

## II. Markov-Ketten in stetiger Zeit

### 7. Ein wichtiger Spezialfall: der Poisson-Prozess

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Wir betrachten jetzt einen stochastischen Prozess  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$ , d.h.  $(N_t)_{t \geq 0}$  ist eine Familie von  $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ -messbaren ZV, der bestimmte Ereignisse zählen soll (z.B. Emission von Partikeln beim radioaktiven Zerfall, Ankünfte von Kunden in einem Bediensystem, Schäden bei einer Versicherung). Wir nehmen an, dass mindestens ein Ereignis eintritt und die Anzahl der Ereignisse in einem kompakten Intervall soll endlich sein.

Wir stellen folgende Forderungen an  $N$ :

(A1) Alle Pfade  $t \mapsto N(t, \omega)$  liegen in

$$D_0 := \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0 \mid f(0) = 0, f \uparrow, f \text{ stetig von rechts} \}.$$

(A2)  $(N_t)_{t \geq 0}$  hat unabhängige Zuwächse, d.h. für alle  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n, n \in \mathbb{N}$  sind die Zufallsvariablen

$$N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

stochastisch unabhängig.

(A3)  $(N_t)_{t \geq 0}$  hat stationäre Zuwächse, d.h.  $\forall t > 0$  hängt die Verteilung von  $N_{s+t} - N_s$  nicht von  $s$  ab.

(A4) Ereignisse treten einzeln auf, d.h.  $P(N_h \geq 2) = o(h)$  mit  $h \downarrow 0$ .

**Bemerkung:** Der stochastische Prozess kann als Zufallsgröße mit Werten in einem Funktionenraum aufgefasst werden, d.h.

$$N : \Omega \ni \omega \mapsto N(\cdot, \omega) \in D_0$$

Als  $\sigma$ -Algebra auf  $D_0$  wählen wir

$$\mathfrak{B}(D_0) := \sigma(\{\pi_t : t \geq 0\}),$$

wobei  $\pi_t : D_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, f \mapsto f(t)$  die  $t$ -te Projektion ist.

Es gilt:  $N : \Omega \rightarrow D_0$  ist  $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}(D_0))$ -messbar  $\iff N_t = \pi_t \circ N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$  sind  $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ -messbar  $\forall t \geq 0$ . (Stochastik II Übungsaufgabe 21)

Die Mengen der Form

$$A(t_1, \dots, t_n, i_1, \dots, i_n) := \{f \in D_0 \mid f(t_j) - f(t_{j-1}) = i_j \text{ für } j = 1, \dots, n\}$$

mit  $0 =: t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$  bilden ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von  $\mathfrak{B}(D_0)$ .

**Satz 7.1**

Es sei  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  ein stochastischer Prozess, der den Bedingungen (A1)-(A4) genügt. Dann hat  $N$  mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Sprünge der Höhe 1 und es existiert ein  $\lambda > 0$ , so dass:

- a)  $\forall s, t \geq 0$  ist  $N_{s+t} - N_s$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda t$ .
- b) Die Zeiten zwischen aufeinanderfolgenden Sprüngen des Prozesses sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$ .

**Beweis**

**Sprünge der Höhe 1:** Es ist also zu zeigen:

$$P(N_s - N_{s-} \geq 2 \text{ für ein } s > 0) = 0$$

wobei  $N_{s-}$  der linksseitige Grenzwert ist.

Für festes  $t > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} & P(N_s - N_{s-} \geq 2 \text{ für ein } s \in (0, t]) \\ & \leq P(N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 2 \text{ für ein } k \in \{1, \dots, n\}) \\ & \leq n \cdot P(N_{\frac{t}{n}} \geq 2) \end{aligned}$$

(das letzte  $\leq$  gilt wegen (A3)).

Aus (A4) folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(N_{\frac{t}{n}} \geq 2)}{\frac{t}{n}} \cdot t = 0.$$

Weiter gilt mit Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes:

$$P(N_s - N_{s-} \geq 2 \text{ für ein } s > 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(N_s - N_{s-} \geq 2 \text{ für ein } s \in (0, t]) = 0.$$

**a)** Betrachte dazu

$$\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ mit } \Phi(t) := P(N_t = 0).$$

Für alle  $s, t > 0$  folgt:

$$\begin{aligned} \Phi(s+t) &= P(N_s = 0, N_{s+t} - N_s = 0) \\ &= P(N_s = 0) \cdot P(N_t = 0) \quad (\text{nach (A3) und (A2)}) \\ &= \Phi(s) \cdot \Phi(t). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\Phi(\frac{k}{n}) = (\Phi(\frac{1}{n}))^k$  und  $\Phi(1) = \Phi(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}) = (\Phi(\frac{1}{n}))^n$  für  $k, n \in \mathbb{N}$  gilt. Das heißt, dass  $\Phi(\frac{k}{n}) = (\Phi(1))^{\frac{k}{n}}$ .

