

## 2 Der Integralsatz von Cauchy

### 2.1 Das komplexe Kurvenintegral

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig (d.h. für alle  $t \in [a, b]$  existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und diese sind bis auf endlich viele  $t_k \in [a, b]$  ( $k = 1, \dots, m$ ) gleich).

$\leadsto f$  hat endlich viele (oder keine) Sprungstellen.

$\implies \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$  sind beschränkt und messbar.

$$\implies \exists \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f \, dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) \, dt.$$

Setze  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt$ .

**Eigenschaften:** Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen (vgl. Analysis 3):

$$(a) \operatorname{Re} \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t) \, dt, \operatorname{Im} \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Im} f(t) \, dt, \overline{\int_a^b f(t) \, dt} = \int_a^b \overline{f(t)} \, dt$$

(folgt direkt aus der Definition)

$$(b) \left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt \leq (b-a) \|f\|_\infty \quad (\text{zum Beweis: setze } h = e^{-i\varphi} f)$$

$$(c) \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) \, dt = \alpha \int_a^b f(t) \, dt + \beta \int_a^b g(t) \, dt, \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$$

*Beweis.* Für  $\alpha = \gamma + i\delta$ ,  $g = 0$ ,  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$  folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(t) \, dt &= \int_a^b (\gamma u(t) - \delta v(t)) \, dt + i \int_a^b (\delta u(t) + \gamma v(t)) \, dt \\ &= \gamma \int_a^b u(t) \, dt - \delta \int_a^b v(t) \, dt + i\delta \int_a^b u(t) \, dt + i\gamma \int_a^b v(t) \, dt \\ &= (\gamma + i\delta) \int_a^b (u(t) + iv(t)) \, dt \\ &= \alpha \int_a^b f(t) \, dt. \end{aligned}$$

□

(d) Seien  $f, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig,  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt - \int_a^b f_n(t) \, dt \right| \leq (b-a) \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *differenzierbar* in  $t_0 \in [a, b]$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} =: f'(t_0)$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  bei  $t_0$  differenzierbar sind. Dann gilt  $f'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0)$ . Wenn  $f$  bei allen  $t \in [a, b]$  differenzierbar ist und die Ableitung  $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist, so schreiben wir  $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ . In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f'(t) \, dt = \int_a^b u'(t) \, dt + i \int_a^b v'(t) \, dt = u(t)|_a^b + i v(t)|_a^b = f(b) - f(a). \quad (2.1)$$

Genauso zeigt man: Falls  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist, so existiert

$$\frac{d}{dt} \int_a^t g(s) \, ds = g(t) \quad (2.2)$$

für jedes  $t \in [a, b]$ .

Seien  $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$  und  $\phi \in C^1([\alpha, \beta])$  mit  $\phi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$ . Dann gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) \, dt = \int_a^b f(\phi(s)) \phi'(s) \, ds \quad (2.3)$$

(Beweis wie im reellen Fall).

**Beispiel 2.1.** Es gilt  $\int_a^b e^{zt} \, dt = \int_a^b \left( \frac{1}{z} e^{zt} \right)' \, dt = \frac{1}{z} e^{zt} \Big|_a^b = \frac{1}{z} (e^{zb} - e^{za})$  für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Definition 2.2.** Sei  $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ . Dann heißt  $\Gamma = \gamma([a, b])$  *stetige Kurve* oder *Weg* von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$  mit Parametrisierung  $\gamma$ . Die Kurve heißt *geschlossen*, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$  und *einfach*, wenn  $\gamma$  auf  $[a, b]$  injektiv ist. Die Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  heißt *stückweise  $C^1$* , wenn  $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$  und es Zahlen  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  gibt, sodass die Einschränkung  $\gamma_k$  von  $\gamma$  auf  $[t_{k-1}, t_k]$  stetig differenzierbar für jedes  $k = 1, \dots, m$  ist. Wir setzen dann  $\gamma'(t) = \gamma'_k(t)$  für  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  und  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\gamma'(b) = \gamma'_m(b)$ . Wenn zusätzlich jedes  $\gamma_k$  eine affine Funktion ist, so heißt  $\Gamma$  *Streckenweg*.

Im Folgenden bezeichnet  $\Gamma$  stets eine Kurve, die stückweise  $C^1$  ist, und  $\gamma$  ist eine Parametrisierung (soweit nichts anderes gesagt wird).

**Beispiel 2.3.** (a) Die einfach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie  $\Gamma = \partial B(c, r)$  hat z.B. die Parametrisierungen  $\gamma = c + re^{it}$  mit  $t \in [0, 2\pi]$  und  $\gamma_1 = c + re^{2it}$  mit  $t \in [0, \pi]$ . Sie ist einfach und geschlossen.

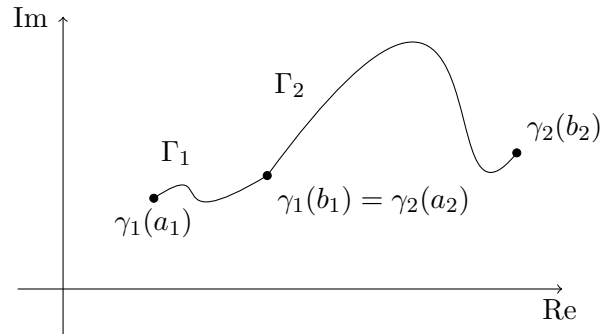
(b) Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Die  $m$ -fach durchlaufene Kreislinie  $\Gamma = \partial B(c, r)$  hat die Parametrisierung  $\gamma = c + re^{it}$  mit  $t \in [0, 2\pi m]$ . Sie ist geschlossen, aber nicht einfach.

(c) Die Strecke  $\overrightarrow{wz}$  von  $w$  nach  $z \neq w$  hat die Parametrisierung  $\gamma(t) = w + t(z - w)$  mit  $t \in [0, 1]$ . Sie ist einfach, aber nicht geschlossen.

(d) Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2$  stückweise  $C^1$ -Kurven mit Parametrisierungen  $\gamma_j \in C([a_j, b_j], \mathbb{C})$  ( $j = 1, 2$ ) und  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ . Dann hat der Summenweg  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  die Parametrisierung

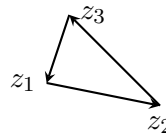
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

Er ist auch stückweise  $C^1$  und verläuft von  $\gamma_1(a_1)$  nach  $\gamma_2(b_2)$ .

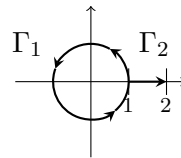


Beispiel:

- Dreiecksweg  $\overrightarrow{z_1 z_2} + \overrightarrow{z_2 z_3} + \overrightarrow{z_3 z_1}$ :



- Kreis mit Griff  $\partial B(c, r) \cup [1, 2]$ :



- (e) Der Rückwärtsweg  $-\Gamma$  wird durch  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(b - t + a)$  mit  $t \in [a, b]$  parametrisiert. Dabei sind  $\hat{\gamma}(a) = \gamma(b)$  und  $\hat{\gamma}(b) = \gamma(a)$ . Er ist auch stückweise  $C^1$  und verläuft von  $\gamma(b)$  nach  $\gamma(a)$ .

**Definition 2.4.** Seien  $\Gamma$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve mit Parametrisierung  $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$  und  $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ . Dann heißt

$$\int_{\Gamma} f \, dz = \int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$$

komplexes Kurvenintegral.

**Bemerkung 2.5.** Aus den Eigenschaften des komplexen Integrals folgt sofort für  $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C})$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g)(z) \, dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) \, dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) \, dz.$
- (b)  $\left| \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| \leq l(\gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ , wobei  $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$  die Kurvenlänge von  $\Gamma$  ist (vgl. Analysis 2/3).
- (c) Sei  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  wie in Bsp. 2.3(d). Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\Gamma_2} f(z) \, dz.$$

Speziell folgt mit den Bezeichnungen aus Def. 2.2

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt.$$

(d) Für den Rückwärtsweg  $-\Gamma$  aus Bsp. 2.3(e) gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\Gamma} f(z) \, dz &= \int_a^b f(\hat{\gamma}(t)) \hat{\gamma}'(t) \, dt \\ &= - \int_a^b f(\gamma(b-t+a)) \gamma'(b-t+a) \, dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds \quad (\text{Substituiere } s = b-t+a) \\ &= - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds \\ &= - \int_{\Gamma} f(z) \, dz.\end{aligned}$$

(e) Das Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltenden Transformationen  $\phi$  von  $\Gamma$ . Das heißt: Wenn  $\phi \in C([a, b])$  strikt wachsend und auf jedem der Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  aus Definition 2.2 stetig differenzierbar ist, dann ist  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi^{-1}$  auf  $[\alpha, \beta] := \phi([a, b])$  stückweise  $C^1$ ,  $\tilde{\gamma}([a, b]) = \gamma([a, b]) = \Gamma$  und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \, dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) \, ds = \sum_{k=1}^m \int_{\phi(t_{k-1})}^{\phi(t_k)} f(\gamma(\phi^{-1}(s))) \gamma'(\phi^{-1}(s)) \, d(\phi^{-1}(s)) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_{\Gamma} f(z) \, dz.\end{aligned}$$

(f) Seien  $\gamma = \alpha + i\beta$ ,  $f = u + iv$ ,  $\alpha, \beta, u, v \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \, dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\alpha'(t) + i\beta'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t)) \alpha'(t) - v(\gamma(t)) \beta'(t) \, dt + i \int_a^b u(\gamma(t)) \beta'(t) + v(\gamma(t)) \alpha'(t) \, dt \\ &= \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d(x, y) + i \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d(x, y).\end{aligned}$$

