

4 Nichtsinguläre Kurven

§18 Funktionenkörper in einer Variablen

Satz 7

Ist K/k Funktionenkörper in einer Variablen über k (das heißt endlich erzeugt, $\text{trdeg}_k(K) = 1$), so gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte nichtsinguläre Kurve C mit $k(C) \cong K$.

Beweis Sei $C_K = \{R \subset K : R \text{ ist diskreter Bewertungsring, } k \subset R\}$

Ist C nichtsinguläre Kurve, so ist für jedes $x \in C$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{C,x}$ ein diskreter Bewertungsring in $k(C)$ mit $k \subset \mathcal{O}_{C,x}$

Die Eindeutigkeit wird aus Prop. 18.4 und Prop. 18.5 folgen. \square

Bemerkung 4.18.1

Für $f \in K$ ist $P_f := \{R \in C_K : f \notin R\}$ endlich (Polstellenmenge von f).

Beweis OE $f \in K \setminus k$ (sonst ist $P_f = \emptyset$).

Dann ist $g := \frac{1}{f}$ transzendent über k , also $K/k(g)$ endlich.

dann sei B der ganze Abschluss von $k[g]$ in K . B ist dann ein Dedekindring (Alg I, Satz ...) und somit endlich erzeugte, reduzierte k -Algebra.

\Rightarrow es gibt eine affine Varietät V mit $k[V] \cong B$.

Für jedes $x \in V$ ist $\mathcal{O}_{V,x}$ ein diskreter Bewertungsring $\Rightarrow V$ ist nicht singulär.

Sei $R \in P_f$, also $f \notin R$. Dann ist $g \in R \stackrel{g \notin R}{\Rightarrow} g \in m_R \Rightarrow k[g] \subseteq R \Rightarrow B \subseteq R$. (R ist normal).

$m := m_R \cap B$ ist maximales Ideal in $B \Rightarrow B_m$ ist diskreter Bewertungsring, $B_m \subseteq R$

Beh.: Dann ist $B_m = R$.

Denn: Andernfalls sei $a \in R \setminus B_m$.

Schreibe $a = u \cdot f^{-n}$ mit $u \in B_m^\times$, $n > 0$, $(f) = m$

Dann wäre $\frac{1}{a} = u^{-1} \cdot f^n \in m \Rightarrow a \in R^\times$

$f^n \in R^\times$, Widerspruch zu $f^n \in m_R$.

$\Rightarrow \exists x \in V$ mit $R = \mathcal{O}_{V,x}$, $g \in m_R$.

Ist $g(x) = 0 \Rightarrow x \in V(g) \subset V$.

da $g \neq 0$, ist $V(g) \neq V$, also endlich. \square

Bemerkung 4.18.2

Sei C eine irreduzible, nichtsinguläre Kurve über k , $K = k(C)$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{O}_{C,x} \in C_K$ für jedes $x \in C$

(b) $\varphi: \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C_K \\ x & \longmapsto & \mathcal{O}_{C,x} \end{array}$ ist injektiv.

(c) $C_K \setminus \varphi(C)$ ist endlich.

Beweis c) OE Sei C affin, dann ist $K = \text{Quot}(k[C])$

Für $R \in C_k$ gilt: $R \in \varphi(C) \Leftrightarrow k[C] \subset R$ (denn das ist äquivalent zu $R = k[C]_m$ für ein maximales Ideal $m \subset k[C]$).

Seien x_1, \dots, x_r Erzeuger von $k[C]$ als k -Algebra, dann ist

$$\varphi(C) = \{R \in C_K : x_i \in R \text{ für } i = 1, \dots, r\} = \bigcap_{i=1}^r \{R \in C_K : x_i \in R\}$$

Nach 18.1. ist $C_k \setminus U_i (= P_{x_i})$ endlich $\Rightarrow C_K \setminus \varphi(C)$ ist endlich. \square

Bemerkung 4.18.3

C_K ist Varietät durch

(a) $U \subseteq C_K$ offen $\Leftrightarrow C_K \setminus U$ endlich (oder $U = \emptyset$)

(b) Für U sei $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_{C_K}(U) = \bigcap_{R \in U} R$

Beweis Sei C affine, nichtsinguläre Kurve mit $k(C) \cong K$. Dann ist nach 18.2 $\varphi(C)$ offen und dicht in C_K und $\varphi : C \rightarrow \varphi(C)$ ist Isomorphismus, denn $\mathcal{O}_{C_K, R_0} = R_0$ für jedes $R_0 \in C_K$.

Für $U \subset C_K$ offen mit $R_0 \in U$ ist $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow R_0$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{C_K, R} = \lim_{R_0 \in U} \mathcal{O}(U) \hookrightarrow R_0$.

Für $f \in R_0$ sei $U_f = C_K \setminus P_f \Rightarrow f \in \mathcal{O}(U_f)$

Für $U \subset C$ offen ist $\mathcal{O}_C(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C, x}$

Wir sind sicher: $\varphi : C \rightarrow \varphi(C)$ ist ein Homöomorphismus.

