

4 Ströme

4.1 Differentialformen und äußere Ableitung

Ziel: Integration über orientierte Flächen.

Definition

Sei $k \in \mathbb{R}$ und V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

- (1) Eine Abbildung $\Phi: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt multilinear, falls Φ in jeder Komponente linear ist.
- (2) Eine Abbildung $\Phi: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt alternierend, falls Φ nur das Vorzeichen wechselt, wenn zwei Komponenten vertauscht werden:

$$\Phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\Phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

- (3) $\bigwedge^k V := \{(\Phi: V^k \rightarrow \mathbb{R}) : \Phi \text{ ist multilinear und alternierend}\}.$
- (4) $\bigwedge^k V$ wird in kanonischer Weise zu einem Vektorraum. Die Elemente von $\bigwedge^k V$ nennt man k -Kovektoren, falls $V = \mathbb{R}^n$. Ist $V = (\mathbb{R}^n)^*$, so werden die Elemente von $\bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* =: \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ als k -Vektoren bezeichnet.

Bemerkungen: (1) $\bigwedge^1 \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^*$

(2) $\bigwedge_1 \mathbb{R}^n = ((\mathbb{R}^n)^*)^* = \mathbb{R}^n$ (mit der üblichen Identifikation).

(3) Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n und e_1^*, \dots, e_n^* die Dualbasis. Wir schreiben

$$\langle e_j^*, e_i \rangle := e_j^*(e_i) = \delta_{ij}.$$

Statt e_j^* wird auch dx_j geschrieben.

(4) $\bigwedge^n \mathbb{R}^n$ sind gerade die Determinantenfunktionen.

Definition

Seien $\eta_1, \dots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1, \dots, v_k) := \det(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\dots,k})$$

erklärt. Man beachte hierbei $\langle \eta_i, v_j \rangle := \eta_i(v_j)$.

Alternativ: Ist $\eta_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} dx_j$, $\eta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, so kann man auch

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1, \dots, v_k) := \det((\eta_{ij}) \cdot (v_1 | \dots | v_k))$$

erklären.

Ergänzung: Mit $\mathcal{T}^k(V) := \{(T: V^k \rightarrow \mathbb{R}) : T \text{ ist } k\text{-linear}\}$ bezeichnet man die Tensoren der Stufe k über dem Vektorraum V . Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^k(V) \otimes \mathcal{T}^l(V) &\rightarrow \mathcal{T}^{k+l}(V) \\ (T, S) &\mapsto T \otimes S\end{aligned}$$

ist erklärt durch

$$(T \otimes S)(u_1, \dots, u_{k+l}) := T(u_1, \dots, u_k) \cdot S(u_{k+1}, \dots, u_{k+l}).$$

Man bezeichnet $T \otimes S$ als das Tensorprodukt von T und S . Um für $p \in \mathbb{N}$ einen p -Tensor in einen alternierenden p -Tensor zu überführen, erklärt man die Abbildung

$$\begin{aligned}\text{Alt}: \mathcal{T}^p(V) &\rightarrow \bigwedge^p V \\ T &\mapsto \text{Alt}(T),\end{aligned}$$

wobei

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_p) := \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}).$$

Hier ist S_p die Menge aller Permutationen (Bijektionen) der Menge $\{1, \dots, p\}$. Für $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ sei

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \bigwedge^{k+l} \mathbb{R}^n.$$

Man stellt fest, dass dieses „Dachprodukt“ assoziativ ist. Ferner gilt

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k = k! \cdot \text{Alt}(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_k).$$

In gleicher Weise erklären wir nun auch ein Dachprodukt für k -Vektoren.

Definition

Seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$$

durch

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(\eta_1, \dots, \eta_k) := \det(\langle \eta_i, v_j \rangle_{i,j=1,\dots,k})$$

erklärt, wobei $\eta_1, \dots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Man kann zeigen, dass $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \in \bigwedge^k \mathbb{R}$ eine Linearform auf $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$ ist, wenn man

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(v_1, \dots, v_k)$$

für $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ erklärt. Die Wohldefiniertheit ist leicht einzusehen. Im Folgenden schreiben wir für $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$

$$\langle \omega, \xi \rangle := \omega(\xi).$$

In gleicher Weise wird $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ als Linearform auf $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ erklärt, indem man

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) := (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(\eta_1, \dots, \eta_k)$$

setzt. Auch hier ist die Wohldefiniertheit leicht zu bestätigen.

Man kann ferner nachweisen, dass

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ ist. Ebenso ist

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis von $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$. Diese Basen sind zueinander dual in Bezug auf obige Deutung von k -Kovektoren als Linearformen auf k -Vektoren.

Notation: Sei

$$I_k^n := \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Für $I \in I_k^n$ ist $e_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ und $dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ und so weiter.

Bemerkungen: (1) Für $\sigma \in S_k$, $\eta_1, \dots, \eta_k \in (\mathbb{R}^n)^* = \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ gilt

$$\eta_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \eta_{\sigma(k)} = \text{sgn}(\sigma) \cdot \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k.$$

(2) Sei $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Phi_{(i_1, \dots, i_k)} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I \cdot dx_I.$$

Hierbei ist also $\Phi_I = \Phi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \Phi(e_I) \in \mathbb{R}$.

Definition

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Phi: W \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ heißt Differentialform vom Grad k (kurz: k -Form). Die k -Form Φ ist von der Klasse \mathcal{C}^r , $r \geq 1$, falls $p \mapsto \Phi(p)(v_1, \dots, v_k)$ von der Klasse \mathcal{C}^r ist für jede Wahl von $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkungen: (1) Die k -Form Φ ist von der Klasse \mathcal{C}^r genau dann, wenn

$$p \mapsto \Phi_I(p) := \Phi(p)_I = \langle \Phi(p), e_I \rangle = \langle \Phi(p), e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \rangle$$

von der Klasse \mathcal{C}^r ist für alle $I \in I_k^n$.

(2) Die k -Form Φ lässt sich schreiben als

$$p \mapsto \Phi(p) = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I(p) dx_I$$

mit $\Phi_I(p) \in \mathbb{R}$.

Definition (Dachprodukt)

Für $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ wird $\Phi \wedge \eta \in \bigwedge^{k+l} \mathbb{R}^n$ in folgender Weise erklärt: Ist $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$ und $\eta = \sum_{J \in I_l^n} \eta_J dx_J$, dann ist

$$\Phi \wedge \eta := \sum_{I \in I_k^n, J \in I_l^n} \Phi_I \cdot \eta_J \underbrace{dx_I \wedge dx_J}_{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}}.$$

Eine „invariante Definition“ kann mit Hilfe des Alt-Operators gegeben werden (s.o.).

Bemerkungen: (1) Assoziativgesetz: Für $\Phi \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$, $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ und $\Theta \in \bigwedge^r \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\Phi \wedge \eta) \wedge \Theta = \Phi \wedge (\eta \wedge \Theta).$$

(2) Distributivgesetz: Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\Phi_1, \Phi_2 \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2) \wedge \eta = \alpha_1 (\Phi_1 \wedge \eta) + \alpha_2 (\Phi_2 \wedge \eta).$$

Ausblick:

- Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine k -Fläche, das heißt es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Klasse \mathcal{C}^r , $r \geq 1$, F ist injektiv, DF_x ist injektiv und $S = F(U)$.

Die Fläche S wird „orientiert“ durch die Orientierung von \mathbb{R}^k und durch F .

- Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $S \subset W$. Sei ferner Φ eine k -Form auf W , das heißt $\Phi(p) \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ für $p \in W$.
- Das Integral von Φ über S kann erklärt werden durch

$$\int_S \Phi := \int_U \left\langle \underbrace{\Phi \circ F(x)}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n}, \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)}_{\in \bigwedge_k \mathbb{R}^n} \right\rangle \lambda^k(dx).$$

Man zeigt mit Hilfe des Transformationssatz für Gebietsintegrale, dass diese Definition von der Wahl von F unabhängig ist.

Definition (Äußeres Differential)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: U \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ eine k -Form der Klasse \mathcal{C}^r mit $r \geq 1$.

- (a) Ist $k = 0$, so ist $\Phi = f$ eine Funktion und $d\Phi = df$ ist als 1-Form auf U erklärt durch $df(p)(v) := D_v f(p)$, das heißt

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

denn

$$df(p)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot dx_i(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle = D_v f(p).$$

- (b) Ist $k \geq 1$ und $\Phi = f \cdot dx_I$ für ein $I \in I_k^n$, dann sei $d\Phi := df \wedge dx_I$, das heißt $d\Phi(p) \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n$ mit

$$d\Phi(p) = \underbrace{df(p)}_{\in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n} \wedge \underbrace{dx_I}_{\in \bigwedge^k \mathbb{R}^n} \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{R}^n.$$

- (c) Sei $k \geq 1$ und $\Phi = \sum_{I \in I_k^n} \Phi_I dx_I$ allgemein. $d\Phi$ wird durch lineare Fortsetzung erklärt, das heißt

$$d\Phi := \sum_{I \in I_k^n} d(\Phi_I dx_I) = \sum_{I \in I_k^n} d\Phi_I \wedge dx_I.$$

Bemerkungen: Es gilt

$$\langle d\Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \langle D_{v_i} \Phi(p), v_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{v_i} \wedge \cdots \wedge v_{k+1} \rangle.$$

Lemma 4.1

Seien Φ, Ψ jeweils k -Formen der Klasse C^r , $r \geq 1$, und Θ eine l -Form der Klasse C^s , $s \geq 1$. Dann gilt

$$(1) \quad d(\Phi + \Psi) = d\Phi + d\Psi$$

$$(2) \quad d(\Phi \wedge \Theta) = d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta.$$

Beweis

(2) Seien $\Phi = f dx_I$, $\Theta = g dx_J$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} d(\Phi \wedge \Theta) &= d(f \cdot dx_I \wedge g \cdot dx_J) = d((f \cdot g) \cdot dx_I \wedge dx_J) = d(f \cdot g) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (g \cdot df + f \cdot dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= g \cdot df \wedge dx_I \wedge dx_J + f \cdot dg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g \cdot dx_J) + (-1)^k \cdot (f \cdot dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\Phi \wedge \Theta + (-1)^k \cdot \Phi \wedge d\Theta. \end{aligned}$$

■

Lemma 4.2

Ist die k -Form $\Phi: U \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^r , $r \geq 2$, so gilt $dd\Phi = 0$ (als $(k+2)$ -Form).

