

# Kapitel 2

## Hilberträume

(Weidmann: Lin Op auf HR, Band I)

### 2.1 Grundlegende Eigenschaften

**Definition 2.1** Ein *Skalarprodukt*  $(x|y)$  auf einem VR  $X$  ist eine Abbildung von  $X^2$  nach  $\mathbb{K}$  mit

1.  $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$

2.  $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$

3.  $(x|y) = \overline{(y|x)}$

(a) - c) *Sesquilinearform*)

d)  $(x|x) \geq 0$ ,  $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (*positiv definit*)

für alle  $x_1, x_2, x, y \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Wir setzen  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

**Bemerkung 2.2** 1. Aus a) - c) folgen  $(x, 0) = 0$  und  $(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} (x|y_1) + \overline{\alpha_2} (x|y_2)$  für alle  $x, y_1, y_2 \in X$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ .

2. Für  $x, y \in X$  gilt die Cauchy-Schwarze Ungl. (CS)  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x = \alpha y$  für ein  $\alpha \in \mathbb{K}$ . (Bew: LA, Werner V, 1.2)

3.  $\|\cdot\|$  ist eine Norm auf  $X$ , denn:

(i)  $\|\alpha x\| = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} (x|x)} = |\alpha| \|x\|$

(ii)  $\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + (x|y) + (y|x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}(x|y)}_{\leq 2\|x\|\|y\|} + \|y\|^2 \stackrel{CS}{(2.1)} \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

(iii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4. *Beh:* Das Skalarprodukt ist stetig.

*Bew:* Seien  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ . Dann:

$$\begin{aligned} |(x_1 - x_2|y_1 - y_2)| &\leq |(x_1 - x_2|y)| + |(x_2|y_1 - y_2)| \\ &\stackrel{CS}{\leq} \|x_1 - x_2\| \|y_1\| + \|x_2\| \|y_1 - y_2\| \quad (\Rightarrow \text{lokal Lipschitz}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Definition 2.3** Sei  $(\cdot|\cdot)$  ein Skalarprodukt auf  $X$ . Dann heißt  $(X, \|\cdot\|)$  ein **Prä Hilbertraum**. Wenn  $\|\cdot\|$  vollständig ist, so heißt  $(X, \|\cdot\|)$  **Hilbertraum (HR)** (mit  $\|\cdot\|$  aus Def 2.1)

**Beispiel 2.4** In a)-d) werden HR def.

1.  $X = \mathbb{K}^n$ ,  $(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$
2.  $X = \ell^2$ ,  $(x|y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$  (Summe konv absolut nach Hölder mit  $p = 2$ .  
 $\|x\| = \|x\|_2$ )
3. Sei  $A \in \mathcal{L}_d$ ,  $X = L^2(A)$   $(f|g) = \int_A f(x) \overline{g(x)} dx$  (ex nach Hölder mit  $p = p' = 2$ ).  
 $\|f\| = \|f\|_2$ .
4. Sei  $S$  eine Menge. Setze  $\ell^2(S) = \{f : S \Rightarrow \mathbb{K}, f(s_j) \neq 0 \text{ nur für höchstens abzählbar viele } s_j \in S \text{ (abh von } f) \text{ mit } \sum_{s \in S} |f(s)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |f(s_j)|^2 < \infty\}$   
Wie bei  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$  sieht man, dann  $(f|g) = \sum_{s \in S} f(s) \overline{g(s)}$  ein Skalarprodukt ist und  $\|f\|^2 := \sum_{s \in S} |f(s)|^2$  ist vollständig.
5. Teilräume von Prä HR sind Prä HR mit gleichem Skalarprodukt.

-1

**Lemma 2.6** Ein nVR  $X$  ist ein Prä HR genau dann, wenn  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$  (2.2) (Parallelogrammgl) für  $x, y \in X$  gilt.

**Beweis**  $\hat{A} \hat{A}' \quad \|x + y\|^2 \stackrel{2.1}{=} \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2. \quad \|x - y\|^2 \stackrel{2.1}{=} \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2 \Rightarrow (2.2)$

“ $\hat{A} \hat{A}'$ “ siehe Werner, V, 1.6 ■

**Korollar 2.7** Die Vervollständigung eines Prä HR  $X$  ist ein HR.

**Beweis** (2.2) gilt auf  $X$  und somit auch auf  $\tilde{X}$  per Approximation. ■

**Definition 2.8** Zwei Elementen  $x, y$  eines PräHR  $X$  heißen **orthogonal**, wenn  $(x|y) = 0$ . Zwei TM  $A, B$  heißen **orthogonal**, wenn  $(a|b) = 0 \forall a \in A, b \in B$ . Man schreibt  $x \perp y$  bzw  $A \perp B$ . Das orthogonale Komplement  $A^\perp$  von  $A \subseteq X$  ist gegeben durch  $A^\perp = \{x \in X : x \perp a \forall a \in A\}$ .

