

## 12 UMPU Tests („UMP unbiased“)

Nach Bemerkung 11.8(b) existiert im Allgemeinen kein zweiseitiger UMP-Test zu einem Niveau  $\alpha$ . Deshalb Einschränkung auf unverfälschte Tests:  $\varphi \in \Phi_\alpha$  heißt **unverfälscht** (unbiased) zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$  gegen  $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ , falls

$$(1) \quad E_\vartheta \varphi \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0, \quad E_\vartheta \varphi \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_1$$

Im Folgenden liegen einparametrische Exponentialfamilien mit Dichte

$$(*) \quad f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \cdot \exp(\vartheta T(x)) \cdot h(x), \quad x \in \mathfrak{X}$$

und natürlichem Parameterbereich  $\Theta$  vor.

Zu testen sei  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  gegen  $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$ .

Nach Lemma 6.12 ist die Gütefunktion  $\beta(\vartheta) = E_\vartheta \varphi(X)$  beliebig oft differenzierbar. Aus Forderung (1) folgt:

$$(2) \quad E_{\vartheta_0} \varphi(X) = \alpha, \quad \frac{d}{d\vartheta} E_\vartheta \varphi(X) \big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

Mit

$$c(\vartheta) = \left[ \int e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \right]^{-1}$$

$$c'(\vartheta) = - \int T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \cdot c(\vartheta)^2$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \beta'(x) &= \left[ \int \varphi(x) c(\vartheta) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \right]' \\ &= c'(\vartheta) \int \varphi(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) + c(\vartheta) \int \varphi(x) T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &= -c(\vartheta)^2 \int T(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \int \varphi(x) e^{\vartheta T(x)} h(x) \mu(dx) \\ &\quad + E_\vartheta[\varphi(x) T(x)] \\ &= E_\vartheta[\varphi(x) T(x)] - E_\vartheta T(x) E_\vartheta \varphi(x) \end{aligned}$$

Damit ist (2) äquivalent zu

$$(3) \quad E_{\vartheta_0} \varphi(x) = \alpha, \quad E_{\vartheta_0}[\varphi(x) T(x)] = \alpha E_{\vartheta_0} T(x)$$

### 12.1 Satz (UMPU-Tests in einparametrischen Exponentialfamilien)

Exponentialfamilie wie in (\*). Weiter sei

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < c_1^* \text{ oder } T(x) > c_2^* \\ \gamma_i^*, & T(x) = c_i^* \quad (i = 1, 2) \\ 0, & c_1^* < T(x) < c_2^* \end{cases}$$

wobei  $c_1^*, c_2^*, 0 \leq \gamma_1^*, \gamma_2^* \leq 1$  so, dass  $\varphi^*$  (3) erfüllt. Dann:

- a) Unter allen Niveau  $\alpha$  Tests für  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  gegen  $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$  die (3) erfüllen ist  $\varphi^*$  gleichmäßig bester Test.
- b)  $\varphi^*$  ist UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  gegen  $H_1$ .

Anmerkung:

UMP-Tests sind eventuell auf einer Seite besser, versagen dafür aber auf der anderen Seite. Sie sind hier aber sowieso unzulässig, da sie nicht unverfälscht sind!

### 12.2 Bemerkungen

- a) Aus (3) folgt

$$E_{\vartheta_0}[\varphi(X) \cdot (aT(X) + b)] = a \underbrace{E_{\vartheta_0}[\varphi(X)T(X)]}_{= \alpha E_{\vartheta_0}T} + \alpha \cdot b = \alpha E_{\vartheta_0}[aT(X) + b]$$

d.h. Bedingung (3) und auch die Form des Tests  $\varphi^*$  ändern sich nicht unter linear affinen Transformationen  $\tilde{T}(x) = a \cdot T(x) + b$  ( $a \neq 0$ ). Also ist

$$\tilde{\varphi}^*(x) = \begin{cases} 1, & \tilde{T}(x) < \tilde{c}_1^* \text{ oder } \tilde{T}(x) > \tilde{c}_2^* \\ \tilde{\gamma}_i^*, & \tilde{T}(x) = \tilde{c}_i^* \quad (i = 1, 2) \\ 0, & \tilde{c}_1^* < \tilde{T}(x) < \tilde{c}_2^* \end{cases}$$

mit  $E_{\vartheta_0}\tilde{\varphi}^* \stackrel{!}{=} \alpha$ ,  $E_{\vartheta_0}[\tilde{\varphi}^*\tilde{T}] = \alpha \cdot E_{\vartheta_0}\tilde{T}$  ebenfalls UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  gegen  $H_1$ .