Wir brauchen noch: Für jedes offene $U \subset C$ einen Isomorphismus von k -Algebren (verträglich mit " \subseteq "):

$$\begin{array}{ccc} \alpha_U : & \mathcal{O}_{C_K}(\varphi(U)) & \longrightarrow \mathcal{O}_C(U) \\ & \parallel & \parallel \\ & \bigcap_{R \in \varphi(U)} R & \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C, x} \\ & \parallel & \parallel \\ & \bigcap_{R \in \varphi(U)} \mathcal{O}_{C_K, R} & = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{C_K, \varphi(x)} \end{array}$$

\square

Beh.: Für jedes $R \in L_K$ gibt es eine affine Kurve C_R mit $R \in \varphi(C_R)$, also mit $k[C_R] \subset R$.

Denn: Sei $g \in R \setminus k$, B der ganze Abschluss von $k[g]$ in K . Dann ist $B \subset R$ und $B = k[C_R]$ für eine nichtsinguläre, affine Kurve C_R (siehe 18.1).

Proposition 4.18.4

C_K ist projektiv.

Beweis Sei $C_K = \bigcup_{i=1}^r V_i$ mit affinen nichtsingulären Kurven V_i wie in ?? . Seien weiter $V_i \subseteq \mathbb{A}^{n_i}(k)$ und C_i der Zariski-Abschluss von V_i in $\mathbb{P}^{n_i}(k)$. C_i ist projektive Kurve (eventuell singulär). Nach Proposition 4.18.6 lässt sich die Einbettung $V_i \hookrightarrow C_i$ zu einem Morphismus $\varphi_i : C_K \rightarrow C_i$.

Sei $\varphi : C_K \rightarrow \prod_{i=1}^r C_i$ ist projektiv, $C := \overline{\varphi(C_K)}$ auch.

$\varphi : C_K \rightarrow C$ ist dominant $\Rightarrow k(C) \subseteq K \Rightarrow k(C) \cong K$.

Behauptung

φ ist surjektiv.

Beweis Sei $x \in C$, R der ganze Abschluss von $\mathcal{O}_{C,x}$ in K . R ist normal, also diskreter Bewertungsring

$$\Rightarrow R \in C_K \Rightarrow \mathcal{O}_{C,x} \subseteq R \cong \mathcal{O}_{C,\varphi(R)} \Rightarrow x = \varphi(R)$$

Beweis (obiges “ \cong ”) für i mit $R \in V_i$ ist $R \cong \mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)}$. Die Projektion $pr_i : C \rightarrow C_i$ ist dominant

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)} \rightarrow \mathcal{O}_{C,\varphi(R)} \text{ ist injektiv,}$$

also ein Isomorphismus, da $\mathcal{O}_{V_i,\varphi_i(R)}$ ein diskreter Bewertungsring ist. (benutze: Ist R diskreter Bewertungsring, $K = \text{Quot}(R)$, $S \subset K$ lokaler Ring mit $R \subseteq S$ und $m_S \cap R = m_R$, so ist $R = S$) \square

Noch zu zeigen:

Bemerkung 4.18.5

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ ein bijektiver Morphismus. Ist für jedes $x \in V$ der induzierte Homomorphismus $\mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ ein Isomorphismus, so ist φ ein Isomorphismus.

Beweis $\exists V, W$ affin, sei $A := k[W], B := k[V]$

Die Voraussetzung ist äquivalent zu:

$\alpha : A \rightarrow B$ ist ein k -Algebrenhomomorphismus, sodass $\alpha_m : A_m \rightarrow B_{m'}$ für jedes maximale Ideal m von A ein Isomorphismus ist (wobei m' das, wegen der Bijektivität von φ , eindeutig bestimmte maximale Ideal von B mit $\alpha^{-1}(m') = m$).

Zu zeigen: α ist bijektiv

α ist injektiv, da φ surjektiv ist.

α ist surjektiv: Sei $x \in B$, $I_x := \{y \in A : y \cdot x \in A\}$

I_x ist Ideal in A .

Ist $I_x = A$, so ist $1 \in I_x$, also $x \in A$.

Ist $I_x \neq A$, so sei m maximales Ideal in A mit $I_x \subseteq m$

$$\stackrel{\text{Vgr.}}{\Rightarrow} \exists a \in A, b \in A - m \text{ mit } \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \text{ in } A_m = B_{m'}$$

$$\Rightarrow \exists t \in A - m \text{ mit } t \cdot (b \cdot x - a) = 0$$

$$\Rightarrow t \cdot bx = ta \in A$$

$$\Rightarrow tb \in I_x \subseteq m \text{ Widerspruch! ,da } t \notin m, b \notin m$$

\square

Proposition 4.18.6

Sei C nichtsinguläre irreduzible Kurve, V projektive Varietät, $\emptyset \neq U \subseteq C$ offen und $\varphi : U \rightarrow V$ ein Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus $\bar{\varphi} : C \rightarrow V$ mit $\bar{\varphi}|_U = \varphi$

Beweis $C - U$ ist endlich, also $\mathcal{O}_C(C - U) = \{x\}$, $\mathcal{O}_C V = \mathbb{P}^n(k)$ und $\varphi(U) \not\subseteq V(X_i), i = 1, \dots, n$. Sei $h_{ij} := \frac{X_i}{X_j} \circ \varphi$ für $i \neq j$. h_{ij} ist regulär auf $\varphi^{-1}(D(X_i))$ ($\neq \emptyset$, da $\varphi(U) \not\subseteq V(X_j)$)
 $\Rightarrow h_{ij} \in k(C) =: K$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{O}_{C,x}$ diskreter Bewertungsring in K . Sei $v_x : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ die zugehörige Bewertung. Seien weiter $v_i := v_x(h_{i,0}), i = 1, \dots, n$ und $r_k := \min\{v_t, t = 1, \dots, n\}$.