Ein **Orthogonalsystem (ONS)** ist eine TM  $S \subseteq X$  mit  $\|b\| = 1$  und  $b \perp b'$  für alle  $b, b' \in S, b \neq b'$

**Bemerkung 2.9** Sei  $X$  ein PräHR,  $x, y \in X, A, B \subseteq X$ . Dann gelten:

1.  $x \perp x \Rightarrow x = 0, x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$ .
2. Pythagoras:  $x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 \stackrel{(2.1)}{=} \|x\|^2 + \|y\|^2$
3.  $X^\perp = \{0\}, A \cap A^\perp = \{0\}. A \subseteq (A^\perp)^\perp$  nach a),  $\{0\}^\perp = X$ .
4.  $A^\perp$  ist UVR (klar) und abg  $(x_n \perp a, x_n \rightarrow x \Rightarrow (x|a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n|a) = 0)$
5.  $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp. A^\perp = (\overline{\lim A})^\perp$  (wie d))
6.  $(x|y) = (z, y) \forall y \in X \Rightarrow (x - z) \perp X \stackrel{a)}{\Rightarrow} x = z$

**Theorem 2.10 (Projektionssatz)** Sei  $X$  ein HR,  $K \subseteq X$  abg + konvex. Dann ex für jedes  $x \in X$  genau ein  $y_* = P_K(x) \in K$  mit  $\|x - P_K(x)\| = \inf_{y \in K} \|x - y\| = d(x, K)$ . Wenn  $x \in K$ , dann gilt  $P_K(x) = x$  (mit  $d(x, K)$ ), und  $P_K \circ P_K = P_K, R(P_K) = K$

**Beweis**  $R(p_k) = K$  : klar.

Wenn  $x \neq 0$ , so können wir  $\tilde{x} = 0$  und  $\tilde{K} = K - x$  betrachten. Sei also  $x = 0 \notin K$ . Dann ex  $y_n \in K$  mit  $\|y_n\| \rightarrow \kappa := \inf\{\|y\|, y \in K\}$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $\kappa > 0$ , da  $K$  abg.

$$2.2 \Rightarrow \|\frac{1}{2}(y_n - y_m)\|^2 = \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \underbrace{\|\frac{1}{2}(y_n + y_m)\|}_{\in K} \leq \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \kappa^2 \rightarrow$$

0 ( $n, m \rightarrow \infty$ )

$\Rightarrow \exists y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in K, K$  abg. Ferner  $\|y^*\| = \kappa$ .

Sei  $y_0 \in K, y_* \neq y_0, \|y_0\| = \kappa. \Rightarrow \|\frac{1}{2}(y_0 - y_*)\|^2 < \|\frac{1}{2}(y_0 + y_*)\|^2 + \|\frac{1}{2}(y_0 - y_*)\|^2 \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{2}\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_*\|^2 = \kappa^2$ . Wid zu  $\frac{1}{2}(y_0 + y_*) \in K$  ■

**Bemerkung** Theorem gilt auch (mit ähnlichem Beweis) für gleichmäßig konvexe BRe, d.h.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in (0, 2] \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad & \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \\ \implies & \|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta \end{aligned}$$

**Beispiele:**

1.  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x, y > 0\}$  ist glm konvex
2.  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, x, y > 0\}$  ist nicht glm konvex

HRe sind glm konvext mit  $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$  nach (2.2)

Ferner:  $L^p(A), \ell^p$  ( $1 < p < \infty$ ) sind glm konvex (Dobrowdski, Satz 4.29)

**Korollar 2.11** In der Situation von Theorem 2.8 gilt:

$$y = p_K(x) \iff y \in K \text{ und } \operatorname{Re}(x - y|z - y) \leq 0 \forall z \in K$$

**Nachtrag zu Beispiel 2.4 c)**

$A \in \mathcal{L}^d : \omega : A \rightarrow \mathbb{R}$  messbar,  $\omega(x) > 0 \forall x \in A$ . Dann:  $X = L^2(A, \omega) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar, } \sqrt{\omega}f \in L^2(A)\}$   $(f|g) = \int_A f\bar{g}\omega dx \Rightarrow$  Skalarprodukt mit vollständiger Norm  $\|f\|_{2;\omega} = \left(\int_A |f|^2 \omega dx\right)^{\frac{1}{2}}$

**Definition 2.12** Sei  $X$  ein PräHR. Eine Projektion  $P \in B(X)$  heißt **orthogonal**  $:\Leftrightarrow R(P) \perp N(P)$

**Theorem 2.13** Sei  $X$  ein HR,  $Y \subseteq X$  ein abg UVR. Dann ist die Projektion  $P$  aus Theorem 2.8 linear mit  $\|P\| = 1$  und es gelten:  $R(P) = Y, N(P) = Y^\perp$  und  $X = Y \oplus Y^\perp$ . Insbesondere gilt:

$P$  ist orthogonal und  $X_{|Y} \cong Y^\perp$  (Bsp 1.76)

**Beweis** Sei  $x \in X$  und  $P = P_y$ . Dann:  $y = Px \stackrel{2.9}{\Leftrightarrow} y \in Y, \operatorname{Re}(x - y|z - y) \leq 0 \forall z \in Y \stackrel{Y \text{ UVR}}{\Leftrightarrow} y \in Y, \operatorname{Re}(x - y|z') \leq 0 \forall z' \in Y \Leftrightarrow y \in Y, (x - y|z') = 0 \forall z' \in Y \setminus \{y\} \Rightarrow$  : Betrachte  $-z', \pm iz'$   $\Rightarrow x - y \perp Y$  (\*)

