

# **Analysis I**

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

12. Dezember 2016

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>0</b> | <b>Vorbemerkungen</b>  | <b>3</b>  |
| 0.1      | Bezeichnungen . . . . .  | 3         |
| 0.2      | Vollständige Induktion . . . . .                                 | 5         |
| <b>1</b> | <b>Reelle und komplexe Zahlen</b>                                | <b>9</b>  |
| 1.1      | Geordnete Körper . . . . .                                       | 9         |
| 1.2      | Suprema und reelle Zahlen . . . . .                              | 13        |
| 1.3      | Komplexe Zahlen . . . . .  | 20        |
| <b>2</b> | <b>Konvergenz von Folgen</b>                                     | <b>23</b> |
| 2.1      | Einfache Eigenschaften . . . . .                                 | 23        |
| 2.2      | Monotone Folgen . . . . .  | 27        |
| 2.3      | Teilfolgen und Vollständigkeit . . . . .                         | 31        |
| <b>3</b> | <b>Reihen</b>  | <b>37</b> |
| 3.1      | Konvergenzkriterien . . . . .                                    | 37        |
| 3.2      | Einige Vertiefungen/Vermischtes . . . . .                        | 43        |
| 3.3      | Potenzreihen . . . . .   | 48        |
| <b>4</b> | <b>Stetige Funktionen</b>  | <b>52</b> |
| 4.1      | Grenzwerte stetiger Funktionen . . . . .                         | 52        |
| 4.2      | Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .                      | 55        |
| 4.3      | Hauptsätze über stetige Funktionen . . . . .                     | 57        |
| 4.4      | Exponentialfunktion und ihre Verwandtschaft . . . . .            | 59        |
| <b>5</b> | <b>Differentialrechnung</b>                                      | <b>61</b> |
| 5.1      | Rechenregeln . . . . .   | 61        |
| 5.2      | Qualitative Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . . | 63        |
| 5.3      | Der Satz von Taylor . . . . .                                    | 65        |
| <b>6</b> | <b>Integralrechnung</b>  | <b>66</b> |
| 6.1      | Riemann-Integrale . . . . .                                      | 66        |
| 6.2      | Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .       | 69        |
| 6.3      | Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .         | 73        |
| 6.4      | Uneigentliche Integrale . . . . .                                | 77        |

# 0 Vorbemerkungen

## 0.1 Bezeichnungen

### Allgemeine Bezeichnungen

- griechische Buchstaben: s. Übungsblatt.
- Thm = Theorem = Hauptsatz.
- Def. = Definition, „:=“ heißt „steht für“.
- Lem. = Lemma = Hilfssatz.
- Bew. = Beweis.
- Beh. = Behauptung.
- Ann. = Annahme.
- n.V. = nach Voraussetzung.
- Vor. = Voraussetzung.
- Bsp. = Beispiel.
- Bem. = Bemerkung.
- $\square$  = Beweisende.

### Logische Symbole

- $\neg$  = nicht.
- $\wedge$  = und.
- $\vee$  = oder.
- $\rightarrow$  = impliziert.
- $\iff$  = äquivalent.
- $\forall$  = für alle.
- $\exists$  = es existiert.
- $\exists!$  = es existiert genau eines.

## Etwas zu Mengen

Mengen werden durch die Angabe ihrer Elemente definiert, z.B.  $M = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$  = die Menge, die aus 1, 2 und 3 besteht.

- $M = \mathbb{N}$  = die Menge der natürlichen Zahlen.
- $M = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\}$  = gerade Zahlen.
- $\emptyset$  = leere Menge =  $\{\}$ .

