13 Übung vom 21.07.

45. Aufgabe

a) Es sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > -1, y > -1\}$.
Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung von f sind:

$$\begin{aligned} f_{11} &= -a(a-1)(x+1)^{a-2}(y+1)^b \\ f_{22} &= -b(b-1)(x+1)^a(y+1)^{b-2} \\ f_{12} = f_{21} &= -ab(x+1)^{a-1}(y+1)^{b-1} \end{aligned}$$

Es gilt nach Vorlesung:

$$\begin{aligned} f \text{ ist auf D konvex} &\Leftrightarrow A := ((f_{ij})) \text{ ist positiv semi-definit} \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \text{EW von A sind größergleich Null} \\ &\Leftrightarrow \text{Spur } A \geq 0 \text{ und } \det A \geq 0 \\ &\Leftrightarrow f_{11} + f_{22} \geq 0, f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow f_{11} \geq 0, f_{22} \geq 0, f_{11}f_{22} \geq f_{12}^2 \end{aligned}$$

[($*$): A symmetrisch $\Rightarrow$ A diagonalisierbar]

- $f_{11} \geq 0 \Leftrightarrow -a(a-1) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$
- $f_{22} \geq 0 \Leftrightarrow b \leq 1$
- $f_{11}f_{22} \geq f_{12}^2 \Leftrightarrow ab(a-1)(b-1) \geq a^2b^2 \Leftrightarrow a+b \leq 1$

Also ist f auf D konvex genau dann, wenn $a + b \leq 1$. [Beachte: $a, b > 0$]

b) Es liegt ein konvexes Optimierungsproblem vor.
$(x^0, y^0) > 0$ und zulässig.

Wir definieren $g(x,y) = x + 2y - 2$.
Wir zeigen nun: Es existiert ein $u^0 \geq 0$, so dass (x^0, y^0, u^0) ein Sattelpunkt von

$$\Phi(x,y,u) = f(x,y) + u \cdot g(x,y)$$

ist.

Die Slater-Bedingung (S) ist erfüllt (z.B. durch (0,0)).
Also ist (x^0, y^0) genau dann Lösung, wenn ein $u^0 \geq 0$ existiert mit

$$\Phi(x^0, y^0, u) \leq \Phi(x^0, y^0, u^0) \leq \Phi(x, y, u^0) \ \text{ für } x, y, u \geq 0$$

Man rechnet nach: $g(x^0, y^0) = 0$.
Also ist die linke Ungleichung immer erfüllt.

Wir definieren $h(x,y) := \Phi(x,y,u^0)$ mit u^0 fest.
Es gilt: h ist konvex und differenzierbar in D.

Damit gilt:

$$h(x,y) - h(x^0,y^0) \geq \langle (x,y) - (x^0,y^0), \nabla h(x^0,y^0) \rangle$$

$[x, y \in D$ beliebig$]$

D.h.: Ist $\nabla h(x^0,y^0) = 0$, so ist (x^0,y^0) Minimum von h auf D.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla h(x^0,y^0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & f_1(x^0,y^0) + u^0 = 0 \\ & f_2(x^0,y^0) + 2u^0 = 0 \end{aligned}$$

$$f_1(x^0,u^0) = -a^a(\frac{b}{2})^b(\frac{5}{a+b})^{a+b-1} \stackrel{!}{=} -u^0$$

$$f_2(x^0,u^0) = 2 \cdot (-a^a(\frac{b}{2})^b(\frac{5}{a+b})^{a+b-1}) \stackrel{!}{=} -2u^0$$

Setzen wir

$$u^0 = a^a(\frac{b}{2})^b(\frac{5}{a+b})^{a+b-1}$$

so ist $\nabla h(x^0,y^0) = 0$.
Damit ist (x^0,y^0,u^0) ein Sattelpunkt von Φ, also (x^0,y^0) Lösung von (KP).

46. Aufgabe

$\nabla f(x) = p + 2Cx$
Nach Vorlesung gilt:
$x^0 \geq 0$ ist Lösung von (QP) $\Leftrightarrow \exists u^0 \geq 0:$

$$\begin{array}{lllll} (i) & \nabla f(x^0) + A^T u^0 & \geq & 0 \\ & \langle \nabla f(x^0) + A^T u^0, x^0 \rangle & = & 0 \\ (ii) & Ax^0 & = & b \end{array}$$

Setzen wir $\nabla f(x) = p + 2Cx$ ein, so erhalten wir:

$x^0 \geq 0$ ist Lösung von (QP) $\Leftrightarrow \exists u^0 \geq 0, w^0 \geq 0:$

$$\begin{array}{llll} (i) & 2Cx^0 + A^T u^0 - w^0 & = & -p \\ & \langle w^0, x^0 \rangle & = & 0 \\ (ii) & Ax^0 & = & b \end{array}$$

Und wir haben die Aufgabe gezeigt!
$[w^0 = \nabla f(x^0) + A^T u^0$ Schlupfvariable$]$

47. Aufgabe

Musterlösung online!