iii Geometrische Eigenschaften

In diesem Kapitel sei stets K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1 Lokale Ringe zu Punkten

Gegeben die Strukturgarbe zu einer Varietät wollen wir „Funktionskeime" in einem Punkt betrachten.

Definition 1.1: Sei W eine quasi-projektive Varietät und $p \in W$.

(a) Es sei
$$\mathcal{O}_{W,p} = \{(U, f) \mid p \in U \subseteq W \text{ offen}, f \in \mathcal{O}_W(U)\}\Big/\sim\,,$$
wobei $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ bedeuten soll, dass es eine offene Menge $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $p \in U_3$ gibt, sodass $f_1|_{U_3} = f_2|_{U_3}$ gilt. Das ist eine K-Algebra und heißt *lokaler Ring von W in p*.

(b) Die Elemente in $\mathcal{O}_{W,p}$ heißen *Funktionskeime*.
Für die Äquivalenzklasse eines (U, f) schreiben wir auch f_p.

Beispiel 1.2: Sei $W = \mathbb{A}^1(K)$ und $x = 0$. Wir wissen, dass die nichtleeren offenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1(K)$ alle von der Form $\mathbb{A}^1(K) \setminus \{x_1,\ldots, x_n\}$ sind und reguläre Funktionen auf einer solchen Menge sind Quotienten von Polynomen $\frac{f}{g}$ mit $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_i$, $i = 1,\ldots, n$. Also ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(K),0} \cong K[X]_{(X)}$.

Bemerkung 1.3: (a) Die Abbildung
$$\varphi_p \colon \mathcal{O}_{W,p} \longrightarrow K, \quad f_p = [(U, f)] \longmapsto f_p(p) := f(p),$$
ist ein wohldefinierter K-Algebrenhomomorphismus und heißt *Auswertung*.

(b) $\mathcal{O}_{W,p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal
$$\mathfrak{m}_p = \{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{W,p} \mid f(p) = 0\}.$$

Beweis: (a) Die Wohldefiniertheit folgt direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation.

(b) Die Abbildung φ_p ist surjektiv, denn die konstanten Abbildungen definieren Elemente in $\mathcal{O}_{W,p}$, und Kern $\varphi_p = \mathfrak{m}_p$. Damit gilt $\mathcal{O}_{W,p}/\mathfrak{m}_p \cong K$, also ist $\mathfrak{m}_p$ ein maximales Ideal. Es bleibt noch zu zeigen, dass es kein weiteres maximales Ideal gibt. Sei dazu $I \subseteq \mathcal{O}_{W,p}$ ein Ideal mit $I \not\subseteq \mathfrak{m}_p$. Dann gibt es ein $[(U, f)] \in I$ mit $[(U, f)] \notin \mathfrak{m}_p$, also $f(p) \neq 0$. Wir definieren $\widetilde{U} = \mathfrak{D}(f) \ni p$

und $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_W(\widetilde{U})$. Dann gilt $[(U,f)] \cdot [(\widetilde{U},g)] = [(\widetilde{U},1)] = 1$, also ist $[(U,f)] \in I$ invertierbar und damit $I = \mathcal{O}_{W,p}$. □

Bemerkung 1.4: Die Abbildung

$$\psi_p\colon \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}, \quad f \longmapsto [(U,f)] = f_p,$$

heißt *kanonische Keim-Abbildung.*

Sei $W = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ die Zerlegung von W in irreduzible Komponenten. Wir wissen: ist $U \subseteq W$ offen und $p \in U$, so ist $U \cap W_i$ dicht in W_i, falls $p \in W_i$.

Falls $U \cap W_j = \varnothing$ für alle W_j mit $p \notin W_j$, dann ist $\psi_p\colon \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}$ injektiv. Denn wenn $\psi_p(f) = 0$ ist, gibt es ein offenes $\widetilde{U} \subseteq U$ mit $f|_{\widetilde{U}} = 0$. Da $\widetilde{U}$ dicht in U ist, gilt $f|_U = 0$, denn „$= 0$" ist eine abgeschlossene Bedingung.

Proposition 1.5: Ist V eine affine Varietät, so gilt

$$\mathcal{O}_{V,p} \cong K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{m}_p^V = \{f \in K[V] \mid f(p) = 0\}$.

Beweis: Wir definieren

$$\varphi\colon K[V]_{\mathfrak{m}_p^V} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad \frac{f}{g} \longmapsto \left[\left(\mathfrak{D}(g), x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}\right)\right].$$

φ ist wohldefiniert: φ wird induziert von

$$\psi_p\colon \mathcal{O}_V(V) = K[V] \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad f \longmapsto [(V, x \longmapsto f(x))],$$

denn für $g \notin \mathfrak{m}_p^V$ gilt $g(p) \neq 0$, also ist $\psi_p(g)$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{V,p}$.

φ ist injektiv: Sei $\varphi(\frac{f}{g}) = 0$, dann gibt es ein $U \subseteq \mathfrak{D}(g)$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ für alle $x \in U$. Für $h \in K[V]$ mit $p \in \mathfrak{D}(h) \subseteq U$ gilt dann $h(p) \neq 0$, also $h \in \mathfrak{m}_p^V$. Also gilt $h(x)f(x) = 0$ für alle $x \in V$, also $f = 0$ in $K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}$.

φ ist surjektiv: Sei $[(U,f)] \in \mathcal{O}_{V,p}$. Ohne Einschränkung ist

$$U = \mathfrak{D}(h) \text{ für ein } h \in K[V].$$

Es gilt dann $f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(h)) = K[V]_h$, also ist $f = \frac{g}{h^k}$ für ein $g \in K[V]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist $[(U,f)] = \varphi(\frac{g}{h^k})$. □

Korollar 1.6: Sei W eine quasi-projektive Varietät und $x \in W$. Sei weiter $V_0 \subseteq W$ offen und affin mit $p \in V_0$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_{W,p} \cong \mathcal{O}_{V_0,p} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_p^V}.$$

Proposition 1.7: Seien W_1, W_2 quasi-projektive Varietäten. Seien weiter $p \in W_1$, $q \in W_2$ und $\mathcal{O}_{W_1,p} \cong \mathcal{O}_{W_2,q}$. Dann gibt es offene Umgebungen U_1 und U_2 von p bzw. q mit $U_1 \cong U_2$, d.h. „der lokale Ring kennt die Umgebung eines Punktes".

Beweis: Sei $\varphi\colon \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$ ein Isomorphismus.

(1) Wir wählen U_1 offen und affin in W_1 mit $p \in U_1$ und so, dass U_1 nur die irreduziblen Komponenten von W_1 schneidet, die p enthalten. Entsprechend wählen wir ein $\widetilde{U_2}$ für q. Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xhookrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathcal{O}_{W_2,q} \xhookleftarrow{\psi_q} \mathcal{O}(\widetilde{U_2}).$$

Wir hätten gerne, dass $\varphi \circ \psi_p(\mathcal{O}(U_1)) \subseteq \psi_q(\mathcal{O}(\widetilde{U_2}))$ gilt (sogar „=“).

