Kapitel II

Projektive Varietäten

§ 8 Varietäten im projektiven Raum

Erinnerung 8.1 *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$.*

(i) Der projektiven Raum ist

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{n+1} /_\sim$$

mit

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es ex. } \lambda \in \mathbb{K}^\times \text{ mit } \lambda x_i = y_i \text{ für alle } 0 \leqslant i \leqslant n$$

Anschaulich sind die Elemente des projektiven Raums gerade die Ursprungsgeraden des $\mathbb{K}^{n+1}$.
Schreibeweise: Es sei $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ die Äquivalenzklasse von $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

(ii) Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ sei

$$U_i := \{(x_0 : \ldots x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i \neq 0\}$$

Es gilt $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup \ldots \cup U_n$. Für ein festes $i \in \{0, \ldots, n\}$ betrachte

$$\psi_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \quad (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1 : \ldots y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots y_n)$$

Offenbar ist ψ_i injektiv mit Bild$(\psi_i) = U_i$. Die Umkehrabbildung ist

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

(iii) Die Abbildung

$$\rho_i : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \backslash U_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}), \quad (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (x_0 : \ldots x_{i-1} : x_{i+1} : \ldots x_n)$$

ist bijektiv. Induktiv erhalten wir

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}^{n-1} \cup \cdots \cup \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

wobei die Wahl von ∞ willkürlich ist. Insbesondere gilt also

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

(iv) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *und* $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ *sind* n*-dmensionale Mannigfaltigkeiten.*

Definition + Bemerkung 8.2 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Ein Polynom

$$f = \sum_{(i_0 \dots i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}}^{<\infty} a_{i_0 \dots i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n} \quad \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$$

heißt *homogen von Grad* $d \geqslant 0$, falls für alle nichtverschwindenden Koeffizienten der Gesamtgrad konstant ist, also

$$a_{i_0 \dots i_n} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad i_0 + \dots + i_n = d \quad \text{für alle } i$$

(ii) Ist $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ homogen von Grad d, so gilt für alle $x = (x_0, \dots x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ und $\lambda \in \mathbb{K}^\times$:

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

(iii) Ist $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ homogen, so ist die Nullstellenmenge $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ wohldefiniert.

Definition 8.3 Ein Teilmenge $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ heißt *projektive Varietät*, wenn es eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ von homogenen Polynomen gibt, sodass

$$V = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}$$

Beispiel 8.4 (i) Für $i \in \{0, \dots, n\}$ ist

$$V(X_i) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \backslash U_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$

eine projektive Varietät.

(ii) Es gilt $V(X_0, \dots, X_n) = \varnothing$.

Bemerkung 8.5 *Ist* $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ *projektive Varietät, so ist*

$$\phi_i(V \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$$

affine Varietät für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

Beweis. Es genügt, die Aussage für $V(f)$, $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ homogen zu zeigen, denn:

$$V(\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} V(f) \quad \Longrightarrow \quad \phi_i(V \cap U_i) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \phi_i(V(f) \cap U_i)$$

Sei nun

$$\tilde{f} := f(X_0, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n] = \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$$

Beh. (1) Es gilt $V(\tilde{f}) = \phi_i(V(f) \cap U_i)$.

Bew. (1) Wir haben

"$\supseteq$" Sei $x \in V(f) \cap U_i$, $x = (x_0| \dots |x_n)$. Dann gilt

$$x_i \neq 0, \quad \phi_i(x) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Also

$$\tilde{f}(\phi_i(x)) = f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \frac{1}{x_i^d} f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$$

"$\subseteq$" Sei nun $y = (y_1, \dots, y_n) \in V(\tilde{f})$. Dann gilt

$$\tilde{f}(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0$$

Also gilt $x := (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \in U_i \cap V(f)$ und $\phi_i(x) = y$, also gerade die Behauptung. □

Beispiel 8.6 Betrachte $V = V(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Es gilt

$$\phi_0(V \cap U_0) = V(X_2 - X1_1^2) \qquad \textit{Parabel}$$

$$\phi_1(V \cap U_1) = V(X_0X_2 - 1) \qquad \textit{Hyperbel}$$

$$\phi_2(V \cap U_2) = V(X_0 - X_1^2) \qquad \textit{Parabel}$$

Bemerkung 8.7 *Zu jeder affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ gibt es eine projektive Varietät $\tilde{V}_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ mit $\phi_i(\tilde{V}_i \cap U_i) = V$.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $V = V(f)$ für ein $f \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$. Schreibe

$$f = \sum_{k=0}^{d} f_k$$

mit homogenen Polynomen f_k von Grad k für $1 \leqslant k \leqslant d$, $d = \deg(f)$. Sei

$$F := \sum_{k=0}^{d} X_i^{d-k} f_k \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_i, X_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n]$$

Dann ist F homogen von Grad d und es gilt:

Beh. (1) Es gilt $\phi_i(V(F) \cap U_i) = V(f)$.

