2 Konvergenz von Folgen

2.1 Einfache Eigenschaften

Definition 2.1. Eine Abbildung $A : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt *Folge*. Man schreibt a_n statt $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ oder (a_n) statt A. Wenn $a_n \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}$, so heißt (a_n) *reelle Folge*.

Definition 2.2. Seien (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{C}$. (a_n) *konvergiert* gegen a, wenn es zu jeden $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$, wobei $n \in \mathbb{N}$, also

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

a heißt dann *Grenzwert* (oder *Limes*) von (a_n) und man schreibt „$a = \lim_{n\to\infty} a_n$“ oder „$a_n \to a$ für $n \to \infty$“. Wenn (a_n) keinen Grenzwert hat, so heißt (a_n) *divergent* (div.).

Bemerkung. $|a_n - a| \leq \varepsilon \iff a_n \in \overline{B}(a, \varepsilon) \iff$ Abstand von a_n und a ist kleiner als ε

Bemerkung. Wenn $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann heißt (a_n) Nullfolge (NF). Somit $a_n \to a$ für $n \to \infty \iff (|a_n - a|)_{n\geq 1}$ ist Nullfolge.

Beispiel 2.3. (Sei stets $n \in \mathbb{N}$)

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $a_n = z\, \forall n$.
Behauptung. $a_n \to z$ $(n \to \infty)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wähle $N_\varepsilon = 1$. Sei $n \geq N_\varepsilon = 1$. Dann $|a_n - z| = 0 < \varepsilon$. □

b) Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p > 0$ und $a_n = n^{-p}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots)$.
Behauptung. $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ (speziell für $p = 1$: $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wähle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon \geq \varepsilon^{-\frac{1}{p}}$ (N_ε existiert nach Satz 1.20). Sei $n \geq N_\varepsilon$. Dann:

$$|a_n - 0| = n^{-p} \overset{1.264}{\leq} N_\varepsilon^{-p} \overset{1.264}{\leq} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}\right)^{-p} = \varepsilon.$$

□

c) Sei $a_n = (-1)^n$.
Behauptung. Diese Folge ist divergent.

Beweis. Zu zeigen: $\forall a \in \mathbb{C}\, \exists \varepsilon_a > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n = n_{a,N} \geq N : |a_N - a| > \varepsilon_a$.

1. Fall: $a = 1$. Wähle $\varepsilon_1 = 1$. Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Sei $n \geq N$ ungerade. Dann $|a_n - a| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \varepsilon_1$.
2. Fall: $a = -1$ genauso.
3. Fall: $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Wähle $\varepsilon_a = \frac{1}{2} \min\{|1-a|, |-1-a|\} > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Wähle $n = N$. Dann
$$|a_n - a| = \begin{cases} |1-a|, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ |-1-a|, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} > \varepsilon_a.$$

□

Satz 2.4. *Die Folge (a_n) konvergiere gegen $a \in \mathbb{C}$. Dann gelten:*

a) (a_n) ist beschränkt, d.h. $\exists M \geq 0 : |a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Wenn $a_n \to b$ für $n \to \infty$ und $b \in \mathbb{C}$, dann $a = b$.

Beweis. a) Wähle $\varepsilon = 1$. Nach Def. 2.2 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq 1$, $\forall n \geq N$

$$\implies |a_n| = |a_n - a + a| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|, \forall n \geq N$$
$$\implies |a_n| \leq \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\} =: M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Vorraussetzung und Def. 2.2 existieren $N_{\varepsilon,a} \in \mathbb{N}$ und $N_{\varepsilon,b} \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| \leq \varepsilon \,\forall n \geq N_{\varepsilon,a}$ und $|a_n - b| \leq \varepsilon \,\forall n \geq N_{\varepsilon,b}$. Setze $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\}$. Dann

$$0 \leq |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a - a_n| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon$$

(nach obiger Abschätzung). Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $|a - b| = 0$, also $a = b$ (siehe Satz 1.203)

□

Beispiel 2.5. Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p > 0$ und $a_n = n^p$ für $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung. (a_n) ist unbeschränkt, also divergent nach Satz 2.41

Beweis. Ann.: Es existiere ein $M \geq 0$ mit $a_n = n^p \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N} \overset{1.264}{\implies} n \leq M^{\frac{1}{p}} \,\forall n \in \mathbb{N}$
$\implies ↯$ Satz 1.20 □

Bemerkung 2.6. a) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Es gebe ein $a \in \mathbb{C}$ und eine Konstante $c > 0$, sodass:
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq c\varepsilon \tag{$*$}$$

