Definitionen

Dichte
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
$P([a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Ereignis
$A\subseteq\Omega$ bzw. $A\in\mathfrak{A}$.
Elementarereignis: $\{\omega\},\omega\in\Omega$

Ergebnis
$\omega\in\Omega$

Erwartungstreue
$$\forall\theta\in\Theta: E_\theta(T)=\theta$$

Erwartungswert
(Ex. falls mit $|\cdot|<\infty$)
$$E(X) := \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\{\omega\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}:P(X=x)>0} x\cdot P(X=x)$$
$$E(X) := E(X_+) - E(X_-) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$
bedingter Erwartungswert:
$E(X|Y=y) = \sum xP(X=x|Y=y)$
bedingte Erwartung:
$E(X|Y):\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}, y\mapsto E(X|Y=y)$
iterierter:
$$E(X)=E(E(X|Y))$$

Faltung
$X(\Omega)+Y(\Omega)$ F. der Verteilungen X,Y. ($P^{X+Y}=P^X * P^Y$)

Fehler 1./2. Art
1. Art: Wahre Hypothese abgelehnt.
2. Art: Falsche Hypothese nicht verworfen.

Gütefunktion
$$g:\Theta\to[0,1],\theta\mapsto P_\theta(X\in\mathcal{K})$$
$$g_\varphi:\Theta\to[0,1],\theta\mapsto E_\theta(\varphi)$$

Häufigkeit
Sei $(x_1,\dots,x_n)\in\{a_1,\dots,a_s\}^n$ Stichprobe.
absolute:
$$h_j=\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i=a_j\}$$
relative:
$$\frac{h_j}{n}$$

Kombination
$$Kom_k^n(mW)=\{(a_1,\dots,a_k)\in M^k: a_1\leq\dots\leq a_k\}$$
$$Kom_k^n(oW)=\{(a_1,\dots,a_k)\in M^k: a_1<\dots<a_k\}$$
$$|Kom_k^n(mW)|=\binom{n+k-1}{k}$$
$$|Kom_k^n(oW)|=\binom{n}{k}$$

Konfidenzber./Bereichssch.
$(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ stat. Modell.
$$\mathcal{C}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\Theta)$$
heißt Konfidenzbereich oder Bereichsschätzer.
Konfidenzniveau: $\mathcal{C}$ Konfidenzber. zum Niveau $1-\alpha$:
$$P_\theta(\mathcal{A}(\theta))\geq 1-\alpha$$

Konsistenz
(T_n) *Schätzfolge:* $\forall\varepsilon>0,\forall\theta\in\Theta:$
$$\lim_{n\to\infty}P_\theta(|T_n-\theta|\geq\varepsilon)=0$$
φ_n *Testfolge:* $\forall\theta\in\Theta_1:$
$$\lim_{n\to\infty} g_{\varphi_n}(\theta)=1$$

Konvergenz nach W-keit
$$Y_n\xrightarrow{P}Y \iff \forall\varepsilon>0: P(|Y_n-Y|\geq\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Koppelung
Das zu einem W-Maß P_1 und einer Übergangs-W-keit P_{12} gehörende W-Maß
$$P=P_1\otimes P_{12}$$
auf $\Omega_1\times\Omega_2$ heißt Koppelung von P_1 und P_{12}.

Korrelationskoeffizient
$$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$
empirischer:
$$r_{xy} := \frac{\frac1n\sum(x_j-\overline{x})(y_j-\overline{y})}{\sqrt{\frac1n\sum(x_j-\overline{x})^2\cdot\frac1n\sum(y_j-\overline{y})^2}}$$

Kovarianz
$$C(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY)-E(X)E(Y)$$

kritischer Bereich
$\mathcal{K}\subseteq\mathcal{X}$ mit:
$$x\in\mathcal{K}\implies d_1$$
$$x\in\mathcal{X}\setminus\mathcal{K}\implies d_0$$

Lagemaß
$l:\{a_1,\dots,a_s\}^n\to\mathbb{R}$ ist ein Lagemaß, falls gilt:
$l(x_1+a,\dots,x_n+a)=l(x_1,\dots,x_n)+a$

Likelihood-Funktion
$$L_x:\Theta\to[0,1],\theta\mapsto P_\theta(X=x)$$

Marginalverteilung
P W-Maß auf $\Omega_1\times\dots\times\Omega_n$. j-te Marginalverteilung:
$$P_j(B):=P(\Omega'\times B\times\Omega'')$$
mit
$$\Omega':=\Omega_1\times\dots\times\Omega_{j-1}$$
$$\Omega':=\Omega_{j+1}\times\dots\times\Omega_n$$
(Analog für Zufallsvektoren.)

