Kapitel II

Garben und Divisoren

§ 9 $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Definition 9.1 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ Garbe von abelschen Gruppen auf X. $\mathcal{F}$ heißt $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X, falls

(i) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist.

(ii) Für alle offenen Teilmengen $U' \subseteq U \subseteq X$ der Gruppenhomomorphismus $\rho^U_{U'} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U')$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus ist. Dabei wird $\mathcal{F}(U')$ vermöge ${}_{\mathcal{O}_X}\rho^U_{U'}$ als $\mathcal{O}_X(U)$-Modul aufgefasst.

Definition + Bemerkung 9.2 (i) Ein *Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben* $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist ein Garbenmorphismus $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, sodass für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Gruppenhomomorphismus $\phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus ist. Man sagt, ϕ ist *$\mathcal{O}_X$-linearer Garbenmorphismus.*

(ii) Die $\mathcal{O}_X$-Modulgarben bilden zusammen mit den $\mathcal{O}_X$-linearen Garbenmorphismen eine Kategorie $\underline{\mathcal{O}_X\text{−Mod}}$.

Beispiel 9.3 Sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k.

(i) Sei $D := \sum_{P \in X} n_P P$ ein Divisor auf X, das heißt es ist $n_P \in \mathbb{Z}$, $n_P \neq 0$ nur für endlich viele $P \in X$. Für $U \subseteq X$ offen sei

$$\mathcal{L}(D)(U) := \{f \in k(X) \mid \operatorname{div}(f|_U) + D|_U \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$

Dann ist $\mathcal{L}(D)$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, denn: für $g \in \mathcal{O}_X(U)$ ist $\operatorname{div} g \geqslant 0$ und damit

$$\operatorname{div}(fg|_U) + D|_U = \operatorname{div}(f|_U) + \operatorname{div}(g|_U) + D|_U = \operatorname{div}(f|_U) + D|_U \geqslant 0.$$

Weiter ist der globale Schnitt

$$\mathcal{L}(D)(X) = \{f \in k(X) \mid \mathrm{div} f + D \geqslant 0\} \cup \{0\} = L(D)$$

gerade der Riemann-Roch-Raum für D. Dieser ist demnach ein $\mathcal{O}_X(X)$-Modul, also ein k-Vektorraum. Dieses Resultat hatten wir vergangener Semester bereits gesehen. Betrachte nun eine kleine Umgebung $U \subseteq X$ von $P \in X$, das heißt es gilt $n_Q = 0$ für alle $Q \in U \backslash \{P\}$. Sei t_P ein Erzeuger des zu P zugehörigen maximalen Ideals $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$. Wähle nun U so, dass div $t_P|_{U\backslash\{P\}} = 0$, das heißt $t_P \in \mathcal{O}_X(U)$. Dann ist $t_P^{-n_P} \in \mathcal{L}(D)(U)$ und $t_P^{-n_p}$ erzeugt $\mathcal{L}(D)(U)$ als $\mathcal{O}_X(U)$-Modul, denn: Ist $g \in \mathcal{O}_X(U)$, so ist

$$\mathrm{div}\left(t_P^{-n_P} g|_U\right) = \mathrm{div}\left(t_P^{-n_P}|_U\right) + \mathrm{div}\,(g|_U) \geqslant \mathrm{div}\left(t_P^{-n_P}|_U\right) = -n_P P,$$

also

$$\mathrm{div}\left(t_P^{-n_P} g|_U\right) + D|_U \geqslant -n_P P + n_p P \geqslant 0$$

und damit $t_P^{-n_P} g \in \mathcal{L}(D)(U)$. Ist umgekehrt $g \in \mathcal{L}(D)(U)$, also

$$\mathrm{div}\,(g|_U) + D|_U = \mathrm{div}\,(g|_U) + n_P P \geqslant 0,$$

so gilt

$$\mathrm{div}\left(t_P^{n_P} g|_U\right) = n_P P + \mathrm{div}\,(g|_U) \geqslant 0,$$

also $t_P^{n_P} g \in \mathcal{O}_X(U)$ und damit $g = t_P^{-n_P}\left(t_P^{n_P} g\right)$.