Beweis

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Phi = f \cdot dx_I$, $I \in I_k^n$. Dann gilt

$$d\Phi = df \wedge dx_I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I$$

und ferner

$$\begin{aligned}
 d(d\Phi) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I\right) \\
 &= \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \cdot dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_I \\
 &= \sum_{i < j} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \cdot dx_j \wedge dx_i + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} \cdot \underbrace{dx_i \wedge dx_j}_{-dx_j \wedge dx_i}\right) \wedge dx_I = 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine k -Form Φ mit $d\Phi = 0$ heißt geschlossen. Eine k -Form Φ , zu der es eine $k-1$ -Form η gibt mit $d\eta = \Phi$ heißt exakt. Lemma 4.2 besagt, dass jede exakte Form geschlossen ist.

Frage: Gilt auch die Umkehrung? Das heißt: Ist eine geschlossene Form stets exakt?

Im Allgemeinen gilt dies nicht. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ ist dies jedoch richtig (Lemma von Poincaré).

Ziele:

- Integration von Differentialformen
- Satz von Stokes (Spezialfall)

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine λ^n -messbare Menge und ω eine stetige n -Form auf U . Dann wird das Integral von ω über U erklärt durch

$$\int_U \omega := \int_U \langle \omega(x), e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \lambda^n(dx)$$

wobei das U im linken Integral als Menge mit Orientierung (durch die rechts verwendete geordnete Standardbasis) zu verstehen ist. So legt man auch fest, dass

$$\int_{-U} \omega := \int_U -\langle \omega(x), e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \lambda^n(dx).$$

Niederdimensionale Mengen und Integration:

Beispiel

Sei $F = \{p\}$ eine 0-dimensionale Menge, sei ω eine 0-Form, das heißt eine Funktion $\omega: U \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in U$. Dann wird erklärt

$$\int_F \omega := \omega(p) =: \delta_p(\omega).$$

Definition

Sei $n \geq 1$.

- (1) Ein $(n-1)$ -dimensionaler Quader F , der zur i -ten Koordinatenachse orthogonal ist, ist von der Form

$$F = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

mit $a_i = b_i$ und $a_j < b_j$ für $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$.

- (2) Orientierung von F durch den $(n-1)$ -Vektor

$$\hat{e}_i := \bigwedge_{j \neq i} e_j := e_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{e_i} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

- (3) Integration einer $(n-1)$ -Form ω über F . Sei $\omega: F \rightarrow \bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n$ stetig (oder λ^{n-1} -messbar). Dann sei

$$\int_F \omega := \int_F \langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \lambda^{n-1}(dx)$$

und

$$\int_{-F} \omega := \int_F -\omega = \int_F -\langle \omega(x), \hat{e}_i \rangle \lambda^{n-1}(dx).$$

- (4) Seien $\alpha_k \in \mathbb{R}$, F_k orientierte „Seitenflächen“ von n -dimensionalen Quadern, $k \in \mathbb{N}$. Sei $\sum \alpha_k F_k$ eine formale, endliche Linearkombination. Sei ω eine $(n-1)$ -Form auf $U \subset \mathbb{R}^n$, $F_k \subset U$. Dann sei

$$\int_{\sum \alpha_k F_k} \omega := \sum \alpha_k \cdot \int_{F_k} \omega.$$

Definition (Orientierter Rand)

Sei $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader mit $a_i < b_i$. Dann sei für $1 \leq i \leq n$

$$R_i^+ := [a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

$$R_i^- := [a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

und

$$\partial_o R := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (R_i^+ - R_i^-)$$

sei eine formale Linearkombination von Flächen.

Satz 4.3

Seien $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $a_i < b_i$ und φ eine $(n-1)$ -Form der Klasse C^k mit $k \geq 1$, auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $R \subset U$. Dann gilt

$$\int_R d\varphi = \int_{\partial_o R} \varphi.$$

Beweis

Sei zunächst $n = 1$, φ eine 0-form, das heißt eine Funktion auf U . Es gilt $d\varphi(x) = \varphi'(x) \cdot dx$. Nun gilt

$$\int_{\partial_o R} \varphi = \int_{\partial_o[a_1, b_1]} \varphi = \int_{\{b\} - \{a\}} \varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$$

und

$$\begin{aligned} \int_R d\varphi &= \int_{[a, b]} \varphi'(x) dx = \int_{[a, b]} \langle \varphi'(x) dx_1, e_1 \rangle \lambda^1(dx) \\ &= \int_a^b \varphi'(x) \lambda^1(dx) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_{\partial_o R} \varphi, \end{aligned}$$

wobei der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurde.

Sei nun $n \geq 2$. Dann hat φ eine Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Es genügt, zu zeigen, dass für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) = \int_{\partial_o R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \int_R d(\varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \left\langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \right\rangle \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) \lambda^n(dx) \\ &= (-1)^{i-1} \cdot \left(\int_{R_i^+} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{R_i^-} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} \right), \end{aligned}$$

wobei der Satz von Fubini und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet wurden.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial_o R} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_{R_j^+} \varphi_i(x) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n - \int_{R_j^-} \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_{R_j^+} \varphi_i(x) \underbrace{\langle dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle}_{= \begin{cases} 0, & \text{für } j \neq i \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}} \mathcal{H}^{n-1}(dx) \right. \\
&\quad \left. - \int_{R_j^-} \varphi_i(x) \langle dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n, \hat{e}_j \rangle \mathcal{H}^{n-1}(dx) \right) \\
&= (-1)^{i-1} \left(\int_{R_i^+} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{R_i^-} \varphi_i d\mathcal{H}^{n-1} \right).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Gleichheit. ■

Im vorangehenden Beweis ist die Fallunterscheidung $n = 1$ bzw. $n \geq 2$ nicht zwingend erforderlich. Der Fall $n = 1$ kann dem Fall $n \geq 2$ untergeordnet werden.

Spezialfall: Divergenzsatz/Satz von Gauß-Green.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Setze $V_i(x) := \langle V(x), e_i \rangle$, $x \in U$. Sei V von der Klasse \mathcal{C}^r , $r \geq 1$. Die Divergenz von V ist

$$\operatorname{div}(V)(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x).$$

Ist φ eine $(n-1)$ -Form auf \mathbb{R}^n mit einer Darstellung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \cancel{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

so setzt man

$$V(x) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \varphi_i \cdot e_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= (\operatorname{div}(V)(x)) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Bezeichnet nun n den äußeren Normaleneinheitsvektor von R in ∂R , so folgt:

Korollar 4.4

Für ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf einer Umgebung von R gilt

$$\int_R \operatorname{div}(V) d\mathcal{H}^n = \int_{\partial R} \langle V, n \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Zurückholen von Formen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ von der Klasse \mathcal{C}^k mit $k \geq 1$. Sei $x \in U$ und sei φ eine in $F(x)$ erklärte r -Form. dann wird eine r -Form $(F^\# \varphi)(x)$ erklärt als r -Kovektor durch:

$$(F^\# \varphi)(x)(v_1, \dots, v_r) := \varphi(F(x))(DF_x(v_1), \dots, DF_x(v_r)).$$

Im Spezialfall $r = 0$ ist φ eine Funktion und

$$(F^\# \varphi)(x) = \varphi(F(x)) = (\varphi \circ F)(x).$$

Bemerkungen: (1) Ist φ von der Klasse \mathcal{C}^k , $k \geq 0$, und F von der Klasse \mathcal{C}^{k+1} , so ist $F^\# \varphi$ von der Klasse \mathcal{C}^k .

(2) $F^\# \varphi(x)$ kann als lineare Abbildung $\bigwedge_r \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

(3) Sei $L: V \rightarrow W$ linear. Dann wird durch

$$\begin{aligned} \bigwedge_r L: \bigwedge_r V &\rightarrow \bigwedge_r W \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_r &\mapsto L(v_1) \wedge \dots \wedge L(v_r) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung erklärt.

(4) $(F^\# \varphi)(x)(v_1 \wedge \dots \wedge v_r) = (\varphi \circ F)(x)(\bigwedge_r DF_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_r))$.