Bew. (1) Wir haben

"$\supseteq$" Sei $y := (y_1, \dots, y_n) \in V(f)$, d.h es gilt $f(y) = 0$. Setze

$$x := \psi_i(y) = (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots y_n) \in U_i, \quad \phi_i(x) = y.$$

Dann gilt

$$F(x) = \sum_{k=0}^{d} X_i^{d-k} f_k(y_1, \dots, y_n) = f(y) = 0.$$

"$\subseteq$" Sei nun $y \in \phi_i(V(F) \cap U_i)$, d.h. es gilt $y = \phi(x)$ mit $x \in V(F) \cap U_i$.
Damit gilt $x = (x_1 : \ldots : x_i : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n)$ und

$$0 = F(x) = \sum_{k=0}^{d} f_k(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\phi_i(x)) = f(y),$$

also $y \in V(f)$. □

Definition + Bemerkung 8.8 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \geqslant 1$.

(i) Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} D_i : \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n] \cong \mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_n], \\ f(x_0, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Dehomogenisierung nach der i-ten Variable. D_i ist als Auswertung ein $\mathbb{K}$-Algebren Homomorphismus.

(ii) Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} H_i : \mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_n, X_i] \cong \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n] \\ f = \textstyle\sum_{k=0}^{d} f_k &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{d} X_i^{d-k} f_k \end{aligned}$$

(i-te)*Homogenisierung*, wobei f_k homogene Polynoms von Grad k sind. Es gilt

$$H_i(fg) = H_i(f)H_i(g)$$

$$H_i(f+g) \neq H_i(f) + H_i(g), \qquad \text{falls } \deg(f) \neq \deg(g)$$

(iii) Es gilt

$$D_i \circ H_i = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_n]}$$

$$(H_i \circ D_i)(f) = \frac{1}{X_i^e} f, \quad e = \max_{e \in \mathbb{N}_0}\{X_i^e \mid X_i^e \mid f, X_i^{e+1} \nmid f\}, \quad \text{falls } f \text{ homogen.}$$

§ 9 Die Zariski Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Definition 9.1 Für $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sei $I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ das von allen homogenen Polynomen $f \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ erzeugte Ideal. $I(V)$ heißt *Verschwindungsideal* von V.

Definition + Bemerkung 9.2 (i) Ein (kommutativer) Ring (mit 1) R heißt *graduiert*, falls es eine Zerlegung

$$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$$

in abelsche Gruppen R_d gibt, sodass für alle $f \in R_d, g \in R_e$ gilt: $f \cdot g \in R_{d+e}$.

(ii) eine $\mathbb{K}$-Algebra S heißt *graduiert*, wenn

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

graduierter Ring ist und $S_0 = \mathbb{K}$. Dies impliziert, dass die S_d sogar zu $\mathbb{K}$-Vektorräumen werden.

(iii) Die Elemente in R_d bzw. S_d heißen *homogen vom Grad d*.

(iv) Ein Ideal in R heißt *homogen*, wenn es von homogenen Elementen erzeugt werden kann.

(v) Für ein Ideal $I \trianglelefteq R$ sind äquivalent:

(a) I ist homogen.

(b) I besitzt eine Darstellung

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap R_d)$$

(c) Für jedes $f \in I$ mit

$$f = \sum_{d=0}^{\infty} f_d, \quad f_d \in R_d$$

gilt bereits $f_d \in I$ für alle $d \in \mathbb{N}_0$.

(vi) Ist $I \trianglelefteq R$ homogenes Ideal, so ist R/I graduiert mit

$$R/I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d/(R_d \cap I)$$

(vii) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogen.

Beweis. (v) "(a)⇒(b)" "$\supseteq$" Klar.

"$\subseteq$" Seien $a_i, i \in J$ homogene Erzeuger von I. Es genügt zu zeigen:

$$r \cdot a_i \in \bigoplus_{d=0}^{\infty} I \cap R_d \qquad \text{für alle } r \in R$$

Schreibe

$$r = \sum_{d=1}^{n} r_d, \qquad r_d \in R_d$$

Dann gilt mit $d_i := \deg(a_i)$

$$r \cdot a_i = \sum_{d=1}^{n} r_d a_i, \quad r_d a_i \in R_{d+d_i} \cap I$$

also gerade die Behauptung.

"(b)⇒(c)" Klar.

"(c)⇒(a)" Klar.

(vi) Für jedes Ideal $I \trianglelefteq R$ ist

$$\pi : \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d/(R_d \cap I) \longrightarrow R/I$$

surjektiv, denn für $d \in \mathbb{N}_0$ ist $R_d \longrightarrow R$ surjektiv. Für den Kern betrachte

$$\sum_{d=0}^{n} r_d \mod (R_d \cap I) \in \ker(\pi) \iff \sum_{d=0}^{n} r_d \in I \iff r_d \in I \iff \sum_{d=0}^{n} r_d \equiv 0 \mod (R_d \cap I)$$

Damit folgt die Behauptung.