Maximum-Likelihood-Schätzung
$\hat\theta:\mathcal{X}\to\Theta$ ist ML-Schätzwert, falls $\forall x\in\mathcal{X}:$
$$L_x(\hat\theta(x))=\sup\{L_x(\theta):\theta\in\Theta\}$$

Median
Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac12)$ der Median von F bzw. von X.
empirischer: Sei $(x_{(1)},\dots,x_{(n)})$ geordnete Stichprobe.
$$x_{\frac12}:=\begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, n=2k+1\\ \frac12(x_{(\frac n2)}+x_{(\frac n2+1)}), n=2k\end{cases}$$

Mittel
arithmetisches:
$$\overline{x}_n:=\frac1n\sum_{j=1}^n x_j$$
getrimmtes/gestutztes:
$$x_{t,\alpha}:=\frac{1}{n-2k}\sum_{j=k+1}^{n-k}x_{(j)}$$
mit $0<\alpha<\frac12$ und $k:=\lfloor n\alpha\rfloor$ heißt α-getrimmtes Mittel.

MQA
$$MQA_T(\theta)=E_\theta((T-\theta)^2) = \sum_{x\in\mathcal{X}}(T(x)-\theta)^2\cdot P_\theta(X=x)$$
heißt mittlere quadratische Abweichung vom T an der Stelle θ.

Moment
k-tes:
$$E(X^k)=\int_{\mathbb{R}} x^k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$
k-tes absolutes:
$$E(|X|^k)=\int_{\mathbb R}|x|^k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$
k-tes zentrales:
$$E((X-EX)^k)=\int_{\mathbb R}(x-EX)^k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

Permutation
$$Per_k^n(mW)=M^k$$
$$Per_k^n(oW)=\{(a_1,\dots,a_k)\in M^k: a_i\neq a_j (i\neq j)\}$$
$$|Per_k^n(mW)|=n^k$$
$$|Per_k^n(oW)|=n\cdots(n-k+1)=n^{\underline{k}}$$

Quantil
empirisches: Ist $0<p<1$, so heißt
$$x_p:=\begin{cases}x_{(\lfloor np+1\rfloor)}, np\notin\mathbb N\\ \frac12(x_{(np)}+x_{(np+1)}), np\in\mathbb N\end{cases}$$
empirisches p-Quantil.

Quantil-Funktion
X Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.
$$F^{-1}:(0,1)\to\mathbb R$$
$$p\mapsto\inf\{x\in\mathbb R: F(x)\geq p\}$$
heißt Quantil-Funktion von X bzw. F.

Quartil
Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac14)$ das untere und $F^{-1}(\frac34)$ das obere Quartil von F bzw. von X.
empirisch: Das $\frac14$-Quantil heißt unteres und das $\frac34$-Quantil oberes Quartil.

Quartilsabstand
$$x_{\frac34}-x_{\frac14}$$

Schätzer
$(\mathcal X,(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ stat. Modell.
$$T:\mathcal X\to\tilde\Theta$$
heißt Schätzer für θ.

Schätzfolge
$\mathcal X_n\subseteq\mathbb R^n$ Stichprobenraum für $X_{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ und $T_n:\mathcal X_n\to\tilde\Theta$ Schätzer $\forall n\in\mathbb N$, dann heißt $(T_n)_{n\in\mathbb N}$ Schätzfolge.

Schätzwert
$T(x)$ für $x\in\mathcal X$.

Spannweite
$$x_{(n)}-x_{(1)}$$

Standardabweichung
$$\sigma_X:=\sqrt{V(X)}$$
empirische:
$$s:=\sqrt{s^2}$$

Standardisierung
$$X^*:=\frac{X-EX}{\sqrt{V(X)}}$$

Statistisches Modell
$(\mathcal X,(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$, wobei $\mathcal X$ der Stichprobenraum einer Zufallvariable X, $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ Bild einer bijektiven Abbildung des Parameterraum Θ auf eine Klasse von W-Maßen $\mathcal P$ ist.

