7 Übung vom 09.06.

21. Aufgabe

Musterlösung online.

22. Aufgabe

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{Gauß}}{\sim>} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -13 & 0 & -12 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{37}{5} & 0 & \frac{29}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Also ist x^0 Ecke.

Wir lösen:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \tilde{f}(x) = -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 6x_5 & = & \min \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & \frac{37}{5} & 0 & \frac{29}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0 \end{array}}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	-13	0	-12	1
0	1	$\frac{37}{5}$	0	$\frac{29}{5}$	$\frac{7}{5}$
0	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$
0	0	-10	0	-21	11
1	$\frac{60}{29}$	$\frac{67}{29}$	0	0	$\frac{113}{29}$
0	$\frac{5}{29}$	$\frac{37}{29}$	0	1	$\frac{7}{29}$
0	$\frac{8}{29}$	$\frac{36}{29}$	1	0	$\frac{17}{29}$
0	$\frac{105}{29}$	$\frac{487}{29}$	0	0	$\frac{466}{29}$

Also ist $x^1 = (\frac{113}{29}, 0, 0, \frac{17}{29}, \frac{7}{29})$ Lösung mit $f(x^1) = \frac{466}{29}$.

23. Aufgabe

Phase I: Wir lösen

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g(x,y) = y_1 + y_2 + y_3 & = & \min \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_1 & = & 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + y_2 & = & 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + y_3 & = & 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	0	-1	2	1	1	0
0	1	0	3	-2	2	3	9
0	0	1	2	-1	1	-1	6
0	0	0	-4	1	-4	-3	-15
1	0	0	-1	2	1	1	0
-2	1	0	$\boxed{5}$	-6	0	1	9
-1	0	1	3	-3	0	-2	6
4	0	0	-8	9	0	1	-15
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$
$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	$\boxed{\frac{3}{5}}$	0	$-\frac{13}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{13}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	0	0	1	$\frac{14}{3}$	1
0	-1	2	1	0	0	-5	3
$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{13}{3}$	1
1	1	1	0	0	0	0	0

$x^0 = (3, 1, 1, 0)$ ist Ecke.

Phase II:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x) = 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 & = & \min \\ x_3 + \frac{14}{3}x_4 & = & 1 \\ x_1 - 5x_4 & = & 3 \\ x_2 - \frac{13}{3}x_4 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	1	$\frac{14}{3}$	1
1	0	0	-5	3
0	1	0	$-\frac{13}{3}$	1
0	0	0	$\frac{97}{3}$	-7

Damit ist x^0 Lösung.

24. Aufgabe

a) Wie in Aufgabe 20(a) zeigt man:
Wenn (x,y) Ecke von M' ist, dann ist x Ecke von M.

Sei $b_1 = \max\limits_{i=1,\dots,n} b_i$.

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & \dots & x_n & y_1 & & \dots & & y_m & \\
\hline
a_{11} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\
\vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & b_m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & \dots & x_n & y_1 & & \dots & & y_m & \\
\hline
a_{11} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\
a_{11}-a_{21} & \cdots & a_{1n}-a_{2n} & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1-b_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
a_{11}-a_{m1} & \dots & a_{1n}-a_{mn} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_1-b_m
\end{array}
$$

Idee wie bei 2-Phasen-Methode: Wir betrachten

$$
\boxed{
\begin{array}{rcl}
g(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,z) = z & = & \min \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11}-a_{21} & \dots & a_{1n}-a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}-a_{m1} & \dots & a_{1n}-a_{mn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
- \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}
+ \begin{pmatrix} z \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}
& = &
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1-b_2 \\ \vdots \\ b_1-b_m \end{pmatrix} \\
x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,z & \geq & 0
\end{array}
}
$$

Dieses LP ist lösbar, da

$$(x_1,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m,z) = (0,\dots,0,0,b_1-b_2,\dots,b_1-b_m,b_1)$$

im zulässigen Bereich liegt und g auf dem zulässigen Bereich nach unten beschränkt ist.

1. Fall: Das Minimum ist echt größer als Null.
$\Rightarrow M' = \varnothing \;\Rightarrow M = \varnothing$
$\Rightarrow$ ursprüngliches Problem nicht lösbar

2. Fall: Das Minimum is gleich 0, d.h. es gibt eine Ecke der Form

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \underbrace{0}_{z})$$

Dann ist $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ Ecke von M' und $(x_1, \ldots, x_n)$ Ecke von M.

b)

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
2	1	1	-1	0	0	4
1	2	1	0	-1	0	5
3	2	2	0	0	-1	6

$\sim>$

[Beachte: $b_3 = \max\limits_{i=1,2,3} b_i$!]

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z	
1	1	1	1	0	-1	0	2
2	0	$\boxed{1}$	0	1	-1	0	1
3	2	2	0	0	-1	1	6
-3	-2	-2	0	0	1	0	-6
-1	$\boxed{1}$	0	1	-1	0	0	1
2	0	1	0	1	-1	0	1
-1	2	0	0	-2	1	1	4
1	-2	0	0	2	-1	0	-4
-1	1	0	1	-1	0	0	1
2	0	1	0	1	-1	0	1
1	0	0	-2	0	$\boxed{1}$	1	2
-1	0	0	2	0	-1	0	-2
-1	1	0	1	-1	0	0	1
3	0	1	-2	1	0	1	3
1	0	0	-2	0	1	1	2
0	0	0	0	0	0	1	0

$\Rightarrow x^0 = (0, 1, \mathbf{3})$ ist Ecke unseres zuläsigen Bereichs.

`Anmerkung:` Korrigierte Tableaus! (Tableaus aus der Übung falsch!)