Wir haben nun vier Operationen für Formen $(\wedge, d, f^\#, +)$, für die nun Rechenregeln angegeben werden:

Lemma 4.5

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^l$ offene Mengen. Seien $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow W$ Abbildungen der Klasse \mathcal{C}^r , $r \geq 1$. Für k -Formen φ, ω auf V , eine h -Form η auf V und eine k -Form ζ auf W gelten die folgenden Aussagen:

- (1) $f^\#(\omega + \varphi) = f^\# \omega + f^\# \varphi$,
- (2) $f^\#(\varphi \wedge \eta) = (f^\# \varphi) \wedge (f^\# \eta)$,
- (3) $d(f^\# \omega) = f^\#(d\omega)$,
- (4) $(g \circ f)^\# \zeta = f^\#(g^\#(\zeta))$.

Beweis

Die Aussagen (1), (2), (4) folgen leicht aus den Definitionen (Übung). Zum Nachweis von (3) sei zunächst $k = 0$ und daher ω eine Funktion auf V . Dann gilt $f^\# \omega = \omega \circ f$. Für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(f^\# \omega)_x(v) = d(\omega \circ f)_x(v) = D(\omega \circ f)_x(v) = D\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = d\omega_{f(x)}(Df_x(v)) = (f^\# d\omega)_x(v)$, und damit die Behauptung im Fall $k = 0$. Sei nun $k = 1$ und $\omega = d\xi$ mit einer 0-Form ξ auf V . Dann gilt

$$d(f^\# \omega) = d(f^\# d\xi) = d(d(f^\# \xi)) = 0 = f^\#(dd\xi) = f^\#(d\omega).$$

Die Aussage (3) folgt nun wegen (1) und (2) daraus, dass jede „einfache“ k -Form äußeres Produkt einer 0-Form und äußeren Ableitungen von 0-Formen ist. ■

Definition

Seien R ein Quader in \mathbb{R}^n , $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $R \subset U$. Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ von der Klasse \mathcal{C}^k mit $k \geq 1$, injektiv und DF_x injektiv für $x \in U$. Dann ist $F(R)$ eine n -dimensionale Fläche in \mathbb{R}^m , die mit $F_\# R$ bezeichnet wird. Formal erklärt man für $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und Quader R_i in \mathbb{R}^n

$$F_\# \left(\sum_i \alpha_i R_i \right) := \sum_i \alpha_i F_\# R_i.$$

Ist ω eine n -Form auf einer Umgebung von $F(R)$ in \mathbb{R}^m , so sei

$$\begin{aligned} \int_{F_\# R} \omega &:= \int_R \left\langle \omega \circ F(x), \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)}_{=DF_x(e_1)} \right\rangle \lambda^n(dx) \\ &= \int_R \left\langle \omega \circ F(x), \bigwedge_n DF_x(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \right\rangle \lambda^n(dx) \\ &\quad \underbrace{\langle (F^\# \omega)_{x, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n} \rangle}_{=DF_x(e_1)} \\ &= \int_R F^\# \omega \end{aligned}$$

und analog für formale Linearkombination von Quadern.

Definition

Für einen Quader R in \mathbb{R}^n (und analog für formale Linearkombination) erklärt man

$$\partial_o F_\# R := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (F_\# R_i^+ - F_\# R_i^-) = F_\# \partial_o R.$$

Satz 4.6

Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader in \mathbb{R}^n , $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $R \subset U$, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei \mathcal{C}^k mit $k \geq 1$, injektiv und DF_x injektiv für $x \in U$. Sei ω eine $(n-1)$ -Form auf einer Umgebung von $F(R)$ in \mathbb{R}^m von der Klasse \mathcal{C}^2 . Dann gilt:

$$\int_{F_\# R} d\omega = \int_{\partial_o F_\# R} \omega.$$

Beweis

Man erhält

$$\int_{F_\# R} d\omega = \int_R F^\#(d\omega) = \int_R d(F^\# \omega) = \int_{\partial_o R} F^\# \omega = \int_{F_\# \partial_o R} \omega = \int_{\partial_o F_\# R} \omega. \quad \blacksquare$$

4.2 Grundlagen und Beispiele

Wir definieren im Folgenden eine Topologie auf Differentialformen und Strömen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\mathcal{E}^k(U) := \{(\varphi: U \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n) : \varphi \text{ ist von der Klasse } \mathcal{C}^\infty\}.$$

Definiere zu $i \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset U$, K kompakt, eine Seminorm ν_K^i auf $\mathcal{E}^k(U)$ durch

$$\nu_K^i(\varphi) := \sup\{\|D^j \varphi(x)\| : 0 \leq j \leq i, x \in K\}.$$

Es sei

$$\mathcal{O}(\varphi, i, K, \varepsilon) := \{\psi \in \mathcal{E}^k(U) : \nu_K^i(\varphi - \psi) < \varepsilon\}$$

für $i \in \mathbb{N}_0$, $K \subset U$ kompakt, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$. Diese Mengen bilden eine Subbasis einer Topologie \mathcal{O} auf $\mathcal{E}^k(U)$. Dann ist $(\mathcal{E}^k(U), \mathcal{O})$ ein topologischer Raum (genauer: ein lokal konvexer, Hausdorffscher, topologischer Vektorraum; vgl. Walter Rudin, Functional Analysis, Seite 7).

Definition

Es sei

$$\mathcal{E}_k(U) := \{(T: \mathcal{E}^k(U) \rightarrow \mathbb{R}) : T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Zu $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sei

$$\mathcal{O}'(\varphi, a, b) := \{T \in \mathcal{E}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}.$$

Auf $\mathcal{E}_k(U)$ wird die „schwache Topologie“ betrachtet, das heißt $\mathcal{O}'(\varphi, a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ bilden eine Subbasis dieser Topologie.

Definition (Träger)

Für $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$ sei

$$\text{supp}(\varphi) := U \setminus \bigcup \{W \subset U : W \text{ offen, } \varphi|_W = 0\}.$$

Für $T \in \mathcal{E}_k(U)$ sei

$$\text{spt}(T) := U \setminus \bigcup \{W \subset U : W \text{ offen, } T(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{E}^k(U) \text{ mit } \text{supp}(\varphi) \subset W\}.$$

Lemma 4.7

(a) Zu $T \in \mathcal{E}_k(U)$ gibt es $M > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset U$ kompakt, so dass gilt:

$$T(\varphi) \leq M \cdot \nu_K^i(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{E}^k(U)$.

(b) Seien $T_i, T \in \mathcal{E}_k(U)$, $i \in \mathbb{N}$, und $T_i \xrightarrow{s} T$ für $i \rightarrow \infty$. Dann existiert $K \subset U$, K kompakt, mit $\text{spt}(T_i), \text{spt}(T) \subset K$ für $i \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten jetzt Teilmengen von $\mathcal{E}^k(U)$. Sei hierzu $K \subset U$ kompakt und

$$\mathcal{D}_K^k(U) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(U) : \text{supp}(\varphi) \subset K\} \subset \mathcal{E}^k(U),$$

$$\mathcal{D}^k(U) := \bigcup \{\mathcal{D}_K^k(U) : K \subset U \text{ kompakt}\}.$$

Auf $\mathcal{D}^k(U)$ wird die feinste Topologie betrachtet, für die alle Inklusionsabbildungen

$$i_K : \mathcal{D}_K^k(U) \rightarrow \mathcal{D}^k(U), \quad \varphi \mapsto \varphi$$

stetig sind. Das heißt, $W \subset \mathcal{D}^k(U)$ ist offen genau dann, wenn $W \cap \mathcal{D}_K^k(U)$ offen ist in der Spurtopologie von $\mathcal{E}^k(U)$ auf $\mathcal{D}_K^k(U)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset U$.

Definition

Es sei

$$\mathcal{D}_k(U) := \{(T : \mathcal{D}^k(U) \rightarrow \mathbb{R}) : T \text{ linear und stetig}\}.$$

Auf $\mathcal{D}_k(U)$ wird durch die Subbasis

$$\{T \in \mathcal{D}_k(U) : a < T(\varphi) < b\}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$ eine Topologie festgelegt.

Bemerkungen: • Jedes $\varphi \in \mathcal{D}^k(U)$ hat kompakten Träger.

- $T \in \mathcal{D}_k(U)$ hat im Allgemeinen keinen kompakten Träger.
- $\mathcal{D}^k(U) \subset \mathcal{E}^k(U)$, $\mathcal{E}_k(U) \subset \mathcal{D}_k(U)$. Dies folgt etwa aus dem nachfolgenden Lemma 4.9.

Lemma 4.8

Seien $\varphi_i, \varphi \in \mathcal{D}^k(U)$, $i \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\varphi_i \rightarrow \varphi \text{ für } i \rightarrow \infty$$

genau dann, wenn es eine kompakte Menge $K \subset U$ gibt, so dass $\text{supp}(\varphi_i), \text{supp}(\varphi) \subset K$ für $i \in \mathbb{N}$ und für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt $\|D_j(\varphi_i - \varphi)\| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$.

Lemma 4.9

Sei $T : \mathcal{D}^k(U) \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Genau dann ist $T \in \mathcal{D}_k(U)$, wenn es zu jeder kompakten Menge $K \subset U$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ und $M > 0$ gibt mit

$$T(\varphi) \leq M \cdot \nu_K^i(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}_K^k(U).$$

Definition

- Die Elemente von $\mathcal{D}_k(U)$ heißen k -dimensionale Ströme auf U . ($k = 0$: Distributionen).
- Die Elemente von $\mathcal{E}_k(U)$ heißen k -dimensionale Ströme auf U mit kompaktem Träger.

