Anhang A

Übungen

Übung 1 vom 21. Oktober 2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei R ein noetherscher Ring. Zeige, dass dann der Ring der formalen Potenzreihen $R[\![X]\!] = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in R\}$noethersch ist.

b) Zeige, dass der Ring $\{f \in \mathbb{R}[\![X]\!] \mid f$ konvergiert auf $\mathbb{R}\}$ nicht noethersch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei k ein unendlicher Körper und $V \subset k^3$ gegeben durch

$$V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}.$$

Zeige, dass V eine affine Varietät ist, und bestimme das Verschwindungsideal $I(V) \subset k[X, Y, Z]$. V heißt übrigens *getwistete Kubik*.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

a) Zeige: Für ein nichtkonstantes Polynom $g \in k[X]$ und ein $a \in k^\times$ ist $g^2 - a$ kein Quadrat in $k[X]$.

b) Nun sei k unendlich und $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. Zeige, dass jede polynomiale Abbildung $\Phi : k \to k^2$, $\Phi(x) = (f_1(x), f_2(x))$ mit $f_1, f_2 \in k[X]$, deren Bild in der Nullstellenmenge V_λ des Polynoms $Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)$ liegt, konstant ist. Gilt das auch für $\lambda = 0$?

c) Skizziere für $k = \mathbb{R}$ die Nullstellenmenge V_λ für
   - $\lambda = 0$,
   - $\lambda = 1$,
   - $\lambda = 2$.

Übung 2 vom 28. Oktober 2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei k ein beliebiger Körper. Dann sind $\mathbb{A}^2(k)$ und $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ als Mengen gleich. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2(k)$ genau dann die Produkttopologie von $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ ist, wenn k endlich ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper und $V_k = V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3(k)$.

a) Skizziere die affine Varietät $V_{\mathbb{R}}$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimme die irreduziblen Komponenten von V_k.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Wir versehen Y mit der Spurtopologie. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Y ist irreduzibel.

ii) Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist irreduzibel.[1]

iii) Zwei nichtleere, offene Mengen in Y haben nichtleeren Schnitt.

iv) Jede nichtleere, offene Menge $U \subset Y$ ist dicht in Y (d. h. $\overline{U} = Y$).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper. Zeige, dass für jedes $n \geq 1$ der Raum $\mathbb{A}^n(k)$ mit der Zariski-Topologie irreduzibel ist.

Hinweis: Benutze Proposition 4.4 aus der Vorlesung oder zeige, dass $\mathbb{A}^n(k)$ die Bedingung (iii) aus Aufgabe 3 erfüllt.

Zunächst eine kleine Erinnerung:

Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X. Per Definition ist $\tilde{U} \subseteq Y$ genau dann offen in Y (bzgl. der Spurtopologie), wenn ein offenes $U \subseteq X$ existiert mit $U \cap Y = \tilde{U}$.

Die analoge Definition mit abgeschlossenen Mengen liefert die gleiche Topologie:

$$\begin{aligned} & A \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \\ \Leftrightarrow\ & Y \setminus A \subseteq Y \text{ offen} \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, U \subseteq X \text{ offen} : Y \cap U = Y \setminus A \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, X \setminus U \subseteq X \text{ abgeschlossen} : Y \cap (X \setminus U) = A \end{aligned}$$

Eine Menge $A \subseteq Y$ ist also genau dann abgeschlossen in Y bezüglich der Spurtopologie, wenn es eine abgeschlossene Menge $\tilde{A} \subseteq X$ gibt mit $\tilde{A} \cap Y = A$.

Lösung 3
In der Übung haben wir bereits gesehen, dass i) $\Leftrightarrow$ iii) und iii) $\Rightarrow$ iv). Auch i) $\Rightarrow$ ii) stand schon an der Tafel:

Angenommen $\overline{Y}$ ist reduzibel, d. h. $\overline{Y} = A_1 \cup A_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen A_1, A_2 in $\overline{Y}$. Dann gibt es (siehe oben) abgeschlossene Mengen $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ in X mit $\tilde{A}_1 \cap \overline{Y} = A_1$ und $\tilde{A}_2 \cap \overline{Y} = A_2$. Dann sind $\tilde{A}_i \cap Y$ abgeschlossen in Y. Außerdem gilt $\tilde{A}_i \cap Y \neq Y$, da sonst $Y = \tilde{A}_i \cap Y \subseteq A_i \subsetneq \overline{Y}$, was im Widerspruch dazu steht, dass $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Menge in X ist, die Y enthält. Es folgt $Y = (\tilde{A}_1 \cap Y) \cup (\tilde{A}_2 \cap Y)$ und damit ist Y reduzibel.

[1] Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist definiert als der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die Y enthalten.

iv) ⇒ iii): Seien $U_1, U_2 \subseteq Y$ offen und nichtleer. Wäre $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so wäre $U_2 \subseteq Y \setminus U_1$. Die Menge $Y \setminus U_1$ ist abgeschlossen, also gilt auch $\overline{U_2} \subseteq Y \setminus U_1$. Aber $\overline{U_2} = Y$, also ist $U_1 = \emptyset$, ein Widerspruch!

ii) ⇒ i): Angenommen Y ist reduzibel, d. h. $Y = A_1 \cup A_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen A_1, A_2 in Y. Dann gibt es abgeschlossene Mengen $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ in X mit $\tilde{A}_1 \cap Y = A_1$ und $\tilde{A}_2 \cap Y = A_2$. Die Mengen $\tilde{A}_i \cap \overline{Y}$ sind abgeschlossen in X. Außerdem gilt: $Y = (\tilde{A}_1 \cap Y) \cup (\tilde{A}_2 \cap Y) \subseteq (\tilde{A}_1 \cap \overline{Y}) \cup (\tilde{A}_2 \cap \overline{Y}) \subseteq \overline{Y}$ und damit $\overline{Y} = (\tilde{A}_1 \cap \overline{Y}) \cup (\tilde{A}_2 \cap \overline{Y})$. Wäre $\tilde{A}_i \cap \overline{Y} = \overline{Y}$, so auch $Y = \overline{Y} \cap Y = (\tilde{A}_i \cap \overline{Y}) \cap Y = \tilde{A}_i \cap Y = A_i$, ein Widerspruch. Damit ist $\overline{Y}$ reduzibel.

Übung 3 vom 4. November 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^\top \overline{A} = I_n\}$ die unitäre Gruppe.

a) Zeige, dass $U(n)$ keine komplexe affine Varietät in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist.

b) Zeige, dass $U(n)$ dafür aber eine reelle affine Varietät ist, wenn wir $\mathbb{C}^{n\times n}$ auf die naheliegende Weise mit $\mathbb{R}^{2n^2}$ identifizieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät. Weiter seien $g, h \in k[X_1, \dots, X_n]$ Polynome, wobei h keine Nullstelle in V habe.

Zeige, dass die Abbildung $\frac{g}{h} : V \to \mathbb{A}^1(k)$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist. Gilt das auch, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $V_1 = V(Y^2 - X)$ und $V_2 = V(XY - 1)$ affine Varietäten in $\mathbb{A}^2(k)$.

Ist der Koordinatenring von V_1 bzw. V_2 isomorph zum Polynomring in einer Variablen? Begründe deine Aussage.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $C = V(Y^2 - X^2(X-1)) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$.

a) Zeige, dass es einen surjektiven Morphismus $\phi : \mathbb{A}^1(k) \to C$ gibt.

b) Gibt es auch einen Isomorphismus $\psi : \mathbb{A}^1(k) \to C$?

c) Ist C hmöomorph zu $\mathbb{A}^1(k)$?

Übung 4 vom 11. November 2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei k ein Körper, A und B zwei k-Algebren, B endlich erzeugt und $\varphi\colon A \to B$ ein k-Algebrenhomomorphismus.

Zeige, dass das Urbild eines maximalen Ideals in B unter φ ein maximales Ideal in A ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für B die algebraische Version von Hilberts Nullstellensatz gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von Ringen auf X besteht aus einem Ring $\mathcal{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ und einem Ringhomomorphismus $\rho_U^V\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für alle offenen $U \subseteq V \subseteq X$, so dass:

- $\forall\, U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in X: $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ und $\rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''} = \rho_U^{U''}$
- Für jede offene Überdeckung $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ einer offenen Menge $V \subseteq X$ gilt:
  - Gilt für ein $f \in \mathcal{F}(V)$ und alle $i \in I$, dass $\rho_{V_i}^V(f) = 0$, so ist $f = 0$.
  - Zu jeder Menge $\{f_i \in \mathcal{F}(V_i) \mid i \in I\}$ mit der Eigenschaft $\rho_{V_i\cap V_j}^{V_i}(f_i) = \rho_{V_i\cap V_j}^{V_j}(f_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}(V)$ mit $\rho_{V_i}^V(f) = f_i$ für alle $i \in I$.

Die ρ_U^V werden oft *Restriktionsabbildungen* genannt.

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Für eine offene Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeige, dass dadurch (zusammen mit geeigneten Restriktionsabbildungen) eine Garbe von Ringen auf Y gegeben ist. ($f_*\mathcal{F}$ heißt *direktes Bild* von $\mathcal{F}$.)

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

Zeige: Der k-Algebrenhomomorphismus $\rho\colon k[V] \to \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f|_U$ ist genau dann injektiv, wenn U dicht in V liegt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $U = \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$. Bestimme den Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2(k)}(U)$. Folgere, dass U nicht isomorph zu einer affinen Varietät ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Es seien V eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen und $g \in \mathcal{O}_V(U)$. Zeige, dass $W := \{x \in U : g(x) = 0\}$ abgeschlossen in U ist.

Lösung 2
Für offene Mengen $U \subseteq V \subseteq Y$ sind $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y) = X$ offen in X. Wir können also Restriktionsabbildungen definieren als $\sigma_U^V = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)} : \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Es gilt:

- $\sigma_U^U = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U)} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(f^{-1}(U))} = \mathrm{id}_{f_*\mathcal{F}(U)}$
- Seien $U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in Y, dann ist $\sigma_U^{U'} \circ \sigma_{U'}^{U''} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U')} \circ \rho_{f^{-1}(U')}^{f^{-1}(U'')} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U'')} = \sigma_U^{U''}$.
- Sei $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $V \subseteq Y$.

- Für $h \in f_*\mathcal{F}(V)$ mit $\sigma^V_{V_i}(h) = 0$ für alle $i \in I$ gilt dann auch $\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(h) = 0$ für alle $i \in I$. Außerdem ist $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ eine offene Überdeckung von $f^{-1}(V)$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, ist somit $h = 0$.
- Sind $h_i \in f_*\mathcal{F}(V_i)$ gegeben mit $\sigma^{V_i}_{V_i \cap V_j}(h_i) = \sigma^{V_j}_{V_i \cap V_j}(h_j)$ für alle Paare von i und j aus I, dann gilt auch $\rho^{f^{-1}(V_i)}_{f^{-1}(V_i \cap V_j)}(h_i) = \rho^{f^{-1}(V_j)}_{f^{-1}(V_i \cap V_j)}(h_j)$. Wegen $f^{-1}(V_i \cap V_j) = f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j)$ und der Garbeneigenschaften von $\mathcal{F}$ existiert dann ein $h \in \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V)$ mit $\sigma^V_{V_i}(h) = \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(h) = h_i$ für alle $i \in I$.

Übung 5 vom 18. November 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und $U, \tilde{U}$ dichte, offene Teilmengen von V. Zeige, dass auch ihr Schnitt eine dichte, offene Teilmenge von V ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $V = V(WX - YZ) \subset \mathbb{A}^4(k)$ und x, y, z, $w \in k[V]$ die Restklassen der entsprechenden Polynome in $k[X, Y, Z, W]$. Zeige:

a) Die affine Varietät V ist irreduzibel.

b) Auf $D(y) \cup D(w)$ wird durch

$$r(p) = r(x, y, z, w) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } p \in D(y) \\ \frac{z}{w} & \text{für } p \in D(w) \end{cases}$$

eine reguläre Funktion definiert.

c) Der maximale Definitionsbereich von r als rationale Funktion ist gleich $D(y) \cup D(w)$.

d) Die reguläre Funktion r kann auf $D(y) \cup D(w)$ nicht als f/g mit f, $g \in k[V]$ geschrieben werden.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Der algebraisch abgeschlossene Körper k habe nun Charakteristik 0. Es seien a, $b \in \mathbb{N}$, $V = V(X^a - Y^b) \subset \mathbb{A}^2(k)$ und $\Phi\colon \mathbb{A}^1(k) \to V$, $t \mapsto (t^b, t^a)$. Diskutiere folgende Punkte in Abhängigkeit von a und b:

- Wann ist Φ injektiv, wann surjektiv und wann ein Isomorphismus?
- Zerlege V in irreduzible Komponenten.
- Bestimme, wann Φ eine birationale Abbildung ist.

