

## 26. Das Riemann-Stieltjes-Integral

Stets in diesem Paragraphen:  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. RS := Riemann-Stieltjes.

### Definition

- (1) Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ .

$$\sigma_f(Z, \xi, g) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

heißt eine **Riemann-Stieltjes-Summe**.

- (2)  $f$  heißt **Riemann-Stieltjes-integrierbar** bzgl.  $g$  über  $[a, b]$  :  $\iff \exists S \in \mathbb{R} : \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \rightarrow S \quad (n \rightarrow \infty)$  für jede Nullfolge  $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$ .

In diesem Fall heißt  $\int_a^b f dg := \int_a^b f(x) dg(x) := S$  das **Riemann-Stieltjes-Integral** von  $f$  bzgl.  $g$  und wir schreiben  $f \in R_g[a, b]$ .  $g$  heißt auch **Integrator(funktion)**.

### Beispiele:

- (1) Ist  $g(x) = x$ , so ist  $R_g[a, b] = R[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = \int_a^b f dx$ .  
 (2) Ist  $g$  auf  $[a, b]$  konstant  $\implies f \in R_g[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = 0$ .  
 (3) Sei  $\tau \in (a, b)$ .

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, \tau) \\ 1, & x \in [\tau, b] \end{cases}$$

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Es existiert genau ein  $j_0$  mit  $\tau \in (x_{j_0-1}, x_{j_0}]$ .

$$\sigma_f(Z, \xi, g) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = f(\xi_{j_0})(g(x_{j_0}) - g(x_{j_0-1})) = f(\xi_{j_0}).$$

Ist  $f$  stetig in  $\tau \implies f \in R_g[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = f(\tau)$ .

### Satz 26.1

- (1)  $R_g[a, b]$  ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung

$$f \mapsto \int_a^b f dg$$

ist linear.

- (2) Sei  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere beschränkte Funktion,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f \in R_g[a, b]$  und  $f \in R_h[a, b]$ . Dann gilt:  $f \in R_{\alpha g + \beta h}[a, b]$  und  $\int_a^b f d(\alpha g + \beta h) = \alpha \int_a^b f dg + \beta \int_a^b f dh$ .

(3) Sei  $c \in (a, b)$  und  $f \in R_g[a, b] \implies f \in R_g[a, c], f \in R_g[c, b]$  und  $\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$ .

**Beweis**

Übung. ■

Bemerkung zu 26.1(3): Ist  $f \in R_g[a, c]$  und  $f \in R_g[c, b]$ , so gilt i.A. nicht:  $f \in R_g[a, b]$  (Beispiel: Übungen).

**Satz 26.2 (Partielle Integration)**

Ist  $f \in R_g[a, b] \implies g \in R_f[a, b]$  und

$$\int_a^b f dg = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g df.$$

**Beweis**

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\xi_0 := a$ ,  $\xi_{n+1} := b$ .

$$\text{Nachrechnen: } \sigma_g(Z, \xi, f) = \underbrace{f(x)g(x)|_a^b}_{=:c} - \underbrace{\sum_{j=0}^n f(x_j)(g(\xi_{j+1}) - g(\xi_j))}_{=:A}$$

Die verschiedenen unter den Punkten  $\xi_0, \dots, \xi_{n+1}$  definieren eine Zerlegung  $\tilde{Z} \in \mathfrak{Z}$  mit  $|\tilde{Z}| \leq 2|Z|$ . Dann ist  $A$  eine RS-Summe  $\sigma_f(\tilde{Z}, \eta, g)$ , wobei  $\eta$  geeignet zu wählen ist.

Also:  $\sigma_g(Z, \xi, f) = c - \sigma_f(\tilde{Z}, \eta, g)$ .

Sei  $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$  eine Nullfolge. Zu jeden  $(Z_n, \xi^{(n)})$  konstruiere  $(\tilde{Z}_n, \eta^{(n)})$  wie oben. Dann ist  $((\tilde{Z}_n, \eta^{(n)}))$  eine Nullfolge in  $\mathfrak{Z}^*$  und  $\sigma_g(Z_n, \xi^{(n)}, f) = c - \sigma_f(\tilde{Z}_n, \eta^{(n)}, g) \forall n \in \mathbb{N}$ . Aus der Voraussetzung folgt:  $\sigma_f(\tilde{Z}_n, \eta^{(n)}, g) \rightarrow \int_a^b f dg \implies \sigma_g(Z_n, \xi^{(n)}, f) \rightarrow c - \int_a^b f dg \quad (n \rightarrow \infty)$ . ■

**Beispiel**

$f(x) = x$ ,  $R[a, b] = R_f[a, b]$ . Sei  $g \in R[a, b] = R_f[a, b] \xrightarrow{26.2} f \in R_g[a, b]$  und  $\int_a^b x dg = xg(x)|_a^b - \int_a^b g dx$ .

**Satz 26.3**

Sei  $f \in R[a, b]$ ,  $g$  sei differenzierbar auf  $[a, b]$  und  $g' \in R[a, b]$ . Dann:  $f \in R_g[a, b]$  und

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx.$$

**Beweis**

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .  $m_j, M_j, I_j$  seien wie immer und  $\alpha > 0$  sei so, dass  $|g'(x)| \leq \alpha \forall x \in [a, b]$ .

