

## Kapitel 7

# Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen

Im Folgenden sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Der Erwartungswert von  $X$  ist ein Lebesgue-Integral (allerdings allgemeiner als in Analysis II). Zunächst wird der Erwartungswert für sogenannte Elementare Zufallsvariablen definiert.

**Definition 7.1** Eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **elementar**, falls sie eine Darstellung

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot 1_{A_i}(\omega)$$

besitzt, mit  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .  $M^E$  sei die Menge aller elementaren Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum.

Für  $X \in M^E$  sei das Integral von  $X$  bezüglich  $P$  definiert durch  $\int X dP := \sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i)$

**Bemerkung 7.1** a)  $\int X dP$  ist unabhängig von der gewählten Darstellung von  $X$  (vgl. Analysis II)

b) Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable. Wir führen das Zufallsexperiment  $n$ -mal durch ( $n$  groß). Welchen Wert erhält man im Mittel für  $X$ ? Der Wert  $x_k$  tritt bei dem Experiment  $n_k$ -mal auf ( $\sum_{k=0}^{\infty} n_k = n$ ). Mittelwert:  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} n_k x_k$

Jetzt wird der Integralbegriff erweitert. Sei  $M^+ := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ | X \text{ ist Zufallsvariable}\}$ . Für  $X \in M^+$  betrachte die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$X_n := \sum_{i=0}^{n-2^n} \frac{i}{2^n} 1_{A_i^n} \text{ mit } A_i^n = \begin{cases} \{\frac{i}{2^n} \leq X \leq \frac{i+1}{2^n}\} & , \text{ falls } i = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{X \geq 1\} & , \text{ falls } i = n \cdot 2^n \end{cases}$$

Offenbar ist  $X_n \in M^E$  und  $x_n(\omega) \leq x_{n+1}(\omega) \forall \omega \in \Omega$ . Außerdem gilt  $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$  punktweise  $\forall \omega \in \Omega$ .

$$\int X dP := \lim_{n \rightarrow \infty} \int X_n dP.$$

**Bemerkung 7.2** a) Der Grenzwert existiert wegen der Monotonie

- b) Der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : Sei  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere Folge elementarer Zufallsvariablen, die monoton wachsend gegen  $X$  konvergiert, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int X_n dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int Y_n dP$  (vergleiche Analysis II).

Für eine beliebige Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $X = X^+ - X^-$  wobei  $X^+ = \max\{X, 0\}$  und  $X^- = -\min\{X, 0\}$ , also  $X^+, X^- \in M^+$ .

Wir definieren durch

$$\int X dP = \int X^+ dP - \int X^- dP =: \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) =: EX$$

den **Erwartungswert** von  $X$ .  $X$  heißt integrierbar, falls  $\int X^+ dP < \infty$  und  $\int X^- dP < \infty$ , d.h. wenn  $\int |X| dP < \infty$

**Bemerkung 7.3** a) Für  $A \in \mathcal{A}$  sei  $\int X dP := \int_{\Omega} X 1_A dP$

- b) In Stochastik II wird das Thema weiter vertieft.

### Satz 7.1

Es seien  $X, Y$  Zufallsvariablen mit existierendem Erwartungswert und  $a, b \in \mathbb{R}$

- a) Dann existiert auch  $E(aX + bY)$  und es gilt:

$$E(aX + bY) = aEX + bEY \quad \text{„Linearität“}$$

- b) Gilt  $X \leq Y$ , d.h.  $X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$ , so folgt:

$$EX \leq EY \quad \text{„Monotonie“}$$

**Beweis** vgl. Analysis II ■

**Satz 7.2** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit Verteilung  $P_X$ .  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar (Zufallsvariable). Dann ist (im Falle der Existenz):

$$Eg(X) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g dP_X$$

**Beweis** Sei zunächst  $g \in M^E$ , also  $g(\omega) = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{B_i}(\omega)$  für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $B_i \in \mathcal{B}$  somit  $g(X) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot 1_{A_i}$ ,  $A_i = X^{-1}(B_i)$  und  $\int_{\Omega} g(x) dP = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_X(B_i) = \int_{\mathbb{R}} g dP_X$ .

Falls  $g \geq 0$ , wähle  $\{g_n\} \subset M^E$  mit  $g_n \uparrow g$ . Die Gleichung gilt für jedes  $g_n$ , Grenzübergang liefert die Gleichheit für  $g$ . Falls  $g$  beliebig, betrachte  $g = g^+ - g^- \Rightarrow$  Behauptung. ■

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle dass  $X$  diskret bzw. absolutstetig ist. Hier ergeben sich relativ einfache Formeln.