Streuungsmaß
$\sigma:\{a_1,\dots,a_s\}^n\to\mathbb R$ heißt ein Streuungsmaß, falls gilt:
$\sigma(x_1+a,\dots,x_n+a)=\sigma(x_1,\dots,x_n)$

Test
nichtrandomisiert:
$$\varphi:\mathcal X\to\{0,1\},x\mapsto\mathbb 1_{\mathcal K}$$
randomisiert:
$$\varphi:\mathcal X\to[0,1]$$

Testfolge
$\mathcal X_n$ Stichprobenraum für $X_{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ und $\varphi_n:\mathcal X_n\to[0,1]$ Test $\forall n\in\mathbb N$, dann heißt $(\varphi_n)_{n\in\mathbb N}$ Testfolge.

Übergangswahrscheinlichkeit
$$P_{12}:\Omega_1\times\mathcal P(\Omega_2)\to[0,1]$$
heißt Übergangs-W-keit, falls $\forall\omega_1\in\Omega_1$
$$P_{12}(\omega_1,\cdot):\mathcal P(\Omega_2)\to[0,1]$$
ein W-Maß ist.

Unabhängigkeit
Ereignisse: $A_1,\dots,A_n$ unanbhängig, falls $\forall T\subseteq 1,\dots,n$
$$P(\bigcap_{j\in T}A_j)=\prod_{j\in T}P(A_j)$$
Zufallsvariablen diskret:
$X_1,\dots,X_n$ unabhängig, falls $\forall A_j\subseteq\Omega_j$ bzw. $\forall x_j\in\Omega_j$ gilt:
$$P(X_1\in A_1,\dots,X_n\in A_n) = \prod_{j=1}^n P(X_j\in A_j)$$
$$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{j=1}^n P(X_j=x_j)$$
Zufallsvariablen indiskret:
$X_1,\dots,X_n$ unabhängig, falls gilt:
$$F(x)=\prod_{j=1}^n F(x_j)$$
$$f(x)=\prod_{j=1}^n f(x_j)$$

Varianz
(Ex. falls $E(X^2)$ existiert.)
$$V(X)=E(X-EX)^2=E(X^2)-(EX)^2 = \int_{\mathbb R}(x-EX)^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$
empirische:
$$s^2:=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n(x_j-\overline x_n)^2$$

Verteilung
$X:\Omega\to\tilde\Omega$ Zufallsvariable.
$P^X:\mathcal P(\tilde\Omega)\to[0,1], A'\mapsto P(X^{-1}(A'))$
heißt Verteilung von X.

Verteilungsfunktion
$P:\mathfrak B_1\to[0,1]$ W-Maß.
$$F:\mathbb R\to[0,1],x\mapsto P((-\infty,x])$$
heißt Verteilungsfunktion von P.

Verzerrung
Verzerrung eines Schätzers T an der Stelle θ:
$$b_T(\theta)=E_\theta(T)-\theta$$

Wahrscheinlichkeit
bedingte:
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

W-Funktion
(Ω,P) W-Raum,
$$p:\Omega\to\mathbb R,\omega\mapsto P(\{\omega\})$$
ist W-Funktion zum W-Maß P.

W-Maß
$P:\mathcal P(\Omega)\to[0,1]$ heißt W-Maß auf Ω, falls gilt

1. $P(A)\geq0$
2. $P(\Omega)=1$
3. $P(\sum_{j\in\mathbb N}A_j)=\sum_{j\in\mathbb N}P(A_j)$

W-Raum
(Ω,P) bzw. $(\Omega,\mathcal A,P)$ mit $\mathcal A$ σ-Algebra auf Ω, P W-Maß auf Ω bzw. $\mathcal A$.
Laplace'scher: falls $P(A):=\frac{|A|}{|\Omega|}$

Zufallsvariable
(Ω,P) bzw. $(\Omega,\mathfrak A,P)$ W-Raum, $\mathfrak A'$ σ-Algebra auf Ω'.
$$X:\Omega\to\Omega'$$
heißt Ω'-wertige Zufallsvariable, falls X $\mathfrak A$-$\mathfrak A'$-mb.

Zufallsvektor
X heißt Zufallsvektor, falls es eine $\mathbb R^d$-wertige Zufallsvariable ist.

