12. Der Existenzsatz von Peano

Definition
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x_0, y_0) \in D$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Gleichung:

$$(i)\ \ y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \quad (x \in I)$$

heißt eine **Integralgleichung**. $y \in C(I)$ heißt eine **Lösung von** (i) **auf** $I :\iff (t, y(t)) \in D$ $\forall t \in I$ und es gilt (i) $\forall x \in I$.
Wir betrachten auch noch das AWP

$$(ii)\ \ \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Satz 12.1 (Zusammenhang Integral- und Differenzialgleichung)
$D, f, (x_0, y_0)$ und I seien wie oben und $y \in C(I)$. Es sei $f \in C(D, \mathbb{R})$.

(1) y ist eine Lösung von (i) auf $I \iff$ y ist eine Lösung von (ii) auf I

(2) Sei $I = [a, b]$ und $D = I \times R$. Ist $T : C(I) \to C(I)$ def. durch $(T_y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, $x \in I$, so gilt: y ist eine Lösung von (ii) auf $I \iff T_y = y$

Beweis
(1) "$\implies$": $y(x_0) = y_0$; Durch Differentation: $y'(x) = f(x, y(x))\ \forall x \in I$
"$\Leftarrow$": $y'(x) = f(t, y(t))\ \forall t \in I$ und $y(x_0) = y_0 \implies \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0\ \forall x \in I$

(2) $T_y = y \iff y$ löst (i) auf $I \iff$ y löst (ii) auf I. ∎

Satz 12.2 (Lösungen auf Teilintervallen)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\Gamma \neq \emptyset$ (Γ ist Indexmenge). Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei $y_\gamma : I_\gamma \to \mathbb{R}$ (wobei $I_\gamma \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall) eine Lösung der Dgl.:

$$(+)\ y'(x) = f(x, y)$$

auf I_γ.
Weiter sei $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \neq \emptyset$ und für je zwei Lösungen $y_{\gamma_1} : I_{\gamma_1} \to \mathbb{R}$, $y_{\gamma_2} : I_{\gamma_2} \to \mathbb{R}$ von (+) gelte $y_{\gamma_1} = y_{\gamma_2}$ auf $I_{\gamma_1} \cap I_{\gamma_2}$.
Setzt man $I := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ und $y(x) := y_\gamma(x)$, falls $x \in I_\gamma$, so ist I ein Intervall und y eine Lösung von (+) auf I.

Beweis
Übung. ∎

Folgerung 12.3
Sei $I = [a, b], S := I \times \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in (a, b), y_0 \in \mathbb{R}, I_1 := [a, x_0], I_2 := [x_0, b]$ und $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}, y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ seien Lösungen des AWPs

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I_1 bzw I_2. Definiert man $y : I \to \mathbb{R}$ durch

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x), & \text{falls } x \in I_1 \\ y_2(x), & \text{falls } x \in I_2 \end{cases}$$

so ist y eine Lösung des AWPs auf I.

Satz 12.4 (Der Existenzsatz von Peano (Version I))
I und S seien wie in 12.3, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in C(S, \mathbb{R})$ sei beschränkt. Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine Lösung auf I.

Wir führen zwei Beweise. In beiden sei $M := \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in S\}$ und $T : C(I) \to C(I)$ sei definiert durch $(T_y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))$ $(x \in I)$

Beweis (mit 11.3)
Sei $A \subseteq C(I)$ sei wie in 11.5 (mit obigen M). 11.5 $\implies$ $A \neq \emptyset$, A ist konvex und kompakt. $T : A \to C(I)$ ist stetig. Wegen 11.3 und 12.1(2) ist nur noch zu zeigen: $T(A) \subseteq A$. Sei $y \in A$. Dann $(T_y)(x_0) = y_0$. Weiter gilt
$\forall x, \overline{x} \in I : |(T_y)(x) - (T_y)(\overline{x})| = |\int_{x}^{\overline{x}} \underbrace{f(t, y(t))}_{\leq M} dt| \leq M \cdot |x - \overline{x}|$. Also: $T_y \in A$. Somit: $T(A) \subseteq A$ ∎

Beweis (Nr.2)
Wir unterscheiden 3. Fälle: $x_0 = a, x_0 = b$ und $x_0 \in (a, b)$. Wir führen den Beweis nur für den Fall $x_0 = a$ (den Fall $x_0 = b$ zeigt man analog; der Fall $x_0 \in (a, b)$ folgt aus 12.3 und den ersten beiden Fällen).
Sei also $x_0 = a$. o.B.d.A. $x_0 + \frac{1}{n} = a + \frac{1}{n} \in I\ \forall n \in I$.
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $z_n : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$z_n(x) := \begin{cases} y_0, & \text{falls } x \leq x_0 = a \\ y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z_n(t - \frac{1}{n})dt, & \text{falls } x \in I \end{cases}$$

Beh.: z_n ist auf I wohldefiniert.

