1 Maß-Integral und Erwartungswert

Stochastik I: Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bestehend aus:

(i) $\Omega \neq \emptyset$ bel. Menge, der Ergebnisraum

(ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, d.h.
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

(iii) $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h.
- $P(\Omega) = 1$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt $\implies P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-Additivität)

Statt das Wahrscheinlichkeitsmaßes P betrachten wir jetzt eine allgemeine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, die beliebige positive Werte annehmen kann.

Definition
*Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ heißt **Maß** auf $(\Omega, \mathcal{A})$, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.*

Bemerkung
Da $\mu(A) = \infty$ möglich, definieren wir: $a + \infty = \infty \ \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definition
Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. *μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$,*
2. *μ heißt **σ-endlich**, falls $\exists$ eine Folge $(A_i), i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ und $\mu(A_i) < \infty \ \forall i \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 1.1

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\omega \in \Omega$ fest.

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $A \in \mathcal{A}$ definiert ein Maß.
δ_ω heißt **Einpunktmaß** oder **Dirac-Maß** im Punkt ω. Da $\delta_\omega(\Omega) = 1$ ist δ_ω sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

b) $\mu := \sum_{\omega\in\Omega} \delta_\omega$ ist das **abzählende Maß** auf Ω.
(Falls $|A| < \infty : \mu(A) = |A|$ Anzahl der Elemente in A.)
μ ist endlich $\Leftrightarrow$ Ω ist endlich,
μ ist σ-endlich $\Leftrightarrow$ Ω ist abzählbar.

c) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ Borelsche σ-Algebra.

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\underbrace{\{(a,b], -\infty < a < b < \infty\}}_{=:\varepsilon \text{ Erzeuger}}) = \sigma(\varepsilon) := \bigcap_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}, \varepsilon\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}$$

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Durch $\lambda((a,b]) := b - a$ wird auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ein Maß definiert, das sogenannte **Lebesgue-Maß**. Die Eindeutigkeit von λ folgt aus dem **Eindeutigkeitssatz für Maße**:
Sei $\mathcal{A} = \sigma(\varepsilon)$ und ε durchschnittsstabil (d.h.: $A, B \in \varepsilon \implies A\cap B \in \varepsilon$). Weiter seien μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\mu_1(A) = \mu_2(A)\ \forall A \in \varepsilon$. $\exists$ eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \varepsilon$ mit $A_n \uparrow \Omega$ und $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n) < \infty\ \forall n$, so gilt $\mu_1 = \mu_2$.
Eine nichttriviale Aufgabe ist es hier zu zeigen, dass λ auf ganz $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ zu einem Maß fortgesetzt werden kann. (gezeigt von Carathéodory; s. z.B. Henze, Bauer)
Bei $\Omega = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, ist $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subset \bar{\mathbb{R}} | B \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} = \{B, B\cup\{\infty\}, B\cup\{-\infty\}, B\cup\{\infty,-\infty\} | B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$ eine σ-Algebra (analog $\mathfrak{B}((-\infty,\infty))$ und $\bar{\lambda}(B) = \lambda(B)\ \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und $\bar{\lambda}(\{\infty\}) = \bar{\lambda}(\{-\infty\}) = 0$
λ ist <u>nicht</u> endlich, da $\lambda((-\infty, a]) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda((a-n, a-n+1])}_{=1} = \infty$, aber σ-endlich, da $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n] = \mathbb{R}, \lambda((-n,n]) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

d) Seien μ_n Maße, $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n$$

wieder ein Maß.
Konvention: $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, a > 0, 0 \cdot \infty = 0$
Spezialfall: $\mu_n = \delta_{\omega_n}(\omega_n \in \Omega), b \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{\omega_n}$$

ist dann ein diskretes, auf $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ konzentriertes Wahrscheinlichkeitsmaß.

e) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend und rechtsseitig stetig (Eine Funktion mit diesen Eigenschaften heißt **maßdefinierende Funktion**. Gilt zusätzlich $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1, \lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$, dann ist G eine Verteilungsfunktion.)

$$\mu_G((a,b]) := G(b) - G(a)$$

für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ definiert μ_G ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, das sogenannte **Lebesgue-Stieltjes-Maß** zu G. (Fortsetzungsproblem analog zu c))

Ist G eine Verteilungsfunktion mit $G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y$ mit

$$f \geq 0 : \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y = 1,$$

so ist $\mu_G((a,b]) = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte f.