Hinweis: Betrachte den größten gemeinsamen Teiler d von a und b.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) *Zeige*: Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(k)$ operiert auf $\mathbb{P}^1(k)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x : y) := (ax + by : cx + dy).$$

Dabei operiert das Zentrum $Z(\mathrm{GL}_2(k)) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in k^\times\}$ trivial, d.h. obige Operation definiert auch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(k) = \mathrm{GL}_2(k)/Z(\mathrm{GL}_2(k))$ auf $\mathbb{P}^1(k)$.

Für paarweise verschiedene Punkte $P_1 = (x_1 : y_1), \ldots, P_4 = (x_4 : y_4) \in \mathbb{P}^1(k)$ ist das Doppelverhältnis gegeben durch

$$DV(P_1, \ldots, P_4) := \left(\frac{x_1y_3 - x_3y_1}{x_2y_3 - x_3y_2} : \frac{x_1y_4 - x_4y_1}{x_2y_4 - x_4y_2} \right).$$

b) *Zeige*: Das Doppelverhältnis ist invariant unter $\mathrm{PGL}_2(k)$, d.h. für jedes $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ ist $DV(P_1, \ldots, P_4) = DV(g(P_1), \ldots, g(P_4))$.

c) *Zeige*: $\mathrm{PGL}_2(k)$ operiert dreifach transitiv auf $\mathbb{P}^1(k)$, d.h. zu je drei paarweise verschiedenen Punkten $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1', Q_2', Q_3' \in \mathbb{P}^1(k)$ gibt es stets ein $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g(Q_1), g(Q_2), g(Q_3)) = (Q_1', Q_2', Q_3')$.

Die Aussage in Aufgabe 1 gilt nicht nur für affine Varietäten, sondern allgemeiner für topologische Räume. Deshalb hier nochmal die Lösung der allgemeineren Aufgabe 1:

Lösung 1

Angenommen $U \cap \tilde{U}$ wäre nicht dicht in V. Dann wäre $W := \overline{U \cap \tilde{U}} \subsetneq V$. Da U und $\tilde{U}$ dicht in V liegen, liegt weder U noch $\tilde{U}$ komplett in W. Es gilt:

$$U = (U \cap \tilde{U}) \cup (U \cap (V \setminus \tilde{U})) \subseteq (U \cap \tilde{U}) \cup (V \setminus \tilde{U}) \subseteq W \cup (V \setminus \tilde{U})$$

Die Menge $\tilde{U}$ ist dicht in V, kann also nicht in W enthalten sein und natürlich ist $\tilde{U} \cap (V \setminus \tilde{U}) = \emptyset$, also gilt $\tilde{U} \not\subseteq W \cup V \setminus \tilde{U}$ und damit $W \cup V \setminus \tilde{U} \neq V$. Es folgt $\overline{U} \subseteq W \cup (V \setminus \tilde{U}) \subsetneq V$, was im Widerspruch zu $\overline{U} = V$ steht.

Lösung 3

Sei $d := \mathrm{ggT}(a, b)$, $\alpha := a/d$ und $\beta := b/d$. In der Übung haben wir bereits eingesehen, dass Φ genau dann injektiv ist, wenn $d = 1$ und genau dann surjektiv ist, wenn $d = 1$.

Wann ist Φ ein Isomorphismus?

Jeder Isomorphismus ist bijektiv, also brauchen wir mindestens $d = 1$. Ein bijektives Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn ein $f \in k[X, Y]$ existiert mit $\Phi^{-1}(x, y) = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in V$. Wenn ein solches f existiert, dann gilt $f(\Phi(t)) = t$ und nach Satz 4 auch $(f \circ \Phi)^\sharp = \mathrm{id}^\sharp$, d.h. $T = f(T^a, T^b) \in k[T]$. Da T Grad 1 hat, hat auch $f(T^a, T^b)$ Grad 1, was $a = 1$ oder $b = 1$ zur Folge hat.

Für $a = 1$ ist $\Phi^{-1}(x, y) = y$, für $b = 1$ gilt $\Phi^{-1}(x, y) = x$.

Somit gilt: Φ ist genau für $a = 1$ oder $b = 1$ ein Isomorphismus.

Zerlegung von V in irreduzible Komponenten:

Sei ξ eine primitive d-te Einheitswurzel in k. In $k[T, U]$ gilt $T^d - U^d = \prod_{k=0}^{d-1}(T - \xi^k U)$, denn die $\xi^k U$ sind d paarweise verschiedene Nullstellen von $T^d - U^d \in k[T]$ und $\deg_T(T^d - U^d) = d$.

Damit gilt $V = V(X^a - Y^b) = V(X^{\alpha d} - Y^{\beta d}) = \bigcup_{k=0}^{d-1} V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$. Sei $V_k := V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$.

Man rechnet schnell nach, dass das folgende topologische Lemma gilt.

Lemma: Sind V, W topologische Räume, $\Phi\colon V \to W$ stetig und V irreduzibel, dann ist auch W irreduzibel.

Da die Abbildung $t \mapsto (t^\beta, t^\alpha)$ ein surjektiver Morphismus von $\mathbb{A}^1(k)$ nach V_0 ist (α und β sind teilerfremd) und $\mathbb{A}^1(k)$ irreduzibel ist, ist auch V_0 irreduzibel.

Die Morphismen $V_k \to V_0$, $(x, y) \mapsto (\xi^{-ku} x, \xi^{kv} y)$ und $V_0 \to V_k$, $(x, y) \mapsto (\xi^{ku} x, \xi^{-kv} y)$ sind wohldefiniert (man rechne nach, dass das Bild tatsächlich in V_0 bzw. V_k liegt) und invers zueinander. Also ist $V_0 \cong V_k$ und somit sind alle V_k irreduzibel. Des weiteren sind die V_k paarweise nicht ineinander enthalten, da $V_i \cap V_j = \{0\}$ für $i \neq j$.

Damit haben wir gezeigt, dass $V = \bigcup_{k=0}^{d-1} V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$ die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten ist.

Wann ist Φ birational?

In der Übung haben wir bereits gesehen, dass V irreduzibel sein muss, falls Φ birational ist.

Aus der obigen Zerlegung von V folgt also, dass $d = 1$ gelten muss. Ist nun umgekehrt $d = 1$, dann sind a und b teilerfremd, also existierten u, $v \in \mathbb{Z}$, so dass $ua + vb = 1$ ist. Somit gilt $t = t^{ua+vb} = (t^a)^u(t^b)^v$ und damit ist $\Psi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k), (x, y) \mapsto (y^u x^v)$ (definiert auf $D(y) \cap D(x)$) eine Inverse zu Φ in der Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten mit dominanten rationalen Abbildungen.

Lösung 4

a) Zunächst rechnen wir nach, dass $\cdot$ eine Gruppenoperation definiert:

Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x : y) := (x : y)$, sowie

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot (x : y) \right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (a'x + b'y : c'x + d'y) \\
&= (a(a'x + b'y) + b(c'x + d'y) : c(a'x + b'y) + d(c'x + d'y)) \\
&= ((aa' + bc')x + (ab' + bd')y : (ca' + dc')x + (cb' + dd')y)) \\
&= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \cdot (x : y) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \cdot (x : y)
\end{aligned}$$

Die Operation ist wohldefiniert, denn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\lambda x : \lambda y) = (a\lambda x + b\lambda y : c\lambda x + d\lambda y) = (ax + by : cx + dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x : y)$ für alle $\lambda \in k^\times$.

Das Zentrum von $\mathrm{GL}_2(k)$ operiert trivial auf $\mathbb{P}^1(k)$, denn für alle $a \in k^\times$ ist $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot (x : y) = (ax : ay) = (x : y)$.

b) Seien $P_1 = (x_1 : y_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2)$, $P_3 = (x_3 : y_3)$, $P_4 = (x_4 : y_4) \in \mathbb{P}^1(k)$ und $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(k)$.

$DV(g(P_1), \ldots, g(P_4)) = \left(\frac{(ax_1+by_1)(cx_3+dy_3)-(ax_3+by_3)(cx_1+dy_1)}{(ax_2+by_2)(cx_3+dy_3)-(ax_3+by_3)(cx_2+dy_2)} : \frac{(ax_1+by_1)(cx_4+dy_4)-(ax_4+by_4)(cx_1+dy_1)}{(ax_2+by_2)(cx_4+dy_4)-(ax_4+by_4)(cx_2+dy_2)} \right) = \left(\frac{(ad-bc)(x_1y_3-x_3y_1)}{(ad-bc)(x_2y_3-x_3y_2)} : \frac{(ad-bc)(x_1y_4-x_4y_1)}{(ad-bc)(x_2y_4-x_4y_2)} \right) = \left(\frac{x_1y_3-x_3y_1}{x_2y_3-x_3y_2} : \frac{x_1y_4-x_4y_1}{x_2y_4-x_4y_2} \right) = DV(P_1, \ldots, P_4)$

c) Wir suchen zunächst für paarweise verschiedene $P_1 = (x_1 : y_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2)$, $P_3 = (x_3 : y_3) \in \mathbb{P}^1(k)$ ein $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $g \cdot (1 : 0) = (x_1 : y_1)$, $g \cdot (0 : 1) = (x_2 : y_2)$ und $g \cdot (1 : 1) = (x_3 : y_3)$.

Es ist $g \cdot (1 : 0) = (a : c)$, $g \cdot (0 : 1) = (b : d)$ und $g \cdot (1 : 1) = (a + b : c + d)$, wir suchen also $a, b, c, d \in k$, $ad - bc \neq 0$ und $\lambda, \mu, \nu \in k^\times$ mit $a = \lambda x_1$, $c = \lambda y_1$, $b = \mu x_2$, $d = \mu y_2$, $a+b = \nu x_3$, $c+d = \nu y_3$. Das LGS können wir umformen zu $(x_1y_2-x_2y_1)\lambda+(x_2y_3-x_3y_2)\nu = 0$ und $(x_1y_2 - x_2y_1)\mu + (x_3y_1 - x_1y_3)\nu = 0$. Da die P_i paarweise verschieden sind, lässt sich das LGS nichttrivial lösen. Wähle ein beliebiges $\nu \neq 0$, dann sind auch $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ und $ad - bc = \lambda x_1 \mu y_2 - \mu x_2 \lambda y_1 = \lambda\mu(x_1y_2 - x_2y_1) \neq 0$. Somit haben wir ein passendes g gefunden.

Für $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1', Q_2', Q_3' \in \mathbb{P}^1(k)$, je paarweise verschiedene Punkte, gibt es somit ein $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g(1 : 0), g(0 : 1), g(1 : 1)) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ und ein $g' \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g'(1 : 0), g(0 : 1), g(1 : 1)) = (Q_1', Q_2', Q_3')$. Die Verkettung $g' \circ g^{-1} \in \mathrm{PGL}_2(k)$ bildet dann (Q_1, Q_2, Q_3) auf (Q_1', Q_2', Q_3') ab.

Übung 6 vom 25. November 2011

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei k ein beliebiger(!) Körper und $n \geq 1$. Für einen Untervektorraum $U \subseteq k^{n+1}$ sei $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von U. Falls $\dim_k U = 2$, so nennt man $\mathbb{P}(U)$ auch eine *Gerade*. Zeige:

a) $\mathbb{P}(U)$ ist eine projektive Varietät.

b) In $\mathbb{P}^2(k)$ haben zwei Geraden immer einen nichtleeren Durchschnitt.

c) Zwei Punkte $a, b \in \mathbb{P}^n(k)$, $a \neq b$ liegen auf einer eindeutig bestimmten Geraden. Diese werde mit $\overline{ab}$ bezeichnet.

d) Auf jeder Geraden gibt es mindestens 3 Punkte.

e) Wenn a, b, c, $d \in \mathbb{P}^n(k)$ paarweise verschiedene Punkte sind, so folgt aus $\overline{ab} \cap \overline{cd} \neq \emptyset$, dass auch $\overline{ac} \cap \overline{bd} \neq \emptyset$ gilt.