## Operationen mit Mengen $M, N$ :

- $x \in M$  – „ $x$  ist ein Element von  $M$ .“ (Beispiel:  $1 \in \{1, 2, 3\}$ )
- $x \notin M$  – „ $x$  ist kein Element von  $M$ .“
- $M \subseteq N$  – „ $M$  ist Teilmenge (TM) von  $N$ ,“ d.h. wenn  $x \in M$ , dann auch  $x \in N$ ,  
oder:  $x \in M \implies x \in N$ .
- $M = N$  – „ $M \subseteq N$  und  $N \subseteq M$ “ oder:  $M$  und  $N$  haben die gleichen Elemente.
- $M \cap N = \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$  = Schnittmenge = Menge der  $x$ , die in beiden Mengen liegen.
- $M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$  = Vereinigungsmenge = Menge der  $x$ , die in einer der beiden Mengen liegen (oder auch in beiden).
- $M \times N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$  = Menge der geordneten Paare aus  $M$  und  $N$ .  
Ferner:  $M^2 = M \times M$ ,  $M^n = M \times \dots \times M$  ( $n$ -fach) ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- $M \setminus N = \{x \in M : x \notin N\}$  = Differenzmenge = Menge der  $x$  aus  $M$ , die nicht in  $N$  liegen.
- $\mathcal{P}(M) = \{N : N \subseteq M\}$  = Potenzmenge = die Menge aller Teilmengen von  $M$ .
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ . Zugehörige Rechenregeln, siehe LA.

## Abbildungen (Abb.) oder Funktionen (Fkt.):

Seien  $M$  und  $N$  Mengen. Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$ ,  $x \mapsto f(x)$  besteht aus dem Definitionsbereich  $M$ , dem Bildbereich  $N$  und der Abbildungsvorschrift  $f$ , die jedem „Urbild“  $x \in M$  genau ein „Bild“  $f(x) \in N$  zuordnet. Streng genommen ist die Funktion das Tripel  $(f, M, N)$ , man schreibt meistens nur  $f$ . Beispiel:  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto 2x$ . Hier schreibt man auch  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = 2x$ .

## 0.2 Vollständige Induktion

Wir setzen die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , ( $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ), die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und die Brüche  $\mathbb{Q}$  samt ihren Rechenregeln voraus.

Dann gilt das *Prinzip der vollständigen Induktion* (vollst. Ind.).

$M \subseteq \mathbb{N}$  erfülle die beiden folgenden Bedingungen:

(IA)  $1 \in M$

(IS) Wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  zu  $M$  gehört, dann gehört auch der Nachfolger  $n + 1$  zu  $M$ .

Beh. Dann gilt  $M = \mathbb{N}$ .

*Beweis (indirekt). Annahme* Die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein  $m \in \mathbb{N} \setminus M$ . Nach (IA) ist  $1 \in M$ . Dann liefert (IS), dass  $2 = 1 + 1 \in M$ . Diesen Schritt wiederholt man  $(m - 1)$  mal. Somit erhält man mit  $m \in \mathbb{N}$  einen Widerspruch ( $\nmid$ ) zu  $m \in \mathbb{N} \setminus M$ . Also muss die Annahme falsch sein, d. h. die Behauptung ist wahr.  $\square$

Eine *Aussage* ist ein „Satz“, der entweder wahr oder falsch ist, z. B.  $7 + 5 = 12$ ,  $3 + n = n$  sind Aussagen.  $n + 1$  ist keine Aussage.

### Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Es seien für jedes  $n \in \mathbb{N}$  Aussagen  $A(n)$  gegeben. Wir wollen zeigen, dass alle Aussagen wahr sind, d. h.  $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$  muss gleich  $\mathbb{N}$  sein. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion muss man also die folgenden Behauptung zeigen:

(IA) Induktionsanfang: Man zeigt, dass  $A(1)$  wahr ist.

(IS) Induktionsschluss: Es gelte die Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein (festes, aber beliebiges)  $n \in \mathbb{N}$  ist  $A(n)$  wahr.

Dann zeigt man, dass auch  $A(n + 1)$  wahr ist. Dann folgt, dass alle  $A(n)$  wahr sind.

**Beispiel 0.1.** Zeige:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis (per vollst. Ind.).* Es sei  $A(n) : 1 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

IA:  $n = 1 : 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \implies A(1)$  ist wahr.