Bemerkung
Viele der in Stochastik I für Wahrscheinlichkeitsmaße besprochene Eigenschaften gelten auch für allgemeine Maße μ, z.B. μ ist stetig von unten, d.h.

$$\underbrace{A_n \uparrow}_{A_n \subset A_{n+1}} \text{ mit} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \implies \mu(A) = \lim_{n\to\infty} (A_n)$$

Bei der Stetigkeit von oben brauchen wir eine Zusatzbedingung:

$$\underbrace{A_n \downarrow}_{A_n \supset A_{n+1}} \text{ mit} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A, \underline{\mu(A_n) < \infty} \implies \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Beispiel
Lebesgue-Maß: $A_n = (-\infty, -n] \downarrow, \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,-n], \lim_{n\to\infty} \lambda((-\infty,-n]) = \infty \neq 0 = \lambda(\emptyset)$

Definition
*Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei meßbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-**messbar**, falls*

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}, \ \forall A' \in \mathcal{A}'$$

*f mit dieser Eigenschaft heißt **Zufallsgröße**. Ist $\Omega' = \mathbb{R}$, dann **Zufallsvariable**.*

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ziel ist es, möglichst vielen Funktionen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ein Integral bezüglich μ zuzuordnen. Die Konstruktion erfolgt in drei Schritten:

1.) Sei $\mathcal{E} := \{f : \Omega \to \mathbb{R} | f \geq 0, f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}, f(\Omega) \text{ endlich}\}$ die Menge der **Elementarfunktionen** auf Ω.
Ist $f(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \alpha_j \geq 0$, so gilt:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$$

mit $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$ und $\Omega = \sum_{j=1}^{n} A_j$. Eine Darstellung von f mit dieser Eigenschaft heißt „Normaldarstellung" von f.
Normaldarstellung ist nicht eindeutig.

Definition
*Ist f eine Elementarfunktion mit Normaldarstellung $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$, so heißt $\int f d\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$ das μ-**Integral** von f. Schreibweise $\int f d\mu = \mu(f)$.*

Lemma 1.1 (Unabhängigkeit des Integrals von der Normaldarstellung)

Für zwei Normaldarstellungen

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$$

einer Funktion $f \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i)$$

Beweis

$$\text{Voraussetzung} \implies \Omega = \sum_{j=1}^{n} A_j = \sum_{i=1}^{m} B_i$$

$$\begin{aligned} \implies \mu(A_j) &\overset{\sigma-\text{Add.}}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu(A_j \cap B_i) \\ \mu(B_i) &= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_j \cap B_i) \end{aligned}$$

$$\mu(A_j \cap B_i) \neq 0 \implies A_j \cap B_i \neq \emptyset \implies \alpha_j = \beta_i$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\alpha_j}_{\beta_i} \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i) \end{aligned}$$

■

Lemma 1.2 (Eigenschaften des μ-Integrals)

a) $\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$ *für* $A \in \mathcal{A}$
b) $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$ *für* $f \in \mathcal{E}, \alpha \geq 0$
c) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ *für* $f, g \in \mathcal{E}$
d) $f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$ *für* $f, g \in \mathcal{E}$

Beweis
a), b) klar

c) Sei $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}, g = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow f &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j \cap B_i} \\
g &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \mathbf{1}_{B_i \cap A_j} \\
\text{also } f+g &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\alpha_j + \beta_i) \mathbf{1}_{A_j \cap B_i} \\
\Longrightarrow \mu(f+g) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_i)}_{=\mu(B_i)} \\
&= \mu(f) + \mu(g)
\end{aligned}
$$

d) folgt mit gleicher Darstellung wie in c) ■

Bemerkung

a) Ist $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \in \mathcal{E}$, aber nicht notwendig eine Normaldarstellung, so folgt aus Lemma 1.2 c) $\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$

b) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine Zufallsvariable mit endlich vielen Werten $\{x_1, \ldots, x_n\}$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
\int X \mathrm{d}P &= \sum_{j=1}^{n} x_j P(X^{-1}(\{x_j\})) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j P^X(\{x_j\})
\end{aligned}
$$

$(A_j = X^{-1}(\{x_j\}))$
Also: $\int X \mathrm{d}P = EX$

2.) Sei $\mathcal{E}^+ := \{f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} | f \geq 0, f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$. Wichtig: Elemente von $\mathcal{E}^+$ kann man beliebig gut duch Elemente aus $\mathcal{E}$ approximieren.

Satz 1.1
Zu jedem $f \in \mathcal{E}^+$ gibt es eine wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}$ mit $u_n \uparrow f$, d.h. $u_n \leq u_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} u_n = f$ (jeweils punktweise).