(vii) Seien I_1, I_2 homogene Ideale, also mit homogenen Erzeugern $\{f_i\}, \{g_j\}$.

Dann wird $I_1 + I_2$ von $\{f_i + g_j\}$ erzeugt und $I_1 I_2$ von $\{f_i g_j\}$.
Durchschnitt. Für $I_1 \cap I_2$ verwende (v)(b):

$$\bigoplus_{d=0}^{\infty}((I_1 \cap I_2) \cap R_d) = \bigoplus_{d=0}^{\infty}((I_1 \cap R_d) \cap (I_2 \cap R_d)) = \bigoplus_{d=0}^{\infty}(I_1 \cap R_d) \;\cap\; \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_2 \cap R_d \;=\; I_1 \cap I_2$$

Radikal. Sei nun I homogen, $x \in \sqrt{I}$. Schreibe

$$x = \sum_{d=0}^{n} x_d, \quad x_d \in R_d$$

Nach Voraussetzung existiert $m \geqslant 1$, sodass $x^m \in I$, also

$$I \ni \left(\sum_{d=0}^{n} d_d\right)^m = x_n^m + \mathcal{O}(x_n^{m-1})$$

Damit gilt $x_n^m \in I$ und somit $x_n \in \sqrt{I}$ und $(x - x_n) \in \sqrt{I}$.
Per Induktion über $\deg(x)$ folgt nun die Behauptung. □

Proposition 9.3 *(i) Für jede Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist $I(V)$ ein Radikalideal.*

(ii) Die projektiven Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen der Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

(iii) Eine projektive Varietät V ist irreduzibel genau dann, wenn $I(V)$ ein Primadeal ist.

(iv) Jede projektive Varietät ist endliche Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten.

Beweis. (i) Zu zeigen ist: $\sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$.
Nach 9.2 (vii) ist $\sqrt{I(V)}$ ein homogenes Ideal. Sei also $f \in \sqrt{I(V)}$ homogen und $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$f^m \in I(V) \quad \Longrightarrow \quad f(x)^m = 0 \text{ für alle } x \in V$$

Damit gilt $f \in I(V)$, also die Behauptung.

(ii) Folgt wie im affine Fall aus 9.2 (vii).

(iii) Wörtlich wie in 3.5 mit gelöster Übungsaufgabe.

(iv) Wie in 3.6 □

Folgerung 9.4 Bezüglich der Einschränkung der Zariskitopologie von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ auf U_i ist die Bijektion $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ein Homoömorphismus.

Beweis. Folgt aus Bemerkung 8.4 und 8.5.

Bemerkung 9.5 *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ affine Vareität, $I = I(V) \trianglelefteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ ihr Verschwindungsideal und $I^* \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ das von den Homogenisierungen $H_0(f)$ aller $f \in I$ erzeugte Ideal.*
Dann ist $V(I^*) = \overline{V}$ der Zariski-Abschluss von V in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Beweis. Aus dem Beweis von Bemerkung 8.5 folgt $V(I^*) \cap U_0 = V$.
Sei $\tilde{V} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ abgeschlossen mit $V \subseteq \tilde{V}$. Zeige $V(I^*) \subseteq \tilde{V}$. Sei dazu $\tilde{V} = V(J)$ für ein homogenes Ideal J. Dann genügt es zu zeigen: $J \subseteq I^*$.
Sei dazu $f \in J$ homogen. Für $y \in \tilde{V}$ ist dann $D_0(f)(y) = 0$, also $D_0(f) \in I$. Per Definition ist dann $H_0(D_0(f)) \in I^*$. Es gilt aber $H_0(D_0(f)) = f \cdot X_0^{-e}$ für ein $e \geqslant 0$, es folgt also die Behauptung. □

Definition + Bemerkung 9.6 (i) Eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ heißt *quasiprojektive Varietät*, wenn W offene Teilmenge einer projektiven Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist.

(ii) $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist quasiprojektiv genau dann, wenn es eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ und eine abgeschlossene Menge $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ gibt, sodass gilt $W = U \cap V$.

(iii) Die Zariski-Topologie auf einer quasiprojektiven Varietät hat eine Basis aus (abstrakt) affine Varietäten.

(iv) Jede quasi-projektive Varietät ist kompakt.

Beweis. (iii) Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ und $U \subseteq W$ offen. Dann ist $U \cap U_i$ offen für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ und der Zariskiabschluss $\overline{U \cap U_i}$ von $U \cap U_i$ in U_i eine affine Varietät.

Nach Proposition 2.5 bilden die $D(f)$ für $f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ eine Basis der Zariski-Topologie auf $\overline{U \cap U_i}$, d.h. es existiert f mit $D(f) \subseteq U \cap U_i$. Nach 6.11 Ist $D(f)$ isomorph zu einer affine Varietät, es folgt die Behauptung.

(iv) Nach Proposition 6.5(iii) ist $W \cap U_i$ kompakt für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$. Also ist

$$W = \bigcup_{i=0}^{n} W \cap U_i$$

ebenfalls kompakt.