- b) Sei  $P_{\vartheta_0}^T$  symmetrisch bezüglich  $t_0$ , d.h.

$$P_{\vartheta_0}(T - t_0 \leq -t) = P_{\vartheta_0}(T - t_0 \geq t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sei

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & |T(x) - t_0| > c^* \\ \gamma^*, & |T(x) - t_0| = c^* \\ 0, & |T(x) - t_0| < c^* \end{cases}$$

mit  $P_{\vartheta_0}(T(X) - t_0 > \underbrace{c^*}_{>0}) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(T(X) - t_0 = c^*) \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{2}$ .

$\Rightarrow P_{\vartheta_0}(|T(X) - t_0| > c^*) + \gamma^* P_{\vartheta_0}(|T(X) - t_0| = c^*) = \alpha$ , d.h.  
 $E_{\vartheta_0} \varphi^* = \alpha$  (\*).

Weiter gilt:  $E_{\vartheta_0} T(X) = t_0$ ,  $\varphi^*$  symmetrisch bezüglich  $t_0$

$$\Rightarrow E_{\vartheta_0}[\varphi^* \cdot T] = \underbrace{E_{\vartheta_0}[(T - t_0) \cdot \varphi^*]}_{=0 \text{ s.u.}} + t_0 E_{\vartheta_0} \varphi^* \stackrel{(*)}{=} t_0 \cdot \alpha = \alpha \cdot E_{\vartheta_0} T$$

[Betrachte  $g(t) = (t - t_0) \cdot \varphi^*(t)$   
 $\Rightarrow E_{\vartheta_0}[(T - t_0) \cdot \varphi^*(T)] = \int g(t) P_{\vartheta_0}^T(dt) = 0.]$

D.h. auch die zweite Bedingung in (3) ist erfüllt.

$\varphi^*$  ist also UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  gegen  $H_1$ .

Bestimmung von  $c^*, \gamma^*$  also wie beim einseitigen UMP-Test zum Niveau  $\frac{\alpha}{2}$ .

Bemerkung:

Form des Tests bleibt unverändert unter streng monotonen Transformationen  $\tilde{T}(x) = h(|T(x) - t_0|)$ .

### 12.3 Beispiel (Zweiseitiger Gauss-Test)

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0^2 > 0$  bekannt.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ gegen } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Verteilung von  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ist einparametrische Exponentialfamilie mit  
 $\vartheta = \frac{\mu}{\sigma_0^2}, T(x) = \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu_0, n\sigma_0^2)$  unter  $H_0$ .

Linear affine Transformation

$$\tilde{T}(x) = \frac{T(x) - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma_0^2}} = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0}$$

liefert  $P_{\mu_0}^{\tilde{T}} = \mathcal{N}(0, 1)$ , also symmetrisch bezüglich 0.

Verteilungsfunktion ist stetig

$$\Rightarrow \varphi^* = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma_0} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

ist UMPU-Test für  $H_0$  gegen  $H_1$ .

## 12.4 Beispiel

$X = (X_1, \dots, X_n), X_i \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, p), 0 < p < 1$

$$H_0 : p = p_0 \text{ gegen } H_1 : p \neq p_0$$

Einparametrische Exponentialfamilie mit  $\vartheta = \log \frac{p}{1-p}, T(x) = \sum_{i=1}^n x_i,$   
 $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p_0)$  unter  $H_0$ .