Beweis
Sei $\alpha_n : \bar{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ gegeben durch:

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{j}{2^n}, & \text{falls } \frac{j}{2^n} \leq x < \frac{j+1}{2^n}, j = 0, 1, \ldots, n2^n - 1 \\ n, & \text{falls } x \geq n \end{cases}$$

(Hier fehlt ein Bild)
α_n ist $\mathfrak{B}$-messbar. $\alpha_n \uparrow$ und $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = x$ für $n \to \infty$. Sei $u_n := \alpha_n \circ f$. Dann gilt $u_n \in \mathcal{E}$ und $u_n \uparrow f$. ■

Bemerkung
Ist f beschränkt, so konvergiert die Folge (u_n) gleichmäßig gegen f, d.h. $\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega) - u_n(\omega)| = 0$.

Definition
Sei $f \in \mathcal{E}^+$ und (u_n) eine wachsende Folge aus $\mathcal{E}$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = f$. Dann heißt

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu$$

*das μ-**Integral von** f. Wir zeigen, dass $\int f \, d\mu$ wohldefiniert ist.*

Lemma 1.3
Sind (u_n) und (v_n) wachsende Folgen aus $\mathcal{E}$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n \, d\mu$$

Beweis
Wir zeigen zunächst: $\lim_{n\to\infty} u_n \geq v$ mit $v \in \mathcal{E} \implies \mu(v) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(u_n)$
Denn: Sei $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ $(\alpha_j \geq 0, A_j \in \mathcal{A})$ und $0 < c < 1$ beliebig. Sei $B_n := \{\omega | u_n(\omega) \geq cv(\omega)\} \in \mathcal{A}$. Da $u_n \geq cv\mathbf{1}_{B_n}$ folgt:

$$\mu(u_n) \geq c\mu(v\mathbf{1}_{B_n}) \ (*)$$

Nach Voraussetzung: $v \leq \lim_{n\to\infty} u_n, u_n \uparrow \implies B_n \uparrow \Omega, A_j \cap B_n \uparrow A_j$

$$\begin{aligned} \implies \mu(v) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(v\mathbf{1}_{B_n}) \end{aligned}$$

Nehme $\lim_{n\to\infty}$ in $(*)$:$\lim_{n\to\infty} \mu(u_n) \geq c\mu(v)$. Da $c < 1$ beliebig war, folgt die Behauptung.
Jetzt zur eigentlichen Aussage: Es gilt: $v_k \leq \lim_{n\to\infty} u_n, u_k \leq \lim_{n\to\infty} v_n \xRightarrow{\text{Hilfsaussage}}$ $\mu(v_k) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(u_n), \mu(u_k) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(v_n), \ \forall k \in \mathbb{N}$.
$\lim_{k\to\infty}$ bei beiden Ungleichungen $\implies$ Behauptung. ■

Bemerkung

a) Die letzten beiden Definitionen sind verträglich

b) Die Eigenschaften von Lemma 1.2 gelten weiter.

3.) $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{A}$-messbar (ohne Vorzeichenbeschränkung). $f^+ := \max\{0, f\}, f^- := -\min\{0, f\}, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$

Definition
*Eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ-integrierbar, falls $\int f^+ d\mu < \infty, \int f^- d\mu < \infty$. In diesem Fall heißt $\int f d\mu = \mu(f) = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ das **μ-Integral von f**.*
Schreibweise: $\int f d\mu = \int f(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f d\mu$; $\int_A f d\mu := \int f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$

Bemerkung a) Die letzten beiden Definitionen sind verträglich

b) Falls mindestens einer der Werte $\int f^+ \mathrm{d}\mu, \int f^- \mathrm{d}\mu$ endlich ist, so heißt f **quasi-integrierbar**.

c) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so gilt: EX existiert $\iff$ X ist P-integrierbar. In diesem Fall: $EX = \int X \mathrm{d}P$

d) Offenbar gilt: f ist integrierbar $\iff$ $|f|$ ist integrierbar

Satz 1.2 (Eigenschaften des μ-Integrals)
Es seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) cf und $f + g$ sind μ-integrierbar und

$$\begin{aligned} \int cf\, d\mu &= c \int f\, d\mu \\ \int (f+g)\, d\mu &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \end{aligned}$$

b) $f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$

c) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

Beweis a) α) Sei $c \geq 0$ (analog $c \leq 0$): $(cf)^+ = cf^+, (cf)^- = cf^-$
Also ist cf integrierbar: $\xRightarrow{\text{Satz 1.1}}$ $\exists u_n^+ \uparrow f^+, u_n^+ \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \int cf^+ \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int cu_n^+ \mathrm{d}\mu \\ &= c \lim_{n\to\infty} \int u_n^+ \mathrm{d}\mu \\ &= c \int f^+ \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Analog f^-.