**Satz 7.3** Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Werten  $x_0, x_1, x_2, \dots$  und Zähldichte  $\{P_X^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ .  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar. Dann existiert  $Eg(X)$ , falls  $\sum_{k=0}^{\infty} |g(x_k)| P_X(k) < \infty$  und es gilt:

$$Eg(X) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) P_X(k)$$

**Beweis** Sei zunächst  $g \in M^E$ , also  $g = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{B_i}$  für  $m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}_+, B_i \in \mathfrak{B}$ . Es gilt (vgl. Beweis vorher):  $Eg(X) = \sum_{i=0}^m \alpha_i P_X(B_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left( \sum_{x_k \in B_i} P_X(k) \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=0}^{\infty} 1_{B_i}(x_k) P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{B_i}(x_k)}_{=g(x_k)} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k) P_X(k)$ . Allgemeines  $g$  wie im Beweis von Satz 7.2

**Beispiel 7.1** Sei  $X \sim B(n, p)$  (binomialverteilt). Dann gilt:

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \\ &= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np \end{aligned}$$

**Satz 7.4** Sei nun  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine absolut stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f_X$ .  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar. Dann existiert  $Eg(X)$ , falls  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$  und es gilt:

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

**Beweis** ähnlich wie in Satz 7.3

**Beispiel 7.2** Sei  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ( $X$  normalverteilt). Also ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma u \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right) du}_{=0 \text{ wg. Symmetrie}} + \mu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right) du}_{=1, \text{ da Dichte}} = \mu \end{aligned}$$

**Definition 7.2** Sei  $X$  eine Zufallsvariable

- a) Ist  $k \in \mathbb{N}$  und existiert  $E|X|^k$ , dann heißt  $EX^k$ ,  **$k$ -tes Moment von  $X$**  und  $E(X - EX)^k$ ,  **$k$ -tes zentriertes Moment von  $X$**
- b) Das zweite zentrierte Moment heißt auch **Varianz** von  $X$ .  
Wir schreiben:  $\text{Var}(X) = E(X - EX)^2$   
 $\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$  heißt **Standardabweichung**

**Bemerkung 7.4** Die Varianz misst die mittlere quadratische Abweichung der Zufallsvariable  $X$  von ihrem Mittelwert.  $\sigma(X)$  hat die gleiche Dimension wie  $X$ .

**Satz 7.5** Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Falls die entsprechenden Größen existieren, gilt:

- a)  $\text{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2$
- b)  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$  für  $a, b \in \mathbb{R}$
- c)  $\text{Var}(X) \geq 0$  und  $\text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = c) = 1$  für ein  $c \in \mathbb{R}$

**Beweis** a)  $\text{Var}(X) = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) \stackrel{\text{Satz 7.2a}}{=} EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

- b) Wir verwenden a):  $\text{Var}(aX + b) = E(aX + b)^2 - (aEX + b)^2 =$   
 $= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - a^2(EX)^2 - 2abEX - b^2 =$   
 $= a^2EX^2 + 2abEX + b^2 - a^2(EX)^2 - 2abEX - b^2 =$   
 $= a^2(EX^2 - (EX)^2) = a^2 \text{Var}(X)$

- c) Da  $0 \leq (X - EX)^2 \stackrel{7.2b}{\Rightarrow} \text{Var}(X) \geq 0$   
 Ist  $X$  diskret, so gilt:  $\text{Var}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - EX)^2 P(X = x_k)$   
 $\text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X$  nimmt nur den Wert  $x_1 = EX$  ( $x_k = EX \forall k \in \mathbb{N}$ ) an.  
 Analog im stetigen Fall. ■

**Beispiel 7.3** Sei  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Bsp. 7.2  $\Rightarrow EX = \mu$

$$\text{Also: } \text{Var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \dots = \sigma^2$$

( $\rightarrow$  Übung)

Die folgende Ungleichung ist wegen ihrer Allgemeinheit nützlich:

**Satz 7.6 (Tschebyscheff-Ungleichung)**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $E|X| < \infty$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X)$$

**Beweis**

Betrachte:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } |x - EX| \geq \varepsilon \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(x - EX)^2$$

Offenbar gilt  $g(x) \leq h(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Also folgt  $g(X) \leq h(X)$  und mit Satz 7.2 b

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = Eg(X) \leq Eh(X) = \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X)$$