(2) Da U_1 affin ist, gilt $\mathcal{O}(U_1) = K[U_1]$. Seien $f_1,\dots, f_k$ Erzeuger von $K[U_1]$. Wir betrachten $\varphi((f_1)_p),\dots, \varphi((f_k)_p)$ in $\mathcal{O}_{W_2,q} \cong K[\widetilde{U_2}]_{\mathfrak{m}_q^{\widetilde{U_2}}}$: es ist

$$\varphi((f_i)_p) = \frac{g_i}{h_i} \text{ mit } g_i, h_i \in K[U_2] \text{ und } h_i \notin \mathfrak{m}_q^{\widetilde{U_2}}.$$

Wir wählen nun eine offene und affine Teilmenge $U_2 \subseteq \widetilde{U_2} \cap \mathfrak{D}(h_1) \cap \ldots \cap \mathfrak{D}(h_n)$ mit $q \in U_2$. Es gilt dann $\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}(U_2)$ und $\psi_q\Big(\frac{g_i}{h_i}\Big) = \varphi(\psi_p(f_i))$. Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xhookrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathcal{O}(U_2) \subseteq \mathcal{O}_{W_2,p}.$$

Insbesondere definiert ein injektiver Homomorphismus

$$K[U_1] \cong \mathcal{O}(U_1) \hookrightarrow \mathcal{O}(U_2) \cong K[U_2]$$

einen surjektiven Morphismus $U_2 \twoheadrightarrow U_1$ von affinen Varietäten.

(3) Wir haben jetzt $p \in U_1 \subseteq W_1$, $q \in U_2 \subseteq W_2$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[U_1] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, hook, "\psi_p"] & K[U_2] \arrow[d, hook, "\psi_q"] \\ \mathcal{O}_{W_1,p} \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & \mathcal{O}_{W_2,q}, \end{tikzcd}$$

sodass $\varphi \circ \psi_p(K[U_1]) \subseteq K[U_2]$. Dadurch erhalten wir einen Morphismus

$$f\colon U_2 \longrightarrow U_1 \text{ mit } f(q) = p,$$

$f^\sharp = \varphi\colon K[U_1] \longrightarrow K[U_2]$ und $f_p^\sharp = \varphi\colon \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$. Analog erhalten wir einen Morphismus $g\colon \widetilde{U_1} \longrightarrow \widetilde{U_2}$ (es ist ohne Einschränkung $\widetilde{U_1} \subseteq U_1$, $\widetilde{U_2} \subseteq U_2$) mit $g(p) = q$, $g^\sharp = \varphi^{-1}\colon K[\widetilde{U_2}] \longrightarrow K[\widetilde{U_1}]$ und $g_p^\sharp = \varphi^{-1}\colon \mathcal{O}_{W_2,q} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1,p}$.

Wir setzen jetzt $\widehat{U_1} = \widetilde{U_1}$ und $\widehat{U_2} = f^{-1}(\widetilde{U_1}) \subseteq U_2$. Wir haben dann Abbildungen

$$f \circ g \colon \widehat{U_1} \longrightarrow U_1, \qquad g \circ f \colon \widehat{U_2} \longrightarrow \widetilde{U_2}.$$

Auf den lokalen Ringen induziert $g \circ f$ die Identität, also ist $g \circ f$ die Einbettung $\widehat{U_2} \hookrightarrow U_2$. Analog ist $f \circ g$ die Einbettung $\widehat{U_1} \hookrightarrow U_1$. Daraus folgt

$$f \circ g(\widehat{U_1}) \subseteq \widehat{U_1}, \text{ also } g(\widehat{U_1}) \subseteq f^{-1}(\widehat{U_1}) = \widehat{U_2},$$

und analog $f(\widehat{U_2}) \subseteq \widehat{U_1}$. Hier gilt dann $f \circ g = \mathrm{id}_{\widehat{U_1}}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\widehat{U_2}}$.
Also sind f und g Isomorphismen. □

Bemerkung 1.8: (a) Morphismen von Varietäten induzieren Homomorphismen zwischen den lokalen Ringen: Sei $\varphi \colon W_1 \longrightarrow W_2$ ein Morphismus von quasi-projektiven Varietäten und $x \in W_1$. Dann ist

$$\varphi_x^\sharp \colon \mathcal{O}_{W_2,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1,x}, \quad [(U,f)] \longmapsto [(\varphi^{-1}(U), f \circ \varphi)],$$

ein wohldefinierter K-Algebrenhomomorphismus mit $\varphi_x^\sharp(\mathfrak{m}_{\varphi(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$.

(b) Es gilt $\mathrm{id}_x^\sharp = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{V,x}}$ und $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_x^\sharp = {\varphi_1}_x^\sharp \circ {\varphi_2}_x^\sharp$. Wir erhalten also einen Funktor von der Kategorie der punktierten quasi-projektiven Varietäten in die Kategorie der lokalen Ringe.

2 Dimension von Varietäten

Wünsche:

- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathfrak{V}(XZ, YZ) = 2$ im $\mathbb{A}^3$ („Ebene“)
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$ im $\mathbb{A}^3$
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$ im $\mathbb{A}^2$ („Kreis“)

Definition 2.1: Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{d \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{ Kette } \varnothing \neq X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d \text{ mit } X_i \text{ abg. und irred. in } X\}$$

die *Krulldimension* von X.

Für Mannigfaltigkeiten stimmen Krulldimension und Dimension nicht überein, da in Hausdorffräumen Punkte die einzigen irreduziblen, nichtleeren Teilmengen sind (vgl. Beispiel 2.7 in Kapitel I).
Insbesondere ist die Krulldimension von $\mathbb{C}^n$ mit euklidischer Topologie 0.

Ab jetzt: Mit Dimension ist stets die Krulldimension gemeint!

BEMERKUNG 2.2: (a) Ist X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ mit Spurtopologie versehen, so ist $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

(b) Ist $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ mit X_i abgeschlossene Teilmengen von X, so gilt:

$$\dim(X) = \sup_i \dim(X_i).$$

Beweis: (a) Sei $\varnothing \neq y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq y_k$ eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in Y.

Dann ist auch $\varnothing \neq \overline{y_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{y_n}$ Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in X. Denn:

- $\overline{y_i}$ ist irreduzibel nach Übungsblatt 2,
- $y_i = \overline{y_i} \cap Y$, da y_i in Y abgeschlossen ist. Also $\overline{y_i} \neq \overline{y_{i+1}}$.

Damit ist $\dim Y \leq \dim X$.

(b) Nach (a) gilt „$\geq$".

Wähle Kette $\varnothing \neq A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ in X von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen.

$A_k = \bigcup_{i=1}^{n} (A_k \cap X_i)$ und die Irreduzibilität von A_k impliziert nun $A_k = A_k \cap X_i$ für ein i, d.h. $A_k \subseteq X_i$.

