \notin \Omega^{p+q}(V)$ für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$. Daher wendet man noch einmal den Alt-Operator an und normiert geeignet, um auf diesem Weg wieder zu einem alternierenden Tensor zu gelangen.

**Definition.** Für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$ ist das *alternierende* (oder *äußere*) *Produkt* $\omega \wedge \eta$ erklärt durch

$$\omega \wedge \eta := \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Es gilt $\omega \wedge \eta \in \Omega^{p+q}(V)$.

Als nächstes halten wir die wichtigsten Eigenschaften des alternierenden Produktes fest.

**Satz 5.3**
Für $\omega, \omega_i \in \Omega^p(V)$, $\eta, \eta_i \in \Omega^q(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und für eine lineare Abbildung $f : W \to V$ gilt

(a) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$,

(b) $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$,

(c) $(\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\eta) = \lambda(\omega \wedge \eta)$,

(d) $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$,

(e) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$.

*Beweis.* Die Aussagen (a), (b), (c) und (e) folgen leicht, der Nachweis zu (d) ist eine Übungsaufgabe.

Für das alternierende Produkt von drei Kovektoren gilt auch das Assoziativgesetz. Der Nachweis erfordert eine Vorbereitung.

**Lemma 5.4**
Es gilt:

(a) Für $S \in \mathcal{T}^p(V)$, $T \in \mathcal{T}^q(V)$ mit $\mathrm{Alt}(S) = 0$ ist

$$\mathrm{Alt}(S \otimes T) = \mathrm{Alt}(T \otimes S) = 0.$$

(b) Für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$, $\theta \in \Omega^r(V)$ ist

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta)).$$

*Beweis.* (a) Sei $G \subset S_{p+q}$ die Untergruppe aller Permutationen von $\{1, \ldots, p+q\}$, die $p+1, \ldots, p+q$ fest lassen. Für $\tau \in S_{p+q}$ ist dann $\tau G$ eine Linksnebenklasse und $LNK := \{\tau G : \tau \in S_{p+q}\}$ ist die Menge aller Linksnebenklassen von $G$. Setze $v_{\tau(i)} =: w_i$ für $i = 1, \ldots, p+q$

und ein fest gewähltes $\tau \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \tau G} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
= \; & \sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma') S(v_{\tau(\sigma'(1))}, \ldots, v_{\tau(\sigma'(p))}) T(v_{\tau(\sigma'(p+1))}, \ldots, v_{\tau(\sigma'(p+q))}) \\
= \; & \operatorname{sgn}(\tau) \left( \sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn}(\sigma') S(w_{\sigma'(1)}, \ldots, w_{\sigma'(p)}) \right) T(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \\
= \; & \operatorname{sgn}(\tau)(p! \operatorname{Alt}(S)(w_1, \ldots, w_p)) T(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Da die Linksnebenklassen von $G$ eine disjunkte Zerlegung von $S_{p+q}$ bilden, folgt

$$\begin{aligned}
& (p+q)! \operatorname{Alt}(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{p+q}) \\
= \; & \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
= \; & \sum_{\tau G \in LNK} \sum_{\sigma \in \tau G} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) - \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \\
= \; & \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta - (\omega \otimes \eta) \otimes \theta) \\
= \; & \operatorname{Alt}([\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta] \otimes \theta) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

nach (a), da $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - (\omega \otimes \eta)) = 0$ ist.

**Satz 5.5**
Für $\omega \in \Omega^p(V)$, $\eta \in \Omega^q(V)$, $\theta \in \Omega^r(V)$ gilt

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}\operatorname{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\ &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}\operatorname{Alt}\left(\frac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta\right) \\ &= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta),\end{aligned}$$

wobei Lemma 5.4 (b) verwendet wurde. Für die rechte Seite der behaupteten Gleichung erhält man denselben Ausdruck.

In der Folge können wir somit

$$\omega \wedge \eta \wedge \theta := (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$$

setzen und Klammern weglassen. Die im Beweis gewonnene Gleichung

$$\omega \wedge \eta \wedge \theta = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

überträgt sich sofort auf mehr als drei Faktoren. Insbesondere gilt für $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1(V) = V^*$ die Gleichung

$$\operatorname{Alt}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \frac{1}{p!}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p.$$

**Voraussetzung.** Nachfolgend schreiben wir $n$ für die Dimension des Vektorraums $V$.

**Zur Erinnerung.** Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von $V$. Definiere $\varphi_i \in V^*$ durch

$$\varphi_i(e_j) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

für $i, j = 1, \ldots, n$ und lineare Erweiterung, d.h.

$$\varphi_i\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_i(e_j) = a_i.$$

Dann ist $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine Basis des Dualraumes $V^*$. Sie heißt die zu $(e_1, \ldots, e_n)$ duale Basis. Für $f \in V^*$ und $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in V$ gilt

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i)\varphi_i(v) = \left(\sum_{i=1}^n f(e_i)\varphi_i\right)(v).$$

Also ist

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i)\varphi_i,$$

was man auch einfach durch Einsetzen von $e_1, \dots, e_n$ bestätigen kann.

Wir verallgemeinern nun diese Vorgehensweise, um eine Basis von $\Omega^p(V)$ anzugeben.

**Satz 5.6**
Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V und $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die hierzu duale Basis von $V^*$. Dann ist die Menge

$$B := \{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

eine Basis von $\Omega^p(V)$; sie heißt die Standardbasis von $\Omega^p(V)$ bezüglich $(e_1, \dots, e_n)$. Insbesondere gilt

$$\dim \Omega^p(V) = \binom{n}{p}.$$

*Beweis.* Sei zunächst $T \in \mathcal{T}^p(V)$. Sei $v_1, \dots, v_p \in V$ und

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \qquad i = 1, \dots, p.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_p) &= T\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} a_{pi_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{1i_1} \cdots a_{pi_p} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_p}(v_1, \dots, v_p) = \varphi_{i_1}(v_1) \cdots \varphi_{i_p}(v_p) = a_{1i_1} \cdots a_{pi_p},$$

also

$$T = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_p}.$$

Jetzt sei speziell $T = \omega \in \Omega^p(V)$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \omega = \mathrm{Alt}(\omega) &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \mathrm{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_p}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}. \end{aligned}$$

Für $\sigma \in S_p$ gilt

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} = \mathrm{sgn}(\sigma) \varphi_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_{\sigma(p)}}$$

sowie
$$\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(e_{i_{\sigma(1)}},\dots,e_{i_{\sigma(p)}}).$$
Die zweite Gleichung haben wir schon gezeigt, die erste folgt analog durch wiederholte Anwendung von Satz 5.3 (d) auf 1-Kovektoren. Insbesondere ist
$$\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p} = 0,$$
falls zwei der Indizes $i_1,\dots,i_p$ gleich sind. Man erhält somit
$$\omega = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n} \omega(e_{j_1},\dots,e_{j_p})\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_p}.$$
Dies zeigt, daß $B$ ein Erzeugendensystem ist. Sei nun eine Linearkombination
$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1\dots i_p}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p} = 0$$
gegeben. Sei $1\le j_1<\cdots<j_p\le n$. Dann ist
$$\begin{aligned}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) &= p!\operatorname{Alt}(\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_p})(e_{j_1},\dots,e_{j_p})\\ &= \sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sgn}(\sigma)\varphi_{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}})\cdots\varphi_{i_p}(e_{j_{\sigma(p)}}).\end{aligned}$$
Hier ist
$$\begin{aligned}\varphi_{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}})\cdots\varphi_{i_p}(e_{j_{\sigma(p)}}) &= \begin{cases}1, & \text{falls } i_1 = j_{\sigma(1)},\dots,i_p = j_{\sigma(p)}\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\\ &= \begin{cases}1, & \text{falls } i_1 = j_1,\dots,i_p = j_p, \sigma = id\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}\end{aligned}$$
da die Indizes der Größe nach geordnet sind. Es folgt
$$0 = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1\dots i_p}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = a_{j_1\dots j_p}.$$
Dies zeigt die lineare Unabhängigkeit von $B$.

Aus Satz 5.6 folgt insbesondere
$$\Omega^p(V) = \{0\} \quad \text{für } p>n$$
und
$$\dim\Omega^n(V) = 1.$$

**Satz 5.7**
Sei $(e_1,\dots,e_n)$ eine Basis von V, sei $\omega\in\Omega^n(V)$ und sei $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ für $i=1,\dots,n$. Dann ist
$$\omega(v_1,\dots,v_n) = \det(a_{ij})_{i,j=1}^n\omega(e_1,\dots,e_n).$$

*Beweis.* Für $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, $i = 1, \dots, n$ definiere

$$\eta(v_1, \dots, v_n) \coloneqq \det(a_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Dann gilt $\eta \in \Omega^n(V)$. Wegen $\dim \Omega^n(V) = 1$ ist $\omega = \lambda\eta$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = \lambda\eta(e_1, \dots, e_n) = \lambda.$$

**Bezeichnung.** Im folgenden verwenden wir gelegentlich die Abkürzung

$$\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} =: \sum_{I \in M_p^n} a_I \varphi_I.$$

Dabei durchläuft der Multi-Index $I$ die Menge

$$M_p^n \coloneqq \{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p : 1 \le i_1 < \dots < i_p \le n\}.$$

Insbesondere sei

$$\varphi_I \coloneqq \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}$$

für $I = (i_1, \dots, i_p)$.

## 5.2 Differentialformen

In diesem Abschitt betrachten wir Funktionen, deren Werte alternierende Tensoren sind.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Eine *Differentialform* vom Grad $p$ (eine $p$-Form) auf $M$ ist eine Abbildung von $M$ in $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$.

Eine Differentialform vom Grad 0 ist also einfach eine reellwertige Funktion. Ist $\omega$ eine $p$-Form auf $M$, so ist $\omega(X) \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ ein $p$-Kovektor über $\mathbb{R}^n$. Algebraische Operationen werden nun wieder punktweise erklärt.

**Definition.** Seien $\omega_i, \omega, \eta$ Differentialformen auf $M$ ($\omega_1, \omega_2$ vom selben Grad), sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann werden die Differentialformen $\omega_1 + \omega_2$, $f\omega$ und $\omega \wedge \eta$ erklärt durch

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2)(X) &\coloneqq \omega_1(X) + \omega_2(X), \\
(f\omega)(X) &\coloneqq f(X)\omega(X) =: (f \wedge \omega)(X), \\
(\omega \wedge \eta)(X) &\coloneqq \omega(X) \wedge \eta(X).
\end{aligned}$$

**Beispiel.**

- Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $X \in M$ ist das Differential $Df_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit
$$\lim_{H \to 0} \frac{f(X+H) - f(X) - Df_X(H)}{\|H\|} = 0.$$
Für das Differential einer reellwertigen Funktionen schreiben wir künftig $df_X$ statt $Df_X$. Insbesondere gilt also $df_X \in \Omega^1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^n)$ für $X \in M$. Das Differential $df$ von $f$, d.h. die Abbildung
$$df : M \to \Omega^1(\mathbb{R}^n), \qquad X \mapsto df_X$$
ist eine Differentialform vom Grad 1 auf $M$.

- Eine spezielle differenzierbare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ ist die Projektionsabbildung
$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i,$$
wobei $i \in \{1, \dots, n\}$. Anstelle von $dp_i$ schreiben wir prägnanter $dx^i$, $i = 1, \dots, n$. Dies sind also sehr spezielle Differentialformen vom Grad 1 mit
$$(dx^i)_X = p_i \quad \text{für } X \in \mathbb{R}^n$$
und
$$(dx^i)_X(E_j) = \delta_{ij},$$
wenn $(E_1, \dots, E_n)$ die Standard-Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Insbesondere ist also die Basis $((dx^1)_X, \dots, (dx^n)_X)$ die zu $(E_1, \dots, E_n)$ duale Basis, und zwar für alle $X \in \mathbb{R}^n$. Aus Satz 5.6 erhalten wir folglich zu jedem $X \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$ und können $\omega_X$ für eine gegebene $p$-Form $\omega$ in dieser Basis ausdrücken.

**Definition.** Sei $\omega$ eine Differentialform vom Grad $p$ auf $M$. Dann gibt es Funktionen $a_{i_1 \dots i_p} : M \to \mathbb{R}$ für $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$, die *Koordinatenfunktionen* von $\omega$, mit
$$\omega_X = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p}(X)(dx^{i_1})_X \wedge \dots \wedge (dx^{i_p})_X, \quad X \in M,$$
abgekürzt
$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_{I \in M_p^n} a_I dx^I. \tag{5.1}$$
Ist $M$ offen, so heißt die Form $\omega$ von der Klasse $C^r$ (mit $r \in \mathbb{N}_0$), wenn ihre Koordinatenfunktionen von der Klasse $C^r$ sind.