Definition + Bemerkung 9.7 Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ projektive Varietät, $V \neq \varnothing$.

(i) Der *affine Kegel* von V ist definiert als

$$\tilde{V} := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid (x_0 : \ldots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \ldots, 0)\}$$

(ii) $\tilde{V}$ ist affine Varietät. Genauer gilt: Ist $V = V(I)$ für ein homogenes Ideal $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$, so ist $\tilde{V} = V_{\text{aff}}(I)$ die Nullstellenmenge vom I in $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$.

(iii) Falls $\mathbb{K}$ unendlich ist, gilt $I(V) = I(\tilde{V})$.

Beweis. (ii) Nach Definition ist $(x_0, \ldots, x_n) \in \tilde{V} \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ genau dann, wenn $(x_0 : \ldots : x_n) \in V$. Es bleibt also noch zu zeigen: $(0, \ldots, 0) \in V_{\text{aff}}(I)$.

Ist $f \in I$ homogen, so ist $\deg(f) > 0$, also $f(0, \ldots, 0) = 0$.

(iii) Für jedes homogene $f \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ gilt:

$$f \in I(V) \iff f \in I(\tilde{V})$$

Zu zeigen ist also: $I(\tilde{V})$ ist homogen. Sei dazu

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i \in I(\tilde{V}), \qquad f_i \text{ homogen von Grad } i$$

Zu zeigen ist: $f_i \in I(\tilde{V})$ für alle $0 \leqslant i \leqslant d$.

Für jedes $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \tilde{V} \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \in \tilde{V}$, also

$$0 = f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i f_i(x_0, \ldots, x_n)$$

Sind $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$ verschiedene Elemente in $\mathbb{K}$, so hat das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \ldots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \ldots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0(x_0, \ldots, x_n) \\ f_1(x_0, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_d(x_0, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur die triviale Läösung (Vandermonde-Matrix)

$$f_0(x_0, \ldots, x_n) = \ldots = f_d(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Satz 9.8 (*Projektiver Nullstellensatz) Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, $n \geqslant 0$. Dann gilt für jedes homogene Radikalideal $I \trianglelefteq \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n], I \neq \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$:*

$$I(V(I)) = \sqrt{I} = I$$

Das Ideal $\langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ heißt auch irrelevantes Ideal.

Beweis. Offenbar stimmt die Aussage für $I = \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$. Sei nun also I ein echtes Ideal, also

$$I \subset \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$$

Seien $V_{\text{aff}}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$ die affine und $V = V_{\text{proj}}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ die projektive Nullstellenmenge von I.
Dann ist $\tilde{V} := V_{\text{aff}}(I)$ der affine Kegel von V.
Da $I \neq \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$, ist nach HNS $V_{\text{aff}}(I) \neq \{0\}$, also $V \neq \varnothing$. Nach 9.7(iii) gilt dann

$$I(V(I)) = I(V) = I(\tilde{V}) = I(V_{\text{aff}}(I)) \overset{HNS}{=} I,$$

was zu zeigen war. $\square$

Beispiel 9.9 Es sei $E_0 := V(Y^2 - X^3 + X)$ und $E := \overline{E_0}$ der projektive Abschluss von E_0 in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, also

$$E = V(Y^2 Z - X^3 + XZ^2)$$

Dann gilt

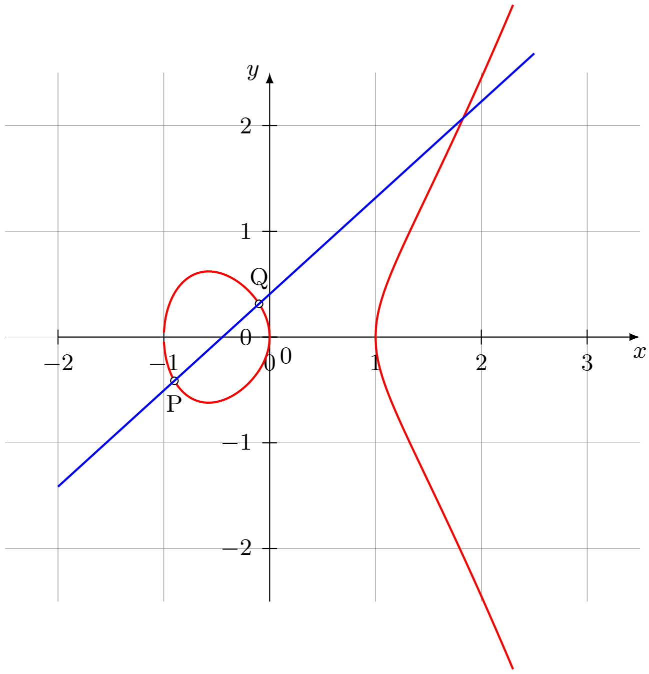
$$E \backslash E_0 = E \cap V(Z) = \{(0 : 1 : 0)\}$$