Da  $\Phi$  fallend ist, folgt mit einem Einschachtelungsargument:

$$\Phi(t) = (\Phi(1))^t \text{ für alle } t > 0.$$

Weiter ist  $\Phi(1) \in (0, 1)$ , da  $\Phi(1) \in [0, 1]$  und falls  $\Phi(1) = 1$ , dann wäre

$$P(N_t = 0 \text{ für alle } t \geq 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 1$$

im Widerspruch zur Forderung, dass mindestens ein Ereignis eintritt, und wäre  $\Phi(1) = 0$ , dann gälte für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(N_1 \geq n) &\geq P(N_{\frac{k}{n}} - N_{\frac{k-1}{n}} \geq 1 \text{ für } k = 1, \dots, n) \\ &= \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \quad ((A2), (A3)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Forderung, dass in kompakten Intervallen nur endlich viele Ereignisse eintreten.

Sei jetzt

$$\lambda := -\log \Phi(1).$$

Es ist  $0 < \lambda < \infty$  und  $P(N_t = 0) = (\Phi(1))^t = e^{-\lambda t}$ . Weiter sei  $t > 0$  und für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$\begin{aligned} X_{nk} &:= 1_{\mathbb{N}}\left(N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}}\right) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls mindestens ein Ereignis in } \left[\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}\right) \text{ eintritt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen (A2) sind  $X_{n1}, \dots, X_{nn}$  unabhängig und wegen (A3) identisch verteilt mit  $B(1, 1 - e^{-\lambda \frac{t}{n}})$ . Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n X_{nk} \sim B(n, 1 - e^{-\lambda \frac{t}{n}}) \xrightarrow{d} \text{Po}(\lambda t)$$

da  $n(1 - e^{-\lambda \frac{t}{n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda t$ .

Aus (A4) folgt:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{k=1}^n X_{nk} \neq N_t\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n \{N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 2\}\right) \\ &\leq n \cdot P(N_{\frac{t}{n}} \geq 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und damit haben wir gezeigt, dass

$$N_t \sim \text{Po}(\lambda t).$$

b) Sei

$$T_1 := \inf\{t > 0 \mid N_t \neq 0\}$$

der erste Sprungzeitpunkt. Wir erhalten

$$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t} \text{ mit } t \geq 0$$

und damit

$$T_1 \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Die weiteren Aussagen werden später gezeigt. ■

**Bemerkung:** Der Prozess  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  in Satz 7.1 heißt *Poisson-Prozess* mit Parameter  $\lambda$ .

Die Bedingungen (A2) und (A3) können etwas „abstrakter“ gefasst werden: Für  $u \geq 0$  definiere

$$\begin{aligned} S_u : D_0 &\rightarrow D_0, & f &\mapsto f(\cdot \wedge u) \\ Z_u : D_0 &\rightarrow D_0, & f &\mapsto f(u + \cdot) - f(u) \end{aligned}$$

wobei  $(\cdot \wedge u)$  die Abbildung  $v \mapsto \min(v, u)$  darstellt.

Beide Abbildungen sind  $(\mathfrak{B}(D_0), \mathfrak{B}(D_0))$ -messbar.

Wir können also auch stochastische Prozesse  $S_u(N) = (N_{t \wedge u})_{t \geq 0}$  und  $Z_u(N) = (N_{u+t} - N_u)_{t \geq 0}$  als Zufallsgrößen mit Werten in  $(D_0, \mathfrak{B}(D_0))$  auffassen.

Weiter gilt mit

$$A(t_1, \dots, t_n; i_1, \dots, i_n) := \{f \in D_0 \mid f(t_j) - f(t_{j-1}) = i_j \text{ für } j = 1, \dots, n\},$$

wobei  $0 =: t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ ,  $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$ , dass

$$\{S_u(N) \in A(t_1, \dots, t_n; i_1, \dots, i_n)\} = \{N_{t_1 \wedge u} - N_{t_0 \wedge u} = i_1, \dots, N_{t_n \wedge u} - N_{t_{n-1} \wedge u} = i_n\}$$

und

$$\{Z_u(N) \in A(s_1, \dots, s_l; j_1, \dots, j_l)\} = \{N_{u+s_1} - N_{u+s_0} = j_1, \dots, N_{u+s_l} - N_{u+s_{l-1}} = j_l\}$$

Wegen (A2) folgt:

$$\begin{aligned} P(S_u(N) \in A(t_1, \dots, t_n; i_1, \dots, i_n), Z_u(N) \in A(s_1, \dots, s_l; j_1, \dots, j_l)) \\ = P(S_u(N) \in A(t_1, \dots, t_n; i_1, \dots, i_n)) \cdot P(Z_u(N) \in A(s_1, \dots, s_l; j_1, \dots, j_l)) \end{aligned}$$

und daraus die Unabhängigkeit der Prozesse  $S_u(N)$  und  $Z_u(N)$ .