Sätze und Formeln

Bayes-Formel
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb N}$ eine Zerlegung von Ω. Dann gilt:
$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^\infty P(A_j)\cdot P(B|A_j)}$$

Binomialkoeffizient
$$\binom{n+1}{k}=\binom nk+\binom n{k-1}$$

Binomischer Lehrsatz
$$(x+y)^k=\sum_{j=0}^k\binom kj\cdot x^j\cdot y^{k-j}$$

Blockungslemma
Seien $A_1,\dots,A_n$ unabhängig, $1\leq k\leq n-1$, $C\in\sigma(A_1,\dots,A_k)$, $D\in\sigma(A_k+1,\dots,A_n)$. Dann sind auch C und D unabhängig.

Cauchy-Schwarz
$$C(X,Y)^2\leq V(X)\cdot V(Y)$$

Erwartungswert
$$E(aX)=a\cdot EX$$
$$E(X+Y)=EX+EY$$
$$|EX|\leq E|X|$$
Sind X,Y unkorreliert gilt außerdem:
$$E(X\cdot Y)=EX\cdot EY$$

Faltungsformel

für Dichten:

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \cdot f_Y(x-t) \, \mathrm{d}t$$

Gesetz großer Zahlen

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallvariablen mit existierender Varianz. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - EX_1\right| \geq \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Gesetz seltener Ereignisse

Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ für ein $0 < \lambda < \infty$, so gilt:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \overset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Kovarianz

$$C(X,Y) = C(Y,X)$$

$$C(X,X) = V(X)$$

$$C(aX+b, cY+d) = ac \cdot C(X,Y)$$

$$\rho(aX+b, cY+d) = sgn(ac) \cdot \rho(X,Y)$$

X, Y sind unkorreliert,genau dann wenn:

$$C(X,Y) = 0$$

kleinste Quadrate

$$(a^*, b^*) := \arg\min_{a,b\in\mathbb{R}} E(Y - a - bX)^2$$

ist bestimmt durch

$$a^* = EY - b^* EX$$

$$b^* = \begin{cases} 0 & , V(X)V(Y) = 0 \\ \frac{C(X,Y)}{V(X)} & , V(X)V(Y) > 0 \end{cases}$$

Methoden zur Dichtebest.

Methode 1:

X reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F, stückweise stetiger Dichte f. Weiter sei $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, wobei $T'(x) \neq 0$. Dann besitzt $Y = T(X)$ die Verteilungsfunktion:

$$G(y) = F(T^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{T^{-1}(y)} f(x) \, \mathrm{d}x$$

(bzw. $1 - G(y)$ falls T monoton fallend), sowie die Dichte:

$$g(y) = \frac{f(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|}$$

Methode 2:

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ k-dimensionaler Zufallsvektor mit positiver Dichte f. Weiter sei $T: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und injektiv, wobei $T'(x) \neq 0$. Dann besitzt $Y = T(X)$ die Dichte:

$$g(y) = \frac{f(T^{-1}(y))}{|\det T'(T^{-1}(y))|}$$

Methode 3:

Ist $T: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ mit $s < k$, so lässt sich T häufig zu einer Abbildung $T': \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ergänzen, die die Voraussetzungen von Methode 2 erfüllt. Die Gewünschte Dichte ergibt sich dann aus Marginalverteilungsbildung.

Markow-Ungleichung

Sei $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für jede Zufallsvariable Y mit $E_\varphi(|Y|) < \infty$ und jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(\varepsilon) > 0$:

$$P(|Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varphi(\varepsilon)} E_\varphi(|Y|)$$

Quantilsfunktion

$$F(x) \geq p \iff x \geq F^{-1}(p)$$

$$F(F^{-1}(p)) \geq p$$

$$F(F^{-1}(p)) = p \iff p \in F(\mathbb{R})$$

Außerdem ist F^{-1} monoton wachsend und linksseitig stetig.

Siebformel/Poincare-Sylvester

Für $1 \leq \nu \leq n$ sei

$$S_\nu := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\nu \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\nu})$$

(Summation über ν-elementige Teilmengen.) Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} S_\nu$$

Steiner-Formel

$$\forall a \in \mathbb{R}: V(X) = E(X-a)^2 - (EX-a)^2$$

Stetigkeit

Es gilt:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} P(A_j)$$

für jede aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$. Ebenso gilt:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} P(A_j)$$

für jede absteigende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$.

