21. Affine Koordinaten und affine Abbildungen

21.1. Grundbegriffe

Definition: Sei A ein affiner Raum mit Richtungs-VRm V der Dimension n.

- (a) Sei \mathcal{B} die Menge aller Basen von V. Ein Paar $\mathcal{K} := (\mathcal{O}, B) \in A \times \mathcal{B}$ heißt affines Koordinatensystem, wobei \mathcal{O} der Ursprung heißt.
- (b) Durch die Koordinatendarstellung $D_B:V\to K^n$ zur Basis B definiert:

$$D_{\mathcal{K}}: A \to K^n, P \mapsto D_B(\overrightarrow{\mathcal{O}P})$$

den Koordinatenvektor $D_{\mathcal{K}}(P)$ von P bezüglich \mathcal{O} .

(c) Die Abbildung $D_{\mathcal{K}}: A \to \mathbb{A}^n(K)$ heißt **Koordinatendarstellung** zum Koordinatensystem \mathcal{K} .

Aufgabe: Was entspricht Homomorphismen von VRmen bei affinen Räumen?

Definition: Seien A, B affine Räume mit Richtungen V, W. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt affine Abbildung oder Morphismus affiner Räume, falls ein $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in V, \forall P \in A : \varphi(x+P) = \Phi(x) + \varphi(P)$$

Schreibe: $\operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(A, B) := \{ \varphi : A \to B \mid \varphi \text{ affin } \}.$

Beispiel: (1) Die Identität $id_A : A \to A$ ist affin mit zugehörigem $\Phi = id_V$.

- (2) Für festes $Q \in B$ ist die konstante Abbildung $\varphi_Q : A \to B, P \mapsto Q$ affin, mit der Nullabbildung als zugehörigem Homomorphismus.
- **Bemerkung:** (1) $\varphi:A\to B$ mit zugehörigem $\Phi\in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists P_0 \in A : \forall x \in V : \varphi(x + P_0) = \Phi(x) + \varphi(P_0)$$

- (2) Ist $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$, so ist der zugehörige Homomorphismus $\Phi =: \Lambda_{\varphi}$ eindeutig bestimmt.
- (3) Die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen ist affin, d.h.:

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(A,B) \times \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(B,C) \to \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(A,C), (\varphi,\psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

- (4) $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ ist genau dann injektiv (bzw. surjektiv), wenn Λ_{φ} injektiv (bzw. surjektiv) ist.
- (5) Ist $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(A, B)$ bijektiv, so existiert $\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(B, A)$.

Definition: Ein bijektives $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ heißt **Isomorphismus affiner Räume** oder **Affinität**.

Ist zusätzlich A = B, so heißt $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(A, A)$ Automorphismus. Diese Automorphismen bilden die Gruppe Aut_{aff}(A), genannt die affine Gruppe von A.

Beweis: (1) Sei $P \in A$ beliebig und $y := \overrightarrow{P_0P}$. Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\varphi(x+P) = \varphi(x+y+P_0)$$

$$= \Phi(x+y) + \varphi(P_0)$$

$$= \Phi(x) + \Phi(y) + \varphi(P_0)$$

$$= \Phi(x) + \varphi(y+P_0)$$

$$= \Phi(x) + \varphi(P)$$

(2) Sei $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ gegeben, dann gilt für alle $P \in A, x \in V$:

$$\varphi(x+P) = \Phi(x) + \varphi(P)$$

 $\Longrightarrow \Phi(x) = \varphi(P)\varphi(x+P)$

Also ist Φ durch φ eindeutig bestimmt.

(3) Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(A,B), \ \psi \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(B,C)$. Dann gilt für alle $P \in A, x \in V$:

$$\psi \circ \varphi(x+P) = \psi(\varphi(x+P))$$

$$= \psi(\Lambda_{\varphi}(x) + \varphi(P))$$

$$= \Lambda_{\psi}(\Lambda_{\varphi}(x)) + \psi(\varphi(P))$$

$$= \Lambda_{\psi} \circ \Lambda_{\varphi}(x) + \psi \circ \varphi(P)$$

Also ist $\psi \circ \varphi$ affin mit zugehörigem Homomorphismus $\Lambda_{\psi \circ \varphi} = \Lambda_{\psi} \circ \Lambda_{\varphi}$.