(ii) Sei $\Omega = \Omega_{k(X)/k}$ der $k(X)$-Vektorraum der Kählerdifferentiale von $k(X)/k$. Die Elemente von Ω heißen rationale Differentiale auf X. Ohne Einschränkung gelte $X = V(f)$ mit einem irreduziblen Polynom $f \in k[X,Y]$. Dann ist $k(X) = \mathrm{Quot} k[X,Y] \big/ (f)$. Damit wird Ω erzeugt von den Elementen dg für $g \in k(X)$, wobei d die universelle Derivation bezeichne. Da $\mathrm{d}(X^2) = 2X\mathrm{d}X$und induktiv $\mathrm{d}(X^n) = n!X\mathrm{d}X$, genügen die linearen Terme. $\mathrm{d}f = 0$ ergibt also eine lineare Gleichung zwischen dX und dY und wir erhalten $\dim_{k(X)} \Omega = 1$. Wir wollen uns daraus nun eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe basteln. Für $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$ sei

$$\mathrm{div}\omega = \sum_{P \in X} \mathrm{ord}_P \omega P$$

folgendermaßen definiert: Für $P \in X$ sei t_P Uniformisierende, also Erzeuger vom maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P$. Dann gilt $\mathrm{d}t_P(P) = 0$ aber $\mathrm{d}t_P \neq 0$, also bildet $\{\mathrm{d}t_P\}$ eine Basis von $\Omega_{k(X)/k}$. Schreibe also $\omega = f_P \mathrm{d}t_P$ für ein $f_P \in k(X)$. Setze nun $\mathrm{ord}_P(\omega) = \mathrm{ord}_P(f_P)$. Beachte: $t_P - t_P(Q)$ ist Uniformisierende für Q auf einer offenen (und dichten) Teilmenge von X

und $\mathrm{d}(t_P - t_P(Q)) = \mathrm{d}t_P$. Damit ist $\mathrm{div}\omega$ wohldefiniert. Setze nun

$$\Omega_X(U) := \left\{\omega \in \Omega_{k(X)/k} \mid \mathrm{div}\omega|_U \geqslant 0\right\} \cup \{0\}.$$

$\Omega_X(U)$ ist für jedes $U \subseteq X$ offen ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul, also ist Ω_X eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Die Elemente in $\Omega_X(U)$ heißen *reguläre Differentiale* auf U. Bachte: Mit der Notation aus (i) gilt $\Omega_X \cong \mathcal{L}(\mathrm{div}\omega_0)$ für $\omega_0 \in \Omega_{k(X)/k}\backslash\{0\}$, denn: ω_0 ist eine Basis von $\Omega_{k(X)/k}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathrm{div}\omega_0)(U) &= \{f \in k(X) \mid (\mathrm{div}f + \mathrm{div}\omega_0)\,|_U \geqslant 0\} \cup \{0\} \\
&= \{f \in k(X) \mid \mathrm{div}(f\omega_0)|_U \geqslant 0\} \cup \{0\} \\
&= \left\{w \in \Omega_{k(X)/k} \mid \mathrm{div}(\omega)|_U \geqslant 0\right\} \cup \{0\} \\
&= \Omega_X(U).
\end{aligned}$$

$\mathrm{div}\omega_0$ heißt auch *kanonischer Divisor*. Erinnern wir uns nun an den Satz von Riemann-Roch aus der algebraischen Geometrie, welcher besagt:

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg D + 1 - g,$$

wobei g das Geschlecht der Kurve und K einen kanonsichen Divisor bezeichne, so erhalten wir mit $D = 0$:

$$1 - \dim L(K) = 1 - g \quad \Longleftrightarrow \quad \dim L(K) = g$$

und mit $D = K$

$$\dim L(K) - 1 = \dim L(K) - \dim L(0) = \deg K + 1 - g,$$

zusammen also $\deg K = 2g - 2$. Da sist praktisch! Betrachte wir uns beispielsweise den Punkt $\infty = (1 : 0) \in \mathbb{P}^1$, das Differential $\omega = \mathrm{d}X$ und die Uniformisierende $t_\infty = \frac{1}{X}$, so gilt

$$\mathrm{d}X = \omega = f_p \mathrm{d}\left(\frac{1}{X}\right) = -f_P \frac{1}{X^2}\mathrm{d}X,$$

also $f_P = -X^2$ und $\mathrm{ord}_P \mathrm{d}X = \mathrm{ord}_P X^2 = -2$, was mit unserer oben gefunden Formel und $g = 0$ für $\mathbb{P}^1$ übereinstimmt. Eine weitere Anwendung ist natürlich auch die Bestimmung des Geschlechts einer Kurve mithilfe der obigen Formel.

