

## Kapitel III

# Kohomologie von Garben

### § 12 Garbenkohomologie als abgeleiteter Funktor

**Erinnerung 12.1** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Nullobjekten,  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $f : A \rightarrow B$  ein Morphismus.

- (i) Der *Kern* von  $f$  ist das Paar  $(\ker f, \iota)$  mit  $\iota : \ker f \rightarrow A$  und  $f \circ \iota = 0$ , sodass für jedes Paar  $(C, \tilde{\iota})$  mit  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\tilde{\iota} : C \rightarrow A$  mit  $f \circ \tilde{\iota} = 0$  der Morphismus  $\tilde{\iota}$  eindeutig über  $\ker f$  faktorisiert, es also einen eindeutigen Morphismus  $h : C \rightarrow \ker f$  gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \nwarrow h & \nearrow \tilde{\iota} & & \\ & C & & & \end{array}$$

- (ii) der *Kokern* von  $f$  ist das Paar  $(\text{coker } f, \pi)$  mit  $\pi : B \rightarrow \text{coker } f$  und  $\pi \circ f = 0$ , sodass für jedes Paar  $(C, \tilde{\pi})$  mit  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\tilde{\pi} : B \rightarrow C$  mit  $\tilde{\pi} \circ f = 0$  der Morphismus  $\tilde{\pi}$  eindeutig über  $\text{coker } f$  faktorisiert, es also einen eindeutigen Morphismus  $h : \text{coker } f \rightarrow C$  gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } f \\ & & \searrow \tilde{\pi} & & \nearrow h \\ & & C & & \end{array}$$

**Definition 12.2** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt *abelsch*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Es bildet  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition " + " für alle  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .
- (ii) Für Homomorphismen gelten die Distributivgesetze bezüglich " + " und "  $\circ$  ", das heißt es

gilt

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \quad e \circ (f + g) = e \circ f + e \circ g$$

für alle  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $f, g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ,  $e \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ .

- (iii) Endliche direkte Summen, Kerne, Kokerne existieren.
- (iv) Jeder Monomorphismus ist der Kern seines Kokerns.
- (v) Jeder Epimorphismus ist der Kokern seines Kerns.

**Beispiel 12.3** Beispiele für abelsche Kategorien sind Ab, k-VR, Ringe, R-Mod,  $\mathcal{O}_X$ -Mod. Nicht abelsch dagegen sind beispielsweise die Kategorien Grp, Sets.

**Definition 12.4** Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie.

- (i) Ein *Komplex* in  $\mathcal{C}$  ist eine Sequenz

$$C^\bullet := \dots \longrightarrow C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \longrightarrow \dots$$

von Morphismen in  $\mathcal{C}$ , sodass gilt  $d^i \circ d^{i-1} = 0$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

- (ii) Für einen Komplex  $C^\bullet$  in  $\mathcal{C}$  heißt

$$H^i(C^\bullet) := \text{Kern } d^i / \text{Bild } d^{i-1}$$

das  $i$ -te Kohomologieobjekt von  $C^\bullet$ .

**Proposition 12.5** Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie.

- (i) Die Komplexe in  $\mathcal{C}$  bilden eine Kategorie  $\mathcal{C}^\bullet$  mit Morphismen

$$\begin{array}{ccccccc} C^\bullet & & \dots & \longrightarrow & C^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d^i} & C^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ \alpha \downarrow & & & & \alpha_{i-1} \downarrow & & \alpha_i \downarrow & & \alpha_{i+1} \downarrow & & \\ D^\bullet & & \dots & \longrightarrow & D^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{d^i} & D^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

- (ii)  $H^i$  ist ein kovarianter, linksexakter Funktor  $\mathcal{C}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}$ .
- (iii) Zu jeder kurzen exakten Sequenz  $0 \rightarrow C'^\bullet \xrightarrow{\alpha} C^\bullet \xrightarrow{\beta} C''^\bullet \rightarrow 0$  von Komplexen in  $\mathcal{C}^\bullet$  gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow H^i(C'^\bullet) \rightarrow H^i(C^\bullet) \rightarrow H^i(C''^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(C'^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(C^\bullet) \rightarrow \dots$$

*Beweis.* (ii) Sei  $\alpha : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  Morphismus von Komplexen in  $\mathcal{C}^\bullet$  wie in (i), wir haben also für alle  $i \in \mathbb{Z}$  Morphismen  $\alpha_i : C^i \rightarrow D^i$  gegeben. Wir suchen nun

$$\tilde{\alpha}_i : H^i(C^\bullet) = \text{Kern } d^i / \text{Bild } d^{i-1} \rightarrow \text{Kern } d^i / \text{Bild } d^{i-1} = H^i(D^\bullet)$$

Für  $x \in \text{Kern } d^i$  ist

$$0 = \alpha_{i+1} \circ d^i = d^{i+1} \circ \alpha_i,$$

also  $\alpha_i|_{\text{Kern } d^i} \in \text{Hom}(\text{Kern } d^i, \text{Kern } d^{i+1})$  und damit induziert  $\alpha_i$  durch Restklassenbildung die Abbildung  $\tilde{\alpha}_i : \text{Kern } d^i \rightarrow H^i(D^\bullet)$ . Wir müssen noch zeigen:  $\text{Bild } d^{i-1} \subseteq \text{Kern } \tilde{\alpha}_i$ . Sei also  $x = d^{i-1}(y)$  für ein  $y \in C^{i-1}$ . Dann gilt

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(d^{i-1}(y)) = d^{i-1}(\alpha_{i-1}(y)) \in \text{Bild } (d^{i-1}),$$

also  $\tilde{\alpha}_i(x) = 0$  in  $H^i(D^\bullet)$ .

(iii) Wir haben folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & C'^{i-1} & \longrightarrow & C'^i & \xrightarrow{d^i} & C'^{i+1} & \xrightarrow{d^{i+1}} & C'^{i+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i+1} & & \downarrow \alpha_{i+2} \\
 \cdots & \longrightarrow & C^{i-1} & \longrightarrow & C^i & \xrightarrow{d^i} & C^{i+1} & \xrightarrow{d^{i+1}} & C^{i+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \beta_{i+1} & & \downarrow \beta_{i+2} \\
 \cdots & \longrightarrow & C''^{i-1} & \longrightarrow & C''^i & \xrightarrow{d''^i} & C''^{i+1} & \xrightarrow{d''^{i+1}} & C''^{i+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Wir brauchen eine Abbildung  $H^i(C''^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(C'^\bullet)$ . Sei  $x \in \text{Kern } d''^i \subseteq C''^i$ . Da  $\beta_i$  surjektiv ist, können wir ein Urbild  $y \in C'^i$  mit  $\beta_i(y) = x$  wählen. Dann gilt

$$0 = d''^i(\beta_i(y)) = \beta_{i+1}(d^i(y)),$$

also  $d^i(y) \in \text{Kern } \beta_{i+1} = \text{Bild } \alpha_{i+1}$ . Wegen letzterem können wir schreiben  $d^i(y) = \alpha_{i+1}(z)$  mit eindeutigem  $z \in C'^{i+1}$ ,  $\alpha_{i+1}$  Monomorphismus ist. Damit gilt in unserer Rechnung nun  $x \mapsto f_y(x) := \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(y)) \in C'^{i+1}$  mit einem  $y \in \beta_i^{-1}(x)$ . Es gilt sogar  $f_y(x) \in \text{Kern } d^{i+1}$ , denn es ist

$$\alpha_{i+2}(d^{i+1}(f_y(x))) = d^{i+1}(d^i(y)) = d^{i+1}(\alpha_{i+1}(z)) = 0$$

und da  $\alpha_{i+1}$  ein Monomorphismus ist, muss bereits gelten  $d^{i+1}(f_y(x)) = 0$ , das Gewünschte. Es bleibt zu zeigen, dass für eine andere Wahl  $\tilde{y}$  von  $y$  gilt  $f_y(x) - f_{\tilde{y}}(x) \in \text{Bild } d^i$  - dann ist die Abbildung

$$\tilde{\delta}^i : \text{Kern } d''^i \rightarrow H^i(C'^\bullet), \quad x \mapsto f_y(x) \quad \text{für ein } y \in \beta_i^{-1}(x)$$

wohldefiniert. Sei also  $\tilde{y} \in \beta_i^{-1}(x)$  beliebig und sei analog  $\tilde{z} = \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(\tilde{y}))$ . Es gilt  $\beta_i(y) = \beta_i(\tilde{y})$ , also  $y - \tilde{y} \in \text{Kern } \beta_i = \text{Bild } \alpha_i$ , etwa  $y - \tilde{y} = \alpha_i(w)$ . Dann ist

$$f_y(x) - f_{\tilde{y}}(x) = \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(y - \tilde{y})) = d^i(\alpha_i^{-1}(y - \tilde{y})) = d^i(w) \in \text{Bild } d^i,$$

was zu zeigen war, womit  $\tilde{\delta}^i$  wohldefiniert ist. Schließlich ist noch zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}^i$  über  $H^i(C''^\bullet)$  faktorisiert. Sei also  $x \in \text{Bild } d^{m_i-1} \subseteq \text{Kern } d^{m_i}$ , etwa  $x = d^{m_i-1}(v)$  für ein  $v \in C^{m_i-1}$ . Da  $\beta_{i-1}$  Epimorphismus ist, gilt  $v = \beta_{i-1}(\tilde{v})$  für ein  $\tilde{v} \in C^{i-1}$ , also

$$d^{m_i-1}(\beta_{i-1}(\tilde{v})) = d^{m_i-1}(v) = x = \beta_i(y) = \beta_i(d^{-1}(\tilde{w}))$$

und wir erhalten  $d^i(y) = d^i(d^{i-1}(\tilde{w})) = 0$ . Schließlich folgt

$$\tilde{\delta}_i(x) = \alpha_{i+1}^{-1}(d^i(y)) = \alpha_{i+1}(0) = 0,$$

da  $\alpha_{i+1}$  injektiv ist, was zu zeigen war. □

Sei nun  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema. Ziel soll es sein, für jede Garbe  $\mathcal{F}$  von abelschen Gruppen auf  $X$  und jedes  $i \geq 0$  eine abelsche Gruppe  $H^i(X, \mathcal{F})$  mit folgenden Eigenschaften zu definieren:

- (i) Es gilt  $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ .
- (ii) Ist  $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Garben, so gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

**Proposition 12.6** Sei  $H^i(X, \cdot)$  mit (i) und (ii) gegeben,  $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow \dots$  eine exakte Sequenz von Garben auf  $X$  (eine sogenannte Auflösung von  $\mathcal{F}$ ), sodass  $H^i(X, \mathcal{G}_j) = 0$  für alle  $j \geq 0$  und  $i \geq 1$  (ein solche Garbe  $\mathcal{G}_j$  heißt azyklisch). Dann ist

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{G}^\bullet)).$$

*Beweis.* Durch Induktion über  $i$ .

$i = 0$  Da der globale Schnittfunktor  $\Gamma(X, \cdot)$  linksexakt ist, ist die Sequenz der globalen Schnitte

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{G}_0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, \mathcal{G}_1) \longrightarrow \dots$$

exakt. Dann gilt aber bereits

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \text{Kern } d^0 = \text{Bild } \alpha = H^0(\Gamma(X, \mathcal{G}^\bullet)).$$

$i = 1$  Die Auflösung von  $\mathcal{F}$  zerlegt sich in exakte Sequenzen

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_0/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{G}_0/\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2 \longrightarrow \dots$$

Nach Voraussetzung gibt es zu (1) eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}_0) = 0,$$

also gilt, da  $H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$  Epimorphismus ist

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{F}) &= H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \Big/ (\text{Kern } (H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}))) \\ &= H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \Big/ (\text{Bild } (H^0(X, \mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}))). \end{aligned}$$

Aus (2) folgt, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_1) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_2) \longrightarrow \dots$$

exakt ist, wir erhalten also

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) &= \text{Bild } (H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_1)) \Big/ (\text{Kern } (0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_0/\mathcal{F}))) \\ &= \text{Kern } (H^0(X, \mathcal{G}_1) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_2)) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{F}) &= \text{Kern } (H^0(X, \mathcal{G}_1) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_2)) \Big/ (\text{Bild } (H^0(X, \mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}_1))) \\ &= H^1(\Gamma(X, \mathcal{G}^\bullet)). \end{aligned}$$

$i > 1$  Folgt analog. □

**Erinnerung 12.7** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien und  $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$  eine exakte Sequenz in  $\mathcal{C}$ .