(4) Es gilt für $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$:

$$\begin{split} \varphi \text{ injektiv} &\iff (\varphi(P) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\ &\iff (\varphi(\overrightarrow{QP} + Q) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\ &\iff (\Lambda_{\varphi}(\overrightarrow{QP}) + \varphi(Q) = \varphi(Q) \implies P = Q) \\ &\iff (\Lambda_{\varphi}(\overrightarrow{QP}) = 0 \implies \overrightarrow{QP} = 0) \\ &\iff \Lambda_{\varphi} \text{ ist injektiv} \end{split}$$

Der Beweis für Surjektivität erfolgt analog.

(5) Leichte Übung!

Satz 28:

Seien A, B affine Teilräume mit Richtungen V, W. Zu $(P_0, Q_0) \in A \times B$ und $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ existiert genau eine affine Abbildung $\varphi : A \to B$ mit $\Lambda_{\varphi} = \Phi$ und $\varphi(P_0) = Q_0$.

Beweis: Es ist $A = V + P_0$. Definiere $\varphi(x + P_0) := \Phi(x) + Q_0$, so ergibt sich nach Bemerkung (1) eine affine Abbildung mit $\varphi(P_0) = Q_0$. Dies legt φ bereits eindeutig fest.

Satz 29:

Die Koordinatenabbildung $D_{\mathcal{K}}: A \to \mathbb{A}^n(K)$ zu einem Koordinatensystem $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, B)$ ist ein affiner Isomorphismus (mit zugehöriger linearer Abbildung $D_B: V \to K^n$).

Beweis: Es gilt:

$$D_{\mathcal{K}}(x+\mathcal{O}) \stackrel{Def.}{=} D_{B}(x)$$

$$= D_{B}(x) + 0$$

$$= D_{B}(x) + D_{\mathcal{K}}(\mathcal{O})$$

Nach Satz 29 existiert genau eine affine Abbildung, die dies tut. Dass es sich bei $D_{\mathcal{K}}$ um eine Isometrie handelt, wurde bereits früher eingesehen, da D_B Isometrie ist.

Korollar:

Affine Räume über festen Körper sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension gleich ist.

Satz 30 (Erhaltung von Teilräumen):

Sei $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ und $C \subseteq A$. Falls C affiner Teilraum mit Richtung $U := U_C$ ist, so ist $\varphi(C) \subseteq B$ affiner Teilraum mit Richtung $\Lambda_{\varphi}(U)$. Ist φ Isomorphismus, so gilt:

- (1) $C \subseteq A$ ist genau dann affiner Teilraum, wenn $\varphi(C) \subseteq B$ affiner Teilraum ist.
- (2) Es gilt dim $C = \dim \varphi(C)$ für jeden affinen Teilraum C.
- (3) Sind $C, C' \subseteq A$ affine Teilräume, so gilt:

$$\varphi([C \cup C']) = [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

und:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

$$(4) C \parallel C' \implies \varphi(C) \parallel \varphi(C')$$

Beweis: Sei $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, B), P \in C$ (d.h. C = U + P). Nach Teilraumkriterium gilt dann:

$$\varphi(C) = \Phi(U) + \varphi(P)$$

Daraus folgt, dass $\varphi(C)$ affiner Teilraum ist.

- (1) Leichte Übung!
- (2) Leichte Übung!
- (3) Sogar für beliebige Teilmengen $C, C' \subseteq A$ gilt, wenn φ bijektiv ist:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

Für alle affinen Teilräume D, die $C \cup C'$ enhalten, gilt:

$$\varphi(D) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Also gilt insbesondere auch für $D := [C \cup C']$:

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Daraus folgt (für jede affine Abbildung, also insbesondere auch für φ^{-1}):

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

Insgesamt folgt:

$$[C \cup C'] \supseteq \varphi^{-1}([\varphi(C) \cup \varphi(C')])$$
$$\supseteq [\varphi^{-1}(\varphi(C)) \cup \varphi^{-1}(\varphi(C'))]$$
$$= [C \cup C']$$

Daraus folgt die Gleichheit.

