

## 14. Stammfunktionen

In diesem Paragraphen sei stets:  $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $G$  ein Gebiet und  $f = (f_1, \dots, f_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

### Definition

Eine Funktion  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Stammfunktion (SF) von  $f$  auf  $G$**  :  $\iff \varphi$  ist auf  $G$  partiell differenzierbar und  $\text{grad } \varphi = f$  auf  $G$ . Also:  $f_{x_j} = f_j$  auf  $G$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

### Bemerkung:

- (1) Ist  $\varphi$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G \implies \text{grad } \varphi = f \implies \varphi \in C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{5.3} \varphi$  ist auf  $G$  differenzierbar und  $\varphi' = f$  auf  $G$ .
- (2) Sind  $\varphi_1, \varphi_2$  Stammfunktionen von  $f$  auf  $G \xrightarrow{(1)} \varphi'_1 = \varphi'_2$  auf  $G \xrightarrow{6.2} \exists c \in \mathbb{R} : \varphi_1 = \varphi_2 + c$  auf  $G$
- (3) Ist  $n = 1 \implies G$  ist ein offenes Intervall. AI, 23.14  $\implies$  jedes stetige  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion! Im Falle  $n \geq 2$  ist dies *nicht* so.

### Beispiele:

- (1)  $G = \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (y, -x)$ .

Annahme:  $f$  besitzt auf  $\mathbb{R}^2$  die Stammfunktion  $\varphi$ . Dann:  $\varphi_x = y$ ,  $\varphi_y = -x$  auf  $G \implies \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und  $\varphi_{xy} = 1 \neq -1 = \varphi_{yx}$ . Widerspruch zu 4.1. Also:  $f$  besitzt auf  $\mathbb{R}^2$  *keine* Stammfunktion.

- (2)  $G = \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (y, x - y)$ .

Ansatz für eine Stammfunktion  $\varphi$  von  $f$ :  $\varphi_x = y \implies \varphi = xy + c(y)$ ,  $c$  differenzierbar,  $\implies \varphi_y \stackrel{!}{=} x + c'(y) = x - y \implies c'(y) = -y$ , etwa  $c(y) = -\frac{1}{2}y^2$ . Also:  $\varphi(x, y) = xy - \frac{1}{2}y^2$ . Probe:  $\varphi_x = y$ ,  $\varphi_y = x - y$ , also:  $\text{grad } \varphi = f$ .  $\varphi$  ist also eine Stammfunktion von  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

### Satz 14.1 (Hauptsatz der mehrdimensionalen Integralrechnung)

$f$  besitzt auf  $G$  die Stammfunktion  $\varphi$ ;  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit  $\Gamma_\gamma \subseteq G$ . Dann:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Das heißt:  $\int_\gamma f(x) \cdot dx$  hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von  $\gamma$  ab.

Ist  $\gamma$  geschlossen, das heißt  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , dann gilt  $\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0$ .

**Beweis**

O.B.d.A.:  $\gamma$  ist stetig differenzierbar.  $\Phi(t) := \varphi(\gamma(t))$ ,  $t \in [a, b]$ .  $\Phi$  ist stetig differenzierbar und  $\Phi'(t) = \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ . Dann:  $\int_{\gamma} f(x) \cdot dx \stackrel{13.1}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \Phi'(t) dt \stackrel{\text{AI}}{=} \Phi(b) - \Phi(a) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$ . ■

**Hilfssatz 14.2**

Es seien  $x_0, y_0 \in G$ . Dann existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg  $\gamma$  mit:  $\Gamma_{\gamma} \subseteq G$  und Anfangspunkt von  $\gamma = x_0$  und Endpunkt von  $\gamma = y_0$ .

**Beweis**

$G$  Gebiet  $\implies \exists z_0, z_1, \dots, z_m \in G : S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G, z_0 = x_0, z_m = y_0$ .