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Achtung: Aufgabe 2 wird auf Blatt 8 verschoben - die Definition von Automorphismus einer projektiven Varietäten kam in der Vorlesung noch nicht vor.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
~~Bestimme die Automorphismen von $\mathbb{P}^1(k)$.~~

~~*Tipp:* Benutze Aufgabe 4 von Blatt 5.~~

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es sei $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ein graduierter Ring und $I \trianglelefteq S$ ein homogenes Ideal. Zeige:

Das Ideal I ist genau dann ein Primideal, wenn für beliebige homogene Elemente f, $g \in S$ aus $fg \in I$ folgt, dass $f \in I$ oder $g \in I$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei k ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ und $a \in k^\times$. Die affine Varietät

$$L = V((X^2 + Y^2)^2 - a(X^2 - Y^2))$$

heißt *Lemniskate*.

Argumentiere, warum L irreduzibel ist. Zeige dann, dass $k(L) = k(t)$ mit $t = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ gilt (wobei x, $y \in k[L]$ die Restklassen von X und $Y \in k[X, Y]$ sind). Folgere, dass L birational zu $\mathbb{A}^1(k)$ ist.

Hinweis: L entsteht aus einer Hyperbel unter der Inversion am Einheitskreis $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k)$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x, y)$.

Lösung 1

a) Ziel: Um zu zeigen, dass $\mathbb{P}(U)$ eine projektive Varietät ist stellen wir U als Kern einer Abbildung $x \mapsto Ax$ mit $A = (a_{ij}) \in k^{m \times n+1}$ dar. Dann ist $U = V(\,\{\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j \mid i = 1, \dots, m\}\,)$.

   Sei $b_1, \dots, b_l$ eine Basis von U. Ergänze sie zu einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ von k^{n+1}. Dann ist U Kern von

$$\Phi : \begin{cases} k^{n+1} & \to & k^{n+1} & \\ b_i & \mapsto & 0 & \text{für } i = 1, \dots, l \\ b_j & \mapsto & b_j & \text{für } j = l+1, \dots, n+1 \end{cases}$$

Die Matrix zu Φ bezüglich der Basis B ist $A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Sei M die Basiswechselmatrix von der Standardbasis zu B. Dann erfüllt $A := A_\Phi \cdot M$ wie gewünscht $\operatorname{Kern} A = U$.

b) Die Lösung zu b) haben wir bereits in der Übung gesehen.

c) Seien $a, b \in \mathbb{P}^n(k)$, $a \neq b$. Zu zeigen ist, dass a und b auf einer eindeutigen Geraden liegen. Aus $a \neq b$ und $\dim_k(a) = \dim_k(b) = 1$ folgt, dass $a \cap b = \{0\}$. Mit der Dimensionsformel folgt dann $\dim_k(a + b) = 1 + 1 - 0 = 2$. $\mathbb{P}(a + b)$ ist also eine Gerade, die a und b enthält. Die Gerade ist eindeutig, da $a + b$ der kleinste Untervektorraum von k^{n+1} ist, der sowohl a als auch b enthält und da $a + b$ schon Dimension 2 hat.

d) Sei $\mathbb{P}(U)$ eine Gerade und $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von U. Dann sind b_1, b_2 und $b_1 + b_2$ paarweise linear unabhängig, definieren also 3 unterschiedliche Punkte in $\mathbb{P}(U)$.

e) Es sei $a = \mathbb{P}(U_1)$, $b = \mathbb{P}(U_2)$, $c = \mathbb{P}(U_3)$ und $d = \mathbb{P}(U_4)$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^n(k)$. Dann gilt laut Voraussetzung $\dim_k((U_1 + U_2) \cap (U_3 + U_4)) \geq 1$. Unser Ziel ist zu zeigen, dass auch

$$\dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)) \geq 1$$

ist. Dazu benutzen wird die Dimensionsformel. Es gilt

$$\begin{aligned} & \dim_k(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \\ = \ & \dim_k(U_1 + U_2) + \dim_k(U_3 + U_4) - \dim_k((U_1 + U_2) \cap (U_3 + U_4)) \\ \leq \ & 2 + 2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \dim_k(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \\ = \ & \dim_k(U_1 + U_3) + \dim_k(U_2 + U_4) - \dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)) \\ = \ & 2 + 2 - \dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)), \end{aligned}$$

woraus insgesamt $\dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)) \geq 1$ folgt. Also ist $\overline{ac} \cap \overline{bd} \neq \emptyset$.

Lösung 3

Die Implikation von links nach rechts ist klar. Es gelte also umgekehrt die rechte Seite und es seien $f,\ g \in S$ mit $fg \in I$. Zu zeigen ist, dass $f \in I$ oder $g \in I$. Wir zerlegen f und g in homogene Summanden:

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i \ , \quad g = \sum_{j=0}^{e} g_j \ \text{ und setzen } \forall i > d, j > e : f_i = g_j = 0.$$

Dann ist $fg = \sum_{i,j} f_i g_j = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l}$. Da I homogen ist und $fg \in I$ müssen alle ihre homogenen Summanden in I liegen. Also gilt für alle $k = 0, \ldots, d + e$

$$\sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l} \in I.$$

Angenommen $f \notin I$. Dann liegt auch ein homogener Summand nicht in I. Also gibt es ein minimales L mit $f_L \notin I$. Es gilt nun

$$I \ni \sum_{l=0}^{L} f_l g_{L-l} = \sum_{l=0}^{L-1} f_l g_{L-l} + f_L g_0 \ ,$$

und da die vordere Summe der rechten Seite in I liegt, muss $f_L g_0$ in I liegen. Dies ist nun ein Produkt von homogenen Elementen, also liegt einer der Faktoren in I. Folglich ist $g_0 \in I$.

Um einzusehen dass auch $g_i \in I$ für $i \neq 0$ gilt, machen wir Induktion. Die obigen Überlegungen sind unser Induktionsanfang und als Induktionsvoraussetzung gelte für $K \geq 0$: $g_i \in I$ für alle $i < K$. Es ist

$$\sum_{l=0}^{L+K} f_l g_{L+K-l} = \sum_{l=0}^{L-1} f_l g_{L+K-l} + f_L g_K + \sum_{l=L+1}^{L+K} f_l g_{L+K-l}.$$

Die linke Seite ist in I, genauso wie die vordere und hintere Summe der rechten Seite, einmal aufgrund der Wahl von L, einmal aufgrund unserer Induktionsvoraussetzung. Also ist $f_L g_K$ in I und wie oben folgt $g_K \in I$.

Das zeigt $g \in I$; somit ist I ein Primideal.

Übung 7 vom 2. Dezember 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Es sei $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subset \mathbb{A}^2(k)$. Wir betrachten die Einbettung $\varphi_Z : \mathbb{A}^2(k) \to \mathbb{P}^2(k)$, $(x,y) \mapsto (x : y : 1)$.

Zeige: Der Abschluss von $\varphi_Z(E)$ in $\mathbb{P}^2(k)$ ist $V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$.

Welche Punkte liegen im Abschluss von $\varphi_Z(E)$, aber nicht in $\varphi_Z(E)$?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zu einem Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \dots, X_n]$ sei I^* das von den Homogenisierungen der Elemente von I (bezüglich X_0) erzeugte homogene Ideal in $k[X_0, \dots, X_n]$. Weiter sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und $\varphi : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$ die Einbettung. In der Vorlesung wurde $\overline{\varphi(V(I))} = V(I^*)$ gezeigt.

Zeige, dass auch $I(\overline{\varphi(V)}) = I(V)^*$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Die getwistete Kubik $V = V(X^2 - Y, X^3 - Z) \subset \mathbb{A}^3(k)$ (von Blatt 1) kommt zurück!

Es sei $\varphi : \mathbb{A}^3(k) \to \mathbb{P}^3(k)$ die Einbettung $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$ und $k[W, X, Y, Z]$ der Koordinatenring von $\mathbb{P}^3(k)$. Zeige:

a) $XZ - Y^2 \in I(\overline{\varphi(V)})$, aber $XZ - Y^2 \notin (X^2 - YW, X^3 - ZW^2)$. Es reicht also nicht aus, nur die Erzeuger von $I(V) = (X^2 - Y, X^3 - Z)$ zu homogenisieren.
b) Es gilt $\overline{\varphi(V)} = V(X^2 - YW, X^3 - ZW^2, XZ - Y^2)$.
c) Was sind die irreduziblen Komponenten von $V(X^2 - YW) \cap V(X^3 - ZW^2)$?
d) In c) haben wir auch gezeigt, dass der Schnitt von irreduziblen Varietäten nicht unbedingt irreduzibel sein muss.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien r, $s \in \mathbb{N}$ und $N = (r+1)(s+1) - 1$. Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{P}^r(k) \times \mathbb{P}^s(k) & \to & \mathbb{P}^N(k) \\ ((x_0 : \dots : x_r), (y_0 : \dots : y_s)) & \mapsto & (x_0y_0 : \dots : x_0y_s : \dots : x_ry_0 : \dots : x_ry_s) \end{cases}$$

heißt *Segre-Einbettung*. Zeige:

a) Ψ ist wohldefiniert und injektiv.
b) $\operatorname{Bild}(\Psi)$ ist eine irreduzible Untervarietät von $\mathbb{P}^N(k)$.
Hinweis: Es sei $k[Z_{ij} \mid i = 0, \dots, r,\ j = 0, \dots, s]$ der Koordinatenring von $\mathbb{P}^N(k)$. Betrachte den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : k[Z_{ij}] \to k[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_s]\ , \quad Z_{ij} \mapsto X_iY_j$$

und zeige $V(\operatorname{Kern}(\Phi)) = \operatorname{Bild}(\Psi)$.
c) Ist $r = s = 1$, so gilt $\operatorname{Bild}(\Psi) = V(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10})$.

Lösung 4

a) Zunächst ist für $x = (x_0 : \dots : x_r) \in \mathbb{P}^r(K)$, $y = (y_0 : \dots : y_s) \in \mathbb{P}^s(K)$ der Ausdruck $\Psi(x,y)$ unabhängig vom Repräsentaten der Äquivalenzklasse, denn für λ, $\mu \in K^\times$ gilt

$$\begin{aligned} \Psi((\lambda x_0 : \dots : \lambda x_r), (\mu y_0 : \dots : \mu y_s)) &= (\lambda x_0 \mu y_0 : \dots : \lambda x_i \mu y_j : \dots : \lambda x_r \mu y_s) \\ &= (x_0y_0 : \dots : x_iy_j : \dots : x_ry_s) \\ &= \Psi((x_0 : \dots : x_r), (y_0 : \dots : y_s)). \end{aligned}$$

Aßerdem gibt es einen Index i_0 mit $x_{i_0} \neq 0$ und einen Index j_0 mit $y_{j_0} \neq 0$, so dass also $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$ gilt, woraus folgt, dass $\Psi(x,y)$ nie in allen Koordinaten 0 ist.

Ψ *ist injektiv*: Denn seien $\tilde{x} = (\tilde{x}_0 : \ldots : \tilde{x}_r) \in \mathbb{P}^r(K)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_0 : \ldots : \tilde{y}_s) \in \mathbb{P}^s(K)$ zwei weitere Punkte und es gelte $\Psi(x,y) = \Psi(\tilde{x},\tilde{y})$. Dann gibt es ein $\lambda \in K^\times$, so dass für alle $(i,j) \in \{0,\ldots,r\} \times \{0,\ldots,s\}$

$$x_i y_j = \lambda \tilde{x}_i \tilde{y}_j$$

gilt. Für beliebiges j und $i = i_0$ wie oben ist $y_j = \lambda \frac{\tilde{x}_{i_0}}{x_{i_0}} \tilde{y}_j$, und da $y_{j_0} \neq 0$ ist, folgt $\lambda \frac{\tilde{x}_{i_0}}{x_{i_0}} \neq 0$. Somit gilt $y = \tilde{y}$.Genauso zeigt man $x = \tilde{x}$; insgesamt folgt, dass Ψ injektiv ist.

b) In der Übung haben wir bereits gesehen, dass es reicht $V(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \mathrm{Bild}(\Psi)$ zu zeigen.