**Bemerkungen.**

- Gilt (5.1), so kann man die Koordinatenfunktion von $\omega$ ausdrücken in der Form
$$a_{i_1 \dots i_p}(X) = \omega_X(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}).$$

- Für eine differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ erhält man insbesondere
$$df = \sum_{i=1}^n df(E_i) dx^i = \sum_{i=1}^n (\partial_i f) dx^i.$$

Wir hatten für eine lineare Abbildung $L : V \to W$ und $p \in \mathbb{N}$ die duale Abbildung $L^* : \mathcal{T}^p(W) \to \mathcal{T}^p(V)$ erklärt durch

$$(L^*T)(v_1, \ldots, v_p) := T(Lv_1, \ldots, Lv_p), \quad T \in \mathcal{T}^p(W), v_i \in V.$$

Für $p = 0$ ist $L^*$ sinngemäß als die Identität auf $\mathbb{R}$ erklärt. Nun sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung. Für jedes $X \in M$ ist dann $DF_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Somit ist für $p \in \mathbb{N}$ auch

$$(DF_X)^* : \Omega^p(\mathbb{R}^k) \to \Omega^p(\mathbb{R}^n)$$

eine lineare Abbildung. Daß $(DF_X)^*(T)$ für $T \in \Omega^p(\mathbb{R}^k)$ ein alternierender Tensor ist, folgt direkt aus der Definition. Wir können auf diese Weise jeder $p$-Form auf $F(M)$ eine $p$-Form auf $M$ zuordnen.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung. Für eine $p$-Form $\omega$ auf $F(M)$ ist die $p$-Form $F^*\omega$ auf $M$ erklärt durch

$$(F^*\omega)_X := (DF_X)^*\omega_{F(X)}, \qquad X \in M.$$

Man sagt, $F^*\omega$ entstehe aus $\omega$ durch Zurückholen mittels $F$.

Speziell für $p = 0$ bedeutet dies, daß

$$F^*\omega = \omega \circ F$$

gilt, da $(DF_X)^*$ für $p = 0$ die Identität auf $\mathbb{R}$ ist.

Wir halten einige Rechenregeln fest.

**Satz 5.8**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung mit $F = (f_1, \ldots, f_k)$. Sei $dy^i$ das $i$-te Koordinatendifferential auf $\mathbb{R}^k$. Dann gilt für $p$-Formen $\omega_i, \omega$, Funktionen $g$ und $q$-Formen $\eta$, die jeweils auf $F(M)$ erklärt sind,

(a) $F^*dy^i = df_i, \qquad i = 1, \ldots, k,$

(b) $F^*(\omega_1 + \omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2,$

(c) $F^*(g\omega) = g \circ F\, F^*(\omega),$

(d) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta.$

(e) Ist $N \subset \mathbb{R}^k$ offen, $F(M) \subset N$ und $G : N \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, dann gilt für jede $p$-Form $\omega$ auf $G \circ F(M)$
$$(G \circ F)^*\omega = F^*G^*\omega.$$

*Beweis.* Sei $X \in \mathbb{R}^n$, $H \in \mathbb{R}^n$ und $(E'_1, \ldots, E'_k)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(F^* dy^i)_X(H) &= (DF_X)^*(dy^i)_{F(X)}(H) \\
&= (dy^i)_{F(X)}(DF_X(H)) \\
&= (dy^i)_{F(X)} \left( \sum_{j=1}^{k} (Df_j)_X(H) E'_j \right) \\
&= (df_i)_X(H).
\end{aligned}$$

(b) und (c) gelten nach Definition, (d) folgt aus Satz 5.3 (e).

(e) folgt aus

$$\begin{aligned}
((G \circ F)^* \omega)_X &= (D(G \circ F)_X)^* \omega_{G \circ F(X)} \\
&= (DG_{F(X)} \circ DF_X)^* \omega_{G(F(X))} \\
&= (DF_X)^* \left( (DG_{F(X)})^* \omega_{G(F(X))} \right) \\
&= (DF_X)^* \left( (G^* \omega)_{F(X)} \right) \\
&= (F^*(G^* \omega))_X = (F^* G^* \omega)_X.
\end{aligned}$$

Wir kombinieren jetzt obige Rechenregeln und erhalten so

$$F^* \left( \sum a_{i_1 \ldots i_p} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p} \right) = \sum a_{i_1 \ldots i_p} \circ F \, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p} \tag{5.2}$$

mit

$$df_i = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f_i) \, dx^j. \tag{5.3}$$

Man kann (5.3) in (5.2) einsetzen, um eine Darstellung bezüglich der Standardbasis zu erhalten. Wir betrachten explizit nur den folgenden Spezialfall.

**Satz 5.9**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : M \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann ist für eine Funktion $a : F(M) \to \mathbb{R}$

$$F^*(a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = a \circ F \det(JF) \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

*Beweis.* Wir erhalten

$$\begin{aligned}
F^*(a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) &= a \circ F\, df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \\
&= a \circ F \left( \sum_{i_1} (\partial_{i_1} f_1) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{i_n} (\partial_{i_n} f_n) dx^{i_n} \right) \\
&= a \circ F \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} \partial_{i_1} f_1 \cdots \partial_{i_n} f_n \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \\
&= a \circ F \sum_{\sigma \in S_n} \partial_{\sigma(1)} f_1 \cdots \partial_{\sigma(n)} f_n \, dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} \\
&= a \circ F \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \partial_{\sigma(1)} f_1 \cdots \partial_{\sigma(n)} f_n \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= a \circ F \det(\partial_i f_j)_{i,j=1}^n \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man mit Satz 5.7 argumentieren:

$$\begin{aligned}
& F^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_X(E_1, \ldots, E_n) \\
= \; & (dx^1)_X \wedge \cdots \wedge (dx^n)_X (DF_X(E_1), \ldots, DF_X(E_n)) \\
= \; & (dx^1)_X \wedge \cdots \wedge (dx^n)_X \left( \sum_{i=1}^n (\partial_1 f_i)_X E_i, \ldots, \sum_{i=1}^n (\partial_n f_i)_X E_i \right) \\
= \; & \det(\partial_i f_j(X))_{i,j=1}^n (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)_X(E_1, \ldots, E_n),
\end{aligned}$$

d.h.

$$F^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \det(\partial_i f_j)_{i,j=1}^n \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Von grundlegender Bedeutung ist der folgende Differentiationsprozeß für Differentialformen.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_{I \in M_p^n} a_I dx^I$$

eine Differentialform vom Grad $p$ der Klasse $C^1$ auf $M$. Die *äußere Ableitung* oder das *äußere Differential* von $\omega$ ist die $(p+1)$-Form

$$\begin{aligned}
d\omega &:= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \sum_{I \in M_p^n} da_I \wedge dx^I \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \sum_{j=1}^n (\partial_j a_{i_1 \ldots i_p}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.
\end{aligned}$$

Die angegebene Definition ist konsistent mit dem Fall $p = 0$, wo für $f : M \to \mathbb{R}$ von der Klasse $C^1$ gilt

$$df = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)\, dx^j.$$

Der folgende Satz faßt die wichtigsten Rechenregeln für die äußere Differentiation von Differentialformen zusammen.

**Satz 5.10**
Die $p$-Formen $\omega, \omega_i$ und eine $q$-Form $\eta$ seien auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ jeweils von der Klasse $C^1$. Dann gilt

(a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$,

(b) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$,

(c) $dd\omega = 0$, *falls* $\omega$ *von der Klasse* $C^2$ *ist.*

(d) *Ist* $M \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $F : M \to \mathbb{R}^k$ *eine Abbildung von der Klasse* $C^2$ *und* $\omega$ *eine* $p$*-Form der Klasse* $C^1$ *auf einer offenen Obermenge von* $F(M)$*, so gilt* $F^* d\omega = dF^*\omega$*.*

*Beweis.* (a) ist klar. Zusammen mit (b) im Fall einer 0-Form $\omega$ zeigt dies die Linearität der äußeren Ableitung.

(b) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $I \in M_p^n$, $J \in M_q^n$, so gilt

$$d(f\, dx^I \wedge dx^J) = df \wedge dx^I \wedge dx^J. \tag{5.4}$$

Sind die Indexmengen zu $I, J$ nicht disjunkt, dann sind beide Seiten Null. Sonst gibt es $m \in \mathbb{N}$ und Indizes $1 \le k_1 < \cdots < k_{p+q} \le n$ mit

$$dx^I \wedge dx^J = (-1)^m dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_{p+q}},$$

so daß die Behauptung nach Definition gilt.

Nun sei

$$\omega = \sum_{I \in M_p^n} a_I dx^I, \quad \eta = \sum_{J \in M_q^n} b_J\, dx^J,$$

also

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} d\left(a_I b_J\, dx^I \wedge dx^J\right).$$

Mit (5.4) und der gewöhnlichen Produktregel folgert man

$$\begin{aligned} d\left(a_I b_J\, dx^I \wedge dx^J\right) &= d(a_I b_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (b_J da_I + a_I db_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= da_I \wedge dx^I \wedge (b_J dx^J) + db_J \wedge (a_I dx^I) \wedge dx^J \\ &= da_I \wedge dx^I \wedge b_J dx^J + (-1)^{1 \cdot p} a_I dx^I \wedge db_J \wedge dx^J. \end{aligned}$$

Summation liefert daher

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \left(\sum_I da_I \wedge dx^I\right) \wedge \left(\sum_J b_J dx^J\right) + (-1)^p \left(\sum_I a_I dx^I\right) \wedge \left(\sum_J db_J \wedge dx^J\right) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(c) Für eine Funktion $f$ der Klasse $C^2$ gilt zunächst

$$df = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f) dx^i,$$

und weiter

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{i=1}^{n} d(\partial_i f) \wedge dx^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j(\partial_i f) \wedge dx^j\right) \wedge dx^i \\ &= \sum_{i<j} (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i)\, dx^i \wedge dx^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten also für $\omega = \sum_I a_I dx^I$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_I da_I \wedge dx^I, \\ dd\omega &= \sum_I \big(dda_I \wedge dx^I + (-1) da_I \wedge d1 \cdot dx^I\big) = 0. \end{aligned}$$

(d) Seien $F$ und $\omega$ wie beschrieben mit $F = (f_1, \dots, f_k)$. Ist $\omega = g$ eine Funktion, d.h. $p = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} F^* d\omega &= F^* dg = F^* \left(\sum_{j=1}^{k} (\partial_j g) dx^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (\partial_j g) \circ F\, df_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} (\partial_j g) \circ F \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f_j)\, dx^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} (\partial_j g) \circ F \partial_i f_j\right) dx^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i (g \circ F)\, dx^i \\ &= d(g \circ F) = d(F^* g) = d(F^* \omega). \end{aligned}$$

Sei schließlich $r \in \mathbb{N}_0$ und die Behauptung schon bewiesen für alle $r$-Formen. Um die Gleichung für alle $(r+1)$-Formen zu beweisen, die auf einer offenen Umgebung von $F(M)$ erklärt sind, genügt es, spezieller $(r+1)$-Formen der Form $\omega \wedge dy^i$ zu betrachten, wobei $\omega$ eine $r$-Form auf einer offenen Umgebung von $F(M)$ und $dy^i$ ein Koordinatendifferential im $\mathbb{R}^k$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} F^*(d(\omega \wedge dy^i)) &= F^*(d\omega \wedge dy^i + (-1)^r \omega \wedge ddy^i) \\ &= F^*(d\omega \wedge dy^i) = F^* d\omega \wedge F^* dy^i \\ &= dF^*\omega \wedge dF^* y^i, \end{aligned}$$

wobei die Induktionsannahme verwendet wurde. Mit Hilfe von Teil (c) folgt

$$\begin{aligned} dF^*(\omega \wedge dy^i) &= d(F^*\omega \wedge F^* dy^i) \\ &= dF^*\omega \wedge F^* dy^i + (-1)^r F^*\omega \wedge dF^* dy^i \\ &= dF^*\omega \wedge F^* dy^i + (-1)^r F^*\omega \wedge ddf_i \\ &= dF^*\omega \wedge F^* dy^i. \end{aligned}$$

Ein Vergleich ergibt die Behauptung im betrachteten Fall.

Mit Hilfe des Differentialformen-Kalküls lassen sich die Operationen der klassischen Vektoranalysis übersichtlich zusammenfassen.

**Beispiel.** Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und $V : M \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld der Klasse $C^2$. Wir definieren hierzu

$$\begin{aligned} (V) &:= v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3 \\ ((V)) &:= v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Dann bestätigt man leicht

$$d(V) = ((\mathrm{rot} V)), \quad d((V)) = \mathrm{div}(V) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Für $f : M \to \mathbb{R}$ von der Klasse $C^2$ gilt

$$df = (\nabla f).$$

Hiermit erhält man

$$0 = dd(V) = d((\mathrm{rot} V)) = (\mathrm{div}\,\mathrm{rot}(V)) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

also $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}(V) = 0$. Außerdem gilt

$$0 = ddf = d(\nabla f) = ((\mathrm{rot} \nabla f)),$$

folglich $\mathrm{rot} \nabla f = 0$.