Es sei nun $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ eine Gerade also $L = V(aX + bY + cZ)$, wobei $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Dann kann man zeigen: Unter der Bedingung, dass $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, Tangenten doppelt und Wendetangenten dreifach zählen, gilt

$$\#(L \cap E) = 3$$

Genauer folgt dies aus dem Satz von Bézout. Im folgenden möchten wir eine Gruppenstruktur auf E definieren. Sei hierzu

$$\tilde{\mu} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto \text{dritter Schnitterpunkt der Gerade durch P und Q}$$



Zunächst einmal ist diese innere Verknüpfung wohldefiniert und kommutativ. Allerdings finden wir kein neutrales Element:
Denn gäbe es $P_0 \in E$ mit $\tilde{\mu}(P, P_0) = P$ für alle $P \in E$, so müssten alle Tangenten an E durch P_0 gehen. Das ist offenbar falsch, weshalb $\tilde{\mu}$ nicht der richtige Weg ist.
Wir nehmen nun folgende Modifikation vor: Für ein festes $P_0 \in E$ definieren wir eine Abbildung

$$\otimes_{P_0} : E \times E \longrightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto P \otimes_{P_0} Q := \tilde{\mu}(P_0, \tilde{\mu}(P, Q))$$

Dann gilt:

(i) Die Verknüpfung ist wohldefiniert

(ii) P_0 ist das neutrale Element der Verknüpfung, d.h. es gilt

$$P \oplus_{P_0} P_0 = P \qquad \text{für alle } P \in E$$

(iii) Die Verknüpfung $\oplus_{P_0}$ ist assoziativ

(iv) und kommutativ

Damit haben wir eine Gruppenstruktur auf unserer Varietät definiert. Nun stellt sich die Frage nach Elementen endlicher Ordnung? Gibt es sie? Ja!

(i) Die drei Punkte mit senkrechter Tangente haben Ordnung 2, bilden mit P_0 also eine Klein'sche Vierergruppe.

(ii) Die 8 Punkte mit Wendetangente (nur 2 sichtbar!) haben Ordnung 3.

§ 10 Reguläre Funktionen

Definition 10.1 Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ projektive Varietät und $I(V)$ das zugehörige Verschwindungsideal von V. Dann heißt

$$\mathbb{K}[V] := \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n] / I(V)$$

homogener Koordinatenring von V. Nach 9.2 (vi) ist $\mathbb{K}[V]$ ein graduierter Ring.

Bemerkung 10.2 *Sind $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ homogen von gleichem Grad, so ist $\frac{F}{G}$ eine wohlbestimmte Funktion aus $D(G)$.*

Definition 10.3 Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ projektive Varietät, $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Abbildung.

(i) f heißt *regulär in* $x \in W$, wenn es eine Umgebung $U_x \ni x, U_x \subseteq W$ und homogene Polynome $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ vom selben Grad gibt, sodass $U_x \subseteq D(G)$ und

$$f(y) = \frac{F}{G}(y) \qquad \text{für alle } y \in U_x$$

(ii) f heißt *reguläre Funktion auf* W, wenn f in jedem $x \in W$ regulär ist.

Bemerkung 10.4 *Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ projektive Varietät, $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ Abbildung: Dann gilt*

$$f \textit{ ist regulär } \iff f|_{U_i \cap W} = f \circ \psi_i \textit{ ist regulär im Sinne von 6.2 für alle } i \in \{0, \ldots, n\}$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $x \in W \cap U_i$ für ein $i \in \{0, \ldots, n\}$ sowie $f = \frac{F}{G}$ in einer Umgebung U_x von x und homogenen Polynomen gleichen Grades $F, G \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$. Ohne Einschränkung sei $U_x \subseteq U_i$, ansonsten verkleinere U_x. Auf U_x gilt dann

$$(f \circ \psi_i)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{F}{G}(x_1 : \ldots, x_i : 1 : x_{i+1} : \ldots x_n) = \frac{D_i(F)}{D_i(G)},$$

also ist $f \circ \psi_i$ regulär im Sinne von 6.2.

"$\Leftarrow$" Sei $x \in W \cap U_i$ sowie $f = \frac{g}{h}$ in einer Umgebung $x \ni U_x \subseteq U_i$, $f, g \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n]$. Sei $G := H_i(g), H := H_i(h)$. Ohne Einschränkung sei $\deg G \leqslant \deg H$. Dann ist

$$\frac{\tilde{G}}{H}, \qquad \tilde{G} := G \cdot X_i^{\deg H - \deg G}$$

reguläre Funktion im Sinne von Definition 12.2 auf U_x mit $f = \frac{\tilde{G}}{H}$ auf U_x. □

Definition + Bemerkung 10.5 Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ projektive Varietät.

(i) Für $U \subseteq W$ offen sei

$$\mathcal{O}_W(U) := \{ f : U \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist regulär } \}$$

(ii) $\mathcal{O}_W(U)$ ist $\mathbb{K}$-Algebra.