Nach (a) folgt nun $k \leq \dim A_k \leq \dim X_i$ und damit die Behauptung. □

ERINNERUNG 2.3: Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Für ein Primideal $\wp \subseteq R$ definiert man die *Höhe von* $\wp$ durch

$$\operatorname{ht} \wp = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_n := \wp \text{ Kette von Primidealen}\}.$$

(b) Man definiert die *Krulldimension von* R durch

$$\dim R = \sup\{\operatorname{ht} \wp \mid \wp \subseteq R \text{ ist Primideal}\}.$$

PROPOSITION 2.4: Sei V eine affine Varietät. Dann ist $\dim V = \dim K[V]$.

Beweis: Erinnerung an Erinnerung/Bemerkung 7.1 aus Kapitel I:

$$\{\text{nichtleere irreduzible Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \{\text{Primideale in } K[V]\}$$

durch $W \longmapsto \mathfrak{I}(W)$ bzw. $\wp \longmapsto \mathfrak{V}(\wp)$. Diese Zuordnungen sind inklusionsumkehrend, also entsprechen aufsteigende Primidealketten absteigenden Ketten von irreduziblen Varietäten. □

ERINNERUNG 2.5 (aus Algebra II): Sei K ein Körper, A eine endlich erzeugte nullteilerfreie K-Algebra. Dann gilt:

- $\dim K[X_1,..., X_n] = n$
- Ist $\varphi\colon K[X_1,..., X_n] \twoheadrightarrow A$ surjektiver K-Algebrenhomomorphismus, so gilt:

$$\dim A + \mathrm{ht}(\mathrm{Kern}(\varphi)) = n.$$

- Alle maximalen Primidealketten in A haben dieselbe Länge. Diese ist $\dim A$. Insbesondere: Alle maximalen Primideale haben die Höhe $\dim(A)$.
- Allgemein gilt: Ist R lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, so ist $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = \dim R$. Für einen beliebigen Ring R gilt: $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = \dim R_{\mathfrak{m}}$.

KOROLLAR 2.6: (a) $\dim \mathbb{A}^n = n$

(b) Ist V irreduzible affine Varietät im $\mathbb{A}^n$, so gilt

$$\dim V + \mathrm{ht}\,\mathfrak{I}(V) = n.$$

(c) Für $x \in V$ ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim K[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m}_x^V = \dim K[V] = \dim V.$$

PROPOSITION 2.7: Sei W eine quasi-projektive Varietät, $x \in W$, V_0 eine affine, offene Umgebung von x. Dann nennen wir

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} =: \dim_x W$$

lokale Dimension von x in W. Es gilt:

(a) $\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{V_0,x} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m}_x^{V_0}$

(b) Ist W irreduzibel, so gilt für alle $x, y \in W$: $\dim_x W = \dim_y W = \dim W$. Außerdem: Ist $\varnothing \neq U$ offen und affin in W, so ist $\dim U = \dim W$.

(c) $\dim_x W = \dim \mathcal{O}_{W,x} = \max\{\dim Z \mid Z$ irreduzible Komponente von W$, x \in Z\}$.

Beweis: (a) folgt mit Erinnerung 2.5 direkt aus $\mathcal{O}_{W,x} \cong \mathcal{O}_{V_0,x} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$.

(b) Wir zeigen zunächst: $\dim_x W = \dim_y W \ \forall x, y \in W$.

Seien U_1, U_2 offene, affine Umgebungen von x bzw. y. Da W irreduzibel ist, ist $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

Sei $z \in U_1 \cap U_2$. Dann folgt mit Korollar 2.6:

$$\begin{aligned}\dim_x W &= \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,z}\\ &= \dim \mathcal{O}_{U_2,z} = \dim \mathcal{O}_{U_2,y} = \dim \mathcal{O}_{W,y} = \dim_y W\end{aligned}$$

Nun zeigen wir: $\dim W = d := \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim U$ für ein beliebiges, offenes, affines $U \neq \varnothing$ in W.

Wir sehen: $\dim W \geq d = \dim U$, da $U \subseteq W$.

Angenommen, es gäbe eine Kette $\{x\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq ... \subsetneq W_k$ von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen mit $k > d$. Dann wählen wir U offen und affin mit $x \in U$ und sehen, dass

$$U \cap W_0 = \{x\} \subsetneq U \cap W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U \cap W_k \subseteq U$$

eine Kette von abgeschlossen, irreduziblen Teilmengen von U ist, denn $\overline{W_i \cap U} = W_i$, da W_i irreduzibel ist. Damit wäre $d = \dim U \geq k > d$, was einen Widerspruch ergibt.

(c) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass W affin ist. Dann folgt mit Erinnerung 2.5:

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim K[W]_{\mathfrak{m}_x^W} = \operatorname{ht} \mathfrak{m}_x^W = \sup\{k \mid 0 \neq \wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_k = \mathfrak{m}_x^W\}$$

Ohne Einschränkung sei $\wp_0$ minimales Primideal und die Kette maximal. Also entspricht $\wp_0$ einer irreduziblen Kompenente Z mit $x \in Z$. Wieder mit Erinnerung 2.5 ist $\dim Z = k$. □

Definition 2.8: (a) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 1 heißt *Kurve*.

(b) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 2 heißt *Fläche*.

Beispiel 2.9: (a) Nach Proposition 2.7 ist $\dim \mathbb{P}^n = n$.

(b) Betrachte eine Hyperfläche $\mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ mit $f \in K[X_1,..., X_n]$, $\deg f \geq 1$.

$$\text{Dann gilt: } \dim \mathfrak{V}(f) = n - 1.$$

Denn: Nach Bemerkung 2.2 kann man f ohne Einschränkung als irreduzibel voraussetzen. Damit ist $\dim \mathfrak{V}(f) = \dim K[V] = n - \operatorname{ht}(f)$.

Angenommen, es gäbe ein Primideal $\wp$ mit $0 \subsetneq \wp \subsetneq (f)$. Wähle nun $h \in \wp$ mit minimalem Grad. Da f irreduzibel ist, folgt $h \in (f)$.

Folglich: $h = h'f$ und $h \neq f$, also $h' \in \wp$. Aber der Grad von h' ist kleiner als der von h—ein Widerspruch!

Insgesamt: $\operatorname{ht}(f) = 1$ und die Behauptung gilt.

(c) Betrachte die Varietät $V = \mathfrak{V}(XZ, YZ) = \mathfrak{V}(Z) \cup \mathfrak{V}(X, Y)$ (Ebene mit senktrechter Gerade durch den 0-Punkt).

Es ist $\mathfrak{V}(Z) \cong \mathbb{A}^2$, d.h $\dim \mathfrak{V}(Z) = 2$, und $\mathfrak{V}(X, Y) \cong \mathbb{A}^1$, d.h $\dim \mathfrak{V}(X, Y) = 1$.

Nach Bemerkung 2.2 ist also $\dim V = 2$.

(d) Es ist $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$, da Hyperfläche.

(e) Genauso ist $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$, da Hyperfläche.

