

8 Martingale und Stoppzeiten

Definition Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- a) Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in I}$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) heißt **stochastischer Prozess** ($I \subset \mathbb{R}$)
- b) Eine Familie von σ -Algebren $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$, mit $\mathfrak{F}_t \subset \mathcal{A}$ und $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$, für $s \leq t$ heißt **Filtration**. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ heißt $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**adaptiert**, falls X_t \mathfrak{F}_t -messbar $\forall t \in I$.

Bemerkung Oft wird $\mathfrak{F}_t := \sigma(\{X_s, s \leq t\})$ gewählt. Dann ist $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration und X_t ist \mathfrak{F}_t -messbar.

Definition Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , $I \subset \mathbb{R}$, eine Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ und ein dazu adaptierter stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$. Ist $E|X_t| < \infty \forall t \in I$, so heißt $(X_t)_{t \in I}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**Martingal**, falls $E[X_t | \mathfrak{F}_s] = X_s \forall s, t \in I, s \leq t$.

Ist $X_s \leq E[X_t | \mathfrak{F}_s]$ bzw. $X_s \geq E[X_t | \mathfrak{F}_s]$, so nennt man $(X_t)_{t \in I}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**Submartingal** bzw. $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -**Supermartingal**.

Bemerkung a) Beim Martingal gilt: $EX_s = E[E[X_t | \mathfrak{F}_s]] = EX_t \forall t \in I$, d.h. der Erwartungswert ist konstant (wachsend beim Submartingal, fallend beim Supermartingal).

- b) Ist $I = \mathbb{N}$, so genügt z.z.:

$$E[X_{t+1} | \mathfrak{F}_t] = X_t \forall t \in \mathbb{N}$$

- c) Ist $(F_t)_{t \in I}$ die natürliche Filtration, so sagt man oft nur $(X_t)_{t \in I}$ ist ein Martingal.

Beispiel 8.1 Sei $I = \mathbb{N}$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ . Sei $S_n := \sum_{k=1}^n X_k \forall n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{F}_n := \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : E[S_{n+1} | \mathfrak{F}_n] = E[S_n | \mathfrak{F}_n] + E[X_{n+1} | \mathfrak{F}_n] = S_n + \mu$.

Also: $\mu = 0 \implies (S_n)$ ist Martingal
 $\mu \leq 0 \implies (S_n)$ ist Supermartingal
 $\mu \geq 0 \implies (S_n)$ ist Submartingal

Beispiel 8.2 Sei $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration und X eine Zufallsvariable mit $E|X| < \infty$. Sei $X_t := E[X | \mathfrak{F}_t]$. dann ist $(X_t)_{t \in I}$ $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -adaptiert und $\forall s, t \in I, s \leq t$:

$$E[X_t | \mathfrak{F}_s] = E[E[X | \mathfrak{F}_t] | \mathfrak{F}_s] \stackrel{S.7.3a)}{=} E[X | \mathfrak{F}_s] = X_s$$

$\implies (X_t)_{t \in I}$ ist ein $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -Martingal.

Satz 8.1

Ist $(X_t)_{t \in I}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -Martingal und $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $E|\Phi(X_t)| < \infty \forall t \in I$, so ist $(\Phi(X_t))_{t \in I}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ -Submartingal.

Beweis Sei $s, t \in I, s \leq t : E[\Phi(X_t)|\mathfrak{F}_s] \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \Phi(\underbrace{E[X_t|\mathfrak{F}_s]}_{=X_s})$ ■

Im Folgenden: $I = \{1, 2, \dots, n\}$ und $X^* := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

Satz 8.2 (Submartingal-Ungleichung von Doob)

Ist $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ ein $(\mathfrak{F}_i)_{i=1, \dots, n}$ -Submartingal, so gilt $\forall c > 0 :$

$$c \cdot P(X^* > c) \leq \int_{\{X^* > c\}} X_n dP \leq EX_n^+$$

Beweis Sei $A := \{X^* > c\}, A_i := \{X_1 \leq c, \dots, X_{i-1} \leq c, X_i > c\}, i = 1, \dots, n$

$$\implies A = A_1 + \dots + A_n, A_i \in \mathfrak{F}_i \text{ und } X_i > c \text{ auf } A_i, i = 1, \dots, n.$$

$$\implies \int_{A_i} X_n dP \stackrel{\text{bed. EW}}{=} \int_{A_i} E[X_n|\mathfrak{F}_i] dP \stackrel{\text{Sub-M.}}{\geq} \int_{A_i} X_i dP \geq cP(A_i), i = 1, \dots, n$$