**Beispiel 2.6.** (a) Sei  $\Gamma = \partial B(c, r)$   $m$ -fach durchlaufen,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ . Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  gilt mit  $\gamma(t) = c + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi m]$ :

$$\int_{\Gamma} (z - c)^k \, dz = \int_0^{2\pi m} (c + re^{it} - c)^k (c + re^{it})' \, dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi m} e^{(k+1)it} \, dt.$$

Mit Beispiel 2.1 erhalten wir:

$$\int_{\Gamma} (z - c)^k \, dz = \frac{r^{k+1}}{k+1} (e^{2\pi m(k+1)i} - 1) = 0.$$

Nun sei  $k = -1$ . Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - c} = \int_0^{2\pi m} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} \, dt = \int_0^{2\pi m} i \, dt = 2\pi im.$$

(b) Seien  $\Gamma = \overrightarrow{0w}$  und  $w \in \Sigma_{\pi}$ . Mit  $\gamma(t) = tw$ ,  $t \in [0, 1]$ , gilt:

$$\int_{\Gamma} z^{\frac{1}{2}} \, dz = \int_0^1 \sqrt{t} w^{\frac{1}{2}} w \, dt = w^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}}.$$

**Satz 2.7.** Seien  $\Gamma$  stückweise  $C^1$ ,  $f_n \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.

(a) Wenn  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig für  $n \rightarrow \infty$ , dann folgt

$$\left| \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| \leq l(\gamma) \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Sei  $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$ . Dann ist die Abbildung

$$z \mapsto \int_{\Gamma} h(z, w) \, dw$$

von  $D$  nach  $\mathbb{C}$  stetig.

(c) Wenn  $\sum_{n \geq 1} f_n(z)$  gleichmäßig in  $z \in \Gamma$  konvergiert, dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz.$$

(d) Sei  $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$ , sodass für jedes  $w \in \Gamma$  die Abbildung  $z \mapsto h(z, w)$  von  $D$  nach  $\mathbb{C}$  differenzierbar ist und  $\frac{\partial}{\partial z} h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$ . Dann existiert

$$\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} h(z, w) \, dw = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} h(z, w) \, dw.$$

*Beweis.* (a) 
$$\left| \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b (f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))) \gamma'(t) \, dt \right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, dt \leq \|f - f_n\|_{\infty} \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \|f - f_n\|_{\infty} l(\gamma) \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Seien  $z_n, z_0 \in D$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ . Sei  $r > 0$ , so dass  $B = \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . Für alle genügend großen  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann  $z_n \in B$ . Da  $(z, w) \mapsto h(z, w)$  auf der kompakten Menge  $B \times \Gamma$  gleichmäßig stetig ist, konvergiert  $f_n(w) = h(z_n, w)$  gleichmäßig in  $w \in \Gamma$  gegen  $f(w) := h(z_0, w)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Folgt aus (a) mit  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  statt  $f_n$ .

(d) Seien  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$ ,  $z_n \in B := \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$  mit  $z_n \neq z_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z_n \rightarrow z_0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Sei  $w \in \Gamma$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0} \right| &\stackrel{(2.1)}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \frac{d}{dt} h(z_0 + t(z_n - z_0), w) \, dt \right| \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \cdot (z_n - z_0) \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|z_n - z_0|} \int_0^1 \left| \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \cdot |z_n - z_0| \, dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \, dt \leq \max_{z \in B, w \in \Gamma} \left| \frac{\partial h}{\partial z} (z, w) \right| =: c_1 < \infty. \end{aligned}$$

Weiter ist für eine Parametrisierung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_n - z_0} \left( \int_{\Gamma} h(z_n, w) \, dw - \int_{\Gamma} h(z_0, w) \, dw \right) &= \int_{\Gamma} \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0} \, dw \\ &= \int_0^1 \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \gamma'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Es gilt für  $t \in [0, 1]$ :

$$\left| \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \cdot \gamma'(t) \right| \leq c_1 \cdot \|\gamma'\|_{\infty} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

und die Funktion  $c_1 \|\gamma'\| \mathbb{1}_{[0,1]}$  ist auf  $[0, 1]$  integrierbar. Außerdem gilt:

$$\frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t))$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Majorisierte Konvergenz liefert die Existenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n - z} \left( \int_{\Gamma} h(z_n, w) \, dw - \int_{\Gamma} h(z_0, w) \, dw \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{\Gamma} h(\cdot, w) \, dw \right) (z_0)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{\Gamma} h(\cdot, w) \, dw \right) (z_0) &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z - z_0} \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \\ &= \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial z}(\cdot, w) \, dw \right) (z_0). \end{aligned} \quad \square$$

**Erinnerung:** Sei  $X$  ein Vektorraum. Eine Teilmenge  $M \subseteq X$  heißt *zusammenhängend*, wenn aus  $M \subseteq O_1 \cup O_2$ ,  $M \cap O_1 \neq \emptyset$ ,  $M \cap O_2 \neq \emptyset$  für alle offenen Teilmenge  $O_1, O_2 \subseteq X$  stets folgt, dass

$$M \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

**Bemerkung.** Aus Analysis 2 wissen wir: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend. Alle zusammenhängenden Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind zusammenhängend. Also sind stetige Kurven in  $X$  zusammenhängend. (Dabei definieren wir stetige Kurven und Streckenzüge im normierten Vektorraum genau wie in  $\mathbb{C}$ , vgl. Def. 2.2.)

**Satz 2.8.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $M \subseteq X$ . Dann gelten:

- (a) Für alle  $x, y \in M$  gebe es eine stetige Kurve in  $M$  von  $x$  nach  $y$ . Dann ist  $M$  zusammenhängend.
- (b) Wenn  $M = D$  offen und zusammenhängend ist, dann gibt es für alle  $x, y \in D$  einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$ .

*Beweis.* (a) Seien  $O_1, O_2 \subseteq X$  offen mit  $M \subseteq O_1 \cup O_2$ ,  $M \cap O_1 \neq \emptyset$ ,  $M \cap O_2 \neq \emptyset$ . ANNAHME:  $M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Wähle ein  $x \in M \cap O_1$ ,  $y \in M \cap O_2$ . Nach Voraussetzung existiert eine stetige Kurve  $\Gamma \subseteq M$  von  $x$  nach  $y$ . Damit gilt  $\Gamma \subseteq M \subseteq O_1 \cup O_2$ ,  $x \in \Gamma \cap O_1$ , also ist  $\Gamma \cap O_1 \neq \emptyset$ . Ebenso ist  $\Gamma \cap O_2 \neq \emptyset$ . Ferner ist  $\Gamma \cap O_1 \cap O_2 \subseteq M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \implies \Gamma$  ist unzusammenhängend: WIDERSPRUCH zur obigen Bemerkung. Also ist  $M$  zusammenhängend.

(b) Sei  $D$  offen und zusammenhängend und  $x \in D$  beliebig. Setze

$$D(x) := O_1 := \{y \in D \mid \exists \text{ Streckenzug } \Gamma(y) \subseteq D \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

Dann ist  $x \in O_1 \subseteq D$ .

- Sei  $y \in O_1$ . Dann existiert ein  $r > 0$  mit  $B(y, r) \subseteq D$  (da  $D$  offen). Sei  $z \in B(y, r)$ . Dann ist  $\overrightarrow{yz} \subseteq B(y, r) \subseteq D$ . Somit ist  $\Gamma(y) + \overrightarrow{yz} \subseteq D$  ein Streckenzug von  $x$  nach  $z \implies z \in O_1 \implies B(y, r) \subseteq O_1 \implies O_1$  ist offen in  $D$ .
- Seien  $y_n \in O_1$  mit  $y_n \rightarrow y \in D$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann existiert ein  $r > 0$  mit  $B(y, r) \subseteq D$ . Wähle (großes)  $N$  mit  $y_N \in B(y, r) \subseteq O_1$ . Dann ist  $\Gamma(y_N) + \overrightarrow{y_N y} \subseteq D$  ein Streckenzug von  $x$  nach  $y \implies y \in O_1 \implies O_1$  ist in  $D$  abgeschlossen. Also ist  $D \setminus O_1 =: O_2$  in  $D$  offen, also auch in  $X$  offen (da  $D$  offen).

ANNAHME:  $O_2 \neq \emptyset \iff O_1 \neq D$ . Dann:  $D = O_1 \dot{\cup} O_2$ ,  $D \cap O_1 \neq \emptyset$ ,  $D \cap O_2 = O_2 \neq \emptyset$ ,  $D \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \implies D$  ist unzusammenhängend WIDERSPRUCH zur Voraussetzung.  $\implies O_2 = \emptyset \implies O_1 = D(x) = D$ .  $\square$

**Bemerkung 2.9.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum,  $D \subseteq X$  offen,  $x, y \in D$ . Die Menge  $D(x)$  aus dem Beweis von Satz 2.8(b) ist in  $D$  offen und abgeschlossen (gleicher Beweis, auch wenn  $D$  nicht zusammenhängend). Satz 2.8(a) angewendet auf  $D(x)$  liefert, dass  $D(x)$  zusammenhängend ist. Ferner gilt entweder

(a)  $D(x) = D(y) \iff$  es existiert ein Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$

oder

(b)  $D(x) \cap D(y) = \emptyset \iff$  es existiert kein Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$ .

Dann heißen  $D(x)$  mit  $x \in D$  *Zusammenhangskomponenten* von  $D$ . Diese sind also entweder gleich oder disjunkt.