Analog folgt mit (A3):

$$P(Z_u(N) \in A(s_1, \dots, s_l; j_1, \dots, j_l)) = P(N \in A(s_1, \dots, s_l; j_1, \dots, j_l))$$

Also haben  $Z_u(N)$  und  $N$  dieselbe Verteilung.

Diese Aussagen können jetzt auf Stoppzeiten verallgemeinert werden. Es sei dazu  $\mathcal{F}_t := \sigma(\{N_s, s \leq t\})$  für  $t \geq 0$  und  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  die natürliche Filtration.

**Definition**

Sei  $\tau$  eine  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Stoppzeit, das heißt  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Der Prozess

$$S_\tau(N) = (N_{\tau \wedge t})_{t \geq 0}$$

heißt *Prü- $\tau$ -Prozess* und der Prozess

$$Z_\tau(N) = (N_{\tau+t} - N_\tau)_{t \geq 0}$$

heißt *Post- $\tau$ -Prozess*.

**Lemma 7.2**

Ist  $\tau$  eine endliche Stoppzeit, so sind die Prozesse  $(N_{\tau \wedge t})_{t \geq 0}$  und  $(N_{\tau+t} - N_\tau)_{t \geq 0}$  stochastisch unabhängig. Außerdem hat  $(N_{\tau+t} - N_\tau)_{t \geq 0}$  dieselbe Verteilung wie  $(N_t)_{t \geq 0}$ .

**Beweis**

Zunächst nehmen wir an, dass  $\tau$  Werte in  $\mathbb{Q}_+$  annimmt. Für  $0 =: s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k < \infty$ ,  $0 =: t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l < \infty$  und beliebige  $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\begin{aligned} C &:= P(S_\tau(N) \in \underbrace{A(s_1, \dots, s_k; i_1, \dots, i_k)}_{=:A}, Z_\tau(N) \in \underbrace{A(t_1, \dots, t_l; j_1, \dots, j_l)}_{=:B}) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Q}_+} P(\tau = u, S_u(N) \in A, Z_u(N) \in B) \end{aligned}$$

Da  $\{\tau = u\} \in \mathcal{F}_u$  kann dieses Ereignis durch  $S_u(N)$  ausgedrückt werden. Da  $S_u(N)$  und  $Z_u(N)$  unabhängig sind, folgt:

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{u \in \mathbb{Q}_+} P(\tau = u, S_u(N) \in A) \cdot \underbrace{P(Z_u(N) \in B)}_{=P(N \in B)} \\ &= P(N \in B) \cdot P(S_\tau(N) \in A) \end{aligned}$$

Im Fall  $k = 1, s_1 = 0, i_1 = 0$  folgt:

$$P(Z_\tau(N) \in B) = P(N \in B)$$

also gilt  $Z_\tau(N) \stackrel{d}{=} N$  und damit

$$P(S_\tau(N) \in A, Z_\tau(N) \in B) = P(Z_\tau(N) \in B) \cdot P(S_\tau(N) \in A)$$

also sind  $Z_\tau(N)$  und  $S_\tau(N)$  unabhängig.

Weiter sei  $\tau$  beliebig. Betrachte die Folge

$$\tau_n := \frac{\lceil 2^n \tau \rceil}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

für die  $\tau_n \in \mathbb{Q}_+$   $P$ -fast-sicher gilt und  $\tau_n \rightarrow \tau$  für  $n \rightarrow \infty$ . Mit (A1) folgt für alle  $t \geq 0$

$$N_{\tau_n \wedge t} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N_{\tau \wedge t}, \quad N_{\tau_n + t} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N_{\tau + t}$$

$P$ -fast-sicher und

$$\begin{aligned} P(S_\tau(N) \in A, Z_\tau(N) \in B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_{\tau_n}(N) \in A, Z_{\tau_n}(N) \in B) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_{\tau_n}(n) \in A) \cdot P(Z_{\tau_n}(N) \in B) \\ &= P(S_\tau(N) \in A) \cdot P(Z_\tau(N) \in B) \end{aligned}$$

Analog kann man die Aussage  $Z_\tau(N) \stackrel{d}{=} N$  auf beliebige  $\tau$  erweitern. ■

Damit können wir den Beweis von Satz 7.1 abschließen:

Es seien

$$\begin{aligned} T_1 &:= \inf\{t > 0 \mid N_t \neq 0\} \\ S_1 &:= T_1 \\ S_k &:= \inf\{t > S_{k-1} \mid N_t \neq N_{t-}\}, \quad k = 2, 3, \dots \\ T_k &:= S_k - S_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ . Induktiv nehmen wir an, dass  $T_1, \dots, T_k$  unabhängig und identisch exponential-verteilt seien.  $\tau := T_1 + \dots + T_k = S_k$  ist eine Stoppzeit, da  $\{\tau \leq t\} = \{N_t \geq k\} \in \mathcal{F}_t$ . Da  $P(\tau > t) = P(N_t < k) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt, ist  $\tau$   $P$ -fast-sicher endlich.