Behauptung. Dann $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beweis. Setze $\eta = c\varepsilon \iff \varepsilon = \frac{\eta}{c}$. Setze $N_\eta = N_\varepsilon$. Dann liefert $(*)$:

$$\forall \eta > 0\, \exists N_\eta \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_\eta : |a_n - a| \leq \eta$$

□

Vorsicht: c darf *nicht* von n, ε abhängen!

b) Für $n_0 \in \mathbb{Z}$ setze $J(n_0) = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$. Eine Abbildung $A : J(n_0) \to \mathbb{C}$ bezeichnet man auch als Folge. Man schreibt wieder a_n statt $A(n)$ und $(a_n)_{n \geq n_0}$ statt A. Die Konvergenz von $(a_n)_{n \geq n_0}$ definiert man wie in Def. 2.2, wobei man zusätzlich $N_\varepsilon \geq n_0$ fordert. Indem man $b_n := a_{n+n_0-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ setzt, erhält man eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit Indexbereich $J(n_0)$. Offenbar konvergiert $(a_n)_{n \geq n_0}$ genau dann, wenn $(b_n)_{n \geq 1}$ konvergiert, und die jeweiligen Grenzwerte sind gleich. Somit können wir uns weiterhin auf den Fall $n_0 = 1$ beschränken.

Satz 2.7. *Seien $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ Folgen und $a, b \in \mathbb{C}$. Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann:*

a) $a_n + b_n \to a + b$ für $n \to \infty$

b) $a_n \cdot b_n \to ab$ für $n \to \infty$ (speziell $ab_n \to ab$ für $n \to \infty$)

c) Wenn $a \neq 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und es gilt $\dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a}$ für $n \to \infty$ $(n \geq N)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) gegeben. Nach Voraussetzung:

$$\exists N_{\varepsilon,a} \in \mathbb{N}, N_{\varepsilon,b} \in \mathbb{N}, \text{sodass } |a_n - a| \leq \varepsilon\, \forall n \geq N_{\varepsilon,a} \text{ und } |b_n - b| \leq \varepsilon\, \forall n \geq N_{\varepsilon,b} \tag{2.1}$$

Setze $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\}$. Sei $n \geq N_\varepsilon$.

a) $$|a_n + b_n - (a+b)| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - b| + |b_n - b| \overset{(2.1)}{\leq} 2\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{\text{Bem 2.6}} \text{Beh. a)}$$

b) $$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b + a(b_n - b)| \overset{\triangle\text{-Ungl., 1.28}}{\leq} |a_n - a| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M \text{ nach 2.4}} + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$\overset{(2.1)}{\leq} (M + |a|) \cdot \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \xRightarrow{\text{Bem 2.6}} \text{Beh. b)}$$

c) Sei $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$ (da $a \neq 0$). Sei $N = N_{\varepsilon_0,a} \in \mathbb{N}$ aus (2.1). Dann gilt für $n \geq N$:

$$|a_n| = |a + a_n - a| \overset{1.288}{\geq} |a| - |a_n - a| \overset{(2.1)}{\geq} |a| - \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0 \implies \text{erste Beh.}$$

Setze $\widetilde{N_\varepsilon} = \max\{N_\varepsilon, N\}$. Sei $n \geq \widetilde{N_\varepsilon}$. Dann:

$$\left|\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n}\right| \overset{1.288}{=} \frac{|a - a_n|}{|a| - |a_n|} \overset{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} \quad (\forall n \geq \widetilde{N_\varepsilon}).$$

$\implies$ Beh. c).

□

Beispiel 2.8.
$$a_n = \frac{3n^2+2n}{5n^2+4n+i}$$

Behauptung. $a_n \to \frac{3}{5}$ für $n \to \infty$

Beweis.
$$a_n = \frac{3+\frac{2}{n}}{5+\frac{4}{n}+\frac{i}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Bsp. 2.3: $3 \to 3$, $5 \to 5$, $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Satz 2.7: Zähler $\to 3 + 2 \cdot 0 = 3$, Nenner $\to 5 \neq 0$ $(n \to \infty)$ $\xRightarrow{\text{Satz 2.73}}$ $a_n \to \frac{3}{5}$ für $n \to \infty$ ☐

Satz 2.9. *Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$. Dabei sei $a, b \in \mathbb{R}$ (dies gilt stets gemäß Satz 2.11). Sei $n_0 \in \mathbb{N}$.*

a) Wenn $a_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$, dann $a \leq b$.

