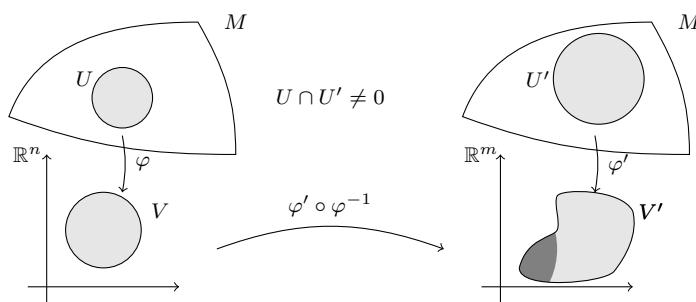


# Kapitel 1.

## Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Definition** Eine  $n$ -dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit**  $M$  ist ein topologischer **Hausdorff-Raum** mit einer abzählbaren Basis der **Topologie** in dem zu jedem Punkt  $p \in M$  eine offene Menge  $U$  mit  $p \in U$  existiert und ein **Homöomorphismus**  $\varphi: U \rightarrow V$  auf eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$ .



$\varphi' \circ \varphi^{-1}$  ist ein Homöomorphismus offener Mengen des  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$ . Nach dem **Satz von Brouwer** (1912) gilt dann  $m = n$ . Damit ist die Dimension einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert.

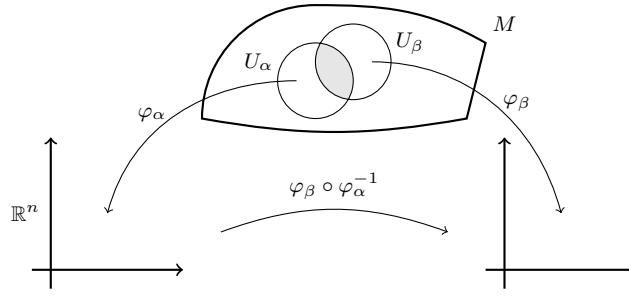
Die Abbildung  $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Karte** von  $M$  um  $p$ , die Menge  $U$  heißt **Kartengebiet**.

Eine Menge von Karten  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$  heißt **Atlas** von  $M$ , falls  $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = M$ .

Ein Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$  heißt  $C^k$ -Atlas, wenn für alle  $\alpha, \beta \in J$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  der sogenannte **Kartenwechsel**:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ein  $C^k$ -**Diffeomorphismus** ist.



Eine Karte  $\psi: U \rightarrow V$  von  $M$  heißt **verträglich** mit einem  $C^k$ -Atlas  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$  wenn jeder Kartenwechsel

$$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist, also  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(\psi, U)\}$  ebenfalls ein  $C^k$ -Atlas ist. Die Menge aller mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten ist ein **maximaler  $C^k$ -Atlas**. Jeder maximale Atlas enthält alle mit ihm verträglichen Karten. Ein maximaler  $C^k$ -Atlas heißt auch  **$C^k$ -differenzierbare Struktur**.

**Definition 1.1 (differenzierbare Mannigfaltigkeit)** Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** der Klasse  $C^k$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer  $C^k$ -differenzierbaren Struktur.

**Beispiel** Einige Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten:

- 1)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \{(\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$
- 2)  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathcal{A} = \{(\iota_M, M)\}$
- 3)  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  ist eine eindimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit:

$$U = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (0, 2\pi)\}$$

ist offen in  $S^1$  und die Kartenabbildung

$$\varphi: (\sin t, \cos t) \mapsto t$$

ist ein Homöomorphismus.

$$\varphi': U' = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow (-\pi, \pi)$$

ebenfalls.  $\mathcal{A} = \{(\varphi, U), (\varphi', U')\}$  ist ein Atlas von  $S^1$ , denn  $U \cup U' = S^1$ .

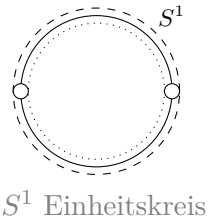
$$\varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

$$(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \quad t \mapsto \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ t - 2\pi & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

- 4) Jeder reelle Vektorraum endlicher Dimension ist in kanonischer Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Wähle eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ . Diese definiert mit

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

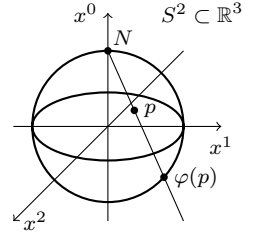


eine Bijektion auf  $\mathbb{R}^n$ . Damit erhält man eine globale Karte von  $V$ . Der zugehörige Atlas hängt nicht von der Wahl der Basis ab, denn ist  $\{w_1, \dots, w_n\}$  eine weitere Basis von  $V$  und  $\psi(\sum \lambda_i w_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine weitere Karte, so ist  $\varphi \circ \psi^{-1}$  als **Endomorphismus** des  $\mathbb{R}^n$  schon  $C^\infty$ .