Aus dem Mittelwertsatz folgt:  $\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists \eta_j \in I_j : g(x_j) - g(x_{j-1}) = g'(\eta_j)|I_j|$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_f(Z, \xi, g) &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g'(\eta_j)|I_j| \\ &= \sum_{j=1}^n (f(\xi_j) - f(\eta_j))g'(\eta_j)|I_j| + \underbrace{\sum_{j=1}^n f(\eta_j)g'(\eta_j)|I_j|}_{=\sigma_{fg'}(Z, \eta), \eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}|\sigma_f(Z, \xi, g) - \sigma_{fg'}(Z, \eta)| &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|f(\xi_j) - f(\eta_j)|}_{\leq M_j - m_j} \underbrace{|g'(\eta_j)|}_{\leq \alpha} |I_j| \\ &\leq \alpha \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| = \alpha(S_f(Z) - s_f(Z)).\end{aligned}$$

Sei  $((Z_n, \xi^{(n)}))$  eine Nullfolge. Zu jedem  $(Z_n, \xi^{(n)})$  konstruiere man  $\eta^{(n)}$  wie oben. Dann gilt:

$$|\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) - \underbrace{\sigma_{fg'}(Z_n, \eta^{(n)})}_{\rightarrow \int_a^b fg' dx}| \leq \alpha \underbrace{(S_f(Z_n) - s_f(Z_n))}_{\rightarrow 0}$$

$$\implies \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \rightarrow \int_a^b fg' dx. \quad \blacksquare$$

### Beispiel

$$\int_0^1 e^x d(e^{-x}) = \int_0^1 e^x (-e^{-x}) dx = \int_0^1 (-1) dx = -1.$$

### Satz 26.4 (Abschätzen des RS-Integrals mit Hilfe der Totalvarianz)

Sei  $g \in \text{BV}[a, b]$  und  $f \in R_g$ . Dann:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \gamma V_g[a, b], \text{ wobei } \gamma := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

### Beweis

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

$$|\sigma_f(Z, \xi, g)| = \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq \gamma V_g(Z) \leq \gamma V_g[a, b] \blacksquare$$

### Bezeichnungen

Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $m_j, M_j, I_j$  seien wie immer,  $d_j := g(x_j) - g(x_{j-1})$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  $s(Z) = \sum_{j=1}^n m_j d_j$ ,  $S(Z) = \sum_{j=1}^n M_j d_j$ .

### Hilfssatz 26.5

$g$  sei wachsend ( $\implies d_j \geq 0$ )

- (1)  $s(Z_1) \leq S(Z_2) \quad \forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ .  
 (2)  $\sup\{s(z) : z \in \mathfrak{Z}\} \leq S(Z) \quad \forall z \in \mathfrak{Z}$ .

**Beweis**

(1) Wie in 23.1

(2) folgt aus (1) ■

**Satz 26.6 (Weiteres Kriterium zur RS-Integrierbarkeit)**

Ist  $f \in C[a, b]$  und  $g \in BV[a, b] \implies f \in R_g[a, b]$ .

**Beweis**

Wegen 25.2 und 26.1(2) O.B.d.A:  $g$  wachsend.  $c := g(b) - g(a) (\geq 0)$ . O.B.d.A:  $c > 0$ .

1. Sei  $(Z, \xi), Z = \{x_0, \dots, x_n\}, \xi = (\xi_0, \dots, \xi_n), m_j, M_j, I_j, d_j$  seien wie oben.  $S := \sup\{s(z) : z \in \mathfrak{Z}\}$ , also  $S \leq S(Z)$ .  $\alpha := S(Z) - s(Z)$

Es gilt:  $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \xrightarrow{d_j \geq 0} m_j d_j \leq f(\xi_j) d_j \leq M_j d_j \implies (*) s(z) \leq \sigma_f(Z, \xi, g) \leq S(Z)$ .

Dann:  $-\alpha = s(z) - S(Z) \leq S - S(Z) \stackrel{(*)}{\leq} S - \sigma_f(Z, \xi, g) \leq S(Z) - \sigma_f(Z, \xi, g) \stackrel{(*)}{\leq} S(Z) - s(z) = \alpha \implies |s - \sigma_f(Z, \xi, g)| \leq \alpha = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) d_j$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ .  $f$  ist auf  $[a, b]$  **gleichmäßig** stetig  $\implies \exists \delta > 0 : |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{c} \quad \forall t, s \in [a, b]$  mit

$|t - s| < \delta$ . Sei  $|Z| < \delta \implies M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{c} \implies |s - \sigma_f(Z, \xi, g)| < \frac{\varepsilon}{c} \underbrace{\sum_{j=1}^n d_j}_{=c} = \varepsilon$ .

2. Sei  $((Z_n, \xi^{(n)}))$  eine Nullfolge in  $\mathfrak{Z}^*$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  wie in (1),  $|Z_n| \rightarrow 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : |Z_n| < \delta \quad \forall n \geq n_0 \implies |s - \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ . Also:  $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \rightarrow S \quad (n \rightarrow \infty)$ . ■