Summation über $i = 1, \dots, n \implies 1.$ Ungleichung

2. Ungleichung: $X_n \cdot \mathbf{1}_A \leq X_n^+$ ■

Satz 8.3 (L^p -Ungleichung von Doob)

Es sei $p > 1$ und $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ ein nicht-negatives $(\mathfrak{F}_i)_{i=1, \dots, n}$ -Submartingal mit der Eigenschaft $\sup_{i=1, \dots, n} EX_i^p < \infty$. Dann gilt:

$$E(X^*)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p EX_n^p$$

Beweis

$$\begin{aligned} E(X^*)^p &= E \int_0^{X^*} p \cdot y^{p-1} dy \\ &= E \int_0^\infty p \cdot y^{p-1} \mathbf{1}_{[X^* \geq y]} dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty p y^{p-1} \cdot P(X^* \geq y) dy \\ &\stackrel{\text{S.8.2}}{\leq} \int_0^\infty p \cdot y^{p-2} E[X_n \cdot \mathbf{1}_{[X^* \geq y]}] dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} E \left[X_n \int_0^{X^*} p y^{p-2} dy \right] \\ &= \frac{p}{p-1} E[X_n (X^*)^{p-1}] \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1} (EX_n^p)^{\frac{1}{p}} \left(E((X^*)^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{p}{p-1} (EX_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E(X^*)^p)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Teile Ungleichung durch $(E(X^*)^p)^{1-\frac{1}{p}}$ (falls $E(X^*)^p = 0$ ist Aussage richtig) und nehme p -te Potenz \implies Behauptung. ■

Bemerkung a) Ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so lässt sich Satz 8.3 schreiben als $\|X^*\|_p \leq q \cdot \|X_n\|_p$

b) Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ mit $\sup_{t \in I} \|X_t\|_p < \infty$ heißt L^p -**beschränkt**.

c) Ist $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ ein Martingal, so ist $(|X_i|)_{i=1, \dots, n}$ ein nicht negatives Submartingal (Satz 8.1)

Beispiel 8.3 Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess. Interpretation von (X_n) :

$X_0 \equiv$ Anfangskapital des Spielers

$X_n - X_{n-1} \equiv$ Gewinn pro gesetzter Geldeinheit in der n -ten Runde

Wird immer eine Geldeinheit pro Runde gesetzt, so ist also $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$ das Kapital des Spielers nach n Runden. Es sei

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_0, X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1}) = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

Das entspricht der Information nach n Runden.

$$\implies E[X_{n+1} - X_n | \mathfrak{F}_n] = E[X_{n+1} | \mathfrak{F}_n] - X_n$$

Das entspricht dem erwarteten Gewinn pro gesetzter Geldeinheit bei Kenntnis des bisherigen Spielverlaufs.

Offenbar gilt:

X Martingal	\iff	Spiel fair
X Supermartingal	\iff	Spiel nachteilig
X Submartingal	\iff	Spiel vorteilhaft

Beispiel 8.4

$X_n - X_{n-1}$ sei der Gewinn pro gesetzter Geldeinheit (GE) in der n -ten Runde.

Jetzt: In Runde n werden c_n GE gesetzt mit $c_n \mathfrak{F}_{n-1}$ -messbar.

$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_0, X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1})$, d.h. $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist vorhersagbar.

Kapital nach n Spielen:

$$X_0 + \sum_{k=1}^n c_k (X_k - X_{k-1})$$

Satz 8.4

Es seien $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein vorhersagbarer Prozess und $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Prozess mit $E|c_n(X_n - X_{n-1})| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$Y_n := X_0 + \sum_{k=1}^n c_k (X_k - X_{k-1}), \quad Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dann gilt:

a) Ist X ein Martingal, so auch Y .

- b) Ist X ein Sub- bzw. Supermartingal und $c_n \geq 0 \quad \forall n$, so ist auch Y ein Sub- bzw. Supermartingal.