Allgemein ist klar, daß wenn $\omega$ eine $p$-Form ist mit $\omega = d\eta$ für eine $(p-1)$-Form $\eta$ der Klasse $C^2$, dann gilt $d\omega = 0$. Dies wurde oben ausgenutzt.

**Definition.** Man nennt eine Differentialform $\omega$ der Klasse $C^1$ *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ gilt. Ferner heißt eine $p$-Form $\omega$ der Klasse $C^0$ *exakt*, falls es eine $(p-1)$-Form $\eta$ der Klasse $C^1$ gibt mit $\omega = d\eta$ (hier ist $p \geq 1$).

Bei der Definition einer geschlossenen Differentialform wird man in der Regel an die Situation $p \geq 1$ denken, auch wenn $p = 0$ zugelassen ist. Der Fall $p = 0$ ist nämlich trivial, da $d\omega = 0$ für eine 0-Form $\omega$ (d.h. eine Funktion) impliziert, daß $\omega$ auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist. In der somit eingeführten Terminologie können wir nun sagen, daß jede exakte Differentialform geschlossen ist.

**Gilt hiervon die Umkehrung, d.h. ist eine geschlossene Differentialform stets exakt?**

Wir wissen schon (etwa für $p = 1$, $\omega = (V)$), daß dies im allgemeinen nicht richtig ist. Unter geeigneten Voraussetzungen an den zugrundeliegenden Definitionsbereich (etwa für sternförmige Mengen) gilt dagegen der folgende Satz.

**Satz 5.11 (Poincaré)**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $p \geq 1$. Dann ist jede geschlossene p-Form der Klasse $C^1$ auf M exakt.

*Beweis.* O.B.d.A. sei $M$ sternförmig bezüglich 0. Wir schreiben die $p$-Form $\omega$ auf $M$ in der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1 \ldots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

und definieren eine $(p-1)$-Form $I\omega$ auf $M$ durch

$$(I\omega)_X \coloneqq \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \left( \int_0^1 a_{i_1 \ldots i_p}(tX) t^{p-1} \, dt \right) \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} x_{i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Dabei ist $X = (x_1, \ldots, x_n)$ gesetzt, $\widehat{dx^{i_k}}$ bedeutet, daß $dx^{i_k}$ weggelassen werden soll. Nun ist $\omega$ eine $p$-Form der Klasse $C^1$ auf $M$, für die wir $d(I\omega)$ und $I(d\omega)$ berechnen. Als Ergebnis dieser Rechnung werden wir

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \omega \tag{5.5}$$

erhalten. Wegen $d\omega = 0$, folgt die gewünschte Behauptung $d(I\omega) = \omega$, d.h. die Exaktheit von $\omega$.

Einerseits gilt

$$\begin{aligned} d(I\omega)_X &= p \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left( \int_0^1 a_{i_1\dots i_p}(tX) t^{p-1}\, dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &\quad + \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \left( \int_0^1 \partial_j a_{i_1\dots i_p}(tX) t^p\, dt \right) x_{i_k} \\ &\quad dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Andererseits erhält man aus

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j=1}^{n} \partial_j a_{i_1\dots i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

mit Hilfe einer elementaren, aber umständlich aufzuschreibenden Zusatzüberlegung ($j$ muß in $i_1 < \cdots < i_k$ eingereiht werden, bevor $I$ gebildet wird)

$$\begin{aligned} I(d\omega)_X &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j=1}^{n} \left( \int_0^1 \partial_j a_{i_1\dots i_p}(tX) t^p\, dt \right) x_j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &\quad - \sum_{i_1<\cdots<i_p} \sum_{j=1}^{n} \left( \int_0^1 \partial_j a_{i_1\dots i_p}(tX) t^p\, dt \right) \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} x_{i_k} \\ &\quad dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Addition ergibt nun

$$\begin{aligned} d(I\omega)_X + I(d\omega)_X &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left[ p \left( \int_0^1 a_{i_1\dots i_p}(tX) t^{p-1}\, dt \right) + \sum_{j=1}^{n} \left( \int_0^1 \partial_j a_{i_1\dots i_p}(tX) t^p x_j\, dt \right) \right] \\ &\quad dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[ a_{i_1\dots i_p}(tX) t^p \right] dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \omega_X. \end{aligned}$$

Dies zeigt gerade (5.5).

Wer die besagten umständlichen Zusatzüberlegungen zur Bildung von $I(d\omega)_X$ sehen möchte, lese einfach weiter:

Wir halten $i_1, \dots, i_p$ und $j$ fest, wobei es genügt, den Fall $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ zu betrachten. Wir erklären $j_1 < \cdots < j_{p+1}$ durch $\{j_1, \dots, j_{p+1}\} = \{j, i_1, \dots, i_p\}$. Steht jetzt $j$ an $m$-ter Stelle in $(j_1, \dots, j_{p+1})$, so gilt

$$\begin{aligned} &\partial_j a_{i_1\dots i_p}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &\qquad = \partial_j a_{i_1\dots i_p} (-1)^{m-1}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{p+1}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
& I(\partial_j a_{i_1\dots i_p}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \\
= \;& (-1)^m \left( \int_0^1 \partial_j a_{i_1\dots i_p}(tX) t^p \, dt \right) \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} x_{j_k}\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}}.
\end{aligned}$$

Nun werden drei Fälle unterschieden:

(a) $j_k = j$. Dann ist $m = k$ und

$$(-1)^{m-1}(-1)^{k-1} x_{j_k}\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} = x_j\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

(b) $j < j_k$. Dann gilt mit $j = j_m < j_k$:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{m-1}(-1)^{k-1} x_{j_k}\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \\
= \;& (-1)^{m+k} x_{j_k} (-1)^{m-1}\, dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_m}} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \\
= \;& (-1)^{k-1} x_{i_{k-1}}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_{k-1}}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
= \;& -(-1)^{k-2} x_{i_{k-2}}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.
\end{aligned}$$

(c) $j > j_k$. Dann gilt mit $j = j_m > j_k$:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{m-1}(-1)^{k-1} x_{j_k}\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \\
= \;& (-1)^{m+k} x_{i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \dots \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
= \;& (-1)^{m+k}(-1)^{m-2} x_{i_k}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
= \;& -(-1)^{k-1} x_{i_k}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt daher

$$\begin{aligned}
& I(\partial_j a_{i_1\dots i_p}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \\
= \;& x_j\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} x_{i_k}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_k}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},
\end{aligned}$$

so daß die gewünschte Behauptung durch Summation folgt.

## 5.3 Integration von Differentialformen

In den Abschnitten 3.1 und 3.2 wurden Integrale über geometrische Objekte wie (parametrisierte) Kurven und Flächen erklärt. Man kann diese Integrale als Integrale geeigneter 1- bzw. 2-Formen auffassen. Unser Ziel ist es, Integrale von $p$-Formen auf $p$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ zu erklären. Zunächst betrachten wir allerdings Integrale von speziellen parametrisierten Mengen.

Sei $p \in \mathbb{N}$ und $[0,1]^p$ der $p$-dimensionale abgeschlossene Einheitswürfel. Speziell setzen wir $[0,1]^0 := \{0\}$.

**Definition.** Sei $\omega$ eine stetige $p$-Form auf $[0,1]^p$, also

$$\omega = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$$

mit einer stetigen Funktion $f$ auf $[0,1]^p$. Dann sei

$$\int_{[0,1]^p} \omega := \int_{[0,1]^p} f = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_p)\,dx_1 \ldots dx_p.$$

In einem zweiten Schritt soll das Integral über allgemeine Mengen im $\mathbb{R}^n$ erklärt werden.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Ein *singulärer Würfel* in $M$ ist eine Abbildung $c : [0,1]^p \to M$ der Klasse $C^2$.

Die Differenzierbarkeitsvoraussetzung soll bedeuten, daß $c$ Einschränkung einer $C^2$-Funktion mit offenem Definitionsbereich ist. Die Voraussetzung der zweimaligen Differenzierbarkeit ist zunächst eigentlich zu stark, einmalige stetige Differenzierbarkeit wäre ausreichend. Die stärkere Voraussetzung wurde im Hinblick auf den Satz von Stokes getroffen.

**Beispiele.**

- Ein singulärer 0-Würfel $c : \{0\} \to M$.
- Ein singulärer 1-Würfel $c : [0,1] \to M$ ist eine parametrisierte Kurve der Klasse $C^2$, die nicht regulär zu sein braucht.
- Ein singulärer 2-Würfel $c : [0,1]^2 \to M$ ist i.a. nicht regulär, d.h. keine Fläche. Insbesondere ist $c$ i.a. nicht lokal injektiv. Man kann $c$ auch konstant wählen. Dies begründet die Bezeichnungsweise „singulär“.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega$ eine stetige $p$-Form auf $M$ und $c$ ein singulärer $p$-Würfel in $M$. Das *Integral von $\omega$ über den singulären $p$-Würfel $c$* ist definiert durch

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^p} c^*\omega, \quad p \geq 1$$

und

$$\int_c \omega := \omega(c(0)), \quad p = 0.$$

Sind nun $M, c, \omega$ wie oben und ist $\tau : [0,1]^p \to [0,1]^p$ eine bijektive Abbildung der Klasse $C^2$

mit $\det J\tau \geq 0$, so gilt

$$\begin{aligned}\int_c \omega &= \int_{[0,1]^p} c^*\omega = \int_{[0,1]^p} (c^*\omega)_Y \, dY \\ &= \int_{[0,1]^p} (c^*\omega)_{\tau(X)} \det J\tau(X) \, dX \\ &= \int_{[0,1]^p} \tau^*(c^*\omega)_X \, dX \\ &= \int_{[0,1]^p} (c \circ \tau)^*\omega \\ &= \int_{c\circ\tau} \omega,\end{aligned}$$

d.h. es liegt eine spezielle Form der Parametrisierungs-Invarianz vor.

**Beispiele.** • Sei $n \geq 2$ und $p = 1$. Wir schreiben $F : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ für einen singulären 1-Würfel der Klasse $C^2$ und $\omega = v_1 dx^1 + \cdots + v_n dx^n$ für eine stetige 1-Form auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_F \omega = \int_{[0,1]} F^*\omega.$$

Sei $F = (f_1, \ldots, f_n)$ und $dt^1$ das Koordinatendifferential im $\mathbb{R}^1$. Mit $V \coloneqq (v_1, \ldots, v_n)$ erhält man für die 1-Form $F^*\omega$ auf $[0,1]$:

$$\begin{aligned}F^*\omega &= F^*(v_1 dx^1 + \cdots + v_n dx^n) \\ &= v_1 \circ F \, df_1 + \cdots + v_n \circ F \, df_n \\ &= v_1 \circ F f_1' \, dt^1 + \cdots + v_n \circ F f_n' \, dt^1 \\ &= \langle V \circ F, F' \rangle \, dt^1.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_F \omega = \int_{[0,1]} \langle V \circ F, F' \rangle \, dt^1 = \int_0^1 \langle V \circ F(t), F'(t) \rangle \, dt.$$

Dies stellt den Zusammenhang mit Abschnitt 3.1 und Analysis II her.

• Sei $n = 3$, $p = 2$. Sei $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ ein singulärer 2-Würfel im $\mathbb{R}^3$ und

$$\omega = v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2$$

eine stetige 2-Form im $\mathbb{R}^3$. Nach Definition ist

$$\int_F \omega = \int_{[0,1]^2} F^*\omega.$$

Mit $F = (f_1, f_2, f_3)$ und $du^1, du^2$ als Koordinatendifferentialen im $\mathbb{R}^2$ erhält man für die 2-Form

$F^*\omega$ auf $[0,1]^2$:

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (v_1 \circ F) df_2 \wedge df_3 + (v_2 \circ F) df_3 \wedge df_1 + (v_3 \circ F)\, df_1 \wedge df_2 \\ &= (v_1 \circ F)[\partial_1 f_2 du^1 + \partial_2 f_2 du^2] \wedge [\partial_1 f_3 du^1 + \partial_2 f_3 du^2] + \ldots \\ &= (v_1 \circ F)(\partial_1 f_2 \cdot \partial_2 f_3 - \partial_1 f_3 \cdot \partial_2 f_2) du^1 \wedge du^2 + \ldots \\ &= \left[ v_1 \circ F \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u_1, u_2)} + v_2 \circ F \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u_1, u_2)} + v_3 \circ F \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right] du^1 \wedge du^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_F \omega &= \int_0^1 \int_0^1 \left( v_1 \circ F \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u_1, u_2)} + v_2 \circ F \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u_1, u_2)} + v_3 \circ F \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right) du_1\, du_2 \\ &= \int \langle V, N \rangle \, d\mathcal{O}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nur dann gilt, falls $F$ regulär ist.