Es gilt $\mathrm{Bild}(\Psi) \subseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi))$, denn sei $F \in \mathrm{Kern}(\Phi)$ und $(x,y) \in \mathbb{P}^r(K) \times \mathbb{P}^s(K)$. Dann ist

$$F(\Psi(x,y)) = F((x_0 y_0 : \ldots : x_r y_s)) = \Phi(F)(x_0,\ldots,x_r,y_0\ldots,y_s) = 0.$$

Für die andere Inklusion betrachten wir für (i,j), $(i',j') \in \{0,\ldots,r\} \times \{0,\ldots,s\}$ die Polynome

$$Z_{ij} Z_{i'j'} - Z_{ij'} Z_{i'j}.$$

Diese liegen im Kern von Φ. Sei J das von ihnen erzeugte Ideal, also

$$J = (Z_{ij} Z_{i'j'} - Z_{ij'} Z_{i'j} \mid (i,j),\ (i',j') \in \{0,\ldots,r\} \times \{0,\ldots,s\}).$$

Es ist $J \subseteq \mathrm{Kern}(\Phi)$, also $V(J) \supseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi))$. Wenn wir zeigen, dass $V(J) \subseteq \mathrm{Bild}(\Psi)$ gilt, so sind wir fertig.

Es sei $z = (z_{00} : \ldots : z_{rs}) \in V(J)$. Zunächst gibt es ein Paar (i_0, j_0), für das $z_{i_0 j_0} \neq 0$ gilt. Es ist

$$z_{ij} z_{i_0 j_0} = z_{i j_0} z_{i_0 j},$$

was äquivalent ist zu

$$z_{ij} = \frac{z_{i j_0} z_{i_0 j}}{z_{i_0 j_0}}.$$

Wir setzen $x_i = z_{i j_0}$ und $y_j = z_{i_0 j}$. Dies definiert zwei Punkte $x = (\ldots : x_i : \ldots) \in \mathbb{P}^r(K)$ und $y = (\ldots : y_j : \ldots) \in \mathbb{P}^s(K)$, und es gilt

$$\Psi(x,y) = (\ldots : z_{i j_0} z_{i_0 j} : \ldots) = (\ldots : \frac{z_{i j_0} z_{i_0 j}}{z_{i_0 j_0}} : \ldots) = (\ldots : z_{ij} : \ldots).$$

Somit ist $z \in \mathrm{Bild}(\Psi)$.

c) Aus b) erhalten wir unter anderem $\mathrm{Bild}(\Psi) = V(J)$, und es gilt für $r = s = 1$

$$J = (Z_{00} Z_{11} - Z_{01} Z_{10}),$$

denn alle anderen Erzeuger sind 0.

Übung 8 vom 9. Dezember 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Inzwischen wissen wir, was Morphismen in der Kategorie der projektiven Varietäten sind. Darum hier noch einmal Aufgabe 2 von Übungsblatt 6:

Bestimme die Automorphismen von $\mathbb{P}^1(k)$, d.h. die Menge aller Isomorphismen $\varphi\colon \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^1(k)$.

Tipp: Benutze Aufgabe 4 von Übungsblatt 5.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei $\varphi : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^m(k)$ ein Morphismus. Zeige, dass es homogene Polynome $f_0, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ gibt, alle vom gleichen Grad, mit

$$\varphi(x) = (f_0(x) : \dots : f_m(x))$$

für alle $x \in \mathbb{P}^n(k)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Der Nikolaus hat dir und deiner Schwester je eine nichtleere, irreduzible, projektive Varietät im $\mathbb{P}^n(k)$ geschenkt. Deine ist isomorph zu einer affinen Varietät, die deiner Schwester besteht nur aus einem Punkt. Doch der Nikolaus behauptet, dass er keinen von Euch benachteiligt hat. Wieso?

Aufgabe 4 (*Veronese-Einbettung* 7 Punkte)
Es seien $M_0, M_1, \dots, M_{N(d)}$ die Monome von Grad d in $k[X_0, \dots, X_n]$. (Hierbei ist $N(d) = \binom{n+d}{d} - 1$.) Der Morphismus

$$\rho_d : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^{N(d)}(k)\ , \quad x \mapsto (M_0(x) : \dots : M_{N(d)}(x))$$

heißt *Veronese-Einbettung.*

a) Wir identifizieren den Koordinatenring $k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)]$ von $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ mit

$$k\Big[Y_\nu \mid \nu = (\nu_0, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} \nu_i = d\Big].$$

Zeige, dass für den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi_d : k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)] \to k[X_0, \dots, X_n]\ , \quad Y_\nu \mapsto X^\nu := X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}$$

gilt: $\mathrm{Bild}(\rho_d) \subseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

b) Zeige: Die Mengen

$$U_0 = D(Y_{(d,0,\dots,0)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d)),\ \dots,\ U_n = D(Y_{(0,\dots,0,d)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$$

bilden eine offene Überdeckung von $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

c) Bestimme für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ einen Umkehrmorphismus $\psi_d^i : U_i \to \mathbb{P}^n(k)$ von ρ_d und begründe, warum sich diese zu einem globalen Umkehrmorphismus ψ_d von ρ_d „verkleben“ lassen.

d) Folgere, dass ρ_d ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^n(k)$ und einer irreduziblen, projektiven Varietät in $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ ist.

e) Zeige: Für jedes homogene Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ von Grad d gibt es ein lineares, homogenes Polynom $F \in k[Y_0, \ldots, Y_{N(d)}]$, so dass

$$\rho_d(V(f)) = V(F) \cap \operatorname{Bild}(\rho_d).$$

Lösung 4

Die Lösung von Aufgabenteil a) und b) haben wir bereits in der Übung gesehen. Sei

$$\Sigma = \{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} \nu_i = d\}.$$

c) Sei zur besseren Notation $i = 0$. Wir definieren für $y \in U_0$ (d.h. $y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0$)

$$\psi_d^0(y) = (y_{(d,0,\ldots,0)} : y_{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \ldots : y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \in \mathbb{P}^n(k).$$

(Allgemein steht an der i-ten Stelle d, bzw. $d-1$.) ψ_d^0 ist ein wohldefinierter Morphismus. Wir zeigen nun, dass ψ_d^0 invers zu $\rho_d|_{\rho_d^{-1}(U_0)}$ ist.

Sei $x \in \rho_d^{-1}(U_0)$. Dann gilt $x_0^d \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
\psi_d^0 \circ \rho_d(x) &= \psi_d^0(\ldots : x^\nu : \ldots) \\
&= (x^{(d,0,\ldots,0)} : x^{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \cdots : x^{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \\
&= (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \ldots : x_0^{d-1}x_n) \\
&\overset{x_0 \neq 0}{=} (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = x
\end{aligned}$$

Somit gilt $\psi_d^0 \circ \rho_d|_{\rho_d^{-1}(U_0)} = \mathrm{id}_{\rho_d^{-1}(U_0)}$.

Als nächstes zeigen wir $\rho_d \circ \psi_d^0 = \mathrm{id}_{U_0}$. Dazu brauchen wir noch eine weitere Relation. Für $\nu \in \Sigma$ ist

$$\begin{aligned}
\Phi_d({Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {Y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {Y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n}) &= X_0^{d\nu_0} X_0^{(d-1)\nu_1} X_1^{\nu_1} \cdots X_0^{(d-1)\nu_n} X_n^{\nu_n} \\
&= X_0^{(d-1)\sum_{i=0}^n \nu_i} X_0^{\nu_0} X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \\
&= X_0^{(d-1)d} X^\nu \\
&= \Phi_d(Y_\nu)\Phi_d({Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)}).
\end{aligned}$$

Das bedeutet: Für alle $\nu \in \Sigma$ gilt

$${Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {Y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {Y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n} - Y_\nu {Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)} \in \operatorname{Kern}(\Phi_d).$$

Damit folgt für $y \in U_0$, d.h. $y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\rho_d \circ \psi_d^0(y) &= \rho_d(y_{(d,0,\ldots,0)} : y_{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \ldots : y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \\
&= (\ldots : {y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n} : \ldots) \\
&= (\ldots : y_\nu {y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)} : \ldots) \overset{y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0}{=} y.
\end{aligned}$$

Auf $U_i \cap U_j$ sind ψ_d^i und ψ_d^j beides Umkehrabbildungen zu ρ_d. Wegen der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung gilt für alle $y \in U_i \cap U_j$

$$\psi_d^i(y) = \psi_d^j(y).$$

Damit verkleben sich die ψ_d^i zu einem Morphismus

$$\psi_d : V(\mathrm{Kern}(\Phi_d)) \to \mathbb{P}^n,$$

der ein Umkehrmorphismus zu ρ_d ist.

d) Der Morphismus ρ_d ist nach c) ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^n(k)$ und $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

Der Homomorphismus Φ_d ist homogen vom Grad d, denn jedes Y_ν wird auf ein homogenes Polynom von Grad d geschickt. (Es gilt $\Phi_d(k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)]_e) \subset k[\mathbb{P}^n(k)]_{de}$ für alle $e \in \mathbb{N}_0$.) Damit ist $\mathrm{Kern}(\Phi_d)$ ein homogenes Ideal und $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$ eine projektive Varietät.

$\mathrm{Kern}(\Phi_d)$ ist ein Primideal, denn $\mathrm{Bild}(\Phi_d) \subset k[\mathbb{P}^n(k)]$ ist nullteilerfrei. Somit ist $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$ irreduzibel, wie gefordert.

e) Sei $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen von Grad d,

$$f = \sum_{\nu \in \Sigma} a_\nu X^\nu.$$

Wir setzen $F = \sum_{\nu \in \Sigma} a_\nu Y_\nu$. Dann ist $F(\rho_d(x)) = f(x)$ und es folgt

$$\rho_d(V(f)) = V(F) \cap \mathrm{Bild}(\rho_d).$$

Übung 9 vom 16. Dezember 2011

Die Übung vor Weihnachten wird vom 23.12. auf den 22.12. vorverlegt. Sie findet am Donnerstag, den 22.12., im 5. Block (15:45-17:15) im Raum 1C-01 statt.

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen Körper, der nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $n \geq 1, d \geq 0$, V ein n-dimensionaler k-Vektorraum und $\wedge\colon V^d \to \bigwedge^d V$, $(v_1, \dots, v_d) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ die aus der Vorlesung bekannte multilineare, alternierende Abbildung.

a) Zeige, dass das äußere Produkt $\bigwedge^d V$ folgende UAE erfüllt: Für jeden k-Vektorraum W und jede multilineare, alternierende Abbildung $\Phi\colon V^d \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\Psi\colon \bigwedge^d V \to W$ mit $\Psi \circ \wedge = \Phi$.
b) Sei $\bigwedge^0 V := k$. Zeige, dass $\bigoplus\limits_{d \geq 0} \bigwedge^d V$ durch

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) \cdot (w_1 \wedge \dots \wedge w_l) = (v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge w_1 \wedge \dots w_l)$$

für v_i, $w_j \in V$ zu einer k-Algebra wird.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Zeige, dass die Graßmann-Varietät $G(2, 3)$ isomorph zu $\mathbb{P}^2(k)$ ist.
b) Die Graßmann-Varietät $G(2, 4)$ ist die erste, die kein projektiver Raum ist.

Die Charakteristik von k sei nicht 2. Zeige, dass $G(2, 4)$, aufgefasst als Untervarietät des $\mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4)$ und bezüglich einer geeigneten Wahl der Koordinaten, gleich der Verschwindungsmenge von

$$X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23}$$

ist.

Hinweis: Zeige, dass $0 \neq w \in \bigwedge^2 k^4$ *genau dann total zerlegbar ist, wenn* $w \wedge w = 0$ *gilt.*

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Es seien $n \geq 1$, $d \in \{0, \dots, n\}$, $W \leq k^n$ ein Untervektorraum der Dimension $(n - d)$ und

$$U := \{V \in G(d, n) \mid V \oplus W = k^n\}.$$

Zeige:

a) U ist offen in $G(d, n)$.
b) U ist isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$.

Hinweis: Interpretiere U als Menge der linearen Projektionen $k^n \to W$.

Auch die UAE des äußeren Produkts könnte hilfreich sein.
c) **Ist k ein unendlicher Körper**, so ist $G(d, n)$ irreduzibel.