Beweis

$$E[Y_{n+1} - Y_n | \mathfrak{F}_n] = E[c_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathfrak{F}_n] \stackrel{c_{n+1} \mathfrak{F}_n\text{-m.b.}}{=} c_{n+1} \cdot E[X_{n+1} - X_n | \mathfrak{F}_n].$$

Definition

Eine Abbildung $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn

$$\{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung

- a) Stoppzeiten kann man analog für $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ definieren.
b) $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist Stoppzeit $\iff \{\tau = n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. (Übung)

Beispiel 8.5

- a) $\tau \equiv n_0$ ist Stoppzeit, da

$$\{\tau \leq n\} = \begin{cases} \Omega & n \geq n_0 \\ \emptyset & n < n_0 \end{cases} \in \mathfrak{F}_n$$

b) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein zu $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ adaptierter reellwertiger Prozess und $A \in \mathfrak{B}$. Sei $\tau_A : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$\tau_A(\omega) := \inf \{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n(\omega) \in A\} \quad (\inf \{\emptyset\} := \infty)$$

τ_A heißt **Eintrittszeit** in A .

τ_A ist Stoppzeit, da

$$\{\tau_A \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{\{X_i \in A\}}_{\in \mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{F}_n.$$

Lemma 8.1

- a) Für eine Stoppzeit ist

$$\mathfrak{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

eine σ -Algebra, die σ -**Algebra der τ -Vergangenheit**.

- b) Sind τ_1, τ_2 Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2$, so gilt $\mathfrak{F}_{\tau_1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$.

c) Ist τ eine Stoppzeit, so ist $X_\tau^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$X_\tau^*(\omega) := \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{wenn } \tau(\omega) < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \mathfrak{F}_\tau\text{-messbar}$$

Beweis

a) Übung.

b) Sei $A \in \mathfrak{F}_{\tau_1}$ beliebig. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\{\tau_2 \leq n\} \subset \{\tau_1 \leq n\} \implies A \cap \{\tau_2 \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau_1 \leq n\}}_{\in \mathfrak{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \leq n\}}_{\in \mathfrak{F}_n} \in \mathfrak{F}_n.$$

\implies Beh.

c) zu zeigen: $\{X_\tau^* \in A\} \in \mathfrak{F}_\tau \quad \forall A \in \mathfrak{B}$

zeige also: $\{X_\tau^* \in A\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Es gilt:

$$\{X_\tau^* \in A\} \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \underbrace{\{X_k \in A\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \cap \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \in \mathfrak{F}_k,$$

$$\text{da } \{\tau = k\} = \underbrace{\{\tau \leq k\}}_{\in \mathfrak{F}_k} \cap \underbrace{\{\tau \leq k-1\}^C}_{\in \mathfrak{F}_k} \in \mathfrak{F}_k.$$

\implies Beh. ■

Bemerkung

a) $\mathfrak{F}_\tau \equiv$ Information, die bis zur zufälligen Zeit τ vorhanden ist.

b) Falls τ P -f.s. endlich, schreibt man X_τ statt X_τ^* .

c) Ist τ eine Stoppzeit und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess, so ist $X^\tau = (X_n^\tau)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $X_n^\tau := X_{\tau \wedge n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ der **gestoppte Prozess**.

Da $\tau \wedge n$ eine Stoppzeit ist, ist wegen Lemma 8.1c) $X_{\tau \wedge n} \mathfrak{F}_{\tau \wedge n}$ -messbar und (X_n^τ) ist $(\mathfrak{F}_{\tau \wedge n})$ -adaptiert.

Satz 8.5

Ist X ein (Sub-, Super-) Martingal und ist τ eine Stoppzeit, so ist auch X^τ ein (Sub-, Super-) Martingal.

Beweis

Sei $c_n := \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}} \implies \{\tau \geq n\} = \{\tau \leq n-1\}^C \in \mathfrak{F}_{n-1}$.

$\implies (c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist vorhersagbar. Da $X_0 + \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1}) = X_{\tau \wedge n}$, folgt die Behauptung mit Satz 8.4. ■

Bemerkung

Ist X ein Martingal, so auch X^τ und damit gilt $EX_{\tau \wedge n} = EX_0$.

Betrachte Bsp 8.4 mit $\tau := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_k \geq X_0 + c\}$ und $c_n := \mathbf{1}_{\{\tau \geq n\}}$:

Solange c nicht erreicht ist, wird eine Geldeinheit gesetzt, danach aufgehört. Spielt man maximal n -mal, so ist $X_{\tau \wedge n}$ das Kapital am Ende. Im Mittel kann man das Kapital bei einem fairen Spiel nicht erhöhen.