*Beweis.* •  $\exists w \in D(x) \cap D(y) \implies$  es gibt einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$  über  $w$ . Dies liefert „ $\Rightarrow$ “ in a), „ $\Leftarrow$ “ in b)

- Es gebe einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$ . Dann gibt es für alle  $z \in D(x)$  eine Streckenzug in  $D$  von  $y$  nach  $z$  über  $x \implies z \in D(y)$ . Dies liefert schon „ $\Rightarrow$ “ in b). Somit:  $D(x) \subseteq D(y)$ . Genauso zeigt man  $D(y) \subseteq D(x)$ . Dies liefert „ $\Leftarrow$ “ in a).  $\square$

**Satz 2.10.** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(D)$  mit  $f' = 0$ . Dann ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Wähle  $z_0 \in D$  fest.

(a) Sei  $z \in D$  mit  $\overrightarrow{z_0 z} \subseteq D$  und  $z \neq z_0$ . Dann:

$$0 = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f'(w) \, dw = \int_0^1 f'(\underbrace{z_0 + t(z - z_0)}_{=\gamma(t)})(z - z_0) \, dt = (f(z) - f(z_0))(z - z_0),$$

also ist  $f(z) = f(z_0)$ .

- (b) Sei nun  $w \in D$  beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $z_0$  nach  $w$ . Aus endlicher Anwendung von (a) folgt  $f(w) = f(z_0)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Dieser Satz ist falsch für unzusammenhängendes  $D$ .

**Definition 2.11.** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in C(D, \mathbb{C})$ . Eine Funktion  $F \in H(D)$  mit  $F' = f$  heißt *Stammfunktion* von  $f$  auf  $D$ .

**Beispiel.** Polynome,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  haben Stammfunktionen auf  $\mathbb{C}$ .  $f(z) = \frac{1}{z}$  hat die Stammfunktion  $\log$  auf  $\Sigma_\pi$ .

**Bemerkung 2.12.** Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf einem Gebiet  $D$ . Dann sind alle anderen Stammfunktionen von  $f$  auf  $D$  von der Form  $F + c$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$ , denn: Sei  $F_1 \in H(D)$  eine weitere Stammfunktion. Dann:  $(F - F_1)' = f - f = 0$ . Also ist  $F - F_1$  konstant nach Satz 2.8.  $\implies$  es gibt ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $F_1 = F + c$ .

**Satz 2.13** (vgl. Satz 3.12 Analysis 2). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in C(D, \mathbb{C})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $f$  besitzt eine Stammfunktion  $F$ .  
 (b) Für alle Kurven  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$ , die beide von einem beliebigen  $z \in D$  zu einem beliebigen  $w \in D$  laufen, gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_2} f(z) \, dz.$$

- (c) Für alle geschlossenen Kurven  $\Gamma \subseteq D$  gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0.$$

In diesem Fall folgt für jede Kurve  $\Gamma \subseteq D$  von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$ , dass

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Beweis.* a)  $\implies$  c): Sei  $\Gamma \subseteq D$  eine Kurve von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$ . Dann:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) \, dz &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma_k(t)) \gamma'_k(t) \, dt \stackrel{(2.1)}{=} \\ &\sum_{k=1}^m (F(\gamma_k(t_k)) - F(\gamma_k(t_{k+1}))) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Also gilt die letzte Behauptung im Falle der Existenz einer Stammfunktion. Wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , folgt hiermit c) aus a).

- c)  $\implies$  b): Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$  wie in b). Dann ist  $\Gamma := \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$  eine geschlossene Kurve von  $\gamma_1(a)$  nach  $\gamma_1(a)$  (über  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ ) und es gilt

$$0 \stackrel{\text{c)}}{=} \int_{\Gamma} f \, dz \stackrel{\text{Bem. 2.5}}{=} \int_{\Gamma_1} f \, dz - \int_{\Gamma_2} f \, dz.$$

Daraus folgt b).



b)  $\Rightarrow$  a): Sei  $z_0 \in D$  fest,  $z \in D$  beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug  $\Gamma(z) \subseteq D$  von  $z_0$  nach  $z$ . Setze

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(w) \, dw.$$

Wähle  $r > 0$  mit  $B(z, r) \subseteq D$ . Sei  $0 < |h| < r$ . Dann sind  $-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)$  und  $\overrightarrow{z(z+h)}$  Kurven in  $D$  von  $z$  nach  $z+h$ . Damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &\stackrel{\text{Bem. 2.5}}{=} \frac{1}{h} \int_{-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)} f(w) \, dw \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f(w) \, dw \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h \, dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) \, dt \rightarrow \int_0^1 f(z) \, dt = f(z) \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{nach Satz 2.7}). \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 2.14.** (a) Sei  $\Gamma$  ein Weg von  $z_1$  nach  $z_2$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} \cos z \, dz = \sin z_2 - \sin z_1.$$

(b) Sei  $\varepsilon \in (0, \pi)$  und  $\Gamma_\varepsilon$  eine Kurve in  $\Sigma_\pi$  von  $e^{i(-\pi+\varepsilon)}$  nach  $e^{i(\pi-\varepsilon)}$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \log e^{i(\pi-\varepsilon)} - \log e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) = 2i(\pi - \varepsilon).$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} \, dt = 2\pi i \neq 0,$$

obwohl  $\mathbb{D}$  eine geschlossene Kurve ist. Also besitzt die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  keine Stammfunktion auf dem Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Definition 2.15.** Sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  eine geschlossene Kurve und  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Dann heißt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z}$$

Windungszahl (oder Index) von  $\Gamma$  bei  $z$ .

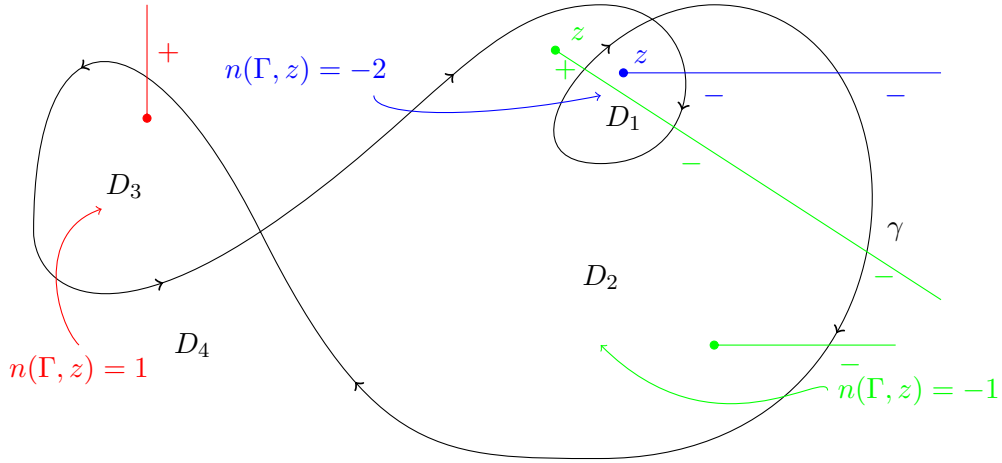
**Bemerkung.** Da  $\Gamma \subseteq B(0, r)$  für ein  $r > 0$  ist, gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ .

**Satz 2.16.** Seien  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  eine geschlossene Kurve und  $z \in D := \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Dann gelten:

- (a)  $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ .
- (b)  $z \mapsto n(\Gamma, z)$  ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von  $D$ .
- (c) Es gilt  $n(\Gamma, z) = 0$  für alle  $z$  in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von  $D$ .
- (d)  $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$
- (e) Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2$  geschlossene Kurven mit  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , dann gilt

$$n(\Gamma, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z).$$

**Bild:**



$D_k$  sind Zusammenhangskomponenten von  $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ .

*Beweis.* d), e) folgen aus Bem. 2.5.

b) folgt aus a), denn:  $z \mapsto n(\Gamma, z)$  ist stetig auf  $D$  nach Satz 2.7. Nach Ana II ist dann  $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{C}$  zusammenhängend für jede Zusammenhangskomponente  $D(z)$  von  $D \ni z$  (vgl. Bem. 2.9).

Da  $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{Z}$  (nach a)), enthält  $n(\Gamma, D(z))$  genau einen Punkt.

c)  $|n(\Gamma, z)| \leq \frac{l(\Gamma)}{2\pi} \max_{w \in \Gamma} \frac{1}{|w - z|} \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty$ . Mit b) folgt daraus c).

a) Seien  $t_k$  ( $k = 0, \dots, m$ ) wie in Def. 2.2,  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Setze

$$\varphi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \quad \text{für } a = t_0 \leq t \leq t_m = b.$$

Beachte:

$$n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z} \xLeftrightarrow{(1.10)} 1 = \exp(2\pi i \cdot n(\Gamma, z)) \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z} = \varphi(b).$$

Es gelten:  $\varphi(a) = 1$ ,  $\varphi \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{C})$  und  $\varphi' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}$ . (\*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{\varphi\gamma' - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} = 0$$

für  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

$$\xRightarrow{\int dt} \frac{\varphi(t_k)}{\gamma(t_k) - z} = \frac{\varphi(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1}) - z} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(b) &= \varphi(t_{m-1}) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \stackrel{(**)}{=} \varphi(t_{m-2}) \frac{\gamma(t_{m-1}) - z}{\gamma(t_{m-2}) - z} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \\ &= \dots = \varphi(a) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1, \end{aligned}$$

da  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , da  $\Gamma$  geschlossen. □

**Beispiel 2.17.** Sei  $\Gamma = \partial B(c, r)$   $m$ -fach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Dann:

- $$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & n(\Gamma, z) = 0 \text{ für } z \notin \overline{B}(c, r) \text{ (Satz 2.16(c)).} \\ \text{(b)} \quad & n(\Gamma, z) \stackrel{2.16(c)}{=} n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi m} \frac{i r e^{it}}{\underbrace{c + r e^{it}}_{=\gamma(t)} - c} dt = m, \text{ für alle } z \in B(c, r). \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.18.** Sei  $\Gamma$  ein geschlossener Weg und  $L$  ein Halbstrahl der Form  $w = z + te^{i\varphi}$  ( $\forall t \geq 0$ ), für feste  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , der  $\Gamma$  endlich oft in  $\gamma(\tau_1), \dots, \gamma(\tau_n)$  schneidet.