Im Allgemeinen nicht symmetrisch! UMPU-Test:

$$\Rightarrow \varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i < c_1^* \text{ oder } \sum x_i > c_2^* \\ \gamma_i^*, & \sum x_i = c_i^* \\ 0, & c_1^* < \sum x_i < c_2^* \end{cases}$$

mit (komplizierten) Bedingungen für  $c_1^*, c_2^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ .

In der Praxis oft:

Konstruktion des Tests aus zwei einseitigen UMP-Tests zum Niveau  $\frac{\alpha}{2}$ ,  
 ist aber nicht UMPU.

Im Folgenden Exponentialfamilie mit

$$(4) \quad f(x, \vartheta, \xi) = c(\vartheta, \xi) \cdot \exp(\vartheta \cdot U(x) + \sum_{i=1}^k \xi_i T_i(x)) \cdot h(x)$$

$$(\vartheta, \xi) \in \Theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, \Theta \text{ konvex}, \dot{\Theta} \neq \emptyset.$$

Zu testen:

$$H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0 \text{ gegen } H_1 : \vartheta > \vartheta_0$$

bzw.

$$\tilde{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0 \text{ gegen } \tilde{H}_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  ist Störparameter,  $T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))$

Für festes  $t$  ist Dichte in (4) einparametrische Exponentialfamilie.

[Genauer: Man kann zeigen, dass die bedingte Verteilung  $P_{\vartheta, \xi}^{U|T=t}$  eine einparametrische Exponentialfamilie mit Dichte

$$c_t(\vartheta) \cdot e^{\vartheta \cdot U} h(x)$$

(unabhängig von  $\xi$ ) ist.]

$\Rightarrow$  (bedingte) UMP- bzw. UMPU-Tests für  $H_0$  bzw.  $\tilde{H}_0$  existieren.

Es lässt sich zeigen, dass diese bedingten Tests auch für zufälliges  $T = T(X)$  optimal sind:

**12.5 Satz**

a) Der Test  $\varphi_1$ , definiert durch

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & U > c(t) \\ \gamma(t), & U = c(t) \\ 0, & U < c(t) \end{cases}$$

wobei  $E_{\vartheta_0}[\varphi_1(U, T)|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha$ , ist UMPU-Test<sup>29</sup> zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  gegen  $H_1$ .

b) Der Test  $\varphi_2$ , definiert durch<sup>30</sup>

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & U < c_1(t) \text{ oder } U > c_2(t) \\ \gamma_i^*, & U = c_i(t) \\ 0, & c_1(t) < U < c_2(t) \end{cases}$$

wobei  $E_{\vartheta_0}[\varphi_2(U, T)|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha$ ,

$$E_{\vartheta_0}[\varphi_2(U, T) \cdot U|T = t] \stackrel{!}{=} \alpha \cdot E_{\vartheta_0}[U|T = t]$$

ist UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $\tilde{H}_0$  gegen  $\tilde{H}_1$ .

Die Tests aus 12.5 können manchmal so transformiert werden, dass  $c(t), \gamma(t)$  beziehungsweise  $c_1(t), c_2(t), \gamma_i(t)$  nicht von  $t$  abhängen.

**12.6 Satz**

Unter der Verteilungsannahme (4) sei  $V = h(U, T)$  eine unter  $\vartheta = \vartheta_0$  von  $T$  unabhängige reellwertige Statistik. Dann gilt:

a) Ist  $h(u, t)$  streng monoton wachsend in  $u$  bei festem  $t$ , so ist

$$\tilde{\varphi}_1(v) = \begin{cases} 1, & v > \tilde{c} \\ \tilde{\gamma}, & v = \tilde{c} \\ 0, & v < \tilde{c} \end{cases}$$

wobei  $E_{\vartheta_0}\tilde{\varphi}_1(V) = \alpha$ , UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  gegen  $H_1$ .

<sup>29</sup>Kein Schreibfehler! Test ist kein UMP-Test sondern nur UMPU!