Lösung 3
Aufgabenteil a) haben wir bereits in der Übung gelöst, die Aufgabenteile b) und c) haben wir nur skizziert, darum kommt hier noch einmal die ausführlichere Lösung.

b) Sei $P := \{p : k^n \to W \mid p \text{ ist eine Projektion}\} \subseteq \mathrm{Hom}(k^n, W)$ und $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von k^n, so dass $W = \langle e_{d+1}, \dots, e_n\rangle$. Für jede Projektion $p \in P$ gilt dann für $j \in \{1, \dots, d\}$: $p(e_j) = \sum_{i=d+1}^{n} a_{ij} e_i$ mit $a_{ij} \in k$ und für $j \in \{d+1, \dots, n\}$: $p(e_j) = e_j$.

Bezüglich E hat p also folgende Gestalt: $\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,d} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zu jeder Wahl der $a_{ij} \in k$, $i \in \{d+1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, d\}$ gehört genau ein $p \in P$, so dass wir eine Bijektion zwischen P und $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ bekommen.

Wir definieren nun die (naheliegende) Bijektion zwischen U und P,

$$\Phi\colon \begin{cases} U & \to & P \\ V & \mapsto & (V \oplus W \mapsto W) \end{cases}$$

mit Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon P \to U, p \mapsto \operatorname{Kern}(p)$. Es bleibt zu zeigen, dass Φ und Φ^{-1} regulär sind.

Sei zunächst $V = \langle v_1, \dots, v_d \rangle \in U$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$ eine Basis von k^n, also ist $A := (v_1|\dots|v_d|e_{d+1}|\dots|e_n)$ invertierbar. Bezüglich E hat $\Phi(V)$ die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

Zu zeigen bleibt damit, dass die Einträge a'_{ij} von A^{-1} reguläre Funktionen auf U sind. Es gilt $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A)^{-1} \cdot \det(A')$, wobei A' aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Wie im Aufgabenteil a) sind $\det(A)$ und $\det(A')$ durch lineare Polynome gegeben (dort haben wir die UAE des äußeren Produkts verwendet). Außerdem ist $\det(A) \neq 0$ auf ganz U. Damit ist gezeigt, dass Φ regulär ist.

Für Φ^{-1} betrachten wir $p \in P$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(p) = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,d} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{d+1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ a_{d+1,d} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &=: \langle v_1, \dots, v_d \rangle. \end{aligned}$$

Damit gilt $\Phi^{-1}(p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$, was linear in den a_{ij} ist.

c) Nach b) ist U isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ und da k **unendlich** ist, ist $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ irreduzibel. Wir zeigen, dass U dicht in $G(n,d)$ liegt. Damit ist dann auch $\overline{U} = G(d,n)$ irreduzibel.

Sei $V \in G(d,n)$. Zu zeigen ist, dass V im Abschluss von U liegt.

Es gibt ein W' mit $k^n = V \oplus W'$, also ist $V \in U' := \{V' \in G(d,n) \mid V' \oplus W' = k^n\}$. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $U \cap U' = \{V : V \oplus W = V \oplus W' = K^n\} \neq \emptyset$ gilt. Die Varietät U' ist (nach b)) irreduzibel also ist $\overline{U \cap U'} = U'$ und damit $V \in \overline{U \cap U'} \subseteq \overline{U}$.

Übung 10 vom 22. Dezember 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen Körper.

Aufgabe 1 (unschätzbarem Wert, 4 Punkte)
Vergleiche affine Varietäten mit projektiven Varietäten. Wo unterscheiden sich die Definitionen von Morphismen, regulären Abbildungen, ... und wo nicht? Welche wichtigen Zusammenhänge und Sätze gibt es in der affinen und welche in der projektiven Welt?

Ziel dieser Aufgabe ist also, dass ihr euch einen Überblick darüber verschafft, was wir in den ersten beiden Kapiteln gelernt haben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei V eine quasiprojektive Varietät über k und $x \in V$.

a) Sei weiter $\mathcal{O}_{V,x}$ der lokale Ring von V in x. Weiter sei für eine offene Umgebung $U \subseteq V$ von x der in der Vorlesung eingeführte k-Algebren-Homomorphismus $\psi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_{V,x}, f \mapsto f_x = [(U, f)]$.

   Zeige, dass die ψ_x^U zusammen mit den Restriktionsabbildungen $\rho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U')$ für offene $U' \subseteq U \subseteq V$ ein injektives System bilden. Zeige also:

   i) $\psi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \psi_x^U$ und

   ii) für jede k-Algebra A mit Homomorphismen $\varphi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to A$ für offene Umgebungen $U \subseteq V$ von x, so dass für alle offenen $U' \subseteq U$ stets $\varphi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \varphi_x^U$ gilt, gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_{V,x} \to A$ mit $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$ für alle offenen Umgebungen $U \subseteq V$ von x.

b) Sei nun $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten und U eine offene Umgebung von x in V.

   Zeige: Gilt für alle $i \in I$ mit $x \notin V_i$, dass $U \cap V_i = \emptyset$, so ist ψ_x^U injektiv.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Die Charakteristik von k sei $\neq 2$. Für die getwistete Kubik $V_1 = V(Y - X^2, Z - X^3) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ gilt bekanntlich $I(V_1) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Die Varietät $V_2 = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ ist ein Doppelkegel.

Bestimme jeweils eine Basis des Tangentialraums $T_{V_i,p}$ für jeden Punkt $p = (a, b, c) \in V_i$.

Aufgabe 4 ((Aufblasung der Ebene)6 Punkte)
Nun sei k algebraisch abgeschlossen und

$$X = \{((x_1, x_2), (y_1 : y_2)) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \mid x_1 y_2 = x_2 y_1\}.$$

Man nennt X die ***Aufblasung*** von $\mathbb{A}^2(k)$ im Punkt $(0, 0)$. Außerhalb von $(0, 0)$ sieht X aus wie die affine Ebene, aber den Ursprung hat man zu einer projektiven Geraden „aufgeblasen“. Die Punkte des $\mathbb{P}^1(k)$ entsprechen den Richtungen von Geraden durch den Nullpunkt.

Sei $\pi : X \to \mathbb{A}^2(k)$ die Projektion auf den ersten Faktor. Die Faser $E = \pi^{-1}((0, 0))$ über dem Ursprung nennt man ***exzeptionelle Kurve*** der Aufblasung. Für eine Kurve $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ mit $(0, 0) \in C$ heißt der Abschluss von $\pi^{-1}(C \setminus \{(0, 0)\})$ in X die ***strikte Transformierte*** von C.

Zeige:

a) X wird vermöge der Segre-Einbettung $\Psi : \mathbb{P}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^5(k)$ von Blatt 7 zu einer irreduziblen quasiprojektiven Varietät.

   Hinweis: Für die Irreduzibilität helfen b) und c).

b) π ist ein surjektiver Morphismus, der $X_0 = \{x \in X \mid \pi(x) \neq (0,0)\}$ isomorph auf $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ abbildet.

c) Es sei $[v] \in \mathbb{P}^1(k)$ die Äquivalenzklasse von $v \in \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ und $L_v = \{tv \mid t \in k\}$ die Ursprungsgerade in Richtung v. Zeige, dass die strike Transformierte von L_v durch

$$\{(tv, [v]) \in X \mid t \in k\}$$

gegeben ist. Folgere, dass jeder Punkt in E im Abschluss einer Menge aus X_0 liegt.

d) Durch Aufblasen kann man algebraische Varietäten desingularisieren. Im einfachsten Fall sieht eine Singularität zum Beispiel wie der Punkt $(0,0)$ des Achsenkreuzes $V(XY) \subset \mathbb{A}^2(k)$ aus.

Zeige, dass sich die strikten Transformierten der x- und der y-Achse in X nicht mehr schneiden.

e) Eine weitere Verwendung der Aufblasung besteht darin, aus rationalen Abbildungen Morphismen zu machen. Als Beispiel betrachten wir

$$\varphi : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k) , \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 : x_2).$$

Zeige, dass ein Morphismus $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^1(k)$ existiert, so dass $\tilde{\varphi}(x) = \varphi \circ \pi(x)$ für alle $x \in X_0$ gilt.

Wir wünschen euch ein schönes Weihnachtsfest und alles Gute für das Jahr 2012!

Lösung 2

a) i) Sei $f \in O_V(U)$: $(\psi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U)(f) = \psi_x^{U'}(f|_{U'}) = [(U', f|_{U'})] = [(U, f)] = \psi_x^U(f)$.

ii) Sei A eine k-Algebra und für jedes $U \subseteq V$ offen, mit $x \in U$, ein k-Algebren-Homomorphismus $\varphi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to A$ gegeben, so dass $\varphi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \varphi_x^U$ für alle offenen $U' \subseteq U$ mit $x \in U'$. Zu zeigen ist, dass es genau einen Homomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_{V,x} \to A$ gibt, mit $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$ für alle offenen Umgebungen $U \subseteq V$ von x.

Wegen $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$, muss $\Phi([(U, f)]) = \varphi_x^U(f)$ gelten. Das ist eindeutig! Zu zeigen bleibt, dass es auch wohldefiniert ist. Sei also $[(U, f)] = [(U', f')]$, dann ist $f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$. Damit gilt auch $\varphi_x^U(f) = \varphi_x^{U' \cap U} \circ \rho_{U' \cap U}^U(f) = \varphi_x^{U' \cap U}(f|_{U \cap U'}) = \varphi_x^{U' \cap U}(f'|_{U \cap U'}) = \varphi_x^{U' \cap U} \circ \rho_{U' \cap U}^{U'}(f') = \varphi_x^{U'}(f)$.

b) Sei $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $\psi_x^U(f) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von x mit $f|_{U'} = 0$. Für alle $i \in I$ mit $x \notin V_i$ gilt $V_i \cap U' = \emptyset$ ($U' \subseteq U$). Für alle $i \in I$ mit $x \in V_i$ ist $x \in V_i \cap U'$, also ist $V_i \cap U' \neq \emptyset$ und da V_i irreduzibel ist, gilt $\overline{V_i \cap U'} = V_i$. Damit ist $f_{V_i \cap U} \equiv 0$ für alle V_i mit $V_i \cap U \neq \emptyset$. Es folgt, dass $f|_U \equiv 0$.

Lösung 3

Nach Übungsblatt 2 Aufgabe 2 ist $I(V_1) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Setze $f := Y - X^2$ und $g := Z - X^3$. Im Punkt $p = (a, b, c) \in V_1$ gilt $D_p(f) = -2aX + Y$ sowie $D_p(g) = -3a^2X + Z$ und damit

$$T_{V_1,p} = V(-2aX + Y, -3a^2X + Z) = \{(t, 2at, 3a^2t) \mid t \in k\}.$$

Eine Basis von $T_{V_1,p}$ ist zum Beispiel $\{(1, 2a, 3a^2)\}$.

Zu $V_2 = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ bestimmen wir zunächst das Verschwindungsideal. Da $Y^2 - Z^2 = (Y - Z)(Y + Z)$ kein Quadrat in $k[Y, Z][X]$ ist, ist $h := X^2 + Y^2 - Z^2$ irreduzibel und $I(V_2) = (X^2 + Y^2 - Z^2)$. Für $p = (a, b, c) \in V_2$ gilt demnach $D_p(h) = 2aX + 2bY - 2cZ$. Ist $p = (0, 0, 0)$, so ist $D_p(h) \equiv 0$ und $T_{V_2,p} = k^3$ mit Basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Für $p \neq (0, 0, 0)$ ist $T_{V_2,p} = V(2aX + 2bY - 2cZ) = \{(x, y, z) \mid 2ax + 2by - 2cz = 0\}$ und hat als Basis $\{(b, -a, 0), (c, 0, a)\}$.