Für $i \neq k$ ist dann

$$\begin{aligned} v_x(h_{ik}) &= v_x\left(\frac{X_i X_0}{X_0 X_k} \circ \varphi\right) \\ &= v_x\left(\left(\frac{X_i}{X_0} \circ \varphi\right) \cdot \left(\frac{X_0}{X_k} \circ \varphi\right)\right) \\ &= v_x(h_{i,0}) - v_x(h_{k,0}) \\ &= r_i - r_k > 0 \end{aligned}$$

\exists Umgebung \bar{U} von x mit $h_{ik} \in \mathcal{O}_C(\bar{U}), i = 1, \dots, n, i \neq k$. Für $y \in U$ sei

$$\tilde{\varphi}(y) := \begin{cases} (h_{0k}(y) : \dots : h_{nk}(y)) & k = 0 \text{ oder } r_k \leq 0 \\ (1 : h_{1,k}(y) \cdot h_{k,0}(y) : \dots : h_{n,k}(y) \cdot h_{k,0}(y)) & k \neq 0 \text{ und } r_k > 0 \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ ist Morphismus $\bar{U} \rightarrow V$

(mit Bild in $D(X_k)$ beziehungsweise $D(X_0)$). Für $y \neq x$ ist $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$. □

§19 Divisoren

Definition 4.19.1

Sei C eine nichtsinguläre, irreduzible Kurve.

- (a) Ein **Divisor** auf C ist eine endliche formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^n n_i P_i, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in C$$

$$\text{Div}(C) := \{D = \sum n_i P_i : D \text{ ist Divisor auf } C\}$$

ist eine freie abelsche Gruppe, genannt **Divisorengruppe** von C .

- (b) Für $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$ heißt $\deg(D) := \sum_{i=1}^n n_i$ der **Grad** von D .

- (c) D heißt **effektiv**, wenn alle $n_i \geq 0$ sind.

Definition + Bemerkung 4.19.2

Sei C wie in 19.1, $f \in k(C)^\times$.

- (a) Für $P \in C$ heißt $\text{ord}_P(f) := v_P(f)$ die **Ordnung** von f in P (dabei sei v_P die zu P gehörige diskrete Bewertung von $k(C)$).

- (b) $\text{div}(f) := \sum_{P \in C} \text{ord}_P(f) \cdot P$ heißt **Divisor** von f .

- (c) $D \in \text{Div}(C)$ heißt **Hauptdivisor**, wenn ein $f \in k(C)^\times$ existiert mit $D = \text{div}(f)$.

- (d) Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe $\text{Div}_H(C)$ von $\text{Div}(C)$.

- (e) $\text{Cl}(C) := \text{Div}(C)/\text{Div}_H(C)$ heißt **Divisorenklassengruppe** von C .
- (f) Divisoren $D, D' \in \text{Div}(C)$ heißen **linear äquivalent**, wenn $D - D'$ Hauptdivisor ist.
Schreibweisen: $D \equiv D'$, $D \sim D'$

Beweis

b) Zu zeigen: $\{P \in C : \text{ord}_P(f) \neq 0\}$ ist endlich.

$\{P \in C : \text{ord}_P(f) \neq 0\} = V(f) \cup V(\frac{1}{f})$ und $f \neq 0$.

d) $\text{div}(f) + \text{div}(g) = \text{div}(f \cdot g)$; $-\text{div}(f) = \text{div}(\frac{1}{f})$; $0 = \text{div}(1)$ □

Beispiele 4.19.3

(a) $C = \mathbb{P}^1(k)$

Dann gilt $D \in \text{Div}(C)$ ist Hauptdivisor $\Leftrightarrow \deg(D) = 0$

denn " \Rightarrow " Sei $f = \frac{\prod_{i=1}^n (X - a_i)}{\prod_{j=1}^m (X - b_j)} \in k(C)^\times$ mit $a_i, b_j \in k$, $a_i \neq b_j$ für alle i, j

$\Rightarrow \text{div}(f) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j + (m - n) \cdot \infty$

$\Rightarrow \deg(\text{div}(f)) = 0$

" \Leftarrow " Für Null- und Polstellen, die nicht im Punkt ∞ liegen, schreibe f wie oben, mit den entsprechenden Linearfaktoren für die Nullstellen im Zähler, bzw. für die Polstellen im Nenner, jeweils mit Vielfachheiten.

(b) $C = V(Y^2 Z - X^3 + X Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ (Homogenisierung von $y^2 = x^3 - x$)

$C = V(y^2 - x^3 + x) \cup \{(0 : 1 : 0)\}$ Sei $f = y = \frac{Y}{Z} \in k(C)^\times$. Gesucht: $\text{div}(f)$

Auf $U_0 = D(Z)$ ist y regulär und hat 3 Nullstellen, nämlich $P_{-1} = (-1, 0)$, $P_0 = (0, 0)$ und $P_1 = (1, 0)$.