<sup>30</sup>besser:  $\gamma_i(t)$

b) Gilt  $h(u, t) = a(t)u + b(t)$ ,  $a(t) > 0$  so ist

$$\tilde{\varphi}_2(v) = \begin{cases} 1, & v < \tilde{c}_1 \text{ oder } v > \tilde{c}_2 \\ \tilde{\gamma}_i, & v = \tilde{c}_i \\ 0, & \tilde{c}_1 < v < \tilde{c}_2 \end{cases}$$

wobei  $E_{\vartheta_0} \tilde{\varphi}_2(V) = \alpha$ ,  $E_{\vartheta_0}[\tilde{\varphi}_2(V)V] = \alpha E_{\vartheta_0}(V)$  UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $\tilde{H}_0$  gegen  $\tilde{H}_1$ .

Beweis:

a) Nach Korollar 11.11 bleibt die Form des Tests unter streng monotoner Transformation unverändert, man erhält also einen Test der Form  $\tilde{\varphi}_1$  mit  $\tilde{c} = \tilde{c}(t)$ ,  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$ . Nach Voraussetzung ist  $V$  aber unabhängig von  $T$  unter  $\vartheta = \vartheta_0$ , deshalb hängen  $\tilde{c}, \tilde{\gamma}$  nicht von  $t$  ab.

b) folgt analog mit Bemerkung 12.2(a)

Nachweis der Unabhängigkeit von  $V$  und  $T$ ?

Übliche Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie, oder

## 12.7 Satz (Basu's Theorem)

Sei  $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ . Statistik  $T$  sei suffizient und vollständig für  $\vartheta$ . Ist  $V$  eine Statistik deren Verteilung nicht von  $\vartheta$  abhängt, so sind  $V$  und  $T$  stochastisch unabhängig.<sup>31</sup>

Beispiel:

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ ,  $\sigma_0^2 > 0$  bekannt,  $\Theta = \{\mu : \mu \in \mathbb{R}\}$ ,  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  suffizient und vollständig für  $\mu$ .

$$V = \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}_{(*)}$$

$(*) = \sum_i ((X_i - \mu)(\bar{X}_n - \mu))^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$  wobei  $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$

Verteilung von  $V$  unabhängig von  $\mu$  ( $V \sim \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2$ ).

$\stackrel{12.7}{\Rightarrow} V$  und  $T$  sind unabhängig.

---

<sup>31</sup>V „ancillary“

Beweis:

Sei  $g$  beliebige beschränkte Funktion,  $m = E_{\vartheta}g(V)$  (unabhängig von  $\vartheta$  nach Voraussetzung).

$$h(T(x)) := E_{\vartheta}[g(V) - m | T = T(x)]$$

unabhängig von  $\vartheta$ , da  $T$  suffizient. Wegen

$$E_{\vartheta}h(T) = E_{\vartheta}[E_{\vartheta}[g(V) - m | T]] = 0 \forall \vartheta \in \Theta$$

und der Vollständigkeit von  $T$  folgt  $h(T) = 0$   $P_{\vartheta}$ -f.s., also

$$E_{\vartheta}[g(V) | T] = m = E_{\vartheta}g(V) \quad P_{\vartheta}\text{-f.s.}$$

und somit die Unabhängigkeit von  $V$  und  $T$ .

## 12.8 Korollar

Sei  $\varphi$  Exponentialfamilie wie in (4), wobei  $\vartheta (= \vartheta_0)$  fest gewählt ist. Hängt die Verteilung einer Statistik  $V$  nicht von  $\xi$  ab, so sind  $V$  und  $T$  unabhängig.

Beweis:

Nach Beispiel 7.7 und 7.12 ist  $T$  vollständig und suffizient für  $\xi$ .

12.7  $\Rightarrow$  Behauptung.

## 12.9 Beispiel (1-Stichproben-t-Test)

$X_1, \dots, X_n \stackrel{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$

a)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$

2-parametrische Exponentialfamilie nach Beispiel 6.3, hat die Form in (4) mit  $\vartheta = \frac{\mu}{\sigma^2}$ ,  $\xi = -\frac{1}{2\sigma^2}$ ,  $U(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

Ohne Einschränkung sei  $\mu_0 = 0$ , andernfalls betrachte man  $x_i - \mu_0$  anstelle der  $x_i$ .