Definition + Bemerkung 9.4 (i) Sei $X = \mathrm{Spec}\,R$ ein affines Schema und M ein R-Modul. Dann gibt es genau eine Garbe $\tilde{M}$ auf X, sodass $\tilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_R R_f$ für jedes $f \in R$. $\tilde{M}$ wird so zur $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Weiterhin ist für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$ der Halm gegeben durch

$$\tilde{M}_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} = M \otimes_R R_\mathfrak{p}.$$

(ii) Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ heißt *quasikohärent* auf $\operatorname{Spec} R$, falls es einen R-Modul M gibt mit $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$, also $\mathcal{F}(D(f)) \cong M_f$ als R_f-Moduln.

(iii) Sei nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein allgemeines Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt *quasikohärent*, falls es eine offene Überdeckung von X durch affine Unterschemata $\{U_i = \operatorname{Spec} R_i\}_{i \in I}$ gibt, sodass die Einschränkung $\mathcal{F}|_{U_i}$ quasikohärent ist für jedes $i \in I$, also $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$ für einen R_i-Modul M_i.

(iv) Eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X heißt *kohärent*, falls X noethersch ist und die R_i-Moduln M_i aus (iii) allesamt endlich erzeugt sind.

Proposition 9.5 *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X ist quasikohärent genau dann, wenn für jedes offene, affine Unterschema $U \subseteq X$ die Einschränkung $\mathcal{F}|_U$ quasikohärent ist.*

Beweis. Wie zum Beispiel 4.5 oder 7.3.

Bemerkung 9.6 *Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema. Dann ist die Zuordnung*

$$\underline{R\text{-Mod}} \longrightarrow \underline{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}, \qquad M \mapsto \tilde{M}$$

ein volltreuer, exakter Funktor, dessen Bild die quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarben sind.

Beweis. Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ exakte Sequenz von R-Moduln. Zu zeigen: Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist die lokalisierte Sequenz

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt (als Sequenz von $R_{\mathfrak{p}}$-Moduln): Übung. Man sagt, $R_{\mathfrak{p}}$ ist "flacher" R-Modul.

Definition + Bemerkung 9.7 (i) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. dann ist die zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

(ii) Ist $X = \operatorname{Spec} R$ affin, so gilt für R-Moduln M, N

$$\widetilde{M \otimes_R N} = \tilde{M} \otimes_{\tilde{R}} \tilde{N} = \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}.$$

(iii) Sind für $i \in I$ R-Moduln M_i gegeben, so ist

$$\widetilde{\bigoplus_{i \in I} M_i} = \bigoplus_{i \in I} \tilde{M}_i.$$

Bemerkung + Definition 9.8 Sei $f : X \longrightarrow Y$ Morphismus lokal geringter Räume.

(i) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X ist $f_*\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y.

(ii) Für jede $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf Y ist $f^{-1}\mathcal{G}$ eine $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe und die zur Prägarbe $U \mapsto f^{-1}\mathcal{G}(U) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U)$ assoziierte Garbe $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. $f^*\mathcal{G}$ heißt *Pullback* von $\mathcal{G}$ unter f.

Beweis. (i) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}\left(f^{-1}(U)\right)$ ein $\mathcal{O}_X\left(f^{-1}(U)\right)$-Modul. Der Garbenmorphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ induziert einen Ringhomomorphismus $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X\left(f^{-1}(U)\right)$, welcher die gewünschte $\mathcal{O}_Y(U)$-Modulstruktur liefert.

(ii) Zur Wohldefiniertheit brauchen wir noch einen Morphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Der Garbenmorphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ liefert den Morphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow f^{-1}f_*\mathcal{O}_X$ und Proposition 2.16 liefert $f^{-1}f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$, was zusammen die Behauptung liefert. □

Bemerkung 9.9 *Seien $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} S$ affine Schemata, $f : X \longrightarrow Y$ Morphismus mit zugehörigem Ringhomomorphismus $\alpha : S \longrightarrow R$.*

(i) Für jeden R-Modul M gilt: $f_*\tilde{M} = \widetilde{{}_\alpha M}$, wobei ${}_\alpha M$ die von α als S-Modul aufgefasste abelsche Gruppe M bezeichne.

(ii) Für jeden S-Modul N gilt $f^*\tilde{N} = \widetilde{N \otimes_S R}$.