IS: Es gelten  $A(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

Dann:  $(1 + \dots + n) + n + 1 \stackrel{(IV)}{=} \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$

$\implies A(n + 1)$  ist wahr.  $\implies$  IS ist gezeigt.  $\implies$  Beh. nach vollst. Ind.  $\square$

Unbefriedigend ist die Schreibweise „ $+\dots+$ “, dafür: „rekursive Def.“ des Summenzeichens: Gegeben seien  $a_j \in \mathbb{Q}$  für jedes  $j \in \mathbb{Z}$  mit  $j \geq m$  für ein festes  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann setzen wir:

$$\sum_{j=m}^m a_j := a_m.$$

Wir nehmen an, dass  $\sum_{j=m}^{m+n} a_j$  für ein festes, aber beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  definiert sei. Dann definieren wir:

$$\sum_{j=m}^{m+n+1} a_j := \left( \sum_{j=m}^{m+n} a_j \right) + a_{m+n+1}.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist die Menge:  $M = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{j=m}^{m+n} a_j \text{ ist def.}\}$  gleich  $\mathbb{N}$ .  
(Korrektur: Hier braucht man das Induktionsprinzip für  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , siehe Übung.)

Wir haben also den Ausdruck  $\sum_{j=m}^k a_j$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq m$  definiert. Man schreibt oft

$$\sum_{j=m}^k a_j = a_m + \dots + a_k. \text{ Genauso definiert man: } \prod_{j=m}^k a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_k.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln, wie man per Induktion zeigt. Dazu ein Beispiel, wobei  $m = 1$ . Gegeben seien  $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$A(n) : \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Beweis (per Ind.).} \quad \text{IA: } n = 1 : \sum_{j=1}^1 a_j + \sum_{j=1}^1 b_j \stackrel{\text{Def.}}{=} a_1 + b_1 \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^1 (a_j + b_j) \implies A(1)$$

ist wahr.

IS: Es gelte  $A(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV). Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} a_j + \sum_{j=1}^{n+1} b_j &\stackrel{\text{Def.}}{=} \left( \sum_{j=1}^n a_j + a_{n+1} \right) + \left( \sum_{j=1}^n b_j + b_{n+1} \right) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^{n+1} (a_j + b_j). \end{aligned}$$

$$\implies A(n+1) \text{ ist wahr.} \implies \text{IS gilt.} \implies A(m) \text{ gilt } \forall m \in \mathbb{N}. \quad \square$$

**Beispiel 0.2** (Geometrische Summenformel). Gegeben sei  $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ .

Beh. Dann gilt:

$$A(n) : \sum_{j=0}^n q^j = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Beweis (per Ind.).} \quad \text{IA: } (n = 1) : \sum_{j=0}^1 q^j = q^0 + q^1 = 1 + q,$$

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{(q + 1)(q - 1)}{q - 1} = 1 + q. \text{ „}=\text{“} \implies A(1) \text{ ist wahr.}$$

IS: Es gelte  $A(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV). Dann:

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \sum_{j=0}^n q^j + q^{n+1} \stackrel{(IV)}{=} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

$\implies A(n+1)$  gilt  $\implies$  (IS) ist gezeigt.  $\implies$  Ind. zeigt, dass  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.  $\square$

Eine weitere rekursive Definition:

*Fakultät:*  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ . Wenn  $n!$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  definiert ist, dann setzt man  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ . Man schreibt:  $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ .