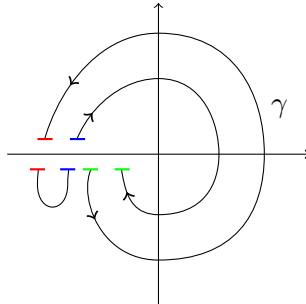
Zähle Berührungspunkte  $\tau_j$  nicht ( $\Gamma$  bleibt auf gleicher Seite von  $L$ ), zähle die anderen  $\tau_j$  mit „+1“ falls  $\Gamma$  den Strahl mit wachsendem Argument schneidet und mit „−1“ falls mit fallendem Argument. Dabei sei  $z \notin \Gamma$ . Dann ist  $n(\Gamma, z)$  die Summe der so mit  $\pm 1$  gewichteten echten Schnittpunkte (wobei „fallen“ und „wachsen“ bzgl.  $L$  gemeint ist).

*Beweis.* Nach Verschieben, Drehen und Umparametrisieren (falls nötig) von  $\Gamma$  können wir annehmen, dass  $z = 0 \notin \Gamma$ ,  $L = \mathbb{R}_-$ ,  $\tau_j \neq a, b$  ( $\forall j = 1, \dots, n$ ) gilt. Weiter sei  $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ . Wähle  $\varepsilon > 0$ , so dass alle  $(\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon) \subseteq (a, b)$  disjunkt sind,  $j = 1, \dots, n$ . Sei

$$I_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^n (\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon), \quad \Gamma_\varepsilon = \gamma([a, b] \setminus I_\varepsilon),$$

also die disjunkte Vereinigung aller Teilkurven von  $\Gamma$ , die alle in  $\Sigma_\pi$  liegen.

Bild:



Damit:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b] \setminus I_{\varepsilon}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b] \setminus I_{\varepsilon}} (\log \gamma(t))' dt$$

(beachte  $\gamma(t) \in \Sigma_\pi$  für  $t \in [a, b] \setminus I_\varepsilon$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} (\log \gamma(b) - \log \gamma(\tau_n + \varepsilon) + \log \gamma(\tau_n - \varepsilon) \\ &\quad - \log \gamma(\tau_{n-1} + \varepsilon) + \cdots + \log \gamma(\tau_1 - \varepsilon) - \underbrace{\log \gamma(a)}_{=\gamma(b)}) \\ &\stackrel{(1.11)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \left[ \underbrace{\ln |\gamma(\tau_j - \varepsilon)| - \ln |\gamma(\tau_j + \varepsilon)|}_{\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} + i(\arg \gamma(\tau_j - \varepsilon) - \arg \gamma(\tau_j + \varepsilon)) \right]. \end{aligned}$$

Dabei gilt für den Imaginärteil:

$$\operatorname{Im} n(\Gamma, 0) \rightarrow \begin{cases} \pm\pi - (\pm\pi) = 0 & \text{— Berührungspunkt,} \\ +\pi - (-\pi) = 2\pi & \text{— arg wächst,} \\ -\pi - \pi = -2\pi & \text{— arg fällt.} \end{cases} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow n(\Gamma, 0) = \frac{2\pi i}{2\pi i} |\# \text{Schnittstellen mit wachsendem Arg.} - \# \text{Schnittstellen mit fallendem Arg.}|$$

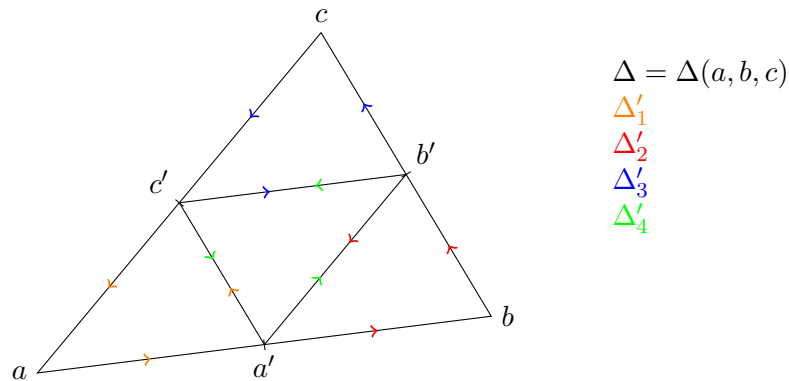
(Falls  $\gamma$  stückweise  $C^1$ : füge  $(t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$  (siehe Def. 2.2) zu  $I_\varepsilon$  hinzu).  $\square$

## 2.2 Integralsatz und -formel von Cauchy für sternförmige Gebiete

**Satz 2.19** (Lemma von Goursat). *Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $w_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ . Sei  $\Delta \subseteq D$  eine abgeschlossene Dreiecksfläche. Dann:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0.$$

*Beweis.* (1) Sei  $w_0 \notin \Delta$ . Dann gibt es ein offenes  $U \subseteq D$  mit  $\Delta \subseteq U$ ,  $f \in H(U)$ .



Seitenhalbierung liefert  $\Delta'_1$  mit Kante  $\overrightarrow{a'b'}$  und Ecke  $a$ ,  $\Delta'_2$  mit Kante  $\overrightarrow{b'a'}$  und Ecke  $b$ ,  $\Delta'_3$  mit Kante  $\overrightarrow{c'b'}$  und Ecke  $c$ , sowie das innere  $\Delta'_4 = \Delta(a', b', c')$ , dessen Rand wir entgegengesetzt mit  $\overrightarrow{a'b'} + \overrightarrow{b'c'} + \overrightarrow{c'a'}$  parametrisieren können. Damit:

$$J = \int_{\partial\Delta} f \, dz = \sum_{k=1}^4 \underbrace{\int_{\partial\Delta'_k} f \, d\tau}_{=: J'_k}$$

Die Integrale über innere Kanten treten doppelt mit verschiedenen Vorzeichen auf, kürzen sich also.

Sei  $J_1$  dasjenige der  $J'_1, \dots, J'_4$  mit größtem Betrag und sei  $\Delta_1$  das zugehörige Dreieck. Damit:

$$|J_1| \geq \frac{1}{4} |J|, \quad l(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta).$$

Iteriere dies. Erhalte Dreiecke  $\Delta_n$  und

$$J_n = \int_{\partial\Delta_n} f \, dz \quad \text{mit} \quad l(\partial\Delta_n) = 2^{-n}l(\partial\Delta), \quad |J_n| \geq 4^{-n}|J|. \quad (*)$$

Wenn  $z, w \in \Delta_n$ , dann

$$|z - w| \leq l(\partial\Delta_n) = 2^{-n}l(\partial\Delta). \quad (**)$$

Da  $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$  ( $\forall n$ ) ist die Folge der Mittelpunkte  $z_n$  der  $\Delta_n$  eine Cauchyfolge (wegen (\*\*)).

$$\implies \exists z_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

Wenn  $\hat{z}_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ , dann:

$$|z_0 - \hat{z}_0| \stackrel{(**)}{\leq} 2^{-n}l(\partial\Delta) \quad (\forall n)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $z_0 = \hat{z}_0$ , also  $\{z_0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \subseteq \Delta \subseteq U$ .

Setze  $g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$ . Da  $f$  bei  $z_0$  differenzierbar ist (wegen  $f \in H(U)$ ), folgt  $g(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$  ( $z \in \Delta$ ).

Ferner:  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$ . Mit  $\int_{\partial\Delta_n} \cdots \, dz$  folgt:

$$\begin{aligned} J_n &= \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) \, dz}_{=0 \text{ nach 2.13}} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0) \, dz}_{=0 \text{ nach Satz 2.13}} + \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) \, dz \\ \implies 4^{-n}|J| &\stackrel{(*)}{\leq} |J_n| = \left| \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) \, dz \right| \leq \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| |z - z_0| l(\partial\Delta_n) \\ &\stackrel{(*),(**)}{\leq} (2^{-n}l(\partial\Delta_n))^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| \\ \implies |J| &\leq l(\partial\Delta_n)^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $J = 0$ , also die Behauptung im Fall  $w_0 \notin \Delta$ .

(2) Sei  $w_0 \in \Delta$ .

