

## 9 Konvergenzsätze für Martingale

Im Folgenden sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein W'Raum,  $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Filtration und  $\mathfrak{F}_\infty := \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_n)$ .

**Definition 9.1** Sei  $X_1, \dots, X_n$  eine Folge von ZV und  $-\infty < a < b < \infty$ .

$U_n[a, b]$  sei die **Anzahl der aufsteigenden Überschreitungen** des Intervalls  $[a, b]$  durch  $X_1, \dots, X_n$  also

$$U_n[a, b] = \max\{k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \mid \exists \text{ Indizes } 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k} \leq n \text{ mit } X_{i_{2j-1}} \leq a, b \leq X_{i_{2j}} \text{ für } j = 1, \dots, k\}$$

**Bemerkung 9.1** Wegen

$$\{U_n[a, b] \geq k\} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2k} \leq n} \bigcap_{j=1}^k \{X_{i_{2j-1}} \leq a\} \cap \{X_{i_{2j}} \geq b\} \in \mathfrak{F}_n$$

ist  $U_n[a, b]$  eine ZV.

**Lemma 9.1** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Supermartingal. Dann gilt:

$$EU_n[a, b] \leq \frac{1}{b-a} E(X_n - a)^-$$

**Beweis**

Sei  $p := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ ,  $\tau_0 \equiv 1$  und für  $k = 1, \dots, p$ :

$$\tau_{2k-1} := \min\{j \geq \tau_{2k-2} \mid X_j \leq a\} \wedge n$$

$$\tau_{2k} := \min\{j \geq \tau_{2k-1} \mid X_j \geq b\} \wedge n$$

Die  $(\tau_k)$  sind Stoppzeiten mit  $1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{2p} = n$  und

falls  $\tau_{2k-1} < n$ , ist  $\tau_{2k-1} < \tau_{2k}$ .

Sei  $k_0 := U_n[a, b]$ , d.h.  $X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}} \geq b - a$  für  $k = 1, \dots, k_0$

$$X_{\tau_{2k_0+2}} - X_{\tau_{2k_0+1}} \neq 0 \implies X_{\tau_{2k_0+1}} \leq a, X_{\tau_{2k_0+2}} = X_n$$

$$\implies X_{\tau_{2k_0+2}} - X_{\tau_{2k_0+1}} \geq X_n - a \geq \min\{X_n - a, 0\} = -(X_n - a)^-$$

$$\implies \sum_{k=1}^p (X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}) \geq (b-a) \cdot U_n[a, b] - (X_n - a)^-$$

Wir zeigen jetzt:  $E(X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}) \leq 0$ .

Sei  $c_j := \mathbf{1}_{\{\tau_{2k-1} < j \leq \tau_{2k}\}}$ .  $(c_j)_{j \geq 2}$  ist vorhersehbar.

$$\{c_j = 1\} = \{\tau_{2k-1} \leq j-1\} \cap \{\tau_{2k} \leq j-1\}^C \in \mathfrak{F}_{j-1}$$

Sei  $Y_n = X_1 + \sum_{j=2}^n c_j (X_j - X_{j-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $Y_1 := X_1$ .

Satz 8.4  $\implies (Y_n)$  ist ein Supermartingal.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow EY_n &= E[X_1 + \sum_{j=1}^n c_j(X_j - X_{j-1})] \\
&= EX_1 + \underbrace{E[X_{\tau_{2k}} - X_{\tau_{2k-1}}]}_{\leq 0} \\
&\leq EY_1 = EX_1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Beh. ■

**Satz 9.1 (Vorwärtskonvergenzsatz von Doob)**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein  $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Supermartingal mit der Eigenschaft  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{E|X_n|\} < \infty$ .

Dann existiert eine  $\mathfrak{F}_\infty$ <sup>1</sup>-messbare Zufallsvariable  $X_\infty$  mit  $E|X_\infty| < \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty$   $P$ -f.s.