b) Wenn $a_n \leq c_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$ und $a = b$, dann $c_n \to a$ für $n \to \infty$ („Sandwichprinzip“).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wie in (2.1) existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass
$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \ |b_n - b| \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_\varepsilon \tag{$*$}$$

Sei $n \geq \max\{N_\varepsilon, n_o\}$.

a)
$$a - b = a - a_n + \underbrace{a_n - b_n}_{\leq 0 \text{ (n.V.)}} + b_n - b \leq |a - a_n| + |b - b_n| \overset{(*)}{\leq} 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $a - b \leq 0$ (Wenn $a - b > 0$ wäre, dann folgte ↯ mit Satz 1.203) $\Longrightarrow a \leq b$.

b)
$$|c_n - a| = \begin{cases} c_n - a \overset{\text{n.V.}}{\leq} b_n - a \leq |b_n - a| & \text{für } c_n \geq a \\ a - c_n \overset{\text{n.V.}}{\leq} a - a_n \leq |a_n - a| & \text{für } c_n < a \end{cases}$$
$$\overset{(*)}{\leq} \varepsilon \text{ für } n \geq \max\{N_\varepsilon, n_0\}, \text{ da } a = b \qquad \Longrightarrow c_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

☐

Beispiel 2.10. *Behauptung.* Sei $q > 0$. Dann $a_n := q^{\frac{1}{n}} \to 1$ für $n \to \infty$.
$(a_n) = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \dots)$

Beweis. a) Sei zuerst $q \geq 1$. Dann $a_n \geq$ nach Satz 1.264. Weiter:

$$q = a_n^n = \Big(1 + \underbrace{(a_n + 1)}_{>-1}\Big)^n \overset{\text{Bernoulli-U.}}{\geq} 1 + n\,(a_n - 1)$$

$$\implies 0 \leq a_n - 1 \leq \frac{q-1}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(nach Bsp. 2.3, Satz 2.7) $\implies$ nach Satz 2.92 $a_n - 1 \to 0 \implies a_n \to 1$ für $n \to \infty$.

b) Sei nun $0 < q < 1$. Dann $\frac{1}{q} > 1$ und $\frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ nach Teil a). Nach Satz 2.73 $\implies a_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$.

□

Satz 2.11. *Sei (a_n) eine Folge. Dann:*

a) Sei zusätzlich $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann gelten $\overline{a_n} \to \overline{a}$, $\operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$, $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$, $|a_n| \to |a|$ (jeweils für $n \to \infty$). Wenn zusätzlich (a_n) reell ist, dann ist $a \in \mathbb{R}$.

b) Es gelte $\operatorname{Re} a_n \to b$ und $\operatorname{Im} a_n \to c$ für $n \to \infty$. Dann $a_n \to b + ic$ für $n \to \infty$.

Beweis. a) $0 \leq |\overline{a_n} - \overline{a}| \overset{1.28}{=} |\overline{a_n - a}| \overset{1.28}{=} |a_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$. Satz 2.92 $\implies$ $|\overline{a_n} - \overline{a}| \to 0 \implies \overline{a_n} \to \overline{a}$ für $n \to \infty$. $\implies \operatorname{Re} a_n \overset{1.28}{=} \frac{1}{2}(a_n + \overline{a_n}) \to \frac{1}{2}(a + \overline{a}) = \operatorname{Re} a$ für $n \to \infty$. Entsprechend $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$ (verwende in beiden Fällen Satz 2.7). Ferner $||a_n| - |a|| \overset{1.28}{\leq} |a_n - a| \overset{\text{n.V.}}{\to} 0$ $(n \to \infty)$. Satz 2.92 $\implies |a_n| \to |a|$ für $n \to \infty$. Wenn $a_n \in \mathbb{R}$, dann $\operatorname{Im} a_n = 0 \implies \operatorname{Im} a = 0$.

b) $0 \leq |a_n - (b + ic)| = |(\operatorname{Re} a_n - b) + i(\operatorname{Im} a_n - c)| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |\operatorname{Re} a_n - b| + |\operatorname{Im} a_n - c| \to 0$, n. V. $(n \to \infty)$. Satz 2.92 $\implies$ Beh. b)

□

2.2 Monotone Folgen

Definition 2.12. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine reelle Folge.

a) (a_n) *wächst* (*strikt*), wenn $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) (a_n) *fällt* (*strikt*), wenn $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) (a_n) ist (*strikt*) *monoton*, wenn (a_n) (strikt) wächst oder (strikt) fällt.