In Abschnitt 3.2 hatten wir schon angedeutet, daß sich der Satz von Stokes in der Form

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

schreiben läßt. Nun haben wir aber zunächst noch nicht das Integral einer Differentialform über eine Untermannigfaltigkeit $M$ zur Verfügung, stattdessen steht das Integral über singuläre Würfel zur Verfügung. Wir versuchen daher, für solche singulären Würfel einen Randbegriff zu erklären, so daß schließlich

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

gültig wird. Es ist naheliegend, daß man dafür den Rand des Parameterbereichs verwenden wird. Andererseits ist aber auch eine geeignete Orientierung festzulegen. Der auf diesem Weg schließlich zustandekommende Satz von Stokes wird später beim Beweis der geometrischen Fassung des Satzes wieder verwendet werden.

**Beispiel.** Sei $\omega = f dx^1 + g dx^2$ eine stetig differenzierbare 1-Form auf $[0,1]^2$. Man erhält

$$d\omega = df \wedge dx^1 + dg \wedge dx^2 = (\partial_1 g - \partial_2 f)\, dx^1 \wedge dx^2.$$

Wir betrachten den singulären 2-Würfel $c = I^2 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$, $X \mapsto X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{I^2} d\omega &= \int_{[0,1]^2} (I^2)^*\, d\omega = \int_{[0,1]^2} d\omega \\ &= \int_{[0,1]^2} (\partial_1 g - \partial_2 f)\, dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\partial_1 g(x,y) - \partial_2 f(x,y))\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \partial_1 g(x,y)\, dx \right) dy - \int_0^1 \left( \int_0^1 \partial_2 f(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (g(1,y) - g(0,y))\, dy - \int_0^1 (f(x,1) - f(x,0))\, dx. \end{aligned}$$

Die so erhaltenen Integrale lassen sich als Integrale der 1-Form $\omega$ über singuläre 1-Würfel darstellen. Wir definieren zu diesem Zweck

$$\begin{aligned} I^2_{1,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (0,t),\\ I^2_{1,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1,t),\\ I^2_{2,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t,0),\\ I^2_{2,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t,1). \end{aligned}$$

Dann gilt etwa

$$\int_{I^2_{2,1}} \omega = \int_{[0,1]} (I^2_{2,1})^*\omega = \int_0^1 f(t,1)\,dt$$

oder

$$\int_{I^2_{1,0}} \omega = \int_{[0,1]} (I^2_{1,0})^*\omega = \int_0^1 g(0,t)\,dt$$

u.s.w., d.h.

$$\int_{I^2} d\omega = -\left(\int_{I^2_{1,0}} \omega - \int_{I^2_{1,1}} \omega\right) + \left(\int_{I^2_{2,0}} \omega - \int_{I^2_{2,1}} \omega\right).$$

Dieses und weitere Beispiele legen es nahe, den Rand $\partial I^2$ als formale Linearkombination von singulären 1-Würfeln zu schreiben, d.h.

$$\partial I^2 := -(I^2_{1,0} - I^2_{1,1}) + (I^2_{2,0} - I^2_{2,1}),$$

und das Integral über eine solche Linearkombination als die entsprechende Linearkombination der Integrale der 1-Würfel zu erklären.

Anstatt von „formalen Linearkombinationen“ zu sprechen, sollte man besser den Begriff einer *frei erzeugten abelschen Gruppe* verwenden. Sei $A$ eine nichtleere Menge und

$$\mathcal{F}(A) := \{f : A \to \mathbb{Z} : f(x) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in A.\}$$

Für $f, g \in \mathcal{F}(A)$ sei

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \quad x \in A.$$

Man nennt $\mathcal{F}(A)$ die von $A$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Für $x \in A$ sei $\overline{x} \in \mathcal{F}(A)$ erklärt als

$$\overline{x}(y) := \begin{cases} 1, & \text{für } y = x,\\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit gilt für $f \in \mathcal{F}(A)$ gerade

$$f = \sum_{x \in A} f(x)\overline{x}.$$

Statt $\overline{x}$ schreibt man auch einfach $x$, d.h. die Elemente von $\mathcal{F}(A)$ sind von der Form

$$\sum_{x \in A} n_x x$$

mit $n_x \in \mathbb{Z}$, wobei nur endlich viele dieser Zahlen $\neq 0$ sind. Die Elemente von $\mathcal{F}(A)$ kann man daher auch als formale Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten der Elemente von $A$ auffassen.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Sei $\mathcal{K}_p(M)$ die von der Menge der singulären $p$-Würfel in $M$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Die Elemente von $\mathcal{K}_p(M)$ (endliche formale Linearkombinationen von singulären $p$-Würfeln in $M$ mit ganzzahligen Koeffizienten) heißen *$p$-Ketten* in $M$.

**Definition.** Das *Integral der stetigen $p$-Form $\omega$ auf $M$ über die $p$-Kette $c = \sum a_i c_i$* mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und singulären $p$-Würfeln $c_i$ in $M$ wird erklärt durch

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega.$$

**Randbildung.**

**Definition.**

- Der singuläre $p$-Würfel $I^p : [0,1]^p \to \mathbb{R}^p$ sei erklärt durch $I^p(X) := X$ für $X \in [0,1]^p$.
- Die singulären $(p-1)$-Würfel $I^p_{i,0} : [0,1]^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ und $I^p_{i,1} : [0,1]^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ für $p \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, p\}$ sind erklärt durch

$$I^p_{i,0}(X) := (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{p-1}),$$
$$I^p_{i,1}(X) := (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{p-1})$$

  für $X = (x_1, \ldots, x_{p-1}) \in [0,1]^{p-1}$.
- Setze $I^1_{1,0}(0) := 0$ und $I^1_{1,1}(0) = 1$.
- Der *Rand des singulären $p$-Würfels $c$* ist erklärt durch

$$\partial c := \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \left[ c \circ I^p_{i,0} - c \circ I^p_{i,1} \right].$$

- Der Rand der $p$-Kette $\sum a_i c_i$ ist erklärt durch

$$\partial \left( \sum a_i c_i \right) := \sum a_i \partial c_i.$$

Man kann zeigen, daß stets $\partial\partial c = 0$ für Ketten $c$ gilt. Wir werden dies nicht benötigen. Eine analoge Aussage gilt für Untermannigfaltigkeiten $M$ des $\mathbb{R}^n$, d.h. hier gilt $\partial\partial M = \emptyset$.

**Satz 5.12 (Stokes für Ketten)**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in \mathbb{N}$, $\omega$ eine $(p-1)$-Form der Klasse $C^1$ auf $M$ und $c$ eine $p$-Kette in $M$. Dann gilt

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

*Beweis.* Sei $p = 1$, also $\omega = f$ eine Funktion der Klasse $C^1$ auf $M$. Sei $c$ ein singulärer 1-Würfel in $M$. Dann ist

$$df = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n$$

und

$$\int_c df = \int_0^1 \langle \nabla f \circ c(t), c'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 (f \circ c)'(t) \, dt = f \circ c(1) - f \circ c(0).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} f &= (-1) \int_{c \circ I^1_{1,0}} f + \int_{c \circ I^1_{1,1}} f = -f(c \circ I^1_{1,0}(0)) + f(c \circ I^1_{1,1}(0)) \\ &= -f(c(0)) + f(c(1)). \end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Gleichheit für singuläre 1-Würfel, die Ausdehnung auf 1-Ketten folgt wegen Linearität.

Sei jetzt $p \geq 2$. Wir betrachten zunächst den Fall $n = p$ und $c = I^p$ sowie

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p \tag{5.6}$$

für $i \in \{1, \dots, p\}$. Dann gilt

$$d\omega = (-1)^{i-1} \partial_i f \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$$

und

$$\begin{aligned} \int_{I^p} d\omega &= \int_{[0,1]^p} d\omega \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^p} \partial_i f \\ &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( \int_0^1 \partial_i f(x_1, \dots, x_p) \, dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_p \\ &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 [f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_p) \\ &\qquad - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_p)] dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_p. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\int_{\partial I^p} \omega = \sum_{j=1}^p (-1)^j \left[ \int_{I^p_{j,0}} \omega - \int_{I^p_{j,1}} \omega \right].$$

Wir formen die Integrale in den Klammern um. Zunächst ist

$$\int_{I^p_{j,0}} \omega = \int_{[0,1]^{p-1}} \left( I^p_{j,0} \right)^* \omega.$$

Mit $I^p_{j,0} = (g_1, \dots, g_p)$ folgt

$$\left( I^p_{j,0} \right)^* \omega = f \circ I^p_{j,0} \, dg_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \cdots \wedge dg_p.$$

Seien $du^1, \ldots, du^{p-1}$ die Koordinatendifferentiale von $\mathbb{R}^{p-1}$. Dann gilt nach Definition von $I_{j,0}^p$ offenbar

$$dg_k = \begin{cases} du^k, & k = 1, \ldots, j-1, \\ 0, & k = j, \\ du^{k-1}, & k = j+1, \ldots, p. \end{cases}$$

An der Stelle $U = (u_1, \ldots, u_{p-1})$ erhält man also

$$\left[\left(I_{j,0}^p\right)^* \omega\right]_U = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ f(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_i, \ldots, u_{p-1})\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^p, & j = i. \end{cases}$$

Es folgt

$$\int_{I_{j,0}^p} \omega = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_i, \ldots, u_{p-1})\, du_1 \ldots du_{p-1}, & j = i. \end{cases}$$

Mit einem ähnlichen Ausdruck für $\int_{I_{j,1}^p}$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^p} \omega \quad &= \quad (-1)^i \int_0^1 \ldots \int_0^1 [f(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_i, \ldots, u_{p-1}) - \\ &\qquad f(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_i, \ldots, u_{p-1})]\, du_1 \ldots du_{p-1}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{\partial I^p} \omega. \tag{5.7}$$

Da jede $(p-1)$-Form auf $[0,1]^p$ Summe von $(p-1)$-Formen der Gestalt (5.6) ist, gilt (5.7) für jede $(p-1)$-Form $\omega$ der Klasse $C^1$ auf $[0,1]^p$.

Sei schließlich $c$ ein beliebiger singulärer $p$-Würfel in $M \subset \mathbb{R}^n$ und $\omega$ eine stetig differenzierbare $(p-1)$-Form auf $M$. Dann gilt zunächst wegen (5.7)

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^p} c^*\, d\omega = \int_{I^p} c^*\, d\omega = \int_{I^p} dc^*\omega = \int_{\partial I^p} c^*\omega.$$

Ferner ist

$$\int_{c \circ I_{i,0}^p} \omega = \int_{[0,1]^{p-1}} (c \circ I_{i,0}^p)^*\omega = \int_{[0,1]^{p-1}} (I_{i,0}^p)^*(c^*\omega) = \int_{I_{i,0}^p} c^*\omega,$$

und analog für $I_{i,1}^p$. Es folgt also

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega \quad &= \quad \sum_{i=1}^p (-1)^i \left[\int_{c \circ I_{i,0}^p} \omega - \int_{c \circ I_{i,1}^p} \omega\right] \\ &= \quad \sum_{i=1}^p (-1)^i \left[\int_{I_{i,0}^p} c^*\omega - \int_{I_{i,1}^p} c^*\omega\right] \\ &= \quad \int_{\partial I^p} c^*\omega \\ &= \quad \int_c d\omega. \end{aligned}$$

Ist schließlich $c = \sum a_i c_i$ eine $p$-Kette in $M$, so folgt

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Wir betrachten zur Illustration ein abschließendes Beispiel, das in den Übungen besprochen werden kann.

**Beispiel.** Sei $c$ der singuläre 2-Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit

$$c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto (u^2 - v^3, u, -v^2)$$

und $\omega$ die 2-Form auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\omega_X = 4(dx^1)_X \wedge (dx^3)_X - x_1(dx^2)_X \wedge (dx^3)_X$$

sowie $\eta$ die 1-Form auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\eta_X = 2(dx^1)_X - x_1^2(dx^3)_X.$$

Zunächst gilt mit $c = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{aligned}
\int_c \omega &= \int_{[0,1]^2} c^*\omega = \int_{[0,1]^2} (4dc_1 \wedge dc_3 - c_1^2 dc_2 \wedge dc_3) \\
&= \int_{[0,1]^2} \left[ 4\frac{\partial(c_1,c_3)}{\partial(u,v)} - (u^2 - v^3)\frac{\partial(c_2,c_3)}{\partial(u,v)} \right] du\,dv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [-16uv + 2v(u^2 - v^3)]\, du\,dv \\
&= -\frac{61}{15}.
\end{aligned}$$

Mit $d\eta = -2x_1 dx^1 \wedge dx^3$ gilt analog

$$\begin{aligned}
\int_c d\eta &= \int_{[0,1]^2} -2(u^2 - v^3)\frac{\partial(c_1,c_3)}{\partial(u,v)}\, du\,dv \\
&= -2\int_0^1 \int_0^1 (-4uv)(u^2 - v^3)\, du\,dv \\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Andererseits erhält man wegen

$$\partial c = c \circ I_{1,1}^2 - c \circ I_{1,0}^2 + c \circ I_{2,0}^2 - c \circ I_{2,1}^2$$

und

$$\begin{aligned}
c \circ I^2_{1,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (1-t^3, 1, -t^2),\\
c \circ I^2_{1,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (-t^3, 0, -t^2),\\
c \circ I^2_{2,0} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t^2, t, 0),\\
c \circ I^2_{2,1} &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t^2-1, t, -1)
\end{aligned}$$

auch

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \eta &= \int_{c\circ I^2_{1,1}} \eta - \int_{c\circ I^2_{1,0}} \eta + \int_{c\circ I^2_{2,0}} \eta - \int_{c\circ I^2_{2,1}} \eta\\
&= \int_0^1 [2(-3t^2) - (1-t^3)^2(-2t)]\,dt - \int_0^1 [2(-3t^2) - t^6(-2t)]\,dt\\
&\quad + \int_0^1 2\cdot 2t\,dt - \int_0^1 2\cdot 2t\,dt\\
&= \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

was den Satz von Stokes exemplarisch bestätigt.