**Beweis**

Sei  $N := \{\omega \in \Omega \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} \{X_n(\omega)\} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n(\omega)\}\}$  und

$U_\infty[a, b] := \lim_{n \rightarrow \infty} \{U_n[a, b]\}$  (existiert, da  $U_n[a, b]$  wachsend)

$\Rightarrow N = \cup_{a, b \in \mathbb{Q}, a < b} \{\omega \in \Omega \mid U_\infty[a, b](\omega) = \infty\}$

Lemma 9.1  $\Rightarrow (b - a)EU_n[a, b] \leq E(X_n - a)^- \leq |a| + E|X_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Mit der Voraussetzung und monotoner Konvergenz:  $EU_\infty[a, b] < \infty$ .

$\Rightarrow P(U_\infty[a, b] = \infty) = 0 \Rightarrow P(N) = 0$ , da  $N$  abzählbare Vereinigung von  $P$ -Nullmengen. Außerdem:  $N \in \mathfrak{F}_\infty$ .

Sei  $\tilde{X}_\infty(\omega) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n(\omega)\} & \omega \in N^C \text{ (evtl. } \tilde{X}_\infty(\omega) = \infty) \\ 0 & \omega \in N \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E|\tilde{X}_\infty| &= E\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \{|X_n|\}\right] \\
&\stackrel{\text{Lem. von Fatou}}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{E|X_n|\} \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{E|X_n|\} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Sei  $\tilde{N} := \{\omega \in \Omega \mid \tilde{X}_\infty \in \{-\infty, \infty\}\} \Rightarrow P(\tilde{N}) = 0$

folgt  $X_\infty := \tilde{X}_\infty \cdot \mathbf{1}_{\tilde{N}^C}$  erfüllt die Bedingung. ■

**Bemerkung**

(i)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{E|X_n|\} < \infty$  heißt  **$L^1$ -beschränkt**.

(ii) Bei Supermartingalen folgt die  $L^1$ -Beschränktheit aus  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{EX_n^-\} < \infty$ , also z.B. falls  $X_n \geq 0$ .

---

<sup>1</sup> $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_n)$

**Beispiel 9.1 (Verzweigungsprozesse)**

Es sei  $\{Y_{nk} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$  eine Familie von unabhängigen und identisch verteilten  $\mathbb{N}_0$ -wertigen Zufallsvariablen.

$$P_j := P(Y_{nk} = j) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

Sei  $(Z_n)$  definiert durch

$$Z_1 := 1, \quad Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{nk} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \mu := \sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$$

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(\{Y_{mk} \mid k \in \mathbb{N}, m \leq n-1\})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= E\left[\sum_{k=1}^{Z_n} Y_{nk} \mid \mathfrak{F}_n\right] \\ &= E\left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^l Y_{nk}\right) \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \mid \mathfrak{F}_n\right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{E\left[\sum_{k=1}^l Y_{nk} \mid \mathfrak{F}_n\right]}_{=E[\sum_{k=1}^l Y_{nk}]} \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \mu \cdot \mathbf{1}_{\{Z_n=l\}} = \mu \cdot Z_n \end{aligned}$$

Sei  $X_n := \frac{Z_n}{\mu^n} \implies (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist ein  $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -Martingal.

Insbesondere gilt:

$$EZ_n = \mu^n \cdot EX_n = \mu^n EX_1 = \mu^{n-1} EZ_1 = \mu^{n-1} \quad (*)$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist  $L^1$ -beschränkt, da  $E|X_n| = EX_n = \frac{1}{\mu} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Satz 9.1  $\implies \exists X_{\infty}$  mit  $X_n \rightarrow X_{\infty}$   $P$ -f.s. .

Falls  $\mu < 1$ :  $\xrightarrow{(*)} P(Z_n \geq \epsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \implies X_{\infty} \equiv 0$

Falls  $\mu = 1$ :  $X_n$  ganzzahlig  $\implies$  Folge irgendwann konstant. Wenn  $P_1 \neq 1 \implies X_{\infty} \equiv 0$

Falls  $\mu > 1$ :  $X_{\infty}$  ist nicht degeneriert.  $P(X_{\infty} = 0)$  ist Lösung von  $g(z) = z$ , wobei  $g$  erzeugende Funktion von  $Y$  ist.



