Einschub: Das Zornsche Lemma

Ferdinand Szekeresch

12. Dezember 2016

Es sei $\emptyset \neq \mathcal{L}$ eine Menge und $\triangleleft$ eine **Ordnungsrelation** auf $\mathcal{L}$, d.h. für $a, b, c \in \mathcal{L}$ gilt:

(1) $a \triangleleft a$

(2) aus $a \triangleleft b$ und $b \triangleleft a \implies a = b$

(3) aus $a \triangleleft b$ und $b \triangleleft c \implies a \triangleleft c$

Es sei $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. $\mathcal{K}$ heißt eine **Kette** $:\iff$ aus $a, b \in \mathcal{K}$ folgt stets: $a \triangleleft b$ oder $b \triangleleft a$. Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ und $a \in \mathcal{L}$. a heißt eine **obere Schranke** von $\mathcal{M} :\iff x \triangleleft a \ \forall x \in \mathcal{M}$. $v \in \mathcal{L}$ heißt ein **maximales Element** von $\mathcal{L} :\iff$ aus $a \in \mathcal{L}$ und $v \triangleleft a$ folgt: $v = a$

Lemma 0.1 (Das Zornsche Lemma)
$\mathcal{L}$ und $\triangleleft$ seien wie oben. Besitzt **jede** Kette in $\mathcal{L}$ eine obere Schranke in $\mathcal{L}$, so enthält $\mathcal{L}$ ein maximales Element.