(i) Ein kovarianter Funktor  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  heißt *linksexakt* (bzw. *rechtsexakt*), falls die Sequenzen

$$0 \longrightarrow F(C') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C'') \quad \text{bzw.} \quad F(C') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C'') \longrightarrow 0$$

in  $\mathcal{D}$  exakt sind.

(ii) Ein kontravarianter Funktor  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  heißt *linksexakt* (bzw. *rechtsexakt*), falls die Sequenzen

$$0 \longrightarrow F(C'') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C') \quad \text{bzw.} \quad F(C'') \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C') \longrightarrow 0$$

in  $\mathcal{D}$  exakt sind.

(iii) Eine Funktor  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  heißt *exakt*, falls er links- und rechtsexakt ist.

**Definition + Bemerkung 12.8** Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie.

- (i) Ein Objekt  $I$  in  $\mathcal{C}$  heißt *injektiv*, falls  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, I)$  exakt ist.
- (ii) Ein Objekt  $P$  in  $\mathcal{C}$  heißt *projektiv*, falls  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \cdot)$  exakt ist.

Betrachte nun das folgende Diagramm mit Objekten in  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\iota} & C & \xrightarrow{\pi} & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi & \swarrow \tilde{\phi} & & \nwarrow \tilde{\psi} & \\
 & & I & & & & P \\
 & & & & & \nwarrow \psi & \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

Dann gilt:

- (iii)  $I$  ist genau dann injektiv, falls für jedes solche linksexakte Diagramm ein  $\tilde{\phi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I)$  existiert, sodass gilt  $\tilde{\phi} \circ \iota = \phi$ .
- (iv)  $P$  ist genau dann projektiv, falls für jedes solche rechtsexakte Diagramm ein  $\tilde{\psi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, C)$  existiert, sodass gilt  $\pi \circ \tilde{\psi} = \psi$ .

**Beispiel 12.9**  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ist eine injektive abelsche Gruppe.

*Beweis.* Sei  $A' \subseteq A$  abelsche Gruppen und betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A \\
 & & \downarrow \phi & & \\
 & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & & 
 \end{array}$$

mit einem Gruppenhomomorphismus  $\phi : A' \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Nach Bemerkung 2.8(iii) müssen wir für die Injektivität  $\phi$  auf  $A$  fortsetzen. Für  $a \in A$  sei

$$\tilde{\phi}_a(a) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \cdot a \notin A' \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n}\phi(na), & \text{falls } n = \min\{k \mid ka \in A'\}. \end{cases}$$

Dann ist

$$\tilde{\phi}_a : \langle A', a \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad a' + k \cdot a \mapsto \phi(a') + k \cdot \tilde{\phi}_a(na)$$

wohldefiniert und ein Homomorphismus, denn es gilt für  $ka \in A'$  mit  $k = k_0n$

$$\tilde{\phi}_a(ka) = \tilde{\phi}_a(k_0na) = k_0\phi(na) = k_0n\tilde{\phi}_a(a) = k\tilde{\phi}_a(a).$$

Damit haben wir bereits eine Fortsetzung von  $\phi$  auf  $\langle A', a \rangle$  für alle  $a \in A$ . Für  $a \in A$  sei nun

$$\Phi := \left\{ (\bar{A}, \bar{\phi} \mid A \subseteq \tilde{A} \leq A', \bar{\phi} : \bar{A} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ mit } \bar{\phi}|_{A'} = \phi) \right\}.$$

Dann ist  $\Phi$  nichtleer und durch " $\leq$ " geordnet, enthält nach Zorns Lemma also ein maximales Element  $(A_{\max}, \phi_{\max})$ . Wäre  $A_{\max} \neq A$ , so wähle  $\bar{a} \in A \setminus \bar{A}$  und verfare wir oben und führe diesen Fall zum Widerspruch. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 12.10** *Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $I_i$  injektive Objekte in  $\mathcal{C}$  für alle  $i \in I$ . Dann ist auch das direkte Produkt  $I := \prod_{i \in I} I_i$  injektiv.*

*Beweis.* Sei ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\iota} & C \\ & & \downarrow \phi & & \\ & & I & & \end{array}$$

gegeben. Da  $I_i$  injektiv ist für jedes  $i \in I$  erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\iota} & C \\ & & \downarrow \phi_i & \nearrow \tilde{\phi}_i & \\ & & I_i & & \end{array}$$

und die  $\tilde{\phi}_i$  setzen sich nach der UAE des direkten Produkts zu einem Homomorphismus  $\tilde{\phi} : C \longrightarrow I$  mit der gewünschten Kommutativität zusammen, was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 12.11** *Jede abelsche Gruppe kann in eine injektive abelsche Gruppe eingebettet werden.*

*Beweis.* Sei  $A$  abelsche Gruppe,  $a \in A \setminus \{0\}$ . Definiere

$$\phi_a : \langle a \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad a \mapsto c_a \neq 0,$$

wobei  $c_a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  beliebig gewählt ist, mit der Eigenschaft  $\text{ord}(c_a) \mid \text{ord}(a)$ , falls  $\text{ord}(a) < \infty$ . Da  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  injektiv ist, lässt sich  $\phi_a$  fortsetzen zu  $\phi_a : A \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Die  $\phi_a$  für  $a \in A$  definieren einen Homomorphismus

$$\phi : A \longrightarrow \prod_{a \in A \setminus \{0\}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad g \mapsto (\phi_a(g))_{a \in A \setminus \{0\}}.$$

$\phi$  ist injektiv, denn für alle  $a \in A \setminus \{0\}$  gilt  $(\phi(a))_a = \phi_a(a) = c_a \neq 0$ , also  $\phi(a) \neq 0$ . Damit ist  $\phi$  injektiver Homomorphismus in eine nach Lemma 12.10 injektive Gruppe.  $\square$

**Proposition 12.12** *In den Kategorien  $\underline{R}\text{-Mod}$ ,  $\underline{\mathcal{O}_X}\text{-Mod}$  und in der Kategorie der Garben abelscher Gruppen  $\underline{Ab}(X)$  auf einem Schema  $X$  lässt sich jedes Objekt in ein injektives Objekt einbetten. Man sagt: Es gibt in diesen Kategorieren genügend viele injektive Objekte.*

*Beweis.* Für  $\underline{R}\text{-Mod}$  siehe dazu in Hilton-Stammbach, I.Prop.8, für  $\underline{Ab}(X)$  und  $\underline{\mathcal{O}_X}\text{-Mod}$  siehe Hartshorne III.2.2 sowie III.2.3.

**Bemerkung 12.13** *Ist  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten, so besitzt jedes Objekt eine injektive Auflösung, also eine Auflösung mit injektiven Objekten.*

*Beweis.* Sei  $C$  ein Objekt in  $\mathcal{C}$ . Beweise die Behauptung durch Induktion über  $i$ .

$i = 0$   $I^0$  existiert nach Voraussetzung.

$i \geq 1$  Sei  $0 \longrightarrow C \longrightarrow I^0 \longrightarrow \dots \xrightarrow{d^{i-1}} I^i$  exakt mit injektiven Objekten  $I^j$  in  $\mathcal{C}$ . Sei  $I^{i+1}$  ein injektives Objekt mit

$$I^i / d^{-1}(I^{i-1}) \subseteq I^{i+1}$$

(das existiert, da es genügend viele injektive Objekte in  $\mathcal{C}$  gibt). Dann gilt für die Abbildung  $d^i : I^i \longrightarrow I^{i+1}$  gerade  $\text{Kern } d^i = d^{i-1}(I^{i-1}) = \text{Bild } d^{i-1}$ , die Sequenz

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I^0 \longrightarrow \dots \xrightarrow{d^{i-1}} I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1}$$

ist also exakt, was zu zeigen war. □

**Definition 12.14** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema,  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen aus  $X$  und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \dots$$

eine injektive Auflösung von  $\mathcal{F}$ . Dann heißt für  $i \geq 0$

$$H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet))$$

die  $i$ -te Kohomologiegruppe von  $\mathcal{F}$ .

**Bemerkung 12.15** (i) Es gilt  $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$  für jedes  $\mathcal{F} \in \underline{Ab}(X)$ .

(ii) Es gilt  $H^i(X, \mathcal{I}) = 0$  für jede injektive Garbe  $\mathcal{I} \in \underline{Ab}(X)$  und  $i \geq 1$ .

*Beweis.* (i) Siehe 12.4.

(ii) Wähle eine Auflösung  $0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$  von  $\mathcal{I}$ . Dann folgt die Behauptung. □

**Satz 12.16** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema.

(i) Für  $\mathcal{F} \in \underline{Ab}(X)$  ist  $H^i(X, \mathcal{F})$  nicht von der gewählten injektiven Auflösung abhängig.



- (ii)  $H^i(X, \cdot) : \underline{\mathcal{A}b}(X) \longrightarrow \underline{\mathcal{A}b}$  ist ein Funktor.  
 (iii) Ist  $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen, so gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

*Beweis.* (ii) Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Garben abelscher Gruppen mit injektiven Auflösungen

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet, \quad 0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet$$

sowie  $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$  ein Garbenmorphismus. Definiere  $\phi^i : \mathcal{I}^i \longrightarrow \mathcal{J}^i$  wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{I}^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{I}^1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \phi & \searrow \epsilon \circ \phi & \downarrow \phi^0 & & \downarrow \phi^1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{\epsilon}} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{\tilde{d}^0} & \mathcal{J}^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

$\phi^0$  sei die Fortsetzung von  $\tilde{\epsilon} \circ \phi$  auf  $\mathcal{I}^0$  ( $\mathcal{J}^0$  ist injektiv). Zur Definition von  $\phi^1$  brauchen wir, dass  $\tilde{d}^0 \circ \phi^0$  über  $\mathcal{I}^0 / \text{Kern } d^0$  faktorisiert mit  $\text{Kern } d^0 = \text{Bild } \epsilon = \mathcal{F}$ . Es ist aber  $\mathcal{F} \subseteq \text{Kern } \tilde{d}^0 \circ \phi^0$ , da  $\phi^0(\mathcal{F}) \subseteq \tilde{\epsilon}(\mathcal{G}) = \text{Kern } \tilde{d}^0$ . Die  $\phi^i$  induzieren einen Morphismus  $\Gamma(X, \mathcal{I}^0) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^0)$ , wir erhalten also einen Morphismus von Komplexen  $\mu : \Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet)$ . Nach 12.5 induzieren diese Homomorphismen

$$\bar{\phi}_i : H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \longrightarrow H^i(\Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet)) = H^i(X, \mathcal{G}).$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\bar{\phi}_i$  nicht von der Wahl der  $\phi^i$  abhängt. Seien also  $\phi^i, \tilde{\phi}^i$  Fortsetzungen, ohne Einschränkung gelte  $\phi = 0, \tilde{\phi}^i = 0$ . Zu zeigen ist: Es gilt ebenfalls  $\phi^i = 0$ , das heißt,  $\phi^\bullet$  induziert die Nullabbildung auf  $H^\bullet(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet))$ .

**Beh. (a)** Für  $i \geq 1$  gibt es Homomorphismen  $h^i : \mathcal{I}^i \longrightarrow \mathcal{J}^{i-1}$  mit

$$\phi^i = \tilde{d}^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i, \quad \phi^0 = h^1 \circ d^0.$$

Wenden wir nun den Schnittfunktor  $\Gamma(X, \cdot)$  auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{I}^i & \xrightarrow{d^i} & \mathcal{I}^{i+1} \\ & \swarrow h^i & \downarrow \phi^i & \searrow h^{i+1} & \\ \mathcal{J}^{i-1} & \xrightarrow{\tilde{d}^{i-1}} & \mathcal{J}^i & & \end{array}$$

an, so erhalten wir Homomorphismen

$$h^i : \Gamma(X, \mathcal{I}^i) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^{i-1})$$

mit derselben Eigenschaft (wobei alle Homomorphismen ihren Namen behalten haben). Sei nun  $x \in H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet))$ , also  $x \in \text{Kern } (d^i : \Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^{i+1}))$ . Dann gilt

$$\phi^i(x) = \tilde{d}^{i-1}(h^i(x)) + h^{i+1}(d^i(x)) = \tilde{d}^{i-1}(h^i(x)) \in \text{Bild } \tilde{d}^{i-1}$$

und damit  $\phi^i(x) = 0$  in  $H^i(X, \mathcal{G}) = (\text{Kern } \tilde{d}^i) / (\text{Bild } \tilde{d}^{i-1})$ , was zu zeigen war.