(4) Leichte Übung!

21.1.1. Grundaufgaben im affinen Standardraum $\mathbb{A}_n(K)$

Seien $P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_s \in K^n$ und $B := [P_0, \ldots, P_m], C := [Q_0, \ldots, Q_s]$ gegeben. Ziel ist es $[B \cup C]$ und $B \cap C$ zu berechnen.

Mit $x_i := \overrightarrow{P_0P_i} = P_i - P_0$ gilt:

$$B = \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

Analog gilt mit $z_j := \overrightarrow{Q_0Q_i} = Q_i - Q_0$:

$$C = \langle z_1, \dots, z_s \rangle + Q_0$$

Daraus folgt dann mit $y := \overrightarrow{P_0Q_0}$:

$$[B \cup C] = \langle x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_s, y \rangle + P_0$$

(1) Finde mit dem Gauß-Algorithmus eine Basis $\{b_1, \ldots, b_r\}$ von U, dann gilt:

$$[B \cup C] = [b_1 + P_0, \dots, b_r + P_0, P_0]$$

mit erzeugenden Punkten in allgemeiner Lage.

(2) Interpretiere B als Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ eines LGS Ax = b. Sei $x_0 = P_0 \in K^n$, dann liefert der Spezialfall B = C in (1):

$$B = U + x_0$$

wobei b_1, \ldots, b_r Basis von U ist.

Ziel ist es nun, eine Matrix $A \in K^{n-r \times n}$ zu finden, mit $U = \text{Kern}(\Lambda_A)$. Dazu betrachte die Matrix:

$$M:=\begin{pmatrix}b_1&\cdots&b_r\end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt rg(M) = r.

Betrachte nun die Rechtsmultiplikation:

$$P_M: K^n \to K^r, y \mapsto yM$$

Dann hat der Kern von ρ_M Dimension n-r und eine Basis aus Zeilenvektoren $\{c_1, \ldots, c_{n-r}\}$. Damit lässt sich nun die Matrix A wie folgt definieren:

$$A := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Da der Rang von A offensichtlich n-r ist, ist die Dimension des Kerns genau r, und es gilt:

$$\forall t \in \{1, \dots, n-r\} : c_t M = 0$$

$$\iff \forall t \in \{1, \dots, n-r\}, j \in \{1, \dots, r\} : c_t \cdot b_j = 0$$

$$\iff \forall j \in \{1, \dots, r\} : Ab_j = 0$$

Also ist U Unterraum von $\operatorname{Kern}(\Lambda_A)$ und aus der Gleichheit der Dimensionen beider Räume folgt dann:

$$B = \mathcal{L}(A, b)$$

(3) Durchschnittsberechnung:

Finde mit Hilfe von (2) Matrizen A, A' und $b, b' \in K^n$, sodass $B = \mathcal{L}(A, b), C = \mathcal{L}(A', b')$ ist. Dann gilt:

$$B \cap C = \mathcal{L}(D, d)$$
 mit $D := \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$

Es genügt nun das LGS Dx = d zu lösen, um $B \cap C$ zu erhalten.

Beispiel: Betrachte den affinen Raum $\mathbb{A}_3(\mathbb{F}_2) = \{0,1\}^3$. Gegeben seien die Ebenen:

$$E := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [e_1, e_2, 0]$$

$$F := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3]$$

Zur Bestimmung von $E \cap F$ werden zunächst die zu E und F gehörigen Gleichungssysteme aufgestellt:

$$E = \{x \in \mathbb{F}_2^3 \mid x_3 = 0\} = \mathcal{L}((0, 0, 1), 0)$$
$$F = \text{Kern}(\Lambda_{(0,1,0)}) + \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}((0,1,0), 1)$$

Daraus folgt:

$$E \cap F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \{e_2, e_1 + e_2\}$$

Satz 31 (Satz von Pappos):