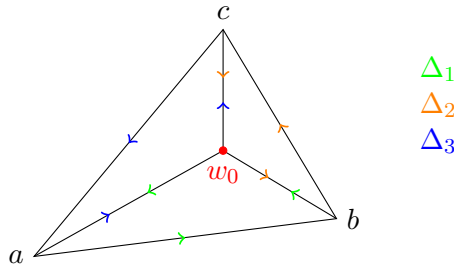
(a) Sei  $w_0$  eine Ecke von  $\Delta$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Zerlege  $\Delta$  wie in (1) per Seitenhalbierung. Wähle dabei stets das Teildreieck mit Ecke  $w_0$ . Erhalte Dreiecke  $\Delta_1^*, \dots, \Delta_m^*$  mit disjunktem Inneren, sodass  $w_0 \in \Delta_1^*$ ,  $l(\partial\Delta_1^*) \leq \varepsilon$ ,  $w_0 \notin \Delta_k^*$  für  $k \geq 2$ . Wie in (1) erhalten wir

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \, dz \right| = \left| \sum_{k=1}^m \int_{\partial\Delta_k^*} f \, dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_1^*} f \, dz \right| \leq \varepsilon \underbrace{\sup_{z \in \Delta} |f(z)|}_{< \infty}.$$

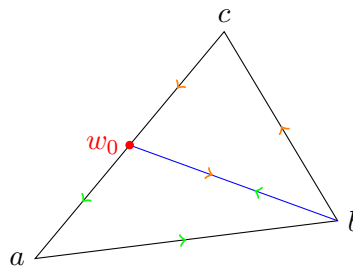
Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\int_{\partial\Delta} f \, dz = 0$ .

- (b) Sei  $w_0 \in \Delta \setminus \partial\Delta$ . Zerlege  $\Delta$  in  $\Delta_1 = \Delta(a, b, w_0)$ ,  $\Delta_2 = \Delta(b, c, w_0)$  und  $\Delta_3 = \Delta(c, a, w_0)$ . Damit erhalten wir nach (a)

$$\int_{\partial\Delta} f \, dz = \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Delta_k} f \, dz = 0.$$

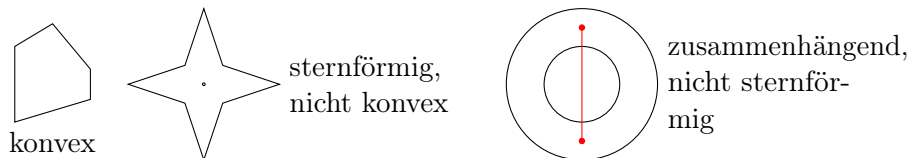


- (c) Sei  $w_0 \in \partial\Delta$ ,  $w_0$  keine Ecke. Wie in (b) zerlegen wir  $\Delta$  in zwei Teildreiecke:

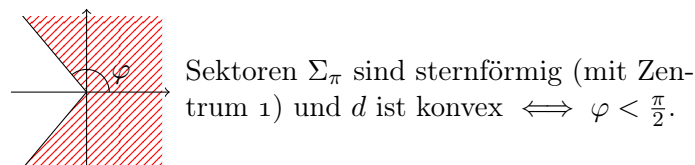


Daraus erhalten wir wieder  $\int_{\partial\Delta} f \, dz = 0$ . □

**Definition 2.20.** Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$ . Die Menge  $M$  heißt *konvex*, wenn für alle  $w, z \in M$  auch  $\overline{wz}$  in  $M$  liegt. Die Menge  $M$  heißt *sternförmig* mit Zentrum  $z_0 \in M$ , wenn für alle  $w \in M$  auch  $\overline{z_0 w}$  in  $M$  liegt.



Klar ist:  $M$  konvex  $\implies M$  sternförmig und  $M$  sternförmig  $\implies M$  zusammenhängend (nach Satz 2.8).



**Theorem 2.21** (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f \in H(D)$  und  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f \, dz = 0.$$

**Bemerkung.** Nach Satz 2.13 ist die Aussage von Theorem 2.21 äquivalent zu: Jedes  $f \in H(D)$  besitzt auf  $D$  eine Stammfunktion, wenn  $D$  sternförmig ist.

*Beweis.* Sei  $z_0$  das Zentrum von  $D$ . Setze für alle  $z \in D$

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w) \, dw = - \int_{\overrightarrow{z z_0}} f(w) \, dw.$$

Sei  $r > 0$  mit  $B(z, r) \subseteq D$ ,  $z \in D$  fest, sowie  $0 < |h| < r$ . Dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &= \frac{1}{h} \left( \int_{\overrightarrow{z_0(z+h)}} f \, dw + \int_{\overrightarrow{z z_0}} f \, dw + \int_{\overrightarrow{(z+h)z}} f \, dw \right) + \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f \, dw \\ &= \underbrace{\frac{1}{h} \int_{\partial \Delta(z_0, z+h, z)} f \, dw}_{=0 \text{ (Satz 2.19)}} + \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h \, dt}_{\rightarrow f(z), \, h \rightarrow 0 \text{ nach (2.7)}}. \end{aligned}$$

Also ist  $F'(z) = f(z)$ . □

**Beispiel 2.22.** (a)  $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z+2} = 0$ , denn  $f(z) = \frac{1}{z+2}$  liegt in  $H(D)$  für

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}\}.$$

Beachte:  $D$  ist sternförmig und offen,  $\partial \mathbb{D} \subseteq D$ .

(b) Cauchy ist im Allgemeinen falsch für Gebiete mit Löchern, z.B.  $\mathbb{C} \setminus \{0\} =: D$ . Siehe Bsp. 2.14:  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $f \in H(D)$ ,  $\Gamma = \partial \mathbb{D}$ . Dann

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

**Bemerkung.** Theorem 2.21 gilt auch, wenn  $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$  für ein  $w_0 \in D$ . Denn Satz 2.19 wurde für solche  $f$  bewiesen.

**Theorem 2.23** (Cauchys Integralformel für sternförmige Gebiete). *Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f \in H(D)$ ,  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$n(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw, \quad \forall z \in D \setminus \Gamma. \quad (\text{CIF})$$

*Speziell mit  $\Gamma = \partial B(z, r) \subseteq D$  für  $B(z, r) \subseteq D$  und  $z \in B(z, r)$ :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, r)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt. \quad (2.5)$$

*Beweis.* Sei  $z \in D \setminus \Gamma$  fest. Setze  $g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in D \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$ .

Dann ist  $g \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{z\})$ . Die Bemerkung nach Bsp. 2.22 liefert dann

$$0 = \int_{\Gamma} g(w) \, dw \stackrel{z \notin \Gamma}{=} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw - f(z) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}}_{=2\pi i n(\Gamma, z)}.$$

Daraus folgt (CIF) und der Spezialfall (2.4). Mit  $c = z$  und der Parametrisierung  $\gamma(t) = z + re^{it}$  folgt aus (2.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{z + re^{it} - z} i r e^{it} \, dt,$$

also (2.5). □

**Beispiel.** Es gilt  $\int_{\partial B(2,1)} \frac{\sqrt{w}}{w - \frac{3}{2}} \, dw = 2\pi i \sqrt{\frac{3}{2}}.$

Wähle hier  $D = B(2, \frac{3}{2})$ ,  $f(w) = \sqrt{w}$ . Dann ist  $D$  konvex,  $f \in H(D)$ ,  $\partial B(2, 1) \subseteq D$ .

**Definition 2.24.** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *analytisch*, wenn es für jedes  $z \in D$  eine  $r(z) > 0$  gibt, sodass  $B(z, r(z)) \subseteq D$  und  $f$  auf  $B(z, r(z))$  eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z$  und Koeffizienten  $a_n(z)$  besitzt.

Eine Funktion  $f \in H(\mathbb{C})$  heißt *ganz*.

**Theorem 2.25** (Entwicklungssatz). *Sei  $f \in H(D)$ . Dann ist  $f$  analytisch auf  $D$ .*

*Sei ferner  $z_0 \in D$  und  $r > 0$  mit  $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in B(z_0, r)$ . Dann gelten die Cauchyformeln*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw \quad (2.6)$$

und die Cauchy-Abschätzungen

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z_0|=r} |f(w)|. \quad (2.7)$$

Sei  $R(z_0) = \sup \{s > 0 \mid B(z_0, s) \subseteq D\}$ . Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (2.8)$$

für alle  $z \in B(z_0, r)$  mit  $0 < r < R(z_0)$ . Die Reihe in (2.8) konvergiert absolut und gleichmäßig für  $z \in B(z_0, r')$  mit  $0 < r' < r < R(z_0)$ . Wenn  $f$  ganz ist, dann gibt es  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

*Beweis.* Seien  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$  mit  $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . Seien  $w \in \Gamma := \partial B(z_0, r)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in B(z_0, r)$ . Dann existiert

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w - z} = n! \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}$$



und

$$(w, z) \mapsto \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w - z}$$

ist stetig für  $w \in T$ ,  $z \in B(z_0, r)$ . Somit folgt aus der (CIF) und Satz 2.7(d) (mit „ $D = B(z_0, r)$ “), dass  $f$  auf  $D$  beliebig oft differenzierbar ist und (2.6) gilt. Da  $l(\Gamma) = 2\pi r$  und  $(w - z_0)^{-n-1} = r^{-n-1}$ , folgt (2.7) aus (2.6) (mit  $z = z_0$ ).

Seien nun  $0 < r' < r$ ,  $z \in \overline{B}(z_0, r')$ . Dann gilt:

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \leq \frac{r'}{r} =: q < 1.$$

Damit:

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n. \quad (*)$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für  $w \in \Gamma$  und  $z \in \overline{B}(z_0, r')$ . Dann gilt:

$$f(z) \stackrel{(CIF)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \stackrel{(*)}{\underset{\text{Satz 2.7(c)}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw}_{\stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)}.$$

Damit folgt (2.8). Wenn  $D = \mathbb{C}$ , wähle  $z = 0$ ,  $r$  beliebig groß und erhalte so letzte Bedingung.  $\square$

**Beispiel 2.26.** (a) Das Theorem ist falsch im Reellen, Beispiel aus Analysis 1:

- (1)  $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \implies f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  (mit  $f'(0) = 0$ ) aber  $f'$  ist unbeschränkt für  $x \rightarrow 0_+$ , also unstetig und  $\nexists f''$ .
- (2)  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \rightsquigarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$  aber  $f^{(n)}(0) = 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ), als Taylorreihe von  $f$  in 0 ist konstant 0, also ungleich  $f$ .

