

16. Metriken, Normen und Skalarprodukte

Definition: Metriken abstrahieren Abstände. Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Metrik** oder ein **Abstand** auf X , falls gilt:

- (a) d ist **symmetrisch**, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x, y) = d(y, x)$$

- (b) d ist **positivdefinit**, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } (d(x, y) = 0) \implies (x = y)$$

- (c) Für alle $x, y, z \in X$ gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

Beispiel: (1) Die **diskrete Metrik** d_0 auf X :

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 1 & , (x \neq y) \\ 0 & , (x = y) \end{cases}$$

- (2) $X = \mathbb{C}$ oder \mathbb{R} oder \mathbb{Q} mit Betrag $|\cdot|$ hat die Metrik:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Auf Vektorräumen über $K = \mathbb{R}$ entstehen natürliche Metriken aus sogenannten Normen.

Im Folgenden schreibe \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition: Sei V ein \mathbb{K} -VRm. Eine Abbildung:

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$

heißt eine **Norm**, falls für $x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

- (a) Die Abbildung ist **positivdefinit**, d.h.:

$$\|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \iff x = 0)$$

- (b) Die Abbildung ist **homogen**, d.h.:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

(c) Es gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ist dies erfüllt, so ist $(V, \|\cdot\|)$ ein **normierter Raum**.

Beispiel: (1) Der Raum $V = \mathbb{K}$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und den Normen:

$$(a) \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$(b) \|x\|_{\max} := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$(c) \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

(2) Der Raum der beschränkten Abbildungen $V = \text{Abb}(M, \mathbb{K})$ mit einer beliebigen Menge M und der Norm:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{m \in M} |f(m)|$$

(3) Der Raum $V = C[a, b]$ der stetigen Abbildungen nach \mathbb{K} mit der Norm:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Bemerkung: (1) Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ besitzt die Metrik:

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

(2) In der Linearen Algebra tauchen hauptsächlich Normen auf, die mit **Skalarprodukten** definiert werden.

Definition: Sei V ein \mathbb{K} -VRm. Für $\alpha \in \mathbb{K}$ sei $\bar{\alpha}$ die komplexe Konjugierte.

(a) Eine Abbildung $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **Sesquilinearform** („sesqui“ bedeutet $1\frac{1}{2}$), falls

$$s(\alpha x + y, z) = \alpha \cdot s(x, z) + s(y, z)$$

gilt, also $s(\cdot, z)$ linear ist und außerdem noch gilt:

$$s(x, \alpha y + z) = \bar{\alpha} \cdot s(x, y) + s(x, z)$$

(b) Ist s **schiefssymmetrisch**, d.h. es gilt:

$$s(y, x) = \overline{s(x, y)}$$

so heißt es **hermitesche Form** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. **symmetrische Bilinearform** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

- (c) Eine schiefsymmetrische Sesquilinearform heißt **Skalarprodukt** auf V , falls s positivdefinit ist.

Bemerkung: Ist $\dim V = n < \infty$ mit einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, so ist eine Sesquilinearform s bestimmt durch die Werte $s(b_i, b_j) \in \mathbb{K}$, also durch die **Darstellungsmatrix**

$$D_{BB}(s) := (s(b_i, b_j)) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Jede beliebige Matrix $D = (d_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definiert ein $s := s_B^D$ mit:

$$s\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \cdot d_{ij}$$

Definition: D heißt **hermitesch** (bzw. **positivdefinit**), wenn das zugehörige s diese Eigenschaft hat.

Also gilt etwa:

$$\begin{aligned} A = (a_{ij}) & \text{ hermitesch} \\ \iff \forall i, j = 1, \dots, n : a_{ij} &= \overline{a_{ji}} \\ \iff A &= \overline{A}^T \end{aligned}$$

Beispiel: Das **Standardskalarprodukt** auf $V = \mathbb{K}^n$

$$D = I \implies s\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}$$

ist hermitesch und positivdefinit.

Satz 11 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung):

Ist V VRm mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so gilt für alle $x, y \in V$:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Beweis: Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \alpha \langle x, \alpha x + \beta y \rangle + \beta \langle y, \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \alpha^2 \langle x, x \rangle + \alpha \beta (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) + \beta^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Sei nun:

$$F := \langle x, x \rangle \qquad 2G := \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \qquad H := \langle y, y \rangle$$

Annahme: $G^2 > FH$

Dann hat $P(X) := FX^2 + 2GX + H \in \mathbb{R}[X]$ zwei verschiedene Nullstellen und es existiert ein $\xi \in \mathbb{R} : P(\xi) < 0$. Dies stellt einen Widerspruch zu obiger Überlegung da (mit $\alpha = \xi$ und $\beta = 1$). Also gilt:

$$G^2 \leq FH$$

Fall 1: $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$

Dann gilt $G = \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ und mit $G^2 \leq FH$ folgt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Fall 2: $\langle x, y \rangle \notin \mathbb{R}$

Ersetze y durch ζy mit $\zeta \in \mathbb{C}^\times, |\zeta| = 1$. Wähle $\zeta := \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle x, \zeta y \rangle &= \bar{\zeta} \langle x, y \rangle \\ &= \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|} \cdot \langle x, y \rangle \\ &= \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{|\langle x, y \rangle|} \\ &= |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nach Fall 1 folgt daraus:

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle|^2 &= |\langle x, \zeta y \rangle|^2 \\ &\leq \langle x, x \rangle \cdot \langle \zeta y, \zeta y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle \cdot \zeta \bar{\zeta} \cdot \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

■

Bemerkung: Im Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \bar{\eta}_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^2 \right)$$

Satz 12:

Jeder VRm V mit einem Skalarprodukt ist normiert durch die Norm:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Beweis: (1) Es ist klar, dass $\|x\| \in \mathbb{R}$ und $\|x\| \geq 0$ ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\implies \langle x, x \rangle = 0 \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

(2) Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle &\leq 2\|x\| \cdot \|y\| \\ \iff \langle x, x \rangle \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle &\leq \langle x, x \rangle 2\|x\| \cdot \|y\| + \langle y, y \rangle \\ \iff \langle x + y, x + y \rangle &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \iff \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

(3) Es gilt:

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \cdot \|x\|^2$$

■

Bemerkung: (1) Mit Hilfe der Norm lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

(2) Damit eine Norm von einem Skalarprodukt stammt, ist offenbar notwendig, dass sie die **Parallelogrammgleichung** erfüllt:

$$\forall x, y \in V : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Denn falls die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kommt, gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Tatsächlich kommt eine Norm genau dann von einem Skalarprodukt, wenn sie die Parallelogrammgleichung erfüllt. Dies wird jedoch ohne Beweis angegeben.