Lösung 4

a) In der Übung habe ich bereits gezeigt, dass X vemöge Ψ zu einer quasiprojektiven Varietät wird. Zu zeigen bleibt, dass X irreduzibel ist. $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\}$ ist irreduzibel, also nach b) auch $X_0 = \{x \in X \mid \pi(x) \neq (0, 0)\}$. Es gilt $X = X_0 \cup E$. Wenn wir noch zeigen, dass $E \subseteq \overline{X_0}$ ist, dann ist $X = \overline{X_0}$ und somit irreduzibel. Sei dazu $p \in E$. Nach c) gibt es ein $M \subseteq X_0$ mit $p \in \overline{M}$. Mit $\overline{M} \subseteq \overline{X_0}$ folgt $E \subseteq \overline{X_0}$.

b) In der Übung habe ich gezeigt, dass π ein surjektiver Morphismus ist. Was noch fehlt ist ein Umkehrmorphismus zu $\pi|_{X_0} : X_0 \to \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\}$. Setze

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\} & \to & X_0 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & ((x_1, x_2), (x_1 : x_2)) \end{cases}$$

Wegen $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ und $x_1x_2 = x_2x_1$ ist $\operatorname{Bild}(\sigma) \subseteq X_0$ und die Abbildung ist wohldefiniert. Weiter gilt $(\sigma \circ \pi|_{X_0})((x_1, x_2), (y_1 : y_2)) = ((x_1, x_2), (x_1 : x_2))$. Aus $x_1y_2 = x_2y_1$ folgt mit $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, dass $(y_1 : y_2) = (x_1 : x_2)$ gilt. Es folgt $\sigma \circ \pi|_{X_0} = \operatorname{id}|_{X_0}$. Die Gleichung $\pi|_{\mathbb{A}^2(k)\setminus\{(0,0)\}} \circ \sigma = \operatorname{id}|_{\mathbb{A}^2(k)\setminus\{(0,0)\}}$ ist offensichtlich. Somit ist σ der gewünschte Umkehrabbildung.

Es bleibt zu zeigen, dass σ ein Morphismus ist. Dafür müssen wir (wie in b)) $\Psi \circ \sigma \colon \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\} \to \Psi(X_0) \subseteq \mathbb{P}^5(k)$ betrachten. Wobei wir $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\}$ als Teilraum von $\mathbb{P}^2(k)$ betrachten.

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \sigma)(\overset{\neq 0}{x_0} : x_1 : x_2) &= (\psi \circ \sigma)\left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 : \frac{x_1x_2}{x_0^2} : \frac{x_1x_2}{x_0^2} : \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2\right) \\ &= (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_1x_2 : x_2^2) \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\Psi \circ \sigma$ durch homogene Polynome vom Grad 2 gegeben ist, und folglich ein Morphismus ist.

c) Wir wollen zeigen, dass $\widetilde{L_v} := \overline{\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0, 0)\})} = \{(tv, [v]) \in X \mid t \in k\} =: H$. Definiere dazu die Abbildung $h \colon \mathbb{A}^1(k) \to X, t \mapsto (tv, [v])$, mit Bild H. Diese Abbildung ist ein Morphismus, denn $(\Psi \circ h)(t) = (v_1 : v_2 : tv_1^2 : tv_1v_2 : tv_1v_2 : tv_2^2)$ oder genauer $(\Psi \circ h)(\overset{\neq 0}{t_0} : t_1) = (t_0v_2 : t_0v_2 : t_1v_1^2 : t_1v_1v_2 : t_1v_1v_2 : t_1v_2^2)$. $\mathbb{A}^1(k)$ ist irreduzibel und damit auch $\operatorname{Bild}(\Psi \circ h)$.

Behauptung: $\operatorname{Bild}(\Psi \circ h) = \Psi(X) \cap V(v_1Z_1 - v_2Z_0)$ (daraus folgt dann insbesondere, dass $\operatorname{Bild}(\Psi \circ h)$ abgeschlossen ist).

Beweis der Behauptung: Die Inklusion „$\subseteq$" ist klar. Sei umgekehrt $z \in \Psi(X) \cap V(v_1Z_1 - v_2Z_0)$. Dann sind (v_1, v_2) und (z_0, z_1) linear abhängig und wegen a) gilt $z = (z_0 : z_1 : \tau z_0^2 : \tau z_0z_1 : \tau z_0z_1 : \tau z_1^2)$ mit $\tau \in k$ geeignet. Damit liegt z in $\operatorname{Bild}(\Psi \circ h)$.

Es gilt $\Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0, 0)\})) = (\Psi \circ \sigma)(L_v \setminus \{(0, 0)\}) = \{(v_0 : v_1 : tv_0^2 : tv_0v_1 : tv_0v_1 : tv_1^2) \mid t \in k\}$. Somit ist $\operatorname{Bild}(\Psi \circ h) = \Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0, 0)\})) \cup \{(v_0 : v_1 : 0 : 0 : 0 : 0)\}$ und weil $\operatorname{Bild}(\Psi \circ h)$ irreduzibel ist und $\{(v_0 : v_1 : 0 : 0 : 0 : 0)\}$ abgeschlossen, muss $\Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0, 0)\}))$ offen sein. Da $\operatorname{Bild}(\Psi \circ h)$ abgeschlossen ist folgt $\Psi(\widetilde{L_v}) = \operatorname{Bild}(\psi \circ h) = \Psi(H)$.

Es bleibt zu folgern, dass für alle $p \in E = \pi^{-1}((0, 0))$ ein $M \subseteq X_0$ existiert mit $p \in \overline{M}$:

Sei $((0, 0), [v]) \in E$, also $v \in \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\}$. Dann ist $\widetilde{L_v} \cap E = \{(v_0 \colon v_1 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon 0)\} \overset{\Psi^{-1}}{\to}$

$\{((0,0),[v])\}$, also ist $((0,0),[v])$ im Abschluss von $\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})$ enthalten und $\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\}) \subseteq X_0$.

d) Nach c) gilt $\widetilde{L}_{(1,0)} = \{((t,0),(1:0)) \mid t \in k\}$ und $\widetilde{L}_{(0,1)} = \{((0,t),(0:1)) \mid t \in k\}$. Die Gleichung $\widetilde{L}_{(1,0)} \cap \widetilde{L}_{(0,1)} = \emptyset$ ist offensichtlich erfüllt.

e) Wir definieren

$$\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^1(K)\ , \quad ((x_1,x_2),(y_1:y_2)) \mapsto (y_1:y_2).$$

Zunächst sollte man sich klarmachen, dass $\tilde{\varphi}$ wirklich ein Morphismus (für die von Ψ induzierte Struktur als quasiprojektive Varietät) ist. Es gilt

$$\tilde{\varphi} \circ \Psi^{-1} : \Psi(X) \to \mathbb{P}^1(K)\ , \quad z = (z_0 : \ldots : z_5) \mapsto (z_0 : z_1),$$

was auf $D(Z_0) \cup D(Z_1) \supset \Psi(X)$ wohldefiniert ist.

$\tilde{\varphi}$ setzt φ fort, denn sei $p = ((x_1,x_2),(y_1:y_2)) \in X_0$. Dann sind wegen $x_1y_2 = x_2y_1$ die Vektoren (x_1,x_2) und (y_1,y_2) linear abhängig und beide $\neq (0,0)$, also gilt

$$\varphi \circ \pi(p) = \varphi(x_1,x_2) = (x_1:x_2) = (y_1:y_2) = \tilde{\varphi}(p).$$

Übung 11 vom 13. Januar 2011

Aufgabe 0 (1 Punkt)
Um das neue Jahr zu feiern, bekommt jeder, der abgibt, einen Punkt geschenkt.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei R ein Ring und $D\colon R[X] \to R[X]$ die Ableitung d/dX, d.h. D ist gegeben durch $D(\sum_{i=0}^n a_i X^i) = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$. Zeige, dass D eine Derivation ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei R ein Ring, A eine R-Algebra. Mit $\underline{A\text{-Mod}}$ bezeichnen wir die Kategorie der A-Moduln.

a) Wir werden zeigen, dass der Funktor von $\underline{A\text{-Mod}}$ nach $\underline{A\text{-Mod}}$ mit $M \mapsto \operatorname{Der}_R(A, M)$ darstellbar ist.

   Betrachte dazu den freien A-Modul F mit der Basis A, wobei X_f das Basiselement zu $f \in A$ bezeichne. Weiter sei U der Untermodul von F, der von allen $X_{f+g} - X_f - X_g, X_{\lambda f} - \lambda X_f$ und $X_{f\cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f$ für $f, g \in A$ und $\lambda \in R$ erzeugt wird.

   Zeige, dass der sogenannte *Differentialmodul* $\Omega_{A/R} := F/U$ zusammen mit $d\colon A \to \Omega_{A/R}, f \mapsto \overline{X_f} =: df$ folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:

   Zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation $\delta\colon A \to M$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\varphi\colon \Omega_{A/R} \to M$ mit $\delta = \varphi \circ d$.

b) Zeige, dass für $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ der Differentialmodul $\Omega_{A/R}$ ein freier Modul mit Basis $dX_1, \ldots, dX_n$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ die Krulldimension 2 hat.
Hinweis: Wie viele Erzeuger benötigt ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} \neq \{0\}$ höchstens, wie viele benötigt eines mit $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ höchstens?

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik ungleich 2. Es sei

$$\mathrm{SO}(2) = \{A \in k^{2\times 2} \mid \det(A) = 1\ ,\ A^{-1} = A^T\}.$$

a) Zeige, dass $\mathrm{SO}(2)$ eine affine Varietät ist und bestimme Erzeuger des Verschwindungsideals $I(\mathrm{SO}(2))$. Ist $\mathrm{SO}(2)$ irreduzibel?
b) Bestimme die lokale Dimension $\dim_A \mathrm{SO}(2)$ für einen Punkt $A \in \mathrm{SO}(2)$.

Lösung 3

b) In der Übung bin ich bei der linearen Unabhängigkeit der dX_i ins straucheln gekommen, deshalb hier jetzt noch mal der richtige Beweis dazu:

   Seien $a_1, \ldots, a_n \in A = R[X_1, \ldots, X_n]$ und $\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i = 0$ in $\Omega_{A/R}$.

   Zu zeigen ist, dass dann schon alle a_i gleich 0 sind.

   Wir betrachen die Derivationen $\frac{\partial}{\partial X_j}\colon R[X_1, \ldots, X_n] \to R[X_1, \ldots, X_n]$. Nach a) existiert jeweils ein eindeutiges $R[X_1, \ldots, X_n]$-lineares $\varphi_j\colon \Omega_{A/R} \to R[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$.

   Aus $\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i = 0$ folgt $0 = \varphi_j(\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i) \overset{\varphi_j\ A\text{-linear}}{=} \sum_{i=1}^n a_i\, \varphi_j(d(X_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i) = a_j$.

Übung 12 vom 20. Januar 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k (fast) immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

a) Es sei $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass $I(V(f)) = (f)$ genau dann gilt, wenn f quadratfrei ist, d.h. wenn kein irreduzibler Faktor von f mehrfach vorkommt.

b) Ist $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein nichtkonstantes Polynom, das nicht quadratfrei ist, so enthält

$$V\left(f, \frac{\partial}{\partial X_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n} f\right)$$

eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^n(k)$.

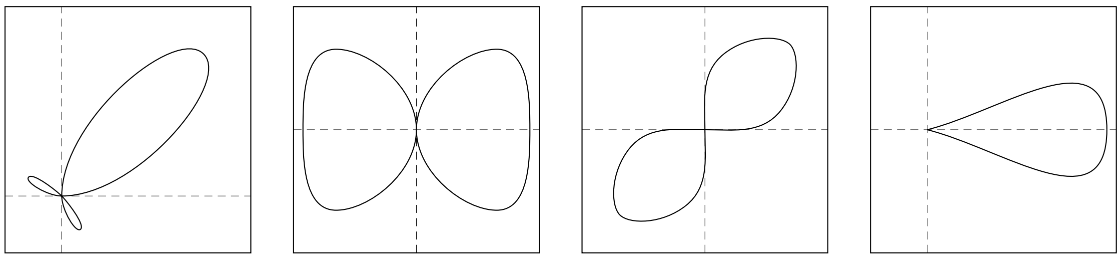
Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Es sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Bestimme die singulären Punkte der folgenden affinen Varietäten in $\mathbb{A}^2(k)$ bzw. in $\mathbb{A}^3(k)$:

$$\begin{array}{ll} V(X^4 + Y^4 - X^2) & V(X^6 + Y^6 - XY) \\ V(X^4 + Y^4 + Y^2 - X^3) & V(X^4 + Y^4 - X^2Y - XY^2) \\ V(XY^2 - Z^2) & \end{array}$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung der Verschwindungsideale.

b) Nun sei $k = \mathbb{R}$. Welche der obigen Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$ gehört zu welchem Bild?