- (b) Sei  $f(z) = (1 + z)^\alpha$  (wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  fest,  $z \in D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ )  $\rightsquigarrow f$  ist holomorph auf  $D$ . Aus Theorem 2.25 folgt:  $f$  hat Potenzreihe in  $z_0 = 0$ . Diese ist gleich der Binomialreihe aus Analysis 1. Nach Theorem 2.25 ist der Konvergenzradius  $\rho \geq 1$ . Falls  $\rho < 1$  hätten alle Ableitungen von  $f$  eine stetige Fortsetzung auf  $\partial B(0, 1)$ . Das widerspricht der Definition von  $f \implies \rho = 1$ .

**Korollar 2.27.** Gegeben sei eine Borelmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine Funktion  $h: D \times X \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen, mit:

- (a)  $\forall z \in D$  ist  $x \mapsto h(z, x)$  integrierbar auf  $X$ .
- (b)  $\forall x \in X$  ist  $z \mapsto h(z, x)$  holomorph auf  $D$ .
- (c) Es existiert ein integrierbares  $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $|h(z, x)| \leq g(x)$  ( $\forall z \in D, x \in X$ ).

Dann ist

$$z \mapsto H(z) := \int_X h(z, x) dx$$

holomorph auf  $D$  und es gilt:

$$H^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) dx \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

*Beweis.* Sei  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$  fest (aber beliebig) mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ . Sei  $z \in B(z_0, r) \implies \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . (2.7) für  $z$  und  $k \in \mathbb{N}$  liefert

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) \right| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|w-z|=r} |h(w, x)| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \frac{h!}{r^k} g(x) \quad (\text{für jedes feste } x \in X.) \quad (*)$$

Seien nun  $z_n \rightarrow z_0$ , mit  $z_n \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ). Dann:

$$\begin{aligned} D_n &:= \frac{1}{z_n - z_0} (H(z_n) - H(z_0)) = \int_X \frac{1}{z_n - z_0} (h(z_n, x) - h(z_0, x)) \, dx \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \int_X \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial z} h \right) (z_0 + t(z_n - z_0), x)}_{=: \varphi_n(t, x)} \cdot (z_n - z_0) \, dt \, dx \end{aligned}$$

(Vergleiche hierzu das Vorgehen im Beweis zu Satz 2.7(d)).

Es gilt:  $\varphi_n(t, x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig in  $t \in [0, 1]$ , für jedes feste  $x \in X$ , da

$$z \mapsto \frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$$

stetig ist nach Theorem 2.25. Also:

$$\int_0^1 \varphi_n(t, x) \, dt = \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \quad (n \rightarrow \infty, \, x \in X).$$

Ferner:

$$\left| \int_0^1 \varphi_n(t, x) \, dt \right| \stackrel{*}{\underset{(k=1)}{\leq}} \frac{1}{r} g(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \, x \in X),$$

wobei  $g(x)$  integrierbar ist. Majorisierte Konvergenz liefert:

$$D_n \longrightarrow \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \, dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

$\implies H$  ist bei  $z_0$  differenzierbar  $\implies H \in H(D)$ . Ferner:

$$H'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z, x) \, dx \quad (\forall z \in D).$$

Beachte:  $\frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$  ist in  $x$  messbar, also liefern Theorem 2.25 und (\*) eine iterative Formel für  $H^{(k)}$ .  $\square$

**Beispiel 2.28** (Laplacetransformation). Sei  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  messbar, so dass für gewisse  $w \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  gilt:

$$|f(t)| \leq ce^{wt} \quad (\forall t \geq 0).$$

Dann:

$$\exists \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) \, dt$$

für  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > w$  und ist dort holomorph mit

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n f(t) \, dt \quad (\forall \lambda \text{ mit } \operatorname{Re} \lambda > w, \, n \in \mathbb{N}).$$

*Beweis.* Setze

$$h(\lambda, t) = e^{-\lambda t} f(t) \quad \text{für } t \geq 0, \operatorname{Re} \lambda > w.$$

Klar:  $h$  ist in  $\lambda$  holomorph ( $\forall t \geq 0$ ).

Sei  $\varepsilon > 0$  fest aber beliebig,  $\operatorname{Re} \lambda \geq w + \varepsilon > w$ . Dann:

$$|h(\lambda, t)| = e^{-\operatorname{Re} \lambda t} |f(t)| \leq e^{-wt} e^{-\varepsilon t} |f(t)| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} c e^{-\varepsilon t} =: g(t),$$

wobei  $g(t)$  integrierbar und unabhängig von  $\lambda$  ist.

Korollar 2.27 liefert Holomorphie von  $\hat{f}(\lambda)$  für  $\operatorname{Re} \lambda \geq w + \varepsilon$ , folglich die Holomorphie für  $\operatorname{Re} \lambda > w$ , da  $\varepsilon > 0$  beliebig. Weiter gilt:

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = \int_0^\infty \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n e^{-\lambda t} f(t) dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} f(t) dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > w). \quad \square$$

**Korollar 2.29** (Morera). Sei  $f \in C(D, \mathbb{C})$  so dass

$$\int_{\partial \Delta} f dz = 0$$

für alle Dreiecke  $\Delta \subseteq D$ . Dann:  $f \in H(D)$ .

*Beweis.* Sei  $z \in D$ . Wähle  $r > 0$  mit  $B(z, r) \subseteq D$ . Nach dem Beweis von Theorem 2.21 impliziert die Voraussetzung, dass  $f$  auf  $B(z, r)$  (sternförmig) eine Stammfunktion  $F \in H(B(z, r))$  besitzt. Nach Theorem 2.25 ist  $F \in C^2$  und somit ist  $f = F'$  differenzierbar auf  $B(z, r)$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Theorem 2.30** (Liouville). Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

*Beweis.* Sei  $f$  eine beschränkte ganze Funktion und  $z \in \mathbb{C}$ . (2.7) mit  $n = 1$  liefert:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-w|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r} \|f\|_\infty,$$

wobei hier  $r > 0$  beliebig ist, da  $f \in H(\mathbb{C})$ . Mit  $r \rightarrow \infty$  folgt  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Nach Satz 2.10 ist  $f$  konstant.  $\square$

**Korollar 2.31** (Fundamentalsatz der Algebra). Ein Polynom  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  (mit  $a_k \in \mathbb{C}$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $a_n \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) hat genau  $n$  (eventuell mehrfach gezählte) Nullstellen.

*Beweis.* Sei  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir zeigen, dass  $p$  konstant ist. Setze dazu  $f = \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$ . Wähle  $r > 0$ , sodass

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \geq r.$$

Sei  $|z| \geq r$ . Dann gilt

$$|p(z)| \geq |a_n| |z|^n - (|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|) = |a_n| |z|^n \left( 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \right) \geq \frac{1}{2} |a_n| r^n.$$

Also ist  $f(z) \leq \frac{2}{|a_n|r^n}$ , wenn  $|z| \geq r$ . Ferner ist  $f$  auf  $\overline{B}(0, r)$  beschränkt als stetige Funktion auf einer kompakten Menge. Damit ist  $f$  beschränkt auf ganz  $\mathbb{C}$ . Mit Liouville (Theorem 2.30) folgt, dass  $f$  und damit auch  $p$  konstant ist.

Damit hat jedes nichtkonstante Polynom, d.h. jedes Polynom vom Grad  $\geq 1$  mindestens eine Nullstelle. Mit Polynomdivision folgt induktiv die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.32.** Sei  $U \subseteq \mathbb{K}^l$  offen (wobei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) und  $f, f_n: U \rightarrow \mathbb{K}^k$  Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man sagt, dass  $f_n \rightarrow f$  für  $n \rightarrow \infty$  *kompakt konvergiert* (oder „gleichmäßig auf kompakten Mengen“), wenn für jede kompakte Menge  $K \subseteq U$  gilt:

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)|_2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Bemerkung 2.33.** (a) Sei  $f_n \rightarrow f$  (kompakt) und  $f_n$  stetig für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Analysis 2 ist dann  $f$  stetig auf  $K$  für jedes kompakte  $K$ , z.B.  $K = \overline{B}(x, r) \subseteq U$ . Also ist  $f \in C(U, \mathbb{K}^k)$ . Im Reellen folgt aber selbst aus  $f_n \in C^\infty$  nicht, dass  $f \in C^1$ . Gegenbeispiel aus Analysis 2:  $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$  für  $x \in (-1, 1)$ . Hier ist  $f_n \in C^\infty((-1, 1))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f_n \rightarrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig auf  $(-1, 1)$  mit  $f(x) = |x|$ . Aber  $f$  ist bei 0 nicht differenzierbar.

(b) Die Partialsummen einer Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  mit Konvergenzradius  $\rho$  konvergieren kompakt auf  $B(z_0, \rho)$  gegen  $f$ . Im Allgemeinen haben wir aber keine gleichmäßige Konvergenz auf  $B(z_0, \rho)$ .