5)  $S^n = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1\}$ .

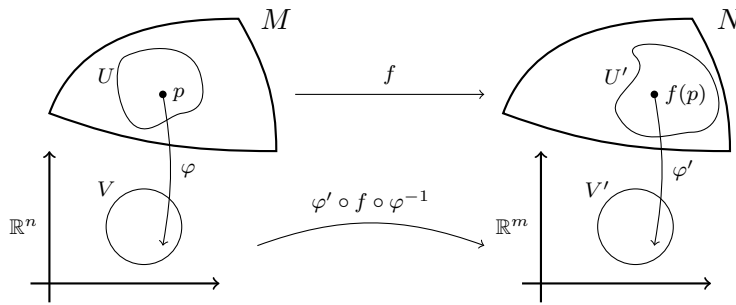
Betrachte den Nordpol  $N = (1, 0, \dots, 0)$  und den Südpol  $S = (-1, 0, \dots, 0)$  und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: U = S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n & x &\mapsto \left( \frac{x^1}{1-x^0}, \dots, \frac{x^n}{1-x^0} \right), \\ \psi: U' = S^n \setminus \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^n & x &\mapsto \left( \frac{x^1}{1+x^0}, \dots, \frac{x^n}{1+x^0} \right) \end{aligned}$$



Aufgabe: Zeige, dass  $(\varphi, U), (\psi, U')$  einen  $C^\infty$ -Atlas auf  $S^n$  definiert.

**Definition 1.2 (Differenzierbare Abbildungen)** Eine stetige Abbildung  $f: M \rightarrow N$  zwischen glatten Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  heißt **glatt** ( $C^\infty$ -differenzierbar), wenn es zu jedem  $p \in M$  Karten  $(\varphi, U)$  in  $M$  um  $p$  und geeignete  $(\varphi', U')$  in  $N$  um  $f(p)$  gibt, so dass  $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$  glatt ist.



Die Menge aller glatten Abbildungen von  $M$  nach  $N$  wird  $C^\infty(M, N)$  genannt.

**Konvention:** Ab jetzt seien zunächst alle Mannigfaltigkeiten, wie auch alle Abbildungen als glatt vorausgesetzt.

**Bemerkung** Da Kartenwechsel  $C^\infty$  sind, gilt obige Bedingung automatisch für alle Karten von  $M$  und  $N$  (evtl. nach Einschränkung).

**Beispiel** Es folgen zwei Beispiele für differenzierbare Abbildungen:

1.  $(\varphi, U) \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ , denn

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty.$$

2.  $f \in C^\infty(M, N), g \in C^\infty(N, P) \Rightarrow g \circ f \in C^\infty(M, P)$ , denn

$$\varphi_p \circ g \circ f \circ \varphi_m^{-1} = (\varphi_p \circ g \circ \varphi_n^{-1}) \circ (\varphi_n \circ f \circ \varphi_m^{-1}) \in C^\infty.$$

**Definition 1.3 (Diffeomorphismus)** Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  bijektiv ist und  $f$ , sowie  $f^{-1}$   $C^\infty$ -Abbildungen von  $M$  nach  $N$  sind. Insbesondere haben  $M$  und  $N$  in diesem Fall dieselbe Dimension. Die Menge der Diffeomorphismen von  $M$  nach  $M$  wird mit  $\text{Diff}(M)$  bezeichnet.  $(\text{Diff}(M), \circ)$  ist bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

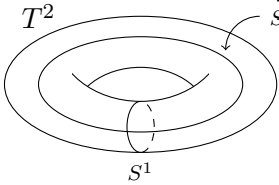
## 1. Produkte von Mannigfaltigkeiten

Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m$  und  $n$ . Dann hat  $M \times N$  versehen mit der **Produkttopologie**, die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Da  $M$  und  $N$  hausdorffsch sind und abzählbare Basen ihrer Topologie besitzen gilt dies auch für  $M \times N$ . Sind  $(\varphi, U)$  und  $(\psi, V)$  Karten von  $M$  bzw.  $N$ , so ist  $\varphi \times \psi$  ein Homöomorphismus von  $U \times V$  auf sein offenes Bild in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ .

Seien  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$  und  $\mathcal{A}' = \{(\psi_\beta, V_\beta) \mid \beta \in \mathcal{J}\}$   $C^\infty$ -Atlanten von  $M$  und  $N$ . Dann ist  $\mathcal{B} = \{(\varphi_\alpha \times \psi_\beta, U_\alpha \times V_\beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M \times N$ , denn

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_\mu \times \psi_\nu)^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\mu^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_\nu^{-1})$$

ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Damit ist  $M \times N$  in kanonischer Weise eine glatte  $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die kanonischen Projektionen  $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ ,  $\pi_N: M \times N \rightarrow N$  und die Abbildung  $\tau: M \times N \rightarrow N \times M, (p, q) \mapsto (q, p)$  sind glatte Abbildungen.



**Beispiel** Es folgen einige Beispiele für Produkt-Mannigfaltigkeiten:

1) Zylinder  $\mathbb{R} \times S^1$

2)  $T^n = \times_{i=1}^n S^1$

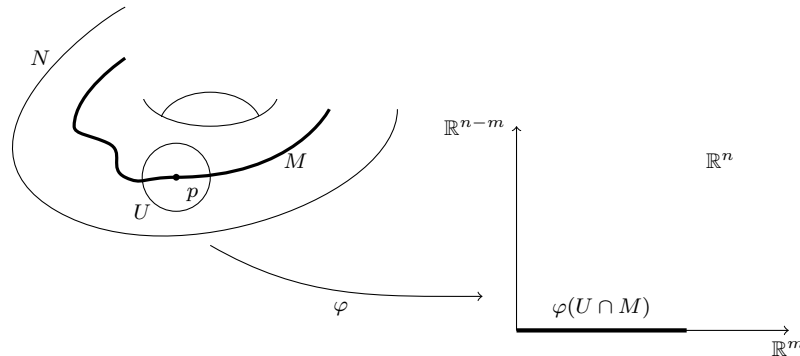
$$\iota: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n, (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, 0, \dots)$$

## 2. Untermannigfaltigkeiten

**Definition 1.4 (Untermannigfaltigkeit)** Es sei  $N$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge  $M \subseteq N$  heißt **Untermannigfaltigkeit** von  $N$ , wenn für alle  $p \in M$  eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $N$  um  $p$  existiert, so dass

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \underbrace{(\mathbb{R}^m \times \{0\})}_{\{(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n\}}$$

gilt. Eine solche Karte heißt an  $M$  **adaptierte Karte**. Die Zahl  $n - m$  heißt **Kodimension** von  $M$  in  $N$ .



**Lemma 1.5** Es seien  $N$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und  $M \subseteq N$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ . Bezeichnet  $\mathcal{A}$  einen  $C^\infty$ -Atlas von  $N$  und  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, (x^1, \dots, x^m, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m)$ , so ist

$$\mathcal{B} = \{(\pi \circ \varphi|_{U \cap M}, U \cap M) \mid (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ an } M \text{ adaptierte Karte}\}$$

ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ .

**Beweis** Die Hausdorff-Eigenschaft und die Abzählbarkeit der Topologie werden von  $N$  auf  $M$  vererbt. Ist  $p \in N$ , so existiert eine adaptierte Karte  $(\varphi, U)$  von  $N$  um  $p$  und  $\pi \circ \varphi|_{U \cap M}$  ist ein Homöomorphismus von  $U \cap M$  auf eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ . Jeder Kartenwechsel

$$(\pi \circ \varphi|_{U \cap M}) \circ (\pi \circ \psi|_{V \cap M})^{-1} = (\pi \circ \varphi) \circ (\psi^{-1} \circ \iota) = \pi \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \iota$$

ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. □

**Bemerkung** Erinnerung:  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt glatte  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , wenn für alle  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  und eine Abbildung  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i)  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  ist ein Diffeomorphismus auf sein offenes Bild im  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ .

Jedes solche  $M$  ist eine Untermannigfaltigkeit im Sinne von Definition 1.4, denn jedes  $\varphi$  wie oben ist wegen (i) eine Karte von  $\mathbb{R}^n$  (im Sinne glatter Mannigfaltigkeiten) und wegen (ii) eine an  $M$  adaptierte Karte. Also sind mit Lemma 1.5 glatte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  glatte Mannigfaltigkeiten (im allgemeineren Sinne).