P_0 : m_{P_0} wird erzeugt von x und y .

Es ist $y^2 = x \underbrace{(x^2 - 1)}_{\in \mathcal{O}_{C, P_0}^\times} \Rightarrow y$ erzeugt m_{P_0} (mit x dagegen lässt sich nur y^2 erzeugen).

Mit $y = x(x - 1)(x + 1)$ und dem gleichen Argument zeigt man das gleiche für P_{-1} und P_1

$\Rightarrow P_0, P_{-1}, P_1$ haben alle Ordnung 1.

$P_\infty = (0 : 1 : 0)$:

m_{P_∞} wird erzeugt von $\frac{X}{Y}$ und $\frac{Z}{Y}$ mit der Gleichung

$$\frac{Z}{X} = \left(\frac{X}{Y}\right)^3 - \frac{X}{Y} \left(\frac{Z}{Y}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{Y}\right)^3 = \frac{Z}{Y} \left(1 + \underbrace{\frac{X Z}{Y^2}}_{\in \mathcal{O}_{C, P_\infty}^\times}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{X}{Y} \text{ erzeugt } m_{P_\infty}$$

$$\Rightarrow \text{ord}_{P_\infty} \left(\frac{Y}{Z}\right) = -3$$

Insgesamt folgt: $\text{div}(f) = P_{-1} + P_0 + P_1 - 3P_\infty$

Definition + Bemerkung 4.19.4

Seien C, C' nichtsinguläre Kurven, $f : C \rightarrow C'$ ein nichtkonstanter Morphismus.

(a) Sei $Q \in C'$ und $t \in m_Q$ Erzeuger.

Für $P \in f^{-1}(Q)$ heißt $e_P(f) := \text{ord}_P(t \circ f)$ **Verzweigungsordnung** von f in P .

(b) $e_P(f)$ hängt nicht von der Wahl von t ab.

(c) Für $Q \in C'$ sei

$$f^*Q := \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

$$\text{und } f^* : \text{Div}(C') \rightarrow \text{Div}(C)$$

der induzierte Gruppenhomomorphismus.

(d) $f^*(\text{Div}_H(C')) \subseteq \text{Div}_H(C)$

Beweis d.) Sei $D = \text{div}(g \circ f) \in \text{Div}_H C'$.

Es gilt $f^*D = \text{div}(g \circ f)$, denn:

Für $P \in C$ ist $\text{ord}_P(g \circ f) = N$, falls $g \circ f = t_P^N \cdot u$ für eine Einheit $u \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ und einen Erzeuger t_P von m_P . Der Koeffizient von P in f^*D ist

$$\underbrace{\text{ord}_{f(P)}(g)}_{=:n} \cdot \underbrace{v_P(t_Q \circ f)}_{=:m}$$

mit $Q := f(P)$. Also:

$$\begin{aligned} g &= t_Q^n \cdot u_1, t_Q \circ f = t_P^m \cdot u_2 \\ \Rightarrow g \circ f &= (t_Q^n \circ f)^n \cdot (u_1 \circ f) = t_P^{m \cdot n} \cdot \underbrace{u_2^n(u_1 \circ f)}_{\in \mathcal{O}_{C,P}^\times} \\ \Rightarrow \text{ord}_P(g \circ f) &= n \cdot m \end{aligned}$$

□

Definition + Proposition 4.19.5

Sei $f : C \rightarrow C'$ ein nichtkonstanter Morphismus irreduzibler, nichtsingulärer, projektiver Kurven.

(a) $\deg(f) := [k(C) : k(C')]$ heißt **Grad** von f (dabei wird $k(C')$ als Teilkörper von $k(C)$ über den von f induzierten Homomorphismus aufgefasst).

(b) Für $Q \in C'$ ist $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) = \deg(f)$

Beweis b.) Sei $f^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_r\}, t = t_Q$ ein Erzeuger von m_Q

$$\Rightarrow e_{P_i}(f) = \text{ord}_{P_i}(t \circ f) = \text{ord}_{P_i}(t) = \dim_k \left(\mathcal{O}_{C,P_i} / (t) \right) (*)$$

wobei $(t) = \left(t_{P_i}^{e_{P_i}(f)} \right)$.

☞ C' affin, C affin (die P_i müssen in C sein)

Sei $R = k[C'], S = k[C]$. Dann ist S der ganze Abschluss von R in $k(C)$. Sei $U = R - m_Q$, also $R_U = \mathcal{O}_{C',Q}, S' := S_U$ ist ganz über R_U .

Behauptung: S' ist freier R_U -Modul vom Rang $n := (f)$.

“Beweis”: S' ist endlich erzeugter R_U -Modul: vergleiche Algebra II, Dedekindringe.

Mit dem Elementarteilersatz für Hauptidealringe folgt die Behauptung “frei”.

