

Aus der NF lesen wir ab:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von Kern } \phi \Rightarrow \dim \text{Kern } \phi = 2$$

$$\text{Teil a)} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von Bild } \phi \Rightarrow \dim \text{Bild } \phi = 3$$

0.11.2 Aufgabe 2

- a) Nach Tutorium: Die Spalten von $A \cdot B$ sind genau $[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow \text{Rg}(AB) \leq \text{Rg}(A)$.
 Andererseits: $B \cdot x = 0 \Rightarrow A \cdot B \cdot x = 0 \Rightarrow p - \text{Rg}(A \cdot B) \geq p - \text{Rg}B \Leftrightarrow \text{Rg}A \cdot \text{Rg}B \leq \text{Rg}B$.
- b) Sei $B = (b_1 | \dots | b_n)$ und U der Lösungsraum von $A \cdot x = 0$.
 $A \cdot B = 0 \Rightarrow b_1, \dots, b_n$ sind Lösungen von $A \cdot x = 0 \Rightarrow b_1, \dots, b_n \in U \Rightarrow \dim [b_1, \dots, b_n] = \text{Rg}B \leq \dim U$.
 Die Dimension des Lösungsraums erfüllt $\dim U = n - \text{Rg}(A) \Rightarrow \text{Rg}(B) \leq n - \text{Rg}(A) \Rightarrow \text{Beh.}$

0.12 Übung 11, 17.01.2005

0.12.1 Aufgabe 1

a) Seien

$\{x_1, \dots, x_r\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$

$\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_k\}$ eine Basis von u_2

$\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_k\}$ eine Basis von U_2

also $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_k, x'_{r+1}, \dots, x'_k\}$ eine Basis von $U_1 + U_2$

Dann ist durch

$$\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_k, x'_{r+1} + x_{r+1}, \dots, x'_k + x_k\}$$

und

$$\{x_1, \dots, x_r, x'_{r+1}, \dots, x'_k, x_{r+1} + x'_{r+1}, \dots, x_k + x'_k\}$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ gegeben.

Dann gilt: $U_1 \oplus \tilde{W} = U_1 + U_2 = U_2 \oplus \tilde{W}$.

Nun ergänzen wir eine der Basen von $U_1 + U_2$ durch Hinzufügen von y_1, \dots, y_2 zu einer Basis von V und setzen

$$W := [x_{r+1} + x'_{r+1}, \dots, x_k + x'_k]$$

Dann erfüllt W die Behauptung.

- b) Gilt $\dim U_1 \leq \dim U_2$, so ex. ein Vektorraum U mit der Eigenschaft $\dim(U_1 \oplus U) = \dim U_2$.
 Nach a) ex. nun ein UVR W_2 mit $V = (U_1 \oplus U) \oplus W_2 = U_2 \oplus W_2$.
 Setzen wir nun $W_1 := U \oplus W_2$ so folgt die Beh.

0.12.2 Aufgabe 2

Zunächst bestimmen wir vereinfachte Basen von U_1 und U_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von U_1 und $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von U_2 .

Schreiben wir die Basisvektoren in die Spalten einer Matrix und wenden den Gauß-Algorithmus an, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Spalten sind l.u., d.h.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von $U_1 + U_2$ und $\dim(U_1 + U_2) = 3$.

Aus der dritten Zeile lesen wir ab:

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1 \Leftrightarrow a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

0.12.3 Aufgabe 3

a) Ist $\dim U_i = \infty$ für ein $i = \{1, \dots, k\}$, so steht auf der rechten Seite unendlich und die Gleichung gilt..

Andernfalls betrachten wir Basen B_i von U_i für $i = 1, \dots, k$. Der Vektor $x \in U_1 + \dots + U_k$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus $B_1 \cup \dots \cup B_k$ schreiben, also ist $B_1 \cup \dots \cup B_k$ ein Erzeugendensystem.

$$\Rightarrow \dim(U_1 + \dots + U_k) \leq |B_1 \cup \dots \cup B_k| \leq |B_1| + \dots + |B_k| = \dim U_1 + \dots + \dim U_k.$$

Für $i = 1, \dots, k$ sein B_i eine Basis von U_i .