**Bew. (a)** Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{I}^1 \\
 & & \downarrow \phi=0 & & \downarrow \phi^0 & \searrow & \nearrow \\
 & & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{J}^0 & & \\
 & & & & & \nwarrow \bar{\phi}^0 & \nearrow h^1 \\
 & & & & & \mathcal{I}^0 / \mathcal{F} & 
 \end{array}$$

Wegen  $\phi = 0$  ist  $\mathcal{F} = \text{Kern } d^0 \subseteq \text{Kern } \phi^0$ ,  $\phi^0$  faktorisiert also über  $\mathcal{I}^0 / \mathcal{F}$ . Da  $\mathcal{J}^0$  injektiv ist und  $\mathcal{I}^0 / \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^1$ , existiert die Fortsetzung  $h^1 : \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^0$  von  $\bar{\phi}^0$  nach  $\mathcal{I}^1$  und es gilt  $\phi^0 = h^1 \circ d^0$ . Betrachte nun für  $i \geq 1$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{I}^{i-2} & \xrightarrow{d^{i-2}} & \mathcal{I}^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & \mathcal{I}^i \\
 \downarrow \phi^{i-2} & \nearrow h^{i-1} & \downarrow \phi^{i-1} & \nearrow h^i & \\
 \mathcal{J}^{i-2} & \xrightarrow{\tilde{d}^{i-2}} & \mathcal{J}^{i-1} & & 
 \end{array}$$

Setze  $\tilde{\phi}^{i-1} = \phi^{i-1} - \tilde{d}^{i-2} \circ h^{i-1} : \mathcal{I}^{i-1} \longrightarrow \mathcal{J}^{i-1}$ . Es gilt  $\text{Kern } d^{i-1} = \text{Bild } d^{i-2}$ . Für  $x \in \text{Kern } d^{i-1} = \text{Bild } d^{i-2}$ ,  $x = d^{i-1}(y)$  gilt dann  $\text{Kern } d^1 \subseteq \tilde{\phi}^1$ , wir erhalten also eine Fortsetzung  $h^i : \mathcal{I}^i \longrightarrow \mathcal{J}^{i-1}$  von  $\tilde{\phi}^1$  mit

$$h^i \circ d^{i-1} = \tilde{\phi}^{i-1} = \phi^{i-1} - \tilde{d}^{i-1} \circ h^{i-1},$$

was zu zeigen war.

- (i) Folgt aus (ii) mit  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  und  $\phi = \text{id}$ .
- (iii) Sei  $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  $\underline{\mathcal{A}b}(X)$ . Wähle injektive

Auflösungen

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{I}'^\bullet, \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{I}''^\bullet$$

von  $\mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}''$ . betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \xrightarrow{\epsilon'} & \mathcal{I}'^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}'^1 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \iota & \nearrow \psi & \downarrow \iota^1 & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{I}''^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 \oplus \mathcal{I}''^1 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \pi & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \xrightarrow{\epsilon''} & \mathcal{I}''^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}''^1 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Da  $\mathcal{I}^0$  injektiv ist und  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ , gibt es  $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0$ .  $\psi$  und  $\epsilon'' \circ \pi$  induzieren gemeinsam  $\epsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{I}''^0$ .  $\epsilon$  ist injektiv, denn: Gilt  $(\epsilon'' \circ \pi)(x) = 0$ , so ist  $\pi(x) = 0$ , also  $x \in \text{Kern } \pi = \text{Bild } \iota = \mathcal{F}'$ , also

$$\epsilon(x) = \psi(\iota(x')) = \psi(x)$$

und damit, da  $\epsilon'$  injektiv ist

$$\epsilon(x) = 0 \iff \iota^1(\psi(x)) = 0 \iff \psi(x) = \epsilon(x) = 0 \iff x = 0.$$

Per Induktion erhalten wir auf diese Weise eine "injektive Auflösung der kurzen exakten Sequenz". Wir wenden nun den globalen Schnittfunktor  $\Gamma(X, \cdot)$  auf  $\mathcal{I}'^\bullet, \mathcal{I}^\bullet, \mathcal{I}''^\bullet$  an und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in  $\underline{\text{Ab}}$  (Beachte: Das geht nun wegen der geeigneten Wahl von  $\mathcal{I}^\bullet$  gut). Dazu gibt es nach 12.5 (iii) eine lange exakte Kohomologiesequenz.  $\square$

**Bemerkung 12.17** Folgende Verallgemeinerungen des Vorgehens in diesem Abschnitt sind möglich:

- (i) Es genügt, dass  $X$  ein topologischer Raum ist; die Schemastruktur ist nicht nötig.
- (ii) Alles geht genauso für Objekte in einer beliebigen abelschen Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten  $\mathcal{A}$  (statt Garben abelscher Gruppen auf  $X$ ) und einem kovarianten, linksexakten Funktor  $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  (statt dem globalen Schnittfunktor). Genauer heißt dies: Für  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  wähle eine injektive Auflösung  $0 \longrightarrow A \longrightarrow I^\bullet$ . Dann ist  $F(I^\bullet)$  ein

Komplex in  $\mathcal{B}^\bullet$ . Definiere

$$R^i F(A) := H^i(F(I^\bullet)).$$

Die  $R^i F$  sind Funktoren  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Sie heißen (rechts) abgeleitete Funktoren von  $F$ . Insbesondere gilt  $R^0 F = F$ . Eine Auswahl an Kategorien mit genügend vielen Injektiven haben wir bereits kennengelernt. Weitere linksexakte Funktoren sind beispielsweise

- (1) Die Hom-Funktoren. Die  $R^i \text{Hom}$  heißen auch  $\text{Ext}$  und  $\text{Tor}$ .
- (2) Für Schemata  $X, Y$  und einem Schemamorphismus  $f : X \rightarrow Y$  ist  $f_*$  linsexakt und kovariant. Die  $R^i f_*$  heißen auch höhere direkte Bildgarben.

## § 13 Čech-Kohomologie

**Definition + Bemerkung 13.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine Garbe in  $\underline{\mathcal{A}b}(X)$  sowie  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $X$ .

- (i) Für  $k \geq 0$  ist

$$C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$$

eine abelsche Gruppe.

- (ii) Für  $k \geq 0$  ist

$$d^k : C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

$$(s_{i_0 \dots i_k})_{i_0 < \dots < i_k} \mapsto \left( \sum_{\nu=0}^{k+1} (-1)^\nu s_{i_0 \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_{k+1}} \Big|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k+1}}} \right)_{i_0 < \dots < i_{k+1}}$$

ein Gruppenhomomorphismus.

- (iii) Es gilt  $d^{k+1} \circ d^k = 0$  für alle  $k \geq 0$ , d.h.  $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  ist ein Komplex.

- (iv) Die Gruppe

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := H^k(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$$

heißt  $k$ -te Čechkohomologiegruppe von  $\mathcal{F}$  bezüglich der Überdeckung  $\mathfrak{U}$ .

- (v) Es gilt  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ .

*Beweis.* (iii) Durch Induktion über  $k$ :

$k = 0$ : Sei  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(U_i) = C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ . Dann gilt

$$d^0((s_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (s_j|_{U_i \cap U_j} - s_i|_{U_i \cap U_j})_{i < j}$$

und damit mit  $U_{ijl} := U_i \cap U_j \cap U_l$

$$d^1(d^0((s_i)_{i \in \mathbb{N}})) = ((s_l - s_j)|_{U_{ijl}} - (s_l - s_i)|_{U_{ijl}} + (s_j - s_i)|_{U_{ijl}})_{i < j < l} = 0.$$

$k \geq 1$ : Sei nun  $(s_{i_0 \dots i_k})_{i_0 < \dots < i_k} \in C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ . Dann gilt mit  $\tilde{U}_k := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$

$$(d^{k+1} \circ d^k)((s_{i_0 \dots i_k})_{i_0 < \dots < i_k}) = d^{k+1} \left( \left( \sum_{\nu=0}^{k+1} (-1)^\nu s_{i_0 \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_{k+1}} \Big|_{\tilde{U}_{k+1}} \right)_{i_0 < \dots < i_{k+1}} \right)$$

Die Vorzeichen kürzen sich weg und es bleibt  $d^{k+1} \circ d^k = 0$ .

(v) Es gilt  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \text{Kern } d^0$ . Weiter ist

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(U_i).$$

Sei nun  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \text{Kern } d^0$ . Dann gilt

$$d^0((s_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (s_j - s_i|_{U_i \cap U_j})_{i < j} \stackrel{!}{=} 0.$$

Da  $\mathcal{F}$  eine Garbe ist, existiert ein eindeutiger globaler Schnitt  $s \in \mathcal{F}(X)$  mit  $s_i = s|_{U_i}$ , also  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \text{Kern } d^0 \subseteq \mathcal{F}(U)$ . Ist hingegen  $s \in \mathcal{F}(U)$ , so gilt selbstverständlich  $(s|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} - (s|_{U_j})|_{U_i \cap U_j} = 0$ , also  $s \in \text{Kern } d^0$ .  $\square$

**Beispiel 13.2** Sei  $X = \mathbb{S}^1$  sowie  $\mathcal{F} = \mathbb{Z}$  die zur konstanten Prägarbe  $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$  assoziierte Garbe auf  $X$ . Sei durch  $\mathfrak{U} := \{U_1, U_2\}$  mit

$$U_1 := \left\{ (\cos u, \sin u) \mid u \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right\}, \quad U_2 := \left\{ (\cos u, \sin u) \mid u \in \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

eine offene Überdeckung von  $X$  gegeben. Dann hat  $U_1 \cap U_2 = D_1 \cup D_2$  zwei Zusammenhangskomponenten. Für den Čechkomplex erhalten wir

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2) \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathcal{F}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0, \quad \text{für } k \geq 0.$$

Für  $d^0$  gilt

$$d^0 : \mathbb{Z}^2 = C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2, \quad (a, b) \mapsto (b - a, b - a)$$

und damit  $\text{Bild } (d^0) = \{(a, a) \in \mathbb{Z}^2\} = \Delta\mathbb{Z}$ . Die Čechkohomologiegruppen ergeben sich dann zu

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(X) = \mathbb{Z},$$

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \text{Kern } d^1 / \text{Bild } d^0 = \mathbb{Z}^2 / \Delta\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z},$$

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{für } k \geq 0.$$

**Definiton + Proposition 13.3** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{A}b}(X)$  sowie  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $X$ .

(i) Für  $k \geq 0$  sei

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_k} (\iota_{i_0 \dots i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}},$$

wobei  $\iota_{i_0 \dots i_k} : U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \hookrightarrow X$  die Inklusion ist. Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist also

$$\Gamma(U, \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(U) = \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U \cap U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}).$$

Insbesondere gilt für die globalen Schnitte

$$\Gamma(X, \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

(ii) Definiere für  $k \geq 0$  Garbenmorphismen

$$d^k : \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

wie in 13.1(ii) und erhalte dadurch ebenfalls einen Komplex  $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ .

(iii) Definiere einen weiteren Garbenmorphismus  $\epsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  wie folgt: Für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  sei  $\epsilon_U$  der Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \epsilon_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(U \cap U_i) \\ s &\longmapsto (s|_{U \cap U_i})_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Dann ist  $\epsilon$  wegen der Garbeneigenschaft ein Monomorphismus.

(iv) Die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} \mathcal{C}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} \dots$$

ist exakt, also eine Auflösung von  $\mathcal{F}$ .

*Beweis.* (iv) Zeige zunächst die Exaktheit bei  $\mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ . Sei  $U \subseteq X$  offen,  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Gamma(U, \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$ .