β) $|f+g| \leq |f|+|g| \implies f+g$ μ-integrierbar.
Sei zunächst $f, g \in \mathcal{E}^+ \xRightarrow{\text{Satz 1.1}} \exists u_n \uparrow f, v_n \uparrow g, u_n, v_n \in \mathcal{E} \implies u_n + v_n \uparrow f+g, u_n+v_n \in \mathcal{E}$
Mit Lemma 1.2 folgt:

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int (u_n+v_n)\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} (\int u_n \mathrm{d}\mu + \int v_n \mathrm{d}\mu) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int u_n \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int v_n \mathrm{d}\mu \\
&= \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Sei jetzt f, g beliebig
$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \implies (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \xRightarrow{\text{s.o.}} \int (f+g)^+ \mathrm{d}\mu + \int f^- \mathrm{d}\mu + \int g^- \mathrm{d}\mu = \int (f+g)^- \mathrm{d}\mu + \int f^+ \mathrm{d}\mu + \int g^+ \mathrm{d}\mu$
$\implies \int (f+g)\mathrm{d}\mu = \int (f+g)^+ \mathrm{d}\mu - \int (f+g)^- \mathrm{d}\mu = \int f^+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu + \int g^+ \mathrm{d}\mu - \int g\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu$

b) vergleiche Übung

c) $f \leq |f|, -f \leq |f| \xRightarrow{\text{b) mit } g=|f|}$ Behauptung ■

Bemerkung Ist $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß, so heißt $\int f\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\lambda$ Lebesgue-Integral.

Beispiel 1.2 a) Sei δ_ω das Dirac-Maß, $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist δ_ω-integrierbar falls $f(\omega) < \infty$ und dann gilt

$$\int f\mathrm{d}\delta_\omega = f(\omega)$$

Denn: Sei $f \in \mathcal{E} \implies f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \implies \int f\mathrm{d}\delta_\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_\omega(A_j) = \alpha_k \cdot 1 = f(\omega)$
$f \in \mathcal{E}^+ : u_n \uparrow f, \int u_n \mathrm{d}\delta_\omega = u_n(\omega) \uparrow f(\omega)$
f allgemein $\implies f = f^+ - f^-$

b) Sei (μ_n) eine Folge von Maßen und $\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu_n$. Für $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

$$f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \iff \sum_{n=1}^\infty \int |f|\mathrm{d}\mu_n < \infty$$
$$\int f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f\mathrm{d}\mu_n \text{ (vergleiche Übung)}$$

Spezialfall: $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})), \mu = \sum_{n=1}^\infty \delta_n$ (Zählmaß auf $\mathbb{N}$)
f ist μ-integrierbar $\iff \sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$, dann $\int f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)$.
Summation ist ein Spezialfall von Integration. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}, \mathcal{A} =$

$\mathcal{P}(\Omega)$.$\mu = P := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{\omega_n}$ mit $p_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ (Wahrscheinlichkeitsmaß).
Sei $X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Zufallsvariable:

$$EX \text{ existiert} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |X(\omega_n)| p_n < \infty \iff X \text{ist} P\text{-integrierbar}$$

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} X(\omega_n) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} X(\omega_n) P(\{\omega_n\}) = \int X \mathrm{d}P$$

c) Sei $\Omega = [a, b]$ und $\mathcal{A} = \mathfrak{B}_{[a,b]} = \{A \cap [a, b] | A \in \mathfrak{B}\}$ (Spur von $\mathfrak{B}$ auf $[a, b]$) $\mu(A) := \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und f Riemann-integrierbar, so ist f auch μ-integrierbar und es gilt:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f(x) \mathrm{d}x$$

(Hier fehlt ein Bild zur Veranschaulichung)
Das Lebesgue-Integral ist eine Erweiterung des Riemann-Integrals:
Sei $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. f ist nicht Riemann-integrierbar. Da $f \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\int f \mathrm{d}\lambda = 0 \cdot \lambda(\mathbb{Q}^c \cap [0, 1]) + 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen:

(i) $\lambda(\{a\}) = 0$, da $\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty} [a, a + \frac{1}{n})$

(ii) $\lambda(\sum_{i=1}^{\infty} \{a_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{a_i\}) = 0$

Vorsicht bei uneigentlichen Riemann-Integralen! $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ ist Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.