Die Wünsche, die zu Beginn des Abschnitts geäußert wurden, sind also erfüllt.

3 Der Tangentialraum

Beispiel: (a) Wir betrachten die elliptische Kurve $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$ und $P = (0,0)$. Die Tangente an V in P ist die Y-Achse, also $\mathfrak{V}(X)$.

(b) Nun betrachten wir den Newton-Knoten $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$. Dann gibt es in $P = (0,0)$ zwei „Tangenten". Aber wie könnte der Tangentialraum aussehen?

(c) Jetzt die Neilsche Parabel: $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$. Dann ist die X-Achse „doppelte Tangente" in $P = (0,0)$, aber auch hier ist der Tangentialraum nicht intuitiv klar.

Erinnerung 3.1: Sei $f \in K[X_1,..., X_n]$ und $p = (p_1,..., p_n) \in K^n$. Dann haben wir die *Taylor-Entwicklung*

$$f = \sum_{\substack{\alpha=(k_1,...,k_n)\\ k_i \geq 0}} \frac{1}{(k_1 + \cdots + k_n)!} \frac{\partial^{k_1}}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial X_n} f(p)(X_1 - p_1)^{k_1} \cdots (X_n - p_n)^{k_n}.$$

Insbesondere gilt dann:

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot (X_i - p_i) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme vom Grad mindestens 2 sind, also in $\mathfrak{m}_p^2$, wobei

$$\mathfrak{m}_p := (X_1 - p_1,..., X_n - p_n).$$

Definition 3.2: Sei $p \in K$ mit $p = (p_1,..., p_n)$.

(a) Für $f \in K[X_1,..., X_n]$ sei

$$f_p^{(1)} := f^{(1)} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot X_i =: \mathcal{D}_p(f).$$

(b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät, $p \in V$ und $I := \mathfrak{I}(V)$. Seien zusätzlich

$$\mathcal{I}_p := \langle f_p^{(1)} \mid f \in I \rangle \text{ und } \mathcal{T}_p := \mathcal{T}_{V,p} := \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) \subseteq \mathbb{A}^n(K).$$

Dann heißt $\mathcal{T}_p$ *Tangentialraum an V in p*.

Beispiel 3.3: Seien $f = X^2 + Y^2 - 1$, $V = \mathfrak{V}(f)$, $I = (f)$ und $p = (a,b) \in V$. Dann ist

$$f_p^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial X}(p) \cdot X + \frac{\partial f}{\partial Y}(p) \cdot Y = 2aX + 2bY,$$

also $\mathcal{I}_p = \langle 2aX + 2bY \rangle$ und $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \{(x,y) \in K^2 \mid bY = -aX\}$, denn es gilt

$$(h \cdot f)_p^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (h \cdot f)}{\partial X_i}(p) \cdot X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial X_i}(p) \cdot f(p) \cdot X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot h(p) \cdot X_i = h(p) \cdot f_p^1,$$

denn $f(p) = 0$, da $p \in V$, und damit ist $\mathcal{I}_p$ auch nicht größer.

Bemerkung 3.4: (a) Die Taylor-Entwicklung liefert

$$f = f(p) + f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme in $\mathfrak{m}_p^2$ liegen.

(b) $\mathcal{D}_p(f+g) = (f+g)_p^{(1)} = f_p^{(1)} + g_p^{(1)} = \mathcal{D}_p(f) + \mathcal{D}_p(g)$
$\mathcal{D}_p(f \cdot g) = (f \cdot g)_p^{(1)} = f(p) \cdot g_p^{(1)} + g(p) \cdot f_p^{(1)} = f(p) \cdot \mathcal{D}_p(g) + g(p) \cdot \mathcal{D}_p(f)$, vgl. auch Beispiel 3.3.

(c) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät, $I = \mathfrak{J}(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ und $p \in V$. Dann ist

- $\mathcal{I}_p = \langle f_1^{(1)}, \dots, f_r^{(1)} \rangle$ analog zu Beispiel 3.3,
- $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{A}^n(K) = K^n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{V,p} &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(K) \mid \forall f \in I : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) \cdot x_j = 0\} \\ &= \operatorname{Kern} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}},\end{aligned}$$

also der Kern der Jacobi-Matrix.

Beispiel 3.5: Damit können wir jetzt ganz viele Tangentialräume bestimmen. Sei $p = (0, 0)$.

(a) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$, dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(2 \cdot 0 \cdot Y - 3 \cdot 0^2 \cdot X + 1 \cdot X) = \mathfrak{V}(X)$.

(b) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$, dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$.

(c) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$. Dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$.

(d) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2)$, dann ist

$$\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^3(K) \text{ und } \mathcal{T}_{V,(0,1,1)} = \mathfrak{V}(2Y - 2Z).$$

Bisher hängt unsere Definition von $\mathcal{T}_{V,p}$ von der Einbettung von V in den $\mathbb{A}^n(K)$ ab.

Bemerkung 3.6: Sei $\varphi\colon \mathbb{A}^n \supseteq V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$ ein Morphismus zwischen affinen Varietäten. Dann induziert φ in natürlicher Weise eine K-lineare Abbildung

$$\mathrm{d}_p\, \varphi\colon \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow \mathcal{T}_{W,\varphi(p)} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_{\varphi(p)}).$$

Beweis: Gegeben seien also $\varphi\colon V \longrightarrow W$, $I := \mathfrak{I}(V)$ und $J := \mathfrak{I}(W)$.
Dann wählen wir eine Fortsetzung $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ und

$$\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1,..., \widehat{\varphi}_m) \text{ mit } \widehat{\varphi}_i \in K[X_1,..., X_n].$$

So erhalten wir

$$\widehat{\varphi}^\sharp\colon K[Y_1,..., Y_m] \longrightarrow K[X_1,..., X_n]$$

mit $\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i) = \widehat{\varphi}_i$ und $\widehat{\varphi}^\sharp(J) \subseteq I$. Wir definieren den K-Algebrenhomomorphismus

$$\alpha\colon K[Y_1,..., Y_m] \longrightarrow K[X_1,..., X_n] \text{ durch } \alpha(Y_i) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i)) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_i) = \widehat{\varphi}_{i\,p}^{(1)}.$$

Nun genügt es $\alpha(\mathcal{I}_{\varphi(p)}) \subseteq \mathcal{I}_p$ zu zeigen, denn dann induziert α das gewünschte $\mathrm{d}_p\,\varphi$.
Seien also $g \in J$ und $\overline{g} := \mathcal{D}_p(g) \in \mathcal{I}_{\varphi(p)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\alpha(\overline{g}) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_j) = \sum_{i=1}^{n} X_i \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial X_i}(p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial (g \circ \widehat{\varphi})}{\partial X_i}(p) = \mathcal{D}_p(g \circ \widehat{\varphi}) \in \mathcal{I}_p,\end{aligned}$$

denn $g \circ \widehat{\varphi}$ liegt in I. □

Definition/Bemerkung 3.7: (a) Wir nennen $\mathcal{D} : \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ eine *Derivation an* p, wenn $\mathcal{D}$ K-linear ist und

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = g(p) \cdot \mathcal{D}(f) + f(p) \cdot \mathcal{D}(g).$$

(b) $\mathcal{D}$ ist bereits durch $\mathcal{D}|_{\mathfrak{m}_p}$ für das maximale Ideal $\mathfrak{m}_p = \{f \mid f(p) = 0\}$ festgelegt, denn für c konstant ist $\mathcal{D}(c) = 0$, also gilt, für beliebiges $f \in \mathcal{O}_{V,p}$, $\widetilde{f} := f - f(p)$ ist in $\mathfrak{m}_p$ und $\mathcal{D}(\widetilde{f}) = \mathcal{D}(f)$.