Bemerkung. (a_n) wächst (strikt) $\iff (-a_n)$ fällt (strikt)

Beispiel 2.13. a) Sei $0 < p \in \mathbb{Q}$. Dann fällt $a_n = n^{-p}$ $(n \in \mathbb{N})$ strikt, da $(n+1)^{-p} < n^{-p}$ nach Satz 1.264.

b) $a_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}$ wächst strikt, da $\frac{1}{2n+1}$ strikt fällt (vgl. a)).

c) $a_n = (-1)^n$ ist nicht monoton, da $a_{n+1} = 1 > -1 = a_n$ für ungerade n und $a_{n+1} = -1 < 1 = a_n$ für gerade n.

Standardbsp. für divergente Folgen:

a) $a_n = (-1)^n$ nicht monoton, aber beschränkt

b) $a_n = n$ monoton, aber nicht beschränkt

Theorem 2.14. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge. Dann gelten:*

a) Wenn (a_n) wächst und nach oben beschränkt ist, dann existiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

b) Wenn (a_n) fällt und nach unten beschränkt ist, dann existiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis. a) n. V. $\exists a := \sup_{n\geq 1} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Satz 1.18 $\Longrightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a$. Sei $n \geq N_\varepsilon$. Da (a_n) wächst und $a = \sup a_n$ gilt:

$$a - \varepsilon \leq a_{N_\varepsilon} \leq a_n \Longrightarrow a_n - a \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

b) Betrachte $-a_n$ und verwende Teil a) und Satz 1.232

□

Beispiel 2.15 (Heron-Verfahren zur Quadratwurzelbestimmung)**.** Sei $x > 0$ gegeben. Definiere rekursiv $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{x}{a_n})$ für $n \in \mathbb{N}$. (Beachte: $a_1 > 0$. Wenn $a_n > 0$, dann $a_{n+1} > 0 \xRightarrow{\text{Indukt.}} a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Behauptung. $a_n \to \sqrt{x}$ $(n \to \infty)$

Beweis. 1. Schritt: Zeige Konvergenz mit Thm. 2.14.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$a_{n+1} - a_n \overset{\text{Def.}}{=} \frac{a_n}{2} + \frac{x}{2a_n} - a_n = \underbrace{\frac{1}{2a_n}}_{>0} \underbrace{(x - a_n^2)}_{\text{Vorzeichen?}} \qquad (*)$$

Sei $n \geq 2$. Dann

$$\begin{aligned} a_n^2 - x \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right)^2 - x &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{a_{n-1}^2} - 4x\right) - y \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n+1} - \frac{x}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

$\overset{(*)}{\underset{(**)}{\Longrightarrow}} a_{n+1} - a_n \leq 0$ und $a_n^2 \geq x \overset{1.26}{\Longrightarrow} a_n \geq \sqrt{x}$ (für $n \geq 2$).
Thm. 2.14 $\Longrightarrow \exists\, a := \lim_{n\to\infty} a_n$.
2. Schritt: Berechne a mit Hilfe der Rekursion. Satz 2.9: $a \geq \sqrt{x} > 0$.
Ferner: $\underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)}_{\to\frac{1}{2}\left(a+\frac{x}{a}\right)}$ für $n \to \infty$(nach Satz 2.7, $a \neq 0$). Nach Satz 2.4:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right) \iff a = \frac{x}{a} \iff x = a^2 \overset{a>0}{\iff} a = \sqrt{x}$$

$\square$

Beispiel 2.16 (Die Eulersche Zahl e)**.** Sei $x \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ b_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Behauptung. $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \mathrm{e} \approx 2{,}71828\ldots$

Beweis. Überblick:

Beh. a) (a_n) wächst strikt

Beh. b) $a_n \leq b_n < 3\,\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{a) + b) + Thm. 2.14} & \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n =: a,\ \lim_{n\to\infty} b_n =: b \\ \text{b) + Satz 2.9 1} & \Longrightarrow a \leq b \end{cases} \qquad (*)$$

Beh. c) $a \geq b$

Beachte: (b_n) wächst strikt.
$\Longrightarrow$ Beh.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{>0}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{(1+n)^2}}_{>-1}\right)^n \overset{1.8}{\geq} \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(1+n)^2}\right) = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1+n+n^2}{(1+n)} \\ &= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(1+n)^3} \overset{\text{Bsp. 0.3}}{=} \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1 \end{aligned}$$

(b_n) wächst offensichtlich

b)

$$a_n \overset{\text{Bsp. 0.3}}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j$$