Also:  $R(I - P) = Y^\perp$

Seien  $x_1, x_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ . Da  $Y^\perp$  UVR gilt:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(x_1 - Px_1) + \alpha_2(x_2 - Px_2) \in Y^\perp \\ \stackrel{(*)}{\Rightarrow} & y = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 = P(\underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{=:x}) \Rightarrow P \text{ ist linear.} \end{aligned}$$

$$2.8 \Rightarrow P^2 = P, R(P) = Y.$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner: } & \|x^2\| = \|Px + (I - P)x\|^2 \stackrel{\text{Pyth.}}{=} \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2 \geq \|Px\|^2 \\ \Rightarrow & P \text{ ist stetig und } \|P\| \leq 1. \end{aligned}$$

$$\text{Lemma 1.73} \Rightarrow \|P\| \geq 1$$

$$\Rightarrow \|P\| = 1$$

Sei  $X$  HR. Für  $y \in X$  definiere  $\Phi(y) : X \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $(\Phi(y))(x) = (x|y)$ ,  $x \in X \Rightarrow \Phi(y)$  ist linear. Nach CS:

$$|(\Phi(y))(x)| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow \Phi(y) \in X^*, \|\Phi(y)\|_{X^*} \leq \|y\|_X \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.14** Sei  $X$  ein HR. Dann ist obiges  $\Phi : X \rightarrow X^*$  "konjugiert linear" oder "...unlesbar...", d.h.  $\Phi(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} \Phi(y_1) + \overline{\alpha_2} \Phi(y_2)$ , bijektiv und isometrisch. D.h.  $\forall x^* \in X^* \exists$  genau ein  $y \in X$ , sodass  $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$  und  $\langle x, x^* \rangle = (x|y) \forall x \in X$ .

**Beweis** Offenbar ist  $\Phi$  konjugiert linear. Sei  $y \in X \setminus \{0\}$ . Setze  $x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|\Phi(y)\|_{X^*} \geq |(\Phi(y))(x)| = \frac{1}{\|y\|} |(y|y)| = \|y\|_X \Rightarrow \Phi$  ist Isometrie.

z.z:  $\Phi$  ist surjektiv. Sei  $x^* \in X^* \setminus \{0\} \Rightarrow R(x^*) = \mathbb{C}$ . Sei  $U = N(x^*) \Rightarrow U \neq X, U$  abg. UVR. Theorem 2.11  $\Rightarrow X = U \oplus U^\perp$ . 1.77 und Bsp 1.76 liefern:

$x^*_{|U^\perp}$  ist bijektiv  $\Rightarrow U^\perp = 1$ . Sei  $y \in U^\perp$  mit  $\langle y, x^* \rangle = 1$ . Für  $x \in X$  gibt es also eindeutige  $u \in U, \alpha \in \mathbb{K}$  mit  $x = u + \alpha y$ . Damit:  $\langle x, x^* \rangle = \langle u, x^* \rangle + \alpha \langle y, x^* \rangle = \alpha$ .

$$(x|y) = (u|y) + \alpha(y|y) = \alpha \|y\|_X^2 \Rightarrow x^* = \Phi\left(\frac{1}{\|y\|^2} y\right) \quad \blacksquare$$

## 2.2 Othonormalbasen

**Definition 2.15** Ein Orthonormalsystem (ONS)  $S$  heißt **Orthonormalbasis** (ONB)  $:\Leftrightarrow S$  ist maximal, d.h.  $\text{ONS } S', S \subseteq S' \Rightarrow S = S'$

**Beispiel (zu ONS, später sind alles ONBs)** a)  $X = \ell^2$ ,  $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  ist ONS. Wenn  $X = \ell^2(J)$ , dann bilden

$$e_j(i) = \begin{cases} 1 & , j = i \\ 0 & , j \neq i \end{cases} \text{ ein ONS.}$$

b)  $X = L^2([0, 2\pi])$ .  $S = \{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$  mit  $f_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) ist ein ONS, denn:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dt = 1$$

$$n \neq m \Rightarrow (f_n | f_m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi i(n-m)} e^{i(n-m)t} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

reelle Variante:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n), n \in \mathbb{N} \right\} \text{ ist ONS.}$$

**Satz 2.16** Sei  $X$  ein HR,  $x, y \in X$ ,  $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Dann gilt:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)|^2 \leq \|x\|^2 \text{ Besselsche Ungleichung.}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)(y|b_n)| < \infty \text{ für } x, y \in X$$

**Beweis** a) Sei  $N \in \mathbb{N}, x \in X$ . Setze  $x_N = x - \sum_{k=1}^N (x|b_k)b_k \Rightarrow x_N \perp b_n, n = 1, \dots, N \xrightarrow{\text{Pyth.}} \|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^N \|(x|b_k)b_k\|^2}_{= \sum_{k=1}^N |(x|b_k)|^2} \geq \sum_{k=1}^N |(x|b_k)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Beh.}$

b) folgt aus Hölder ■

**Lemma 2.17** Sei  $S \subseteq X$  ein ONS und  $X$  ein HR,  $x \in X$ . Dann ist die Menge  $S_x := \{b \in S : (x|b) \neq 0\}$  höchstens abzählbar. Beachte:  $S_x$  ist ONS.

**Beweis** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Nach 2.15a) ist  $S_{x,k} := \{b \in S, |(x|b)|^2 \geq \frac{1}{k}\}$  ist endlich.  $S_x = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{x,k} \Rightarrow S_x$  ist abzählbar. ■

Sei  $X$  ein UVR,  $J$  eine Indexmenge und  $x_j \in X$  für  $j \in J$ . Man sagt, dass  $\sum_{j \in J} x_j$  **unbedingt konvergiert** gegen  $x \in X$ , wenn

- i)  $J_0 = \{j \in J : x_j \neq 0\}$  ist höchstens abzählbar
- ii)  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{j_n}$  für jede Abzählung  $\{j_1, j_2, \dots\}$  von  $J_0$ .

Dann schreibt man  $x = \sum_{j \in J} x_j$ .

