Kapitel 18

Likelihood-Quotienten Test

Gegeben sei ein allgemeines Testproblem:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Definition 18.1 *Der* ***Likelihood-Quotient*** *ist definiert durch:*

$$q(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L_x(\theta)}$$

Ein Test der Form:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & q(x) > c_0 \\ \gamma, & q(x) = c_0 \\ 1, & q(x) < c_0 \end{cases}$$

heißt ***Likelihood-Quotienten Test****.*

Bemerkung 18.1
Der Neyman-Pearson-Test ist ein spezieller Likelihood-Quotienten-Test.

Beispiel 18.1 $P_{\mu,\sigma^2} = N(\mu, \sigma^2)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ Zufallsstichprobe zu $N(\mu, \sigma^2)$.
$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
Testproblem:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0$$
$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) | \mu = \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$
$$\Theta_1 = \{(\mu, \sigma^2) | \mu \neq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Likelihood-Quotient:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta) = \sup_{\sigma^2} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2\right)$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer für σ^2 (bei bekanntem $\mu = \mu_0$) ist:

$$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow \sup_{\theta\in\Theta_0} L_x(\theta) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2}}$$

Analog:

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta\in\Theta_1} L_x(\theta) &= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2}} \\
\Rightarrow q(x) &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu-0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= (1+n\cdot T^*(x))^{-\frac{n}{2}} \text{ mit } T^*(x) = \frac{(\overline{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2}
\end{aligned}$$

$q(x)$ ist fallend in $T^*(x)$, das heißt der kritische Bereich ist:

$$\begin{aligned}
\{x|q(x)<c_0\} = \{x|T^*(x)>c'\} &= \{x|\frac{u(\overline{x}-\mu_0)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2} > c'\} \\
&= \{x|\left|\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{x}-\mu_0}{S(x)}\right| > \sqrt{n(n-1)c'}\}
\end{aligned}$$

Der Likelihood-Quotiententest ist also äquivalent zu folgendem Test:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \left|\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{x}-\mu-0}{S(x)}\right| \le \sqrt{n(n+1)c'} \\ 1, & \text{falls } \left|\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{x}-\mu-0}{S(x)}\right| > \sqrt{n(n+1)c'} \end{cases}$$

Beachte:

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu-0}{S(x)} \sim t_{n-1}$$

Einstellen des Testniveaus:

$$\begin{aligned}
\beta(\mu_0) = E_{\mu_0}\varphi(X) &= P_{\mu_0}\left(\underbrace{\left|\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu_0}{S(X)}\right|}_{=:z} > \underbrace{\sqrt{n(n-1)c'}}_{=:\tilde{c}}\right) \overset{!}{=} \alpha \\
&= P_{\mu_0}(z<-\tilde{c}) + P_{\mu_0}(z>\tilde{c}),\ z\sim t_{n-1}
\end{aligned}$$

Wichtig: Die Dichte der t_{n-1}-Verteilung ist symetisch zu 0

$$\begin{aligned}
&= 2(1-F_{t_{n-1}}(2)) \overset{!}{=} \alpha \\
&\Rightarrow \tilde{c} = t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})
\end{aligned}$$

Stichwortverzeichnis