## 5.4 Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt werden niederdimensionale glatte geometrische Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ untersucht, über die schließlich integriert werden soll. Die dabei betrachteten $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ können zugleich als Einstieg in die Theorie der abstrakten Mannigfaltigkeiten verstanden werden. Dies ist dann etwa Gegenstand einer Vorlesung über Differentialgeometrie.

Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, nehmen wir an, daß alle Abbildungen von der Klasse $C^\infty$ sind, falls nichts anderes vorausgesetzt wird. Ferner sei für $k \in \{0,\dots,n\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n_k &:= \{X \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\},\\
H^n_k &:= \{X \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\},\\
\partial H^n_k &:= \{X \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Grob gesprochen werden durch die nachfolgende Definition Mengen erklärt, die lokal nach Anwendung einer geeigneten differenzierbaren Transformation wie $\mathbb{R}^n_k$ oder $H^n_k$ aussehen.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Die Menge $M$ heißt *$k$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$*, wenn für jedes $X \in M$ gilt: Es gibt eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $X$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit

$$h(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^n_k \tag{a}$$

oder

$$h(U \cap M) = V \cap H_k^n \quad \text{und} \quad h(X) \in \partial H_k^n. \tag{b}$$

Gilt (a), so heißt $X$ *innerer Punkt* von $M$; gilt (b), so heißt $X$ *Randpunkt* von $M$.

**Bemerkungen.**

- Die Begriffe innerer Punkt und Randpunkt beziehen sich nicht auf die Topologie des $\mathbb{R}^n$.
- Ein Punkt $X \in M$ kann nicht zugleich innerer Punkt und Randpunkt sein. Sonst gäbe es offene Umgebungen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ von $X$, offene Mengen $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen

  $$h_1 : U_1 \to V_1 \quad \text{und} \quad h_2 : U_2 \to V_2$$

  mit

  $$h_1(U_1 \cap M) = V_1 \cap \mathbb{R}_k^n, \quad h_2(U_2 \cap M) = V_2 \cap H_k^n \quad \text{und} \quad h_2(X) \in \partial H_k^n.$$

  Die Abbildung

  $$h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \to h_2(U_1 \cap U_2)$$

  ist ein Diffeomorphismus, der also offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Insbesondere ist auch $h_2 \circ h_1^{-1} \mid h_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}_k^n$ eine differenzierbare Abbildung in $\mathbb{R}_k^n$ mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante und

  $$\begin{aligned} h_2 \circ h_1^{-1}(h_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}_k^n) &= h_2 \circ h_1^{-1}(V_1 \cap \mathbb{R}_k^n \cap h_1(U_1 \cap U_2)) \\ &= h_2(U_1 \cap M \cap U_2) \\ &\subset V_2 \cap H_k^n \subset \mathbb{R}_k^n. \end{aligned}$$

  Also wäre $h_2 \circ h_1^{-1} \mid h_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}_k^n$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}_k^n$. Andererseits wäre $h_2 \circ h_1^{-1}(h_1(X))$ kein innerer Punkt der Bildmenge dieser Abbildung bezüglich $\mathbb{R}_k^n$ als dem umgebenden Raum, ein Widerspruch.

**Definition.** Ist $M$ eine $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, so wird die Menge der *Randpunkte* von $M$ mit $\partial M$ bezeichnet. Ist $\partial M = \emptyset$, so heißt $M$ *unberandet*. Ist $\partial M = \emptyset$ und $M$ kompakt, so heißt $M$ *geschlossen*.

**Beispiele.**

- 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten, d.h. diskrete Punktmengen.
- Ein Ball $B^n$ ist eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\partial B^n = S^{n-1}$.
- Eine Sphäre $S^{n-1}$ ist eine kompakte $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\partial S^{n-1} = \emptyset$, d.h. $S^{n-1}$ ist geschlossen.
- Der Volltorus im $\mathbb{R}^3$ (Rettungsring) ist eine kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Rand gerade der 2-Torus $T^2$ ist. Dieser erfüllt wieder $\partial T^2 = \emptyset$.
- Eine Hemisphäre $S_+^{n-1} := S^{n-1} \cap E_n^\perp$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, und es gilt $\partial S_+^{n-1} = S^{n-2}$.

- Eine 2-Mannigfaltigkeit ist beispielsweise $\{(u, v, 4 - u^2 - v^2) : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \cap B^2(0, 2)\}$. Allgemeiner ist jeder Graph einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$.

- *Möbiusband.* „Ein Zeigervektor $a(\varphi)$ beschreibe eine Kreislinie, um welche sich wiederum mit halber Geschwindigkeit ein zweiter Zeiger windet, dessen Mitte auf der Kreislinie und dessen Anfangs- und Endpunkt auf dem Rand des Möbiusbands liegt“.

  Sei
  $$a(\varphi) := (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \varphi \in [-\pi, \pi]$$
  und
  $$b_\varphi(\psi) := \cos(\psi)a(\varphi) + \sin(\psi)e_3, \qquad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
  Sei $R > 1$ und $\phi : [-\pi, \pi] \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ mit
  $$\begin{aligned} \phi(\varphi, t) &:= Ra(\varphi) + tb_\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
  Die Menge $\mathrm{Bild}(\phi)$ ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ (Möbiusband), die nicht orientierbar ist (vgl. später).

Die erforderlichen Nachweise zu den vorangehenden Beispielen werden durch die nachfolgenden drei Sätze erheblich vereinfacht.

**Satz 5.13**
Ist $M$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und $k \geq 1$, so ist $\partial M$ eine $(k-1)$-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Sei $M$ eine $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 1)$. Sei $X \in \partial M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U$ von $X$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit $h(U \cap M) = V \cap H_k^n$ und $h(X) \in \partial H_k^n$.

**Behauptung.** $h(U \cap \partial M) = V \cap \partial H_k^n$.

**Nachweis.** Sei $Y \in U \cap \partial M$. Wäre $h(Y) \notin \partial H_k^n$, so gäbe es eine offene Umgebung $V' \subset V$ von $h(Y)$ mit $V' \cap \mathbb{R}_k^n \subset H_k^n \setminus \partial H_k^n$. Die Menge $U' := h^{-1}(V')$ ist eine offene Umgebung von $Y$ mit $h(U' \cap M) = V' \cap \mathbb{R}_k^n$. Also ist $Y \in M \setminus \partial M$, ein Widerspruch. Dies zeigt $h(U \cap \partial M) \subset V \cap \partial H_k^n$.

Sei $Z \in V \cap \partial H_k^n$. Dann gibt es ein $Y \in U \cap M$ mit $h(Y) = Z$. Nun muß aber $Y \in \partial M$ gelten, da sonst $h(Y) = Z \notin \partial H_k^n$ wäre. Dies zeigt $V \cap \partial H_k^n \subset h(U \cap \partial M)$.

Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein (linearer) Automorphismus mit $L(\partial H_k^n) = \mathbb{R}_{k-1}^n$. Die Abbildung $L \circ h : U \to L(V)$ ist ein Diffeomorphismus der offenen Umgebung $U$ von $X$ auf die offene Menge $L(V) \subset \mathbb{R}^n$ mit $L \circ h(U \cap \partial M) = L(V) \cap \mathbb{R}_{k-1}^n$. Da $X \in \partial M$ beliebig war, ist $\partial M$ eine $(k-1)$-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Wir zeigen jetzt, daß sich Mannigfaltigkeiten lokal als parametrisierte Flächen beschreiben lassen. Hierzu setzen wir speziell

$$H^k := \{X \in \mathbb{R}^k : x_1 \geq 0\} = H_k^k.$$

**Satz 5.14**
Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $X \in M$ eine offene Umgebung U von X, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$, falls $X \notin \partial M$, bzw. eine relativ offene Menge $W \subset H^k$, falls $X \in \partial M$, und eine injektive, differenzierbare Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $F(W) = M \cap U$ *und* $X = F(Z)$ *mit* $Z \in \partial H^k$, *falls* $X \in \partial M$,

(b) $F^{-1} : F(W) \to W$ *ist stetig* bezüglich der Spurtopologie,

(c) $DF_Z$ *ist vom Rang* $k$ *für alle* $Z \in W$.

Jede solche Abbildung $F$ wird als ein *Koordinatensystem* der Mannigfaltigkeit um den Punkt $X$ bezeichnet.

*Beweis.* Sei $X \in M$ und $X \notin \partial M$. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ um $X$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit $h(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}_k^n$. Setze

$$W := \{Z \in \mathbb{R}^k : (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \in V\}$$

und definiere eine injektive Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ durch

$$F(Z) := h^{-1}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0), \qquad Z = (z_1, \dots, z_k).$$

Nach Konstruktion gilt $F(W) = U \cap M$. Mit $h$ ist auch $F^{-1} = h|U \cap M$ stetig. Definiere $H : U \to \mathbb{R}^k$ durch

$$H(Y) := (h_1(Y), \dots, h_k(Y))$$

mit $h = (h_1, \dots, h_n)$. Für $Z \in W$ gilt $H(F(Z)) = Z$ und damit $DH_{F(Z)} \circ DF_Z = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$, d.h. $\operatorname{rang} DF_Z = k$.

Im Fall $X \in \partial M$ ist die Argumentation dieselbe.

Man kann Satz 5.14 auch umkehren.

**Satz 5.15**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zu jedem $X \in M$ gebe es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $X$, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ oder eine relativ offene Menge $W \subset H^k$ und eine injektive differenzierbare Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit (a), (b), (c) wie in Satz 3.6.3. Dann ist $M$ eine $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.

*Beweis.* Wir betrachten wieder nur den Fall eines Punktes $X \in M$, zu dem eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit den behaupteten Eigenschaften existiert. Sei $X = F(Z)$. Aus dem Satz von der Umkehrabbildung folgert man mit (c) die Existenz einer offenen Umgebung $W_1$ von $Z$ in $W$, einer offenen Umgebung $W_2$ von 0 in $\mathbb{R}^{n-k}$, einer offenen Umgebung $U_1$ von $F(Z)$ in $\mathbb{R}^n$ und eines Diffeomorphismus $g : W_1 \times W_2 \to U_1$ mit $g(Y, 0) = F(Y)$ für $Y \in W_1$. Sei $h : U_1 \to W_1 \times W_2$ die Umkehrabbildung von $g$. Da $F^{-1} : F(W) \to W$ stetig ist, gibt es eine offene Menge $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $F(W_1) = U_2 \cap F(W)$. Setze $U_0 := U \cap U_1 \cap U_2$ und $V := g^{-1}(U_0)$. Dann gilt wegen (a)

$$\begin{aligned}
h(U_0 \cap M) &= h(U \cap U_1 \cap U_2 \cap M)\\
&= h(F(W) \cap U_0 \cap U_2)\\
&= h(F(W_1) \cap U_0)\\
&= g^{-1}(F(W_1) \cap U_0)\\
&= g^{-1}(g(W_1 \times \{0\}) \cap U_0)\\
&= V \cap (W_1 \times \{0\})\\
&= V \cap \mathbb{R}^n_k.
\end{aligned}$$

Zuletzt wurde benutzt, daß

$$V = g^{-1}(U_0) = h(U_0) \subset h(U_1) = W_1 \times W_2$$

gilt.

**Satz 5.16**
Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit. Seien $F_1 : W_1 \to \mathbb{R}^n$ und $F_2 : W_2 \to \mathbb{R}^n$ Koordinatensysteme um einen Punkt von $M$. Dann ist die Abbildung

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(F_2(W_2)) \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbar und vom Rang $k$.

*Beweis.* Sei $Y \in F_1^{-1}(F_2(W_2))$ und $X = F_1(Y)$. Dann gibt es in einer Umgebung von $X$ einen Diffeomorphismus $H$ mit

$$F_2^{-1}(F_1(Z)) = H(F_1(Z)) \quad \text{für } Z \in F_1^{-1}(F_2(W_2')),$$

wobei $W_2'$ eine passende Umgebung von $F_2^{-1}(X)$ ist. Mit $H, F_1$ ist also auch $F_2^{-1} \circ F_1$ differenzierbar (im Definitionsbereich). Ferner ist $\operatorname{rang}(D(F_2^{-1} \circ F_1)_Y) = k$, da $\operatorname{rang}(DH_{F_1(Y)}) = n$ und $\operatorname{rang}((DF_1)_Y) = k$ gilt.