$T_{k+1}$  ist die Zeit bis zum ersten Sprung im Post- $\tau$ -Prozess. Nach Lemma 7.2 ist  $T_{k+1} \stackrel{d}{=} N_1 \stackrel{d}{=} N_1 - N_0 \stackrel{d}{=} T_1 \sim \exp(\lambda)$  und  $T_{k+1}$  ist unabhängig von  $S_\tau(N)$ , also auch von  $T_1, \dots, T_k$ .

### Beispiel 7.1 (Bedingte Gleichverteilungseigenschaft)

Es seien  $K, X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $K \sim \text{Po}(\lambda T)$ ,  $T > 0$ , und  $X_i \sim U(0, T)$ .

Wir definieren

$$N_t := \#\{1 \leq i \leq K \mid X_i \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Es sei  $0 =: t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$  eine Zerlegung des Intervalls  $[0, T]$ . Betrachte für  $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$  das Ereignis

$$A := \{N_{t_1} - N_{t_0} = i_1, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n\}.$$

Für  $\omega \in A$  folgt  $k := K(\omega) = i_1 + \dots + i_n$ . Man erhält (siehe Definition der Multinomialverteilung, Henze, Stochastik I, S. 121)

$$\begin{aligned} P(N_{t_1} - N_{t_0} = i_1, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n) &= e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} \cdot \left(\frac{t_1 - t_0}{T}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{T}\right)^{i_n} \\ &= \prod_{l=1}^n \underbrace{e^{-\lambda(t_l - t_{l-1})} \frac{(\lambda(t_l - t_{l-1}))^{i_l}}{i_l!}}_{=P(M_l=i_l)} \end{aligned}$$

wobei  $M_l \sim \text{Po}(\lambda(t_l - t_{l-1}))$ . Das zeigt: Die Zuwächse des Prozesses  $\tilde{N} = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$  sind unabhängig und stationär und Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda \cdot \text{Intervalllänge}$ , und (A1), (A4) ist erfüllt, also ist  $\tilde{N}$  ein bei  $T$  gestoppter Poisson-Prozess.

### Beispiel 7.2 (Das Inspektions-Paradoxon)

Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $X_k \sim \exp(\lambda)$ , welche die Lebensdauer von Glühbirnen modellieren.

Es sei  $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$  der Zeitpunkt, an dem die  $n$ -te Birne kaputt geht und eine neue Birne eingesetzt wird, und  $N_t$  die Anzahl der Erneuerungen bis zum Zeitpunkt  $t$  und damit ein Poisson-Prozess mit Parameter  $\lambda$ .

In der Erneuerungstheorie interessiert man sich für

$$\begin{aligned} V_t &:= S_{N_{t+1}} - t = \text{Restlebensdauer} \\ W_t &:= t - S_{N_t} = \text{Alter} \\ L_t &:= W_t + V_t = \text{Gesamtlebensdauer} \end{aligned}$$

der zum Zeitpunkt  $t$  in Gebrauch befindlichen Glühbirne.

Es ist  $V_t \sim \exp(\lambda)$ , da die Exponentialverteilung gedächtnislos ist. Die Variable  $W_t$  kann höchstens  $t$  sein, das heißt  $P(W_t > s) = 0$  für  $s > t$ . Für  $0 \leq s \leq t$  gilt  $P(W_t \geq s) = P(N_t - N_{t-s} = 0) = e^{-\lambda s}$ . Damit ist

$$F_{W_t}(s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, & 0 \leq s \leq t \\ 1, & s \geq t. \end{cases}$$

Außerdem sind nach der starken Markoveigenschaft die Zufallsvariablen  $W_t$  und  $V_t$  unabhängig.  $L_t$  ergibt sich als Faltung dieser Variablen. Die Dichte  $f_{L_t}$  für  $s \geq t$ :

$$\begin{aligned} f_{L_t}(s) &= \int_0^s f_{V_t}(s-u) F_{W_t}(du) \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(s-u)} \lambda e^{-\lambda u} du + \lambda e^{-\lambda(s-t)} \cdot e^{-\lambda t} \\ &= \lambda(1 + \lambda t) e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

und für  $s < t$ :

$$\begin{aligned} f_{L_t}(s) &= \int_0^s \lambda e^{-\lambda(s-u)} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \lambda^2 s e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

Also ist  $L_t$  *nicht*  $\exp(\lambda)$ -verteilt! Für großes  $t$  gilt

$$EL_t \approx 2EX_i = \frac{2}{\lambda}.$$

Dieses Ergebnis lässt sich erklären: Inspiziert man zu einer zufälligen Zeit die aktuell leuchtende Glühbirne, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine länger lebende zu erwischen, größer, als eine kurzlebige Birne anzutreffen.