Beispiel 8.6 (Kartenspiel)

Sei

- S_0 die Anzahl der schwarzen Karten und
- R_0 die Anzahl der roten Karten und
- $N := S_0 + R_0$ die Gesamtzahl an Karten.
- (R_n, S_n) die Anzahl der roten / schwarzen Karten im Stapel, nachdem n Karten aufgedeckt wurden.
- Z_n die Farbe der n -ten aufgedeckten Karte.
- $\mathfrak{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ und
- $X_n := \frac{S_n - R_n}{S_n + R_n}$.

Behauptung: (X_n) ist (\mathfrak{F}_n) -Martingal!

$$\begin{aligned}
 E[X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= E\left[\frac{S_{n+1} - R_{n+1}}{S_{n+1} + R_{n+1}} \mid Z_1, \dots, Z_n\right] \\
 &= \frac{S_n}{S_n + R_n} \left[\frac{S_n - 1 - R_n}{S_n - 1 + R_n}\right] + \frac{R_n}{S_n + R_n} \left[\frac{S_n - R_n + 1}{S_n + R_n - 1}\right] \\
 &= \frac{(R_n + S_n - 1)(S_n - R_n)}{(S_n + R_n)(S_n + R_n - 1)} \\
 &= \frac{S_n - R_n}{S_n + R_n}
 \end{aligned}$$

Sei τ eine Stoppzeit ($\leq N$). Erwarteter Gewinn:

$$\begin{aligned}
 &E[\mathbf{1}_{[Z_{\tau+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{\tau+1} = \text{rot}]}] \\
 &= E\left[\sum_{k=1}^N (\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{rot}]}) \mathbf{1}_{[\tau=k]}\right] \\
 &= \sum_{k=1}^N E\left[E[(\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{rot}]}) \mathbf{1}_{[\tau=k]} \mid \mathfrak{F}_k]\right] \\
 &= \sum_{k=1}^N E\left[\mathbf{1}_{[\tau=k]} \underbrace{E[\mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{schwarz}]} - \mathbf{1}_{[Z_{k+1} = \text{rot}]} \mid \mathfrak{F}_k]}_{= \frac{S_k - R_k}{S_k + R_k} = X_k}\right]
 \end{aligned}$$

$$= E[X_\tau] = EX_0 = \frac{S_0 - R_0}{S_0 + R_0}$$

$EX_\tau = EX_0$ gilt nur unter einer Bedingung, wie dieses Beispiel zeigt.

Beispiel 8.7 Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. ZVen mit

$$P(Y_n = -1) = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad X_0 \equiv 0$$

Y_n = Ergebnis Münzwurf in Runde n .

Der Spieler setzt 2^{n-1} GE in der n -ten Runde, bei Gewinn erhält er 2^n GE, d.h. $Y_n \cdot 2^{n-1}$ ist der Geldzu-/abgang in der n -ten Runde.

Kapital nach n Runden:

$$X_n := \sum_{i=1}^n 2^{i-1} Y_i$$

Sei $\mathfrak{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ und $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n = 1\}$ d.h. gestoppt wird, wenn erstmals $Y_n = 1$ (\rightarrow Martingalstrategie). $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Martingal (s. Bsp. 8.1).

Es gilt:

$$P(\tau > k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow P(\tau < \infty) = 1$$

und

$$X_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\tau=k} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} + 2^{k-1}\right)}_{=1} \mathbf{1}_{\tau=k} \equiv 1$$

Also ist hier $EX_\tau = 1 \neq EX_0 = 0$.

Vorsicht bei der Nachahmung!

Das benötigte Kapital beträgt $-X_{\tau-1}$ GE und

$$\begin{aligned} E(-X_{\tau-1}) &= E\left(\sum_{k=1}^{\tau-1} 2^{k-1}\right) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \mathbf{1}_{[\tau > k]}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \underbrace{P(\tau > k)}_{=2^{-k}} = \infty \end{aligned}$$

Satz 8.6 (Optional Stopping Theorem OST)

Es sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Supermartingal und τ eine Stoppzeit. Jede der folgenden Bedingungen impliziert, dass $E|X_\tau| < \infty$ und $EX_\tau \leq EX_1$ gilt:

1. τ ist f.s. beschränkt, also $P(\tau < c) = 1$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

2. τ ist f.s. endlich und X ist f.s. beschränkt, d.h. $P(\tau < \infty) = 1$ und es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $P(|X_n| \leq c) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
3. $E\tau < \infty$ und X hat f.s. beschränkte Zuwächse, d.h. $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $P(|X_n - X_{n-1}| \leq c) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
4. $P(\tau < \infty) = 1, E|X_\tau| < \infty$ und $\int_{\{\tau > n\}} |X_n| dP \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt und X ein Martingal, so gilt: $EX_\tau = EX_1$.