**Definition** (Binomialkoeffizienten). Seien  $n, j \in \mathbb{N}_0$  und  $n \geq j$ . Dann setzt man

$$\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1 \cdot 2 \cdots (n-j))}.$$

Eigenschaften: ( $n, j \in \mathbb{N}_0, n \geq j$ )

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{n}{n-j} &= \frac{n!}{(n-j)!(n-n+j)!} = \binom{n}{j}. \\ \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!n!} = 1 = \binom{n}{n}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Sei } j \geq 1. \text{ Dann: } \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n! \cdot j}{(j-1)!(n-j+1)! \cdot j} + \frac{n!(n-j+1)}{j! \cdot (n-j)!(n-j+1)} \\ &\stackrel{\text{Def. Fak.}}{=} \frac{j \cdot n! + (n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \stackrel{\text{Def. Fak.}}{=} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \stackrel{\text{Def.}}{=} \binom{n+1}{j} \end{aligned} \tag{0.2}$$

**Beispiel 0.3** (Binomischer Satz). Seien  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann

$$A(n) : (a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis (per Ind.).* IA: ( $n = 1$ )

$$\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^{1-j} b^j \stackrel{(0.1)}{=} 1 \cdot a^1 \cdot b^0 + 1 \cdot a^0 \cdot b^1 = (a+b)^1.$$

$\implies A(1)$  ist wahr.

IS:  $A(n)$  gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{(IV)}{=} (a+b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j+1} \cdot b^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} \cdot b^{j+1} \\
\text{setze } l &= j+1 \quad (\Longleftrightarrow \quad j = l-1) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n+1-j} \cdot b^j + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} \cdot b^l \\
&\stackrel{(0.1)}{=} \underbrace{a^{n+1} \sum_{j=1}^n \left( \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right)}_{\stackrel{(0.2)}{=} \binom{n+1}{j}} \underbrace{a^{n+1-j} \cdot b^j}_{(j=l \text{ gesetzt})} + \underbrace{1 \cdot a^0 \cdot b^{n+1}}_{(j=n+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} \cdot b^j
\end{aligned}$$

$\implies A(n+1)$  ist gezeigt  $\implies$  (IS) gilt.  $\implies$  Beh. folgt mit vollst. Ind.

□



# 1 Reelle und komplexe Zahlen

Wir definieren die reellen Zahlen „axiomatisch“, d.h.: Man legt in einer Definition die Eigenschaften der reellen Zahlen fest, die im folgenden verwendet werden dürfen. Ausblick:  $\mathbb{R}$  ist ein „ordnungsvollständiger, geordneter Körper“.

## 1.1 Geordnete Körper

**Definition.** Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Eine Abbildung  $*$  :  $M \times M \rightarrow M$  ( $x, y \mapsto x * y$ ) heißt Verknüpfung auf  $M$ .

**Definition 1.1.** Seien  $K$  eine Menge,  $0 \in K$ ,  $1 \in K$  mit  $0 \neq 1$ , und „+“ und „ $\cdot$ “ Verknüpfungen auf  $K$ . Dann heißt  $(K, 0, 1, +, \cdot)$  ein *Körper*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle  $x, y, z \in K$  gelten:

a) Assoziativgesetze:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

b) neutrale Elemente:

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$$

c) inverse Elemente:

- Zu jedem  $x \in K$  existiert ein  $a \in K$  mit  $x + a = 0$ .
- Zu jedem  $x \in K \setminus \{0\}$  existiert ein  $b \in K$  mit  $x \cdot b = 1$ .

d) Kommutativgesetze:

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

e) Distributivgesetz:

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Man schreibt oft  $K$  anstelle  $(K, 0, 1, +, \cdot)$ .

**Beispiel.** a)  $\mathbb{Q}$  mit den üblichen  $0, 1, +, \cdot$  ist ein Körper.

b)  $\mathbb{Z}$  ist kein Körper, da es kein  $b \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $2b = 1$ .

c) Weitere Beispiele in linearer Algebra und Analysis I.

*Bemerkung.* a) Wir schreiben  $-x$  für das Inverse Element von  $x \in K$  bzgl. der Addition und  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  für das Inverse Element von  $x \in K \setminus \{0\}$ . Man lässt „ $\cdot$ “ und überflüssige Klammern meist weg. Dabei gilt „ $\cdot$ “ vor „ $+$ “.

b) Die inversen Elemente sind eindeutig bestimmt (siehe LA). Man schreibt  $x - y$  statt  $x + (-y)$  und  $\frac{x}{y}$  statt  $x \cdot y^{-1}$ .

c) Es gelten Rechenregeln wie in der Bruchrechnung (z.B.  $0 \cdot x = 0$ ,  $-(-x) = x$ , usw.) [siehe LA]. Im folgenden wird dies ohne Kommentar in Ana I verwendet.