Dann gilt  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \text{Kern } d^0$  genau dann, wenn gilt  $s_i|_{U \cap U_i \cap U_j} = s_j|_{U \cap U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}$ . Da  $\mathcal{F}$  eine Garbe ist, gibt es einen eindeutigen Schnitt  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $s_i = s|_{U \cap U_i}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , das heißt es gilt  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} = \epsilon_U(s)$  und damit im Bild von  $\epsilon$ , also  $\text{Kern } d^0 = \text{Bild } \epsilon$ , was die Exaktheit an dieser Stelle bedeutet. Sei nun  $k \geq 1$  beliebig. Es genügt, die Exaktheithalmweise zu zeigen. Sei also  $x \in X, j \in \mathbb{N}$  mit  $x \in U_j$ .

**Beh. (a)** Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

$$h_x^k : \mathcal{C}_x^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}_x^{k-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

$$\text{mit } d_x^{k-1} \circ h_x^k + h_x^{k+1} \circ d_x^k = \text{id}.$$

Dann gilt für  $\bar{s} \in \text{Kern } d_x^k$

$$\bar{s} = \text{id}(\bar{s}) = d_x^{k-1}(h_x^k(\bar{s})) + h_x^{k+1}(d_x^k(\bar{s})) = d_x^{k-1}(h_x^k(\bar{s})) \in \text{Bild } d_x^{k-1},$$

also  $\text{Kern } d_x^k \subseteq \text{Bild } d_x^{k-1}$ . Wegen  $d_x^k \circ d_x^{k-1} = 0$  folgt dann bereits  $\text{Kern } d_x^k = \text{Bild } d_x^{k-1}$ , das heißt, der Komplex ist exakt. Es bleibt noch die Behauptung zu zeigen.

**Bew. (a)** Sei  $\bar{s} \in \mathcal{C}_x^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , das heißt es ist  $\bar{s} = [(V, s)]$  mit  $V \subseteq U_j$  und  $s = (s_{i_0 \dots i_k})_{i_0 < \dots < i_k} \in \mathcal{F}(V \cap U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$ . Sei weiter

$$t_{i_0 \dots i_{k-1}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } j \in \{i_0, \dots, i_{k-1}\} \\ (-1)^\nu s_{i_0, \dots, i_{\nu-1}, j, i_{\nu}, \dots, i_{k-1}}, & \text{falls } i_{\nu-1} < j < i_\nu. \end{cases}$$

Setze nun

$$h_x^k(\bar{s}) := [(V, (t_{i_0, \dots, i_{k-1}})_{i_0 < \dots < i_{k-1}})]$$

und zeige, dass der so definierte Homomorphismus  $h_x^k$  die gewünschte Eigenschaft erfüllt (Übung).  $\square$

**Folgerung 13.4** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F} \in \underline{\text{Ab}}(X)$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $X$  sowie  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann gibt es für jedes  $k \geq 0$  einen natürlichen Homomorphismus

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{F}).$$

*Beweis.* Sei  $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$  eine injektive Auflösung von  $\mathcal{F}$ .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \\ & & \text{id} \downarrow & & \phi^\bullet \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{I}^\bullet \end{array}$$

Nach Übungsaufgabe 10.2 gibt es einen Morphismus von Komplexen  $\phi^\bullet : \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ , welcher auf  $\mathcal{F}$  die Identität induziert. Anwenden des globalen Schnittfunktors liefert die gewünschten Gruppenhomomorphismen.

## § 14 Kohomologie quasikohärenter Garben

**Definition 14.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $X$ .  $\mathcal{F}$  heißt *welk*, falls für alle offenen Teilmengen  $U \subseteq V \subseteq X$  die Restriktionsabbildung  $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$  surjektiv ist.

**Beispiel 14.2** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (i) Sei  $x \in X$  sowie  $A$  eine abelsche Gruppe. Dann ist die Wolkenkratzergarbe

$$x_*(A)(U) := \begin{cases} A, & \text{falls } x \in U \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

welk.

- (ii) Ist  $X$  irreduzibel, so ist jede Konstante Garbe auf  $X$  welk.

**Proposition 14.3** Sei  $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  $\underline{Ab}(X)$ .

- (i) Ist  $\mathcal{F}'$  welk, so ist für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$$

exakt, das heißt  $\beta_U$  ist surjektiv.

- (ii) Sind  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$  welk, so ist auch  $\mathcal{F}''$  welk.

*Beweis.* (i) Sei  $s'' \in \mathcal{F}''(U)$  und zeige: Es gibt ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $\beta_U(s) = s''$ . Da  $\beta$  ein Epimorphismus ist, gibt es eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $U$  und  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $\beta_{U_i}(s_i) = s''|_{U_i}$ . Definiere nun

$$\Phi := \{(V, s) \mid V \subseteq U \text{ offen, } s \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } (\beta_U)|_V = \beta_V(s) = s''|_V\}$$

Wegen  $(U_i, s_i) \in \Phi$  ist  $\Phi$  nichtleer. Außerdem ist  $\Phi$  durch

$$(V, s) \leq (V', s') : \Longleftrightarrow V \subseteq V' \text{ und } s'|_V = s$$



halbgeordnet und für jede aufsteigende Kette  $(V_1, s_1) \leq (V_2, s_2) \leq \dots$  in  $\Phi$  ist durch

$$V := \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

sowie der Verklebung der  $s_i$  (Garbeneigenschaft) eine obere Schranke gegeben. Zorns Lemma liefert also die Existenz eines maximalen Elements  $(U_0, s_0) \in \Phi$ .

**Beh. (a)** Es gilt  $U_0 = U$ .

**Bew. (a)** Angenommen es gelte  $U_0 \subsetneq U$ . Dann wähle  $x \in U \setminus U_0$  sowie  $(V, s_1) \in \Phi$  mit  $x \in V$ . Dann gilt

$$s_1|_{U_0 \cap V} - s_0|_{U_0 \cap V} \in \text{Kern } \beta_{U_0 \cap V} = \text{Bild } \alpha_{U_0 \cap V},$$

das heißt es gibt ein  $s' \in \mathcal{F}(U_0 \cap V)$  mit

$$\alpha(s')|_{U_0 \cap V} = (s_1 - s_0)|_{U_0 \cap V}.$$

Da  $\mathcal{F}'$  welk ist, gilt sogar  $s' \in \mathcal{F}(V)$ . Damit stimmen  $s_1 - \alpha(s')$  und  $s_0$  auf  $U_0 \cap V$  überein, es gibt also  $s \in \mathcal{F}(U_0 \cap V)$  mit  $s|_{U_0} = s_0$ ,  $s|_V = s_1 - \alpha(s')$  und  $\beta_{U_0 \cap V}(s) = s''|_{U_0 \cap V}$ . Damit ist  $(U_0, s_0) < (U_0 \cup V, s) \in \Phi$ , ein Widerspruch zur Maximalität von  $(U_0, s_0)$ .

Damit gilt  $\beta_U(s) = s''$  und  $\beta_U$  ist surjektiv, was zu zeigen war.

(ii) Seien  $\tilde{U} \subseteq U$  offen in  $X$  und  $\tilde{s}'' \in \mathcal{F}''(\tilde{U})$ . Nach (i) gibt es  $\tilde{s} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$  mit  $\beta_{\tilde{U}}(\tilde{s}) = \tilde{s}''$ . Da  $\mathcal{F}$  welk ist, gibt es  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $\mathcal{F}\rho_{\tilde{U}}^U(s) = \tilde{s}$ . Dann gilt für  $s'' := \beta_U(s) \in \mathcal{F}''(U)$ :

$$\mathcal{F}''\rho_{\tilde{U}}^U(s'') = \beta_{\tilde{U}}(\mathcal{F}\rho_{\tilde{U}}^U(s)) = \beta_{\tilde{U}}(\tilde{s}) = \tilde{s}'',$$

das heißt  $\rho_{\tilde{U}}^U$  ist surjektiv, was zu zeigen war.  $\square$

**Definition 14.4** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $U \subseteq X$  offen und  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $U$ . Ist  $\iota : U \hookrightarrow X$  die Inklusion, so ist die *durch Null fortgesetzte Garbe*  $\iota_!(\mathcal{F})$  die zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V), & \text{falls } V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziierte Garbe auf  $X$ .

**Proposition 14.5** *Ein  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal geringter Raum,  $\mathcal{I}$  eine injektive  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{I}$  welk.*

*Beweis.* Seien  $U' \subseteq U \subseteq X$  offen in  $X$ . Zu zeigen: Die Restriktionsabbildung  $\rho_{U'}^U : \mathcal{I}(U) \longrightarrow \mathcal{I}(U')$  ist surjektiv. Es gilt

$$\mathcal{I}(U) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{I}|_U),$$

denn: Ein Garbenmorphismus  $\phi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{I}$  wird eindeutig durch  $\phi(1)$  bestimmt. Fasse nun  $\mathcal{O}_X|_{U'}$  als Untergarbe von  $\mathcal{O}_X|_U$  auf. Sei dazu  $\mathcal{O}_U := \iota! \mathcal{O}_X|_U$ ; dann gilt  $\mathcal{O}_{U'} \subseteq \mathcal{O}_U$ . Da  $\mathcal{I}$  injektiv ist, gilt

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{U'}, \mathcal{I}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_U, \mathcal{I}).$$

Insbesondere ist also

$$\rho_{U'}^U : \mathcal{I}(U) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_U, \mathcal{I}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{U'}, \mathcal{I}) = \mathcal{I}(U')$$

surjektiv, was zu zeigen war. □

**Proposition 14.6** *Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum,  $\mathcal{F}$  eine welk  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  azyklisch, das heißt es gilt*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

für alle  $i \geq 1$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{I}$  eine injektive  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$  und setze  $\mathcal{G} := \mathcal{I}/\mathcal{F}$ . Wir erhalten damit eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Nach 14.5 ist  $\mathcal{I}$  welk, nach 14.3 ist also auch  $\mathcal{G}$  welk. Die lange exakte Kohomologiesequenz ist

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{I}(X) \xrightarrow{\beta_0} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_1} H^1(X, \mathcal{I}) \xrightarrow{\beta_1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_2} \dots$$

Nach 14.2 (i) ist  $\beta_0$  surjektiv, also Kern  $\delta^0 = \operatorname{Bild} \beta_0 = \mathcal{G}(X)$ . Damit ist Kern  $\alpha_1 = \operatorname{Bild} \delta^0 = 0$ ,  $\alpha_1$  ist also injektiv. Da  $\mathcal{I}$  injektiv ist, also  $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$  für  $i \geq 1$ . Dann folgt aber bereits  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ . Mit gleichem Argument gilt auch  $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ . Iterativ folgt damit die Behauptung. □

**Proposition 14.7** *Sei  $X = \operatorname{Spec} R$  ein affines noethersches Schema,  $I$  ein injektiver  $R$ -Modul. Dann ist  $\tilde{I}$  welk.*

*Beweis.* Da aus der Surjektivität von  $\rho_{U'}^X = \rho_{U'}^U \circ \rho_U^X$  für  $U' \subseteq U \subseteq X$  bereits die Surjektivität von

$\rho_U^U$ , folgt, genügt es zu zeigen, dass für alle offenen Teilmengen  $U \subseteq X$  die Restriktionsabbildung

$$\rho_U^X : \tilde{I}(X) = I \longrightarrow \tilde{I}(U)$$

surjektiv ist. Sei dazu zunächst  $U = D(f)$  für ein  $f \in R$ . Dann ist

$$\tilde{I}(U) = \tilde{I}(D(f)) = I_f = I \otimes_R R_f.$$

Sei also  $\frac{b}{f^n} \in I_f$  mit  $b \in I$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  und zeige, dass es ein  $a \in I$  gibt mit

$$\rho_{D(f)}^X(a) = \frac{a}{1} = \frac{b}{f^n}$$

in  $I_f$ , also  $f^m(f^n a - b) = 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ . Für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$  sei nun die  $R$ -lineare Abbildung

$$\phi_m : R \longrightarrow (f^{m+n}), \quad 1 \mapsto f^{m+n}$$

gegeben. Dann gilt für den Kern

$$\text{Kern } \phi_m = \text{Ann}(f^{m+n}) = \{r \in R \mid r f^{m+n} = 0\} \subset R.$$