(c) Sei $f \in \mathfrak{m}_p^2$. Dann ist $\mathcal{D}(f) = 0$, denn wir können, ohne Einschränkung, $f = g \cdot h$ mit $g, h \in \mathfrak{m}_p$ wählen und sehen

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(gh) = g(p)\mathcal{D}(h) + h(p)\mathcal{D}(g) = 0,$$

da $g(p) = h(p) = 0$. $\mathcal{D}$ definiert also eine lineare Abbildung

$$\mathfrak{l}\colon\ \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K.$$

(d) Jedes solche $\mathfrak{l}$ kommt von einer Derivation her. Dazu definieren wir

$$\mathcal{D}(f_p) := \mathfrak{l}(f_p - f_p(p)).$$

Wir müssen also zeigen, dass $\mathcal{D}$ eine Derivation an p ist, also dass:

$$\mathcal{D}(f_p \cdot g_p) = f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p)$$

gilt. Dazu verwenden wir, dass $(f_p - f_p(p)) \cdot (g_p - g_p(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{l}\big((f_p - f_p(p))(g_p - g_p(p))\big) \\ &= \mathfrak{l}\big(f_p g_p - f_p(p)g_p(p) - f_p(p)g_p - g_p(p)f_p + 2f_p(p)g_p(p)\big) \end{aligned}$$

und sehen damit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}\big(f_p g_p - f_p(p)g_p(p)\big) &= \mathfrak{l}\big(f_p(p)g_p - f_p(p)g_p(p)\big) + \mathfrak{l}\big(g_p(p)f_p - f_p(p)g_p(p)\big) \\ &= f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p). \end{aligned}$$

Die Derivationen an p auf $\mathcal{O}_{V,p}$ können demnach mit dem Dualraum $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$ identifiziert werden. Wir erhalten so einen Isomorphismus von K-Vektorräumen. Genauer:
Proposition 3.8: (a) Jedes $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ definiert eine Derivation

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a \colon \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \cong K[X_1,\dots,X_n]_{\mathfrak{m}_p} &\longrightarrow K, \\ f &\longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot a_i = f_p^1(a) = \mathcal{D}_p(f)(a), \end{aligned}$$

dabei war $\mathfrak{m}_p = (X_1 - p_1,\dots,X_n - p_n)$ für $p = (p_1,\dots,p_n)$.

(b) Falls $a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$, steigt $\mathcal{D}_a$ zu einer Derivation $\tau_a \colon \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ ab, via des von der Einbettung $i \colon V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ induzierten Morphismus $i^\sharp \colon \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{V,p}$.

Beweis: (a) Die Derivationseigenschaft kommt von der entsprechenden Eigenschaft der $\frac{\partial}{\partial X_i}$.

(b) Ohne Einschränkung nehmen wir V als affin an. Zunächst gilt für alle $f \in \mathfrak{I}(V)$, dass $\mathcal{D}_a(f) = \mathcal{D}_p(f)(a) = 0$, da $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$ und $a \in \mathcal{T}_{V,p}$.
Sei nun $\left(\frac{f}{g}\right)_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$ mit $i^\sharp\big(\left(\frac{f}{g}\right)_p\big) = 0$, das heißt $g(p) \neq 0$ und $\frac{f}{g}$ ist 0 in $\mathcal{O}_{V,p}$, also gibt es ein h mit $h(p) \neq 0$, so dass $h \cdot f \in \mathfrak{I}(V)$. Insbesondere ist $\mathcal{D}_a(hf) = 0$ und $f(p) = 0$, da $0 = \big(hf\big)(p) = h(p)f(p)$. Damit gilt:

$$0 = \mathcal{D}_a(hf) = \mathcal{D}_a(h)f(p) + \mathcal{D}_a(f)h(p)$$

und da $h(p) \neq 0$, muss schon $\mathcal{D}_a(f) = 0$ gelten. Damit ist auch

$$\mathcal{D}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(p) \cdot \mathcal{D}_a(f) - f(p) \cdot \mathcal{D}_a(g)}{g(p)^2} = 0$$

und damit ist τ_a wohldefiniert. □

Definition/Proposition 3.9: Sei V eine affine Varietät und $p = (p_1,\dots,p_n) \in V$.

(a) $\mathcal{D}_a \colon \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ induziert einen Vektorraumhomomorphismus

$$\tau_a \colon \; \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K,$$

also ein Element $\tau_a \in \big(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\big)^\vee$.

(b) Die Abbildung

$$\alpha_p \colon \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow \Big(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\Big)^\vee, \quad a \longmapsto \tau_a$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis: (a) folgt sofort aus Definition/Bemerkung 3.7 (c) mit Proposition 3.8 (b).

(b) Wir definieren die Umkehrabbildung durch

$$\beta_p \colon \Big(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\Big)^\vee \longrightarrow \mathcal{T}_{V,p}, \quad \mathfrak{l} \longmapsto \big(\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}), \ldots, \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})\big).$$

Wir zeigen zuerst, dass β wohldefiniert ist, also $\beta_p(\mathfrak{l}) =: a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$. Sei dazu $f \in \mathfrak{I}(V)$, also $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} f_p^{(1)}(a) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i - p_i}) \\ &= \mathfrak{l}\left(\overline{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot (X_i - p_i)}\right) = \mathfrak{l}\big(\overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}\big). \end{aligned}$$

In Bemerkung 3.4 (a) hatten wir gesehen, dass

$$f - f(p) - (f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$$

liegt, wobei hier natürlich $f(p) = 0$ ist. In $K[V]$ ist damit sogar $f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) \in \mathfrak{m}_p^2$, also gilt

$$\text{in } \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2 \text{ ist } \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)} = 0,$$

also ist $f_p^{(1)}(a) = 0$ und damit ist $a \in \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p}$.

Um einzusehen, dass es sich wirklich um die Umkehrabbildung handelt, erinnern wir uns daran, dass, für $a = (a_1, \ldots, a_n)$,

$$\tau_a \colon \; \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2 \ni f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot a_i \in K$$

gilt. Damit erhalten wir für $\beta_p(\alpha_p(a))$:

$$\beta_p(\tau_a) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_1 - p_1})}{\partial X_i}(p) \cdot a_1, \ldots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_n - p_n})}{\partial X_i}(p) \cdot a_n\right)$$

und da $\frac{\partial(X_j - p_j)}{\partial X_i}$ genau dann 1, wenn $i = j$ und ansonsten 0 ist, ergibt das gerade wieder a.