(iii) Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_W(U)$ ist eine Garbe von $\mathbb{K}$-Algebren auf W.

Beispiel 10.6 Es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i}(U_i) = \mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_n]_{X_i}$$

via der Zuordnung

$$f\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \quad \longleftarrow \quad f$$

Ist zum Beispiel $i = 0, n = 3$, so haben wir

$$Y_1 Y_3^2 - 2Y_2^2 \quad \longmapsto \quad \frac{X_1}{X_0}\left(\frac{X_3}{X_0}\right)^2 - 2\left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2 = \frac{X_1 X_3^2 - 2X_2^2 X_0}{X_0^3}$$

Bemerke:

$$f\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) = \frac{H_i(f)}{X_i^d}$$

mit $d = \deg(f)$. Damit erhalten wir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})}(U_i) = \left\{ \frac{H}{X_i^d} \;\middle|\; H \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n] \text{ homogen von Grad } d \right\}$$

Satz 10.7 (*Homogene Lokalisierung) Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ projektive Varietät.*

(i) Für $F \in \mathbb{K}[V]$ homogen von Grad $\deg F \geqslant 1$ gilt

$$\mathcal{O}_V(D(F)) = (\mathbb{K}[V]_F)_0 := \left\{ \frac{H}{F^d} \;\middle|\; H \in \mathbb{K}[V] \textit{ homogen von Grad } \deg H = d \cdot \deg F \right\}$$

(ii) Falls V zusammenhägend ist, gilt

$$\mathcal{O}_V(V) = \mathbb{K}$$

Beweis. (i) Definiere

$$\psi : \mathbb{K}[V]_F \longrightarrow \mathcal{O}_V(D(F)), \quad \frac{G}{F^d} \mapsto \left(x \mapsto \frac{G}{F^d}(x)\right)$$

Dann ist ψ wohldefinierter Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren.

injektiv. Ist

$$\frac{G}{F^d}(x) = 0$$

für alle $x \in D(F)$, so gilt $D(F) \subseteq V(G)$, also $F \cdot G = 0$ auf V. Dann ist aber

$$\frac{G}{F^d} = 0 \quad \text{in } \mathbb{K}[V]_F,$$

also ψ injektiv.

surjektiv. Sei $h \in \mathcal{O}_V(D(F))$.

Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ sei $f_i := D_i(F)$ die i-te Dehomogenisierung von F. Dann ist

$$D(F) \cap U_i = D(f_i)$$

Nach Satz 6.5 gibt es dann $G_i \in \mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_n]$ und $d_i \geqslant 0$, sodass $h(D(F))$ regulär ist, also

$$h(D(F) \cap U_i) = \frac{g_i}{f_i^{d_i}}$$

Mit $G_i := H_i(g_i)$ ist dann

$$h|_{D(F) \cap U_i} = \frac{G_i}{F^{d_i} X_i^{e_i}}, \quad e_i \in \mathbb{Z}$$

Auf $D(F) \cap U_i \cap U_j$ ist weiter

$$\frac{G_i}{F^{d_i} X_i^{e_i}} = \frac{G_j}{F^{d_j} X_j^{e_j}}$$

also

$$G_j F^{d_j} X_j^{e_j} - G_j F^{d_i} X_i^{e_i} = 0$$

und schließlich

$$G_j F^{d_j+1} X_j^{e_j} X_i X_j - G_j F^{d_i+1} X_i^{e_i} X_i X_j = 0 \quad \text{auf } V \quad (*)$$

Sei nun ohne Einschränkung $d_i = 1$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$, da $V(F^{d_i}) = V(F)$ für alle $d_i \geqslant 1$.
Da $\deg(F) \geqslant 1$ ist $F \in \langle X_0, \ldots, X_n \rangle$, also

$$F^m \in \langle X_0^{e_0+1}, \ldots, X_n^{e_n+1} \rangle$$

für hinreichend großes m und wegen

$$F^{m+1} = F \cdot F^m \in \langle F X_0^{e_0+1}, \ldots, F X_n^{e_n+1} \rangle$$

damit

$$F^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} H_i F X_i^{e_i+1}, \quad H_i \in \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n] \text{ homogen}$$

Beobachtung: Sei $I := \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ mit homogenen a_i.Ist b homogen, so können wir b schreiben als

$$b = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \quad \text{mit geeigneten homogenen } r_i \in R$$

(Man kann dies leicht durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich einsehen).
Schreibe nun also

$$G = \sum_{i=0}^{n} H_i G_i$$

Dann ist

$$X_j F^{m+1} G_j = X_j \sum_{i=0}^{n} H_i F X_i^{e_i+1} G_j = \sum_{i=0}^{n} H_i G_i F X_j^{e_j+1} X_i = G F X_j^{e_j+1}$$

also

$$h(D(F) \cap U_j) = \frac{G_j}{F X_j^{e_j}} = \frac{G}{F^{m+1}}$$

Daraus folgt

$$\psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right) = h,$$

also die Behauptung.