Beweis. (i) Für $U \subseteq Y$ offen ist $f_*\tilde{M}(U) = \tilde{M}(f^{-1}(U))$. Das wird durch $f_U^\#$ (von α induziert) zum $\mathcal{O}_Y(U)$-Modul. Für $U = D(g)$ gilt wegen $f^{-1}(D(g)) = D(g \circ f) = D(\alpha(g))$:

$$f_*\tilde{M}(U) = \tilde{M}(f^{-1}(U)) = M\left(D(\alpha(g))\right) = M_{\alpha(g)} = \widetilde{{}_\alpha M}_g = \widetilde{{}_\alpha M}(U).$$

(ii) Für die globalen Schnitte gilt

$$f^*\tilde{N}(X) = \left(f^{-1}\tilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X\right)(X) = N \otimes_S R$$

und für $U \subseteq X$ offen

$$\begin{aligned} f^*\tilde{N}(U) &= \left(f^{-1}\tilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X\right)(U) \\ &= \left(N \otimes_S f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)\right) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U) \\ &= N \otimes_S \mathcal{O}_X(U) \\ &= \left(\widetilde{N \otimes_S R}\right)(U), \end{aligned}$$

also gerade die Behauptung. □

Proposition 9.10 *Sei $f : X \longrightarrow Y$ Morphismus von Schemata.*

(i) Ist $\mathcal{G}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y, so ist $f^*\mathcal{G}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X.

(ii) Sind X, Y noethersch und $\mathcal{G}$ zusätzlich kohärent, so ist auch $f^*\mathcal{G}$ kohärent.

(iii) Ist X noethersch und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X, so ist $f_*\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y.

Beweis. (i) Die Eigenschaft quasikohärent zu sein ist eine lokale Eigenschaft, ohne Einschränkung sei also X und damit auch Y affin. Dann folgt die Aussage mit 9.9 aus $\mathcal{G} = \tilde{N}$ für einen S-Modul N und $f^*\mathcal{G} = \widetilde{N \otimes_S R}$.

(ii) Ist N als S-Modul erzeugt von den $n_1, \ldots, n_r$, so ist $N \otimes_S R$ erzeugt von den $n_1 \otimes 1, \ldots, n_r \otimes 1$, also insbesondere endlich erzeugt als R-Modul.

(iii) Ohne Einschränkung sei Y affin. Da X noethersch ist, gibt es eine endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, ohne Einschränkung sei $U_i \cap U_j$ affin für alle i, j. $\mathcal{F}$ ist eine Garbe, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i<j} \mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$$

mit $\alpha(m) = (m|_{U_i})_i$ und $\beta((m_i)_i) = \left(m_i|_{U_i \cap U_j} - m_j|_{U_i \cap U_j}\right)_{i<j}$ ist also exakt. Der Funktor f_* ist linksexakt, denn: Ist $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ exakt, so ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{F}'(U) = \mathcal{F}\left(f^{-1}(U)\right) \longrightarrow \mathcal{F}\left(f^{-1}(U)\right) \longrightarrow \mathcal{F}''\left(f^{-1}(U)\right)$$

ebenfalls exakt (2.9 und 2.14). Da nun $\bigoplus_{i=1}^r f_*\mathcal{F}|_{U_i}$ und $\bigoplus_{i<j} f_*\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$ quasikohärent sind, ist $f_*\mathcal{F}$ als Kern eines Homomorphismus quasikohärenter Garben ebenfalls quasikohärent, was zu zeigen war. □

§ 10 Lokal freie Garben

Beispiel 10.1 Sei X nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, $D = \sum_{P \in X} n_P P$ ein Divisor auf X sowie $\mathcal{L}(D)$ die zu D assoziierte $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) \mid (\mathrm{div} f + D)|_U \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$

Erinnerung: Ist U "klein", so ist $\mathcal{L}(D)(U) = t_U \mathcal{O}_X(U)$. Außerdem gilt für den Halm in jeden Punkt $P \in X$:

$$\mathcal{L}(D)_P = \{f \in k(X) \mid \mathrm{ord}_P(f) \geqslant -n_P\} \cup \{0\} = t_P^{-n_P} \mathcal{O}_{X,P}.$$

Bemerkung 10.2 *Ist X wie in Beispiel 10.1, so gilt für Divisoren D, D' auf X*

$$\mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D') \cong \mathcal{L}(D + D').$$

Beweis. Für $U \subseteq X$ offen ist

$$\psi : \mathcal{L}(D)(U) \times \mathcal{L}(D')(U) \longrightarrow \mathcal{L}(D + D')(U), \qquad (f, g) \mapsto fg$$

eine wohldefinierte, bilineare Abbildung von $\mathcal{O}_X(U)$-Moduln, denn es gilt

$$\big(\mathrm{div}(fg) + (D + D')\big)\,|_U = (\mathrm{div} f + D)\,|_U + \big(\mathrm{div} g + D'\big)\,|_U \geqslant 0 + 0 = 0.$$