Beweis 1. Ist klar, da hier $X_\tau = X_{\tau \wedge n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ groß ($n > c$). Die Behauptung folgt aus Satz 8.5.

2. Satz 8.5 und majorisierte Konvergenz.
3. Verwende $|X_1| + c(\tau - 1)$ als integrierbare Majorante.
4. Wir zeigen die Aussage für X ist Martingal:

$$\begin{aligned}
 |EX_\tau - EX_{\tau \wedge n}| &= \left| \int X_\tau dP - \int_{\{\tau \leq n\}} X_\tau dP - \int_{\{\tau > n\}} X_n dP \right| \\
 &\leq \left| \int_{\{\tau > n\}} X_\tau dP \right| + \left| \int_{\{\tau > n\}} X_n dP \right| \\
 &\leq \underbrace{\int_{\{\tau > n\}} |X_\tau| dP}_{\rightarrow 0(n \rightarrow \infty)} + \underbrace{\int_{\{\tau > n\}} |X_n| dP}_{\rightarrow 0(n \rightarrow \infty)} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Beispiel 8.8 (Ruinspiel, vgl. Stochastik I, Bsp 10.4) Spieler I besitze n GE ($n \in \mathbb{N}$), Spieler II $N - n$ GE ($N - n \in \mathbb{N}$). Pro Runde gewinnt Spieler I von Spieler II 1 GE mit W'keit p und verliert eine GE an Spieler II mit W'keit $1 - p$. Spielrunden sind unabhängig. Seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u.i.v. ZV mit

$$P(Y_n = 1) = p, \ P(Y_n = -1) = 1 - p.$$

$X_n := \sum_{k=1}^n Y_k$ ist dann der Gewinn (Verlust) von Spieler I nach n Runden.

Sei

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = N - n \text{ oder } X_n = -n\}$$

$P(X_\tau = -n)$ = Ruinwahrscheinlichkeit von Spieler I.

Sei $\mu = EY_1 = 2p - 1$. Nach Beispiel 8.1 $\mu = 0 \Rightarrow (X_n)$ Martingal. $\mu \leq 0 \Rightarrow (X_n)$

Supermartingal. $\mu \geq 0 \Rightarrow (X_n)$ Submartingal.

Behauptung: $\exists a > 0, 0 < \gamma < 1$, sodass $P(\tau > j) \leq a\gamma^j \ \forall j \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 P(\tau > Nk) &\leq P((Y_1, \dots, Y_n) \neq (1, \dots, 1), \\
 &\quad (Y_{N+1}, \dots, Y_{2N}) \neq (1, \dots, 1), \dots, (Y_{(k-1)N+1}, \dots, Y_{kN}) \neq (1, \dots, 1)) \\
 &\stackrel{(Y_n) \text{ unabh.}}{=} \prod_{v=0}^{k-1} P((Y_{vN+1}, \dots, Y_{(v+1)N}) \neq (1, \dots, 1)) \\
 &= (1 - p^N)^k
 \end{aligned}$$

Für $j > N$ gilt:

$$P(\tau > j) \leq P(\tau > \lfloor \frac{j}{N} \rfloor N) \leq (1 - p^N)^{\lfloor \frac{j}{N} \rfloor} \leq \underbrace{\left((1 - p^N)^{\frac{1}{N}} \right)^j}_{=: \gamma^j} \underbrace{(1 - p^N)^{-1}}_{=: a}$$

■

Also folgt: $P(\tau < \infty) = 1, E\tau = \sum_{j=1}^{\infty} P(\tau \geq j) < \infty$ und $1 = P(\tau < \infty) = P(X_\tau = N - n) + P(X_\tau = -n)$.

Sei nun $M_n := \sum_{k=1}^n (Y_k - \underbrace{EY_k}_{=\mu}), n \in \mathbb{N}_0, M_0 = 0$ und $\mathfrak{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

Dann ist $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein (\mathfrak{F}_n) -Martingal. Das OST ist anwendbar, da (iii) erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= EM_\tau = P(X_\tau = N - n)(N - n - E\tau\mu) + P(X_\tau = -n)(-n - E\tau\mu) \\ &= P(X_\tau = N - n)(N - n) - P(X_\tau = -n)n - E\tau\mu. \end{aligned}$$