(ii) Sei V ohne Einschränkung irreduzibel. Denn dann ist $h \in \mathcal{O}_V(V)$ aus jeder irreduziblen Komponente konstant, und da V zusammenhängend ist, stimmen diese Konstanten überein.
Damit ist $I(V)$ prim, der homogene Koordinatenring $\mathbb{K}[V]$ also nullteilerfrei.
Sei $\mathbb{L} := \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V])$, $f \in \mathcal{O}_V(V)$ und ohne Einschränkung $U_i \cap V \neq \varnothing$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$. Sei weiter $f_i := f|_{V \cap U_i}$. Nach (i) ist

$$f_i = \frac{G}{X_i^{d_i}} \qquad \text{für ein homogenes } G_i \in \mathbb{K}[V], \deg(G_i) = d_i$$

Beh. (1) f_i ist ganz über $\mathbb{K}[V]$.
Dann gibt es $m \geqslant 1$, $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{K}[V]$ mit

$$f_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j f_i^j = 0 \qquad (I)$$

und durch Multiplikation mit $X_i^{d_i m}$

$$G_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j G_i^j X_i^{d_i(m-j)} \qquad (II)$$

Ohne Einschränkung gelte $a_j \in \mathbb{K}$, denn (II) muss im Grad $d_i m$ erfüllt sein.
Dann ist (I) mit $a_j \in \mathbb{K}$ erfüllt, f_i also ganz über $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist f_i sogar konstant, es folgt also die Behauptung.

Bew. (1) Es gilt

$$f|_{U_i \cap V} = \frac{G}{X_i^{d_i}} \in \mathbb{L}$$

Setze

$$d := \sum_{i=0}^{n} d_i$$

und

$$\mathbb{K}[V]_d := \{H \in \mathbb{K}[V] |\ H \text{homogen von Grad } d\}$$

Beh. (2) Es gilt $\mathbb{K}[V]_d f_i^j \subseteq \mathbb{K}[V]_d$ für alle $j \geqslant 0$.
Bew. (1) Dann ist $X_i^d f_i^j \in \mathbb{K}[V]$, also

$$f_i^j \in \frac{1}{X_i^d}\mathbb{K}[V] \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{K}[V][f_i] \subseteq \frac{1}{X_i^d}\mathbb{K}[V]$$

Da $\mathbb{K}[V]$ noethersch und endlich erzeugt ist, ist auch $\mathbb{K}[V][f_i]$ endliche erzeugter $\mathbb{K}[V]$-Modul. Dann existiert $m \geqslant 1$, sodass f_i^m in dem von $1, f_i, \ldots, f_i^{m-1}$ erzeugten $\mathbb{K}[V]$-Modul liegt. Damit folgt die Behauptung.

Bew. (2) $\mathbb{K}[V]_d$ wird als $\mathbb{K}$-Vektorraum von den Restklassen der Monome $X_o^{j_0}, \dots, X_n^{j_n}$ mit

$$\sum_{i=0}^{n} j_i = d = \sum_{i=0}^{n} d_i$$

erzeugt. Für jedes solcher Monome gibt es einen Index i mit $j_i \geqslant d_i$, also

$$X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} \cdot f_i = X_0^{j_0} \cdots X_i^{j_i - d_i} \cdots X_n^{j_n} \cdot G_i \in \mathbb{K}[V]_d,$$

was zu zeigen war. □

§ 11 Morphismen

Proposition + Definiton 11.1 Seien $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), W \subseteq \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ quasiprojektive Vareitäten, $f : V \longrightarrow W$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(i) Für jedes $x \in V$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und homogene Polynoms $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ von gleichem Grad, sodass für alle $y \in U_x$ gilt:

$$f(y) = (F_0(y), \dots, F_m(y))$$

(ii) Für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ und $j \in \{0, \dots, m\}$ mit $U_{ij} := U_i \cap f^{-1}(W \cap U_j) \neq \varnothing$ ist

$$f\left(U_i \cap f^{-1}(W \cap U_j)\right) : U_{ij} \longrightarrow W \cap U_j$$

Morphismus von quasiaffinen Varietäten.

(iii) f ist stetig und für jedes offene $U \subseteq W$ und jede reguläre Funktion $g \in \mathcal{O}_W(U)$ ist

$$g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$$

Ist eine und damit alle jede der Bedingungen erfüllt, so heißt f *Morphismus.*

Beweis. "(ii) ⇔ (iii) " Folgt aus 10.4 und 6.9

"(i) ⇒ (iii)" Die Stetigkeit von f folgt wie im affinen Fall.

Ist $g \in \mathcal{O}_W(U)$ regulär, so gilt lokal $g = \frac{G}{H}$ mit homogenen Polynomen G, H von gleichem Grad. Damit ist

$$g \circ f = \frac{G(F_0(y), \dots, F_m(y))}{H(F_0(y), \dots, F_m(y))}$$

regulär auf einer geeigneten offenen Menge.