Subadditivität

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

totale W-keit

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von Ω. Dann gilt:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \cdot P(B|A_j)$$

Transformationsformel

$$E(g(Z)) = \sum_{z\in\mathbb{R}^k} g(z) \cdot P(Z = z) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x) \, \mathrm{d}x$$

Tschebyschow-Ungleichung

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot V(X)$$

Varianz

$$V(X) = \min_{a\in\mathbb{R}} E(X-a)^2$$

$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$$

$$V(X) \geq 0$$

$$V(X) = 0 \iff \exists a \in \mathbb{R}: P(X = a) = 1$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X,Y)$$

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{j=1}^{n} V(X_j) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} C(X_i, X_j)$$

(siehe auch Steiner-Formel)

ZGWS

Sei $X_n \sim Bin(n, p_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n(1-p_n) = \infty$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq b\right) = \Phi(b)$$

Verteilungen

Binomialverteilung

$X \sim Bin(n,p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$F_X(x) = \sum_{k\leq x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$EX = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

Ist $Y \sim Bin(m,p)$ und X, Y unabhängig, so gilt $X + Y \sim Bin(n+m, p)$.

Exponentialverteilung

$X \sim Exp(\lambda)$

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

geometrische Verteilung

$X \sim G(p) = Nb(1,p)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem ersten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Nieten gezogen werden.

$$P(X = k) = p \cdot (1-p)^k$$

$$F_X(x) = \sum_{k\leq x} p \cdot (1-p)^k$$

$$EX = \frac{1-p}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Ist $Y \sim G(p)$ und X, Y unabhängig, so gilt $X + Y \sim Nb(2,p)$.

Gleichverteilung

$X \sim U(A)$

diskrete:

Sei $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

$$P(X = x_j) = \frac{1}{n}$$

$$EX = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2\right)$$

indiskrete:

Sei $A \in \mathfrak{B}_1$.

$$P(B) = \frac{\lambda_1(A \cap B)}{\lambda_1(A)}$$

$$F_X(x) = \frac{\lambda_1(A \cap (-\infty, x])}{\lambda_1(A)}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda_1(A)} \cdot \mathbb{1}_A(x)$$

hypergeometrische Verteilung

$X \sim Hyp(n,r,s)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen k der r roten von insgesamt $r+s$ Kugeln zu ziehen.

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$$

$$EX = \frac{rn}{r+s}$$

$$V(X) = \left(\frac{rs}{r+s}\right)\left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\left(\frac{r+s-n}{r+s-1}\right)$$

Multinomialverteilung

$X = (X_1, \ldots, X_s) \sim Mult(n, p_1, \ldots, p_s)$

$$P(X = x) = \binom{k}{x_1, \ldots, x_s} \cdot \prod_{j=1}^{s} p_j^{x_j}$$

$$X_k \sim Bin(n, p_k)$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_{i_j} \sim Bin(n, \sum_{j=1}^{k} p_{i_j})$$

$$C(X_i, X_j) = -np_i p_j$$

$$\rho(X_i, X_j) = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$$

negative Binomialverteilung

$X \sim Nb(r,p)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem r-ten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Nieten gezogen werden.

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k$$

$$F_X(x) = \sum_{k\leq x} \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k$$

$$EX = r \cdot \frac{1-p}{p}$$

$$V(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

Ist $Y \sim Nb(s,p)$ und X, Y unanhängig, so gilt $X + Y \sim Nb(r+s, p)$.

Normalverteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$\Phi^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(1-x)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$EX = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

Ist $Y \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ und X, Y unanhängig, so gilt $X + Y \sim N(\mu + \tilde{\mu}, \sigma^2 + \tilde{\sigma}^2)$.

mehrdimensionale:

$X \sim N_k(\mu, \Sigma)$

Dabei seien $Y_1, \ldots, Y_k \sim N(0,1)$ unabhängig, $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ regulär, $\Sigma = A \cdot A^\perp$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ und $X := A \cdot Y + \mu$. Dann gilt:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \cdot \det\Sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\perp \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Poisson-Verteilung

$X \sim Po(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$F_X(x) = \sum_{k\leq x} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$EX = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Ist $Y \sim Po(\mu)$ und X, Y unabhängig, so gilt $X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$. In diesem Fall ist

$$P^{X|X+Y=n} = Bin\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$