## 8. Der allgemeine Fall im Schnelldurchgang

### Definition

Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit abzählbarem Zustandsraum  $S$  heißt (homogene) Markov-Kette, falls gilt: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $t, h > 0$  und  $i_k \in S$  mit  $P(X_{t_k} = i_k, 0 \leq k \leq n) > 0$ :

$$\begin{aligned} P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_k} = i_k, 0 \leq k \leq n) &= P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n) \\ &= P(X_{t+h} = i_{n+1} \mid X_t = i_n) \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Definieren wir für alle  $i, j \in S$

$$p_{ij}(t) := P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

und die Matrix

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in S},$$

so gelten analog zum diskreten Fall die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen für alle  $i, j \in S$ ,  $s, t > 0$ :

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

Mit  $P(0) = E$  wird  $\{P(t) : t \geq 0\}$  zu einer Halbgruppe von stochastischen Matrizen. Diese nennen wir *Übergangsmatrizenfunktion*.

Falls zusätzlich für  $i, j \in S$

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$$

gilt, also  $P(t)$  rechtsseitig stetig in 0 ist, dann heißt sie *Standardübergangsmatrizenfunktion*.

**Satz und Definition 8.1**

Sei  $\{P(t) : t \geq 0\}$  eine Standardübergangsmatrizenfunktion. Dann ist jedes  $p_{ij}(t)$  in 0 rechtseitig differenzierbar, das heißt es existiert für alle  $i, j \in S$

$$q_{ij} := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (p_{ij}(t) - \delta_{ij}).$$

Die Matrix  $Q := (q_{ij})$  heißt *Intensitätsmatrix* oder *infinitesimaler Erzeuger* (Generator) zu  $\{P(t) : t \geq 0\}$ .

**Beispiel 8.1**

Es sei  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$ . Dann gilt für  $i_{n+1} \geq i_n$ :

$$\begin{aligned} P(N_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid N_{t_0} = i_0, \dots, N_{t_n} = i_n) &= P(N_{t_{n+1}} - N_{t_n} = i_{n+1} - i_n) \\ &= e^{-\lambda(t_{n+1} - t_n)} \frac{(\lambda(t_{n+1} - t_n))^{i_{n+1} - i_n}}{(i_{n+1} - i_n)!} \end{aligned}$$

Also ist  $N$  eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{falls } j \geq i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

weiter gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (p_{ij}(t) - \delta_{ij}) = \begin{cases} \lambda, & \text{falls } j = i + 1 \\ -\lambda, & \text{falls } j = i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Lemma 8.2**

Sei  $\{P(t) : t \geq 0\}$  eine Standardübergangsmatrizenfunktion. Dann gilt für  $q_{ij} := p'_{ij}(0)$ :

- a)  $0 \leq q_{ij} < \infty$ ,  $i \neq j$ ,  $-\infty \leq q_{ii} \leq 0$ .
- b)  $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq -q_{ii} =: q_i$ . Falls  $S$  endlich ist, gilt für alle  $i \in S$ :  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ . In diesem Fall heißt die Standardübergangsmatrizenfunktion *konservativ*.

**Beweis**

- a)  $0 \leq q_{ij}$  für  $i \neq j$  und  $q_{ii} \leq 0$  klar, da  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ . Schwieriger ist zu zeigen, dass  $q_{ij} < \infty$ , hier wird auf die Literatur verwiesen.

- b) Es gilt für  $t \geq 0$ :

$$\sum_{j \in S, j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$$

und damit mit Fatou

$$-q_{ii} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \geq \sum_{j \in S, j \neq i} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij}$$

und Gleichheit für endliche  $S$ . ■



**Satz 8.3**

Sei  $\{P(t) : t \geq 0\}$  eine Standardübergangsmatrizenfunktion und  $S$  sei endlich. Dann gilt das sogenannte *Kolmogorovsche Rückwärtsdifferentialgleichungssystem*: Für  $t \geq 0$  ist

$$P'(t) = QP(t)$$

das heißt für alle  $i, j \in S$  ist

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t).$$

**Beweis**

Wegen Chapman-Kolmogorov gilt für  $i, j \in S$ ,  $t, h > 0$ :

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) &= \sum_{k \in S} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \\ \Rightarrow \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} &= \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} p_{ij}(t) + \sum_{k \in S, k \neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) \end{aligned}$$