**Definition 1.2.** Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Eine *Relation*  $R$  auf  $M$  ist eine Teilmenge von  $M \times M$ . Man schreibt  $x \sim_R y$  statt  $(x, y) \in R$ .

$R$  ist *Ordnungsrelation* (oder *Ordnung*), wenn gelten:

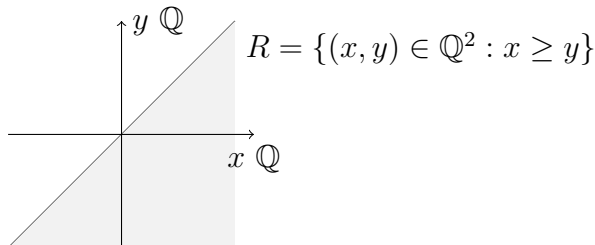
a)  $\forall x \in M : x \sim_R x$  (reflexiv).

b)  $\forall x, y, z \in M : \text{Wenn } x \sim_R y \text{ und } y \sim_R z, \text{ dann auch } x \sim_R z$  (transitiv).

c)  $\forall x, y \in M : \text{Wenn } x \sim_R y \text{ und } y \sim_R x, \text{ dann gilt } x = y$  (antisymmetrisch). Statt  $\sim_R$  schreibt man in diesem Fall meist  $\leq_R$  oder  $\geq_R$ . Eine Ordnung heißt *total*, wenn für beliebige  $x, y \in M$  stets  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt.

Man schreibt  $x < y$ , wenn  $x \leq y$  und  $x \neq y$ , sowie  $x \geq y$  statt  $y \leq x$  und  $y > x$  statt  $x < y$ .

**Beispiel.** a) Die übliche Ordnung auf  $\mathbb{Q}$  erfüllt Definition 1.2 und ist total. Hier:



b) Die Relation „ $n$  teilt  $m$ “ für  $n, m \in M$  ist eine *nicht-totale* Ordnung, z.B. 2 und 3 teilen sich nicht.

**Definition 1.3.** Ein *geordneter Körper*  $K = (K, \leq)$  besteht aus einem Körper  $K$  und einer *totalen* Ordnung  $\leq$ , sodass die folgenden Eigenschaften gelten:

a)  $\forall x, y, z \in K : \text{Wenn } x < y, \text{ dann } x + z < y + z$ .

b)  $\forall x, y \in K : \text{Wenn } x > 0 \text{ und } y > 0, \text{ dann gilt } xy > 0$ .

$x \in K$  heißt *positiv* (*negativ*), wenn  $x \geq 0$  ( $x \leq 0$ ).  $x \in K$  heißt *strikt positiv* (*strikt negativ*), wenn  $x > 0$  ( $x < 0$ ). Man setzt

$$K_+ = \{x \in K : x \geq 0\}, \quad K_- = \{x \in K : x \leq 0\}$$

---

Es gelten  $K_+ \cap K_- = \{0\}$  (nach Def. 1.2 3), sowie  $K_+ \cup K_- = K$  (wegen der Totalität).

**Beispiel.**  $\mathbb{Q}$  mit der üblichen Ordnung ist ein geordneter Körper.

**Satz 1.4.** a)  $y > x \iff y - x > 0$ .

b) a)  $x < 0 \iff -x > 0$ .

b)  $x > 0 \iff -x < 0$ .

c) Wenn  $x > 0$  und  $y < 0$ , dann  $xy < 0$ .

d) Wenn  $x \neq 0$ , dann  $x^2 = x \cdot x > 0$ . Speziell:  $1 = 1^2 > 0$ .

e) Wenn  $x > 0$ , dann  $\frac{1}{x} > 0$ .