**Bemerkung** 1.  $\dim X < \infty$ : absolut konvergent  $\Leftrightarrow$  unbedingt konvergent (Riemannscher Umordnungssatz)

- 2.  $\dim X = \infty$  absolut konvergent  $\xrightarrow{\text{wie in } \mathbb{R}}$  unbedingt konvergent. Rückrichtung gilt nicht, vgl (Dvoretzky-Rogers)

**Satz 2.18** Sei  $S$  ein ONS im HR  $X$  und  $x \in X$ . Dann:

- a)  $\sum_{b \in S} |(x|b)|^2 \leq \|x\|^2$
- b)  $Px := \sum_{b \in S} (x|b)b$  konv. unbedingt.
- c)  $P$  ist Orthogonalprojektion auf  $\overline{\text{lin } S}$  und  $X = \overline{\text{lin } S} \oplus S^\perp$
- d)  $\exists$  ONS  $B \supset S$

**Beweis** Sei  $S_x = \{b_1, b_2, \dots\}$  wie in Lemma 2.16

- a) Folgt aus 2.15a) und 2.16
- b) Sei  $N \geq M$ . Pyth+Bessel liefern

$$\left\| \sum_{n=m}^N (x|b_n)b_n \right\|^2 = \sum_{n=m}^N |(x|b_n)|^2 \underbrace{\|b_n\|^2}_{=1} \rightarrow 0 \quad (N, M \rightarrow \infty)$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy-Folge}} \exists y := \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)b_n \text{ und } \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|b_n)|^2 \stackrel{a)}{\leq} \|x\|^2 \quad (*)$$

Sei  $\{b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \dots\}$  eine Umordnung von  $S_x$ . Wir erhalten genauso  $y_\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_{\pi(n)})b_{\pi(n)}$ . Sei  $z \in X$ . Dann:

$$\begin{aligned} (y_\pi|z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_{\pi(n)})b_{\pi(n)} \\ &\stackrel{2.15b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)(b_n|z) = (y|z) \\ &\Rightarrow (y_\pi - y|z) \quad \forall z \in X \stackrel{2.7f)}{\Rightarrow} y_\pi = y. \end{aligned}$$

- c)  $Px := y$  ist linear und nach  $(*)$  stetig auf  $X$ . Sei  $x \in X \Rightarrow P^2x = \sum_{b \in S} \sum_{b' \in S} (x|b)(b|b')b' \stackrel{\text{ONS}}{=} \sum_{b \in S} (x|b)b = Px$ .  
 Klar:  $R(P) \subseteq \overline{\text{lin } S}$  und  $S \subseteq R(P)$ . UVR  $\Rightarrow R(P) = \overline{\text{lin } S}$ . Ferner:  $S^\perp \subseteq N(P) = R(I-P)$ . Sei  $b_0 \in S$ . Dann:  $(x - Px|b_0) = (x|b_0) - (x|b_0)(b_0|b_0) = 0 \Rightarrow \underbrace{N(P)}_{=R(I-P)} \subseteq S^\perp \Rightarrow N(P) = S^\perp = \overline{\text{lin } S}^\perp$

zu d) Sei " $\leq$ " eine partielle Ordnung auf einer Menge  $M \neq \emptyset$ .  $K \subseteq M$  heißt **Kette**, wenn für alle  $x, y \in K$  stets  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt. Ein maximales Element in  $M$  ist  $x^* \in M$  wenn für  $x \in M, x \geq x^*$  folgt:  $x = x^*$

**Lemma von Zorn:**

Sei  $(M, \leq)$  eine geordnete Menge, sodass jede Kette in  $M$  eine obere Schranke hat. Dann hat jede Kette ein maximales Element in  $M$ .

d) Betrachte  $\mathcal{S} := \{S' \subseteq X : S' \text{ ONS}, S \subseteq S'\}$  mit Mengeninklusion. Eine Kette  $S_0$  in  $\mathcal{S}$  hat die obere Schranke  $\bigcup_{S' \in S_0} S' \in \mathcal{S} \xrightarrow{\text{Lemma von Zorn}} \exists$  maximales Element  $B \in \mathcal{S} \Rightarrow B$  ist die gewünschte ONB ■

**Theorem 2.19** Sei  $X$  ein HR und  $S \subseteq X$  ein ONS. Dann sind äquivalent:

a)  $S$  ist ONB.

b)  $S^\perp = \{0\}$

c)  $X = \overline{\text{lin } S}$

d)  $x = \sum_{b \in S} (x|b)b \ \forall x \in X$  (unbedingte konvergenz)

e)  $(x|y) = \sum_{b \in S} (x|b)(b|y) \ \forall x, y \in X$

f) **Parsevalsche Gleichung:**  $\|x\|^2 = \sum_{b \in S} |(x|b)|^2 \ \forall x \in X$

**Beweis**  $\Rightarrow$  b) Annahme:  $y \in S^\perp, y \neq 0 \Rightarrow S' = \{\frac{1}{\|y\|}y\} \cup S$  ist ONS. Wid zu S ONB!

b)  $\Rightarrow$  c)  $\Rightarrow$  d) folgen aus 2.17, denn  $Px = \sum_{b \in S} (x|b)b$  ist orthogonale Projektion auf  $\overline{\text{lin } S}$  mit  $N(P) = S^\perp$

d)  $\Rightarrow$  e) Sei  $S_x \cup S_y = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$  (Lemma 2.16). Dann liefert d)

$$\begin{aligned} (x|y) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)b_n \mid \sum_{m=1}^{\infty} (y|b_m)b_m \right) \stackrel{(\cdot|\cdot) \text{ stetig}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} ((x|b_n)b_n | (y|b_m)b_m) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (x|b_n) \overline{(y|b_m)} \underbrace{(b_n|b_m)}_{=\delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{\infty} (x|b_n)(b_n|y) = \sum_{b \in S} (x|b)(b|y) \end{aligned}$$

e)  $\Rightarrow$  f) Setze  $x = y$ .