Beispiele

(1) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ wird erklärt durch

$$S_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) dx \text{ für } f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}).$$

Zum Nachweis sei $f \in \mathcal{D}_K^0(\mathbb{R})$, $K \subset U$ kompakt. Wegen

$$|S_g(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) d(x) \right| \leq \int_R |g(x)| \underbrace{|f(x)|}_{\leq \nu_K^0(f)} dx \leq \nu_K^0(f) \cdot \underbrace{\int_K |g(x)| dx}_{=: M}$$

und Lemma 4.9 ist dies ein Strom.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$, $\delta_a(f) := f(a)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$. Es ist $\delta_a \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$.

(3) Sei $a \in \mathbb{R}$, $T(f) := f'(a)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$. Es ist $T \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$.

(4) Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. $\llbracket a, b \rrbracket \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\llbracket a, b \rrbracket(f(x)dx) := \int_a^b f(x)dx \text{ für } f(x)dx \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}).$$

(5) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist M orientierbar, dann gibt es ein stetiges k -Vektorfeld $x \mapsto (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \in T_x M$, für $x \in M$, mit der Eigenschaft $\|(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x\| = 1$ für alle $x \in M$. (Die Existenz eines solchen stetigen k -Vektorfeldes ist äquivalent zur Orientierbarkeit von M ; vgl. den Anhang, Abschnitt 5.4.) Dann ist $\llbracket M \rrbracket \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$ erklärt durch

$$\llbracket M \rrbracket(\omega) := \int_M \omega := \int_M \langle \omega(x), (\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)_x \rangle \mathcal{H}^k(dx) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n).$$

(6) Sei $\xi \in \mathcal{E}^{n-k}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \leq k \leq n$. Dann sei $T_\xi \in \mathcal{D}_k(U)$ erklärt durch

$$T_\xi(\omega) := \int_U \omega \wedge \xi = \int_U \langle \omega \wedge \xi, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

(7) Sei $T \in \mathcal{D}_k(U)$, $\psi \in \mathcal{E}^m(U)$, $m \leq k$. Dann ist $T \llbracket \psi \in \mathcal{D}_{k-m}(U)$ erklärt durch

$$(T \llbracket \psi)(\omega) := T(\psi \wedge \omega) \text{ für } \omega \in \mathcal{D}^{k-m}(U).$$

Definition (Rand eines Stroms)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Für $k \geq 1$ ist der Rand ∂T von T erklärt durch $\partial T \in \mathcal{D}_{k-1}(U)$ mit

$$\partial T(\omega) := T(d\omega)$$

für $\omega \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$.

Beispiele

(1) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$\partial(\llbracket a, b \rrbracket)(f) = \llbracket a, b \rrbracket(df) = \llbracket a, b \rrbracket(f'(x)dx) = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = (\delta_b - \delta_a)(f)$$

Also ist $\partial \llbracket a, b \rrbracket = \delta_b - \delta_a$.

- (2) Sei $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist $T_g \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ erklärt durch

$$T_g(\omega(x)dx) := \int_{\mathbb{R}} g(x)\omega(x)dx.$$

Ferner sei $S_g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ wie im vorigen Beispiel. Dann folgt

$$\partial T_g(f) = T_g(df) = T_g(f'(x)dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} g'(x)f(x)dx = -S_{g'}(f) = S_{-g'}(f)$$

Also ist $\partial T_g = S_{-g'}$.

- (3) Sei in (2) nun g nur noch stetig, etwa $g(x) = |x|$. Dann ist $\partial T_g = S_{-\text{sgn}}$.
- (4) Sei M eine orientierte, kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n mit Rand ∂M und $\llbracket M \rrbracket \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R})$ der induzierte Strom. Mit dem Satz von Stokes folgt: Für $\eta \in \mathcal{D}^{k-1}(U)$ gilt

$$\partial \llbracket M \rrbracket(\eta) = \llbracket M \rrbracket(d\eta) = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = \llbracket \partial M \rrbracket(\eta)$$

also gilt $\partial \llbracket M \rrbracket = \llbracket \partial M \rrbracket$.

- (5) Sei $k \geq j+1$, $\xi \in \mathcal{E}^j(U)$, $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $\omega \in \mathcal{D}^{k-j-1}(U)$. Es ist

$$\begin{aligned} \partial(T \llbracket \xi \rrbracket)(\omega) &= T \llbracket \xi \rrbracket(d\omega) = T(\xi \wedge d\omega) \\ &= T((-1)^j d(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1} d\xi \wedge \omega) \\ &= (-1)^j T(d(\xi \wedge \omega)) + (-1)^{j-1} T(d\xi \wedge \omega) \\ &= (-1)^j \partial T(\xi \wedge \omega) + (-1)^{j-1} (T \llbracket d\xi \rrbracket)(\omega) \\ &= (-1)^j ((\partial T) \llbracket \xi \rrbracket)(\omega) + (-1)^{j-1} (T \llbracket d\xi \rrbracket)(\omega), \end{aligned}$$

also gilt

$$\partial(T \llbracket \xi \rrbracket) = (-1)^j ((\partial T) \llbracket \xi \rrbracket) + (-1)^{j-1} (T \llbracket d\xi \rrbracket)$$

und somit

$$(\partial T) \llbracket \xi \rrbracket = T \llbracket (d\xi) \rrbracket + (-1)^j \partial(T \llbracket \xi \rrbracket).$$

- (6) $\partial \partial T = 0$, für $T \in \mathcal{D}_k(U)$ mit $k \geq 2$, da $\partial \partial T(\omega) = \partial T(d\omega) = T(dd\omega) = T(0) = 0$.

Definition (Masse von Differentialformen und Strömen)

- Euklidische Masse von Differentialformen $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ in $x \in U$:

$$|\omega(x)| := \left(\sum_{I \in I_k^n} \omega_I(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Komasse von $\omega(x)$:

$$\|\omega(x)\| := \sup\{\omega(x)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) : v_i \in \mathbb{R}^n, \|v_i\| \leq 1\}$$

- Euklidische Masse eines Stromes $T \in \mathcal{D}_k(U)$:

$$\underline{\mathbf{M}}(T) := \sup\{T(\omega) : |\omega(x)| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

- Masse von T :

$$\mathbf{M}(T) := \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

Wegen

$$|\omega(x)| \geq \|\omega(x)\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega(x)|$$

folgt

$$\binom{n}{k}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}(T) \leq \underline{\mathbf{M}}(T) \leq \cdot \mathbf{M}(T)$$

mit einer Konstanten c , die nur von n abhängt.

Beispiel

Ist $T = \llbracket M \rrbracket$, M eine orientierbare, kompakte, k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(T) &= \sup\left\{\int_M \omega : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\right\} \\ &= \sup\left\{\int_M \underbrace{\langle \omega(x), \xi(x) \rangle}_{\leq \|\omega(x)\| \cdot \|\xi(x)\| \leq 1} \mathcal{H}^k(dx) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U\right\} \\ &\leq \mathcal{H}^k(M). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass hier sogar Gleichheit gilt.

Definition

Eine Folge $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$ konvergiert in der Massenorm gegen ein $T \in \mathcal{D}_k(U)$, falls $\mathbf{M}(T_i - T) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$.

Bemerkung: • Ist $\mathbf{M}(0) = 0$, so gilt $T = 0$.

- Gilt $T_i \rightarrow T$ in der Massenorm, so gilt $T_i \xrightarrow{s} T$, denn:

Sei $T_j \rightarrow 0$ in der Massenorm für $j \rightarrow \infty$, das heißt $\mathbf{M}(T_j) \rightarrow 0$. Für $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ gilt:

$$|T_j(\omega)| \leq \mathbf{M}(T_j) \cdot \sup_{x \in U} \|\omega(x)\| \rightarrow 0$$

also $T_j(\omega) \xrightarrow{s} 0$ für $j \rightarrow \infty$.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Seien $T_j = \delta_j \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbf{M}(T_j) = 1$, aber $T_j \xrightarrow{s} 0$, da $T_j(f) \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$ und $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$.

Lemma 4.10

Seien $T_j, T \in \mathcal{D}_k(U)$, $j \in \mathbb{N}$ und $T_j \xrightarrow{s} T$ für $j \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j).$$

Beweis

Sei $\mathbf{M}(T) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ mit $\|\omega(x)\| \leq 1$ für alle $x \in U$ und $T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$. Daher folgt:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} T_j(\omega) = T(\omega) \geq \mathbf{M}(T) - \varepsilon$$

also $\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbf{M}(T_j)$.

Sei $\mathbf{M}(T) = \infty$. Dann existiert zu $m \in \mathbb{N}$ ein ω wie oben mit $T(\omega) \geq m$. Weiter wie oben. ■

Beispiel

Ströme mit minimaler Masse

$T = \llbracket B^2 \rrbracket \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$, d.h. $T(\omega) = \int_B \langle \omega(x), e_1 \wedge e_2 \rangle \mathcal{H}^2(dx)$, $\omega \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^2)$.

Frage: Hat T minimale Masse unter allen 2-Strömen $S \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial S = \partial T = \llbracket \partial B^2 \rrbracket$.