*Beweis.* Sei  $K \subseteq B(z_0, \rho)$  kompakt. Nach Satz vom Maximum existiert ein  $z_1 \in K$  mit

$$|z_0 - z_1| = \max_{z \in K} |z_0 - z| =: r < \rho,$$

da  $z_1 \in K \subseteq B(z_0, \rho)$ . Also gilt  $K \subseteq \overline{B}(z_0, r) \subseteq B(z_0, \rho)$ . Ferner:

$$\max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |a_n| |z - z_0|^n \leq |a_n| r^n =: b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = r \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{\rho} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium gilt dann  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ . Satz 1.13 (Weierstraß) aus Analysis 2 impliziert, dass die Potenzreihe gleichmäßig und absolut auf  $\overline{B}(z_0, r)$  konvergiert, und somit auf  $K$ .  $\square$

**Theorem 2.34** (Konvergenzsatz von Weierstraß). Seien  $f_n \in H(D)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $f_n \rightarrow f$  (kompakt) für ein  $f \in C(D, \mathbb{C})$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann gilt  $f \in H(D)$  und  $f_n^{(j)}$  konvergiert kompakt gegen  $f^{(j)}$  für  $n \rightarrow \infty$  und jedes  $j \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Sei  $\Delta \subseteq D$  ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt  $f_n \rightarrow f$  (gleichmäßig) auf  $\partial\Delta \subseteq D$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Damit:

$$0 \stackrel{2.19}{=} \int_{\partial\Delta} f_n dz \stackrel{2.7}{\rightarrow} \int_{\partial\Delta} f dz \quad (n \rightarrow \infty) \implies \int_{\partial\Delta} f dz = 0.$$

Nach Morera (Kor. 2.29) gilt dann  $f \in H(D)$ .

Sei  $r > 0$ ,  $z_0 \in D$  mit  $\overline{B}(z_0, 2r) \subseteq D$ . Sei  $z \in \overline{B}(z_0, r)$ . Dann gilt  $\overline{B}(z, r) \subseteq \overline{B}(z_0, 2r)$ . Da  $f - f_n \in H(D)$ , folgt mit (2.7), dass

$$\begin{aligned} \max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |f^{(j)}(z) - f_n^{(j)}(z)| &\leq \max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} \max_{|w-z|=r} \frac{j!}{r^j} |f(w) - f_n(w)| \\ &\leq \frac{j!}{r^j} \max_{|w-z| \leq 2r} |f(w) - f_n(w)| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ nach Voraussetzung,} \end{aligned} \quad (*)$$

also  $f_n^{(j)} \rightarrow f^{(j)}$  auf  $\overline{B}(z_0, r)$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ).

Sei  $K \subseteq D$  kompakt. Dann gibt es für jedes  $z_0 \in K$  ein  $r(z_0) > 0$  mit  $B(z_0, 2r(z_0)) \subseteq D$ , da  $D$  offen. Klar:

$$K \subseteq \bigcup_{z_0 \in K} B(z_0, r(z_0)).$$

Da  $K$  kompakt ist, existieren endlich viele  $z_1, \dots, z_m \in K$  und  $r_1, \dots, r_m > 0$  mit  $B(z_k, 2r_k) \subseteq D$  ( $k = 1, \dots, m$ ) und  $K \subseteq B(z_1, r_1) \cup \dots \cup B(z_m, r_m)$ . (\*) angewandt auf  $\overline{B}(z_k, r_k)$  liefert die Behauptung.  $\square$

## 2.3 Weitere Hauptsätze über holomorphe Funktionen

**Theorem 2.35** (Identitätssatz). Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(D)$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $f = 0$  auf  $D$ .
- (b) Es gibt ein  $z_0 \in D$  mit  $f^{(m)}(z_0) = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $N = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$  hat einen Häufungspunkt  $z_0 \in D$ , d.h. es gibt eine Folge  $z_n \in D \setminus \{z_0\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $z_n \rightarrow z_0$  und  $z_n \in N$ .

Somit sind zwei Funktionen  $g, h \in H(D)$  schon gleich, sobald  $g(z_n) = h(z_n)$  auf einer Folge  $z_n \rightarrow z_0$  mit  $z_n, z_0 \in D$  und  $z_n \neq z_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) oder sobald für ein  $z_0 \in D$  gilt:  $g^{(m)}(z_0) = h^{(m)}(z_0)$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ . Insbesondere sind die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt.

**Bemerkung.** Der Satz ist falsch, wenn  $D$  nicht zusammenhängend ist.

*Beweis.* Die letzte Behauptung folgt mit  $f = g - h$  aus „(c) $\Rightarrow$ (a)“ bzw. „(b) $\Rightarrow$ (a)“.

a)  $\Rightarrow$  c): klar.

c)  $\Rightarrow$  b): Seien  $z_n, z_0 \in D$ ,  $z_n \neq z_0$ ,  $f(z_n) = 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann ist  $f(z_0) = 0$ .

ANNAHME: Es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$  und  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ . Theorem 2.25 liefert ein  $r > 0$  mit

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}_{=: a_n} (z - z_0)^k \quad (\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D),$$

wobei  $a_m \neq 0$ . Damit:

$$g(z) := (z - z_0)^{-m} f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m} \stackrel{l=k-m}{=} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+m} (z - z_0)^l \quad (z \in B(z_0, r)).$$

Also ist  $g \in H(B(z_0, r))$  und  $g(z_0) = a_m \neq 0$ . Aber  $g(z_n) = (z_n - z_0)^{-m} f(z_0) = 0$ , wobei  $z_n \neq z_0$ ,  $z_n, z_0 \in B(z_0, r)$  und  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). WIDERSPRUCH zu c).  $\implies$  b) gilt.

b)  $\implies$  a): Sei  $D_1 := \{z \in D \mid f^{(m)}(z) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\}$ . Nach Voraussetzung ist  $D_1 \neq \emptyset$ .

$D_1$  offen in  $D$ : Sei  $z \in D_1$ . Nach Theorem 2.25 hat  $f$  auf einer Kugel  $B(z, r)$  eine Potenzreihendarstellung mit Koeffizienten

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0),$$

wegen  $z \in D_1$ . Daraus folgt  $f = 0$  auf  $B(z, r)$ , also  $B(z, r) \subseteq D_1$ , also ist  $D_1$  offen.

$D_2 := \{D \setminus D_1\}$  offen: Sei  $w \in D_2$ . Dann gibt es  $l \in \mathbb{N}_0$  mit  $f^{(l)}(w) \neq 0$ . Nach Theorem 2.25 ist  $f^{(l)}$  stetig. Also gibt es ein  $r_1 > 0$  mit  $B(w, r_1) \subseteq D$  und  $f^{(l)}(z) \neq 0$  für alle  $z \in B(w, r_1)$ . Also gilt  $B(w, r_1) \subseteq D_2$ , folglich ist  $D_2$  offen.

ANNAHME:  $D_2 \neq \emptyset$ . Dann ist  $D = D_1 \dot{\cup} D_2$ ,  $D_1, D_2$  offen, nichtleer. WIDERSPRUCH zu  $D$  zusammenhängend.

$$\implies D_2 = \emptyset \implies D_1 = D \implies \text{(a)}. \quad \square$$

**Bemerkung.** Bei (c) muss  $z_0 \in D$  vorausgesetzt werden, *Beispiel:*

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann ist  $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

aber  $f \neq 0$ .

**Korollar 2.36** (Nullstellensatz). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(D)$ ,  $f \neq 0$  und  $f(z_0) = 0$  für ein  $z_0 \in D$ . Dann gibt es  $m \in \mathbb{N}$  und  $r > 0$  mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ , sowie eine Funktion  $g \in H(B(z_0, r))$ , sodass

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0, \quad g(z_0) \neq 0$$

und  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  für alle  $z \in B(z_0, r)$ . (Dabei heißt  $m \in \mathbb{N}$  die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle  $z_0$  von  $f$ .)

*Beweis.* Die Behauptung über die Ableitung folgt aus Theorem 2.35. Die Existenz von  $g$  folgt aus dem Beweis von Theorem 2.35 „(c)  $\implies$  (b)“.  $\square$

**Bemerkung.** Im reellen müssen so ein  $m \in \mathbb{N}$  und ein  $g$  nicht existieren, *Beispiel:*

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist  $f \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $f(0) = f'(0) = 0$ , aber  $f \notin C^2$  und

$$|x|^{-k} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty, & k \geq 2, \\ 0, & k = 0, 1, \end{cases}, \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hier ist „ $m = \frac{3}{2}$ “.

**Korollar 2.37.** Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(D)$ ,  $f$  nicht konstant und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Menge  $N_c = \{z \in D: f(z) = c\}$  diskret, d.h.: Für alle  $z \in N_c$  gibt es ein  $r(z) > 0$ , sodass  $B(z, r(z)) \cap N_c = \{z\}$ .