Nun überlegen wir uns noch, dass $\mathfrak{l}$ durch

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = \alpha_p(\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}),..., \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})),$$

nach gleicher Argumentation wie oben, gerade auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(\mathfrak{l}(\overline{X_1 - p_1}),..., \mathfrak{l}(\overline{X_n - p_n})) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i - p_i}) \\ &= \mathfrak{l}(\overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}), \end{aligned}$$

geschickt wird. In $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ ist aber, wie oben gesehen,

$$\overline{f} = \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}$$

und damit gilt tatsächlich

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = \big(f \longmapsto \mathfrak{l}(f)\big) = \mathfrak{l},$$

β_p ist also, wie behauptet, die Umkehrabbildung.

Somit sind die Vektorräume isomorph. □

Definition/Bemerkung 3.10: Sei V eine quasi-projektive Varietät, $p \in V$.

(a) $\left(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\right)^\vee$ heißt *(Zariski-)Tangentialraum.*

(b) Der Punkt p heißt *regulär* (bzw. *nicht-singulär*), wenn $\dim \mathcal{T}_{V,p} = \dim_p V$ ist. Andernfalls heißt p *singulär.*

(c) Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ eine offene und affine Umgebung von p in V und $\mathfrak{I}(U) = \langle f_1,..., f_n\rangle$. Dann gilt

$$p \text{ ist regulär} \iff \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X)\right)_{\substack{i=1,...,r\\ j=1,...,n}} = n - \dim_p V,$$

denn nach Bemerkung 3.4 (c) ist $\mathcal{T}_{V,p}$ gerade der Kern dieser Matrix.

Diese Äquivalenz nennt man das *Jacobi-Kriterium.*

Beispiel 3.11: (a) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$. Dann ist $\dim V = \dim_p V$ für alle Punkte $v \in V$. Für die Jacobi-Matrix gilt:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

und nach Definition/Bemerkung 3.10 (c) ist p genau dann regulär, wenn

$$\operatorname{Rang} \mathcal{J} = 3 - 2 = 1$$

gilt. Also ist $p = (0, 0, 0)$ der einzige singuläre Punkt.

(b) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 - Y^2) = \mathfrak{V}((X-Y)(X+Y)) \subseteq \mathbb{A}^3$. Anschaulich sind das zwei Ebenen, die senkrecht aufeinander stehen. Ihr Schnitt ist die Z-Achse. Analog zu (a) finden wir

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und demnach ist hier p genau dann singulär, wenn $p = (0,0,z)$ mit $z \in K$, also ist die Menge der singulären Punkte gerade die Z-Achse.

(c) Sei $V = \mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, also $\deg f \geq 1$. Dann ist

$$\mathcal{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) \end{pmatrix}$$

und p ist genau dann regulär, wenn $\operatorname{Rang} \mathcal{J} = n - (n-1) = 1$, d.h.

$$p \text{ ist singulär} \iff \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0.$$

4 Der singuläre Ort einer Varietät

Definition 4.1: Sei W quasi-projektive Varietät. Dann heißt

$$\operatorname{Sing} W = \{p \in W \mid p \text{ singulär}\}$$

der *singuläre Ort*.

$$\operatorname{Reg} W = \{p \in W \mid p \text{ regulär}\} = W \setminus \operatorname{Sing} W$$

heißt *regulärer Ort*.

Wenn $\operatorname{Sing} W$ leer ist, nennen wir W *regulär* oder *nicht-singulär*.

Definition/Bemerkung 4.2: (a) Ein noetherscher, lokaler Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ heißt *regulär*, wenn $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$. Dabei ist $k = R/\mathfrak{m}$.

(b) Sei W quasi-projektive Varietät, $p \in W$. Dann gilt:

$$p \text{ ist regulär} \iff \mathcal{O}_{W,p} \text{ ist regulär.}$$

Lemma 4.3: Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler, noetherscher Ring.

(a) Ist R regulär, so ist R auch nullteilerfrei.

(b) Es gilt: $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$

Beweis: siehe Lemma 5.4 und Proposition 5.5. □

Satz 6: *Sei W eine quasi-projektive Varietät.*

(a) *Ist* $p \in W$, *so ist* $\dim \mathcal{T}_{W,p} \geq \dim_p W$ *und* $\operatorname{Rang} \mathcal{J}_p \leq n - \dim_p W$, *wobei* $\mathcal{J}_p$ *die Jacobi-Matrix zu* V *in* p *ist und* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *eine offene, affine Umgebung von* p *ist.*

(b) *Sind* $W_1 \neq W_2$ *irreduzible Komponenten von* W, $p \in W_1 \cap W_2$, *dann ist* p *singulär.*

(c) $\operatorname{Sing} W$ *ist abgeschlossen.*

(d) *Es ist* $\operatorname{Sing} W \neq W$.

Beweis: (a) folgt aus Lemma 4.3 (b) sowie $\mathcal{T}_{W,p} \cong \operatorname{Kern} \mathcal{J}_p$.

(b) Da wir eine lokale Eigenschaft untersuchen, können wir ohne Einschränkung W als affin annehmen. Sei nun $p \in W_1 \cap W_2$.

Dann ist $\mathfrak{m}_p^W \supseteq \mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$ in $K[W]$.

Sind W_1, W_2 irreduzible Komponenten, so sind $\mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$ minimale Primideale. Folglich sind die Bilder von $\mathfrak{I}(W_1)$ und $\mathfrak{I}(W_2)$ minimale Primideale in $\mathcal{O}_{W,p}$ bzw. $K[W]_{\mathfrak{m}_p^W}$ und verschieden (vgl. Aufgabe 2, Übungsblatt 6).

Damit ist (0) kein Primideal in $\mathcal{O}_{W,p}$. Also ist $\mathcal{O}_{W,p}$ nicht nullteilerfrei und nach Lemma 4.3 (a) ist $\mathcal{O}_{W,p}$ nicht regulär.

(c) Sei $W = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Ist $p \in W_i$ und $p \notin W_j$ für $j \neq i$, so ist p genau dann singulär in W, wenn p singulär in $W \cap W_i$ ist.

Denn: Ist $p \in W_i \cap W_j$ $(i \neq j)$, so ist $p \in \operatorname{Sing} W$ und damit

$$\operatorname{Sing} W = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Sing} W_i \cup \bigcup_{j \neq i} (W_i \cap W_j).$$

Da $\bigcup_{j \neq i} (W_i \cap W_j)$ abgeschlossen ist, genügt es die Aussage für irreduzible Varietäten zu zeigen.