<+++>

Lemma 4.11

Sei $T \in \mathcal{D}_n(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{M}(T) < \infty$. Es gebe ein $\Omega = d\varphi \in \mathcal{D}^n(U)$ mit $\|\Omega\| \leq 1$ und $\mathbf{M}(T) = T(\Omega)$. Dann gilt für alle $S \in \mathcal{D}_n(U)$ mit $\partial S = \partial T$:

$$\mathbf{M}(T) \leq \mathbf{M}(S).$$

Beweis

$\mathbf{M}(T) = T(\Omega) = T(d\varphi) = \partial T(\varphi) = \partial S(\varphi) = S(d\varphi) = S(\Omega) \leq \mathbf{M}(S)$. ■

Zurück zum Beispiel: Sei $\Omega := dx_1 \wedge dx_2 \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\|\Omega\| = 1$ und

$$T(\Omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle dx_1 \wedge dx_2, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{=1} \mathcal{H}^2(dx) = \mathcal{H}^2(B^2) = \mathbf{M}(T),$$

da

$$T(\omega) = \int_{B^2} \underbrace{\langle \omega, e_1 \wedge e_2 \rangle}_{\leq \|\omega\| \cdot \|e_1 \wedge e_2\|} d\mathcal{H}^2.$$

Ferner gilt für $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ gerade $d\varphi_x = \frac{1}{2} \cdot (dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_1) = \Omega$. Mit obigem Lemma folgt, dass T minimierend ist. Zur Berechnung von ∂T betrachten wir

$$\eta = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^2).$$

$$\begin{aligned}
\partial T(\eta) &= T(d\eta) = T\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2\right) \\
&= T\left(\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2\right) \\
&= \int_{B^2} \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right) \mathcal{H}^2(dx) \\
&= \int_{B^2} \div \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} \mathcal{H}^2(dx) \\
&= \int_{S^1} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}(x), x \right\rangle}_{=\eta_2(x) \cdot x_1 - \eta_1(x) \cdot x_2} \mathcal{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2, \underbrace{-x_2 e_1 + x_1 e_2}_{\xi \in T_x S^1} \rangle \mathcal{H}^1(dx) \\
&= \int_{S^1} \langle \eta, \xi \rangle d\mathcal{H}^1 \\
&= \llbracket S^1 \rrbracket(\eta).
\end{aligned}$$

4.3 Ströme mit lokalendlicher Masse

Für Ströme mit lokalendlicher Masse liefert der Rieszsche Darstellungssatz eine „explizite“ Integralsdarstellung. Dazu sei

$$\mathbf{M}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty\}$$

die Menge der *Ströme endlicher Masse* und

$$\mathbf{N}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}(T) < \infty \text{ und } \mathbf{M}(\partial T) < \infty\}$$

die Menge der *normalen Ströme*.

Beispiel

$T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ mit $T(\omega(x) dx) := \omega(0)$. Dann ist $\|\omega(x) dx\| = |\omega(x)|$ und daher $\mathbf{M}(T) = 1$. Aber $\partial T(f) = T(df) = T(f'(x) dx) = f'(0)$ für $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R})$ und somit $\mathbf{M}(\partial T) = \infty$.

Lokalisierung: Sei $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$, V und U offen, $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Es sei

$$\underline{\mathbf{M}}_V(T) := \sup\{T(\omega) : |\omega(x)| \leq 1 \ \forall x \in U, \text{supp}(\omega) \subset V\}$$

und

$$\mathbf{M}_V(T) := \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1 \ \forall x \in U, \text{supp}(\omega) \subset V\}.$$

Weiter seien definiert:

$$\underline{\mathbf{M}}_{k,loc}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{M}}_V(T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{M}_{k,loc}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{M}_V(T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\underline{\mathbf{N}}_{k,loc}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \underline{\mathbf{N}}_V(T) < \infty, \underline{\mathbf{N}}_V(\partial T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}$$

$$\mathbf{N}_{k,loc}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U) : \mathbf{N}_V(T) < \infty, \mathbf{N}_V(\partial T) < \infty \forall V \subset U, V \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt in } U\}.$$

Satz 4.12

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T_i \in \mathcal{D}_k(U)$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_V(T_i) < \infty \quad \text{für alle } V \subset U \text{ offen}, \bar{V} \text{ kompakt}, \bar{V} \subset U.$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(T_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ und $T \in \mathcal{D}_k(U)$ mit $T_{n_i} \xrightarrow{s} T$ für $i \rightarrow \infty$.

Beweis (Skizze)

Verwende, dass Ströme stetige, lineare Funktionale auf $\mathcal{D}^k(U)$ (topologischer Vektorraum) sind. Jetzt kann man lokal den Satz von Banach-Alaoglu anwenden, der die Auswahl einer lokal schwach* konvergenten Teilfolge erlaubt. Diagonalargument. ■

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei μ ein borelreguläres Maß auf U mit $\mu(K) < \infty$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (Radonmaß). Sei $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine μ -messbare Abbildung und $\|\xi\| = 1$ μ -fast-überall. Dann wird durch

$$L(f) := \int_U \langle f(x), \xi(x) \rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m)$$

ein lineares Funktional $L : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt. Es gilt

$$|L(f)| \leq \int_U |\langle f(x), \xi(x) \rangle| \mu(dx) \leq \mu(K) < \infty$$

falls $f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m)$, $\text{supp}(f) \subset K$, $K \subset U$ kompakt, $\|f\| \leq 1$. In dieser Situation gilt

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \leq 1, \text{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

für alle $K \subset U$, K kompakt.

Satz 4.13 (Riesz)

Sei $L : \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein lineares Funktional, das

$$\sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \|f\| \leq 1, \text{supp}(f) \subset K\} < \infty$$

erfüllt. Dann existiert ein Radonmaß μ auf U und eine μ -messbare Abbildung $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\|\xi(x)\| = 1$ für μ -fast-alle $x \in U$ und

$$L(f) = \int_U \langle f(x), \xi(x) \rangle \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m).$$

Ferner gilt für $V \subset U$ offen:

$$\mu(V) = \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}^m), \text{supp}(f) \subset V, \|f\| \leq 1\}.$$

Beweis

Siehe L. Simon, Lecture Notes of the ANU, Canberra, GMT. ■

Als Folge erhält man für Ströme lokalendlicher Masse.

Satz 4.14

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathcal{D}_k(U)$. Dann sind äquivalent:

- (1) $T \in \mathbf{M}_{k,loc}(U)$.
- (2) Es gibt ein Radonmaß μ_T auf U und eine μ_T -messbare Abbildung $\xi : U \rightarrow \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ mit $|\xi(x)| = 1$ für μ_T -fast-alles $x \in U$, so dass gilt:

$$T(\omega) = \int \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \mu_T(dx), \quad \omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

Hierbei ist für $V \subset U$ offen:

$$\mu_T(V) = \sup\{T(\omega) : \omega \in \mathcal{D}^k(U), \forall x \in U: |\omega(x)| \leq 1, \text{supp}(\omega) \subset V\} = \underline{\mathbf{M}}_V(T).$$

Bemerkung: (1) In der Situation des Satzes sagt man, dass T als Integral darstellbar ist.

- (2) Auf $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ gibt es die euklidische Norm $|\cdot|$, sowie die Komassen-Norm $\|\cdot\|$. Ferner existiert auf $\bigwedge_k \mathbb{R}^n$ neben der euklidischen Norm $|\cdot|$ die Masse-Norm $\|\cdot\|$:

$$\|\xi\| := \sup\{\langle \omega, \xi \rangle : \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n, \|\omega\| \leq 1\}$$

Zusammenhänge:

$$|\omega| \geq \|\omega\| \geq \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \cdot |\omega|, \quad \omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n,$$

$\|\omega\| = |\omega|$ für einen einfachen Kovektor ω . Hierbei nennt man $\omega \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ einfach, falls es $\eta_1, \dots, \eta_k \in \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ gibt mit $\omega = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k$. Es gilt nun

$$|\xi| \leq \|\xi\| \leq \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} |\xi|, \quad \xi \in \bigwedge_k \mathbb{R}^n, \quad \text{und } \|\xi\| = |\xi|$$

für ξ einfach. Für die Verknüpfung mit dem äußeren Produkt gilt dann

$$\|\xi \wedge \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|, \quad \|\varphi \wedge \omega\| \leq \binom{p+q}{p} \|\varphi\| \cdot \|\omega\|,$$

$$\xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n, \eta \in \bigwedge_q \mathbb{R}^n, \varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n, \omega \in \bigwedge^q \mathbb{R}^n.$$

$$|\langle \varphi, \xi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\xi\|$$

$$\text{für } \varphi \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n, \xi \in \bigwedge_p \mathbb{R}^n.$$

(3) Im vorangehenden Satz setzt man $\vec{T}(x) := \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$ und $\|T\| := \|\xi\| \cdot \mu_T$, wobei

$$\|T\|(M) = \int \mathbf{1}_M(x) \|\xi(x)\| \mu_T(dx)$$

und erhält so:

$$T(\omega) = \int_U \langle \omega(x), \vec{T}(x) \rangle \|T\|(dx)$$

mit $\|\vec{T}\| = 1$, $\|T\|$ -fast-überall auf U , $\|T\|(V) = \sup\{T(\omega) : \omega \in \mathcal{D}^k(U), \|\omega(x)\| \leq 1 \text{ für } x \in U, \text{supp}(\omega) \subset V\}$, sowie $\mathbf{M}_V(T) = \|T\|(V)$.