Damit induziert ϕ also eine $\mathcal{O}_X(U)$-lineare Abbildung

$$\phi_U : \big(\mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D')\big)\,(U) \longrightarrow \mathcal{L}(D + D')(U).$$

Diese Abbildungen verkleben sich zu einem Garbenmorphismus

$$\phi : \mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D') \longrightarrow \mathcal{L}(D + D').$$

Nach Beispiel 10.1 haben wir in jedem Punkt eine Isomorphismus der Halme

$$\phi_P : t_P^{-n_P} \mathcal{O}_{X,P} \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} t_P^{-n'_P} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow t_P^{-n_P - n'_P} \mathcal{O}_{X,P},$$

ϕ ist also Isomorphismus. Beachte: Es gilt $\mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(-D) \cong \mathcal{O}_X$. □

Definition 10.3 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, $n \in \mathbb{N}$.

(i) $\mathcal{F}$ heißt *frei von Rang n*, falls gilt $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$.

(ii) $\mathcal{F}$ heißt *lokal frei von Rang n*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X gibt, sodass für alle $i \in I$ gilt $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$.

Bemerkung 10.4 *Aus Freiheit folgt sicherlich lokale Freiheit, die Umkehrung ist im Allgemeinen allerdings nicht der Fall. Betrachte hierfür $X = \mathbb{P}_k^1$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k und für den Divisor $D = 1 \cdot P$ auf X für ein $P \in X$ die Garbe $\mathcal{L}(D)$ auf X. In Beispiel 10.1 haben wir bereits gesehen, dass $\mathcal{L}(D)$ lokal frei von Rang 1 ist. Betrachte nun die globalen Schnitte von $\mathcal{L}(D)$ und der Strukturgarbe. Es gilt*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}\left(\mathbb{P}_k^1\right) = k$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(D)(\mathbb{P}^1_k) &= \{f \in k(X) \mid \operatorname{div} f + P \geqslant 0\} \\
&= \left\{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_Q f \geqslant 0 \text{ für alle } Q \in \mathbb{P}^1 \backslash \{P\}\right\} \oplus \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_P f \geqslant -1\} \\
&= \left\{f \in k(X) \mid f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}\left(\mathbb{P}^1_k \backslash \{P\}\right)\right\} \oplus \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_P f \geqslant -1\} \\
&= k \oplus \frac{1}{X - X_P} k,
\end{aligned}$$

womit die Garben nicht isomorph sein können.

Bemerkung 10.5 *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, so ist jede lokalfreie Garbe auf X quasikohärent. Ist X weiterhin noethersch, so ist jede lokalfreie Garbe sogar kohärent.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe von Rang n sowie $\{U_i = \operatorname{Spec} R_i\}_{i \in I}$ eine offene, ohne Einschränkung affine Überdeckung von X derart, dass $\mathcal{F}|_{U_i} = (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ für alle $i \in I$. Dann gilt $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{R_i}^n$. Ist zudem X noethersch, so ist R_i noethersch für alle $i \in I$, $\mathcal{F}$ also kohärent. □

Bemerkung 10.6 *Jede lokalfreie Garbe $\mathcal{L}$ von Rang 1 auf einer nichtsingulären, projektiven Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, die sich einbetten lässt in die konstante Garbe des Funktionenkörpers, ist isomorph zu einer Garbe $\mathcal{L}(D)$ für einen Divisor D auf X.*

Beweis. Sei $\{U_i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ offene Überdeckung von X mit $\mathcal{L}|_{U_i} \cong t_i \mathcal{O}_X|_{U_i}$ mit Erzeugern $t_i \in k(X) \cap \mathcal{L}(U_i)$. Es ist $t_i \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j} = t_j \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$, das heißt es gilt $\frac{t_i}{t_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. Damit gilt

$$\operatorname{div}\, t_i|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div}\, \left.\frac{t_j t_i}{t_j}\right|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div}\, \left.\frac{t_i}{t_j}\right|_{U_i \cap U_j} + \operatorname{div}\, t_j|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div}\, t_j|_{U_i \cap U_j},$$