In einem affinen Raum A mit Dimension 2 seien G, G' verschiedene Geraden mit $G \cap G' = \{O\} \in A$. Ferner seien $P_1, P_2, P_3 \in G \setminus \{O\}$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in G' \setminus \{O\}$, sodass gilt:

$$P_1Q_3 \parallel P_3Q_1$$
 und $P_1Q_2 \parallel P_2Q_1$

Daraus folgt:

$$P_2Q_3 \parallel P_3Q_2$$

Beweis: Da $Q_3 \notin G$ ist, sind O, P_1, Q_3 in allgemeiner Lage. Daraus erhalten wir folgendes Koordinatensystem:

$$\mathcal{K} := (O, \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OQ_3}\})$$

Da die Koordinatendarstellung $D_{\mathcal{K}}: A \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_2(K)$ Parallelitäten und Schnittpunkte erhält, können wir o.B.d.A annehmen:

$$A = \mathbb{A}_2(K) \text{ und } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$P_{1} = \overrightarrow{OP_{1}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{2} = \begin{pmatrix} \lambda_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{3} = \begin{pmatrix} \lambda_{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{3} = \overrightarrow{OQ_{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q_{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_{2} \end{pmatrix} \qquad Q_{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_{3} \end{pmatrix}$$

Wobei $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3 \neq 0$ sind. Daraus folgt für die Richtungen:

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\} : U_{P_i Q_j} = \langle \overrightarrow{P_i Q_j} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \lambda_i \\ -\mu_j \end{pmatrix} \rangle$$

$$\implies U_{P_1 Q_3} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Nach Vorraussetzung ist $\lambda_3 = \mu_1$ und es existiert ein $\rho \in K^{\times}$, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\mu_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt mit $\lambda_3 = \rho \mu_2 = \lambda_2 \mu_2$:

$$U_{P_2Q_3} = \langle \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\mu_3 \end{pmatrix} \rangle$$
$$= \langle \begin{pmatrix} \lambda_2 \mu_2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \rangle$$
$$= \langle \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \rangle$$
$$= U_{P_3Q_2}$$

Also sind P_2Q_3 und P_3, Q_2 parallel.

21.2. Koordinatenwechsel und Darstellung affiner Abbildungen

Lemma:

Seien $\mathcal{K} = (O, B)$ und $\mathcal{L} = (Q, C)$ Koordinatensysteme des affinen Raums A mit Richtung V. Sei $M_{CB} := D_{CB}(\mathrm{id}_V)$ die Basiswechselmatrix.

Dann rechnen sich Koordinaten eines Punktes P bzgl. $\mathcal K$ in die Koordinaten bzgl. $\mathcal L$ wie folgt um:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q))$$

Beweis: Es gilt:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = D_{C}(\overrightarrow{QP})$$

$$= M_{CB} \cdot D_{B}(\overrightarrow{QP})$$

$$= M_{CB} \cdot D_{B}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})$$

$$= M_{CB} \cdot (D_{B}(\overrightarrow{OP}) - D_{B}(\overrightarrow{OQ}))$$

$$= M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q))$$

Anwendung: Ist ein beliebiges Koordinatensystem $\mathcal{L} = (Q, B)$ gegeben, so lässt sich ein Punkt P einfach in das Koordinatensystem $\mathcal{K} = (0, S)$ von $\mathbb{A}_n(K)$ mit Standardbasis S überführen. Schreibe dazu B als:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in K^{(n \times n)}$$

Dann ist $M_{SB} = B$ und es gilt:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{BS}(P - Q) = B^{-1}(P - Q)$$

Lemma:

(1) Die Abbildung $\psi: K^n \to K^m$ ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists A \in K^{m \times n}, a \in K^m : \Psi(x) = Ax + a$$

Schreibe daher kurz: $\psi =: (A, a)$

(2) Ist ferner $C \in K^{t \times m}, c \in K^t$, so gilt:

$$(C,c) \circ (A,a) = (CA, Ca + c)$$

(3) Ist m = n und $A \in GL_n(K)$, so ist (A, a) bijektiv und es gilt:

$$(A,a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$$

Beweis: (1) Die Abbildung ψ ist genau dann affin, wenn ein $\Lambda_{\varphi} = \Lambda_A \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{aff}}(K^n, K^m)$ für ein $A \in K^{m \times n}$, sodass gilt:

$$\psi(x) = \psi(x+0) = \Lambda_{\varphi}(x) + \psi(0)$$

Die Behauptung folgt mit $a := \psi(0)$.