Wir erklären nun zunächst den Tangentialraum an $M$ in einem Punkt $X \in M$ und schließlich Differentialformen auf $M$.

**Definition.** Sei $M$ eine $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, $X \in M$ und $F : W \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem um $X$. Dann wird der $k$-dimensionale Unterraum

$$TM_X := DF_{F^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$$

als der *Tangentialraum* von $M$ in $X$ bezeichnet.

Damit diese Terminologie gerechtfertigt ist, sollte $TM_X$ von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein. Zum Nachweis sei also $\overline{F} : \overline{W} \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres Koordinatensystem um $X$. Nach Satz 5.16 ist

$$D(F^{-1} \circ \overline{F})_{\overline{F}^{-1}(X)} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

bijektiv. Wegen $F \circ (F^{-1} \circ \overline{F}) = \overline{F}$ (auf geeignetem Definitionsbereich) folgt so

$$D\overline{F}_{\overline{F}^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k) = DF_{F^{-1}(X)} \circ D(F^{-1} \circ \overline{F})_{\overline{F}^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k) = DF_{F^{-1}(X)}(\mathbb{R}^k),$$

was zu zeigen war.

**Definition.** Sei $M$ eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, sei $p \in \mathbb{N}_0$. Eine *Differentialform vom Grad* $p$ (kurz: $p$-Form) *auf* $M$ ist eine Abbildung, die jedem $X \in M$ ein Element von $\Omega^p(TM_X)$ zuordnet.

**Beispiel.** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset A$ eine $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und $\omega$ eine $p$-Form auf $A$. Für $X \in A$ und insbesondere für $X \in M$ ist $\omega_X \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$\omega_X : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p-\text{mal}} \to \mathbb{R}$$

ist eine alternierende multilineare Abbildung. Einschränkung von $\omega_X$, $X \in M$, auf das $p$-fache Produkt $TM_X \times \cdots \times TM_X$ ergibt eine Differentialform vom Grad $p$ auf $M$.

Sei nun $\omega$ eine $p$-Form auf der $k$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$, sei $X \in M$ und $F : W \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem um $X$ sowie $Z \in W$ mit $F(Z) = X$. Sei ferner $\overline{F} : \overline{W} \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres Koordinatensystem um $X$ und $\overline{Z} \in \overline{W}$ mit $\overline{F}(\overline{Z}) = X$. Wegen $DF_Z : \mathbb{R}^k \to TM_X$ ist

$$(DF_Z)^* : \Omega^p(TM_X) \to \Omega^p(\mathbb{R}^k)$$

erklärt, und wir setzen

$$(F^*\omega)_Z := (DF_Z)^*\omega_X.$$

Auf diese Weise wird eine $p$-Form $F^*\omega$ auf $W$ erklärt. Nach Satz 5.16 ist die Abbildung $G := F^{-1} \circ \overline{F}$ in einer Umgebung von $\overline{Z}$ ein Diffeomorphismus. Aus $\overline{F} = F \circ G$ folgt daher

$$\begin{aligned}
(\overline{F}^*\omega)_{\overline{Z}} &= (D\overline{F}_{\overline{Z}})^*\omega_X = (DF_Z \circ DG_{\overline{Z}})^*\omega_X \\
&= (DG_{\overline{Z}})^* \left((DF_Z)^*\omega_X\right) = (DG_{\overline{Z}})^*(F^*\omega)_Z \\
&= G^*(F^*\omega)_{\overline{Z}},
\end{aligned}$$

also $\overline{F}^*\omega = G^*(F^*\omega)$ im gemeinsamen Definitionsbereich. Mit $F^*\omega$ ist also auch $\overline{F}^*\omega$ differenzierbar.

**Definition.** Die $p$-Form $\omega$ auf der Mannigfaltigkeit $M$ heißt *differenzierbar*, wenn für jedes Koordinatensystem $F$ von $M$ die Form $F^*\omega$ differenzierbar ist.

Wir überlegen uns jetzt, daß man auch für $p$-Formen auf $M$ eine äußere Ableitung erklären kann.

**Satz 5.17**
Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und $\omega$ eine differenzierbare $p$-Form auf $M$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte $(p+1)$-Form $d\omega$ auf $M$, das äußere Differential von $\omega$, so daß

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$$

für jedes Koordinatensystem $F$ der Mannigfaltigkeit $M$ gilt.

*Beweis.* Sei $F : W \to \mathbb{R}^n$ ein Koordinatensystem um $X \in M$ und $Z \in W$ mit $F(Z) = X$. Zu beliebigen Vektoren $Y_1, \ldots, Y_{p+1} \in TM_X$ gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $V_1, \ldots, V_{p+1} \in \mathbb{R}^k$ mit $DF_Z(V_i) = Y_i$ für $i = 1, \ldots, p+1$. Falls $d\omega$ tatsächlich existiert mit der geforderten Eigenschaft, so folgt

$$\begin{aligned}
(d\omega)_X(Y_1, \ldots, Y_{p+1}) &= (d\omega)_X(DF_Z(V_1), \ldots, DF_Z(V_{p+1})) \\
&= \left[(DF_Z)^*\, d\omega_X\right](V_1, \ldots, V_{p+1}) \\
&= (F^*\, d\omega)_Z(V_1, \ldots, V_{p+1}) \\
&= d(F^*\omega)_Z(V_1, \ldots, V_{p+1}).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $d\omega$ eindeutig bestimmt ist durch die geforderte Eigenschaft. Wir definieren nun

$$(d\omega)_X(Y_1, \ldots, Y_{p+1}) := d(F^*\omega)_Z(V_1, \ldots, V_{p+1}).$$

Wir rechnen nun nach, daß diese Definition nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt und die gewünschte Eigenschaft besitzt.

**Wahlunabhängigkeit**: Seien $F : W \to M$, $\overline{F} : \overline{W} \to M$ Koordinatensysteme von $M$ um $X$ mit $F(Z) = \overline{F}(\overline{Z}) = X$. Sei $G := F^{-1} \circ \overline{F}$ in einer geeigneten Umgebung von $\overline{Z}$, d.h. $G(\overline{Z}) = Z$. Schließlich seien $V_i, \overline{V}_i \in \mathbb{R}^k$ mit

$$DF_Z(V_i) = Y_i = D\overline{F}_{\overline{Z}}(\overline{V}_i), \quad i = 1, \ldots, p+1.$$

Wegen $\overline{F} = F \circ G$ gilt $D\overline{F}_{\overline{Z}}(\overline{V}_i) = DF_Z(DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_i))$ und damit $DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_i) = V_i$. Nun folgt

$$\begin{aligned}
d(\overline{F}^*\omega)_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{p+1}) &= d((F \circ G)^*\omega)_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{p+1}) \\
&= d(G^*(F^*\omega))_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{p+1}) \\
&= (G^*d(F^*\omega))_{\overline{Z}}(\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{p+1}) \\
&= d(F^*\omega)_Z(DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_1), \ldots, DG_{\overline{Z}}(\overline{V}_{p+1})) \\
&= d(F^*\omega)_Z(V_1, \ldots, V_{p+1}).
\end{aligned}$$

**Geforderte Eigenschaft:** Wir verwenden obige Notation, die Definition von $F^*(d\omega)$ und schließlich die Definition von $d\omega$, um so zu erhalten

$$\begin{aligned}
F^*(d\omega)_Z(V_1, \ldots, V_{p+1}) &= (d\omega)_X(DF_Z(V_1), \ldots, DF_Z(V_{p+1})) \\
&= d(F^*\omega)_Z(V_1, \ldots, V_{p+1}),
\end{aligned}$$

also in der Tat $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$.

**Orientierung.**

In Abschnitt 3.2 hatten wir gesehen, daß die klassischen Sätze der Vektoranalysis eine geeignete Orientierung der betrachteten Kurven und Flächen voraussetzen. Der Begriff einer Orientierung ist jetzt auf Mannigfaltigkeiten und deren Ränder zu übertragen.

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler reeller Vektorraum mit Basen $(e_1, \ldots, e_n)$ und $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$. Ist $\overline{e}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} e_j$ für $i = 1, \ldots, n$, so setzen wir

$$\Delta := \det\,(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Man nennt $(e_1, \ldots, e_n)$ und $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$ äquivalent, falls $\Delta > 0$ gilt. Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation auf den geordneten Basen von $V$ gegeben mit genau zwei Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse zu $(e_1, \ldots, e_n)$ wird mit

$$[e_1, \ldots, e_n]$$

bezeichnet, die davon verschiedene Äquivalenzklasse wird mit $-[e_1, \ldots, e_n]$ bezeichnet. Eine Orientierung auf $V$ ist eine Äquivalenzklasse geordneter Basen.

**Definition.** Sei $M$ eine $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Eine *Orientierung* auf $M$ ist eine Abbildung $o$, die jedem $X \in M$ eine Orientierung $o_X$ des Tangentialraumes $TM_X$ zuordnet, so daß gilt: Für jedes Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ von $M$ mit zusammenhängendem $W$ gilt

$$\begin{aligned} \text{entweder} \qquad & [DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = o_{F(Z)} \qquad \text{für } Z \in W \\ \text{oder} \qquad & [DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = -o_{F(Z)} \qquad \text{für } Z \in W. \end{aligned}$$

Im ersten Fall heißt $F$ *orientierungstreu*, im zweiten Fall *orientierungsumkehrend*. Ist $o$ eine Orientierung auf $M$, so heißt $(M, o)$ orientierte Mannigfaltigkeit.

**Beispiele.**

- Der $\mathbb{R}^n$ als orientierte $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit, offene Teilmengen davon. Diskussion des Zusammenhangs der Menge $W$ in der vorangehenden Definition.
- Reguläre Kurven; zumindest lokal: parametrisierte Flächen.
- Wir hatten schon erwähnt, daß das Möbiusband im $\mathbb{R}^3$ ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit ist, auf der keine Orientierung existiert. Für eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ gibt es genau dann eine Orientierung (wie man zeigen kann), wenn $M$ ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld besitzt. Dies kann man verwenden, um die Nichtorientierbarkeit des Möbiusbandes einzusehen.

**Bemerkung.** Die Orientierbarkeit einer $k$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ ist äquivalent zur Existenz einer nirgends verschwindenden stetigen $k$-Form auf $M$ oder auch zur Existenz eines *orientierten Atlas*. Ein *Atlas* ist hierbei eine Familie von Koordinatensystemen von $M$, deren Bilder $M$ überdecken. Ein Atlas heißt orientiert, wenn je zwei seiner Elemente gleichorientiert sind.

Bei der folgenden Aussage ist die Argumentation im Beweis ebenso wichtig wie die Aussage selbst.

**Lemma 5.18**
Sei $(M, o)$ eine k-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, seien $F, \overline{F}$ zwei orientierungstreue Koordinatensysteme um X, sei $F(Z) = X = \overline{F}(\overline{Z})$. Dann ist $\det D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z > 0$.

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt

$$[DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = o_X = [D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_1), \ldots, D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_k)].$$

Zwei äquivalente Basen bleiben nach Anwendung eines beliebigen Isomorphismus äquivalent. Also folgt durch Anwendung des Isomorphismus $(D\overline{F}_{\overline{Z}})^{-1} : TM_X \to \mathbb{R}^k$

$$\left[D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_1), \ldots, D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_k)\right] = [E_1, \ldots, E_k],$$

was die Behauptung zeigt.

Aufgrund von Satz 5.13 ist bekannt, daß der Rand $\partial M$ einer $k$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ von $\mathbb{R}^n$ eine $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ist $(M, o)$ orientiert, so kann man auch auf $\partial M$ eine (induzierte) Orientierung einführen.

**Satz 5.19**
Sei $(M, o)$ eine k-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Orientierung $o'$ auf $\partial M$, so daß gilt: Für $X \in \partial M$, jedes Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ von $M$ um $X$ und für alle Vektoren $Y_1, \ldots, Y_{k-1} \in T\partial M_X$ mit

$$[DF_Z(-E_1), Y_1, \ldots, Y_{k-1}] = o_X, \qquad Z = F^{-1}(X)$$

gilt

$$[Y_1, \ldots, Y_{k-1}] = o'_X.$$

Man nennt $o'$ die von $o$ induzierte Orientierung.