Sei also W irreduzibel und affin. Dann gilt:

$$\operatorname{Sing} W = \{p \in W \mid \operatorname{Rang} \mathcal{J}_p < n - \dim W\} = \{p \in W \mid \det M_p = 0 \; \forall M_p\},$$

wobei die M_p die $(n - \dim W) \times (n - \dim W)$-Minoren von $\mathcal{J}_p$ sind. Diese Menge ist abgeschlossen.

(d) Ist $W = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten und $\operatorname{Reg} W_i$ nicht leer, so ist $\operatorname{Reg} W_i$ dicht in W_i.

Also gibt es $p \in W_i$, so dass $p \notin W_j$, für alle $i \neq j$. Damit ist $p \in \operatorname{Reg} W$ und man kann ohne Einschränkung annehmen, dass W irreduzibel ist.

Sei jetzt also $V = W$ affin und irreduzibel. Betrachte zuerst den Spezialfall, dass $W = V = \mathfrak{V}(f)$ eine Hyperfläche ist, wobei $f \in K[X_1,..., X_n]$ quadratfrei sein soll.

Nach Beispiel 3.11 gilt:

$$\operatorname{Sing} V = \left\{ p \in V \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0 \right\}$$

Wäre $\operatorname{Sing} V = V$, dann wäre $\frac{\partial f}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}(V) = \langle f \rangle$ für $i = 1,...,n$.

Hat K Charakteristik 0, so muss f bereits konstant sein.

Hat K Charakteristik p, so muss jeder Exponent, der auftritt, bereits durch p teilbar sein. Also ist $f = g^p$ für ein $g \in K[X_1,...,X_n]$, was im Widerspruch zur Quadratfreiheit von f steht.

Nun der allgemeine Fall:

Nach Lemma 4.4 gibt es eine offene, dichte Teilmenge $U \subseteq V$, die via φ isomorph zu einer offenen, dichten Teilmenge U' in einer Hyperfläche $\mathfrak{V}(f)$ ist.

Nach dem Spezialfall ist $\operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f) \neq \varnothing$. Damit ist $U' \cap \operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f) \neq \varnothing$, da U' dicht ist und $\operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f)$ offen ist. Sei $p' \in U' \cap \operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f)$.

Dann ist p' regulär, d.h. $\mathcal{O}_{U',p'}$ ist regulär. Also ist auch $\varphi(p') \in U$ regulär, da $\mathcal{O}_{U,p}$ regulär ist. □

LEMMA 4.4: Jede irreduzible quasi-projektive Varietät W von Dimension d ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche im $\mathbb{A}^{d+1}(K)$.

ERINNERUNG: (a) Sei A eine nullteilerfreie, endlich erzeugte K-Algebra.

- Die Noethernormalisierung impliziert, dass A ganz über dem Polynomring $K[X_1,...,X_d]$ ist.
- Die Dimension bleibt unter ganzen Ringerweiterungen erhalten. Also gilt $d = \dim A$ und der Transzendenzgrad von $\operatorname{Quot} A/K = d = \dim A$.

  Damit gilt für eine irreduzible Varietät V die Formel $\operatorname{trdeg} K(V) = \dim V$.

(b) Sei $L/K(X_1,...,X_d)$ endliche Körpererweiterung, $E := K(X_1,...,X_d)$.

Hat K Charakteristik 0, so ist L/K separabel, d.h. $L = E(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$ nach dem Satz vom primitiven Element.

Hat K Charakteristik p, so impliziert die algebraische Abgeschlossenheit von K, dass L/K separabel erzeugt ist, d.h. es gibt eine Transzendenzbasis $\{\widetilde{X_1},...,\widetilde{X_d}\}$, so dass $L/K(\widetilde{X_1},...,\widetilde{X_d})$ separabel ist (siehe Bosch, Abschnitt 7.3, Satz 7).

Im Folgenden sei eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft gewählt.

Beweis von Lemma 4.4: Seien $L = K(W)$ und $\{X_1,...,X_d\}$ eine Transzendenzbasis wie in (b). Also gibt es ein primitives Element $y \in L = K(W)$ von $L/K(X_1,...,X_d)$, d.h.

$$L = K(X_1,...,X_d,y) = K(X_1,...,X_d)[y].$$

Sei $p(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \cdots + a_0$ das Minimalpolynom von y über $K(X_1,..., X_d)$ und $a_0 =: \frac{f_i}{g_i}$ mit $f_i, g_i \in K[X_1,..., X_d]$.

Dann setzen wir $g := \operatorname{kgV}(g_0,..., g_{n-1})$ und damit

$$h := gY^n + ga_{n-1}Y^{n-1} + \cdots + ga_0 \in K[X_1,..., X_d, Y],$$

denn die ga_i sind bereits in $K[X_1,..., X_d]$.

Nun definieren wir $H := \mathfrak{V}(h) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$ und sehen, dass

$$K(H) = \operatorname{Quot}\left(K[X_1,..., X_d, Y]\big/(h)\right) = L = K(W).$$

Also gibt es, nach Satz 4 und Definition/Bemerkung 5.6 (c), eine birationale Abbildung $H \dashrightarrow W$. □

5 Reguläre Ringe und Krullscher Höhensatz

Ziel: *Sei* $I = (f_1,..., f_k)$, $\operatorname{ht} I := \{\inf \operatorname{ht} \wp \mid \wp \supseteq I, \wp$ *ist Primideal*$\}$.
Was kann man über $\operatorname{ht} I$ *sagen?*

Bemerkung: Ein Primideal $\wp$ heißt *minimales Primoberideal* von einem Ideal I, wenn $\wp \supseteq I$ und $\wp$ minimal mit dieser Eigenschaft ist.

Zorns Lemma zeigt, dass es zu jedem $x \in R \setminus R^\times$ ein minimales Primoberideal von (x) gibt.

(a) (Krullsches Hauptideallemma, vgl. Brodmann III.10.15)
Ist R ein noetherscher Ring, $x \in R \setminus R^\times$ und $\wp$ ein minimales Primoberideal von (x), dann gilt $\operatorname{ht} \wp \leq 1$.

(b) Jeder noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale (vgl. auch Satz 1, Brodmann II, 9.17 (iii)).

(c) (Primidealvermeidungslemma, vgl. Brodmann III.11.10)
Sind $\wp_1,..., \wp_n$ Primideale in R und I, J Ideale, mit $I \nsubseteq \wp_i$ und $I \nsubseteq J$, dann gilt auch $I \nsubseteq J \cup \wp_1 \cdots \cup \wp_n$.

Lemma 5.1: Sei R noethersch, $q \in \operatorname{Spec} R$, $x \in q$, $\operatorname{ht} q \geq l \geq 1$. Dann existiert eine Primidealkette

$$x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} = q.$$

Beweis: Wir machen vollständige Induktion über l:

Für $l = 1$ wählen wir $\wp'_0 = q$.

Sei nun $l \geq 2$. Da $\operatorname{ht} q \geq l$ gilt, gibt es eine Primidealkette $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := q$. Ist $x \in \wp_{l-1}$, so kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält die Behauptung.