Weiter ist

$$S' \bigoplus_{\mathcal{O}_{C',Q}} k(C') = k(C) \Rightarrow \text{Rg}(S') = [k(C) : k(C')] = n$$

Die maximalen Ideale m_1, \dots, m_r von S' entsprechen P_1, \dots, P_r , genauer: $S'_{m_i} = \mathcal{O}_{C, P_i}$
 Es ist $S'/_t \cdot S'$ n -dimensionaler Vektorraum über $R_U/(t) = k$.
 Weiter gilt:

$$tS' = \left(\bigcup_{i=1}^r tS'_{m_i} \right) \cap S'$$

Mit dem chinesischen Restsatz folgt:

$$S'/_t S' = \bigoplus_{i=1}^r S'/(tS'_{m_i} \cap S') \cong \bigoplus_{i=1}^r S'_{m_i}/tS'_{m_i} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{C, P_i}/(t)$$

und $\dim(\mathcal{O}_{C, P_i}/(t)) = e_{P_i}(f)$ □

Satz 8

Jeder Hauptdivisor auf einer irreduziblen, nichtsingulären Kurve hat Grad 0.

Beweis (Beweisidee)

$f \in k(C) \setminus k$ kann aufgefasst werden als rationale Abbildung $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k)$. Nach Prop. 18.5 ist f sogar ein Morphismus $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$. Der Satz folgt dann aus:

Beh 1: “ $\text{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$ ”

Beh 2: $\deg(f^*D) = \deg(f) \cdot \deg(D)$ für jeden Divisor D .

Beweis (von Beh 1) Seien $(x_0 : x_1)$ homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}^1(k)$. Dann ist $\text{div}(\frac{x_1}{x_0}) = (1 : 0) - (0 : 1)$ und

$$f^*((1 : 0) - (0 : 1)) \stackrel{4.19.4d.}{=} \text{div}\left(\frac{X_1}{X_0} \circ f\right) = \text{div}(f) \quad \square$$

Beweis (von Beh 2) folgt aus Proposition 4.19.5 b.) □

§20 Das Geschlecht einer Kurve

Sei C eine nichtsinguläre, projektive Kurve über k .

Definition + Bemerkung 4.20.1

Sei $D = \sum n_P P$ ein Divisor auf C .

- (a) $L(D) := \{f \in k(C) : D + \text{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ heißt **Riemann-Roch-Raum** zu D , $L(D)$ ist k -Vektorraum.
- (b) $L(0) = k$
- (c) Ist $\deg(D) < 0$, so ist $L(D) = 0$
- (d) Für $l(D) := \dim L(D)$ gilt:

$$l(D) = l(D'), \text{ falls } D \equiv D'$$

Beweis (a) $f \in L(D) \Leftrightarrow$ für jedes $P \in C$ ist $\text{ord}_P(f) \geq -n_P$
 $\text{ord}_P(f + g) \geq \min(\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g))$

- (d) Sei $D' = D + \operatorname{div}(g)$. Dann ist $L(D') \rightarrow L(D)$, $f \mapsto fg$ ein Isomorphismus von k -Vektorräumen, denn

$$\begin{aligned} D' + \operatorname{div}(f) \geq 0 &\Leftrightarrow D + \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow D + \operatorname{div}(fg) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Satz + Definition 9 (Riemann)

- (a) Für jeden Divisor $D \in \operatorname{Div}(C)$ mit $\deg D \geq -1$ ist $l(D) \leq \deg D + 1$.
 (b) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$, sodass für alle $D \in \operatorname{Div}(C)$ gilt

$$l(D) \geq \deg D + 1 - \gamma$$

- (c) Das kleinste $\gamma \in \mathbb{N}$, für das (b) erfüllt ist, heißt **Geschlecht** von C , Schreibweise: $g = g(C)$.

Bemerkung 4.20.2

- (a) Sind C und C' isomorph, so ist $g(C) = g(C')$.
 (b) $g(\mathbb{P}^1(k)) = 0$

Beweis (a) ✓

- (b) Zu zeigen: für jeden Divisor D vom Grad ≥ 0 auf $\mathbb{P}^1(k)$ ist $l(D) = \deg D + 1$.
 Schreibe: $D = D' + D_0$ mit $D' \geq 0$ und $\deg(D_0) = 0$. Nach Beispiel 4.19.3 ist D_0 Hauptdivisor.
 $\Rightarrow l(D') = l(D)$. Also $\forall D \geq 0$,

$$D = \sum_{i=1}^r n_i P_i \text{ mit } n_i \geq 1.$$

$$\Rightarrow L(D) = \{f \in k(X) : \operatorname{ord}_{P_i}(f) \geq -n_i, i = 1, \dots, r \text{ und } f \text{ regulär auf } \mathbb{P}^1(k) \setminus \{P_1, \dots, P_r\}\}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &1, \frac{1}{X - P_1}, \dots, \frac{1}{(X - P_1)^{n_1}}, \\ &\frac{1}{X - P_2}, \dots, \frac{1}{(X - P_2)^{n_2}}, \\ &\vdots \\ &\frac{1}{X - P_r}, \dots, \frac{1}{(X - P_r)^{n_r}} \end{aligned}$$

eine Basis von $L(D)$.

□

Beweis (von Satz 9) (a) Induktion über $d = \deg(D)$

$d = 0$: Ist $f \in L(D)$, $f \neq 0$, so ist $D + \operatorname{div}(f) \geq 0$. Da $\deg(D + \operatorname{div}(f)) = 0$, folgt $D + \operatorname{div}(f) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D &= -\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{f}\right) \\ \Rightarrow L(D) &= f \cdot k \Rightarrow l(D) \leq 1 \end{aligned}$$

$d \geq 1$: Sei $D = \sum_{P \in C}$ und $f_1, \dots, f_{d+2} \in L(D)$.