Außerdem gilt  $\text{Ann}(f^k) \subseteq \text{Ann}(f^{k+1})$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Da  $R$  noethersch ist, gibt es ein  $m \in \mathbb{N}_0$ , sodass

$$\text{Ann}(f^m) = \text{Ann}(f^{m+1}) = \dots = \text{Ann}(f^{m+n}) = \dots,$$

das heißt es gilt  $\text{Kern } \phi_m = \text{Ann}(f^m)$ . Mit dem Homomorphiesatz ist

$$R / \text{Ann}(f^m) \cong (f^{m+n})$$

als  $R$ -Moduln. Sei nun durch

$$\psi : R \longrightarrow I, \quad 1 \mapsto f^m b$$

eine weitere  $R$ -lineare Abbildung definiert. Dann gilt  $\text{Ann}(f^m) \subseteq \text{Kern } \psi$ ,  $\psi$  induziert also

$$\bar{\psi} : R / \text{Ann}(f^m) \cong (f^{m+n}) \longrightarrow I.$$

$I$  ist injektiv, wir können  $\bar{\psi}$  also fortsetzen zu  $\tilde{\psi} : R \longrightarrow I$ . Setze nun  $a := \tilde{\psi}$ . Dann gilt

$$f^m b = \psi(1) = \bar{\psi}(f^{m+n}) = \tilde{\psi}(f^{m+n} \cdot 1) = \tilde{\psi}(f^{n+m}) \tilde{\psi} = f^{m+n} a,$$

woraus also die Behauptung für den Fall  $U = D(f)$  folgt. Sei nun  $U$  beliebig. Sei  $f \in R$  mit

$D(f) \subseteq U$  und  $t \in \tilde{I}(U)$ . Dann gibt es nach dem Spezialfall ein  $s \in I$  mit  $s|_{D(f)} = t|_{D(f)}$ . Damit gilt

$$\text{Supp}(s - t) \subseteq \text{Supp}(\tilde{I}) \cap \text{Supp}(U \setminus D(f)).$$

Zeige nun die Behauptung durch Induktion über  $\dim \text{Supp}(\tilde{I}) =: n$ : Für  $n = 0$  ist  $\tilde{I}$  eine Wolkenkratzergarbe (bzw. eine Summe von Wolkenkratzergarben) und damit welk. Den Fall  $n \geq 1$  wollen wir nicht diskutieren - allerdings sei an dieser Stelle ein algebraischer Import bemerkt: Der  $R$ -Modul  $J \subseteq I$ , der von den Elementen mit Träger in  $\overline{\text{Supp}(\tilde{I}) \setminus D(f)}$  ist injektiv.  $\square$

**Folgerung 14.8** *Sei  $X = \text{Spec} R$  ein noethersches, affines Schema und  $\mathcal{F}$  eine quasikohärente Garbe auf  $X$ . Dann gilt für alle  $i \geq 1$*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

*Beweis.* Sei also  $\mathcal{F} = \tilde{F}$  für den  $R$ -Modul  $F = \mathcal{F}(X)$  sowie

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^\bullet$$

eine injektive Auflösung von  $F$  in  $\underline{R}\text{-Mod}$ . Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow \tilde{I}^\bullet$$

ebenfalls exakt, wir haben also eine Auflösung von  $\mathcal{F}$  durch welke, also azyklische Garben. Damit gilt nach 12.6 und wegen der Exaktheit

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(X, \tilde{I}^\bullet)) = H^i(I^\bullet) = 0$$

für  $i \geq 1$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Folgerung 14.9** *Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein noethersches Schema. Dann lässt sich jede quasikohärente Garbe auf  $X$  in eine welke, quasikohärente Garbe einbetten.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}$  quasikohärent und  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$  eine offene Überdeckung von  $X$  durch affine, noethersche Schemata  $U_i = \text{Spec} R_i$ . Nach Voraussetzung gibt es  $R_i$ -Moduln  $M_i$  mit  $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$ . Bette nun  $M_i$  in injektive  $R_i$ -Moduln  $I_i$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  ein. Nach 14.5 ist die dazu gehörige quasikohärente Garbe  $\tilde{I}_i$  welk. Man sieht leicht, dass auch das direkte Bild  $\iota_{i*}(\tilde{I}_i)$  für die Inklusion  $\iota_i : U_i \hookrightarrow X$  welk ist. Setze nun

$$\rho_i : \tilde{M}_i = \mathcal{F}|_{U_i} \hookrightarrow \tilde{I}_i$$

und

$$\rho : \mathcal{F} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \iota_{i*}(\tilde{I}_i)$$

Dann ist  $\rho$  eine Einbettung von  $\mathcal{F}$  in eine injektive, quasikohärente Garbe, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Proposition 14.10** *Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{A}b}(X)$  welk und  $\mathfrak{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann gilt für alle  $i \geq 1$*

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $\mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  welk ist für alle  $k \geq 0$ , falls  $\mathcal{F}$  welk ist. Ist  $\mathcal{F}$  welk, so ist auch die Einschränkung  $\mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}$  welk für alle  $i_0 < \dots < i_k$ . Weiter ist für stetige Abbildungen auch das direkte Bild  $f_* \mathcal{F}$  welk, es ist also  $(\iota_{i_0 \dots i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}$  welk. Damit ist auch das direkte Produkt

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_k} (\iota_{i_0 \dots i_k})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}$$

welk. Wählen wir nun mit

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

eine Auflösung von  $\mathcal{F}$ , so gilt nach 14.6

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^i(\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))) = H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

für alle  $i \geq 1$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Lemma 14.11** *Sei  $X$  noethersches separiertes Schema und  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine offene, affine Überdeckung von  $X$ . Dann gibt es auch für die Čechkohomologie eine lange exakte Sequenz.*

*Beweis.* Sei also eine kurze exakte Sequenz  $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$  quasikohärenter Garben gegeben. Da  $X$  separiert ist, ist  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}$  affin für alle  $i_0 < \dots < i_k$ . Nach 14.6 gilt also

$$H^i(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}, \mathcal{F}|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}) = 0$$

für alle  $i \geq 1$ , das heißt die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \longrightarrow \mathcal{G}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \longrightarrow \mathcal{H}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \longrightarrow 0$$

ist exakt. Produktbildung liefert exakte Sequenzen

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{G}(U_i) \longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(U_i) \longrightarrow 0 \\
0 &\longrightarrow \prod_{i < j \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \prod_{i < j \in \mathbb{N}} \mathcal{G}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \prod_{i < j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(U_i \cap U_j) \longrightarrow 0 \\
0 &\longrightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) = C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

also eine exakte Sequenz von Komplexen. Dazu gibt es aber eine lange exakte Sequenz, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 14.12** *Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein noethersches, separiertes Schema,  $\mathcal{F}$  eine quasikohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$  und  $\mathfrak{U}$  eine offene, affine Überdeckung von  $X$ . Dann gilt für alle  $i \geq 1$*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch Induktion über  $i$ .

$i = 0$  : Klar, denn es gilt  $H^0(\mathcal{F}, X) = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ .

$i \geq 0$  : Bette  $\mathcal{F}$  in eine kurze, quasikohärente Garbe  $\mathcal{G}$  ein und setze  $\mathcal{H} := \mathcal{G}/\mathcal{F}$ . Dann ist auch  $\mathcal{H}$  quasikohärent und die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

ist exakt. Damit gibt es eine lange, exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

und wegen  $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$  für alle  $i \geq 1$  wird diese zu

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

da diese exakt ist, folgt daraus

$$H^i(X, \mathcal{H}) \cong H^{i+1}(X, \mathcal{F})$$

für alle  $i \geq 1$ . Nach Lemma 14.11 gibt es für die Čechkohomologie ebenfalls eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

welche zu

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

wird. Auf gleiche Weise erhalten wir  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \cong \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ . Damit gilt

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) / \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \cong H^0(X, \mathcal{H}) / H^0(X, \mathcal{G}) \cong H^1(X, \mathcal{F})$$

und

$$\check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \cong H^1(X, \mathcal{H}) \cong H^2(X, \mathcal{F}).$$

Iterativ folgt damit die Behauptung. □

**Beispiel 14.13** Sei  $X = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0,0)\}$  und  $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$  mit  $U_1 = D(x), U_2 = D(y)$  eine offene Überdeckung von  $X$  sowie  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}|_{\mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0,0)\}}$  die Strukturgarbe. Dann ist

$$\check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_1) \oplus \mathcal{O}_X(U_2) = k[X, Y]_X \oplus k[X, Y]_Y$$

$$\check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U_1 \cap U_2) = \mathcal{O}_X(D(XY)) = k[X, Y]_{XY}.$$

Weiter ist

$$d^0 : \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X), \quad \left( \frac{f}{X^i}, \frac{g}{Y^j} \right) \mapsto \frac{g}{Y^j} - \frac{f}{X^i}$$

Damit ist

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) / d^0(\check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X))$$

der von den  $\frac{1}{X^i Y^j}$  für  $i, j \geq 1$  erzeugte unendlichdimensionale  $k$ -Vektorraum.

## § 15 Kohomologie auf projektiven Schemata

**Erinnerung + Bemerkung 15.1** Sei  $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$  ein graduierter, kommutativer Ring mit Eins. Definiere

$$\text{Proj } S := \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec } S \mid \mathfrak{p} \text{ ist homogen mit } S_+ \not\subset \mathfrak{p} \},$$

wobei  $S_+ := \bigoplus_{d=1}^{\infty} S_d$  das irrelevante Ideal von  $S$  ist. Die Menge  $\text{Proj } S$  wird *homogenes Spektrum von  $S$*  genannt. Für ein homogenes Ideal  $I \subset S$  setzen wir

$$V(I) := \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj } S \mid \mathfrak{p} \supseteq I \}.$$

Wir erhalten damit auf  $\text{Proj } S$  eine Topologie, die Zariski-Topologie, indem wir  $V(I)$  als abgeschlossen definieren. Für homogenes Elemente  $f \in S$  bilden die Mengen

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

eine Basis der Topologie. Die Strukturgarbe auf  $\text{Proj } S$  erhalten wir durch Fortsetzen von

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f)) := S_{(f)} := \left\{ \frac{s}{f^n} \mid s \in S, n \in \mathbb{N}, \deg s = n \deg f \right\}$$

zu einer Garbe auf  $\text{Proj } S$ , wobei  $f \in S$  homogen ist. Damit wird  $(\text{Proj } S, \mathcal{O}_{\text{Proj } S})$  zu einem lokal geringten Raum und wir schreiben  $\text{Proj } S$  statt  $(\text{Proj } S, \mathcal{O}_{\text{Proj } S})$ . Mit

$$(D_+(f), \mathcal{O}_{\text{Proj } S}|_{D_+(f)}) \cong (\text{Spec } S_{(f)}, \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}})$$

erhalten wir eine affine Überdeckung von  $\text{Proj } S$ , wodurch  $\text{Proj } S$  also zum Schema wird. Ist  $\mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ , so ist der lokale Ring in  $\mathfrak{p}$  gegeben durch

$$\mathcal{O}_{\text{Proj } S, \mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{s}{r} \mid s, r \in S \text{ homogen, } r \notin \mathfrak{p}, \deg r = \deg s \right\}.$$

Sei nun  $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$  ein graduierter  $S$ -Modul.

(i)  $M$  bestimmt eine Garbe  $\tilde{M}$  auf  $\text{Proj } S$  durch

$$\tilde{M}(D_+(f)) = M_{(f)} = \left\{ \frac{m}{f^n} \mid m \in M \text{ homogen, } \deg m = n \deg f \right\}.$$

Für jedes homogene  $f \in S$ . Insbesondere ist

$$\Gamma(X, \tilde{M}) = \tilde{M}(X) = M_0.$$

(ii) Für die Halme gilt  $\tilde{M}_x = M_{(\mathfrak{p})}$  für  $x = \mathfrak{p} \in \text{Proj } S$ .

**Bemerkung 15.2** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $S = R[X_0, \dots, X_n]$ ,  $S = \text{Proj } S =: \mathbb{P}_R^n$ . Ist  $\mathcal{F}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$  Modulgarbe auf  $X$ , so gibt es einen graduerten, endlich erzeugten  $S$ -Modul  $M$ , sodass gilt  $\mathcal{F} = \tilde{M}$ .

*Beweis.* Siehe Übungsaufgabe 9.3. □

**Definition + Bemerkung 15.3** Sei  $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty}$  ein graduierter, kommutativer Ring mit Eins und  $X = \text{Proj } S$ .

(i) Es gilt  $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$ .



(ii) Für  $n \in \mathbb{Z}$  sei  $S(n) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S(n)_d$  der graduierte  $S$ -Modul mit getwisteter Graduierung

$$S(n)_d = S_{d+n}.$$

(iii)  $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)}$  heißt die  $n$ -fach getwistete Strukturgarbe.