Für $1 \leq j \leq n$ ist

$$\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} \cdot \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\in(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\in(0,1)} \cdots \underbrace{\frac{n-j+1}{n}}_{\in(0,1)} \leq \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{2^{j-1}} \tag{+}$$

Behauptung. $2^{n-1} \leq n! \,\forall \in \mathbb{N}$

Beweis. (per vollst. Ind.)
IA: $n = 1$ ist klar.
IS: Beh. gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).
$\Longrightarrow 2^n \overset{\text{IV}}{\leq} 2n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$ □

$$\Longrightarrow a_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\frac{1}{n^j} \overset{(+)}{\leq} 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} = b_n$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{j-1}} \overset{k:=j-1}{=} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{0.2}{=} 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$, m fest. Wie in b):

$$a_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{j!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-j+1}{n}}_{>0}$$

$$\geq 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\to 1 (n\to\infty)} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)}_{\to 1 (n\to\infty)} =: c_{mn} \tag{++}$$

nach Bsp. 2.3, Satz 2.7 $\Longrightarrow c_{mn} \to 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} = b_m$ für $n \to \infty$, m fest. Lasse $n \to \infty$ gehen in (++). Dann liefern (∗) und Satz 2.9, dass $a \geq b_m$ für $m \in \mathbb{N}$. Mit $m \to \infty$, (∗), Satz 2.9 folgt $a \geq b$.

□

2.3 Teilfolgen und Vollständigkeit

Motivation. $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ ist divergent, enthält aber konvergente „Teile“.

Definition 2.17. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine strikt wachsende Funktion (d.h. $\varphi(n+1) > \varphi(n)\,\forall n \in \mathbb{N}$). Setze $b_j = a_{\varphi(j)}, j \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(b_j)j_{j\geq 1}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n\geq 1}$ (TF). Man schreibt meist $\left(a_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ statt $(b_j)_{j\geq 1}$.

Beispiel. a) (a_n) ist Teilfolge von sich selbst, wähle $\varphi(j) = j\,\forall j \in \mathbb{N}$

b) Sei $a_n = (-1)^n$. Wähle $\varphi(j) = 2j$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $b_j := a_{2j} = 1\,\forall j \in \mathbb{N}$.

c) Sei

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{wenn } n \text{ Primzahl} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, n \in \mathbb{N}.\ (a_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, 1, \frac{1}{25}, 1, \cdots)$$

Setze $\varphi(j) = j$-te Primzahl, $j \in \mathbb{N}$. $\implies (b_j) = (a_{\varphi(j)}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \cdots)$

Bemerkung. $a_n \to a\ (n \to \infty) \implies a_{n_j} \to a\ (j \to \infty)$ für jede Teilfolge.

Definition 2.18. Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a *Häufungspunkt* (HP) von (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ für unendlich viele n die Ungleichung $|a - a_n| \leq \varepsilon$ gilt.

Beispiel. a) $(-1)^n$ hat HP $+1$ und -1, da $a_n \in \overline{B}(1, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle geraden $n \in \mathbb{N}$, sowie $a_n \in \overline{B}(-1, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$.

b) Die Folge $a_n = n$ hat keinen HP, da $|a_n - a_m| \geq 1$, $n \neq m$. Also liegt in einer Kugel $\overline{B}(a, \frac{1}{3})$ höchstens ein a_n.

Satz 2.19. *Sei (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{C}$. Dann:*

$$a \textit{ ist HP} \iff \exists \textit{ TF mit } a_{n_j} \to a\ (j \to \infty)$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei a HP. Wir definieren rekursiv eine TF (a_{n_j}) mit $\left|a - a_{n_j}\right| \leq \frac{1}{j}\,\forall j \in \mathbb{N}$. $\implies a_{n_j} \to a$ nach Satz 2.9 (für $j \to \infty$). Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_1} - a| \leq 1$ (verwende Voraussetzung mit $\varepsilon = 1$). Sei n_{j-1} mit $n_{j-1} > n_{j-2}$ und $\left|a_{n_{j-1}} - a\right| \leq \frac{1}{j-1}$ gewählt. Nach Voraussetzung gibt es unendlich viele a_n in $\overline{B}(a, \frac{1}{j})$. Da $\{1, \dots, n_{j-1}\}$ endlich ist, existiert ein $n_j > n_{j-1}$ mit $\left|a_{n_j} - a\right| \leq \frac{1}{j}$. Induktionsprinzip liefert gewünschte TF $a_{n_j} \to a$.