(4) Ist T durch ein Integral darstellbar, so erklärt man für $A \subset U$, A Borelsch:

$$(T \lfloor A)(\omega) := \int_A \langle \omega, \vec{T} \rangle d\|T\|$$

oder für eine beschränkte Borelfunktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(T \lfloor f)(\omega) := \int_U f \cdot \langle \omega, \vec{T} \rangle d\|T\|.$$

4.4 Produkt, Push-forward und Homotopieformel

Produkt von Strömen. Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ offen und $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$, $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$ Ströme. Im Folgenden sind x_1, \dots, x_{n_1} Koordinaten von $\mathbb{R}^{n_1} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ und y_1, \dots, y_{n_2} sind Koordinaten (bzw. Koordinatenfunktionen) von $\mathbb{R}^{n_2} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ (mit naheliegenden Identifikationen).

Sei $\omega \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$. Dann kann man ω in der Form

$$\omega = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ |\alpha|+|\beta|=m_1+m_2}} \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta$$

geschrieben werden.

Definition

Mit obiger Notation setzen wir

$$S \times T(\omega) := \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ |\alpha|=m_1 \\ |\beta|=m_2}} S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dy_\beta) dx_\alpha).$$

Man kann sich leicht überlegen, dass diese Definition korrekt ist, das heißt etwa, dass das Argument von S im Definitionsbereich von S ist und $S \times T \in \mathcal{D}_{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$ wieder ein Strom ist.

Satz 4.15

Seien $S \in \mathcal{D}_{m_1}(U_1)$ und $T \in \mathcal{D}_{m_2}(U_2)$ Ströme.

- (1) Seien $p: \mathbb{R}^{m_1+m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$, $(x, y) \mapsto x$ und $q: \mathbb{R}^{m_1+m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$, $(x, y) \mapsto y$ die Projektionsabbildungen. Seien $\varphi \in \mathcal{D}^k(U_1)$, $\eta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-k}(U_2)$. Dann gilt:

$$S \times T(p^\# \varphi \wedge q^\# \eta) = \begin{cases} S(\varphi) \cdot T(\eta), & k = m_1, \\ 0, & k \neq m_1 \end{cases}$$

und für

$$\omega = \sum_{\alpha, \beta} \omega_\alpha(x) \omega_\beta(y) dx_\alpha \wedge dy_\beta = \underbrace{\left(\sum_{\alpha} \omega_\alpha(x) dx_\alpha \right)}_{:= \omega_1(x)} \wedge \underbrace{\left(\sum_{\beta} \omega_\beta(y) dy_\beta \right)}_{:= \omega_2(y)}$$

gilt

$$S \times T(\omega) = S(\omega_1) \cdot T(\omega_2).$$

- (2) $\text{spt}(S \times T) = \text{spt}(S) \times \text{spt}(T)$.
 (3) $\partial(S \times T) = \partial S \times T + (-1)^{m_1} S \times \partial T$.
 (4) Seien $P: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $x \mapsto (x, 0)$, $Q: \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $y \mapsto (0, y)$. Haben S und T lokalendliche Massen, so auch $S \times T$ und

$$S \times T(\cdot) = \int \langle \cdot, (\bigwedge_{m_1} P) \vec{S} \wedge (\bigwedge_{m_2} Q) \vec{T} \rangle d(\|S\| \otimes \|T\|)$$

Beweis

- (3) Sei $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2-1}(U_1 \times U_2)$. Dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \partial(S \times T)(\omega) &= S \times T(dw) \\ &= S\left(\sum_{i=1}^{n_1} T\left(\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_i} dy_\beta\right) dx_i \wedge dx_\alpha\right) + (-1)^{|\alpha|} S\left(T\left(\sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} dy_j \wedge dy_\beta\right) dx_\alpha\right) \\ &= S(d_x(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) + (-1)^{|\alpha|} S(T(d_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha)) \\ &= \partial S(T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) + (-1)^{m_1} S(\partial T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\ &= \partial S \times T(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) + (-1)^{m_1} (S \times \partial T)(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\ &= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta) \\ &= (\partial S \times T + (-1)^{m_1} (S \times \partial T))(\omega). \end{aligned}$$

- (4) Sei $\omega = \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta \in \mathcal{D}^{m_1+m_2}(U_1 \times U_2)$. Die Voraussetzung besagt, dass

$$S = \int_{U_1} \langle \cdot, \vec{S} \rangle d\|S\|$$

und

$$T = \int_{U_2} \langle \cdot, \vec{T} \rangle d\|T\|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} S \times T(\omega) &= S_x(T_y(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha) \\ &= \int \langle T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) dx_\alpha, \vec{S} \rangle d\|S\| \\ &= \int T(\omega_{\alpha\beta} dy_\beta) \langle dx_\alpha, \vec{S} \rangle d\|S\| \\ &= \int_{U_1} \int_{U_2} \langle \omega_{\alpha\beta} dy_\beta, \vec{T} \rangle d\|T\| \langle dx_\alpha, \vec{S} \rangle d\|S\| \\ &= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x, y) dy_\beta, \vec{T}(y) \rangle \langle dx_\alpha, \vec{S}(x) \rangle d(\|S\| \otimes \|T\|) \\ &= \int_{U_1 \times U_2} \langle \omega_{\alpha\beta}(x, y) dx_\alpha \wedge dy_\beta, (\bigwedge_{n_1} P) \vec{S}(x) \wedge (\bigwedge_{n_2} Q) \vec{T}(y) \rangle d(\|S\| \otimes \|T\|). \blacksquare \end{aligned}$$

Fazit: Es gilt insbesondere

$$\|S \times T\| = \|S\| \otimes \|T\|, \quad \overrightarrow{S \times T} = (\bigwedge_{n_1} P) \vec{S} \wedge (\bigwedge_{n_2} Q) \vec{T}.$$

Beispiel

Ist T durch ein Integral darstellbar, so auch $\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T$ mit $\|\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T\| = \lambda_{[0,1]}^1 \otimes \|T\|$ und $\overrightarrow{\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T} = \epsilon_1 \wedge \vec{T}$ (hier wurden die Einbettungsabbildungen weggelassen).

Bild eines Stromes. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ferner seien $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $f: U \rightarrow V$ eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung. **Voraussetzung:** $f|_{\text{spt}(T)}$ sei eigentlich (das heißt, für $K \subset V$, K kompakt sei $f^{-1}(K) \cap \text{spt}(T) \subset U$ stets kompakt).

Beispiel

Seien $f: U := (0, \infty) \rightarrow V := \mathbb{R}$ und $T := \llbracket 0, b \rrbracket \in \mathcal{D}_0(U)$ für $b > 0$. Dann ist

$$f^{-1}([0, b]) \cap \text{spt}(T) = (0, b] \cap [0, b] = (0, b] \subset U$$

nicht kompakt.

Definition

Seien f und T wie oben. Sei $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$. Sei $\gamma \in \mathcal{D}_0(U)$ mit

$$\text{spt}(T) \cap \underbrace{\text{supp}(f^\# \omega)}_{\subset f^{-1}(\text{supp}(\omega))} \subset \{\gamma = 1\}^o.$$

Dann setzt man

$$(f_\# T)(\omega) := T(\gamma \wedge f^\# \omega).$$

Bemerkungen: (i) $\text{supp}(f^\# \omega) \subset f^{-1}(\text{supp}(\omega))$ und $\text{supp}(\omega) \subset V$ ist kompakt, das heißt $\text{spt}(T) \cap \text{supp}(f^\# \omega) \subset \text{spt}(T) \cap f^{-1}(\text{supp}(\omega))$. Dabei ist $\text{spt}(T) \cap f^{-1}(\text{supp}(\omega))$ kompakt und $\text{spt}(T) \cap \text{supp}(f^\# \omega)$ abgeschlossen und damit auch kompakt.

- (ii) Auf die Einführung von γ kann man im Allgemeinen nicht verzichten, da $\text{supp}(f^\# \omega)$ nicht kompakt sein muss.
- (iii) Die Definition von $(f_\# T)(\omega)$ ist von der konkreten Wahl von γ unabhängig. Seien nämlich γ_1, γ_2 wie oben. Es ist

$$\text{supp}((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^\# \omega) \cap \text{spt}(T) = \emptyset.$$

Daraus folgt mittels einer Zerlegung der Eins

$$T((\gamma_1 - \gamma_2) \wedge f^\# \omega) = 0.$$

Dies schließlich ergibt

$$T(\gamma_1 \wedge f^\# \omega) = T(\gamma_2 \wedge f^\# \omega).$$

- (iv) Manchmal geht es auch ohne γ .