*Beweis.* Wenn  $N_c$  nicht diskret ist, dann existiert ein  $z_0 \in D$  mit  $f(z_0) = c$  und  $z_n \in D \setminus \{z_0\}$  mit  $f(z_n) = c$  und  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann liefert Theorem 2.35 „(c)  $\implies$  (a)“ für  $h = f - c$  die Behauptung, da  $f$  nicht konstant ist, also  $h \neq 0$  ist.  $\square$

**Korollar 2.38** (Holomorphe Fortsetzung).

**Beispiel 2.39.**

**Lemma 2.40.**

**Theorem 2.41** (Gebietstreue).

*Beweis.* Sei  $U \subseteq D$  offen,  $z_0 \in U$  fest, aber beliebig. Nach Korollar 2.37 (mit „ $c = f(z_0)$ “) existiert ein  $r > 0$  mit  $f(z) \neq f(z_0)$  für alle  $z \in \overline{B}(z_0, r) =: B \subseteq U$  mit  $z \neq z_0$ . Da  $\partial B$  kompakt, folgt

$$\exists \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| =: \delta > 0.$$

Sei nun  $w \in B(f(z_0), \delta)$  beliebig, aber fest. Dann ist zu zeigen:  $w \in f(U)$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\exists z_1 \in U : f(z_1) = w.$$

Für  $z \in \partial B$  gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| \geq 2\delta - \delta = \delta \\ \implies \min_{z \in \partial B} |f(z) - w| &\geq \delta. \end{aligned}$$

Lemma 2.40 für  $g := f - w$  liefert  $z_1 \in B(z_0, r) \subseteq U$  mit  $g(z_1) = 0 \iff f(z_1) = w$ . Also ist  $f(U)$  offen. Wenn  $U$  zusammenhängend ist, dann ist  $f(U)$  nach Theorem 1.68 (Ana 2) zusammenhängend.  $\square$

**Bemerkung.** Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $D \subseteq X$ . Eine Abbildung  $f: D \rightarrow Y$  heißt *offen*, wenn für jede in  $D$  offene Teilmenge  $U \subseteq D$  die Bildmenge  $f(U)$  in  $Y$  offen ist. Theorem 2.41 zeigt also die Offenheit aller nichtkonstanten, holomorphen Funktionen auf einem Gebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$ .

**Theorem 2.42** (Maximumsprinzip). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(D)$  nicht konstant.

(a) Dann hat die Funktion  $z \mapsto |f(z)|$  kein lokales Maximum auf  $D$ .

(b) Wenn ferner  $f \in C(\overline{D}, \mathbb{C})$  und  $D$  beschränkt ist, dann gilt:

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

*Beweis.* (a) ANNAHME:  $\exists z_0 \in D, r > 0$  mit  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  ( $\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D$ ).

Wähle  $w_n \in \mathbb{C}$  mit  $|w_n| > |f(z_0)|$  mit  $w_n \rightarrow f(z_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Nach Theorem 2.41 ist  $f(B(z_0, r))$  offen, also

$$\exists \delta > 0 : B(f(z_0), \delta) \subseteq f(B(z_0, r)). \quad (*)$$

Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $w_n \in B(f(z_0), \delta)$ . Dann folgt mit (\*):

$$\exists z \in B(z_0, r) \text{ mit } f(z) = w_n \implies |f(z)| = |w_n| > |f(z_0)| \quad \text{WIDERSPRUCH}$$

(b) Nach Voraussetzung gibt es  $z_1 \in \overline{D}$  mit

$$|f(z_1)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Nach (a) gilt  $z_1 \in \partial D$ . □

**Bemerkung.** Theorem 2.42(b) ist im allgemeinen falsch für unbeschränkte Gebiete. *Beispiel:*

$$D = \{z \in \mathbb{C}: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}, \quad f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Dann ist  $f \in H(\mathbb{C})$  und für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $x \pm i\frac{\pi}{2} \in \partial D$ ,

$$\left| f\left(x \pm i\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \exp(\underbrace{e^x}_{=\pm i}) \right| = 1.$$

Aber  $\exp(\exp(x))$  ist unbeschränkt!

**Beispiel 2.43** (Potenzreihenentwicklung für gewöhnliche Differentialgleichungen). (allgemeines in Walter: Gewöhnliche DGL) Wir haben Lösungen von

$$\begin{cases} u''(x) + b(x)u'(x) + a(x)u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (*)$$

**Frage:** Hat  $u$  eine Potenzreihe? Einfache Antwort mittels Holomorphie!

**Voraussetzung:** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet mit  $0 \in D$ ,  $a, b \in H(D)$  und  $R > 0$  mit  $\overline{B}(0, R) \subseteq D$ . Setze

$$M := \max_{|z| \leq R} \{|a(z)|, |b(z)|\}. \quad (**)$$

Seien  $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$  gegeben, löse:

$$\begin{cases} u''(z) + b(z)u'(z) + a(z)u(z) = 0, & z \in D, \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Sei  $f \in H(B(0, R))$ ,  $r \leq R$ . Setze

$$\int_0^z f(w) \, dw = \int_{\overrightarrow{DZ}} f(w) \, dw, \quad |z| < r.$$

Dann

$$\exists \frac{d}{dz} \int_0^z f(w) \, dw = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \neq 0, |z+h| < r)}} \frac{1}{h} \left( \int_0^{z+h} f \, dw - \int_0^z f \, dw \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f \, dw \stackrel{\text{vgl. Bew. von 2.13}}{=} f(z).$$

Damit und mit Satz 2.13 folgt:

$$(2.9) \iff \begin{cases} u(z) = u_0 + \int_0^z u'(w) \, dw \\ u'(z) = u_1 - \int_0^z (a(w)u(w) + b(w)u'(w)) \, dw. \end{cases}$$



Mit „ $v = u''$ “ definiere

$$\left( T(u, v) \right)(z) = \left( u_0 + \int_0^z v(w) \, dw, u_1 - \int_0^z (au + bv) \, dw \right)$$

für  $r < \min\{R, 1, \frac{1}{2M}\}$ ,  $z \in B(0, r)$ ,  $(u, v) \in H(B(0, R))^2 \cap C(\overline{B}(0, R))^2 =: E$ .

Setze  $q = \min\{r, 2m\} < 1$ . Dann:  $T(u, v) \in E$  und  $E$  ist ein Vektorraum mit Norm

$$\|(u, v)\|_\infty = \max_{|z| \leq r} \{|u(z)|, |v(z)|\}.$$

**Beh.:**  $(E, \|\cdot\|)$  ist vollständig.

*Beweis.* Sei  $(u_n, v_n)$  eine Cauchyfolge in  $E$ .  $\implies (u_n), (v_n)$  sind Cauchyfolgen in  $C(\overline{B}(0, r))$  bezüglich der Supremumsnorm. Dies ist ein Banachraum (Ana 2).

$$\implies \exists u, v \in C(\overline{B}(0, r)) \text{ mit } u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \text{ gleichmäßig auf } \overline{B}(0, r).$$

Aus Theorem 2.34 folgt:  $u, v \in H(B(0, r))$ . Beachte:

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Seien  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$ . Dann:

$$\begin{aligned} \|T(u, v) - T(\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty &= \max_{|z| \leq r} \left\{ \left| \int_0^z (v(w) - \tilde{v}(w)) \, dw \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \int_0^z \left( a(w)(u(w) - \tilde{u}(w)) + b(w)(v(w) - \tilde{v}(w)) \right) \, dw \right| \right\} \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \max_{|w| \leq |z| \leq r} \left\{ |z| |v(w) - \tilde{v}(w)|, |z| (M |u(w) - \tilde{u}(w)| + M |v(w) - \tilde{v}(w)|) \right\} \\ &\leq \underbrace{r \max\{r, 2M\}}_{=q < 1} \|(u, \tilde{u}) - (v, \tilde{v})\|_\infty \end{aligned}$$

Banachscher Fixpunktsatz:  $\exists! (u, v) = T(u, v) \implies u$  löst (2.9) auf  $B(0, r)$ .

Aus Theorem 2.25 folgt  $\exists c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$  mit

$$\begin{cases} u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, & \forall z \in B(0, r) \\ c_0 = u_0, & c_1 = u_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ein Beispiel zur Berechnung von  $c_n$ : **Hermiteische DGL:**

Gegeben:  $\lambda \in \mathbb{R}, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Hier ist  $a(z) = \lambda, b(z) = -2z$  ( $z \in \mathbb{C}$ ). Dann folgt nach Satz 1.3

$$\begin{aligned} -2zu'(z) &= -2z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2n c_n) z^n, \\ u'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \stackrel{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k \end{aligned}$$

für ein  $z \in B(0, r)$ ,  $r$  aus (2.10). Dann folgt aus (2.11)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n] z^n = 0, \quad c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \\ \xRightarrow{2.35} & \begin{cases} (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0, & n \in \mathbb{N}_0, \\ c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \end{cases} \implies c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n \\ \implies & c_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} (2(k-2) - \lambda)(2(k-4) - \lambda) \cdots (-\lambda) c_0, & k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{k!} (2(k-2) - \lambda) \cdots (2 - \lambda) c_1, & k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zwei linear unabhängige Lösungen erhält man durch:

1)  $c_0 = u_0 = 1, c_1 = u_1 = 0$ ; Lösung:

$$v_{1,\lambda}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{4-\lambda}{4!} x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)}{6!} x^6 - \dots$$

2)  $c_0 = 0, c_1 = 1$ ; Lösung:

$$v_{2,\lambda}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \dots$$

Wenn  $\lambda = 2m, m \in \mathbb{N}_0$ : Abbruch der Rekursion wenn

**Fall 1:**  $m$  gerade,  $u_0 = 1, u_1 = 0$ ,

**Fall 2:**  $m$  ungerade,  $u_0 = 0, u_1 = 1$ .

$$\lambda = 0, m = 0: u_0(x) = 1$$

$$\lambda = 2, m = 1: u_1(x) = x$$

$$\lambda = 4, m = 2: u_2(x) = 1 - 2x^2$$

$$\lambda = 6, m = 3: u_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3$$

Diese Lösungen erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |u_n(x)|^2 dx < \infty \quad (+)$$

Man kann zeigen, dass alle anderen Lösungen von (2.11) (+) verletzen.