f)  $\Rightarrow$  a) Annahme:  $S$  ist keine ONB  $\Rightarrow \exists x \in X : \|x\| = 1, x \perp S \xrightarrow{f)} \|x\|^2 = \sum_{b \in S} \underbrace{|(x|b)|^2}_{=0}$  Wid! ■

**Beispiel** Sei  $X = L^2([-1, 1])$ . Sei weiter  $S$  die Orthonormalisierung von  $\{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  mit  $f_n(t) = t^n, t \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}_0$ . (Legendre Polynome).  $S$  ist dann ONS mit  $\text{lin } S = \text{lin } \{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ .

Nach Bsp 1.55:  $\text{lin } \{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  dicht in  $C([-1, 1]) \hookrightarrow L^2([-1, 1]) \Rightarrow \text{lin } \{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  dicht in  $X \Rightarrow S$  ist ONB (vgl. ÜB 21)

**Bemerkung 2.20** Die Koeffizienten  $(x|b)$  in 2.18d) sind eindeutig bestimmt, denn:  
Sei  $x = \sum_{b \in S} \alpha(b)b$ ,  $b' \in S \xrightarrow{\text{ONS}} (x|b') = \sum_{b \in S} \alpha(b)(b|b') = \alpha(b')$

**Definition** Eine **Schauderbasis**  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  eines Banachraumes  $X$  ist eine Folge  $(x_n)$  in  $X$  mit:

Für alle  $x \in X$  gibt es eindeutig bestimmte  $\alpha_n \in \mathbb{K}$  mit  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ .

Die Basis heißt **unbedingt**, wenn diese Reihe für alle  $x$  unbedingt konvergiert.

**Beispiel** abzählbare ONB in HRen (Literatur: unlesbar, Basis in Banach Spaces)

**Korollar 2.21** Sei  $X$  ein HR mit  $\dim X = \infty$ . Dann sind äquivalent

- a)  $X$  ist separabel
- b) Alle ONBs auf  $X$  sind abzählbar
- c) Es gibt eine abzählbare ONB auf  $X$

**Beweis**  $\Rightarrow$  b)  $x \perp y$  und  $\|x\| = 1 = \|y\|$ , dann (Pyth):  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$   
wie bei  $\ell^\infty$  folgt: ONB kann nicht überabzählbar sein, wenn a) gilt.

b)  $\Rightarrow$  c) Ist klar (beachte S.2.17b))

c)  $\Rightarrow$  a) Thm 2.18d) und Lemma 1.57 ■

**Theorem 2.22** Sei  $X$  ein HR mit ONB  $S$ . Dann ist  $X$  isometrisch isomorph zu  $\ell^2(S)$ . Somit sind alle separablen URe isometrisch isomorph zu  $\ell^2$ , falls deren Dimension  $\infty$  ist.

**Beweis** Setze  $Tx = ((x|b))_{b \in S}$  für  $x \in X$ . 2.18f)  $\Rightarrow T : X \rightarrow \ell^2(S)$  und  $T$  Isometrie.  
Klar:  $T$  linear.

Sei  $f \in \ell^2(S)$ . Setze  $x = \sum_{b \in S} f(b)b$ . Wie im Beweis von 2.17h) sieht man, dass  $\sum_{b \in S} f(b)b$  in  $X$  konvergiert. Ferner:  $Tx = f$ . ■

**Beispiel** 1.  $L^2(\mathbb{R}^d) \cong \ell^d$

2.  $L^2([0, 1]) \cong \ell^2$

3. Üb 22:  $AP_2(\mathbb{R}) \cong \ell^2(\mathbb{R})$

**Beispiel 2.23 (Fourierreihen)** Sei  $X = L^2([0, 2\pi])$ ,  $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Bsp 2.14  $\Rightarrow S = \{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$  ins ONS. Sei  $Y = \{f \in C([0, 2\pi]), f(0) = f(2\pi)\}$ ,  $f \in X$  und  $\varepsilon > 0$ . Nach 1.44 existiert denn ein  $g \in C([0, 2\pi])$ ,  $g \neq 0$  mit  $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$ .

Sei  $0 < \nu \leq \frac{\varepsilon^2}{\|g\|_\infty}$

$$\text{Setze: } h(t) := \begin{cases} g(t) & , \nu \leq t \leq 2\pi \\ g(2\pi) + \frac{t}{\nu}(g(\nu) - g(2\pi)) & , 0 \leq t \leq \nu \end{cases}$$



$$\Rightarrow h \in Y, \|g - h\|_2^2 = \int_0^\nu |g(t) - h(t)|^2 dt \leq \nu(4\|g\|_\infty)^2 \leq 14\varepsilon^2.$$

Nach Bsp 1.55 ex  $\varphi \in \text{lin } S$  mit  $\|h - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon \stackrel{1.39}{\Rightarrow} \|h - \varphi\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\varepsilon \Rightarrow \|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon + 4\varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon \Rightarrow \overline{\text{lin } S} = X \stackrel{2.18}{\Rightarrow} S$  ONB.