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für diese Aufgabe habe der Körper k die Charakteristik 0. Sei V eine projektive Hyperfläche in $\mathbb{P}^n(k)$, d.h. $V = V(f)$ für ein homogenes, quadratfreies Polynom $f \in k[X_0, \dots, X_n] \setminus k$.

a) Zeige, dass $f \in k[X_0, \dots, X_n] \setminus k$, homogen vom Grad d, die folgende Differentialgleichung (von Euler) erfüllt: $\sum\limits_{j=0}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial X_j} = d \cdot f$.

b) Ein Punkt $x \in V$ ist genau dann singulär, wenn $\frac{\partial f}{\partial X_j}(x) = 0$ für $j = 0, \dots, n$.

c) Bestimme die singulären Punkte der Bernoullischen Lemniskate

$$B := V((X^2 + Y^2)^2 - 2(Y^2Z^2 - X^2Z^2)) \subseteq \mathbb{P}^2(k)\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Charakteristik von k sei weder 2 noch 3. Für $\lambda \in k$ betrachten wir die Kurve $E_\lambda = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$.

a) Für welche λ ist E_λ singulär?

Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung von $I(E_\lambda)$.

b) Bestimme den projektiven Abschluss $\overline{E_\lambda}$ von E_λ und untersuche, ob er singuläre Punkte enthält.

c) Was passiert für $\operatorname{char}(k) = 2$ oder 3?

Lösung 2

a) Die Singularitäten von $V(XY^2 - Z^2)$ habe ich in der Übung berechnet. Bei allen anderen Varietäten ist $S_f := V(f, \frac{\partial}{\partial X_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n} f) = \{(0,0)\}$ und damit, nach Aufgabe 1, $(0,0)$ die einzige Singularität von $V(f)$.

Lösung 4

Sei $f := Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) = Y^2 - X^3 + (\lambda+1)X^2 - \lambda X$.

a) Sei $p = (x,y) \in E_\lambda$. Es gilt $J_f(p) = (-3x^2 + 2(\lambda+1)x - \lambda, 2y)$ und damit $J_f(p) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0 \wedge -3x^2 + 2(\lambda+1)x - \lambda = 0$. Aus $y = 0$ und $p \in E_\lambda$ folgt $x(x-1)(x-\lambda) = 0$, also $x \in \{0, 1, \lambda\}$. Setzen wir das in die zweite Bedingung für $J_f(p) = (0,0)$ ein, so erhalten wir:

- für $x = 0$: $-\lambda = 0$, also $\lambda = 0$
- für $x = 1$: $-3 + 2(\lambda+1) - \lambda = 0$, also $\lambda = 1$
- für $x = \lambda$: $-3\lambda^2 + 2(\lambda+1)\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0,1\}$

Die Menge $S_f := V(f, \frac{\partial}{\partial X} f, \frac{\partial}{\partial Y} f)$ ist folglich für alle $\lambda \in k$ endlich. Mit Aufgabe 1 folgt, dass $I(E_\lambda) = (f)$. Somit ist E_λ für $\lambda \notin \{0,1\}$ nichtsingulär. Für $\lambda = 0$ hat E_λ die Singularität $(0,0)$, für $\lambda = 1$ die Singularität $(1,0)$.

b) In der Übung habt ihr mir hoffentlich schon geglaubt, dass $\overline{E_\lambda} = V(H_Z(f)) = V(ZY^2 - X^3 + (\lambda+1)X^2 Z - \lambda X Z^2)$. Weiter ist $\overline{E_\lambda} = (\overline{E_\lambda} \cap D(Z)) \cup (\overline{E_\lambda} \cap V(Z)) = E_\lambda \cup V(X,Z) = E_\lambda \cup \{(0:1:0)\}$. Alle Punkte aus E_λ haben wir schon untersucht („singulär“ ist eine lokale Eigenschaft). Für $p = (0:1:0)$ und $F := H_Z(f)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial X} F\right)(p) &= (-3X^2 + 2(\lambda+1)XZ - \lambda Z^2)(p) = 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial Y} F\right)(p) &= (2YZ)(p) = 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial Z} F\right)(p) &= (Y^2 + (\lambda+1)X^2 - 2\lambda XZ)(p) = 1 \neq 0
\end{aligned}
$$

Somit ist p für alle $\lambda \in k$ nichtsingulär und $\overline{E_\lambda}$ hat genau die Singularitäten von E_λ.

c) Der Punkt $p = (0:1:0)$ im projektiven Abschluss von E_λ ist unabhängig von der Charakteristik nichtsingulär. Sei als $p = (x,y) \in E_\lambda$.

$\operatorname{char}(k) = 2$: Hier ist $J_f(p) = (-3x^2 - \lambda, 0) = (0,0) \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$. Aus $p \in E_\lambda$ folgt $y^2 = h(x)$ mit $h(x) = x(x-1)(x-\lambda)$. Für $\lambda \neq 0$ ist der Punkt $x = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ keine Nullstelle von h, also hat E_λ die 4 Singularitäten

$$
\left(i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \pm\sqrt{h\left(i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)}\right), \quad \left(-i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \pm\sqrt{h\left(-i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)}\right).
$$

Für $\lambda = 0$ ist $(0,0)$ die einzige Singularität.

Insgesamt sieht man, dass für $\operatorname{char}(k) = 2$ alle Kurven E_λ singulär sind.

$\mathrm{char}(k) = 3:$ Es gilt $J_f(p) = (2(\lambda+1)x - \lambda, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0 \wedge 2(\lambda+1)x = \lambda$. Für $\lambda = -1$ sind diese Bedingungen nicht zu erfüllen und E_λ ist nichtsingulär. Für $\lambda \neq -1$ erfüllt $p = (\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}, 0)$ die Bedingung $J_f(p) = (0,0)$. Einsetzen in $f(p) = 0$ liefert nach etwas Rechnen $\lambda \in \{-\frac{1}{2}, -2\}$. Für diese λ ist $(\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}, 0)$ eine Singularität von E_λ, für alle anderen λ ist E_λ nichtsingulär.

Übung 13 vom 27. Januar 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Seien X und Y quasiprojektive Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils Deine Antwort.

a) X, Y nichtsingulär $\Rightarrow X \cap Y$ nichtsingulär.

b) X, Y nichtsingulär $\Rightarrow X \cup Y$ nichtsingulär.

c) X, Y singulär $\Rightarrow X \cap Y$ singulär.

d) X, Y singulär $\Rightarrow X \cup Y$ singulär.

e) $\emptyset \neq \mathrm{Sing}(Y) \subsetneq X \cap Y \Rightarrow X \cap Y$ ist singulär.

Hinweis: Alle notwendigen Gegenbeispiele können im affinen Raum gefunden werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $f \in k[X, Y] \setminus k$ ein quadratfreies Polynom und $V = V(f)$. für einen Punkt $p \in V(f)$ definieren wir die Vielfachheit $\mu_p(V)$ in p folgendermaßen:

Es sei $\varphi\colon \mathbb{A}^2(k) \to \mathbb{A}^2(k)$ eine Translation (d.h. $\varphi(x) = x+t$ für ein $t \in k^2$), so dass $\varphi(p) = (0,0)$ gilt. Wir schreiben $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ als Summe seiner homogenen Komponenten

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \cdots + \tilde{f}_d\,.$$

Dann sei $\mu_p(V) = \min\{r \in \mathbb{N}_0 \mid \tilde{f}_r \neq 0\}$.

Zeige, dass p genau dann ein singulärer Punkt von V ist, wenn $\mu_p(V) > 1$ gilt.

Bestimme die Vielfachheiten der Singularitäten der Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$ aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 12.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Die Charakteristik von k sei 0. Für ein nichtkonstantes Polynom $f \in k[X]$ und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $C := V(Y^n - f) \subset \mathbb{A}^2(k)$.

Für welche n und f ist C eine nichtsinguläre Kurve?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in einem Ring R und $J \subseteq R$ ein Ideal mit $J \nsubseteq I_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Zeige, dass auch $J \nsubseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ gilt, falls mindestens $n-2$ der Ideale I_i Primideale sind.

Übung 14 vom 3. Februar 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein nullteilerfreier, noetherscher Ring mit Quotientenkörper $K \neq R$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) R ist ein diskreter Bewertungsring.

ii) Für jedes $x \in K$ gilt $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.

iii) Die Menge der Hauptideale von R ist bezüglich Inklusion total geordnet.

iv) Die Menge aller Ideale von R ist bezüglich Inklusion total geordnet.

v) R ist ein lokaler Hauptidealring.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Die Charakteristik von k sei nicht 2. Wir betrachten $C = V(Y^4 - XZ(X-Z)(X+Z)) \subset \mathbb{P}^2(k)$.

a) Zeige, dass C eine nichtsinguläre Kurve ist.

b) Es sei $h : C \to \mathbb{P}^1(k)$, $(x : y : z) \mapsto (x : z)$. Bestimme den Grad von h und für jeden Punkt $P \in C$ den Verzweigungsindex $e_P(h)$.

c) Bestimme die Divisoren der rationalen Funktionen x/z und $x/y \in k(C)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Es sei $C \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve und $G \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom, so dass $C \not\subset V(G)$ gilt. Wir definieren den Schnittdivisor $\operatorname{div}(G)$ zu G folgendermaßen: Für einen Punkt $P \in C$ wählen wir ein homogenes Polynom $H \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $H(P) \neq 0$ und $\deg(H) = \deg(G)$ und setzen $n_P = \operatorname{ord}_P(G/H)$. Dann sei $\operatorname{div}(G) = \sum_{P \in C} n_P \cdot P$.

a) Zeige, dass $\operatorname{div}(G)$ wohldefiniert ist.

b) Sei nun $G_1, G_2 \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $\deg(G_1) = \deg(G_2)$. Zeige, dass die zwei Schnittdivisoren $\operatorname{div}(G_1)$ und $\operatorname{div}(G_2)$ linear äquivalent sind.

c) Es sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Bestimme für $C = V(Y^2 Z - X(X-Z)(X+Z)) \subset \mathbb{P}^2(k)$ die Schnittdivisoren von X, Y und Z. Welche geometrische Bedeutung haben diese Divisoren?

d) Der Grad d von C sei der Grad des Schnittdivisors eines homogenen Polynoms von Grad 1. Zeige: Ist $n = 2$ und $C = V(F)$ für ein homogenes Polynom $F \in k[X_0, X_1, X_2]$, so gilt $\deg(F) = d$.

   Hinweis: Man kann ohne Einschränkung voraussetzen, dass $(0 : 0 : 1) \notin V(F)$. *(Wieso?) Dann hilft es, den Morphismus* $C \to \mathbb{P}^1(k)$, $(x : y : z) \mapsto (x : y)$ *zu betrachten.*

e) Zeige eine Version des Satzes von Bézout für nichtsinguläre Kurven: Ist $G \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom von Grad e, so dass $C \not\subset V(G)$, und ist d wieder der Grad von C, so gilt
$$\deg(\operatorname{div}(G)) = d \cdot e.$$

Lösung 3

a) Für $P \in C$, $P = (x_0 \colon \dots : x_n)$ gibt es ein i mit $x_i \neq 0$. Also erfüllt $X_i^{\deg(G)}$ die Bedingungen an H. Außerdem ist C echt in $\mathbb{P}^n(k)$ enthalten und irreduzibel, also hat $V(G) \cap C$ Dimension 0 (kleinere Dimension als C) und ist somit endlich. Damit ist nur für endlich viele $P \in C$ $\operatorname{ord}_P(G/H) \neq 0$ und die formale Summe in $\operatorname{div}(G)$ endlich.

Es bleibt zu zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl von H abhängt. Sei dazu $H' \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein weiteres homogenes Polynom mit $\deg(H') = \deg(G)$ und $H'(P) \neq 0$. Dann ist $\mathrm{ord}_P(G/H) = \mathrm{ord}_P(G/H \cdot H'/H') = \mathrm{ord}_P(G/H') + \mathrm{ord}_P(H'/H)$. Wegen $H'(P) \neq 0$ ist $\mathrm{ord}_P(H'/H) = 0$.

b) Wir zeigen $\mathrm{div}(G_1) - \mathrm{div}(G_2) = \mathrm{div}(G_1/G_2)$.