Lemma 4.16

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $T \in \mathcal{D}_k(U)$, $f: U \rightarrow V$ von der Klasse \mathcal{C}^∞ , wobei $f|_{\text{spt}(T)}$ eigentlich ist. Dann gilt

- (1) $\text{spt}(f_\# T) \subset f(\text{spt}(T))$
- (2) $\partial(f_\# T) = f_\#(\partial T)$.
- (3) Ist T durch ein Integral darstellbar, so gilt das auch für $f_\# T$ und

$$\|f_\# T\| \leq f_\#(\|T\| \llbracket \bigwedge_m Df \vec{T} \rrbracket).$$

Hierbei ist für eine messbare Menge $A \subset V$ die rechte Seite erklärt durch

$$f_\#(\|T\| \llbracket \bigwedge_m Df \vec{T} \rrbracket)(A) = \int_{f^{-1}(A)} \|\bigwedge_m Df_x \vec{T}(x)\| \|T\|(dx).$$

Satz 4.17 (Homotopieformel)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, seien $f, g: U \rightarrow V$ von der Klasse \mathcal{C}^∞ und $h: [0, 1] \times U \rightarrow V$ von der Klasse \mathcal{C}^∞ mit $h(0, \cdot) = f$ und $h(1, \cdot) = g$. Sei $T \in \mathcal{D}_k(U)$ und $h|_{[0, 1] \times \text{spt}(T)}$ sei eigentlich. Dann gilt

$$g_\# T - f_\# T = h_\#([0, 1] \times \partial T) + \partial h_\#([0, 1] \times T),$$

wobei für $k = 0$ der erste Term in der Summe entfällt.

Beweis

Wegen $\text{spt}([0, 1] \times T) = [0, 1] \times \text{spt}(T)$ und $\text{spt}(\partial T) \subset \text{spt}(T)$ und nach Voraussetzung sind alle

Ströme erklärt. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T) &= h_{\#} \partial(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T) \\
 &= h_{\#}(\partial \llbracket 0, 1 \rrbracket \times T + (-1)^1 \llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T) \\
 &= h_{\#}((\delta_1 - \delta_0) \times T - \llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T) \\
 &= h_{\#}(\delta_1 \times T) - h_{\#}(\delta_0 \times T) - h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T) \\
 &= g_{\#}T - f_{\#}T - h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T).
 \end{aligned}$$

Sei für den letzten Schritt $\tau: U \rightarrow \mathbb{R} \times U$, $x \mapsto (0, x)$. Dann ist $\delta_0 \times T = \tau_{\#}T$. In der Tat:

$$\delta_0 \times T(\omega(t, x)dx) = \delta_0(T(\omega(t, x)dx)) = T(\omega(0, x)dx)$$

und

$$\tau_{\#}T(\omega(t, x)dx) = T(\gamma \wedge \tau^{\#}(\omega(t, x)dx)) = T(\gamma \wedge \omega(0, x)dx) = T(\omega(0, x)dx).$$

Hiermit folgt

$$h_{\#}(\delta_0 \times T) = h_{\#}(\tau_{\#}T) = (h \circ \tau)_{\#}T = f_{\#}T.$$

Die hierbei benutzte Eigenschaft $h_{\#} \circ \tau_{\#} = (h \circ \tau)_{\#}$ ist leicht einzusehen. ■

Beispiel

Sei $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial T = 0$, $\text{spt}(T)$ kompakt, $k \geq 1$. Nach der Homotopieformel gilt

$$g_{\#}T - f_{\#}T = \partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T) + 0.$$

Ist spezieller: $g(x) := x$, $f(x) := 0$, so gilt $g_{\#}T = T$, $f_{\#}T = 0$ und somit:

$$T = \underbrace{\partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)}_{\in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Korollar 4.18

Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.17.

- (a) Ist T durch ein Integral darstellbar, so gilt mit der affinen Homotopie $h(t, x) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$:

$$\mathbf{M}(h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)) \leq \|T\| (|g - f| \cdot \max\{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\}).$$

- (b) Ist $\mathbf{M}(T) < \infty$ und h wie in (a), so gilt

$$\mathbf{M}(h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)) \leq \sup_{\text{spt}(T)} |g - f| \cdot \sup_{\text{spt}(T)} \{\|Df\|^k, \|Dg\|^k\} \cdot \mathbf{M}(T).$$

Beweis

Für $\psi \in \mathcal{D}^{k+1}(V)$ folgt:

$$\begin{aligned}
h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)(\psi) &= \int_{(0,1) \times U} \langle e_1 \wedge \vec{T}, h^{\#}\psi \rangle (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t, x)) \\
&= \int_{(0,1) \times U} \langle \psi(h(t, x)), \underbrace{\bigwedge_{k+1} Dh_{(t,x)}(e_1 \wedge \vec{T})}_{=(g(x)-f(x)) \wedge \underbrace{\bigwedge_k D_x h_{(t,x)} \vec{T}}_{=(1-t)Df_x(\vec{T})+t \cdot Dg_x(\vec{T})}} \rangle (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t, x)) \\
&= \int_{(0,1) \times U} \|\psi(h(t, x))\| \cdot ((1-t)\|Df_x\|^k + t \cdot \|Dg_x\|^k) (\lambda^1 \otimes \|T\|)(d(t, x)). \blacksquare
\end{aligned}$$

Anwendung: Sei U sternförmig in \mathbb{R}^n bezüglich $u \in U$. Betrachte: $g(x) := x$, $f(x) := u$, $x \in U$, $h(t, x) := (1-t) \cdot u + t \cdot x$. Für $\psi \in \mathcal{D}^k(U)$ ist $f^{\#}\psi = 0$ ($k \geq 1$) und $g^{\#}\psi = \psi$. Wir betrachten den speziellen Strom

$$T(\beta) := \langle \beta, \eta \rangle, \quad \beta \in \mathcal{D}^k(U),$$

wobei $\eta: U \rightarrow \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ fest gewählt ist mit kompaktem Träger in U und von der Klasse \mathcal{C}^∞ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g_{\#}T(\psi) &= T(\gamma \wedge g^{\#}\psi) = T(\gamma \wedge \psi) = \langle \gamma \wedge \psi, \eta \rangle = \langle \psi, \eta \rangle \\
f_{\#}T(\psi) &= 0
\end{aligned}$$

$$h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T)(\psi) = \llbracket 0, 1 \rrbracket \times \partial T(h^{\#}\psi) = \partial T((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}) = T(d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}))$$

$$\partial h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)(\psi) = h_{\#}(\llbracket 0, 1 \rrbracket \times T)(d\psi) = \dots$$

Ist $d\psi = 0$, so erhält man aus der Homotopieformel für Ströme:

$$\langle \psi, \eta \rangle = T(d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket})) + 0$$

und damit

$$\langle \psi, \eta \rangle = \langle d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}), \eta \rangle.$$

Dies zeigt

$$\varphi = d((h^{\#}\psi)_{\llbracket 0, 1 \rrbracket}).$$

Also ist ψ exakt. Dies ist ein Beweis des Lemmas von Poincaré.

Bild eines Stromes unter einer Lipschitzabbildung. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathbf{N}_{k, \text{loc}}(U)$ und sei $f: U \rightarrow V$ Lipschitz sowie $f|_{\text{spt}(T)}$ eigentlich. Zu f gibt es eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{C}^∞ -Abbildungen von U nach V mit einer globalen Schranke für die Lipschitzkonstante, wobei $f_i \rightarrow f$ gleichmäßig konvergiert. Mit der Homotopieformel sieht man nun

$$|(f_{i\#}T)(\omega) - (f_{j\#}T)(\omega)| \leq c \cdot \sup_{f^{-1}(K) \cap \text{spt}(T)} |f_i - f_j|,$$

falls $K \subset V$, K kompakt und $\text{supp}(\omega) \subset K^\circ$. Folglich ist $(f_{i\#}T)(\omega)$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen, und es existiert also

$$(f_{\#}T)(\omega) := \lim_{i \rightarrow \infty} (f_{i\#}T)(\omega).$$

Man kann zeigen:

- $f_{\#}T \in \mathbf{N}_{k,loc}(V)$.
- Die Definition ist von der Wahl der Folge unabhängig.
- $\partial f_{\#}T = f_{\#}\partial T$.
- $\text{spt}(f_{\#}T) \subset f(\text{spt}(T))$.

4.5 Rektifizierbare Ströme

Definition

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein Strom $T \in \mathcal{D}_k(U)$ heißt rektifizierbar, falls es

- eine \mathcal{H}^k -messbare, abzählbar k -rektifizierbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^k(M \cap K) < \infty$ für $K \subset U$, K kompakt,
- eine \mathcal{H}^k -messbare Abbildung $\xi: M \rightarrow \bigwedge_k \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| = 1$ \mathcal{H}^k -fast-überall auf M und $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ mit $v_i(x) \in \bigwedge_k T_x M$ für \mathcal{H}^k -fast-alles $x \in M$,
- eine \mathcal{H}^k -messbare Funktion $\theta: M \rightarrow [0, \infty]$

gibt, so dass gilt

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega, \xi \rangle \theta d\mathcal{H}^k.$$

- (b) Ist θ sogar ganzzahlig, so heißt ein solcher Strom T ganzzahlig rektifizierbar. Die Menge der ganzzahlig rektifizierbaren Ströme wird mit $\mathcal{R}_k(U)$ bezeichnet.
- (c) T heißt integraler Strom, falls T und ∂T ganzzahlig rektifizierbare Ströme sind. Die Menge der integralen Ströme wird mit $\mathcal{I}_k(U)$ bezeichnet.

Bemerkungen: (1) Übersicht:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_k(U) & \subset & \mathcal{R}_k(U) \\ \cap & & \cap \\ \mathbf{N}_{k,loc}(U) & \subset & \mathbf{M}_{k,loc}(U) \end{array}$$

(2) Sei $T \in \mathcal{R}_k(U)$ und sei θ auf M integrierbar. Dann ist

$$\mathbf{M}(T) = \int_M \theta d\mathcal{H}^k.$$

(3) $\mathcal{I}_k(U) \subset \mathcal{R}_k(U) \cap \mathbf{N}_{k,loc}(U)$. Gilt „ \supset “? Die positive Antwort wird nachfolgenden als Satz formuliert (Randrektifizierbarkeit).