Für  $h \downarrow 0$  geht die rechte Seite gegen

$$-q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t)$$

woraus die Behauptung folgt. ■

**Bemerkung:** a) Unter milden Bedingungen ( $\{P(t) : t \geq 0\}$  eine konservative Standardübergangsmatrizenfunktion und  $q_i$  für alle  $i \in S$  endlich) gilt Satz 8.3 auch für abzählbares  $S$ . Weitere Bedingungen sind nötig für das Kolmogorovsche Vorwärtsdifferentialgleichungssystem

$$P'(t) = P(t)Q.$$

b) Falls  $S$  endlich ist, ist die Lösung von  $P'(t) = QP(t)$ ,  $P(0) = E$  gegeben durch

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!}.$$

**Beispiel 8.2**

$$S = \{0, 1\}, 0 < q_0, q_1 < \infty$$

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 \\ q_1 & -q_1 \end{pmatrix}$$

Rückwärtsdifferentialgleichung  $P'(t) = QP(t)$

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}$$

## II. Markov-Ketten in stetiger Zeit

$$\begin{aligned} (1) \quad p'_{00}(t) &= -q_0 p_{00}(t) + q_0 p_{10}(t) \\ (2) \quad p'_{01}(t) &= -q_0 p_{01}(t) + q_0 p_{11}(t) \\ (3) \quad p'_{10}(t) &= -q_1 p_{10}(t) + q_1 p_{00}(t) \\ (4) \quad p'_{11}(t) &= -q_1 p_{11}(t) + q_1 p_{01}(t) \end{aligned}$$

Es gilt:  $p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$ ,  $p_{11}(t) = 1 - p_{10}(t)$

Eingesetzt in (2):  $-p'_{00}(t) = -q_0 + q_0 p_{00}(t) + q_0 - q_0 p_{10}(t) = (1)$

also ist (2) überflüssig. Analog: (4) ist überflüssig. Sei

$$y(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) \\ p_{10}(t) \end{pmatrix}$$

Zu lösen:  $y'(t) = Qy(t)$ ,  $y(0) = (1, 0)^T$ . Die Eigenwerte von  $Q$  sind:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(q_0 + q_1)$

Eigenvektoren:  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} e^{-(q_0+q_1)t}$$

$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  liefert  $\alpha = \frac{q_1}{q_0+q_1}, \beta = -\frac{1}{q_0+q_1}$

Insgesamt also:

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \frac{q_1}{q_0 + q_1} + \frac{q_0}{q_0 + q_1} e^{-(q_0+q_1)t} \\ p_{10}(t) &= \frac{q_1}{q_0 + q_1} - \frac{q_1}{q_0 + q_1} e^{-(q_0+q_1)t} \end{aligned}$$

Hier fehlt ein kleines Bild, das zeigt, wie  $p_{00}$  und  $p_{10}$  so aussehen.

Wir wollen weiter annehmen, dass die Pfade der Markov-Kette  $(X_t)_{t \geq 0}$  in

$$D(S) := \{f : [0, \infty) \rightarrow S \mid f(t+) = f(t) \ \forall t \geq 0, f(t-) \text{ existiert } \forall t > 0\}$$

liegen (diskrete Topologie auf  $S$ ). Die Eigenschaft der  $f$  in  $D(S)$  wird auch mit RCLL oder càdlàg bezeichnet.

Gegeben sei jetzt eine Intensitätsmatrix  $Q = (q_{ij}), q_{ij} \in \mathbb{R}$  mit

$$(Q1) \quad q_{ij} \geq 0 \ \forall i, j \in S, i \neq j, q_{ii} \leq 0 \ \forall i \in S$$

$$(Q2) \quad \sum_{j \in S} q_{ij} = 0 \ \forall i \in S$$

$$(Q3) \quad 0 < \sup_{i \in S} |q_{ii}| =: \lambda < \infty$$

**Satz 8.4**

Für eine Matrix  $Q$  gelte (Q1)-(Q3). Es sei  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$  und  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine von  $N$  unabhängige Markov-Kette mit Start in  $i_0 \in S$  und Übergangsmatrix  $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})_{i,j \in S}$ ,  $\tilde{P} := E + \frac{1}{\lambda}Q$ , also

$$\tilde{p}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{q_{ij}}{\lambda} \quad \forall i, j \in S.$$

Dann ist  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  mit  $X_t := Y_{N_t} \quad \forall t \geq 0$  eine Markov-Kette mit Start in  $i_0$ , Pfaden in  $D(S)$  und Intensitätsmatrix  $Q$ .