(2) Leichte Übung!

(3) Leichte Übung!

Definition: Seien A, A' affine Räume mit Koordinatensystemen $\mathcal{K} = (O, B), \mathcal{K}' = (O', B')$ und zugehörigen Koordinatenisomorphismen $D_{\mathcal{K}}, D_{\mathcal{K}'}$. Definiere:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) := D_{\mathcal{K}'} \circ \varphi \circ D_{\mathcal{K}}^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(K^n, K^m)$$

Lemma:

Es gilt:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) = (D_{B'B}(\Lambda_{\varphi}), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))$$

Beweis: Sei $P \in A$ beliebig, so entspricht es $D_{\mathcal{K}}(P) \in K^n$. Dann gilt:

$$\begin{split} D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)(D_{\mathcal{K}}(P)) &\overset{Def.}{=} D_{\mathcal{K}'}(\varphi(P)) \\ &\overset{Def.}{=} D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\ &= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + \overrightarrow{D_{B'}(\varphi(O)\varphi(P)}) \\ &= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + D_{B'}(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\ &= D_{B'B}(\Lambda_{\varphi}) \cdot D_{B}(\overrightarrow{OP}) + D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) \\ &= (D_{B'B}(\Lambda_{\varphi}), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))(D_{\mathcal{K}}(P)) \end{split}$$

Da also beide Abbildungen auf einen beliebigen Punkt P die selbe Wirkung haben, müssen sie gleich sein.

Bemerkung: Das Zusammenfügen von kommutativen Diagrammen liefert für einen weiteren affinen Raum A'' mit Koordinatensystem $\mathcal{K}'' = (O'', B'')$ und einer affinen Abbildung $\Psi: A' \to A''$:

$$D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}}(\psi \circ \varphi) = D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}'}(\psi) \circ D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)$$

Korollar:

(1) Speziell für eine affine Abbildung $\varphi: A \to A$ und zwei Koordinatensysteme \mathcal{K}, \mathcal{L} gilt:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{L}\mathcal{K}}(\mathrm{id}) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\mathrm{id})$$

(2) Insbesondere gilt für $\varphi = id$:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi)$$

(3) Für $\mathbb{A}_n(K)$ mit Standardkoordinatensystem $\mathcal{K} = (0, S)$, sei $D_{\mathcal{KL}}(\mathrm{id}) =: (M, b)$. Dann gilt für $\varphi = (A, a) = D_{\mathcal{KK}}(\varphi)$:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = (M^{-1}AM, M^{-1}((A-I)b + a))$$

Beweis: (1) Folgt aus zweimaligem anwenden der obigen Bemerkung.

- (2) Folgt aus (1).
- (3) Es gilt:

$$D_{\mathcal{LK}}(\mathrm{id}) = (M, b)^{-1} = (M^{-1}, -M^{-1}b)$$

Der restliche Beweis ergibt sich aus (1).

21.3. Geometrische Eigenschaften von affinen Abbildungen

Wir haben gesehen, dass Koordinaten für den Umgang mit affinen Abbildungen **nützlich** sind. Nun stellen wir die Frage, inwiefern Koordinaten **nötig** sind, d.h. welche Eigenschaften von der Koordinatenwahl abhängen.

Definition: Sei A affiner Raum und $\varphi \in \text{Hom}_{\text{aff}}(A, A)$.