das heißt, wir können einen wohldefinierten Divisor D auf X durch $D|_{U_i} = \operatorname{div}\, \left.\frac{1}{t_i}\right|_{U_i}$ definieren. Dann gilt $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D)$, denn für die Schnitte erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(U_i) &= \{t_i f \mid f \in \mathcal{O}_X(U_i)\} = \{t_i f \mid \operatorname{div}\, f|_{U_i} \geqslant 0\} \\
&= \left\{f \in \mathcal{O}_X(U_i) \mid \operatorname{div}\, \left.\frac{f}{t_i}\right|_{U_i} \geqslant 0\right\} \\
&= \{f \in \mathcal{O}_X(U_i) \mid \operatorname{div}\, f|_{U_i} \geqslant \operatorname{div}\, t_i|_{U_i}\} \\
&= \{f \in k(X) \mid (\operatorname{div}\, f - \operatorname{div}\, t_i)|_{U_i} \geqslant 0\} \\
&= \left\{f \in k(X) \mid \left.\left(\operatorname{div}\, f + \operatorname{div}\, \frac{1}{t_i}\right)\right|_{U_i} \geqslant 0\right\} \\
&= \{f \in k(X) \mid (\operatorname{div}\, + D)|_{U_i} \geqslant 0\} \\
&= \mathcal{L}(D)(U_i),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Proposition 10.7 *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ lokal freie Garbe von Rang n auf X. Dann gilt:*

(i) Ist $\mathcal{G}$ lokal frei von Rang m, so ist $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ lokal frei von Rang mn.

(ii) Ist $f : Y \longrightarrow X$ Morphismus von lokal geringten Räumen, so ist $f^*\mathcal{F}$ lokal freie Garbe von Rang n auf Y.

Warnung: Es gibt keine entsprechende Aussage für f_*.

Beweis. (i) Wähle eine ausreichend feine Überdeckung $\{U_i\}_{\in I}$ von X, sodass

$$\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n , \qquad \mathcal{G}|_{U_i} \, (\mathcal{O}_X|_{U_i})^m$$

und wähle Basen $t_{i1}, \ldots, t_{in}$ von $\mathcal{F}|_{U_i}$ und $s_{i1}, \ldots, s_{im}$ von $\mathcal{G}|_{U_i}$ als $\mathcal{O}_X(U_i)$-Moduln. Dann bilden die $t_{i1} \otimes s_{i1}, \ldots, t_{i1} \otimes s_{im}, \ldots, t_{in} \otimes s_{im}$ eine Basis von $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$, woraus die Behauptung folgt.

(ii) Sei $U \subseteq X$ offen mit $\mathcal{F}|_U \cong (\mathcal{O}_X|_U)^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f^*\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} &= \left(f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y\right)\Big|_{f^{-1}(U)} \\
&= (f^{-1}\mathcal{F})|_{f^{-1}(U)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\
&= f^{-1}(\mathcal{F}|_U) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\
&= f^{-1}(\mathcal{O}_X|_U)^n \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\
&= \left(f^{-1}\mathcal{O}_X\right)^n|_{f^{-1}(U)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\
&= \left(f^{-1}\mathcal{O}_X\big|_{f^{-1}(U)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)}\right)^n \\
&= \left(f^{-1}\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y\big|_{f^{-1}(U)}\right)^n \\
&= \left(\mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)}\right)^n
\end{aligned}$$

Ist nun $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so ist auch $\{f^{-1}(U)\}$ eine offene Überdeckung für Y und damit ist $f^*\mathcal{F}$ lokal frei von Rang n wie gewünscht. □

Definiton + Proposition 10.8 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum sowie $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X. Für $U \subseteq X$ offen sei

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) .$$

Dann ist $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis. Sei $U \subseteq X$ offen. Klar: $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ ist abelsche Gruppe. Wir brauchen also nur noch eine $\mathcal{O}_X(U)$-Modulstruktur. Für $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$ und $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Definiere $\alpha\phi$

wie folgt: Für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$ sei

$$(\alpha\phi)_V : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{G}(V), \qquad (\alpha\phi)_V(s) := \alpha|_V \phi_V(s).$$

Die $(\alpha\phi)_V$ ergeben den gewünschten Garbenmorphismus $\alpha\phi : \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$, womit also $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ zum $\mathcal{O}_X(U)$-Modul wird. Es bleibt noch zu zeigen: die Zuordnung $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ ist eine Garbe. Übung! □

Definiton + Proposition 10.9 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ lokal freie Garbe von Rang n auf X.

(i) $\mathcal{F}^* := \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ ist lokal frei von Rang n.

(ii) $\mathcal{F}^*$ heißt *die zu $\mathcal{F}$ duale Garbe.*

(iii) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ auf X gilt

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \cong \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}.$$

Beweis. (i) Es genügt zu zeigen: Ist $\{U_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckung von X, so ist $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_{U_i}$ frei. Es sei also ohne Einschränkung $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n$. Dann ist zu zeigen:

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X) \overset{!}{\cong} \mathcal{O}_X^n.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass für einen Körper k gilt: $\mathrm{Hom}_k(k^n, k) \cong k^n$. Der zugehörige Isomorphismus ist $l \mapsto (l(e_1), \dots, l(e_n))$, wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis des k^n ist. Dieselbe Aussage kann auf freie Moduln übertragen werden, woraus die Behauptung folgt.