*Beweis.* a) Sei  $y > x$ . Addiere  $-x$  zu beiden Seiten. 1.3 1 liefert  $y - x > x - x = 0$ .

Sei  $y - x > 0$ . Addiere  $x$ . 1.3 1  $\implies y = y - x + x > x$ .

b) a) Setze  $y = 0$  in 1.

b) Ergibt sich, wenn man in 2a  $x$  durch  $-x$  ersetzt.

(Beachte:  $-(-x) = x$ ).

c) Seien  $x > 0, y < 0 \xrightarrow{2} -y > 0 \xrightarrow{1.3\ 2} 0 < x \cdot (-y) = -xy \xrightarrow{2} xy < 0$ .

d) Sei  $x \neq 0$ . Nach 2 und der Totalität der Ordnung gilt entweder  $x > 0$  oder  $-x > 0$ . 4 folgt also aus 1.3 2 und  $(-x)^2 = x^2$ .

e) Sei  $x > 0$ . Ann.  $\frac{1}{x} < 0$ . Dann  $-\frac{1}{x} > 0$  (nach 2) und somit  $-1 = x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) > 0$  nach 1.3 2. Nach 4 und 2 folgt  $\frac{1}{x} \neq 0$  folgt die Behauptung, da die Ordnung total ist.

□

**Definition 1.5.** Sei  $K$  ein geordneter Körper und  $x \in K$ .

Dann heißt  $|x| := \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$  der Betrag von  $x$ .

**Satz 1.6.** Seien  $K$  ein geordneter Körper und  $x, y \in K$ . Dann gelten:

a)  $|x| \geq 0, |x| = 0 \iff x = 0$ .

b)  $x \leq |x|, -x \leq |x|, |x| = |-x|$ .

c)  $|xy| = |x| \cdot |y|$ .

$$d) |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$e) |x - y| \geq |x| - |y|.$$

*Beweis.* a) - c) folgen leicht aus Def. 1.5 und Satz 1.4.

$$d) \text{ Da } x \leq |x|, y \leq |y|, \text{ folgt } x + y \stackrel{1.3 \ 1}{\leq} |x| + y \leq |x| + |y|.$$

$$\text{Ebenso: } -(x + y) \leq |x| + |y|. \text{ Somit: } |x + y| \leq |x| + |y|.$$

e) Übungsblatt.

□

**Definition 1.7.** Seien  $K$  ein geordneter Körper und  $a, b \in K$  mit  $a < b$ . Dann definiert man die *beschränkten Intervalle*

$$[a, b] = \{x \in K : a \leq x \leq b\}, [a, a] = \{a\} \text{ („abgeschlossen“),}$$

$$(a, b) = \{x \in K : a < x < b\} \text{ („offen“, statt } ]a, b[),$$

$$[a, b) = \{x \in K : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in K : a < x \leq b\},$$

und die *unbeschränkten Intervalle*

$$\left. \begin{aligned} [a, \infty) &= \{x \in K : x \geq a\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in K : x \leq a\}, \end{aligned} \right\} \text{ („abgeschlossen“),}$$

$$\left. \begin{aligned} (a, \infty) &= \{x \in K : x > a\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \in K : x < a\}, \end{aligned} \right\} \text{ („offen“).}$$

**Beispiel.** Für welche  $x \in \mathbb{Q}$  gilt  $|2x - 3| + 2 > 3x - 5$ ? (\*)

*Lösung:* Betrag auflösen:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2}, \\ 3 - 2x, & x < \frac{3}{2}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{Q}.$$

*Fall 1:*  $x \geq \frac{3}{2}$ . Dann:

$$(*) \iff 2x - 3 + 2 > 3x - 5 \iff 2x - 1 > 3x - 5 \stackrel{1.3 \ 1}{\iff} 4 > x.$$

Also: jedes  $x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right)$  erfüllt (\*).