$\gamma_j(t) := z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1})$ , ( $t \in [0, 1]$ ), ( $j = 1, \dots, m$ ). Dann:  $\Gamma_{\gamma_j} = S[z_{j-1}, z_j] \implies \Gamma_{\gamma_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\gamma_m} = S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G$ . 13.4  $\implies \exists \gamma \in \text{AH}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  stückweise stetig differenzierbar  $\implies \Gamma_{\gamma} = S[z_0, \dots, z_m] \subseteq G$ . ■

**Definition**

$\int f(x) \cdot dx$  heißt **in  $G$  wegunabhängig** (wu) :  $\iff$  für je zwei Punkte  $x_0, y_0 \in G$  gilt: für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\Gamma_{\gamma} \subseteq G$ ,  $\gamma(a) = x_0$  und  $\gamma(b) = y_0$  hat das Integral  $\int_{\gamma} f(x) \cdot dx$  stets denselben Wert. In diesem Fall:  $\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx := \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$ .

**14.4 lautet dann:** besitzt  $f$  auf  $G$  die Stammfunktion  $\varphi \implies \int f(x) \cdot dx$  ist in  $G$  wegunabhängig und  $\int_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx = \varphi(y_0) - \varphi(x_0)$  (Verallgemeinerung von Analysis 1, 23.5).

**Satz 14.3 (Wegunabhängigkeit, Existenz von Stammfunktionen)**

$f$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion  $\iff \int f(x) \cdot dx$  ist in  $G$  wegunabhängig.

In diesem Fall: ist  $x_0 \in G$  und  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch:

$$\varphi(z) = \int_{x_0}^z f(x) \cdot dx \quad (z \in G) \quad (*)$$

Dann ist  $\varphi$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G$ .

**Beweis**

„ $\implies$ “: 14.1 „ $\Leftarrow$ “: Sei  $x_0 \in G$  und  $\varphi$  wie in (\*). Zu zeigen:  $\varphi$  ist auf  $G$  differenzierbar und  $\varphi' = f$  auf  $G$ . Sei  $z_0 \in G, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$  und  $\|h\|$  so klein, dass  $z_0 + th \in G \forall t \in [0, 1]$ .  $\gamma(t) := z_0 + th$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\Gamma_{\gamma} = S[z_0, z_0 + h] \subseteq G$ .  $\rho(h) := \frac{1}{\|h\|}(\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) - f(z_0) \cdot h)$ . Zu zeigen:  $\rho(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ). 14.2  $\implies$  es existieren stückweise stetig differenzierbare Wege  $\gamma_1, \gamma_2$  mit:  $\Gamma_{\gamma_1}, \Gamma_{\gamma_2} \subseteq G$ . Anfangspunkt von  $\gamma_1 = x_0$  = Anfangspunkt von  $\gamma_2$ . Endpunkt von  $\gamma_1 = z_0$ , Endpunkt von  $\gamma_2 = z_0 + h$ . Sei  $\gamma_3 \in \text{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$  stückweise stetig differenzierbar (13.4!). Dann:

$$\underbrace{\int_{\gamma_3} f(x) \cdot dx}_{=\varphi(z_0+h)} = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx}_{=\varphi(z_0)} + \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$$

$\int f(x) \cdot dx$  ist wegunabhängig in  $G \implies$

$$\int_{\gamma_3} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx = \varphi(z_0 + h) \implies \varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0) = \int_{\gamma} f(x) \cdot dx$$

Es ist:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z_0) \cdot dx &= \int_0^1 f(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=h} dt = f(z_0) \cdot h \\ \implies \rho(h) &= \frac{1}{\|h\|} \int_{\gamma} (f(x) - f(z_0)) dx \\ \implies |\rho(h)| &= \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\gamma} f(x) - f(z_0) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\|h\|} \underbrace{L(\gamma)}_{=\|h\|} \underbrace{\max\{\|f(x) - f(z_0)\| : x \in \Gamma_{\gamma}\}}_{=\|f(x_n) - f(z_0)\|}\end{aligned}$$

wobei  $x_n \in \Gamma_{\gamma} = S[z_0, z_0 + h] \implies | \rho(h) | \leq \|f(x_n) - f(z_0)\|$ . Für  $h \rightarrow 0 : x_n \rightarrow z_0 \xrightarrow{\text{f stetig}} \|f(x_n) - f(z_0)\| \rightarrow 0 \implies \rho(h) \rightarrow 0$ . ■