Ab jetzt sei also $x \notin \wp_{l-1}$. Dann ist $I := (x) + \wp_{l-2} \subseteq q$. Sei s ein minimales Primoberideal von I mit $I \subseteq s \subseteq q$.

Es gilt $\wp_{l-2} \subsetneq \wp_{l-1} \subsetneq q$, also $\overline{0} \subsetneq \overline{\wp_{l-1}} \subsetneq \overline{q}$ in $R/\wp_{l-2}$ und damit ist $\operatorname{ht} \overline{q} \geq 2$, und somit ist, nach dem Krullschen Hauptideallemma, $\overline{q}$ *kein* minimales Oberprimideal von $(\overline{x})$. Damit ist aber auch q kein minimales Primoberideal von $(x)+\wp_{l-2} = I$, also ist $s \neq q$.

Nun können wir also die Induktionsvoraussetzung auf s anwenden, es gibt somit eine Primidealkette $x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-2}$ in s. Wenn wir diese durch q um 1 verlängern, sind wir fertig. □

KOROLLAR 5.2: Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler, noetherscher Ring und $x \in \mathfrak{m}$. Dann ist

$$\dim R/(x) \geq \dim R - 1.$$

Vermeidet x die Primideale $\wp_i$ von R, d.h gilt $x \notin \wp_i$ für alle minimalen Primoberideale $\wp_i$, dann gilt $\dim R/(x) = R - 1$.

PROPOSITION 5.3: (Krullscher Höhensatz) Sei R ein noetherscher Ring, $I = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ ein echtes Ideal in R. Dann gilt: $\operatorname{ht} \wp \leq k$ für jedes minimale Primoberideal von I. Insbesondere ist $\operatorname{ht} I \leq k$.

Beweis: Wir machen Induktion über k:

Der Fall $k = 1$ folgt aus dem Krullschen Hauptideallemma.

Sei also $k \geq 2$: Sei $\wp$ ein minimales Primoberideal von I und $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := \wp$ eine Primidealkette.

Nach Lemma 5.1 finden wir eine Primidealkette mit $x_k \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} := \wp$. In $R/(x_k)$ gilt nun $\overline{\wp'_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\wp'_{l-1}} = \overline{\wp}$ und $\overline{\wp}$ ist ein minimales Primoberideal von $I = \langle \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{k-1}} \rangle$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun:

$$l - 1 \leq \operatorname{ht} \overline{\wp} \leq k - 1.$$

Also ist $l \leq k$ und das zeigt die Behauptung. □

LEMMA 5.4: Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring und $k = R/\mathfrak{m}$.

(a) Für $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{m}$ gilt:

$\{m_1, \ldots, m_n\}$ ist minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ $\iff$ $\{\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}\}$ ist Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(b) Alle minimalen Erzeugendensysteme von $\mathfrak{m}$ haben dieselbe Anzahl: $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(c) Es ist $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$.

Beweis: (a) Sei zuerst $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle = \mathfrak{m}$. Betrachte die Projektionen

$$\pi_1 \colon R \longrightarrow k = R/\mathfrak{m}\,, \quad \pi_2 \colon \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\,.$$

Dann ist $\overline{rm_1} := \pi_1(r)\pi_2(\mathfrak{m})$ wohldefiniert und $\{\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Da $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein k-Vektorraum ist, ist $\{\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}\}$ also – wie gewünscht – eine Basis.

Sei jetzt $\langle \overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n} \rangle = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Definiere $N = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$. Dann ist $\mathfrak{m} = N + \mathfrak{m}^2$ und damit $N = \mathfrak{m}$ nach dem Nakayama-Lemma aus Algebra 2.

(b) folgt aus (a).

(c) Da R lokal ist, folgt $\dim R = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$. Außerdem folgt, mit Proposition 5.3 und (b),

$$\operatorname{ht} \mathfrak{m} \leq |\{\text{minimales Erzeugendensystem von } \mathfrak{m}\}| = \dim_k {}^{\mathfrak{m}}/_{\mathfrak{m}^2}. \qquad \square$$

Proposition 5.5: Ist $(R, \mathfrak{m})$ regulär, so ist R auch nullteilerfrei.

Beweis: Erinnerung aus Definition/Bemerkung 4.2:

$$\begin{aligned}(R, \mathfrak{m}) \text{ ist regulär} &\iff \dim_k {}^{\mathfrak{m}}/_{\mathfrak{m}^2} = \dim R \\ &\iff \mathfrak{m} \text{ kann durch } \dim R \text{ viele Elemente erzeugt werden.}\end{aligned}$$

Wir beweisen die Aussage nun via Induktion über $d := \dim R = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Ist $d = 0$, so kann $\mathfrak{m}$ von 0 Elementen erzeugt werden, d.h. $\mathfrak{m} = \{0\}$ und damit ist R ein Körper.

Sei nun $d \geq 1$ und $\wp_1,..., \wp_r$ die minimalen Primideale von R (das sind nur endlich viele, vgl. die Bemerkung zu Beginn des Abschnitts.)

Da $\dim R = d > 0$ ist, kann $\mathfrak{m}$ nicht minimal sein. Also ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \wp_i$ für alle $i = 1,..., r$. Außerdem gilt: $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$, da $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 > 0$.

Mit dem Primidealvermeidungslemma ist folglich $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cup \cdots \cup \wp_r$.

Wähle nun $x \in \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cdots \cup \wp_r)$ und ergänze $\overline{x}$ zu einer Basis $\{\overline{x}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_d}\}$ von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

$\pi\colon R \longrightarrow R/(x)$ bezeichne die kanonische Projektion. Nach Korollar 5.2 gilt

$$\dim {}^{R}\Big/_{(x)} = d - 1.$$

Ferner gilt für das maximale Ideal $\pi(\mathfrak{m})$ in $R/(x)$, nach Lemma 5.4,

$$\dim_k {}^{\pi(\mathfrak{m})}\Big/_{\pi(\mathfrak{m})^2} \leq |\{\text{ Erzeuger von } \pi(\mathfrak{m})\}| \leq d - 1.$$

Auch ist $\dim_k \pi(\mathfrak{m})/\pi(\mathfrak{m})^2 \geq \dim R/(x)$, wieder nach Lemma 5.4.

Also gilt oben Gleichheit, d.h. $R/(x)$ ist regulär. Nach Induktionsvorrausetzung ist damit $R/(x)$ nullteilerfrei, d.h. (x) ist Primideal in R.

Damit gibt es ein $\wp_i$ mit $(x) \supsetneq \wp_i$. Sei nun $b \in \wp_i$. Also ist $b = a \cdot x$ mit $a \in R$. Da $\wp_i$ Primideal und $x \notin \wp_i$ ist, muss $a \in \wp_i$ gelten. Also ist

$$\wp_i = \wp_i x \text{ und damit } \wp_i = \wp_i \mathfrak{m}.$$

Nun liefert das Nakayama-Lemma $\wp_i = 0$, d.h R ist nullteilerfrei. $\square$