$H_0$ ,  $H_1$  sind dann äquivalent zu  $H_0 : \vartheta \leq 0$ ,  $H_1 : \vartheta > 0$ .

Betrachte:

$$v = \frac{\sqrt{n}\bar{x}_n}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u}{\sqrt{t - \frac{u^2}{n}}} =: h(u, t)$$

$\frac{\partial h(u, t)}{\partial u} > 0 \Rightarrow h(u, t)$  streng monoton wachsend in  $u$  bei festem  $t$ .

(Beachte:  $t > \frac{u^2}{n} > 0$ .)

Weiter gilt: Unter  $\vartheta = \vartheta_0$  gilt  $V \sim t_{n-1}$ , also unabhängig von  $\xi$ .

$\stackrel{12.8}{\Rightarrow}$  V und T sind stochastisch unabhängig (unter  $\vartheta = \vartheta_0$ ).

$\stackrel{12.6(a)}{\Rightarrow}$  Der UMPU-Test für  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $\mu > \mu_0$  zum Niveau  $\alpha$  ist

$$\tilde{\varphi}_1(v) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s} \geq t_{n-1;1-\alpha} \\ 0, & \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s} < t_{n-1;1-\alpha} \end{cases}$$

b)  $\tilde{H}_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $\tilde{H}_1 : \mu \neq \mu_0$

Ohne Einschränkung  $\mu_0 = 0$ , dann  $\tilde{H}_0 : \vartheta = \vartheta_0 = 0$ ,  $\tilde{H}_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$

$$h(u, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{u}{\sqrt{\frac{t - u^2/n}{n-1}}}$$

nicht linear in u.

Betrachte

$$\tilde{v} = \tilde{h}(u, t) = \frac{u}{\sqrt{t}} = \frac{\sum x_i}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

Unter  $\vartheta = 0$  gilt  $\tilde{V} \sim \frac{\sum Y_i}{\sqrt{\sum Y_i^2}}$ , wobei  $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .<sup>32</sup>

$\Rightarrow$  Verteilung von  $\tilde{V}$  ist unabhängig von  $\xi$  und symmetrisch um 0.

Nach 12.6(b) existiert ein UMPU-Test  $\tilde{\varphi}_2(\tilde{v})$ , der wegen der Symmetrie der Verteilung von  $\tilde{V}$  nach 12.2(b) einen Ablehnbereich der Form  $|\tilde{v}| > \tilde{c}$  hat.

Nun gilt

$$v = h(u, t) = g(\tilde{v}) = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \frac{\tilde{v}}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2/n}}$$

bzw.  $|v| = g(|\tilde{v}|)$ .

$g(|\tilde{v}|)$  ist streng monoton wachsend auf  $[0, \sqrt{n})$ <sup>33</sup>, so dass nach Bemerkung in 12.2(b) der UMPU-Test auch auf einem Ablehnbereich der Form  $|v| \geq c$  basieren kann. Somit ist

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} \frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{s} \geq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \sqrt{n} \frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{s} < t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

UMPU-Test für  $\tilde{H}_0$  gegen  $\tilde{H}_1$ .

<sup>32</sup>Erweitere  $\tilde{v}$  mit  $\frac{1}{\sigma}$  um dies zu erkennen!

<sup>33</sup>Beachte:  $\tilde{v} \in (-\sqrt{n}, \sqrt{n})$  (nachrechenbar)



**12.10 Bemerkung**

Ähnliche Überlegungen zeigen, dass auch der ein- bzw. zweiseitige 2-Stichproben-t-Test UMPU-Test ist.  
(z.B. Lehmann/Romano, S. 157-161, 3. ed.)

