

29.11.06

Das `latexki`-Team

Stand: 12. Dezember 2016

Beispiel 1.66 Integraloperatoren

Sei $X = C([0, 1])$ und $k \in C([0, 1]^2)$. Sei $f \in X$. Setze $(Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s)ds$ für $t \in [0, 1]$. Sei $t_n \rightarrow t$ in $[0, 1]$. $|Tf(t_n) - Tf(t)| \leq \int_0^1 |k(t_n, s) - k(t, s)||f(s)|ds \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \sup_{s \in [0, 1]} |k(t_n, s) - k(t, s)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Da k glm stetig $\Rightarrow Tf \in X$. Klar: $T : X \rightarrow X$ ist linear

$$\|Tf\|_\infty \leq \underbrace{\sup_{t \in [0, 1]^2} \int_0^1 |k(t, s)|ds}_{=: \kappa \leq \|k\|_\infty < \infty} \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow T \in B(X), \|T\| \leq \kappa$.

Beh: $\|T\| = \kappa$.

Bew: $\exists t_0 \in [0, 1]$ mit $\kappa = \int_0^1 |k(t_0, s)|ds$. Setze $f_n(s) = \frac{\overline{k(t_0, s)}}{|k(t_0, s)| + \frac{1}{n}}$, $s \in [0, 1]$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n \in X, \|f_n\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|T\| \geq \|Tf_n\|_\infty \geq |Tf(t_0)| = \int_0^1 \underbrace{\frac{|k(t_0, s)|^2}{|k(t_0, s)| + \frac{1}{n}}}_{\leq |k(t_0, s)|} ds \rightarrow$

κ ($n \rightarrow \infty$) $\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|T\| \geq \kappa$.

■

Fast genau so zeigt man, dass $(Tf)(t) = \int_0^t k(t, s)f(s)ds$, $t \in [0, 1]$, $f \in X$ einen Operator $T \in B(X)$ mit

$$\|T\| = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t |k(t, s)|ds \quad \text{definiert.}$$

Beispiel 1.67 Differentialoperatoren

a) $X = C^1([0, 1])$ mit $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $Y = C([0, 1])$. Setze $Df = f'$ für $f \in X \Rightarrow$ Klar: $D : X \rightarrow Y$ ist linear. Ferner: $\|Df\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \Rightarrow D \in B(X, Y)$ mit $\|D\| \leq 1$.

Beh: $\|D\| = 1$.

Bew: Wähle $f_n(t) = \frac{1}{n} \sin(n-1)t$, $n \geq 3, t \in [0, 1] \Rightarrow f_n \in X, \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, $\|f'_n\|_\infty = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \|f_n\|_{C^1} = 1$ und $\|D\| \geq \|Df_n\|_{C^1} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{\sup_n} \|D\| \geq 1$.

■

Beachte: $f_n \rightarrow 0$ bzgl $\|\cdot\|_\infty$ oder $\|Df_n\|_\infty \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), also: $D : (X, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_\infty)$ ist unstetig.

b) Sei $X = C_b^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^2(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{C_b^2} = \|f\|_\infty + \sum_{k=1}^d \|\partial_k f\|_\infty + \sum_{k,l=1}^d \|\partial_k \partial_l f\|_\infty < \infty\}$ (mit $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$), $Y = C_b(\mathbb{R}^d)$.

Laplace Operator

$\Delta f = \partial_1^2 f + \dots + \partial_d^2 f \Rightarrow \Delta \in B(X, Y)$, $\|\Delta\| \leq 1$.

Beispiel 1.68 Stetige Linearformen

a) $X = C([0, 1])$, $Y = \mathbb{K}$, $f \in X$

(i) $\varphi(f) = f(t_0)$ für ein festes $t_0 \in [0, 1]$ (Punktauswertung). $\Rightarrow \varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist linear. $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \varphi \in X^*$, $\|\varphi\|_{X^*} \leq 1$.