#### Satz 14.4 (Integrabilitätsbedingungen)

Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ . Besitzt  $f$  auf  $G$  die Stammfunktion  $\varphi \implies$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

(**Integrabilitätsbedingungen (IB)**). Warnung: Die Umkehrung von 14.4 gilt im Allgemeinen **nicht** ( $\rightarrow$  Übungen!).

#### Beweis

Sei  $\varphi$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G \implies \varphi$  ist differenzierbar auf  $G$  und  $\varphi_{x_j} = f_j$  auf  $G$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n) \implies \varphi \in C^2(G, \mathbb{R})$

$$\implies \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \varphi_{x_j x_k} \stackrel{4.7}{=} \varphi_{x_k x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \text{ auf } G.$$

■

#### Definition

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $M$  heißt **sternförmig** :  $\iff \exists x_0 \in M : S[x_0, x] \subseteq M \quad \forall x \in M$ .

**Beachte:**

- (1) Ist  $M$  konvex  $\implies M$  ist sternförmig
- (2) Ist  $M$  offen und sternförmig  $\implies M$  ist ein Gebiet

#### Satz 14.5 (Kriterium zur Existenz von Stammfunktionen)

Sei  $G$  sternförmig und  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ . Dann:  $f$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion :  $\iff f$  erfüllt auf  $G$  die Integrabilitätsbedingungen

#### Beweis

„ $\implies$ “: 14.1 „ $\Leftarrow$ “:  $G$  sternförmig  $\implies \exists x_0 \in G : S[x_0, x] \subseteq G \quad \forall x \in G$ . OBdA:  $x_0 = 0$ .

Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$  sei  $\gamma_x(t) = tx, t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= \int_{\gamma_x} f(z) \cdot dz \quad (x \in G) \\ &= \int_0^1 f(tx) \cdot x dt \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) \cdot x_1 + f_2(tx) \cdot x_2 + \dots + f_n(tx) \cdot x_n) dt\end{aligned}$$

Zu zeigen:  $\varphi$  ist auf  $G$  partiell differenzierbar nach  $x_j$  und  $\varphi_{x_j} = f_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). OBdA:  $j = 1$ .  
Später (in 21.3) zeigen wir:  $\varphi$  ist partiell differenzierbar nach  $x_1$  und:

$$\varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f_1(tx)x_1 + \dots + f_n(tx) \cdot x_n) dt$$

Für  $k = 1, \dots, n$ :  $g_k(x) = f_k(tx) \cdot x_k$ .

$$k = 1: g_1(x) = f_1(tx)x_1 \implies \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) = f_1(tx) + t \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1$$

$$k \geq 2: g_k(x) = f_k(tx)x_k \implies \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) = t \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(tx)x_k \implies$$

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1}(x) &= \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(tx)x_n)) dt \\ &\stackrel{\text{IB}}{=} \int_0^1 (f_1(tx) + t(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx)x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx)x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(tx)x_n)) dt \\ &= \int_0^1 (f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x) dt\end{aligned}$$

Sei  $x \in G$  (fest),  $h(t) := t \cdot f_1(tx)$  ( $t \in [0, 1]$ ).  $h$  ist stetig differenzierbar und  $h'(t) = f_1(tx) + t f_1'(tx) \cdot x \implies \varphi_{x_1}(x) = \int_0^1 h'(t) dt \stackrel{\text{A1}}{=} h(1) - h(0) = f_1(x)$ . ■