(iv) Ist  $S = R[X_0, \dots, X_n]$ , so ist

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1)) = S(1)_0 = S_1$$

der freie  $R$ -Modul mit Basis  $X_0, \dots, X_n$ . Allgemeiner ist

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) = S(d)_0 = S_d$$

der freie  $R$ -Modul erzeugt von den Monomen von Grad  $d$ , das heißt die

$$\left\{ X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \mid \sum_{i=0}^n d_i = d \right\}$$

bilden eine Basis. Insbesondere gilt damit für alle  $d < 0$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0.$$

**Bemerkung 15.4** Sei  $R$  ein noetherscher Ring und  $X \subseteq \mathbb{P}_R^n$  ein abgeschlossenes Unterschema sowie  $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}_R^n$  die Einbettung. Ist  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $X$ , so gilt

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\mathbb{P}_R^n, j_* \mathcal{F})$$

für alle  $i \geq 0$ .

*Beweis.* Ist  $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet$  eine exakte Auflösung. Dann ist  $0 \longrightarrow j_* \mathcal{F} \longrightarrow j_* \mathcal{J}^\bullet$  eine exakte Auflösung von  $j_* \mathcal{F}$ . Aus  $\Gamma(X, \mathcal{J}^k) = \Gamma(\mathbb{P}_R^n, j_* \mathcal{J}^k)$  folgt dann  $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}_R^n, j_* \mathcal{F})$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Satz 15.5** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $n \geq 1$ ,  $S = R[X_0, \dots, X_n]$  und  $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathbb{P}_R^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^n})$ .

(i) Es gilt für die  $n$ -te Kohomologiegruppe der Garbe  $\mathcal{O}_X(-n-1)$

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) \cong R.$$

(ii) Für jedes  $d \in \mathbb{Z}$  gibt es eine natürliche, bilineare Abbildung

$$\beta : H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \times H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) \longrightarrow R.$$

Diese ist eine nicht ausgeartete Paarung zwischen freien  $R$ -Moduln von endlichem Rang.

(iii) Für alle  $i \notin \{0, n\}$  und alle  $d \in \mathbb{Z}$  ist

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0.$$

*Beweis.* (i) Sei  $U_i = D(X_i)$  und  $\mathfrak{U} = \{U_0, \dots, U_n\}$  die kanonische Überdeckung von  $X$  durch affine, offene Teilmengen. Nach 14.9 gilt dann

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(d))$$

für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $d \in \mathbb{Z}$ . Damit folgt sofort

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$$

für alle  $i \geq n + 1$  und  $d \in \mathbb{Z}$ . Wir betrachten nun den Čech-Komplex an der  $n$ -ten Stelle:

$$\dots \xrightarrow{d^{n-2}} \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_{i-1} \cap U_{i+1} \cap \dots \cap U_n) \xrightarrow{d^{n-1}} \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_n) \xrightarrow{d^n} 0 \rightarrow \dots$$

Es gilt

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(d)) = \text{Kern } d^n / \text{Bild } d^{n-1}.$$

Es ist zum einen

$$\begin{aligned} \text{Kern } d^n &= \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_n) \\ &= \mathcal{O}_X(d)(D(X_0 \cdots X_n)) \\ &= R[X_0, \dots, X_n]_{(X_0 \cdots X_n)} \\ &= \left\{ \frac{f}{X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n}} \mid f \in S \text{ homogen, } \deg f = d + \sum_{i=0}^n d_i \right\} \end{aligned}$$

der freie  $R$ -Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \mid d_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^n d_i = d \right\}$$

sowie

$$\begin{aligned} (\check{C}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(d)))_i &= \mathcal{O}_X(d)(U_0 \cap \dots \cap U_{i-1} \cap U_{i+1} \cap \dots \cap U_n) \\ &= \mathcal{O}_X(d)(D(X_0 \cdots X_{i-1} X_{i+1} \cdots X_n)) \\ &= \left\{ \frac{f}{X_0^{d_0} \cdots X_{i-1}^{d_{i-1}} X_{i+1}^{d_{i+1}} \cdots X_n^{d_n}} \mid f \in S \text{ homogen, } \deg f = d + \sum_{i=0}^n d_i \right\} \end{aligned}$$

der freie  $R$ -Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \mid d_j \in \mathbb{Z}, \sum_{j=0}^n d_j = d, d_j \geq 0 \right\}.$$

Damit sehen wir ein:

$$X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \in \text{Bild } d^{n-1} \iff d_i \geq 0 \text{ für ein } 0 \leq i \leq n.$$

Daraus folgt: Ist  $d \geq -n$ , so ist  $d^{n-1}$  surjektiv, es gilt also

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0.$$

Ist  $d = -n - 1$ , so folgt  $d_i = -1$  für alle  $0 \leq i \leq n$ , es ist also

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) = \left\langle \frac{1}{X_0 \cdots X_n} \right\rangle_{R\text{-Mod}}$$

ein freier  $R$ -Modul von Rang 1, woraus die Behauptung folgt.

(ii) Ist  $d < 0$ , so haben wir oben gesehen, dass  $d^{n-1}$  surjektiv ist, denn aus

$$\sum_{j=0}^n d_j = -d - n - 1 > -n - 1$$

folgt  $d_j \geq 0$  für ein  $0 \leq j \leq n$  und damit  $X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n} \in \text{Bild } d^{n-1}$ . Damit ergibt sich

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) = 0.$$

Sei nun also  $d \geq 0$ . Dann wird  $H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$  als  $R$ -Modul frei erzeugt von den  $X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}$  mit  $\sum_{j=0}^n \nu_j = d$  und  $\nu_j \geq 0$  für alle  $0 \leq \nu \leq n$  (das sind die gewöhnlichen Monome von Grad  $d$ ). Wie oben bereits gesehen, wird  $H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1))$  als  $R$ -Modul frei erzeugt von den  $X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n}$  mit  $\sum_{j=0}^n \mu_j = -d - n - 1$  und  $\mu_j < 0$  für alle  $0 \leq j \leq n$ . Definiere nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta : H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \times H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) &\longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)) \cong R \\ (X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}, X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n}) &\mapsto X_0^{\mu_0+\nu_0} \cdots X_n^{\mu_n+\nu_n} \end{aligned}$$

$\beta$  ist wohldefiniert, denn die Summe der Exponenten ist gerade  $-n - 1$ . Sicherlich ist  $\beta$  bilinear. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\beta$  nicht ausgeartet ist, für jede Wahl von  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  und  $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$  mit  $\sum_{j=0}^n \nu_j = d$  und  $\nu_j \geq 0$  für alle  $0 \leq j \leq n$  bzw.  $\sum_{j=0}^n \mu_j = -d - n - 1$  und  $\mu_j < 0$  für alle  $0 \leq j \leq n$  also die Abbildungen

$$\beta_1 : H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)), \quad s \mapsto \beta(s, X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n})$$

$$\beta_2 : H^n(X, \mathcal{O}_X(-d-n-1)) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}_X(-n-1)), \quad s \mapsto \beta(X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}, s)$$

nicht die Nullabbildungen sind. Das folgt aus

$$\begin{aligned}\beta_1 \left( X_0^{-\mu_0-1} \cdots X^{-\mu_n-1} \right) &= \beta \left( X_0^{-\mu_0-1} \cdots X^{-\mu_n-1}, X_0^{\mu_0} \cdots X^{\mu_n} \right) = \frac{1}{X_0 \cdots X_n} \neq 0, \\ \beta_2 \left( X_0^{-\nu_0-1} \cdots X^{-\nu_n-1} \right) &= \beta \left( X_0^{\nu_0} \cdots X^{\nu_n}, X_0^{-\nu_0-1} \cdots X^{-\nu_n-1} \right) = \frac{1}{X_0 \cdots X_n} \neq 0.\end{aligned}$$

- (iii) Aus den Überlegungen in (i) wissen wir, dass  $H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$  für alle  $i \geq n+1$ , wir nehmen also  $0 < i \leq n-1$  an. Man überlegt sich leicht, dass jedes Element in  $H^i(X, \mathcal{O}_X(d))$  von einem Tupel von Linearkombinationen von Monomen der Form  $X_{j_0}^{\nu_0} \cdots X_{j_i}^{\nu_i}$  mit  $\sum_{l=0}^i \nu_l = d$  und  $\nu_l < 0$  für alle  $0 \leq l \leq i$  repräsentiert wird.

**Beh. (a)** Für jedes  $k \in \{0, \dots, n\}$  ist die Multiplikation mit  $X_k$

$$\mu_i : H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(d+1)), \quad s \mapsto X_k s$$

ein Isomorphismus.

Dann folgt: Ist  $X_{j_0}^{\nu_0} \cdots X_{j_i}^{\nu_i} \in H^i(X, \mathcal{O}_X(d))$ , so multiplizieren wir mit  $X_{j_0}^{-\nu_0}$  und erhalten

$$X_{j_0}^{-\nu_0} \left( X_{j_0}^{\nu_0} \cdots X_{j_i}^{\nu_i} \right) = X_{j_1}^{\nu_1} \cdots X_{j_i}^{\nu_i} = 0$$

in  $H^i(X, \mathcal{O}_X(d - \nu_0))$ . Mit Behauptung (a) folgt dann, dass bereits  $X_{j_0}^{\nu_0} \cdots X_{j_i}^{\nu_i} = 0$  in  $H^i(X, \mathcal{O}_X(d))$  gilt, also  $H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$ , was zu zeigen war. Wir müssen nun noch die Behauptung (a) zeigen.

**Bew. (a)** Sei ohne Einschränkung  $k = n$ . Wir haben eine exakte Sequenz von graduierten  $S$ -Moduln

$$0 \longrightarrow S(d) \xrightarrow{X_n} S(d+1) \longrightarrow S(d+1)/X_n S(d) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

mit

$$S(d+1)/X_n S(d) \cong (S/X_n S)(d+1) \cong R[X_0, \dots, X_{n-1}](d+1).$$

Diese liefert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow \mathcal{O}_X(d+1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(d+1)/X_n \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow 0 \quad (**)$$

von Garben. Ist  $j : Z := V(X_n) \cong \mathbb{P}_R^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}_R^n = X$  die Einbettung, so erhalten wir

$$\mathcal{O}_X(d+1)/X_n \mathcal{O}_X(d) \cong j_* \mathcal{O}_Z(d+1).$$

Wir zeigen die Behauptung nun durch Induktion über  $n$ . Ist  $n = 1$ , so ist wegen  $0 < i \leq 0$  nichts zu zeigen, sei also  $n \geq 2$ . Nach Bemerkung 15.4 gilt  $H^i(\mathbb{P}_R^{n-1}, \mathcal{F}) = H^i(X, j_* \mathcal{F})$  für jede Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $Z$ . Wir betrachten nun die lan-

ge exakte Kohomologiesequenz zu (\*\*):

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{i-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) &\rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_i} H^i(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\rightarrow H^i(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \rightarrow \dots \quad (***) \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $H^i(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0$  für  $0 \leq i \leq n-2$ , also

$$H^{i-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0 = H^i(Z, \mathcal{O}_Z(d+1))$$

für  $1 \leq i \leq n$ . Dann wird die Sequenz zu

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_i} H^i(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

und da sie noch exakt ist folgt

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_i} H^i(X, \mathcal{O}_X(d+1))$$

für alle  $1 \leq i \leq n-2$ . Es bleiben noch die Fälle  $i \in \{1, n-1\}$  zu betrachten.

$i = 1$ : Wir betrachten (\*\*\*) an der richtigen Stelle:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) &\xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_1} H^1(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\rightarrow H^1(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

dies entspricht aber gerade der Sequenz (\*), also ist  $\alpha$  die Nullabbildung und  $\mu_1$  somit injektiv. Für  $n \geq 3$  ist außerdem  $H^1(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0$ , woraus die Surjektivität von  $\mu_1$  für  $n \geq 3$  folgt. Für  $n = 2$  betrachte den Fall  $i = n-1$ .

$i = n-1$ : Wir betrachten nun also

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n-2}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) &\xrightarrow{\alpha} H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\mu_{n-1}} H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\rightarrow H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Für  $n \geq 3$  ist  $H^{n-2}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) = 0$ , also  $\mu_{n-1}$  injektiv. Für  $n = 2$  betrachte den Fall  $i = 1$ . Zeige nun noch die Surjektivität von  $\mu_{n-1}$ .