(iii) Die entsprechende Aussage aus der linearen Algebra für k-Vektorräume V und W lautet

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W,$$

denn: Betrachte die bilineare Abbildung

$$\psi : V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, W), \qquad (l, w) \mapsto (\alpha : V \longrightarrow W, v \mapsto l(v)w).$$

Es induziert ψ eine Abbildung $\phi : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, W)$. Wir müssen zeigen: ϕ ist bijektiv. Surjektivität sehen wir wie folgt ein: Sind Basen $\{b_1, \dots, b_n\}$ für V und $\{c_1, \dots, c_m\}$ für W gegeben, so wird $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ erzeugt von den f_{ij} für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant m$, wobei f_{ij} gegeben ist durch $f_{ij}(b_k) = \delta_{ik} c_j$. Ist $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ die zu $\{b_1, \dots b_n\}$ duale Basis von V^*, so erhalten wir die Darstellung $f_{ij} = \psi(b_i^*, c_j)$, das heißt, ϕ ist surjektiv. Nun gilt

$$\dim V^* \otimes_k W = \dim V^* \dim W = \dim V \dim W = nm = \dim \operatorname{Hom}_k(V, W),$$

also ist ϕ auch injektiv und damit bereits Isomorphismus und die Behauptung folgt. □

Definiton + Proposition 10.10 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal gringter Raum.

(i) Für jede lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von Rang 1 gilt $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_X$.

(ii) Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{L}$ heißt *invertierbar*, falls es eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{L}'$ gibt, sodass $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}' \cong \mathcal{O}_X$.

(iii) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ noethersches Schema, so ist jede invertierbare $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X lokal frei von Rang 1.

(iv) Die Isomorphieklassen der invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X bilden eine abelsche Gruppe, die sogenannte *Picard-Gruppe* $\operatorname{Pic}(X)$.

Beweis. (i) Nach 10.9 gilt $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Definiere nun

$$\phi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}), \qquad 1 \mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{L}}.$$

Dann ist ϕ ein wohldefinierter, injektiver Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. Für den Beweis genügt es nun, die Surjetkivität von ϕ nachzuweisen. Dies zeigen wir halmweise. Sei $x \in X$ und betrachte ϕ_x. Sei $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_x) = \left(\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F})\right)_x$, also $\alpha = (U, s)$, wobei ohne Einschränkung U klein genug ist, sodass $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$. Dann gilt $s = \phi_x(s(1))$, also ist ϕ_x und damit ϕ surjektiv.

(iii) Übung.

(v) Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ ist neutral bezüglich des Tensorprodukt (welches auch assoziativ und kommutativ ist) und inverses Element folgt aus (i). □

Beispiel 10.11 Sei X differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{O}_X$ die Garbe der C^∞-Funktionen auf X. Dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum. Sei E eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p : E \longrightarrow X$ differenzierbare Abbildung. Das Paar (E, p) heißt *Vektorbündel von Rang n über X*, falls es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X und für jedes $i \in I$ einen Diffeomorphismus $\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \supseteq p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

kommutiert, also $p = \pi_1 \circ \phi_i$, und gilt

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j)\mathbb{R}^n$$

faserweise linear ist für alle $i, j \in I$, nach Wahl eine Basis des $\mathbb{R}^n$ also durch eine Matrix $A = (A_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$ dargestellt wird. Im folgenden wollen wir zeigen, dass die Vektorbündel von Rang n auf X gerade den lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modulgarben von Rang n auf X entsprechen. Sei dazu zunächst (E, p) ein Vektorbündel von Rang n auf X wie oben definiert und $\mathcal{E}$ die Garbe der Schnitte in E auf X, für offene Teilmengen $U \subseteq X$ gilt also

$$\mathcal{E}(U) = \{s : U \longrightarrow E \mid s \text{ ist differenzierbare Abbildung mit } p \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

Dann ist $\mathcal{E}$ lokal frei von Rang n, denn für $i \in I$ gilt

$$\mathcal{E}(U_i) = \{s : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid s \text{ ist differenzierbar }\} = \mathcal{O}_X(U_i)^n.$$