*Beweis.* Sei $X \in \partial M$. Es gibt ein Koordinatensystem $F$ von $M$ um $X$, so daß für die Basis $(DF_Z(-E_1), DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k))$ von $TM_X$ gilt

$$o_X = [DF_Z(-E_1), DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k)].$$

Dann ist zunächst $F(0, \cdot)$ ein Koordinatensystem von $\partial M$ um $X$ und $(DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k))$ ist eine Basis von $T\partial M_X$. Wir definieren

$$o'_X := [DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k)].$$

**Wohldefiniertheit:** Sei $\overline{F}$ ein weiteres Koordinatensystem von $M$ um $X$ mit $\overline{F}(\overline{Z}) = X$ und

$$o_X = [D\overline{F}_{\overline{Z}}(-E_1), D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_2), \ldots, D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_k)].$$

Wie im Beweis zu Lemma 5.18 folgt $\det(D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z) > 0$. Ferner gilt

$$\langle E_1, D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_1)\rangle = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \langle \overline{F}^{-1} \circ F(Z + tE_1), E_1\rangle \geq 0.$$

Wegen

$$D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z(E_i) \in \operatorname{lin}\{E_2, \ldots, E_k\}$$

für $i = 2, \ldots, k$, folgt schließlich mit $E_1^\perp = \operatorname{lin}\{E_2, \ldots, E_k\}$

$$\det(D(\overline{F}^{-1} \circ F)_Z \mid E_1^\perp) > 0$$

und damit

$$[DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k)] = [D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_2), \ldots, D\overline{F}_{\overline{Z}}(E_k)].$$

Ist nun $Y_1, \ldots, Y_{k-1} \in T\partial M_X$ und

$$o_X = [DF_Z(-E_1), Y_1, \ldots, Y_{k-1}],$$

wobei $F$ wie in der Definition von $o_X$ gewählt sei, so gilt

$$Y_i = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{ji} DF_Z(E_j), \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

mit $\det(\alpha_{ji}) > 0$. Daher folgt

$$o'_X = [DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k)] = [Y_1, \ldots, Y_{k-1}].$$

Wir zeigen nun noch, daß $o'$ eine Orientierung von $\partial M$ ist. Sei hierzu $G : W \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von $\partial M$ mit zusammenhängender Menge $W$. Sei $Z_0 \in W$ und $X_0 := G(Z_0)$. Sei $F$ eine Karte von $M$ um $X_0$, die wie in der Definition von $o'$ orientiert sei. Sei $i : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$, $i(x) := (0, x)$. Ferner setze $\tilde{F} := F \circ i$ auf einen passenden Definitionsbereich. Dann gilt zunächst lokal um $Z_0$:

$$\begin{aligned}
& [DG_Z(E_1), \ldots, DG_Z(E_{k-1})] \\
= \; & \left[D(\tilde{F} \circ (\tilde{F}^{-1} \circ G))_Z(E_1), \ldots, D(\tilde{F} \circ (\tilde{F}^{-1} \circ G))_Z(E_{k-1})\right] \\
= \; & \left[D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(D(\tilde{F}^{-1} \circ G)_Z(E_1)), \ldots, D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(D(\tilde{F}^{-1} \circ G)_Z(E_{k-1}))\right] \\
= \; & \operatorname{sgn}(\det(D(\tilde{F}^{-1} \circ G)_Z))[D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(E_1), \ldots, D\tilde{F}_{\tilde{F}^{-1}(X)}(E_{k-1})] \\
= \; & f(z) \cdot [DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_{k-1})] \\
= \; & f(z) o'_{G(z)},
\end{aligned}$$

wobei

$$f(z) := \operatorname{sgn}(\det(D(\tilde{F} \circ G)_Z)).$$

Die bewiesene Gleichung zeigt, daß $f$ unabhängig von der lokalen Darstellung ist und $f(z) \in \{-1, 1\}$. Ferner ist $f$ aufgrund der lokalen Darstellung stetig. Dies zeigt die Konstanz von $f$ auf der zusammenhängenden Menge $W$.

**Bemerkung.** Ist $(M, o)$ eine orientierte Mannigfaltigkeit, so läßt man gelegentlich die Angabe des Symbols $o$ weg, wenn dieses aus dem Zusammenhang klar ist.

**Zerlegung der Eins.**

Häufig liegt in geometrischen, topologischen oder analytischen Fragestellungen die folgende Situation vor. Ein Objekt läßt sich lokal gut beschreiben bzw. definieren, und man will diese lokalen Beschreibungen global „glatt“ zusammensetzen. Ein nützliches Hilfsmittel hierfür ist die nachfolgend beschriebene Konstruktion, die zu einer Menge von nichtnegativen Funktionen führt, die sich an jeder Stelle zu Eins aufsummieren. Die Vorgehensweise hier ist spezieller als üblicherweise bei der Untersuchung *parakompakter Räume* in der Topologie. Allerdings können die zerlegenden Funktionen zusätzlich differenzierbar gewählt werden.

**Lemma 5.20**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine kompakte Menge $D \subset U$ mit $C \subset D^0$.

*Beweis.* Zu jedem $X \in C$ gibt es ein $a_X > 0$ mit

$$W(X, a_X) := \{Y \in \mathbb{R}^n : \|Y - X\|_{\max} \leq a_X\} \subset U.$$

Das System $\{W(X, a_X)^0 : X \in C\}$ ist eine offene Überdeckung von $C$, enthält also eine endliche Teilüberdeckung $\{W(X_i, a_{X_i}) : i = 1, \ldots, m\}$. Die Menge

$$D := \bigcup_{i=1}^{m} W(X_i, a_{X_i})$$

leistet das Gewünschte.

**Lemma 5.21**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine kompakte Menge $D \subset U$ mit $C \subset D^0$ und eine differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \text{für } X \in C, \\ 0, & \text{für } X \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

*Beweis.* (1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp\{-(x-1)^{-2}\}\exp\{-(x+1)^{-2}\}, & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f > 0$ auf $(-1, 1)$ und $f = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Ferner ist $f$ von der Klasse $C^\infty$.

(2) Für $Z \in \mathbb{R}^n$ und $a > 0$ sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$g(X) := \prod_{j=1}^{n} f\left(\frac{x_j - z_j}{a}\right).$$

Dann ist $g$ von der Klasse $C^\infty$, $g > 0$ auf $W(Z, a)^0$ und $g = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus W(Z, a)^0$.

(3) Seien $\{W(X_i, a_{X_i}) : i = 1, \ldots, m\}$ und $D$ wie im Beweis von Lemma 5.20 konstruiert. Zu $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei $g_i$ die Funktion, die zu $X_i, a_{X_i}$ so erklärt ist wie oben $g$ zu $Z, a$. Definiere $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(X) := \sum_{i=1}^{m} g_i(X).$$

Dann ist $\psi$ von der Klasse $C^\infty$. Zu $X \in C$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $X \in W(X_j, a_{X_j})^0$ und somit $\psi(X) \geq g_j(X) > 0$. Für $X \in \mathbb{R}^n \backslash D$ gilt $X \notin W(X_i, a_{X_i})$, also $g_i(X) = 0$, für $i = 1, \dots, m$, d.h. $\psi(X) = 0$. Da $\psi$ stetig und $C$ kompakt ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\psi(X) \geq \epsilon > 0$ für alle $X \in C$.

(4) Sei $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse $C^\infty$ mit $\tilde{f}(x) > 0$ für $x \in (0, \epsilon)$ und $f(X) = 0$ sonst (siehe (1)). Setze

$$h(x) := \int_0^x f \Big/ \int_0^\epsilon f, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ differenzierbar, und es gilt $h(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $h(x) = 1$ für $x \geq \epsilon$.

(5) Die Funktion $\varphi := h \circ \psi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ ist von der Klasse $C^\infty$, $\varphi(X) = 1$ für $X \in C$ und $\varphi(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus D$. Dies zeigt sämtliche Behauptungen.

Das im folgenden Satz konstruierte Funktionensystem $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ nennt man eine der Überdeckung $\{U_1, \dots, U_m\}$ untergeordnete *Zerlegung der Eins*.

**Satz 5.22**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_1, \dots, U_m\}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es differenzierbare reelle Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ auf $\mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $0 \leq \varphi_i \leq 1$ *für* $i = 1, \dots, m$,

(b) $\varphi_1(X) + \cdots + \varphi_m(X) = 1$ *für alle* $X \in M$,

(c) es gibt eine kompakte Menge $A_i \subset U_i$ mit $\varphi_i(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus A_i$ für $i = 1, \dots, m$.

*Beweis.* Zunächst werden kompakte Mengen $D_i \subset U_i$ konstruiert, so daß $M \subset D_1^0 \cup \cdots \cup D_m^0$ gilt. Hierzu zeigen wir allgemeiner, um vollständige Induktion verwenden zu können: Für $k \in \{0, \dots, m\}$ gibt es kompakte Mengen $D_i \subset U_i$ $(i = 1, \dots, k)$ mit

$$M \subset D_1^0 \cup \cdots \cup D_k^0 \cup U_{k+1} \cup \cdots \cup U_m.$$

Beweis durch vollständige Induktion über $k$. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Seien $D_1, \dots, D_k$ schon konstruiert. Dann ist

$$C_{k+1} := M \setminus \left(D_1^0 \cup \cdots \cup D_k^0 \cup U_{k+2} \cup \cdots \cup U_m\right)$$

eine kompakte Teilmenge von $U_{k+1}$. Nach Lemma 5.20 gibt es eine kompakte Teilmenge $D_{k+1} \subset U_{k+1}$ mit $C_{k+1} \subset D_{k+1}^0$, also

$$M \subset D_1^0 \cup \cdots \cup D_k^0 \cup D_{k+1}^0 \cup U_{k+2} \cup \cdots \cup U_m.$$

Dies beendet den Induktionsschluß.

Insbesondere gilt mit obigen Mengen $D_i$, $i = 1, \ldots, m$:

$$M \subset D_1^0 \cup \cdots \cup D_m^0 =: U$$

Nach Lemma 5.21 gibt es eine kompakte Menge $A_i \subset U_i$ mit $D_i \subset A_i^0$ und eine Funktion $\psi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ der Klasse $C^\infty$ mit $\psi_i(X) = 1$ für $X \in D_i$ und $\psi_i(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus A_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Zu $X \in U$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $X \in D_j^0$, d.h. $\psi_j(X) > 0$. Somit gilt $\psi_1(X) + \cdots + \psi_m(X) > 0$. Nach Lemma 5.21 gibt es eine kompakte Menge $A \subset U$ mit $M \subset A^0$ und eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $f(X) = 1$ für $X \in M$ und $f(X) = 0$ für $X \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Setze

$$\varphi_i(X) := \begin{cases} f(X) \cdot \frac{\psi_i(X)}{\psi_1(X) + \cdots + \psi_m(X)}, & X \in U, \\ 0, & X \in \mathbb{R}^n \setminus U. \end{cases}$$

Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ leisten das Gewünschte.

## 5.5 Der Satz von Stokes

Bevor wir den Satz von Stokes formulieren können, muß die Integration von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten erklärt werden. Alle Differentialformen seien als stetig vorausgesetzt. Ferner sei $M$ stets eine $k$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Für eine auf einer offenen Menge $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ erklärte Differentialform $\omega$ vom Grad $p$ und einen singulären $p$-Würfel in $\tilde{M}$ hatten wir

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^p} c^* \omega$$

definiert. Wir verallgemeinern dies jetzt auf den Fall einer Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$.

**Definition.** Für eine $p$-Form $\omega$ auf $M$ und einen singulären $p$-Würfel $c$ in $M$ sei

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^p} c^* \omega.$$

Im folgenden werden wir tatsächlich ausschließlich $p$-Formen über $p$-Mannigfaltigkeiten integrieren.

**Definition.** Ein singulärer $k$-Würfel $c : [0,1]^k \to M$ heißt *orientierungstreu*, wenn es ein orientierungstreues Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ in $M$ gibt mit $c = F \mid [0,1]^k$. In diesem Fall nennen wir $c$ einen *orientierungstreuen $k$-Würfel*.

Der folgende Hilfssatz zeigt an, daß das Integral einer $k$-Form auf $M$ über einen singulären Würfel „im wesentlichen" von der Wahl des singulären Würfels unabhängig ist.

**Lemma 5.23**
Seien $c_1, c_2 : [0,1]^k \to M$ orientierungstreue $k$-Würfel in $M$. Sei $\omega$ eine $k$-Form auf $M$ mit $\omega_X = 0$ für $X \notin c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k) =: B$. Dann ist

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

*Beweis.* Sei $c_2^*\omega =: f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ und $G := c_2^{-1} \circ c_1$ auf $c_1^{-1}(B)$. Dann gilt auf $c_1^{-1}(B)$:

$$\begin{aligned} c_1^*\omega &= [c_2 \circ (c_2^{-1} \circ c_1)]^*\omega = G^* c_2^*\omega \\ &= G^*(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= f \circ G \det JG\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= f \circ G\, |\det JG|\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k, \end{aligned}$$

wobei zuletzt benutzt wurde, daß $\det JG > 0$ gilt wegen Lemma 5.18. Mit dem Transformationssatz für Gebietsintegrale, angewandt mit dem Diffeomorphismus $G : c_1^{-1}(B) \to c_2^{-1}(B)$ erhält man nun

$$\int_{c_2^{-1}(B)} c_2^*\omega = \int_{c_2^{-1}(B)} f = \int_{c_1^{-1}(B)} f \circ G\, |\det JG| = \int_{c_1^{-1}(B)} c_1^*\omega.$$

Da $\omega$ außerhalb von $B$ ohnehin verschwindet, folgt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^*\omega = \int_{c_1^{-1}(B)} c_1^*\omega = \int_{c_2^{-1}(B)} c_2^*\omega = \int_{[0,1]^k} c_2^*\omega = \int_{c_2} \omega,$$

was zu zeigen war.