**12.11 Beispiel (Unabhängigkeitstest unter NV-Annahme)**

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}_2(\mu, \nu, \sigma^2, \tau^2, \varrho)$ , also Dichte<sup>34</sup>

$$f((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \mu, \nu, \sigma^2, \tau^2, \varrho) = (2\pi\sigma\tau\sqrt{1-\varrho^2})^{-n}.$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_i (x_i-\mu)^2 - \frac{2\varrho}{\sigma\tau}\sum_i (x_i-\mu)(y_i-\nu) + \frac{1}{\tau^2}\sum_i (y_i-\nu)^2\right)\right) \quad (*)$$

Zu testen:  $\tilde{H}_0$ :  $X_1, Y_1$  unabhängig;  $\tilde{H}_1$ :  $X_1, Y_1$  nicht unabhängig

Äquivalent:  $\tilde{H}_0 : \varrho = 0$ ;  $\tilde{H}_1 : \varrho \neq 0$

Bzw. die einseitige Hypothese  $H_0 : \varrho \leq 0$  gegen  $H_1 : \varrho > 0$ .

(\*) ist Exponentialfamilie wie in (4) mit

$$U = \sum_i x_i y_i, T_1 = \sum_i x_i^2, T_2 = \sum_i y_i^2, T_3 = \sum_i x_i, T_4 = \sum_i y_i$$

$$\vartheta = \frac{\varrho}{\sigma\tau(1-\varrho^2)}$$

$$\xi_1 = -\frac{1}{2\sigma^2(1-\varrho^2)}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2\tau^2(1-\varrho^2)},$$

$$\xi_3 = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{\nu\varrho}{\sigma\tau}\right), \quad \xi_4 = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{\nu}{\tau^2} - \frac{\mu\varrho}{\sigma\tau}\right)$$

a)  $H_0 : \vartheta \leq 0$  gegen  $H_1 : \vartheta > 0$

Sei

$$R = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

empirischer Korrelationskoeffizient nach Pearson.

Transformation  $X_i \rightarrow \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ ,  $Y_j \rightarrow \frac{Y_j - \nu}{\tau}$  ändert R nicht, deshalb hängt die Verteilung von R nicht von  $\mu, \nu, \sigma^2, \tau^2$  ab, sondern nur von  $\varrho$ .

Für  $\vartheta = 0$  ist die Verteilung von R also unabhängig von  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ .

---

<sup>34</sup> $\varrho$  ist Korrelationskoeffizient (s. Stochastik 1)

Korollar 12.8  $\Rightarrow$   $R$  ist unabhängig von  $(T_1, \dots, T_4)$  unter  $\vartheta = 0$ .

$\stackrel{12.6}{\Rightarrow}$  UMPU-Test hat Ablehnbereich der Form  $R \geq c$  oder äquivalent

$$w := \frac{R}{\sqrt{\frac{1-R^2}{n-2}}} \geq \tilde{c}$$

$[R = \frac{U-T_3T_4/n}{\sqrt{(T_1-T_3^2/n)(T_2-T_4^2/n)}}]$  ist streng monoton wachsend in  $U$

$\Rightarrow w$  ist streng monoton wachsend<sup>35</sup> in  $U$

Nach Aufgabe 36 gilt:  $w \sim t_{n-2}$  falls  $\varrho = 0$  (bzw.  $\vartheta = 0$ ).

Deshalb:

$$\varphi_1(w) = \begin{cases} 1, & w \geq t_{n-2, 1-\alpha} \\ 0, & w < t_{n-2, 1-\alpha} \end{cases}$$

UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0$  gegen  $H_1$ .

b) Test von  $\tilde{H}_0 : \vartheta = 0, \tilde{H}_1 : \vartheta \neq 0$

$R$  ist linear in  $U$  mit um 0 symmetrischer Verteilung für  $\vartheta = 0$

$\Rightarrow$  UMPU-Test hat Ablehnbereich der Form  $|R| \geq \tilde{c}$ .

Die Funktion  $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  ist streng monoton wachsend für  $0 \leq x \leq 1$ ,  
woraus wie in 12.9(b) folgt:

$$\varphi_2(w) = \begin{cases} 1, & |w| \geq t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & |w| < t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

ist UMPU-Test zum Niveau  $\alpha$  für  $\tilde{H}_0 : \varrho = 0$  gegen  $\tilde{H}_1 : \varrho \neq 0$ .

---

<sup>35</sup> $w$  ist streng monoton wachsend in  $R$  (Beachte:  $R \in [-1, 1]$  und  $w'(R) > 0 \ \forall R \in (-1, 1)$ )