Sei  $e_n(t) = e^{int}$ ,  $c_n = (f|e_n)_{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f \in X$ ) 2.18  $\Rightarrow f = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$  (komplexe Fourierreihe)

Dabei unbedingt konvergent in  $L^2$ . Ferner zeigt 2.19, dass

$$T: L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$\hat{f} = Tf = ((f|f_n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

**Bemerkung** a) Bsp 3.7:  $\exists f \in Y$ , sodass Fourierreihe nicht punktweise konvergiert.

b) Carleson: Fourierreihe konvergiert für alle  $f \in X$  fast überall.

c) Gleichmäßige Konvergenz für bessere  $f$  (ÜB 24 siehe auch AE, TH VI 7.21)

**reelle Version:**

Für reelwertige  $f \in L^2([0, 2\pi])$  setze

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

wie oben:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos(n \cdot) + b_n \sin(n \cdot)) \quad \text{konvergiert in } X$$

dabei:  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ ,  $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

**Beispiel**

$$f = \mathbb{1}_{[0, \pi]} \Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-in} e^{-int} \Big|_0^\pi = \begin{cases} 0 & , n \text{ gerade} \\ \frac{1}{i\pi n} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow \|c_{2k+1} e_{2k+1}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2k+1} \Rightarrow$  Fourierreihe  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{-i}{2k+1} e_{2k+1}$  konvergiert unbedingt, aber nicht absolut in  $X$ .

## 2.3 Operatoren auf Hilberträumen

Seien  $X, Y$  HRe und  $T \in B(X, Y)$ . Für gegebenes  $y \in Y$  definiert man  $\varphi_y(x) = (Tx|y)$ ,  $x \in X \Rightarrow \varphi_y: X \rightarrow \mathbb{C}$  ist linear in  $X$ .

$$(2.3) \quad |\varphi_y(x)| \stackrel{CS}{\leq} \|Tx\| \|y\| \leq \underbrace{\|T\| \|y\|}_{\text{konstant}} \|x\| \Rightarrow \varphi_y \in X^*$$

Nach 2.12 existiert genau ein  $z := T'y \in X$  mit

$$(2.4) \quad (Tx|y)_Y = \varphi_y(x) \stackrel{2.12}{=} (x|z)_X = (x|T'y)_X \quad \forall x \in X$$

Die Abbildung  $T' : Y \rightarrow X$  heißt **HR-Adjungierte** von  $T$ . (2.4) definiert  $T'$  eindeutig wegen Bem 2.7f

**Satz 2.24** Seien  $X, Y, Z$  HRe,  $T, S \in B(X, Y)$ ,  $R \in B(Y, Z)$ ,  $\alpha \in K$ . Dann gelten:

- a)  $T' \in B(Y, X)$  mit  $\|T'\| = \|T\|$  und  $T'' := (T')' = T$
- b)  $(T + S)' = T' + S'$ ,  $(\alpha T)' = \bar{\alpha}T'$ ,  $(R \circ T)' = T' \circ R'$
- c)  $N(T) = R(T')^\perp$ ,  $N(T') = R(T)^\perp$ . Damit:  $T$  injektiv  $\Rightarrow R(T')$  dicht.

**Beweis** Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  $y, u \in Y$ ,  $x \in X$ ,  $z \in Z$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (x|T'(\alpha y + \beta u)) = (Tx|\alpha y + \beta u) = \bar{\alpha}(Tx|y) + \bar{\beta}(Tx|u) = \bar{\alpha}(x|T'y) + \bar{\beta}(x|T'u) = \\ & (x|\alpha T'y + \beta T'u) \Rightarrow T' \text{ linear. (2.3), (2.4)} \Rightarrow T' \in B(Y, X) \text{ mit } \|T'\| \leq \|T\| \quad (*) \\ & \Rightarrow T'' \in B(X, Y) \Rightarrow (Tx|y) \stackrel{(2.4)}{=} (x|T'y) = \overline{(T'y|x)} \stackrel{(2.4)}{=} \overline{(y|T''(x))} = (T''x|y) \xrightarrow{x, y \text{ bel}} \\ & T'' = T \Rightarrow \|T\| = \|(T')'\| \stackrel{(*)}{\leq} \|T'\| \Rightarrow \|T\| = \|T'\| \end{aligned}$$

b) folgt aus 2.7f) und

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & (x|(S + T)'y) \stackrel{(2.4)}{=} (Sx|y) + (Tx|y) = (x|S'y) + (x|T'y) = (x|(S' + T')y) \\ \text{ii)} \quad & (x|(\alpha T)'y) = \alpha(Tx|y) = (x|\bar{\alpha}T'y) \\ \text{iii)} \quad & (x|(RT)'y) = (RTx|y) = (Tx|R'y) = (x|T'R'y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & Tx = 0 \stackrel{2.7a)}{\Leftrightarrow} 0 = (Tx|y) \quad \forall y \in Y \Leftrightarrow 0 = (x|T'y) \quad \forall y \in Y \Leftrightarrow x \perp R(T') \\ & \Rightarrow N(T') = R(T'')^\perp \stackrel{a)}{=} R(T)^\perp \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definition 2.25** Seien  $X, Y$  HRe,  $T \in B(X, Y)$ . Dann:

a)  $T$  heißt **selbstadjungiert** (sa.)  $\Leftrightarrow T = T'$  und  $X = Y$ , d.h.

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \forall x, y \in X$$

b)  $T$  heißt **unitär**  $\Leftrightarrow T'T = id_X$  und  $TT' = id_Y \Leftrightarrow$  exists  $T^{-1} = T' \in B(Y, X)$

c)  $X = Y : T$  heißt **normal**  $\Leftrightarrow TT' = T'T$ .

**Bemerkung** 1. sa  $\Rightarrow$  normal. unitär  $\Rightarrow$  normal.

2.  $TT', T'T$  sind stets selbstadjungiert.

