

§ 15 Integralsatz von Stokes

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^2$, B kompakt, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq D$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Das heißt: $\varphi|_B$ ist eine Fläche mit Parameterbereich B , $S := \varphi(B)$

Definition

Definiere die folgenden **Oberflächenintegrale**:

(1) Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann:

$$\int_{\varphi} f d\sigma := \int_B f(\varphi(u, v)) \|N(u, v)\| d(u, v)$$

(2) Sei $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig. Dann:

$$\int_{\varphi} F \cdot n d\sigma := \int_B F(\varphi(u, v)) \cdot N(u, v) d(u, v)$$

Beispiel

Seien D, B, f, φ wie im letzten Beispiel in Kapitel 14.

Sei $F(x, y, z) := (x, y, z)$; bekannt: $N(u, v) = (-2u, -2v, 1)$. Dann:

$$\begin{aligned} F(\varphi(u, v)) \cdot N(u, v) &= F(u, v, u^2 + v^2) \cdot (-2u, -2v, 1) \\ &= (u, v, u^2 + v^2) \cdot (-2u, -2v, 1) \\ &= -(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

Also:

$$\int_{\varphi} F \cdot n d\sigma = - \int_B (u^2 + v^2) d(u, v) = -\frac{\pi}{2}$$

Satz 15.1 (Integralsatz von Stokes)

Es sei B zulässig, $\partial B = \Gamma_{\gamma}$, wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ wie zu Beginn des Paragraphen 13 ist. Es sei $\varphi \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$. Weiter sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S \subseteq G$ und $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$. Dann:

$$\underbrace{\int_{\varphi} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma}_{\text{Oberflächenint.}} = \underbrace{\int_{\varphi \circ \gamma} F(x, y, z) \cdot d(x, y, z)}_{\text{Wegint.}}$$

Beispiel

D, B, f, F und φ seien wie in obigem Beispiel. Hier: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ($t \in [0, 2\pi]$). Dann: $(\varphi \circ \gamma)(t) = \varphi(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, 1)$ ($t \in [0, 2\pi]$).

15. Integralsatz von Stokes

Es ist $\operatorname{rot} F = 0$, also: $\int_{\varphi} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = 0$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \circ \gamma} F(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} F((\varphi \circ \gamma)(t)) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)}_{=0} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Beweis

Sei $\varphi := \varphi \circ \gamma$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, also $\varphi_j = \varphi_j \circ \gamma$ ($j = 1, 2, 3$).

Zu zeigen:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma &= \int_{\varphi} F(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^3 F_j(\varphi(t)) \varphi_j'(t) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t)) \varphi_j'(t) dt \end{aligned}$$

Es ist $\int_{\varphi} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \int_B \underbrace{(\operatorname{rot} F)(\varphi(x, y)) \cdot (\varphi_x(x, y) \times \varphi_y(x, y))}_{=: g(x, y)} d(x, y)$. Für $j = 1, 2, 3$:

$$h_j(x, y) := \left(\underbrace{F_j(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x, y)}_{=: u_j(x, y)}, \underbrace{-F_j(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x, y)}_{=: v_j(x, y)} \right) \quad ((x, y) \in D)$$

$h_j = (u_j, v_j)$; $F \in C^1$, $\varphi \in C^2$, damit folgt: $h_j \in C^1$

Nachrechnen: $g = \operatorname{div} h_1 + \operatorname{div} h_2 + \operatorname{div} h_3$

Damit:

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma &= \sum_{j=1}^3 \int_B \operatorname{div} h_j(x, y) d(x, y) \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma} (u_j dy - v_j dx) \\ &= \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t)) \varphi_j'(t) dt \end{aligned}$$

■