(a) $P \in A$ heißt **Fixpunkt** von φ , falls gilt:

$$\varphi(P) = P$$

(b) Ein affiner Teilraum $\emptyset \neq B \subseteq A$ heißt **Fixraum** von φ , falls gilt:

$$\varphi(B) \subseteq B$$

(c) Ein Untervektorraum U des Richtungsvektorraums U_A heißt **Fixrichtung** von φ , falls gilt:

$$\Lambda_{\varphi}(U) \subseteq U$$

Beispiel: (1) Sei $x \in V := U_A$ fest und eine **Translation**

$$\varphi = \tau_x : A \to A, P \mapsto x + P$$

gegeben, dann gilt:

- (a) Für alle $U \leq V$ ist U Fixrichtung, da $\Lambda_{\varphi} = \mathrm{id}_{V}$ ist.
- (b) Für $x \neq 0$ existieren keine Fixpunkte.
- (c) Für eine Fixgerade G muss gelten:

$$\varphi(G) = x + G \subseteq G$$

$$\iff x \in U_G$$

Also ist die Menge aller Fixgeraden für $X \neq 0$:

$$\{Kx + P \mid P \in A\}$$

Beachte dass eine Fixgerade hier keinen Fixpunkt enthält.

(2) Seien $\mu \in K \setminus \{0\}$ und $P \in A$ fest und eine **Streckung**

$$\varphi: A \to A, x + P \mapsto \mu x + P$$

mit Zentrum P und Streckungsfaktor μ gegeben.

Da im Fall $\mu = 1$ $\varphi = \mathrm{id} = \tau_0$ gilt, wollen wir im Folgenden $\mu \neq 1$ annehmen.

- (a) Die Menge der Fixpunkte ist gleich $\{P\}$.
- (b) Für alle $U \leq V$ ist U Fixrichtung.
- (c) Fixgeraden sind genau die Geraden, die P enthalten.

Lemma:

Für $A \in K^{n \times n}$, $a \in K^n$ und $\varphi = (A, a)$ gilt:

- (1) Die Fixpunkte bilden den affinen Teilraum $\mathcal{L}(A-I,-a)$.
- (2) Genau dann, wenn 1 kein Eigenwert von A ist, ist die Menge der Fixpunkte einelementig.
- (3) B ist genau dann Fixraum von φ , wenn U_B Fixrichtung ist und ein Punkt $P \in B$ mit $\varphi(P) \in B$ existiert.

Beweis: (1) Es ist $\varphi = Ax + a$, also gilt:

$$\varphi(x) = x \iff Ax + a = x$$

$$\iff Ax - x = -a$$

$$\iff (A - I)x = -a$$

$$\iff x \in \mathcal{L}(A - I, -a)$$

(2) Ist 1 kein Eigenwert von φ , so existiert $(A-I)^{-1}$, daraus folgt für einen Fixpunkt x:

$$x = (A - I)^{-1}(-a)$$

Also ist x eindeutig bestimmt.

(3) B = U + P ist genau dann Fixraum, wenn gilt:

$$\varphi(B) \subseteq B \iff \varphi(U+P) \subseteq U+P=B$$

$$\iff \Lambda_{\varphi}(U)+\varphi(P) \subseteq U+P$$

$$\iff \varphi(P) \in B \land \Lambda_{\varphi}(U) \subseteq U$$

Also ist U Fixrichtung.

21.4. Geometrische Charakterisierung von Affinitäten

Definition: Sei A ein affiner Raum mit einer (nicht notwendigerweise affinen) Abbildung φ : $A \to A$. φ heißt **geradentreu**, wenn für $G \subseteq A$ gilt:

$$G$$
 Gerade $\iff \varphi(G)$ Gerade

Beispiel: (1) Affinitäten sind geradentreu.

(2) Die Abbildung:

$$\varphi: \mathbb{A}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}_2(\mathbb{C}), (\alpha, \beta) \mapsto (\overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

ist geradentreu, aber **nicht** affin.

Lemma:

Sei A ein affiner Raum über $K \neq \mathbb{F}_2$ und sei $\varphi : A \to A$ bijektiv und geradentreu.

Dann gilt für $O,P,Q\in A: \varphi([P,Q])=[\varphi(Q),\varphi(P)]$ und $\varphi([O,P,Q])=[\varphi(O),\varphi(P),\varphi(Q)].$

Falls $\dim(A) = 2$, so gilt:

- (1) Sind $P \neq Q$ Fixpunkte von φ , so folgt: G := [P, Q] ist Fixgerade
- (2) Sind $H \not\parallel G$ Fixgeraden, so folgt: $H \cap G = \{Q\}$ mit Fixpunkt Q.
- (3) Ist G Fixgerade und P Fixpunkt, so folgt: H mit $H \parallel G \land P \in H$ ist Fixgerade.