Wir haben die Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d)) &\xrightarrow{\mu_{n-1}} H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \\ &\xrightarrow{\alpha_{n-1}} H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)) \\ &\xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(X, \mathcal{O}_X(d)) \\ &\xrightarrow{\mu_n} H^n(X, \mathcal{O}_X(d+1)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$\mu_{n-1}$  ist surjektiv genau dann, wenn  $\alpha_{n-1}$  die Nullabbildung ist, was wiederum äquivalent dazu ist, dass  $\delta^{n-1}$  injektiv ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall,

wenn

$$\text{Rang}(\text{Bild } \delta^{n-1}) = \text{Rang}(H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1)))$$

(als freie  $R$ -Moduln). Dies können wir zeigen: Es ist  $H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1))$  der freie  $R$ -Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{\nu_0} \cdots X_{n-1}^{\nu_{n-1}} \mid \sum_{j=0}^{n-1} \nu_j = d+1, \nu_j < 0 \text{ für alle } 0 \leq j \leq n-1 \right\}.$$

Weiter gilt wegen der Exaktheit der Sequenz  $\text{Bild } \delta^{n-1} = \text{Kern } \mu_n$  und  $\text{Kern } \mu_n$  ist der frei erzeugte  $R$ -Modul mit Basis

$$\left\{ X_0^{\mu_0} \cdots X_{n-1}^{\mu_{n-1}} X_n^{-1} \mid \left( \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \right) - 1 = d, \mu_j < 0 \text{ für alle } 0 \leq j \leq n-1 \right\}.$$

Damit folgt offenbar  $\text{Kern } \mu_n = H^{n-1}(Z, \mathcal{O}_Z(d+1))$ , und rückwärts lesen liefert die Surjektivität von  $\mu_{n-1}$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Proposition 15.6** *Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $X \subseteq \mathbb{P}_R^n$  ein projektives Schema und  $\mathcal{F}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$ . Dann gibt es ein  $d_0 \in \mathbb{Z}$ , sodass für alle  $d \geq d_0$  die getwistete Garbe  $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$  von globalen Schnitten erzeugt wird, es also  $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(X, \mathcal{F}(d))$  gibt, sodass für alle  $x \in X$  die Keime  $(s_1)_x, \dots, (s_r)_x$  den Halm  $\mathcal{F}(d)_x$  als  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul erzeugen.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $X = \mathbb{P}_R^n$ . Überdecke  $\mathbb{P}_R^n$  durch  $D(X_i)$  für  $0 \leq i \leq n$ . Nach Voraussetzung gibt es endlich erzeugte Moduln  $M_i = \mathcal{F}(U_i)$  über  $\mathcal{O}_X(U_i) \cong R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$ , sodass gilt  $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$ . Sei nun  $i$  fest und  $s_{i_1}, \dots, s_{i_{k_i}}$  Erzeuger von  $M_i$  als  $R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$ -Modul. Dann wird für jedes  $x \in \mathbb{P}_R^n$  mit  $x \in U_i$  der Halm  $\mathcal{F}_x = (\tilde{M}_i)_x$  erzeugt von den Keimen  $(s_{i_1})_x, \dots, (s_{i_{k_i}})_x$ . Ziel soll es sein, die  $s_{i_j}$  auf geeignete Weise zu globalen Schnitten fortzusetzen. Dazu zeigen wir, dass sich  $t_{i_j} := s_{i_j} X_i^{d_i} \in \tilde{M}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$  zu einem globalen Schnitt in  $\mathcal{F}(d_i)$  fortsetzt. Sei  $0 \leq j \leq n$  mit  $j \neq i$  und  $\nu \in \{1, \dots, k_i\}$ . Dann ist

$$s_{i_\nu}|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = (M_j)_{\frac{X_j}{X_i}} = \left\{ \left( \frac{X_i}{X_j} \right)^p \cdot m_j \mid m_j \in M_j, p \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Dann gibt es ein  $d_{j\nu} \in \mathbb{N}_0$  mit  $s_{i_\nu} X_i^{d_{j\nu}} \in M_j$ , also  $s_{i_\nu} X_i^{d_{j\nu}} \in \mathcal{F}(d_{j\nu})(U_i \cap U_j)$  und damit aber bereits  $s_{i_\nu} X_i^{d_{j\nu}} \in \mathcal{F}(d_{j\nu})(U_i \cup U_j)$ . Für

$$d_i := \max_{j \in \{0, \dots, n\}} \max_{\nu \in \{1, \dots, k_i\}} d_{j\nu}$$

sind alle  $s_{i_\nu} X_i^{d_i}$  globale Schnitte. Verfahren so für alle  $0 \leq i \leq n$ , es folgt dann also die Behauptung.  $\square$

**Satz 15.7** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $X \subseteq \mathbb{P}_R^n$  ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist  $H^i(X, \mathcal{F})$  für jede kohärente Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul für alle  $i \geq 0$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung gelte  $X = \mathbb{P}_R^n$ , denn für die abgeschlossene Einbettung  $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}_R^n$  ist  $j_*\mathcal{F}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $\mathbb{P}_R^n$  und nach Bemerkung 15.4  $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}_R^n, j_*\mathcal{F})$  für alle  $i \geq 0$ .

**Beh. (a)** Es gibt einen Epimorphismus von Garben

$$\Phi : \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(d_i) \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Dann gibt es mit  $\mathcal{K} = \text{Kern } \Phi$  eine kurze Exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(d_i) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Beachte hierbei, dass  $\mathcal{K}$  ebenfalls kohärent ist, denn der Kern eines Homomorphismus von  $R$ -Moduln ist ein  $R$ -Untermodul, womit  $\mathcal{K}$  quasikohärent ist. Da  $R$  noethersch ist, ist jeder  $R$ -Untermodul eines endlich erzeugten  $R$ -Moduls endlich erzeugt,  $\mathcal{K}$  ist also kohärent. Weiter sieht man (ähnlich wie im Beweis von Satz 12.16 (iii)), dass

$$H^i \left( X, \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_X(d_j) \right) = \bigoplus_{j=1}^r H^i(X, \mathcal{O}_X(d_j)).$$

Aus der langen exakten Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(X) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d_j)) \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r H^1(X, \mathcal{O}_X(d_j)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

folgt nun die Behauptung, denn für alle  $i \geq 0$  ist  $\bigoplus_{j=1}^r H^i(X, \mathcal{O}_X(d_j))$  nach Satz 15.5 endlich erzeugt, damit auch  $H^1(X, \mathcal{K})$  und also auch  $H^1(X, \mathcal{F})$ . Iterativ folgt der Satz. Es bleibt noch die Behauptung zu zeigen.

**Bew. (a)** Nach Proposition 15.6 gibt es einen Epimorphismus

$$\Psi : \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d), \quad e_i \mapsto s_i.$$

Tensorieren mit  $\mathcal{O}_X(-d)$  liefert (wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts) einen Epimorphismus

$$\Phi : \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(-d) = \left( \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X \right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-d) \longrightarrow \mathcal{F}(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F},$$

was zu zeigen war. □

## § 16 Der Satz von Riemann-Roch für Kurven

Sei  $X$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Dann haben wir bereits gesehen, dass jeder Divisor  $D = \sum_{P \in X} n_P P$  auf  $X$  eine invertierbare Garbe  $\mathcal{L}(D)$  via

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X)^\times \mid (\operatorname{div} f + D)|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Für die globalen Schnitte gilt mit der Notation aus der algebraischen Geometrie

$$L(D) := \Gamma(X, \mathcal{L}(D)) = H^0(X, \mathcal{L}(D))$$

sowie

$$l(D) := \dim_k L(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)).$$

Sei weiter  $\Omega_X$  die Garbe der regulären Differentiale auf  $X$

$$\Omega_X(U) = \{\omega \in \Omega_{k(X)/k} \mid \operatorname{div} \omega|_U \geq 0\},$$

wobei  $\operatorname{ord}_P \omega = \operatorname{ord}_P f$ , falls  $\omega = f dt_P$  für ein uniformisierendes Element  $t_P \in \mathcal{O}_{X,P}$  und damit  $\operatorname{div} \omega|_U := \sum_{P \in U} \operatorname{ord}_P \omega P$ . Für  $\omega_0 \in \Omega_{k(X)/k} \setminus \{0\}$  heißt  $K := K_{\omega_0} = \operatorname{div} \omega_0$  *kanonischer Divisor*. Dass  $K$  dabei unabhängig von der Wahl von  $\omega_0$  ist, sieht man leicht ein: Ist  $0 \neq \omega_1 \in \Omega_{k(X)/k}$  ein weiteres Differential, so ist  $\omega_1 = f \omega_0$  für ein  $f \in k(X)^\times$ , also  $\operatorname{div} \omega_1 = \operatorname{div} \omega_0 + \operatorname{div} f$ , also  $\mathcal{L}(\operatorname{div} \omega_1) \cong \mathcal{L}(K) = \Omega_X \cong \mathcal{L}(\operatorname{div} \omega_0)$ .

**Satz 16.1 (Satz von Riemann-Roch aus der algebraischen Geometrie)** *Sei  $X$  eine nicht-singuläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  von Geschlecht  $g$ . Dann gilt für jeden Divisor  $D$  auf  $X$*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g,$$

also

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim_k H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1}) = \deg D + 1 - g.$$

*Beweis.* Siehe zum Beispiel Hartshorne IV.1.3. □

**Definition 16.2** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein noethersches Schema und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$ .



Dann definieren wir die *Eulercharakteristik* von  $\mathcal{F}$  auf  $X$  als

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim_k H^k(X, \mathcal{F}).$$

**Satz 16.3** *Sei  $X$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  und  $g = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$ . Für jeden Divisor  $D$  auf  $X$  gilt*

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g.$$

*Beweis.* Mit  $D = 0$  erhalten wir mit 16.1 und  $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}_X$  die Behauptung sofort. Ein beliebiger Divisor  $D$  ist nun eine endliche Summe und geht damit aus endlich viele Additionen von Punkten zum Divisor  $D = 0$  hervor. Wir zeigen die Behauptung also durch Induktion über  $n = \sum_{P \in X} |n_P|$ , wobei der Induktionsanfang bereits geleistet ist. Sei nun  $D$  ein Divisor und  $P \in X$  beliebige. Wir zeigen, dass

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g$$

genau dann gilt, wenn

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D + P)) - \dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D + P)) = \deg(D + P) + 1 - g$$

erfüllt ist. Nach Definition gilt  $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D + P)$ . Wir erhalten damit eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D + P) \longrightarrow \mathcal{L}(D + P) / \mathcal{L}(D) \longrightarrow 0.$$

Betrachte die Halme der Faktorgarbe. Wegen  $(\mathcal{L}(D + P) / \mathcal{L}(D))_Q = \mathcal{L}(D + P)_Q / \mathcal{L}(D)_Q$  erhalten wir für  $Q \neq P$

$$(\mathcal{L}(D + P) / \mathcal{L}(D))_Q = 0,$$

$\mathcal{L}(D + P) / \mathcal{L}(D)$  ist also eine Wolkenkratzergarbe. Ist nun  $f \in k(X)$ , so gilt  $f_P \in \mathcal{L}(D + P)$  genau dann, wenn  $\text{ord}_P f \geq -n_P - 1$  und  $f_P \in \mathcal{L}(D)$  genau dann, wenn  $\text{ord}_P f \geq -n_P$ . Insgesamt erhalten wir dadurch

$$H^0(X, \mathcal{L}(D + P) / \mathcal{L}(D)) \cong k, \quad H^i(X, \mathcal{L}(D + P) / \mathcal{L}(D)) = 0 \quad \text{für } i \geq 1$$

Übungsaufgabe 13.3 liefert

$$\chi(\mathcal{L}(D + P)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + \chi(\mathcal{L}(D + P) / \mathcal{L}(D)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + 1,$$

woraus zusammen mit  $\deg D + P = \deg D + 1$  die Behauptung folgt.  $\square$

**Folgerung 16.4** *Vergleicht man die Sätze 16.1 und 16.2, so folgt*

$$\dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \dim_k H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1}).$$