„$\Leftarrow$“ Sei $a_{n_j} \to a\ (j \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann $\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall j \geq J_\varepsilon : \left|a_{n_j} - a\right| \leq \varepsilon$. Also $\#\{a_{n_j} : j \geq J_\varepsilon\} = \#\{j \in \mathbb{N} : j \geq J_\varepsilon\} = \infty$ nach Satz 1.22. ∎

Korollar 2.20. *Wenn $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist a der einzige Häufungspunkt von (a_n).*

Beweis. Satz 2.19 $\implies a$ ist HP, da es der Limes ist. Sei b ein weiterer HP von (a_n). Nach Satz 2.19 $\exists$ TF $a_{n_j} \to b$ $(j \to \infty)$. Dann gilt aber auch $a_{n_j} \to a$ $(j \to \infty)$. Satz 2.4 $\implies a = b$. □

Sei (a_n) eine reelle beschränkte Folge. Setze $A_n = \{a_j : j \geq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beachte $A_{n+1} \subset A_n$, A_n ist beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\implies \exists b_n := \sup A_n, c_n := \inf A_n, \text{ wobei } b_n \geq a_j \geq c_n \ \forall j \geq n \tag{2.2}$$

Satz 1.231a liefert $b_1 \geq b_n \geq b_{n+1} \geq c_{n+1} \geq c_n \geq c_1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$. Nach Thm. 2.14 existieren

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq n} a_j =: \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \text{ („Limes superior“)} \\ \text{und } &\lim_{n\to\infty} c_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} c_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq n} a_j =: \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \text{ („Limes inferior“)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.2), Satz 2.9 $\implies$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \tag{2.4}$$

Beispiel. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (-1)^n = 1$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, (-1)^n = -1$, da in A_n nur $+1$ und -1 stehen.

Theorem 2.21 (Satz von Bolzano-Weierstrass)**.** *Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ hat eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt. Wenn die Folge außerdem reell ist, dann ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ das Maximum aller Häufungspunkte und $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ das Minimum aller Häufungspunkte.*

Beweis. a) Sei (a_n) reell und beschränkt. Setze $\bar{a} = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Suche TF $a_{n_j} \to \bar{a}$ $(j \to \infty)$. Wir wissen aus (2.2) und (2.3): $b_n = \sup_{j\geq n} a_j$ konvergiert gegen $\bar{a}$ für $n \to \infty$. b_n muss nicht ein Folgeglied sein.
Definiere rekursiv die gewünschte TF (a_{n_j}): wähle $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|\bar{a} - b_{N_1}| \leq \frac{1}{2}$. Da $b_{N_1} = \sup_{j\geq N_1} a_j$ ist, existiert nach Satz 1.18 ein $n_1 > N_1$ mit $|b_{N_1} - a_{n_1}| \leq \frac{1}{2} \implies |\bar{a} - a_{n_1}| \leq |\bar{a} - b_{N_1}| + |b_{N_1} - a_{n_1}| \leq 1$. Es $n_{j-1} > n_{j-2}$ konstruiert mit $\left|\bar{a} - a_{n_{j-1}}\right| \leq \frac{1}{j-1}$. Wähle $N_j > n_{j-1}$ mit $\left|\bar{a} - b_{N_j}\right| \leq \frac{1}{2j}$ (verwende (2.3)). Da $b_{N_j} = \sup_{k\geq N_j} a_k$ existiert nach Satz 1.18 ein $n_j \geq N_j > n_{j-1}$ mit $\left|b_{N_j} - a_{n_j}\right| \leq \frac{1}{2j}$ $\implies \left|\bar{a} - a_{n_j}\right| \leq \left|\bar{a} - b_{N_j}\right| + \left|b_{N_j} - a_{n_j}\right| \leq \frac{1}{j}$. Erhalten induktiv TF $a_{n_j} \to \bar{a}$. Insbesondere ist $\bar{a}$ ein HP von (a_n) nach Satz 2.19. Entsprechend sieht man, dass $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ist ein HP von (a_n). Sei (a_{n_l}) eine weitere TF mit Grenzwert a.