# Stichwortverzeichnis

- $L^1$ -beschränkt, 86
- $L^p$ -Ungleichung, 72
- $\mu$ -Dichte, 19
- $\mu$ -Integral, 7, 10, 11
- $\mu$ -Nullmenge, 18
- $\mu$ -fast überall, 18
- $\mu$ -integrierbar
  - $p$ -fach, 22
- $\mu$ -stetig, 19
- $\sigma$ -Algebra
  - der  $\tau$ -Vergangenheit, 74
  - Produkt-, 25
- $d$ -dimensionale Normalverteilung, 58
- $p$ -fach  $\mu$ -integrierbar, 22
  
- abzählendes Maß, 6
- adaptiert, 71
- algebraische Induktion, 18
  
- bedingte Dichte, 67
- bedingter Erwartungswert, 61, 62, 66
- beschränkt
  - $L^1$ -, 86
  - $L^p$ -, 73
- Bildmaß, 16
- Borel-Cantelli Lemma, 37
  
- charakteristische Funktion, 41
- charakteristische Funktion (Zufallsvektor), 57
- Continuous Mapping Theorem, 46
  
- Darstellungssatz von Skorohod, 45
- Dirac-Maß, 5
  
- Eindeutigkeitssatz für Maße, 6
- Einpunktmaß, 5
- Eintrittszeit, 74
- Elementarfunktion, 7
  
- Erlang-Verteilung, 34
- Erwartungswert
  - bedingt, 61, 66
  - Version des bedingten, 62
- Erwartungswert (Zufallsvektor), 57
  
- Faktorisierungssatz, 65
- Faltung, 34
- fast überall, 18
- Filtration, 71
  
- Gamma-Verteilung, 34
- gemeinsame Verteilung, 31
- gestoppter Prozess, 75
- Gumbelverteilung, 55
  
- Höldersche Ungleichung, 22
  
- Jensensche Ungleichung, 21
  
- Kern, 66
- Konvergenz
  - in Verteilung, 45
  - schwache, 45
- konvex, 21
- Koppelung, 66
- Kovarianzmatrix, 57
  
- Lebesgue-Maß, 6
- Lebesgue-Stieltjes-Maß, 6
- Lemma
  - Borel-Cantelli, 37
  - von Fatou, 15
- Lindeberg-Bedingung, 49
  
- Maß
  - Produkt-, 27
- Martingal, 71
  - Sub-, 71

- Super-, 71
- Maß, 5
  - $\sigma$ -endlich, 5
  - endlich, 5
  - Lebesgue-Stieltjes, 6
- Maß mit Dichte, 19
- maßdefinierende Funktion, 6
- Maßraum, 5
- Maßtransport, 16
- Minkowskische Ungleichung, 22
- Normalverteilung
  - $d$ -dimensionale, 58
- Nullmenge, 18
- Optional Stopping Theorem, 77
- Ordnungsstatistik, 35
- OST, 77
- Produkt- $\sigma$ -Algebra, 25
- Produktmaß, 27
- Projektion, 25
- Prozess
  - gestoppter, 75
- quasi-integrierbar, 11
- Randdichte, 34
- Satz
  - Faktorisierungs-, 65
  - Integration bezüglich des Bildmaßes, 17
  - Transformations-, 17, 33
  - Transformationssatz, 32
  - von der majorisierten Konvergenz, 15
  - von Doob, 72
  - von Helly, 47
  - von Lebesgue, 15
  - von Radon-Nikodym, 20
- schwache Konvergenz, 45
- Snell-Einhüllende, 80
- Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen, 48
- stochastisch unabhängig, 31
- stochastischer Prozess, 71
- Stoppzeit, 74
- straff, 47
- Submartingal, 71
- Submartingal-Ungleichung, 72
- Supermartingal, 71
- Theorem
  - Optional Stopping-, 77
- Transformationssatz, 17
- Übergangskern, 66
- unabhängig
  - stochastisch, 31
- Ungleichung
  - $L^p$ -, 72
  - Höldersche, 22
  - Jensensche, 21
  - Minkowskische, 22
  - Submartingal-, 72
- Verteilung
  - Erlang-, 34
  - Gamma-, 34
  - gemeinsame, 31
  - Gumbel, 55
- Verteilungskonvergenz, 57
- Wahrscheinlichkeitsmaß
  - straffes, 47
- Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy, 49
- Zufallsgröße, 7
- Zufallsvariable, 7
- Zylindermengen, 25