Fall 1: $\mu = 0$ (d.h. $p = \frac{1}{2}$, faires Spiel)

$$\Rightarrow 0 = (1 - P(X_\tau = -n))(N - n) - P(X_\tau = -n)n \Rightarrow P(X_\tau = -n) = \frac{N - n}{N}$$

Fall 2: $p \neq \frac{1}{2}$

Sei $\Theta := \log(\frac{1-p}{p}) \neq 0$ und $L_0 := 1, L_n := \prod_{k=1}^n e^{\Theta Y_k} = e^{\Theta X_n}$.
 $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Martingal, da

$$E[L_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] = \prod_{k=1}^n e^{\Theta Y_k} \cdot \underbrace{E[e^{\Theta Y_{n+1}}]}_{pe^{\Theta} + (1-p)e^{-\Theta} = 1} = L_n$$

Das Optional Stopping Theorem 8.6 ist anwendbar, da (iv) erfüllt
 $E|L_\tau| = Ee^{\Theta X_\tau} \leq e^{|\Theta|N} < \infty$ und

$$\int_{\{\tau > n\}} |L_n| dP \leq e^{|\Theta|N} \underbrace{P(\tau > n)}_{\rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= EL_0 = EL_\tau = P(X_\tau = N - n)e^{\Theta(N-n)} + P(X_\tau = -n)e^{-\Theta n} \\ \Rightarrow 1 &= (1 - P(X_\tau = -n)) \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-n} + P(X_\tau = -n) \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \\ \Rightarrow P(X_\tau = -n) &= \frac{\phi^N - \phi^n}{\phi^N - 1}, \quad \phi = \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Optimales Stoppen

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_n)_{n=1, \dots, N}$ ein stochastischer Prozess adaptiert an eine Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n=1, \dots, N}$. Es sei $E|X_k| < \infty \quad \forall k = 1, \dots, N$. Betrachte das Optimierungsproblem

$$v := \sup_{\tau \text{ ist Stoppzeit } \leq N} \{EX_\tau\} = EX_{\tau_0}$$

v = maximaler Wert,

τ_0 = optimale Stoppzeit (falls existent). Wegen

$$E|X_\tau| = \sum_{n=1}^N E(|X_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}) \leq \sum_{n=1}^N E|X_n| < \infty$$

nach Voraussetzung ist $v < \infty$. Ist $(X_n)_{n=1,\dots,N}$ ein $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$ Supermartingal, so folgt mit Satz 8.6: $EX_1 \geq EX_\tau \quad \forall$ Stoppzeiten $\tau \leq N$.

Also: $\tau_0 \equiv 1$ ist optimal (sofort aufhören).

Definition

Der Prozess $Z = (Z_n)_{n=1,\dots,N}$ mit

$$Z_N := X_N, \quad Z_n := \max\{X_n, E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]\}, \quad n = N-1, \dots, 1$$

heißt **Snell-Einhüllende** von X .

Satz 8.7 Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

- a) Z ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$ -Supermartingal mit $Z_n \geq X_n$ für $n = 1, \dots, N$.
- b) Z ist das kleinste (\mathfrak{F}_n) -Supermartingal, welches X dominiert, d.h. ist $(Y_n)_{n=1,\dots,N}$ ein weiteres (\mathfrak{F}_n) -Supermartingal mit $Y_n \geq X_n$, $n = 1, \dots, N$ so gilt: $Y_n \geq Z_n$ für $n = 1, \dots, N$.

Beweis

- a) Aus der Definition: $Z_n \geq X_n \quad \forall n$, $Z_n \geq E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]$, also (Z_n) Supermartingal.
- b) Rückwärtsinduktion:
 $(n = N): Y_N \geq X_N = Z_N$
 $(n \rightarrow n-1): Y_{n-1} \stackrel{Y \text{ Supermartingal}}{\geq} E[Y_n | \mathfrak{F}_{n-1}] \stackrel{\text{I.H.}}{\geq} E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}]$ und $Y_{n-1} \geq X_{n-1}$
 $\implies Y_{n-1} \geq \max\{X_{n-1}, E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}]\} = Z_{n-1}$ ■

Satz 8.8

Mit den obigen Bezeichnungen und $\tau_0 = \min\{n \in \{1, \dots, N\} \mid X_n = Z_n\}$ gilt:

- a) τ_0 ist eine Stoppzeit.
- b) $(Z_n^{\tau_0})_{n=1,\dots,N}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n=1,\dots,N}$ -Martingal.
- c) $EX_{\tau_0} = \sup_{\tau \text{ Stoppzeit}} \{EX_\tau\}$