Beispiele

(1) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte k -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$[M] \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n).$$

(2) Sei M wie in (1) und $\mathcal{H}^{k-1}(\partial M) < \infty$. Dann gilt

$$[M] \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n),$$

denn $\partial[M] = [\partial M]$.

(3) $\tilde{T} \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^2)$ sei definiert durch

$$\tilde{T}(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_2(s, 0) ds.$$

Dann ist \tilde{T} nicht 1-rektifizierbar. Aber

$$T(\omega_1 dx + \omega_2 dy) := \int_0^1 \omega_1(s, 0) ds$$

ist 1-rektifizierbar.

(4) Es ist

$$T_j := \sum_{i=1}^j \left[\left\{ -\frac{i}{j} \right\} \times \left[0, \frac{1}{j} \right] \right] \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) \cap \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^2).$$

Es gilt $\mathbf{M}(T_j) = 1$, $\mathbf{M}(\partial T_j) = 2j$, $T_j \xrightarrow{s} \tilde{T}$ für $j \rightarrow \infty$. Wir erhalten so eine Folge integraler Ströme, deren schwacher Limes nicht rektifizierbar ist.

Satz 4.19

(1) (Randrektifizierbarkeit) Sei $T \in \mathcal{R}_k(U)$ und $\mathbf{M}_V(\partial T) < \infty$ für alle $V \subset U$ mit V offen, so dass \bar{V} kompakte Teilmenge von U ist. Dann ist $T \in \mathcal{I}_k(U)$.

(2) (Closure Theorem) Seien $T_j \in \mathcal{R}_k(U)$, $j \in \mathbb{N}$, und

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} (\mathbf{M}_V(T_j) + \mathbf{M}_V(\partial T_j)) < C_V < \infty$$

für alle $V \subset U$ mit V offen, so dass \bar{V} eine kompakte Teilmenge von U ist. Gilt $T_j \xrightarrow{s} T \in \mathcal{D}_k(U)$ für $j \rightarrow \infty$, so ist $T \in \mathcal{R}_k(U)$.

(3) (Kompaktheitssatz) Seien T_j wie in (2). Dann gibt es eine Teilfolge $T_{j'}$ von T_j und $T \in \mathcal{R}_k(U)$ mit $T_{j'} \xrightarrow{s} T$.

Beweis

Idee: Simultaner Beweis von (1) und (2)/(3) durch vollständige Induktion über k . Aus (2)/(3) für $k-1$ und dem Deformationssatz folgt (1) für k . Ferner geht das Konzept „Schnitt eines Stroms“ ein. ■

Polyedrische Ströme Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $[0, \varepsilon]^n + \varepsilon \cdot z$, $z \in \mathbb{Z}^n$ ein kompakter ε -Würfel. Ein k -dimensionaler ε -Würfel ist erklärt als das relative Innere einer k -dimensionalen Seite eines solchen ε -Würfels.

Definition

Ein k -dimensionaler polyedrischer Strom in \mathbb{R}^n der Seitenlänge ε ist ein Strom der Form

$$P := \sum_Q a_Q \llbracket Q \rrbracket,$$

wobei Q ein k -dimensionaler ε -Würfel ist. Ein solcher Strom heißt ganzzahlig polyedrischer, falls $a_Q \in \mathbb{Z}$.

- Bemerkungen:** (1) $\mathbf{M}(P) = \sum_Q |a_Q| \varepsilon^k$
- (2) $\mathbf{M}(\partial P) \leq 2^k \mathbf{M}(P)$. ∂P ist stets polyedrisch.

Satz 4.20 (Deformationssatz)

Es gibt eine Konstante $c = c(n)$, so dass für jedes $T \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein k -dimensionaler polyedrischer Strom P existiert und ferner $R \in \mathbf{N}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathbf{M}_k(\mathbb{R}^n)$ existieren, so dass gilt

$$T = P + \partial R + S$$

mit

- (1) $\mathbf{M}(P) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)$, $\mathbf{M}(\partial P) \leq c \cdot \mathbf{M}(\partial T)$,
- (2) $\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(T)$, $\mathbf{M}(S) \leq c \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T)$,
- (3) $\mathbf{M}(\partial R) \leq c \cdot (\mathbf{M}(T) + \varepsilon \cdot \mathbf{M}(\partial T))$,
- (4) $\text{spt}(P), \text{spt}(R) \subset \text{spt}(T)_{\delta(\varepsilon)}$ und $\text{spt}(\partial P), \text{spt}(\partial R) \subset \text{spt}(\partial T)_{\delta(\varepsilon)}$ mit $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (5) Ist $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, so können P, R als rektifizierbare Ströme gewählt werden. Ist $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$, so kann auch S als rektifizierbarer Strom gewählt werden.

Wir formulieren noch einige Anwendungen:

Satz 4.21 (Schwache Polyedrische Approximation)

Sei $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Folge P_i von polyedrischen Strömen mit $P_i \xrightarrow{s} T$, wobei die Massen der P_i uniform beschränkt sind.

Beweis

Wähle $\epsilon_i := 1/i$ im Deformationssatz. Dann gibt es Ströme P_i, R_i, S_i mit den im Deformationssatz beschriebenen Eigenschaften. Wegen (1) sind die Massen von P_i und ∂P_i uniform beschränkt. Aus $\mathbf{M}(R_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(T) \rightarrow 0$ folgt $R_i \xrightarrow{s} 0$ und daher auch $\partial R_i \xrightarrow{s} 0$. Wegen $\mathbf{M}(S_i) \leq c \cdot \epsilon_i \mathbf{M}(\partial T) \rightarrow 0$ folgt $S_i \xrightarrow{s} 0$. Insgesamt ist also $\partial R_i + S_i \xrightarrow{s} 0$ und daher $P_i \xrightarrow{s} T$. ■

Sei $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq n-1$ und $\text{spt}(T)$ kompakt.

Gibt es $S \in \mathcal{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial S = T$? Notwendige Bedingung: $\partial T = 0$. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie wir schon gesehen haben.

Isoperimetrisches Problem: Finde eine Massenschranke für die „Füllung S“ von T .

Satz 4.22 (Isoperimetrische Ungleichung)

Sei $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$, $\text{spt}(T)$ kompakt. Dann gibt es ein $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{spt}(R)$ kompakt, $\partial R = T$ und

$$\mathbf{M}(R) \leq c \cdot \mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}$$

mit $c = c(n)$.

Beweis

Sei o.B.d.A. $\mathbf{M}(T) \neq 0$. Setze $\epsilon := (2c\mathbf{M}(T))^{1/k}$, wobei c wie im Deformationssatz gewählt wird. Zu T seien P, R, S wie im Deformationssatz gewählt. Wegen (2) und der Voraussetzung folgt $S = 0$. Weiterhin gilt

$$\mathbf{M}(P) \leq c\mathbf{M}(T) = \frac{1}{2}\epsilon^k < \epsilon^k,$$

und daher ist $\mathbf{M}(P) = 0$, das heißt $P = 0$. Somit ist $P = \partial R$ und

$$\mathbf{M}(R) \leq c\epsilon\mathbf{M}(T) = c(2c\mathbf{M}(T))^{1/k}\mathbf{M}(T) = c'\mathbf{M}(T)^{\frac{k+1}{k}}.$$

Zusammen ergibt dies die Behauptung. ■

Schließlich ergeben die zur Verfügung stehenden Sätze auch einen raschen Beweis für eine Lösung des Plateauschen Problems in der Kategorie der Ströme.

Satz 4.23 (Plateau Problem)

Sei $T \in \mathcal{I}_k(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$, $\text{spt}(T)$ kompakt. Dann existiert $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial S = T$, $\text{spt}(S)$ kompakt und

$$\mathbf{M}(S) = \inf\{\mathbf{M}(R) : R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n), \partial R = T\}.$$

Beweis

Zu T existiert ein $R \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = \partial R$ und $\text{spt}(R)$ kompakt (vgl. den Beweis der isoperimetrischen Ungleichung). Da T lokalendliche Masse hat, gilt dies auch für ∂R , so dass der Randrektifizierbarkeitssatz ergibt, dass $R \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist klar, dass sich das Infimum über eine nichtleere Menge erstreckt. Sei R_i , $i \in \mathbb{N}$ eine minimierende Folge. Wegen $\partial R_i = T$ ist die Voraussetzung des Kompaktheitssatzes erfüllt. Es existiert somit ein $S \in \mathcal{R}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = \partial R_i \xrightarrow{s} \partial S$, also $T = \partial S$. Eine erneute Anwendung des Randrektifizierbarkeitssatzes zeigt sogar $S \in \mathcal{I}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Unterhalbstetigkeit der Masse ist auch $\mathbf{M}(S)$ gleich dem Infimum. Durch die Projektion $\pi_{\#}(R_i)$ der Ströme einer minimierenden Folge auf die abgeschlossene, konvexe Hülle von $\text{spt}(T)$ erreicht man, dass auch $\text{spt}(S)$ kompakt ist. ■