**Beweis**

Offenbar ist  $\tilde{P}$  eine stochastische Matrix,  $X_0 = i_0$  und die Pfade in  $D(S)$ . Für  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ ,  $i_0, \dots, i_{n+1} \in S$  gilt:

$$\begin{aligned} & P(X_{t_m} = i_m, 0 \leq m \leq n+1) \\ &= \sum_{k_0, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{N}_0} P(N_{t_m} = k_m, Y_{k_m} = i_m, 0 \leq m \leq n+1) \\ &= \sum_{k_0, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{N}_0} P(N_{t_m} = k_m, 0 \leq m \leq n+1) \cdot P(Y_{k_m} = i_m, 0 \leq m \leq n+1) \end{aligned}$$

Betrachte die Faktoren:

$$\begin{aligned} P(N_{t_m} = k_m, 0 \leq m \leq n+1) &= P(N_{t_{n+1}-t_n} = k_{n+1} - k_n) \cdot P(N_{t_m} = k_m, 0 \leq m \leq n) \\ P(Y_{k_m} = i_m, 0 \leq m \leq n+1) &= P(Y_{k_m} = i_m, 0 \leq m \leq n) \cdot \tilde{p}_{i_n i_{n+1}}^{(k_{n+1}-k_n)} \end{aligned}$$

Sei jetzt  $l := k_{n+1} - k_n$ , dann

$$\begin{aligned} & P(X_{t_m} = i_m, 0 \leq m \leq n+1) \\ &= P(X_{t_m} = i_m, 0 \leq m \leq n) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{p}_{i_n i_{n+1}}^{(l)} \cdot P(N_{t_{n+1}-t_n} = l) \end{aligned}$$

$\implies X$  ist eine Markov-Kette in stetiger Zeit (und homogen) mit Übergangsmatrizenfunktion:

$$p_{ij}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(l)} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^l}{l!}$$

Bestimme Ableitungen  $p'_{ij}(0) \implies Q$  ist wie gewünscht. ■

Eine “Umkehrung“ des Satzes gilt:

Dazu sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$  und Sprungzeiten:

$$\begin{aligned} S_0 &:= 0 \\ S_1 &:= \inf\{t \geq 0 \mid X_t \neq X_0\} \\ S_n &:= \inf\{t > S_{n-1} \mid X_t \neq X_{S_{n-1}}\}, n \geq 2. \end{aligned}$$

## II. Markov-Ketten in stetiger Zeit

Verweildauern:  $n \geq 1$ :

$$T_n := S_n - S_{n-1}$$

Weiter sei die eingebettete Markov-Kette  $Y = (Y_n)$  gegeben durch:  $Y_n := X_{S_n}, n \in \mathbb{N}_0$ .

### Satz 8.5

Es sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$  und Intensitätsmatrix  $Q$ , wobei (Q1) bis (Q3) erfüllt seien.

Dann gilt:

a)  $Y = (Y_n)$  ist eine (zeitdiskrete) Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $P = (p_{ij})$ , wobei

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & , \text{ falls } i \neq j \\ 0 & , \text{ falls } i = j \end{cases}, \text{ falls } q_i > 0$$

$$p_{ij} = \delta_{ij}, \text{ falls } q_i = 0$$

b)  $T_1, T_2, \dots$  sind bedingt unter  $(Y_n)$  stochastisch unabhängig mit

$$T_n \sim \text{Exp}(q_{Y_{n-1}})$$

*Hier fehlt ein Bild.*

### Beispiel 8.3

Sei  $S = \mathbb{N}_0$  und  $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$  mit

$$q_{ij} := \begin{cases} -(i+1)^2, & \text{ falls } j = i \\ (i+1)^2, & \text{ falls } j = i+1 \\ 0, & \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es gilt:  $Y_n = n$  für  $n \in \mathbb{N}$  bei Start in 0 und  $\sup_{i \in \mathbb{N}_0} q_i = \sup_{i \in \mathbb{N}_0} (i+1)^2 = \infty$ , das heißt dass die Bedingung (Q3) nicht erfüllt ist.

Weiter ist  $T_n \sim \exp(n^2)$ . Für die Gesamtlebensdauer  $T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$  gilt:

$$ET = \sum_{n=1}^{\infty} ET_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Also liegen die Pfade nicht in  $D(S)$ , da sie keinen linksseitigen Grenzwert in  $T$  haben.

### Definition

Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  eine Markov-Kette mit Standardübergangsmatrizenfunktion  $\{P(t), t \geq 0\}$ . Ein Maß  $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  heißt *invariantes Maß*, falls für alle  $t \geq 0$  gilt:

$$\mu = \mu P(t)$$

also für jedes  $j \in S$  gilt:

$$\mu(j) = \sum_{i \in S} \mu(i) p_{ij}(t)$$

Gilt  $\sum_{j \in S} \mu(j) = 1$ , so heißt  $\mu$  *stationäre Verteilung*.

**Satz 8.6**

Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  eine Markov-Kette mit Intensitätsmatrix  $Q$ , wobei (Q1) bis (Q3) erfüllt seien. Dann ist  $\mu$  genau dann ein invariantes Maß, wenn

$$\mu Q = 0$$

gilt.