Beweis

a) Wegen $Z_N = X_N$ ist $\tau_0 \leq N$. Es gilt:

$$\{\tau_0 \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{\{Z_i = X_i\}}_{\in \mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{F}_n$$

b) Es gilt:

$$\underbrace{Z_{n+1}^{\tau_0}}_{=Z_{(n+1) \wedge \tau_0}} - \underbrace{Z_n^{\tau_0}}_{=Z_n \wedge \tau_0} = \mathbf{1}_{\{\tau_0 \geq n+1\}} (Z_{n+1} - E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]) \quad (*)$$

da

Fall 1: $\tau_0 \geq n+1$

linke Seite = $Z_{n+1} - Z_n$,

rechte Seite = $Z_{n+1} - \underbrace{E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]}_{=Z_n}$, da $X_n < Z_n$ auf $\{\tau_0 \geq n+1\}$. (stimmt)

Fall 2: $\tau_0 \leq n$

$0 = 0$ (stimmt)

Wende nun $E[\cdot | \mathfrak{F}_n]$ auf (*) an:

Da $\{\tau_0 \geq n+1\} = \{\tau_0 \leq n\}^C \in \mathfrak{F}_n$ folgt

$$E[Z_{n+1}^{\tau_0} - Z_n^{\tau_0} | \mathfrak{F}_n] = \mathbf{1}_{\{\tau_0 \geq n+1\}} E[Z_{n+1} - E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n] | \mathfrak{F}_n] = 0$$

$\implies (Z_n^{\tau_0})$ ist (\mathfrak{F}_n) -Martingal.

c) Wegen b) und Satz 8.6:

$$EZ_1 = EZ_1^{\tau_0} = EZ_N^{\tau_0} = EZ_{\tau_0} = EX_{\tau_0}$$

Für eine beliebige Stoppzeit τ gilt:

$EZ_1 \geq EZ_\tau$, da Z Supermartingal. Und weiterhin:

$$EX_{\tau_0} = EZ_1 \geq EZ_1 \geq EZ_\tau \geq EX_\tau \implies \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

Beispiel 8.9 (Das Sekretärinnenproblem) N Bewerber(innen) um eine Stelle stellen sich nacheinander vor. Nach jedem Interview muss entschieden werden, ob die Person die Stelle bekommt.

Annahme: Die Bewerber lassen sie linear anordnen und erscheinen in beliebiger Reihenfolge. ($N!$ mögliche Reihenfolgen)

Welche Strategie maximiert die Wahrscheinlichkeit, dass die beste Person die Stelle bekommt?

- A_n = absoluter Rang des n -ten Kandidaten unter allen N .
- R_n = dessen relativer Rang unter den ersten N . $R_n = \{1 \leq m \leq n \mid A_m \leq A_n\}$.

Es gibt eine Bijektion zwischen den A -Werten und den R -Werten. Somit gilt $\forall r_1, \dots, r_N$, $1 \leq r_i \leq i$, $1 \leq i \leq N$:

$$P(R_1 = r_1, \dots, R_N = r_N) = \frac{1}{N!}$$

Bestimme Randverteilungen:

$$P(R_n = l) = \frac{1}{n} \quad \text{für } l = 1, \dots, n \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

und R_1, \dots, R_N unabhängig. Sei nun

$$\bar{X}_n := \begin{cases} 1, & A_n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \mathfrak{F}_n = \sigma(R_1, \dots, R_n)$$

und $X_n = E[\bar{X}_n | \mathfrak{F}_n]$. (X_n) ist (\mathfrak{F}_n) -adaptiert. $P(\bar{X}_\tau = 1) \rightarrow \max$.

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_\tau = 1) &= \sum_{n=1}^N P(\bar{X}_n = 1, \tau = n) = \sum_{n=1}^N E \mathbf{1}_{[\tau=n, \bar{X}_n=1]} \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{\{\tau=n\}} \bar{X}_n dP = \sum_{n=1}^N \int_{\{\tau=n\}} \underbrace{E[\bar{X}_n | \mathfrak{F}_n]}_{=X_n} dP \\ &= EX_\tau \end{aligned}$$

Also maximiere EX_τ mit Satz 8.8.

$$\begin{aligned} P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, A_n = 1) &= P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1, R_{n+1} > 1, \dots, R_N > 1) \\ &= \frac{1}{N!} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (N-1) = \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A_n = 1 \mid R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1) &= \frac{P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1, A_n = 1)}{P(R_1 = r_1, \dots, R_{n-1} = r_{n-1}, R_n = 1)} \\ &= \frac{\frac{n}{N} \cdot \frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n}{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_n = E[\mathbf{1}_{\{1\}}(A_n) | \mathfrak{F}_n] = \begin{cases} \frac{n}{N}, & \text{falls } R_n = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (*)$$

Behauptung: $\exists (c_n)_{n=1, \dots, N} \subset \mathbb{R}$, $c_n \downarrow$, $c_N = \frac{1}{N}$ und $E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}] \equiv c_n$ für $n = 1, \dots, N$, wobei Z die Snell-Einhüllende von X ist.