$$\overset{(2.2)}{\underset{2.19}{\implies}} \underbrace{c_{n_l}}_{\to \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n} \leq \underbrace{a_{n_l}}_{\to a} \leq \underbrace{b_{n_l}}_{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n}$$

b) Sei (a_n) eine beschränkte Folge (in $\mathbb{C}$). Sei $x_n = \operatorname{Re} a_n$, $y_n = \operatorname{Im} a_n$. Dann ist (nach Satz 1.28) $(x_n)_n$ beschränkt $\overset{\text{a)}}{\implies} \exists$ TF $x_{n_l} \to x \in \mathbb{R}$ $(l \to \infty)$. Weiter ist $(y_{n_l})_l$ beschränkt $\overset{\text{a)}}{\implies} \exists$ TF $y_{n_{l_j}} \to y \in \mathbb{R}$ $(j \to \infty)$. Damit gilt:

$$a_{n_{l_j}} = x_{n_{l_j}} + iy_{n_{l_j}} \to x + iy \ (j \to \infty).$$

□

Lemma 2.22. *Sei (a_n) eine Folge mit den Häufungspunkten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und den zugehörigen Teilfolgen $a_{\varphi_1(j)} \to \alpha_1, \dots, a_{\varphi_m(j)} \to \alpha_m$ $(j \to \infty)$. Jedes a_n liege in (mindestens) einer Teilfolge. Dann hat (a_n) keine weiteren Häufungspunkte.*

Beweis. Annahme: Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ ein weiterer HP. Satz 2.19 $\Longrightarrow \exists$ TF $a_{n_l} \to \alpha$ $(l \to \infty)$. Sei $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \min \{|\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \dots, |\alpha - \alpha_m|\} > 0$. Ferner existiert $L \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_l} - \alpha| \leq \varepsilon_0 \, \forall l \geq L$. $\Longrightarrow$ Für $l \geq L$, $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt $|a_{n_l} - \alpha_j| \geq |\alpha_j - \alpha| - |\alpha - a_{n_l}| \geq 3\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 \Longrightarrow a_{n_l} \notin B(\alpha_j, \varepsilon_0) \, \forall l \geq L, j \in \{1, \dots, m\}$. Andererseits liegen die a_{n_l} in mindestens einer TF die gegen ein α_j konvergiert $\Longrightarrow \lightning$ □

Beispiel 2.23.

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{1}{n} & , n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \dfrac{2n^2+3}{3n^2-1} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\exists$ konv. TF:

$$\begin{aligned} b_k &= a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{2k} \to 0 \ (k \to \infty) \\ c_k &= a_{4k+1} = \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{=-1} \cdot \frac{2(4k+1)^2+3}{3(4k+1)^2-1} \to -\frac{2}{3} \ (k \to \infty) \\ d_k &= a_{4k+3} = \underbrace{(-1)^{2k+2}}_{=1} \cdot \frac{2(4k+3)^2+3}{3(4k+3)^2-1} \to \frac{2}{3} \ (k \to \infty) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \exists$ HP $-\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{3}$. Nach Lemma 2.22 sind das alle HP der Folge.
$\overset{2.21}{\Longrightarrow} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \frac{2}{3}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\frac{2}{3}$.

Korollar 2.24. *Sei (a_n) beschränkt und $a \in \mathbb{C}$. Dann gelten:*

a) $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ $\iff$ (a_n) besitzt genau einen HP und dieser ist a

b) Sei (a_n) reell. Dann konvergiert (a_n) genau dann, wenn $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. In diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. a) „$\Rightarrow$" Kor. 2.20.

„$\Leftarrow$" Sei a der einzige HP von (a_n). Annahme: $a_n \not\to a$ $(n \to \infty)$. Das heißt $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - a| > \varepsilon_0$. Wir erhalten induktiv eine TF $(a_{n_l})_l$ mit $|a_{n_l} - a| > \varepsilon_0 \, \forall l \in \mathbb{N}$ (vgl. Beweis von Satz 2.19). Andererseits: Da $(a_{n_l})_l$ beschränkt ist, liefert Thm. 2.21 eine konvergente TF $(a_{n_{l_j}})_j$. Nach Satz 2.19 und der Voraussetzung gilt $a_{n_{l_j}} \to a \ \lightning$

b) Sei nun (a_n) reell. Dann zeigt Thm. 2.21 $\exists!$ HP von (a_n) $\iff$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \overset{a)}{\Longrightarrow}$ Beh.

□

Bemerkung.

$$a_n = \begin{cases} 1 & , n \text{ gerade,} \\ n & , n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

hat genau einen HP (= 1), ist aber unbeschränkt, also divergent.
$\Longrightarrow$ in 2.24 muss man Beschränktheit voraussetzen!

Definition 2.25. Eine Folge (a_n) heißt CAUCHY-*Folge* (CF), wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

Theorem 2.26. *Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn sie eine* CAUCHY-*Folge ist. (Man sagt, dass $\mathbb{C}$ (und damit $\mathbb{R}$) vollständig sind.)*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Für $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_k - a| \leq \varepsilon$ für alle $k \geq N_\varepsilon$. Damit $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq 2\varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$.