Zu zeigen: die f_i sind linear abhängig. Sei dazu $P \in C$. Sortiere die f_i so, dass

$$\begin{aligned} \text{ord}_P(f_i) &= -n_P \text{ für } i = 1, \dots, k \text{ und} \\ \text{ord}_P(f_i) &> -n_P \text{ für } i = k+1, \dots, d+2 \text{ (für ein } k \geq 0) \\ \Rightarrow f_i &\in L(D-P) \text{ für } i = k+1, \dots, d+2 \end{aligned}$$

Ist $k = 0$ oder $k = 1$, so sind $f_2, \dots, f_{d+2} \in L(D-P)$ nach Induktionsvoraussetzung linear abhängig. Sei also $k \geq 2$.

$$\text{Sei } g_i := u_i(P) \cdot f_1 - u_1(P) \cdot f_i = t^{-n_P} \underbrace{(u_i(P) \cdot u_1 - u_1(P) \cdot u_i)}_{\in m_P}$$

(“=”, wegen $f_i = t^{-n_P} \cdot u_i$ für $u_i \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ und einen Erzeuger $t = t_P$ von m_P)

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_i &\in L(D-P), i = 2, \dots, k \\ \Rightarrow g_2, \dots, g_k, f_{k+1}, \dots, f_{d+2} &\text{ sind linear abhängig} \\ \Rightarrow f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_{d+2} &\text{ sind linear abhängig} \end{aligned}$$

(b) **Behauptung 1:** Für jeden Divisor $D \in \text{Div}(C)$ und jedes $P \in C$ gilt

$$l(D+P) \leq l(D) + 1$$

denn: Sei f_1, \dots, f_n eine Basis von $L(D+P)$. Wie oben sei $f_1, \dots, f_k \notin L(D)$, $f_{k+1}, \dots, f_n \in L(D)$. Definiere $g_i, i = 2, \dots, k$ wie oben (ist $k \leq 1$, so ist $l(D) \geq n-1$).

$$\begin{aligned} g_2, \dots, g_k &\text{ linear unabhängig} \\ \Rightarrow g_2, \dots, g_k, f_{k+1}, \dots, f_n &\text{ linear abhängig} \\ \Rightarrow l(D) &\geq n-1 \end{aligned}$$

Für $D \in \text{Div}(C)$ sei $s(D) := \deg D + 1 - l(D)$. Dann ist zu zeigen

$$\exists \gamma \in \mathbb{N} \forall D \in \text{Div}(C) : s(D) \leq \gamma$$

Es gilt

- (i) $s(D) = s(D')$ für $D \equiv D'$ (4.20.1 (d))
- (ii) $s(D') \leq s(D)$, falls $D' \leq D$ (Behauptung 1)

Wähle nun $f \in k(C) - k$ fest. Sei

$$N := f^*(0) = \sum_{\substack{P \in C \\ f(P)=0}} \text{ord}_P(f) \cdot P$$

der Nullstellendivisor von f . $\deg(N) = \deg(f) =: n$.

Behauptung 2: Zu jedem Divisor $D \in \text{Div}(C)$ gibt es einen linear äquivalenten Divisor D' mit $D' \leq m \cdot N$ für ein $m \geq 1$.

Behauptung 3: Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit $l(m \cdot N) \geq m \cdot n + 1 - \gamma$ für alle $m \geq 1$.

Dann ist für $D \in \text{Div}(C)$ und D' wie in Behauptung 2

$$\begin{aligned} s(D) &\stackrel{(i)}{=} s(D') \stackrel{(ii)}{\leq} s(m \cdot N) = m \cdot n + 1 - l(m \cdot N) \\ &\stackrel{\text{Beh. 3}}{\leq} m \cdot n + 1 - (m \cdot n + 1) + \gamma = \gamma \end{aligned}$$

□

Beweis (von Behauptung 2) Sei $D = \sum n_P \cdot P$

Gesucht: $h \in k(C)$ mit

$$n_P + \text{ord}_P h \leq \begin{cases} m \cdot \text{ord}_P(f) & : \text{ord}_P(f) > 0 \\ 0 & : \text{ord}_P(f) \leq 0 \end{cases}$$

Seien P_1, \dots, P_r die Punkte in C , für die $n_i := n_{P_i} > 0$ ist, aber $\text{ord}_{P_i}(f) \leq 0$.

Sei $h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f(P_i)} \in k(C)^\times, i = 1, \dots, r$

$$\Rightarrow \text{ord}_{P_i}(h_i) \geq 1, i = 1, \dots, r$$

$\text{ord}_P(h_i) \geq 0$ für alle $P \neq P_i$ mit $\text{ord}_P(f) \leq 0$

$$\Rightarrow h := \prod_{i=1}^r h_i^{n_i} \text{ hat die gewünschte Eigenschaft}$$

□

Beweis (von Behauptung 3) Sei g_1, \dots, g_n eine Basis von $k(C)$ über $k(f) = k(\frac{1}{f})$.