**Beispiel 2.26** Seien  $a_{kl} \in \mathbb{C}, k, l \in \mathbb{N}$  mit  $\|T\|_{HS}^2 := \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 < \infty$ .

Üb 18 (Hölder) definiert  $(Tx)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_l, k \in \mathbb{N}, x \in \ell^2$  ein  $T \in B(\ell^2)$  mit  $\|T\| \leq \|T\|_{HS} = \text{Hilbert-Schmidt-Norm}$ .

**Beh:**

$$(T'y)_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}x_j (*), y \in \ell^2 \text{ mit } b_{ij} = \overline{a_{ji}}, i, j \in \mathbb{N}$$

**Beweis:**

$$1.68 \Rightarrow (*) \text{ mit } b_{ij} = (T'e_j)_i \Rightarrow b_{ij} = (T'e_j|e_i) = \overline{(Te_i|e_j)} \stackrel{1.68}{=} \overline{a_{ji}}$$

**Beispiel (s. 1.68)**  $R' = L, L' = R$

$$\text{Alternativ: } (Lx|y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1}\overline{y_k} \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=2}^{\infty} x_j\overline{y_{j-1}} = (x, Ry)$$

Insbesondere:  $T$  sa.  $\iff a_{kl} = \overline{a_{lk}} \forall k, l \in \mathbb{N}$ .

Schreibe  $z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  als  $z = (x, y)$  mit  $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ . Seien  $A \in \mathcal{L}_m, B \in \mathcal{L}_n \Rightarrow A \times B \in \mathcal{L}_{m+n}$ .

Für  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$  bzw  $[0, \infty)$  schreiben wir  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $y \in B$  fest) und  $f^x(y) = f(x, y)$  ( $x \in A$  fest) sowie (soweit existent):

$$F(x) = \int_B f(x, y)dy, x \in A; \quad G(y) = \int_A f(x, y)dx, y \in B$$

(setze  $F(x), G(y) = 0$ , falls die Integrale nicht existieren.)

**Theorem (Fubini)** a) Sei  $f : A \times B \rightarrow [0, \infty)$  messbar. Dann sind  $f^y$  für f.a.  $y \in B, f^x$  für f.a.  $x \in A$   $F, G$  messbar und es gilt:

$$(2.5) \quad \int_{A \times B} f(x, y)d(x, y) = \int_A \left( \int_B f(x, y)dy \right) dx = \int_B \left( \int_A f(x, y)dx \right) dy$$

b) Sei  $f \in L^1(A \times B)$ . Dann sind  $f^y$  für f.a.  $y \in B, f^x$  für f.a.  $x \in A$   $F, G$  integrierbar und es gilt (2.5).

**Bemerkung** Analog:  $n$ -fache Integrale

**Beispiel 2.27 Integraloperatoren**

Sei  $k \in L^2(A \times A), A \in \mathcal{L}_d, f \in L^2(A)$ . Nach Bem. 1.34 ist

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) := k(x, y)f(y) \text{ messbar}$$

(Beachte, dass auch  $(x, y) \mapsto f(y)$  messbar ist.) Ferner ist  $(x, y) \mapsto |\varphi(x, y)|$  messbar.

Fubini a) und Hölder liefern:

$$\begin{aligned} \int_{A \cap B(0, n)} \left( \int_A |\varphi(x, y)| dy \right)^2 dx &\leq \int_A \left( \int_A |k(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2} \cdot 2} dx \|f\|_2^2 = \|k\|_2^2 \|f\|_2^2 (*) \\ \Rightarrow \left( \int_{A \cap B(0, n)} \left( \int_A |\varphi(x, y)| dy \right) dx \right)^2 &\stackrel{1.39}{\leq} c(n) \int_{A \cap B(0, n)} \left( \int_A |\varphi(x, y)| dy \right)^2 dx \\ &\leq c(n) \|k\|_2^2 \|f\|_2^2 \Rightarrow \varphi \in L^1((A \cap B(0, n) \times A) \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Fubini b)  $\Rightarrow T f(x) = \int_A k(x, y) f(y) dy$  existiert für f.a.  $x$  und ist messbar. Da  $|T f(x)|^2 \leq (\int_A |\varphi(x, y)| dy)^2$  liefert  $\sup_n$  in (\*), dass  $T f \in L^2(A)$  und  $\|T f\|_2 \leq \|k\|_2 \|f\|_2 \Rightarrow T \in B(L^2(A))$ ,  $\|T\| \leq \|k\|_2$  (MS-Norm von  $T$ )

Sei  $g \in L^2(A)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (T f | g) &= \int_A \left( \int_A k(x, y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx \stackrel{\text{Hölder und Fubini}}{=} \int_A \left( \int_A k(x, y) f(y) \overline{g(x)} dx \right) dy \\ &= \int_A f(y) \left( \int_A \overline{k(x, y)} g(x) dx \right) dy = (f | T' g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T' g(t) = \int_A \overline{k(s, t)} g(s) ds \quad (t \in A) \Rightarrow T \text{ sa} \iff k(x, y) = k(y, x) \text{ für f.a. } (x, y) \in A \times A.$$

**Satz 2.28** Seien  $X, Y$  HRe,  $T \in B(X, Y)$ .

$$T \text{ ist Isometrie} \iff (T' T x | z)_X = (T x | T z)_Y = (x | z)_X \quad \forall x, z \in X$$

Insbesondere:

$T$  unitär  $\Leftrightarrow T$  bijektiv und  $T$  Isometrie  $\Leftrightarrow T$  bijektiv und erhält Skalarprodukt.