Ferner: $\|\varphi\| \geq |\varphi(\mathbf{1})| = 1 \Rightarrow \|\varphi\| = 1$ ($\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$)

(ii) Sei $g \in L^1([0, 1])$ fest gewählt. Setze $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Klar: $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist linear und $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |g(t)|dt \Rightarrow \varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\|_{X^*} \leq \|g\|_1$ wie in Bsp 1.65 sieht man, dass $\|\varphi\| = \|g\|_1$

b) Sei $X = L^p(A)$, $1 \leq p \leq \infty$ für ein $A \in \mathcal{L}_d$. Sei $g \in L^{p'}(A)$ fest. Setze $\varphi(f) = \int_A f(x)g(x)dx$ Hölder: $\varphi(f) \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \Rightarrow \varphi(f) \in \mathbb{C}$ für alle $f \in X$ und $\varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\| \leq \|g\|_{p'}$. Später: $\|\varphi\| = \|g\|_{p'}$

Beispiel 1.69 Folgenräume

Sei $T \in B(X, Y)$ mit $X \in \{c_0, l^p, 1 \leq p < \infty\}$ und $Y \in \{c_0, l^p, 1 \leq p \leq \infty\}$. Setze $a_{k,l} = (Te_l)_k$ für $k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{k,l} \in \mathbb{C}$, bilde $A = [a_{k,l}]_{k,l \in \mathbb{N}}$. Sei $x \in X$. Setze $v_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in c_\infty$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_n \rightarrow x$ in X ($n \rightarrow \infty$), da $p < \infty$ (Satz 1.27)

$(Tv_n)_k = (\sum_{j=1}^n T(x_j e_j))_k = \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = (Av_n)_k$ (Matrizenmultiplikation)

T stetig $\Rightarrow Tv_n \rightarrow Tx$ in $Y \Rightarrow (Tx)_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tv_n)_k = \sum_{l=1}^\infty a_{k,l} x_l$ (*) insbesondere existiert die Reihe. Umgekehrt: Sei T durch (*) gegeben. Unter welchen Bed ist $T \in B(X, Y)$ wobei nun $X, Y \in \{c_0, c, l^p, 1 \leq p < \infty\}$?

a) Sei $X = Y = l^1$, $a_{kl} \in \mathbb{C}$ ($k, l \in \mathbb{N}$) mit $\alpha := \sup_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^\infty |a_{kl}| < \infty$ (Spaltensummennorm)

Sei $x \in l^1$. Dann existiert (*) da $|a_{kl}| \leq \alpha < \infty \forall k, l \in \mathbb{N}$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann: $\sum_{k=1}^N |(Tx)_k| \leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^\infty |a_{kl}| |x_l| = \sum_{l=1}^\infty (\sum_{k=1}^N |a_{kl}|) |x_l| \leq \alpha \sum_{l=1}^\infty |x_l| = \alpha \|x\|_1$ wobei T durch (*) gegeben ist. Mit \sup_N folgt $Tx \in l^1$. Klar: $T : l^1 \rightarrow l^1$ ist linear, und $\|T\| \leq \alpha$, also $T \in B(l^1)$.

Beh: $\|T\| = \alpha$

Bew: Klar: $\alpha = 0$. Wenn $\alpha > 0$, dann wähle $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Dann ex $j \in \mathbb{N}$ mit: $\sum_{k=1}^\infty |a_{kj}| \geq \alpha - \varepsilon$. Ferner: $\|T\| \geq \|Te_j\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |a_{kj}| \geq \alpha - \varepsilon$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt Beh.

■

b) Für $x \in X \in \{c_0, c, l^p, 1 \leq p < \infty\}$ setze $Rx = (0, x_1, x_2, \dots)$, $Lx = (x_2, x_3, \dots)$.

Klar: $Rx, Lx \in X$, $R : X \rightarrow X, L : X \rightarrow X$ sind linear. Ferner: $\|Rx\|_p = \|x\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) $\|Lx\|_p \leq \|x\|_p$, $Le_2 = e_1 \Rightarrow R, L \in B(X)$ mit Norm = 1. Beachte: $LRx = x$, $RLx = (0, x_2, x_3, \dots) \Rightarrow R$ ist injektiv, nicht surjektiv, L ist surjektiv, nicht injektiv.

Matrizendarstellung:

$$R \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$L \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Definition 1.70 Seien X, Y nVr. Eine injektive stetige lineare Abb $T : X \rightarrow Y$ heißt **Einbettung**. Man schreibt dann $X \hookrightarrow Y$. Wenn $T \in B(X, Y)$ bijektiv und $T^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig, dann heißt T **Isomorphismus** und man schreibt $X \cong Y$. Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ mit $\|Tx\| = \|x\|$, heißt **Isometrie**.

Bemerkung 1.71 Wenn T eine Isometrie ist, so ist T stetig und injektiv. Ferner ist T^{-1} auf $R(T) = TX = \{y = Tx, x \in X\}$ eine Isometrie.

Beh: Wenn X ein BR ist, dann ist $R(T)$ abgeschlossen.