Dabei können die g_i so gewählt werden, dass sie ganz über $k[\frac{1}{f}]$ sind.

\Rightarrow Jede Polstelle von g_i ist auch Polstelle von $\frac{1}{f}$, also Nullstelle von f .

$\Rightarrow \text{div}(g_i) + \gamma_0 N \geq 0$ für ein geeignet großes $\gamma_0 \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, n$) $\Rightarrow g_i \in L(\gamma_0 N)$

Sei $m \geq 1$

Beh.: $\frac{g_i}{f^\nu} \in L((m + \gamma_0)N), i = 1, \dots, n; \nu = 0, \dots, m$

Denn:

$$\text{div}(\frac{g_i}{f^\nu}) + (m + \gamma_0)N = \text{div}(g_i) - \nu \text{div}(f) + mN + \gamma_0 N \geq (m - \nu)N \geq 0, \text{ da } \text{div}(g_i) + \gamma_0 N \geq 0 \text{ (s.o.)}$$

Die $\frac{g_i}{f^\nu}$ sind k -linear unabhängig.

$$\Rightarrow l((m + \gamma_0)N) \geq m(n + 1)$$

$$\stackrel{\text{Bew. 1} + \text{Ind.}}{\Rightarrow} l(mN) \geq n(m + 1) - \gamma_0 n = mn - \underbrace{n(\gamma_0 - 1)}_{:= \gamma - 1}$$

(Denn: Kommt ein Punkt hinzu, so vergrößert sich die Dimension um 0 oder 1.)

□

Folgerung 4.20.3

Sei C eine nichtsinguläre, projektive Kurve, $g = g(C)$. Dann gibt es ein $d_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $D \in \text{Div}(C)$ mit $\deg(D) \geq d_0$ gilt:

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g$$

Beweis Nach Satz 8 gibt es ein D_0 mit $l(D_0) = \deg(D_0) + 1 - g$.

Sei $d_0 = \deg(D_0) + g$ und sei $D \in \text{Div}(C)$ mit $\deg(D) \geq d_0$

$$\Rightarrow l(D - D_0) \geq \deg(D) - \deg(D_0) + 1 - g \geq 1$$

Also gibt es ein $f \in L(D - D_0), f \neq 0$

$$\Rightarrow D' := D + \text{div}(f) \geq D_0$$

$$s(D) = s(D') \geq s(D_0) = g, \quad (s(D) = \deg(D) + 1 - l(D))$$

mit Satz 8: $s(D) \leq g \quad \forall D \Rightarrow s(D) = g$

□

Proposition 4.20.4

Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ eine nichtsinguläre projektive Kurve vom Grad $d \geq 1$ (d.h. $C = V(F)$ für ein homogenes Polynom F vom Grad d). Dann ist

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

Also: $d = 1, 2 \Rightarrow g = 0$; $d = 3 \Rightarrow g = 1$; $d = 4 \Rightarrow g = 3$; $d = 5 \Rightarrow g = 6 \dots$

Es existieren somit keine nichtsingulären Kurven vom Geschlecht $2, 4, 5, \dots$ in $\mathbb{P}^2(k)$

Beispiele 4.20.5

$V(X_0^d + X_1^d + X_2^d)$ ist nichtsingulär ($d \geq 1$, $\text{char}(k) \nmid d$) ("Fermat-Kurve")

Beweis Beh. 1: Es gibt eine Gerade $L \subset \mathbb{P}^2(k)$ mit $\sharp(C \cap L) = d$.

Denn: Ausnahme bilden nur die Tangenten. Deren Menge ist aber ein Zariski-abgeschlossener Unterraum der Menge der Geraden.

Sei $L = V(F_1)$ wie in Beh. 1, $L \cap C = \{P_1, \dots, P_d\}$

$\Leftrightarrow P_i \in D(X_0), \quad i = 1, \dots, d$

Beh.: Für $D = \sum_{i=1}^d P_i$, $m \geq 1$ und $g \in L(mD)$ gibt es ein homogenes Polynom $H \in k[X_0, X_1, X_2]$ mit $g = \frac{H}{F_1^m}$

Denn: Sei

$$f_1 = \frac{F_1}{X_0} \in k(C)$$

Dann ist $\text{div}(f_1^m g) = mD - mD' + \text{div}(g)$ mit einem effektiven Divisor D' mit Träger in $V(X_0)$
 $\Rightarrow f_1^m g$ ist ein Polynom in $\frac{X_1}{X_0}$ und $\frac{X_2}{X_0}$ vom Grad m .

Die Homogenisierung H von $f_1^m g$ erfüllt $g = \frac{H}{F_1^m}$

Also:

$$\begin{aligned} L(mD) &= k[X_0, X_1, X_2]_m / F \cdot k[X_0, X_1, X_2]_{m-d} \\ \Rightarrow l(mD) &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \frac{1}{2}(m-d+1)(m-d+2) \\ &= \frac{1}{2}[d(m-d+2) + d(m+1)] \\ &= md - \frac{1}{2}(d^2 - 3d) \\ &= md + 1 - \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \end{aligned}$$

□

§21 Der Satz von Riemann-Roch

Sei C eine nichtsinguläre projektive Kurve über k , k algebraisch abgeschlossen.