Dasselbe erhalten wir für Einschränkungen auf beliebige offene $V \subseteq U_i$.
Sei nun umgekehrt $\mathcal{E}$ lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgabe von Rang n auf X. Dann ist für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{E}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von Rang n. Weiter gilt $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$ sowie $\mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x \cong \mathbb{R}^n$. Ist nun $U_i \subseteq X$ offen mit $\mathcal{E}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ via $\phi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \longrightarrow (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$, so ist $\phi_i\phi_j^{-1}$ ein $\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}$-Modulgarbenisomorphsmus von $\left(\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}\right)^n$ auf sich selbst, also ein Element $A_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$. In jedem $x \in U_i \cap U_j$ induziert A_{ij} einen Vektorraumisomorphismus von $\mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x \cong \mathbb{R}^n$. Verklebt man nun die $U_i \times \mathbb{R}^n$ mithilfe der A_{ij} zum Vektorbündel E, so erhält man die gewünschte Aussage.

Definiton + Proposition 10.12 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $p : E \longrightarrow X$ Morphismus von Schemata.

(i) (E, p) heißt *geometrisches Vektorbündel von Rang* n *über* X, falls es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X und für jedes $i \in I$ Isomorphismen $\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{A}^n_{U_i} = U_i \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ gibt, sodass für alle $i, j \in I$ und jedes affine offene Unterschema $\mathrm{Spec}\, R = U \subseteq U_i \cap U_j$ von X die Abbildungen $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ R-lineare Automorphismen sind, also von linearen Automorphismen von $R[X_1, \ldots, X_n]$ induziert werden.

(ii) Die Isomorphieklassen von geometrischen Vektorbündeln von Rang n entsprechen bijektiv den Isomorphieklassen von lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modulgarben von Rang n auf X.

Beweis. Wie in 10.11 □

§ 11 Divisoren und invertierbare Garben

Erinnerung: Ist X nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $D = \sum_{P \in X} n_P P$ ein Divisor auf X, so wird durch

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_P f + n_P > 0 \text{ für alle } p \in U\}$$

eine lokal freie Garbe von Rang 1 auf X definiert.

Beispiel 11.1 Betrachte den Newtonknoten $X = V(Y^2 - X^3 - X^2) \subseteq \mathbb{P}_k^2$ in der projektiven Ebene und definere einen Divisor durch $D = 1 \cdot P_0$, wobei P_0 den singulären Punkt der Kurve bezeichne. Können wir nun auch die Garbe $\mathcal{L}(D)$ definieren? Betrachte das maximale Ideal im Punkt P_0: Es wird erzeugt von den Restklassen von X, Y, bezeichne sie mit x, y. Es gilt $y^2 = x^2(x-1)$, es kann aber auf keinen Erzeuger verzichtet werden, $\mathfrak{m}_{P_0}$ ist also kein Hauptideal. Wie kann man dann $\operatorname{ord}_{P_0} f$ bestimmen? Ist $\operatorname{ord}_{P_0} x = 2$? Betrachte den Faktorring $\mathcal{O}_{X,P_0} / (f)$ und setze $\operatorname{ord}_{P_0} := \dim_k \mathcal{O}_{X,P_0} / (f)$ und erhalte beispielsweise $\operatorname{ord}_{P_0} x = 2$ (denn in $\mathcal{O}_{X,P_0} / (x)$ sind $1, y$ linear unabhängig). Wir können die Garbe $\mathcal{L}(D)$ als konstruieren, für den Halm in P_0 gilt aber

$$\mathcal{L}(D)_{P_0} = \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_{P_0} f \geqslant 1\} = \mathfrak{m}_P,$$

weswegen dieser nicht frei von Rang 1 ist und $\mathcal{L}(D)$ damit nicht lokal frei von Rang 1, also nicht invertierbar ist.

Definition 11.2 Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *integer*, falls es reduziert und irreduzibel ist.

Definition + Bemerkung 11.3 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.

(i) Ein *Primdivisor* auf X ist ein integres, abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1.

(ii) Die von den Primdivisoren auf X erzeugte frei abelsche Gruppe $\operatorname{Div}(X)$ heißt *Gruppe der Weil-Divisoren*. Die Elemente von $\operatorname{Div}(X)$ heißen *Weil-Divisoren*.

(iii) Ist X eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, so sind die Primdivisoren gerade die abgeschlossenen Punkte in X und die Weil-Divisoren von der Form $D = \sum_{P \in X} n_P P$ für gewisse $n_P \in \mathbb{Z}$.

(iv) Sei W ein Primdivisor auf X, γ_W der generische Punkt von W.