**Beweis,**  $\Leftarrow$  " Setze  $x = z$ .

„  $\Rightarrow$  " Sei  $\alpha \in \mathbb{K}, x, z \in X$ . Dann:

$$(T(x + \alpha z) | T(x + \alpha z)) \stackrel{(2.1)}{=} \|T x\|^2 + \|\alpha T z\|^2 + 2 \operatorname{Re} (T x | \alpha T z) = \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|z\|^2 + 2 \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (T x | T z))$$

Andererseits gilt:

$$|(T(x + \alpha z) | T(x + \alpha z))| = \|T(x + \alpha z)\|^2 = \|x + \alpha z\|^2 \stackrel{(2.1)}{=} \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (x | z)) + |\alpha|^2 \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (T x | T z)) = \operatorname{Re} (\overline{\alpha} (x | z)) \stackrel{\alpha=1, \alpha=i}{\Rightarrow} (T x | T z) = (x | z). \quad \blacksquare$$

**Satz 2.29** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}, X$  HR,  $T \in B(X)$ .

$$T \text{ sa} \iff (T x | x) \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in X$$

**Beweis,**  $\Rightarrow$  "  $(T x | x) = (x | T x) = \overline{(T x | x)} \Rightarrow \text{Beh.}$

„  $\Leftarrow$  " Sei  $\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X$

$$(T(x + \alpha y) | x + \alpha y) = (T x | x) + \overline{\alpha} (T x | y) + \alpha (T y | x) + |\alpha|^2 (T y | y) =: a \stackrel{\text{Vor.}}{=} \overline{a} \stackrel{\text{Vor.}}{=} (T x | x) + \alpha (y | T x) + \overline{\alpha} (x | T y) + |\alpha|^2 (T y | y)$$

$$\stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} (T x | y) + (T y | x) = (y | T x) + (x | T y) \quad (2.3)$$

$$\stackrel{\alpha=i}{\Rightarrow} i(T x | y) - i(T y | x) = -i(y | T x) + i(x | T y) \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow (T y | x) = (y | T x) \stackrel{x, y \text{ bel.}}{\Rightarrow} T \text{ sa.} \quad \blacksquare$$

**Beispiel**  $X = \mathbb{R}^2, T =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T$  nicht sa,  $(Tx|x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^2$

**Satz 2.30** Sei  $X$  HR,  $T \in B(X)$  sei sa. Dann gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx|x)| =: M$$

Insbesondere:

$$(Tx|x) = 0 \forall x \in X \Rightarrow T = 0$$

**Beweis**, „ $\geq$ “ Klar.

„ $\leq$ “ Seien  $x, y \in X$  mit  $\|x\|, \|y\| \leq 1$ .

$$(T(x+y)|x+y) - (T(x-y)|x-y) \stackrel{2.1}{=} 2(Tx|y) + 2(Ty|x) = 2(Tx|y) + 2\overline{(Tx|y)} = 4\operatorname{Re}(Tx|y)$$

$$\Rightarrow 4\operatorname{Re}(Tx|y) \leq M(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \stackrel{(2.2)}{=} 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4M$$

Sei  $(Tx|y) \neq 0$  ersetze oben  $x$  durch  $|(Tx|y)|(Tx|y)^{-1}x$ . Dann:

$$|(Tx|y)| = |(x|Ty)| \leq M \stackrel{2.12;\sup\|x\| \leq 1}{\Rightarrow} \|Ty\| \leq M \Rightarrow \|T\| \leq M. \quad \blacksquare$$

**Lemma 2.31** Sei  $X$  HR,  $T \in B(X)$  sei normal. Dann gilt:

$$\|Tx\| = \|T'x\| \quad \forall x \in X$$

Insbesondere gilt:

$$N(T) = N(T') \stackrel{2.23}{=} R(T)^\perp$$

**Beweis**  $0 = ((T'T - TT)x|x) = \|Tx\|^2 - \|T'x\|^2 \quad \forall x \in X \quad \blacksquare$

**Satz 2.32** Sei  $X$  HR,  $P \in B(X)$  eine Projektion mit  $P \neq 0$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $P$  ist orthogonal
- b)  $\|P\| = 1$
- c)  $P = P'$  (d.h.  $P$  sa.)
- d)  $P$  ist normal
- e)  $(Px|x) = 0 \forall x \in X$ .

**Beweis**  $a) \Rightarrow c)$  Für  $x, y \in X$  gilt:  $(Px|y) = (Px|Py + \underbrace{(I-P)y}_{\in N(P)}) \stackrel{a)}{=} (Px|Py)$ .

Genauso:  $(x|Py) = (Px|Py) \Rightarrow P = P'$ .

c)  $\Rightarrow$  d) Klar.

d)  $\Rightarrow$  a) Lemma 2.30

c)  $\Rightarrow$  e)  $(Px|x) = (PPx|x) \stackrel{c)}{=} (Px|Px) \geq 0 \ \forall x \in X$ .

e)  $\Rightarrow$  c)  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : Satz 2.29;  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Werner V 5.9

a)  $\Rightarrow$  b) Theorem 2.11

b)  $\Rightarrow$  a) Sei  $\alpha \in \mathbb{K}, x \in N(P), y \in R(P)$ . Dann:

$$\|\alpha y\|^2 = \|P(x + \alpha y)\|^2 \stackrel{b)}{\leq} \|x + \alpha y\|^2 \stackrel{(2.1)}{=} \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} \overline{\alpha}(x|y) + |\alpha|\|y\|^2$$

Wähle  $\alpha = \frac{(x|y)}{|(x|y)|} \implies (x|y) = 0$ . ■