„$\Leftarrow$" Sei (a_n) eine CF. Nach Def. 2.25 mit $\varepsilon = 1$ existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_{N_1}| \leq 1$ für alle $n \geq N_1$. $\Longrightarrow |a_n| \leq |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1}| \leq 1 + |a_{N_1}|$ $(\forall n \geq N_1)$ $\Longrightarrow (a_n)$ ist beschränkt. Thm 2.21 $\Longrightarrow$ existiert TF $a_{n_j} \to a$ $(j \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|a_{n_j} - a\right| \leq \varepsilon \; \forall j \geq J_\varepsilon \tag{*}$$

Sei ferner N_ε aus Def. 2.25. Wähle $n \geq N_\varepsilon$ Dann existiert ein $n_j \geq N_\varepsilon$ mit $j \geq J_\varepsilon$. Somit $|a_n - a| \leq \left|a_n - a_{n_j}\right| + \left|a_{n_j} - a\right| \overset{2.25, (*)}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

□

Bemerkung. a) CAUCHY-Folgen haben also (in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$) dieselben Eigenschaften wie konvergente Folgen (kann man auch direkt zeigen).

b) In Bsp. 2.15 mit $x = 2$ und $a_1 = 1$ ist $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \in \mathbb{Q}$ (Beweis per Induktion). Ferner gilt $a_n \to \sqrt{2}$. Nach Bsp 1.16 gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathbb{Q}$ ist nicht vollständig

c) Bsp. $a_n = \sqrt{a_n}$. Folge ist unbeschränkt $\Longrightarrow$ divergent $\Longrightarrow$ keine CF. Andererseits: $0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also: Def 2.25 gilt für $m = n + 1$, aber (a_n) ist keine CAUCHY-Folge.

Lemma 2.27. *Sei (a_n) eine beschränkte und reelle Folge und $\varepsilon > 0$. Dann*

$$\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N} \textit{ mit } -\varepsilon + \varliminf_{n\to\infty} a_n \leq a_j \leq \varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n \; \forall j \geq J_\varepsilon.$$

Beweis. Nach Satz 1.18 $\exists \overline{J_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n \overset{2.3}{=} \varepsilon + \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq n} a_j \overset{1.18}{\geq} \sup_{j\geq \overline{J_\varepsilon}} a_j \geq a_j \ \forall j \geq \overline{J_\varepsilon}.$$

Entprechend: $\exists \underline{J_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ mit $a_j \geq -\varepsilon + \varliminf_{n\to\infty} a_n \ \forall j \geq \underline{J_\varepsilon}$. $\implies$ Beh. mit $J_\varepsilon = \max\{\overline{J_\varepsilon}, \underline{J_\varepsilon}\}$. □

Satz 2.28. *Seien (a_n), (b_n) beschränkte reelle Folgen. Dann gelten:*

a)
$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\varlimsup_{n\to\infty} (-a_n)$$

b) Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann
$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varliminf_{n\to\infty} b_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

c)
$$\varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

d) Seien $a_n, b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann:
$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\varliminf_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \geq \varliminf_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} b_n$$

e) Wenn in 3 oder 4 eine der beiden Folgen konvergiert, dann gilt „=“ in den Aussagen.

Bemerkung. In 3 oder 4 kann „<“ bzw. „>“ gelten. Bsp.: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ $\implies a_n + b_n = 0 \implies \varlimsup_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$, $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} b_n = 1$.

Beweis. a)

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \overset{(2.3)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq n} a_j \overset{1.23}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(-\sup_{j\geq n} (-a_j)\Big) \overset{1.23}{=} -\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq n} (-a_j) \overset{(2.3)}{=} -\varlimsup_{n\to\infty} (-a_n)$$

b) Sei $a_j \leq b_j \, \forall j$. Nach Def. **??** des Supremums $\sup_{j\geq n} a_j \leq \sup_{j\geq n} n_j \, \forall n \in \mathbb{N}$. Def. des Infimums liefert

$$\underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq n} a_j}_{=\varlimsup_{n\to\infty} a_n} \leq \underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq n} b_j}_{=\varlimsup_{n\to\infty} b_n}$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1.18 $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$a_j \leq \varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,\ b_j \leq \varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n\ \forall j \geq N_\varepsilon.$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \overset{\text{Def.}}{\leq} \sup_{j \geq N_\varepsilon} (a_j + b_j) \geq 2\varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt Beh. c1).
Andere Behauptungen zeigt man ähnlich. $\square$