"(ii)⇒(i)" Sei $j = 0$ und $x \in V \cap U_i$ und f in einer offenen Umgebung von x gegeben durch

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$$

mit

$$f_k = \frac{g_k}{h_k}, \qquad g_k, h_k \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_n]$$

Durch Homogenisieren erhalten wir

$$f(y) = (1 : f_1(y) : \ldots : f_m(y))$$

Multiplizieren mit dem Hauptnenner und bei Bedarf mit einer Potenz von X_0 ergibt die gewünschten Polynome von gleichem Grad. $\square$

Beispiel 11.2 Sei

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\backslash\{(0:1:0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \quad (x:y:z) \mapsto (x:z)$$

Dann ist f Morphismus. Aber: f lässt sich nicht zum Morphismus $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ fortsetzen. Denn: Betrachte $f(\lambda : \mu : \lambda) = (1:1)$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times, \mu \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\big\{(\lambda : \mu : \lambda) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid \lambda \neq 0\big\} = V(X-Z)\backslash\{(0:1:0)\}$$

das heißt, f ist konstant auf $V(X-Z)\backslash\{(0:1:0)\}$, also auch auf $\overline{V(X-Z)\backslash\{(0:1:0)\}} = V(X-Z)$, falls $\mathbb{K}$ unendlich ist.
Betrachte nun $f(\lambda : \mu : -\lambda) = (1:-1)$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times, \mu \in \mathbb{K}$. Analog erhält man hier, dass f konstant auf $V(X+Z)$ ist, also

$$f(V(X-Z)) = (1:1), \qquad f(V(X+Z)) = (1:-1)$$

Damit kann es eine solche Fortsetzung nicht geben.

Beispiel 11.3 Sei $E := V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$, Siehe Beispiel 9.9, und

$$f : E\backslash\{(0:1:0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \quad (x:y:z) \mapsto (x:z)$$

Dann lässt sich f zum Morphismus $E \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ fortsetzen.
Betrachte hierzu die Tangente an E in $P_\infty := (0:1:0)$ Diese ist die Gerade $Z=0$, denn die Tangente ist gerade der lineare Term. Dann gilt $f|_{V(Z)} = (1:0)$. Setze nun $P_0 := (0:0:1)$ und

$$g(x:y:z) = \begin{cases} (x:z) & \text{für } (x:y:z) \in E\backslash\{P_\infty\} \\ (y^2+xz : x^2) & \text{für } (x:y:z) \in E\backslash\{P_0\} \end{cases}$$

g ist Morphismus. Es bleibt zu zeigen: Für $(x:y:z) \in E\backslash\{P_0, P_\infty\}$ ist $(x:z) = (y^2+xz : x^2)$. Es gilt aber

$$y^2z + xz^2 = x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y^2+xz}{x^2} = \frac{x}{z}$$

und damit

$$(x:z) = (x(y^2+xz) : z(y^2+x^2)) \overset{(x:y:z)\in E}{=} (xy^2 + x^2z : x^3) \overset{x\neq 0}{=} (y^2+xz : x^2)$$

Außerdem ist $y^2 + xz \neq 0$, da sonst $0 = y^2z - x^3 + xz^2 = (y^2+xz)z - x^3 = -x^3$, also $x = 0$, also $(x:y:z) \in \{P_0, P_\infty\}$.

Proposition 11.4 *Ist $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ Morphismus, so gibt es homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ von gleichem Grad, sodass gilt*

$$f(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

Beweis. Übung. Hauptgrund: $\mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ ist faktoriell.

Bemerkung 11.5 *Für jede quasiprojektive Varietät V ist*

$$Aut(V) := \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ ist Isomorphismus }\}$$

eine Gruppe.

Beispiel 11.6 Es gilt $\mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\right) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) / \mathbb{K}^\times I_2 \cong \mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ mit Isomorphismus

$$\phi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\right), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ((X_0 : X_1) \mapsto (aX_0 + bX_1 : cX_0 + dX_1))$$

Analog ist

$$\mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{K})\right) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Beispiel 11.7 Sei wieder $E := V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$ wie in Beispiel 9.9. Wir haben bereits eine Gruppenstruktur auf E via

$$\oplus := \oplus_{P_0} : E \times E \longrightarrow E, \qquad (P, Q) \mapsto P \oplus_{P_0} Q$$

Mit den Formeln für $\oplus$, die man sich analytisch herleiten kann, sieht man: $\oplus$ ist Morphismus.
Für jedes $P \in E$ ist also

$$\mu_P : E \longrightarrow E, \qquad Q \mapsto P \oplus Q$$

ein Automorphismus. Damit enthält $\mathrm{Aut}(E)$ eine zu E isomorphe Untergruppe. Einen weiteren Automorphismus finden wir zum Beispiel via

$$X \mapsto -X, \quad Y \mapsto i \cdot Y, \quad Z \mapsto Z$$