Vorbemerkung: Auch φ^{-1} ist geradentreu

$$\underbrace{\varphi^{-1}(G)}_{=:L}$$
 Gerade $\iff \underbrace{\varphi(L)}_{=:G}$ Gerade

Beweis: Ohne Einschränkung sei $P \neq Q$.

Aus φ geradentreu folgt

$$\varphi([P,Q])$$
 Gerade $\ni \varphi(P), \varphi(Q) \supseteq [\varphi(P), \varphi(Q)]$

Daraus folgt die Gleichheit, da die Dimension gleich ist.

Behauptung: $B := \varphi([O, P, Q])$ ist ein affiner Teilraum.

Wende das Teilraumkriterium an

[Sei
$$\varphi(R), \varphi(S) \in B$$
 mit $R, S \in [O, P, Q]$, dann folgt $[\varphi(R), \varphi(S)] = \varphi([R, S]) \subseteq B$] und $B \supseteq [\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)]$

$$=: O' =: P' =: O'$$

Gleicher Schluss für vp^{-1} :

$$\varphi^{-1}([O', P', Q']) \supseteq [\varphi^{-1}(O'), \varphi^{-1}(P'), \varphi^{-1}(Q')] = [O, P, Q]$$

Wende φ an:

$$[O', P', Q'] \supseteq \varphi([O, P, Q]) = B$$

Damit folgt die Gleichheit.

Speziell für dim A=2:

(1) Für G := [P, Q] gilt:

$$\varphi(G) = [\varphi(P), \varphi(Q)] = [P, Q] = G$$

(2) $G \not \mid H, G \cap H =: \{Q\}$; dann folgt

$$\{\varphi(Q)\} = \varphi(G \cap H) \subseteq \varphi(G) \cap \varphi(H) = G \cap H$$

Daraus folgt $\{\varphi(Q)\}\subseteq G\cap H=\{Q\}$, also $\varphi(Q)=Q$.

(3) Fall $P \in G$: also H = G. Fertig. Fall $P \notin G$:

$$H \parallel G \implies H \cap G = \varnothing \overset{\varphi \text{ bij.}}{\Longleftrightarrow} \varphi(H) \cap \underbrace{\varphi(G)}_{G} = \varnothing \implies \varphi(H) \parallel G$$

Aus
$$P = \varphi(P) \in \varphi(H)$$
 folgt $H = \varphi(H)$.

Satz 32:

(1) Sei A ein affiner Raum mit dim A > 1 über dem Körper $K = \mathbb{F}_p \ (p > 2)$ oder $K = \mathbb{Q}$. Für eine Abbildung $\varphi : A \to A$ gilt:

 φ Affinität $\iff \varphi$ bijektiv und geradentreu

(2) Sei K ein Körper mit Teilkörper \mathbb{Q} , n > 1. Ist $\varphi : K^n \to K^n$ bijektiv und geradentreu mit $\varphi(0) = 0$, so folgt: φ ist \mathbb{Q} -linear.

Beweis: (1) " \Longrightarrow ": bekannt \checkmark

" \Leftarrow ": Wähle Koordinatensystem $\mathcal{K}=(0,B)$ und $\mathcal{L}=(\varphi(0),B)$. Schachtele mit den affinen Bijektionen $D_{\mathcal{K}}^{-1}$ und $D_{\mathcal{L}}$ zu

$$\tilde{\varphi} := D_{\mathcal{L}} \circ \varphi \circ D_{\mathcal{K}}^{-1} : K^n \to K^n \quad (\text{mit } \tilde{\varphi}(0) = 0)$$

Es gilt: φ ist geradentreu, bijektiv (bzw. Affinität) genau dann, wenn $\tilde{\varphi}$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Daher gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\varphi: K^n \to K^n$ und $\varphi(0) = 0$.

 $(1) \land (2)$ Restbehauptung: Für $K_0 := \mathbb{F}_p$ oder \mathbb{Q} gilt: φ ist K_0 -linear.