**Beweis**

Unter den Voraussetzungen gelten die Vorwärts- und Rückwärtsdifferentialgleichungssysteme:

$$P'(t) = P(t)Q \qquad P'(t) = QP(t)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} P(t) &= E + \int_0^t P'(s) ds \\ &= E + \int_0^t P(s) ds Q \quad (*) \\ &= E + Q \int_0^t P(s) ds \quad (\triangle) \end{aligned}$$

Sei  $\mu$  ein invariantes Maß für  $X$ , also  $\forall t \geq 0 : \mu = \mu P(t)$ . Aus  $(*)$  folgt für  $t \geq 0$ :

$$\mu = \mu P(t) = \mu + \int_0^t \mu P(s) ds Q = \mu + t \cdot \mu Q$$

Damit gilt  $0 = t\mu Q$  und, wegen  $t \geq 0$ , auch  $\mu Q = 0$ .

Falls  $\mu Q = 0$  gilt, so folgt aus  $(\triangle)$ :  $\forall t \geq 0: \mu P(t) = \mu$ . ■

**Definition**

Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$  und  $i \in S$  mit  $q_i < \infty$ .

- a)  $i$  heißt *rekurrent*, falls  $i$  rekurrent für die eingebettete Kette  $(Y_n)$  ist.
- b)  $i$  heißt *positiv rekurrent*, falls  $i$  rekurrent ist und

$$m_i := E_i[\tilde{T}_i] < \infty$$

wobei  $\tilde{T}_i$  der erste Rückkehrzeitpunkt in den Zustand  $i$  ist.

- c)  $X$  heißt *irreduzibel*, falls die eingebettete Kette  $(Y_n)$  irreduzibel ist.

**Satz 8.7**

Sei  $X$  eine Markov-Kette mit Intensitätsmatrix  $Q$ , wobei (Q1) bis (Q3) erfüllt seien. Sind alle Zustände rekurrent und ist die Markov-Kette irreduzibel, so gilt:

- a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{m_j q_j}$  für alle  $i, j \in S$ , unabhängig von  $i \in S$ .
- b)  $X$  besitzt genau dann eine stationäre Verteilung  $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ , wenn es einen positiv rekurrenten Zustand  $j$  gibt. In diesem Fall ist  $\pi_j = \frac{1}{m_j q_j} > 0$  für jedes  $j \in S$  und alle Zustände sind positiv rekurrent.

**Beweis**

Nicht hier. Wird teilweise in der Übung untersucht. ■

**Beispiel 8.4 (Geburts- und Todesprozesse in stetiger Zeit)**

Sei  $X$  eine Markov-Kette mit  $S = \mathbb{N}_0$  und Intensitätsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & & \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_0, \lambda_i, \mu_i > 0$ . Weiter sei  $\sup_{i \in \mathbb{N}} (\lambda_i + \mu_i) < \infty$ .

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Kette  $(Y_n)$  sind

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}, \quad p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i}, \quad p_{01} = 1.$$

Also ist  $X$  irreduzibel.

Wie sieht eine stationäre Verteilung aus, falls sie existiert? Der Ansatz ist die Gleichung  $\pi Q = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 \\ 0 &= \lambda_0 \pi_0 - (\mu_1 + \lambda_1) \pi_1 + \mu_2 \pi_2 \\ &\vdots \\ 0 &= \lambda_i \pi_i - (\mu_{i+1} + \lambda_{i+1}) \pi_{i+1} + \mu_{i+2} \pi_{i+2}, \quad i \geq 1 \\ \implies \pi_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{(\mu_1 + \lambda_1) \lambda_0}{\mu_1} \pi_0 - \frac{\lambda_0 \mu_1}{\mu_1} \pi_0 \right) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0 \end{aligned}$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass für  $i \geq 0$

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} \pi_0$$

gilt, welche sich leicht durch Einsetzen bestätigen lässt.

$\pi = (\pi_i)$  kann zu einer stationären Verteilung normiert werden, falls

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} < \infty. \quad (*)$$

Nach Beispiel 3.3 ist  $(Y_n)$  positiv rekurrent, falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^n \frac{p_{k,k+1}}{p_{k+1,k}} < \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} < \infty.$$

Also ist nach Satz 8.7  $X$  positiv rekurrent, falls  $(*)$  gilt, und  $\pi$  ist die Grenzverteilung.

Falls  $\lambda_i = \lambda$  und  $\mu_i = \mu$  ist, dann ist  $X$  eine M/M/1-Warteschlange mit stationärer Verteilung (falls  $\rho := \frac{\lambda}{\mu} < 1$ ):  $\pi_i = (1 - \rho)\rho^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$ .