Sei $P \in C$, $H \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen mit $\deg(H) = \deg(G_i)$ und $H(P) \neq 0$. Es gilt $\mathrm{ord}_P(G_1/G_2) = \mathrm{ord}_P(G_1/H \cdot H/G_2) = \mathrm{ord}_P(G_1/H) - \mathrm{ord}_P(G_2/H)$.

c) Zunächst berechnen wir die Uniformisierende im Punkt $P = (a : b : c) \in C$, also einen Erzeuger des maximalen Ideals m_P von $\mathcal{O}_{C,P}$.

1. Fall: $P \in C \cap D(Z)$, $b \neq 0$.

Das Ideal m_P wird von $\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}$ und $\frac{Y}{Z} - \frac{b}{c}$ erzeugt. Uniformisierende ist $\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}$, da

$$\begin{aligned}\left(\frac{Y}{Z} - \frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{Y}{Z} + \frac{b}{c}\right) &= \frac{Y^2}{Z^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{Y^2 Z}{Z^3} - \frac{b^2 c}{c^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Z^3} - \frac{a(a-c)(a+c)}{c^3} \\ &= \left(\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}\right)\left(\frac{X^2}{Z^2} + \frac{a}{c}\frac{X}{Z} + \frac{a^2}{c^2} - 1\right)\end{aligned}$$

und $\frac{Y}{Z} + \frac{b}{c} \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ für $b \neq 0$.

2. Fall: $P \in C \cap D(Z)$, $b = 0$. Hier ist $P \in \{(0:0:1), (1:0:1), (-1:0:1)\}$. Es gilt

$$\frac{Y^2}{Z^2} = \frac{Y^2 Z}{Z^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Z^3} = \frac{X}{Z}\left(\frac{X}{Z} - 1\right)\left(\frac{X}{Z} + 1\right).$$

Für $P = (0:0:1)$ sind $\frac{X}{Z} - 1 \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ und $\frac{X}{Z} + 1 \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$, also ist $\frac{X}{Z} = \frac{1}{(\frac{X}{Z}-1)(\frac{X}{Z}+1)}\frac{Y^2}{Z^2} \in (\frac{Y}{Z})$. Analog sind für $P = (1:0:1)$ bzw. $P = (-1:0:1)$ die Erzeuger $\frac{X}{Z} - 1 = \frac{1}{\frac{X}{Z}(\frac{X}{Z}+1)}\frac{Y^2}{Z^2} \in \left(\frac{Y}{Z}\right)$ bzw. $\frac{X}{Z} + 1 = \frac{1}{\frac{X}{Z}(\frac{X}{Z}-1)}\frac{Y^2}{Z^2} \in \left(\frac{Y}{Z}\right)$.

Das maximale Ideal m_P wird folglich von $\frac{Y}{Z}$ erzeugt.

3. Fall: $P = (0:1:0)$

Es gilt $\frac{Z}{Y} = \frac{Y^2 Z}{Y^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Y^3} = \frac{X^3}{Y^3} - \frac{XZ \cdot Z}{Y^2 \cdot Y}$ und somit $\frac{Z}{Y}(1 + \frac{XZ}{Y^2}) = (\frac{X}{Y})^3$. Da $1 + \frac{XZ}{Y^2} \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ folgt $\frac{Z}{Y} \in \left(\frac{X}{Y}\right)$ und damit $m_P = \left(\frac{X}{Y}\right)$.

Nun können wir die Schnittdivisoren berechnen:

Zunächst stellen wir fest, dass $\mathrm{ord}_{(a:b:c)}(\frac{X}{H}) = 0$ für $a \neq 0$. Aus $(0:b:c) \in C$ folgt $b = 0$ oder $c = 0$. Somit gilt

$$\mathrm{div}(X) = \mathrm{ord}_{(0:0:1)}\left(\frac{X}{Z}\right) \cdot (0:0:1) + \mathrm{ord}_{(0:1:0)}\left(\frac{X}{Y}\right) \cdot (0:1:0) = 2 \cdot (0:0:1) + 1 \cdot (0:1:0).$$

Analog folgt

$$\mathrm{div}(Y) = 1 \cdot (0:0:1) + 1 \cdot (1:0:1) + 1 \cdot (-1:0:1) \quad \text{und} \quad \mathrm{div}(Z) = 3 \cdot (0:1:0).$$

Die geometrische Bedeutung des Schnittdivisors ist genau das, was der Name suggeriert. Schneidet man C mit $V(G)$ und zählt die Schnittpunkte mit Vielfachheit, so bekommt man den Schnittdivisor $\mathrm{div}(G)$. Die Abbildungen A.1 und A.2 zeigen zwei reelle Bilder zur geometrischen Bedeutung.

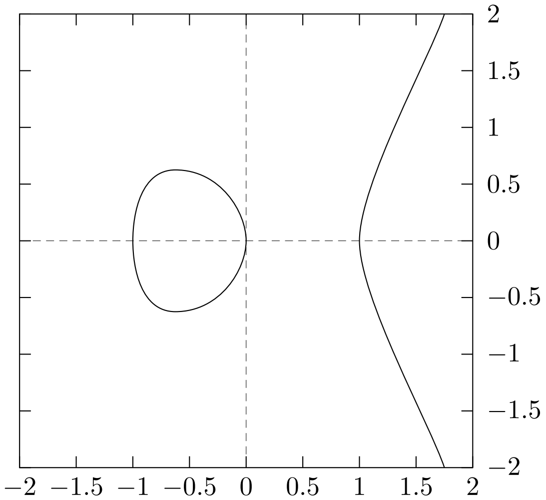


Abbildung A.1: $C \cap D(Z)$ mit $V(X)$ (y-Achse) und $V(Y)$ (x-Achse).

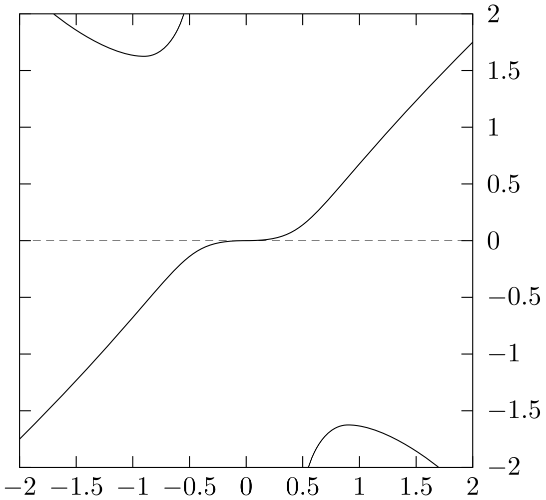


Abbildung A.2: $C \cap D(Y)$ mit $V(Z)$ (x-Achse).

d) Es gibt ein $P = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2 \setminus V(F)$ und eine lineare Abbildung $\Phi \in \mathrm{GL}_3(k)$ mit $\Phi(a, b, c) = (0, 0, 1)$. Dieses Φ induziert einen Isomorphismus $\tilde{\Phi}\colon V(F) \to V(\tilde{F})$, $(x : y : z) \mapsto \Phi(x : y : z)$, wobei $\tilde{F} = F \circ \Phi^{-1}$ (etwas sehrr ähnliches haben wir auf Übungsblatt 13 in Aufgabe 2 schon einmal gemacht). Wegen $\tilde{F}((0 : 0 : 1)) = (F \circ \Phi^{-1})((0 : 0 : 1)) = F((a : b : c)) \neq 0$ ist $(0 : 0 : 1)$ nicht in $V(\tilde{F})$ enthalten. Folglich gilt ohne Einschränkung, dass $(0 : 0 : 1) \notin C$.

Wir betrachten den Morphismus $h : C \to \mathbb{P}^1(k), (x : y : z) \mapsto (x : y)$. Dieser ist wohldefiniert, da $(0 : 0 : 1) \notin C$.

Behauptung 1: $\mathrm{div}(X) = h^*((0 : 1))$.

Beweis Beh. 1: Sei $P \in C$. Ist $P \in D(Y)$, so gilt $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(X)) = \mathrm{ord}_P(\frac{X}{Y}) = \mathrm{ord}_P(\frac{X_0}{X_1} \circ h) = e_P(h) = \mathrm{ord}_P(h^*(0 : 1))$. Ist andernfalls $P = (a : 0 : c) \in V(Y)$, dann ist $h(P) \neq (0 : 1)$ und damit $\mathrm{ord}_P(h^*(0 : 1)) = 0$. Aßerdem folgt aus $(0 : 0 : 1) \notin C$, dass $a \neq 0$ und damit $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(X)) = 0$.

Behauptung 2: $\deg h = \deg F$.

Aus Behauptung 1 und 2 folgt dann wie gewünscht

$$d = \deg(\operatorname{div}(X)) = \deg(h^*((0:1))) = \sum_{h(P)=(0:1)} e_P(h) = \deg h = \deg F\,.$$

Beweis Beh. 2: Nach Definition gilt $\deg h = [k(C) : k(\mathbb{P}^1(k))]$. Betrachte die Einschränkung h^a von h auf $C^a = C \cap D(Y)$ nach $\mathbb{P}^1(k) \cap D(Y) = \mathbb{A}^1(k)$. Der Morphismus $h^a : C^a \to \mathbb{A}^1(k), (x:1:z) \mapsto x$ induziert einen Morphismus $(h^a)^\sharp : k(\mathbb{A}^1(k)) = k(X) \hookrightarrow k(C^a) = k(x,z), X \mapsto x$, wobei x und z die Restklassen von X und Z in $k[C^a]$ bezeichnen.

Das Bild von $(h^a)^\sharp$ ist $k(x)$ und für z gilt $F(x,1,z) = 0$. Sei m der Grad von F und $F = \sum_{i+j+k=m} a_{ijk} X^i Y^j Z^k$. Wegen $(0:0:1) \notin C$ ist $a_{00m} \neq 0$ und die Dehomogenisierung von F nach Y, $f := F(X,1,Z)$, hat Grad m in Z. Da F irreduzibel in $k[X,Y,Z]$ ist, ist auch f irreduzibel in $k[X,Z]$. Eine einfache Folgerung aus dem Lemma von Gauß[2] sagt, dass dann f auch über $k(X)[Z]$ irreduzibel ist. Wegen $C^a = V(f)$, gilt $k(C^a) = \operatorname{Quot}(k[X,Z]/(f)) \cong k(X)[Z]/(f)$ und somit $\deg h^a = [k(C^a) : k(X)] = \deg f$.

Die Inklusion $C^a \hookrightarrow C$ hat eine dominante rationale Umkehrabbildung $\mathrm{id}\colon C \dashrightarrow C^a$. Daher ist $k(C^a) \cong k(C)$. Genauso ist auch $k(\mathbb{P}^1(k)) \cong k(\mathbb{A}^1(k))$ und es folgt $\deg h = [k(C) : k(\mathbb{P}^1(k))] = [k(C^a) : k(\mathbb{A}^1(k))] = \deg h^a$. Insgesamt gilt $\deg F = \deg f = \deg h^a = \deg h$.

e) Sei $H \in K[X_0, \dots, X_n]$ homogen, $\deg(H) = 1$, $C \not\subset V(H)$ (z.B. $H = X_i$). Dann ist $\deg(G) = \deg(H^e)$. Nach b) sind $\operatorname{div}(G)$ und $\operatorname{div}(H^e)$ linear Äquivalent, es gilt also $\deg(\operatorname{div}(G)) = \deg(\operatorname{div}(H^e))$. Weiterhin gilt $\deg(\operatorname{div}(H^e)) = e \cdot \deg(\operatorname{div}(H))) = e \cdot d$, denn $\operatorname{ord}_P(\operatorname{div}(H)) = n_P \Leftrightarrow \operatorname{ord}_P(H/\tilde{H}) = n_P$, wobei $\tilde{H} \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $\deg(\tilde{H}) = 1$ und $\tilde{H}(P) \neq 0$ und damit $\operatorname{ord}_P(\operatorname{div}(H^e)) = \operatorname{ord}_P(H^e/\tilde{H}^e) = e \cdot \operatorname{ord}_P(H/\tilde{H}) = e \cdot n_P$.

[2] siehe Hilfssatz 2.2.6 in „Algebra im WS 2011/2012“ von Dr. Stefan Kühnlein