Sei $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n}]$ und $t \in [x_0, x] \implies t - \frac{1}{n} \le x - \frac{1}{n} \le x_0 \implies z_n(t - \frac{1}{n}) = y_0 \implies z_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt$, also $z_n(x)$ ist wohldef.
Sei $x \in [x_0 + \frac{1}{n}, x_0 + \frac{2}{n}]$ und $t \in [x_0, x] \implies t - \frac{1}{n} \le x - \frac{1}{n} \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n}] \implies z_n(t - \frac{1}{n})$ wohldef.
$\implies z_n(x)$ ist wohldefiniert, etc...

Übung: $z_n \in C(-\infty, b]$.

Insbesondere: $z_n \in C(I)$. Es ist $z_n(x_0) = y_0$. Für $x, \overline{x} \in I : |z_n(x) - z_n(\overline{x})| = |\int_x^{\overline{x}} f(t, z_n(t - \frac{1}{n}))dt| \le M \cdot |x - \overline{x}|$. 11.4 $\implies$ (z_n) enthält eine auf I gleichmäßige konvergente Teilfolge.
o.B.d.A.: (z_n) konvergiert auf I glm.
$y(x) := \lim_{n\to\infty} z_n(x)$ $(x \in I)$. AI $\implies$ $y \in C(I)$. Also $z_n \to y$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. ($\|z_n - y\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$);
$g_n(t) := z_n(t - \frac{1}{n})$ $(t \in I)$. $\forall t \in I : |g_n(t) - y(t)| = |g_n(t) - z_n(t) + z_n(t) - y(t)| \le |\underbrace{z_n(t - \frac{1}{n}) - z_n(t)}_{\le \frac{M}{n}}| + |\underbrace{z_n(t) - y(t)}_{\le \|z_n - y\|_\infty}|$
$\implies \|g_n(t) - y(t)\|_\infty \le \frac{M}{n} + \|z_n - y\|_\infty \forall n \in \mathbb{N} \implies g_n \to y$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (glm. konv.)
$T : C(I) \to C(I)$ ist stetig $\implies T_{g_n} \to T_y$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$
$(T_{g_n})(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z_n(t - \frac{1}{n}))dt = z_n(x) \forall x \in I \implies T_{g_n} = z_n$ auf I.
Also $T_y = y$ und damit folgt, y löst das AWP auf I. ∎

Satz 12.5 (Der Existenzsatz von Peano (Version II))
Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, s > 0$ und $R := I \times [y_0 - s, y_0 + s]$
Es sei $f \in C(R, \mathbb{R}), M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$ und
$J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$. Dann hat das AWP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine Lösung auf J.

Beweis
$S := I \times \mathbb{R}$. Def. $g : S \to \mathbb{R}$ durch:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R} \\ f\left(x, y_0 + s\frac{y - y_0}{|y - y_0|}\right), & x \in I, |y - y_0| \ge s \end{cases}$$

Dann: $g = f$ auf R , $|g| \le M$ auf S und $g \in C(S, \mathbb{R})$
Betrachte das AWP

$$(+) \begin{cases} y' = g(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

12.4 $\implies$ (+) hat eine Lösung $\overline{y}$ auf I. 12.1 $\implies$

$$(*)\ \overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, \overline{y}(t))dt\ \forall x \in I$$

Sei $x \in J$. Sei $y := \overline{y}|_J$. Dann: $|y(x) - y_0| = |\overline{y}(x) - y_0|$
$\overset{(*)}{=} |\int_{x_0}^{x} g(t, \overline{y}(t))dt| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot \frac{s}{M} = s \implies (x, y(x)) \in R$
$\implies (t, y(t)) \in R$ für t zwischen x und x_0.
$\implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt \; \forall x \in J$
$\overset{12.1}{\implies} y$ löst das AWP auf J ∎

Satz 12.6 (Der Existenzsatz von Peano (Version III))
Sei $D \in \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$. Dann ex. $\delta > 0$: das AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

hat eine Lösung $y : K \to \mathbb{R}$, wobei $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (also $x_0 \in K^0$)

Beweis
D offen $\implies \exists\, r, s > 0 : R := [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s] \subseteq D$
$M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in \mathbb{R}\}$
$\delta := \max\{r, \frac{s}{M}\}, K := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 12.5 $\implies$ Beh. ∎