Zu zeigen: Für $P, Q \in K^n$, $\lambda \in K_0$ gilt: $\varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$, $\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$ Oder: Auf $U_0 := K_0 P + K_0 Q$ ist $\varphi|_{U_0} K_0$ -linear.

Dies ist leicht zu reduzieren auf den Fall: P, Q sind linear unabhängig: O := 0, P, Q in allgemeiner Lage, E := [O, P, Q] ist Ebene mit zwei verschiedenen Geraden $[O, P], [O, Q] \subseteq E$.

Mit φ geradentreu und bijektiv folgt: $[\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)] = \varphi(E) \supseteq 2$ verschiedene Geraden; daraus folgt $\varphi(E)$ ist Ebene, also $\{\underbrace{\varphi(0)}, \varphi(P), \varphi(Q)\}$ in allgemeiner Lage,

d.h. $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ sind linear unabhängig.

Daraus folgt: es existiert $\rho \in \operatorname{Aut}(K^n)$ mit $\rho(P)\varphi(P)$, $\rho(Q) = \varphi(Q)$

Beachte: $\Psi|_{U_0} := \rho^{-1} \circ \varphi|_E : E \to E$ ist bijektiv, geradentreu und hat mindestens die Fixpunkte O, P, Q.

Zeige: $\Psi|_{U_0} = \operatorname{id}$ ($\leadsto \varphi|_{U_0}$ ist K_0 -linear; mit anderen Worten: U_0 besteht aus Fixpunkten von Ψ) **1. Schritt:** Für alle $n \in \mathbb{N} : nP$ Fixpunkte von Ψ (mit vollständiger Induktion)

 $n = 0, 1: \checkmark$

 $n-1 \to n$: Falls (n-1)P = 0, so ist nP = P Fixpunkt. Fertig. Falls $R := (n-1)P \neq 0$ Fixpunkt ist, dann folgt nach Lemma: die parallelen Geraden $G_1 \parallel [O, Q]$ mit $R \in G_1$ und $G_2 \parallel [O, P]$ mit $Q \in G_2$ sind Fixgeraden G_i und $G_1 \cap G_2 = \{R + Q\}$ ist Fixpunkt. Damit und mit [Q, P] Fixgerade folgt, dass eine parallele Gerade G_3 durch R + Q Fixgerade ist.

Also ist

$$(R + Q + K(P - Q)) \cap K \cdot P = G_3 \cap [O, P] = \{nP\}$$

ein Fixpunkt.

Analog: für alle $m \in \mathbb{N}$: mQ ist Fixpunkt.

2. Schritt: $K_0 \cdot P$ (und analog $K_0 \cdot Q$) besteht aus Fixpunkten.

Fall $K_0 = \mathbb{F}_p$: Fertig nach dem ersten Schritt, da $\mathbb{F}_p = \{n - 1_{\mathbb{F}_p} \mid n \in \mathbb{N}\}$ Fall $K_0 = \mathbb{Q}$: Seien m n > 0 in \mathbb{N} . [mQ, nP] ist Fixgerade.

Die Parallele G_4 durch Q ist Fixgerade

$$G_4 = K \cdot (mQ - nP) + Q$$

Daraus folgt: $G_4 \cap [O, P] =: \{S\}$ ist Fixpunkt mit $S = \frac{n}{m}P$. Ferner ist -S Fixpunkt, denn:

$$\{S+Q\} = \underbrace{(K \cdot Q + S)}_{\parallel [O,Q]} \cap \underbrace{(K \cdot S + Q)}_{\parallel [O,S]}$$

Beides sind Fixgeraden, also ist $\{S+Q\}$ Fixpunkt

$$\{-S\} = [O,S] \cap (K \cdot (S+Q) + Q)$$

3. Schritt: Zu zeigen: für alle $T \in U_0$: T ist Fixpunkt

$$\exists \alpha, \beta \in K_0 : T = \alpha P \beta Q$$

$$\{T\} = \underbrace{(KP + \underbrace{\beta Q}_{Fixpunkt}) \cap (KQ + \underbrace{\alpha P}_{Fixpunkt})}_{\parallel [O,P]}$$