Lemma 5.23 stellt gerade die für die folgende Definition erforderliche Wohldefiniertheitsaussage bereit.

**Definition.** Sei $c$ ein orientierungstreuer $k$-Würfel in $M$ und $\omega$ eine $k$-Form auf $M$ mit $\omega_X = 0$ für $X \notin c([0,1]^k)$. Dann sei

$$\int_M \omega := \int_c \omega.$$

Der singuläre $k$-Würfel $c$ in $M$ heißt *orientierungsumkehrend*, wenn es ein orientierungsumkehrendes Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $c = F \mid [0,1]^k$. Ist dies der Fall und ist $\omega$ eine $k$-Form auf $M$, die außerhalb $c([0,1]^k)$ verschwindet, so ist

$$\int_c \omega = -\int_M \omega.$$

Zum Nachweis sei

$$\tilde{F} : [0,1]^k \to \mathbb{R}^n, \quad \tilde{F}(x_1,\dots,x_n) := F(x_1,\dots,x_{k-1},1-x_k)$$

und $\tilde{c} := \tilde{F} \mid [0,1]^k$. Dann ist $\tilde{F}$ und somit $\tilde{c}$ orientierungstreu, d.h.

$$\int_M \omega = \int_{\tilde{c}} \omega.$$

Andererseits folgt wie im Beweis Lemma 5.23, daß

$$\int_{\tilde{c}} \omega = -\int_c \omega,$$

da nun $|\det JG| = -\det JG$ gilt.

**Definition.** Sei $c$ ein singulärer $k$-Würfel in $M$. Dann heißt $c$ *normal*, wenn $c$ orientierungstreu ist und wenn

$$c([0,1]^k) \cap \partial M = \emptyset \qquad \text{oder} \qquad c([0,1]^k) \cap \partial M = c \circ I^k_{1,0}([0,1]^{k-1})$$

gilt.

**Lemma 5.24**
Sei M kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{U_1,\dots,U_m\}$ von M derart, daß zu jedem $i \in \{1,\dots,m\}$ ein normaler k-Würfel $c_i$ existiert mit

$$U_i \cap M \subset c_i([0,1]^k).$$

*Beweis.* Zu $X \in M$ existiert ein Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$, das o.B.d.A. so gewählt werden kann, daß $F$ orientierungstreu ist, $[0,1]^k \subset W$ und

$$X = \begin{cases} F\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right), & \text{falls } X \notin \partial M, \\ F\left(0,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right), & \text{falls } X \in \partial M \end{cases}$$

erfüllt. Die Einschränkung $c := F \mid [0,1]^k$ ist dann ein normaler Würfel. Da $F^{-1}$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $U_X$ von $X$ mit $F^{-1}(U_X \cap M) \subset [0,1]^k$, also mit $U_X \cap M \subset c([0,1]^k)$. Das System $\{U_X : X \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von $M$, enthält also wegen der Kompaktheit von $M$ eine endliche Teilüberdeckung von $M$.

Nun sind alle Vorbereitungen abgeschlossen, um die Definition des Integrals einer $k$-Form über eine kompakte $k$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit geben zu können.

**Definition.** Sei $M$ kompakt und $\omega$ eine $k$-Form auf $M$. Sei $\{U_1,\dots,U_m\}$ eine Überdeckung von $M$ wie in Lemma 5.24 und hierzu $\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ eine der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann definiert man

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \omega.$$

**Nachweis.** Zunächst ist festzustellen, daß das Integral

$$\int_M \varphi_i \omega$$

schon definiert ist. Zu $U_i$ existiert ja ein normaler $k$-Würfel $c_i$ mit $U_i \cap M \subset c_i([0,1]^k)$. Die Funktion $\varphi_i$ und damit die Form $\varphi_i\omega$ verschwindet außerhalb von $U_i$, also erst recht außerhalb $c_i([0,1]^k)$. Ist schließlich $V_1, \ldots, V_r$ eine weitere offene Überdeckung von $M$ wie in Lemma 5.24 und $\{\psi_1, \ldots, \psi_r\}$ eine zugehörige Zerlegung der Eins, so ist wegen der Linearität des Integrals

$$\sum_i \int_M \varphi_i\omega = \sum_i \sum_j \int_M \varphi_i \psi_j \omega = \sum_j \sum_i \int_M \varphi_i \psi_j \omega = \sum_j \int_M \psi_j \omega,$$

was die Wohldefiniertheit zeigt.

Wir kommen schließlich zum Satz von Stokes.

**Satz 5.25**
Sei $(M, o)$ eine kompakte orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega$ eine $(k-1)$-Form der Klasse $C^1$ auf M. Der Rand $\partial M$ sei mit der induzierten Orientierung versehen. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

*Beweis.* Sei zunächst $c$ ein normaler $k$-Würfel in $M$, und $\omega$ verschwinde außerhalb von $c([0,1]^k)$. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^* d\omega = \int_{[0,1]^k} dc^*\omega = \int_{I^k} dc^*\omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega,$$

wobei für die vorletzte Gleichheit der Satz von Stokes für Ketten verwendet wurde.

**Fall 1:** $c([0,1]^k) \cap \partial M = \emptyset$.

Dann gilt $\omega_X = 0$ für $X \in c \circ I^k_{i,\alpha}([0,1]^{k-1})$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\alpha = 0, 1$, da $c$ Einschränkung eines Koordinatensystems ist und somit $X$ Häufungspunkt von Punkten $Y \in M$ mit $\omega_Y = 0$. Es folgt daher

$$\int_{\partial c} \omega = 0 = \int_{\partial M} \omega,$$

wobei auch für das Integral auf der rechten Seite verwendet wird, daß $\omega$ außerhalb $c([0,1]^k)$ verschwindet.

**Fall 2:** $c([0,1]^k) \cap \partial M = c \circ I^k_{1,0}([0,1]^{k-1})$.

Dann gilt

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left( \int_{c \circ I_{i,0}^k} \omega - \int_{c \circ I_{i,1}^k} \omega \right) = - \int_{c \circ I_{1,0}^k} \omega.$$

Daß die übrigen Integrale verschwinden, sieht man wie in Fall 1. Da $c$ ein normaler $k$-Würfel ist, gibt es ein orientierungstreues Koordinatensystem $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit $c = F \mid [0,1]^k$. Da Fall 2 vorliegt, ist $W$ eine relativ offene Teilmenge von $H^k$. Definiere

$$W' := \{(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} : (0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in W\}$$

und $F'(x_1, \ldots, x_{k-1}) := F(0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ mit $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in W'$. Dann ist $F'$ ein Koordinatensystem von $\partial M$ mit $F' \mid [0,1]^{k-1} = c \circ I_{1,0}^k$. Für $Z \in W$ mit $z_1 = 0$ gilt

$$[DF_Z(E_1), \ldots, DF_Z(E_k)] = o_{F(Z)},$$

da $F$ orientierungstreu ist. Nach Definition der induzierten Orientierung $o'$ von $\partial M$ gilt

$$o'_{F(Z)} = -[DF_Z(E_2), \ldots, DF_Z(E_k)].$$

Hieraus folgt, daß $F'$ orientierungsumkehrend ist. Also erhält man

$$- \int_{c \circ I_{1,0}^k} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

In beiden Fällen ist also

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Sei schließlich $\omega$ eine beliebige $(k-1)$-Form der Klasse $C^1$ auf $M$. Wähle eine offene Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_m\}$ von $M$ wie in Lemma 5.24 mit zugehörigen normalen $k$-Würfeln $c_1, \ldots, c_m$. Sei schließlich $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ verschwindet die Form $\varphi_i \omega$ außerhalb $c_i([0,1]^k)$. Nach dem schon Bewiesenen gilt damit

$$\int_M d(\varphi_i \omega) = \int_{\partial M} \varphi_i \omega.$$

Wegen $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$ auf $M$ ist mit naheliegenden Rechenregeln für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m d(\varphi_i \omega) &= \sum_{i=1}^m (d\varphi_i \wedge \omega + \varphi_i \, d\omega) = d\left(\sum_{i=1}^m \varphi_i\right) \wedge \omega + \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i\right) d\omega = \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i\right) d\omega \\ &= d\omega. \end{aligned}$$

Hiermit folgert man aufgrund der Linearität des Integrals

$$\int_M d\omega = \int_M \sum_{i=1}^m d(\varphi_i \omega) = \sum_{i=1}^m \int_M d(\varphi_i \omega) = \sum_{i=1}^m \int_{\partial M} \varphi_i \omega = \int_{\partial M} \omega,$$

was zu zeigen war.

Als eine abschließende Anwendung zeigen wir einen Satz über die „Unmöglichkeit einer Retraktion“. Hieraus kann man mit Zusatzüberlegungen den Brouwerschen Fixpunktsatz herleiten.

**Satz 5.26**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte zusammenhängende $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es keine Abbildung $F : M \to \partial M$ der Klasse $C^2$, die den Rand punktweise festläßt.

*Beweis.* Wir nehmen indirekt an, $F$ wäre doch so eine Abbildung. Dann erklären wir die Abbildung $G(x,t) := x + t(F(x) - x)$ für $x \in M$ und $t \in [0,1]$ sowie $G =: (g_1, \dots, g_n)$. Die Funktionen $g_i : M \to \mathbb{R}$ sind 0-Formen auf $M$, $dg_i$ ist deren äußeres Differential. Da $M$ als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise orientierbar ist, kann die $n$-Form $\omega = dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n$ auf $M$ integriert werden. Wir definieren also

$$\varphi(t) := \int_M dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n = \int_M [dx^1 + t(df_1 - dx^1)] \wedge \dots \wedge [dx^n + t(df_1 - dx^n)]$$

Differentiation nach $t$ und Anwendung des Satzes von Stokes ergibt

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \int_M \sum_{i=1}^n dg_1 \wedge \dots \wedge (df_i - dx^i) \wedge \dots \wedge dg_n \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_M (df_i - dx^i) \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \dots \wedge dg_n \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_M d[(f_i - x^i) dg_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \dots \wedge dg_n] \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\partial M} \underbrace{(f_i - x^i)}_{=0} dg_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dg_i} \wedge \dots \wedge dg_n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei $F(x) = x$ für $x \in \partial M$ verwendet wurde. Nun gilt aber

$$\varphi(0) = \int_M dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \lambda_n(M) > 0$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \int_M df_1 \wedge \dots \wedge df_n = \int_M \det JF \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \int_M \det JF(x) \lambda_n(dx) = 0,
\end{aligned}$$

da $\det JF(x) = 0$ für alle $x \in M$ gelten muß. Hier wird verwendet, daß $F(M) \subset \partial M$ gilt, $\partial M$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne innere Punkte im $\mathbb{R}^n$ ist (und der Satz von der

Umkehrabbildung). Da $\varphi' = 0$ auf $[0,1]$ gilt, muß andererseits $\varphi$ konstant sein, ein Widerspruch.

Als Folgerung erhalten wir für $B := \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| \leq 1\}$:

**Satz 5.27**
Jede Abbildung $F : B \to B$ der Klasse $C^2$ hat einen Fixpunkt.

*Beweis.* Hätte $F$ keinen Fixpunkt, d.h. würde $F(X) \neq X$ für alle $X \in B$ gelten, so könnte man eine Abbildung definieren durch

$$f : B \to \partial B, \quad f(x) = x + \lambda(x)(x - F(x))$$

mit $\lambda(x) \geq 0$ so, daß $f(x) \in \partial B$ gilt. Wegen

$$\langle x + \lambda(x)(x - F(x)), x + \lambda(x)(x - F(x))\rangle = 1$$

erhält man

$$\lambda(x) = \frac{-\langle x, x - F(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - F(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - F(x)\|^2}}{\|x - F(x)\|^2}.$$

Die Abbildung $f$ ist dann eine Retraktion von $B$ auf $\partial B$ der Klasse $C^2$, im Widerspruch zu Satz 5.26.

Mit Hilfe eines Approximationsarguments (Weierstraßscher Approximationssatz) sieht man ein, daß es auch keine *stetige* fixpunktfreie Abbildung von $B$ auf sich geben kann. Damit erhält man schließlich den folgenden Satz als einfache Konsequenz.

**Satz 5.28 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**
Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu einer $n$-dimensionalen abgeschlossenen Kugel, so hat jede stetige Abbildung von $A$ in sich einen Fixpunkt.