*Dieser Zusammenhang wird als Serre-Dualität bezeichnet. Wir werden später noch sehen, dass  $H^1(X, \mathcal{L}(D))$  kanonisch isomorph zu  $H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1})$  ist.*

**Bemerkung 16.5** *Mit  $P \neq Q$  erhalten wir durch  $\{X \setminus \{P\}, X \setminus \{Q\}\}$  eine affine Überdeckung durch zwei offene Mengen. Da  $\mathcal{L}(D)$  quasikohärent ist, gilt also  $H^k(X, \mathcal{L}(D)) = 0$  für  $k \geq 2$ . Der linke Term von Satz 16.2 ist also gerade die Eulercharakteristik*

$$\chi(\mathcal{L}(D)) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim_k H^k(X, \mathcal{L}(D))$$

*von  $\mathcal{L}(D)$ .*

**Beispiel 16.6** Nach 16.4 folgt für  $D = K$

$$\dim_k H^1(X, \mathcal{L}(K)) = \dim_k H^1(X, \Omega_X) = \dim_k H^0(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1.$$

Was genau aber ist  $H^1(X, \mathcal{L}(K))$ ? Wir berechnen die Dimension im Folgenden per Hand: Seien  $P_1 \neq P_2 \in X$  Punkte und wähle eine affine Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$  von  $X$ , wobei  $U_i = X \setminus \{P_i\}$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Dann gilt

$$H^1(X, \Omega_X) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \Omega_X) = \check{C}^1(\mathfrak{U}, \Omega_X) / \text{Bild } d^0 = \Omega_X(U_1 \cap U_2) / (\Omega_X(U_1) - \Omega_X(U_2)).$$

Wir behaupten nun:

- (i) Es gibt kein  $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$  mit  $\text{ord}_{P_1} \omega = -1$  und  $\text{ord}_P \omega = 0$  für alle  $P \in X \setminus \{P_1\}$ .
- (ii) Es gibt für alle  $n \geq 2$  ein  $\omega_n \in \Omega_{k(X)/k}$  mit  $\text{ord}_{P_1} \omega_n = -n$  und  $\text{ord}_P \omega_n = 0$  für alle  $P \in X \setminus \{P_1\}$ .
- (iii) Es gibt ein  $\omega_0 \in \Omega_{k(X)/k}$  mit  $\text{ord}_{P_1} \omega_0 = \text{ord}_{P_2} \omega_0 = -1$  und  $\text{ord}_P \omega_0 = 0$  für alle  $P \in X \setminus \{P_1, P_2\}$ .

Dann folgt aus den Behauptungen:  $\dim_k (\Omega_X(U_1 \cap U_2) / (\Omega_X(U_1) - \Omega_X(U_2))) = 1$ , denn: (folgt).

Wir zeigen noch die Behauptungen.

*Beweis.* (i) Ein solches  $\omega$  wäre in  $H^0(X, \Omega_X(P_1))$ , wobei wir  $\Omega_X(P_1) := \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(P_1)$  setzen.

Nach Riemann-Roch ist

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(P_1)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(P_1)) - \deg(-P_1) - 1 + g = g,$$

denn es gibt keine Funktionen auf  $X$  mit mindestens einer Nullstelle und ohne Polstellen. Wegen  $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = g$  folgt

$$\omega \in H^0(X, \Omega_X(P_1)) \iff \omega \in H^0(X; \mathcal{O}_X),$$

also  $\omega \notin H^0(X, \Omega_X(P_1))$ , ein Widerspruch.

(ii) Wir verfahren völlig analog. Riemann-Roch liefert

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(nP_1)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(-nP_1)) - \deg nP_1 - 1 + g = n - 1 + g.$$

Für  $n \geq 2$  ist also

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(nP_1)) = \dim_k H^0(X, \Omega_X((n-1)P_1)) + 1,$$

woraus die Existenz des gewünschten Differentials folgt.

(iii) Ebenso erhalten wir

$$\dim_k H^0(X, \Omega_X(P_1 + P_2)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(-P_1 - P_2)) - \deg(-P_1 - P_2) - 1 + g = 1 + g.$$

Damit existiert ein  $\omega_0 \in H^0(X; \Omega_X(P_1 + P_2)) \setminus H^0(X, \mathcal{O}_X)$  und wegen (i) gilt bereits  $\text{ord}_{P_1} \omega_0 + \text{ord}_{P_2} \omega_0 = -1$ .  $\square$

**Beispiel 16.7** Werden wir nun konkreter und betrachten  $X = \mathbb{P}_k^1$ . Wir wollen nun zu gegebenen Punkte Differenziale finden, welche den Behauptungen aus Beispiel 13.6 nach existieren. Betrachte  $\frac{dz}{z} \in \Omega_{k(X)/k}$ . Dann gilt

$$\text{ord}_0 \left( \frac{dz}{z} \right) = -1, \quad \text{ord}_\infty \left( \frac{dz}{z} \right) = -1.$$

Um zweiteres einzusehen, müssen wir das Differential eines uniformisierenden Elements des zugehörigen maximalen Ideals nehmen. Beachte an dieser Stelle, dass  $dz$  uniformisierend in jedem Punkt außer  $\infty$  ist. Es gilt

$$\frac{dz}{z} = -\frac{z^2}{z} d \left( \frac{1}{z} \right) = -z d \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{\frac{1}{z}} d \left( \frac{1}{z} \right),$$

also gerade

$$\text{ord}_\infty \left( \frac{dz}{z} \right) = -1.$$

Wählen wir nun allgemeine Punkte  $a, b \in \mathbb{P}_k^1 \setminus \{\infty\}$ , so ist für

$$\omega_{a,b} = \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

offensichtlich  $\text{ord}_a \omega_{a,b} = -1 = \text{ord}_b \omega_{a,b}$  und  $\text{ord}_P \omega_{a,b} = 0$  für alle  $P \in \mathbb{P}_k^1 \setminus \{a, b, \infty\}$ . Was ist mit dem Punkt  $\infty$ ? Wir schreiben wieder

$$\omega_{a,b} = \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = -\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} d\left(\frac{1}{z}\right),$$

also auch  $\text{ord}_\infty \omega_{a,b} = 0$ .

**Definition + Bemerkung 16.8** Sei  $X$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ ,  $\omega \in \Omega_{k(X)/k} \setminus \{0\}$  ein Differential sowie  $P \in X$ . Sei weiter  $t_P$  ein uniformisierendes Element in  $P$  und  $f \in k(X)^\times$ , sodass  $\omega = f dt_P$  und es gelte  $\text{ord}_P \omega = -n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

- (i)  $f$  besitzt eine eindeutige Darstellung  $f = a_{-n} t_P^{-n} + a_{-n-1} t_P^{-n-1} + \dots + a_{-1} t_P^{-1} + f_0$  mit  $f_0 \in \mathcal{O}_{X,P}$  und Körperelementen  $a_i \in k$ .
- (ii) Wir definieren das *Residuum* von  $\omega$  in  $P$  als

$$\text{res}_P \omega := a_{-1}.$$

Gilt  $\text{ord}_P \omega \geq 0$ , so setzen wir  $\text{res}_P \omega := 0$ .

- (iii) Das Residuum hängt nicht von der Wahl von  $t_P$  ab.

*Beweis.* (i) Klar.

- (iii) Wir zeigen die Aussage lediglich für  $\text{char } k \neq 2$ .

**Fall (a)** Es gilt  $\omega = \frac{dt_P}{t_P}$ , also  $f = \frac{1}{t_P}$  und damit  $\text{res}_P \omega = 1$ . Sei nun  $z$  eine weitere Uniformisierende in  $P$ , es gelte also  $z = t_P u$  mit einer Einheit  $u \in \mathcal{O}_{X,P}^\times$ . Dann gilt  $u = 1 + t_P h$  mit  $h \in \mathcal{O}_{X,P}$  und damit  $z = t_P(1 + t_P h)$ . Dann gilt

$$dz = dt_P + d(t_P^2 h) = dt_P + t_P^2 dh + 2t_P dt_P h = dt_P + t_P^2 h' dt_P + 2t_P h' dt_P = dt(1 + 2h' t_P + t_P^2 h').$$

Wir erhalten damit

$$\frac{dt_P}{t_P} = \frac{dz}{1 + 2h' t_P + t_P^2 h'} \frac{1 + t_P h'}{z} = \frac{dz}{z} \frac{1 + t_P h}{1 + 2h' t_P + t_P^2 h'}.$$

Wegen  $t_P(P) = 0$  gilt

$$\frac{1 + t_P h'}{1 + 2h' t_P + t_P^2 h'} \in \mathcal{O}_{X,P}^\times$$

und damit

$$\operatorname{res}_P \frac{dz}{z} = 1 = \operatorname{res}_P \frac{dt_P}{t_P},$$

was zu zeigen war.

**Fall (b)** Man kann leicht die Identität

$$\frac{dt_P}{t_P^n} = -\frac{1}{n-1} d\left(\frac{1}{t_P^{n-1}}\right)$$

für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  verifizieren. Ist  $z$  nun ein beliebiges uniformisierendes Element in  $P$ , so schreibe

$$\frac{1}{t_P^{n-1}} = \frac{1}{z^{n-1}} + b_{n-2} \frac{1}{z^{n-2}} + \dots + b_1 \frac{1}{z} + c_0$$

mit  $c_0 \in \mathcal{O}_{X,P}^\times$ . Dann gilt

$$d\left(\frac{1}{t_P^{n-1}}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i d\left(\frac{1}{z^i}\right) + dc_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} b_i i \frac{dz}{z^{i+1}} + c'_0 dz.$$

In dieser Darstellung fehlt der  $\frac{1}{z}$ -Term, das heißt das Residuum bleibt unverändert.  $\square$

**Bemerkung 16.9** Ist  $X = \mathbb{P}_k^1$  und  $\omega = \frac{dz}{z}$ , so gilt  $\operatorname{ord}_0 \omega = 1$  und  $\operatorname{ord}_\infty \omega = 1$ . Allgemeiner haben wir gesehen:

$$\operatorname{res}_a \left( \frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z-b} \right) = 1, \quad \operatorname{res}_b \left( \frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z-b} \right) = -1.$$

**Folgerung 16.10** Die Konstruktion aus 16.8 liefert einen wohldefinierten Isomorphismus

$$\operatorname{Res} : H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow k$$

wie folgt: Für  $\omega \in H^1(X, \Omega_X)$  wähle  $P_1, P_2 \in X$  und  $\omega_0 \in \Omega_X(X \setminus \{P_1, P_2\})$  mit  $\operatorname{ord}_{P_i} \omega_0 = -1$  für  $i = 1, 2$ . Setze dann  $\operatorname{Res}(\omega) := \operatorname{res}_{P_1} \omega_0$ .

*Beweisskizze.* Sei zunächst  $X = \mathbb{P}_k^1$ . Dann ist  $\operatorname{res}_{P_2} \omega_0 = -\operatorname{res}_{P_1} \omega_0$  nach der vorangegangenen Bemerkung. Vertauschen von  $P_1$  und  $P_2$  liefert  $-\omega_0$ . Weiter zeigt das Beispiel, dass  $\operatorname{res}_{P_1} \omega_0$  unabhängig von der Wahl von  $P_1 \neq P_2$  ist. Diese Beobachtungen liefern die Wohldefiniertheit von  $\operatorname{Res}$  im Fall  $X = \mathbb{P}_k^1$ . Ist nun  $X$  beliebig, wähle  $f \in k(X)$  mit  $\operatorname{ord}_{P_i} df = 0$  für  $i = 1, 2$ , es soll also  $f : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$  unverzerrt in den  $P_i$  sein. Dann induziert  $f$  eine *Spurabbildung*  $\operatorname{tr} : f_* \Omega_X \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^1}$  mit  $\operatorname{res}_{P_1} \omega_0 = \operatorname{res}_{f(P_1)}(\operatorname{tr}(\omega_0))$ . Damit lässt sich dieser Fall auf  $X = \mathbb{P}_k^1$  zurückführen.

**Proposition 16.11 (Serre-Dualität)** Sei  $X$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem

algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Dann ist für jeden Divisor  $D$  auf  $X$  die Abbildung

$$\Phi : H^0(X, \mathcal{L}(D)) \times H^1(X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D)^{-1}) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X) \stackrel{\text{Res}}{\cong} k, \quad (f, \omega) \mapsto f\omega$$

eine nichtausgeartete Bilinearform.