Beweis: Rückwärtsinduktion:

$n = N$:

$$\begin{aligned} E[Z_N | \mathfrak{F}_{N-1}] &= E[X_N | \mathfrak{F}_{N-1}] \stackrel{A_N = R_N}{=} E[\mathbf{1}_{\{1\}}(R_N) | \mathfrak{F}_{N-1}] \\ &\stackrel{R_N, \mathfrak{F}_N \text{ unabh.}}{=} P(R_N = 1) = \frac{1}{N} = c_N. \end{aligned}$$

$n+1 \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned}
E[Z_n | \mathfrak{F}_{n-1}] &= E[\max\{X_n, E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n]\} | \mathfrak{F}_{n-1}] \\
&\stackrel{(*)}{=} E[\max\{\frac{n}{N} \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}(R_n), c_{n+1}\} | \mathfrak{F}_{n-1}] \\
&= E[\mathbf{1}_{\{1\}}(R_n) \cdot \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1 - \mathbf{1}_{\{1\}}(R_n))c_{n+1} | \mathfrak{F}_{n-1}] \\
&\stackrel{R_n, \mathfrak{F}_{n-1} \text{ unabh.}}{=} P(R_n = 1) \cdot \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1 - P(R_n = 1)) \cdot c_{n+1} \\
&= \frac{1}{n} \max\{\frac{n}{N}, c_{n+1}\} + (1 - \frac{1}{n})c_{n+1} \\
&\Rightarrow c_n = c_{n+1} + \underbrace{\max\{\frac{1}{N}, \frac{c_{n+1}}{n}\} - \frac{c_{n+1}}{n}}_{\geq 0} \Rightarrow c_n \geq c_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\tau^* := \inf\{n \mid Z_n = X_n\}$$

Stoppregel nach Satz 8.8: $\tau^* = \min\{n \mid X_n = Z_n\}$.

- gestoppt wird vor N nur, wenn $R_n = 1$.
- die Werte $X_n \neq 0$ sind wachsend.
- die Werte $E[Z_{n+1} | \mathfrak{F}_n] = c_{n+1}$ fallend.

$$\begin{aligned}
\tau^* &= \min\{1 \leq n \leq N-1 \mid R_n = 1, \frac{n}{N} \geq c_{n+1}\} \wedge N \\
&= \min\{n \geq k_n \mid R_n = 1\} \wedge N.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt noch k_N .

Sei $\tau_k := \inf\{n \geq k \mid R_n = 1\} \wedge N$. Bestimme EX_{τ_k} .

k_N ist dann der k -Wert, bei dem EX_{τ_k} maximal ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
EX_{\tau_k} &= \sum_{l=k}^N E[X_l \cdot \mathbf{1}_{\{l\}}(\tau_k)] \\
&= \sum_{l=k}^N \frac{l}{N} \underbrace{P(R_m > 1 \text{ für } m = k, \dots, l-1, R_l = 1)}_{=P(\tau_k=l)} \\
&= \sum_{l=k}^N \frac{l}{N} \underbrace{\left(\prod_{m=k}^{l-1} \frac{m-1}{m} \right)}_{=P(R_m > 1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{l}}_{=P(R_l=1)} \\
&\stackrel{\text{Teleskop. Prod.}}{=} \frac{k-1}{N} \sum_{l=k}^N \frac{1}{l-1}
\end{aligned}$$

$\Phi(k) := \frac{k-1}{N} \sum_{l=k}^N \frac{1}{l-1}$ wird maximal in $k_N := \inf\{k \mid \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{N-1} \leq 1\}$.

Beachte: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_N}{N} \stackrel{!}{=} \frac{1}{e}$.

Bei einem großen Bewerberkreis wird man etwa 37 Prozent der Bewerber passieren lassen und dann den ersten nehmen, der besser als alle vorangegangenen ist.