Bew:

Sei $y_n = Tx_n \rightarrow y$ in Y ($n \rightarrow \infty$) $\Rightarrow \|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) $\exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$. Da T stetig: $Tx = y$

■

Beispiel 1.72 a) Sei $Y \subseteq X$ ein UVR. Seien $\|\cdot\|_Y$ Norm auf Y und $\|\cdot\|_X$ Norm auf X . Dann: $I : (Y, \|\cdot\|_Y) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ ist stetig (d.h. eine Einbettung) $\iff \|y\|_X \leq c\|y\|_Y \ \forall y \in Y$. Dann heißt $\|\cdot\|_Y$ feiner als $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_X$ gröber als $\|\cdot\|_Y$.

Beispiel: $l^p \hookrightarrow l^q, 1 \leq p \leq q \leq \infty. C^\alpha([0, 1]) \hookrightarrow C([0, 1]), \alpha \in (0, 1)$

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Setze $K = \bar{U}$. Sei $1 \leq p < \infty$. Definiere $J : C(K) \rightarrow l^p(K)$ durch $Jf = f + N_K$. Beachte: f ist messbar, da stetig und $\|f + N_k\|_p = \|f\|_p \leq (\lambda(k))^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty \Rightarrow Jf \in L^p(K)$.

Beh: J ist injektiv.

Bew: Sei $Jf = 0$, also \exists NM N mit $f(x) = 0$ für $x \in K \setminus N$. Da $\lambda(B(x, \varepsilon)) > 0$ für $\varepsilon > 0$ folgt, dass N^0 leer ist, also ist $K \setminus N$ dicht in K und somit $f = 0$, da f stetig.

■

Folgerung: Sei $\hat{f} = f + N_K \in L^p(A)$. Nach Satz 1.44 gibt es $f_n \in C(K)$ mit $f_n \rightarrow f$ bzgl $\|\cdot\|_p$. Wie in Bsp 1.55 erhält man Polynom g_n mit $\|g_n - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \|g_n - f_n\|_p \leq \frac{c}{n} \Rightarrow g_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^p(K) \Rightarrow Jg_n \rightarrow \hat{f}$ in $L^p(K)$ ($n \rightarrow \infty$) $\Rightarrow L^p(K), 1 \leq p < \infty$ ist separabel. ($L(K) \hookrightarrow L^p(K)$ gilt für $p \in [1, \infty]$)

c) Sei $X = C^1[0, 1], T = C[0, 1]$, dann hat $D \in B(X, Y), Df = f'$ die Inverse $D^{-1}g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)ds$ wobei $D^{-1} \in B(Y, X)$, also $X \cong Y \Rightarrow$ BR Struktur ist gleich. Aber D kann andere Strukturen verändern. z.B. $f \leq g \not\Rightarrow f' \leq g'$.

d) Beh: $c \cong c_0$

Bew: Sei $l(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x \in c$. Üb: $l \in c^*$. 1.68 b) $\Rightarrow R \in B(c), L \in B(c_0)$. Setze $Tx := Rx - l(x) \cdot \mathbf{1} = (-l(x), x_1 - l(x), \dots)$ für $x \in c \implies T \in B(c, c_0)$. $Sx := Lx - x_1 \cdot \mathbf{1} = (x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots)$ für $x \in c_0$. $S \in B(c_0, c)$. Einsetzen: $ST = I_c, TS = I_{c_0}$

Bem: T ist keine Isometrie. Betrachte $x = (2, 1, 1, \dots) \Rightarrow x \in c$ $\|x\|_\infty = 2$; $Tx = (-1, 1, 0, 0, \dots) \Rightarrow \|Tx\|_\infty = 1$. ■

e) *Beh:* Alle endlichdimensionalen nVR ($d < \infty$) sind isomorph zu $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$.

Bew: Wähle eine feste Basis B von X . Sei $\bar{x} \in \mathbb{K}^d$ der eindeutig bestimmte Koeffizientenvektor von x bzgl. B . Setze $T : X \rightarrow \mathbb{K}^d$, $x \rightarrow \bar{x} \Rightarrow T$ ist linear und bijektiv. T ist Isometrie bzgl. $\|\cdot\|_X$, $v \in \mathbb{K}^d \Rightarrow T^{-1}v$ ist Isometrie (Bem 1.70). Nach Satz 1.22 ist $\|\cdot\|_X$ äquivalent zu $\|\cdot\|_2$, also sind T und T^{-1} bzgl. $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_2$ stetig. ■