Erinnerung / Definition + Bemerkung 4.21.1

$\Omega_C := \Omega_{k(C)/k}$ sei der $k(C)$ -Vektorraum der k -Differentialen von $k(C)$. Die Elemente von $\Omega_{k(C)/k}$ heißen *rationale Differentiale* oder *meromorphe Differentiale* auf C . Es gilt: $\dim_{k(C)} \Omega_C = 1$

Beweis

- Ist $C = \mathbb{P}^1(k)$, so ist $k(C) = k(X)$ und $\Omega_C = k(C) \cdot dX$.

- Im Allgemeinen ist $k(C) = k(x, y)$ für geeignete x, y .
 x und y sind algebraisch abgänglich, das heißt es gibt $F \in k[X, Y]$ mit $F(x, y) = 0 \Rightarrow dF(x, y) = 0$. Es gibt also lineare Gleichungen zwischen dx und dy . \square

Definition + Bemerkung 4.21.2

Sei $\omega \in \Omega_C, \omega \neq 0$

- Für $P \in C$ sei t_P ein Erzeuger von m_P und $\omega = f dt_P$ (für ein $f \in k(C)$). Dann ist $\text{ord}_P \omega := \text{ord}_P(f)$ unabhängig von der Wahl des Erzeugers t_P .
- $\text{div}(\omega) := \sum_{P \in C} \text{ord}_P(\omega) \cdot P$ ist Divisor auf C .
- $K \in \text{Div } C$ heißt **kanonisch**, wenn es ein $\omega \in \Omega_C$ gibt mit $K = \text{div}(\omega)$.
- Je zwei kanonische Divisoren sind linear äquivalent.

Beweis (a) Übung!

- Sei $P \in C, t_P$ Erzeuger von m_P

$$U = C - \{\tilde{P} \in C : t_P \notin \mathcal{O}_{\tilde{P}}\}$$

ist offen in C . Für $Q \in U$ ist $t_Q := t_P - t_P(Q) \in m_Q$ und $d(t_Q) = d(t_P)$. Die Teilmenge

$$U' = \{Q \in U : t_Q \notin m_a^2\}$$

ist offen (!). Für $Q \in U'$ ist $\text{ord}_Q(\omega) = \text{ord}_P(f)$.

$\Rightarrow \text{ord}_Q(\omega) \neq 0$ für nur endlich viele $Q \in U'$. \square

Beispiele

$C = \mathbb{P}^1(k), \omega = dz$

In $a \in C$ ist $z - a$ ein Erzeuger von m_a

$\Rightarrow \text{ord}_a \omega = 0$, da $\omega = dz = 1 \cdot d(z - a)$

In ∞ ist $\frac{1}{z}$ Erzeuger von m_∞ .

$$dz = -z^2 d\left(\frac{1}{z}\right), \text{ord}_\infty(z^2) = -2 \Rightarrow \text{div}(\omega) = -2 \cdot \infty$$

Satz 10 (Riemann-Roch)

Sei C eine nichtsinguläre projektive Kurve über k , K ein kanonischer Divisor auf C . Dann gilt für jeden Divisor $D \in \text{Div}(C)$:

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

Beweis für den Fall $C \subset \mathbb{P}^2(k)$.

Behauptung: Für jeden Divisor D mit $l(D) > 0$ und jedes $P \in C$ gilt:

Ist $l(K - D - P) \neq l(K - D)$, so ist $l(D + P) = l(D)$.

Proposition 4.21.3

Sei $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2(k)$ nichtsinguläre projektive Kurve vom Grad $d \geq 3$ und $L \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine Gerade mit $L \cap C = \{P_1, \dots, P_d\}$. Dann ist

$$K = \sum_{i=1}^d (d-3)P_i$$

ein kanonischer Divisor.

Probe:

$$\begin{aligned}\deg K + 2 &= d(d-3) + 2 = d^2 - 3d + 2 = 2g \\ g &= \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \frac{1}{2}(d^2 - 3d + 2)\end{aligned}$$

Beweis $\curvearrowright L = V(X_0)$. Sei $X = \frac{X_1}{X_0}, Y = \frac{X_2}{X_0}$ (als Elemente von $k(C)$)

Behauptung:

$$\operatorname{div}(dx) = \sum_{i=1}^d (d-3)P_i + \operatorname{div}(f_y)$$

wobei f_y die Klasse in $k(C)$ von $\frac{1}{X_0^{d-1}} \cdot \frac{\partial F}{\partial X_2}$ ist. Dann ist

$$\operatorname{div}(f_y) = \sum_{P \in U_0} \operatorname{ord}_P \frac{\partial F}{\partial X_2} \cdot P - \sum_{i=1}^d (d-1) \cdot P_i$$

Zu zeigen ist also:

$$\operatorname{div} dx = \sum_{P \in U_0} \operatorname{ord}_P \frac{\partial F}{\partial X_2} P - 2 \cdot \sum_{i=1}^d P_i$$

□

Folgerung 4.21.4

$$D = 0 : 1 - l(K) = 1 - g$$

- (a) $l(K) = g$
- (b) $\deg(K) = 2g - 2, g - 1 = \deg K + 1 - g; D = K$
- (c) für $\deg D \geq 2g - 1$ ist $l(D) = \deg D + 1 - g$