Fall 2:  $x < \frac{3}{2}$ . Dann:

$$(*) \iff 3 - 2x + 2 > 3x - 5 \xrightarrow{1.3 \ 1} 10 > 5x \xrightarrow{(\ddot{U}b)} x < 2.$$

Also: jedes  $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  erfüllt (\*).

$\implies$  Lösungsmenge  $= (-\infty, 4)$ .

**Satz 1.8** (Bernoulli-Ungleichung). Seien  $K$  ein geordneter Körper,  $x > -1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

(Dabei wird  $y^n = y \cdots y$  induktiv definiert.)

*Beweis.* (per Induktion)

(IA) Beh. ist wahr für  $n = 1$ .

(IS) Beh. gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

Dann:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)}_{>0, \text{ n.V. } [x > -1]} (1+x)^n \stackrel{(IV), \ddot{U}b}{\geq} (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \stackrel{1.3 \ 1}{\geq} 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

$\implies$  IS gilt  $\xRightarrow{\text{Ind.}}$  Beh. □

**Lemma 1.9.** Sei  $K$  ein geordneter Körper und  $a, b \in K$  mit  $a < b$ . Dann gilt

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

wobei  $2 := 1 + 1$ .

*Beweis.*  $2a = a + a \stackrel{1.3 \ 1}{<} a + b \stackrel{1.3 \ 1}{<} b + b = 2b$ . Division mit 2 liefert Beh. □

## 1.2 Suprema und reelle Zahlen

**Definition 1.10.** Sei  $K$  geordneter Körper und  $M \subseteq K$  nichtleer.

- a)  $a \in K$  ist eine *obere* (*untere*) *Schranke* von  $M$ , wenn  $a \geq m$  ( $a \leq m$ ) für alle  $m \in M$ .  
 $M$  heißt *nach oben* (*unten*) *beschränkt*, wenn es eine obere (untere) Schranke besitzt.  
 $M$  heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und nach unten beschränkt ist. Andernfall heißt  $M$  *unbeschränkt*.

- b)  $x \in K$  heißt *Maximum* (*Minimum*) von  $M$ , wenn es eine *obere* (*untere*) Schranke von  $M$  ist und wenn  $x \in M$ . Man schreibt dann  $x = \max M$  ( $x = \min M$ ).

**Beispiel 1.11.** a) Sei  $M = (-\infty, b]$ . Dann hat  $M$  die obere Schranke  $b \in M$  gemäß Def. 1.7. Ferner hat  $M$  keine untere Schranke.

*Beweis. Ann.*  $\exists a \in K$  mit  $a \leq x \forall x \in M$ . Dann:  $a - 1 < a$  nach Satz 1.4.

$$\implies a - 1 \leq b \implies a - 1 \in (-\infty, b] \implies \text{falsch}.$$

$\implies M$  hat keine untere Schranke. □

- b) Sei  $N = (-\infty, b)$ . Dann hat  $N$  auch die obere Schranke  $b$ , aber  $b \notin N$ . *Beh.*  $N$  hat kein  $\max$ .

*Beweis. Ann.* Es gebe  $a = \max N$ . Da  $a \in N$ , folgt  $a < b$ . Somit folgt

$$a < \frac{a+b}{2} < b \text{ nach Lemma 1.9.} \implies \frac{a+b}{2} \in N \implies \text{falsch zu } a = \max N. \quad \square$$

*Bemerkung 1.12.* In Def. 1.10 hat  $M$  höchstens ein  $\max$  und höchstens ein  $\min$ .

*Beweis.* (nur für  $\max$ ): Seien  $x, y$  Maxima von  $M$ .  $\implies x \geq m \forall m \in M \implies x \geq y$ .

Genauso:  $y \geq x$ .

$$\implies x = y. \quad \square$$

**Definition 1.13.** Sei  $K$  ein geordneter Körper und  $M \subseteq K$  nichtleer.

- a) Sei  $M$  nach oben beschränkt. Wenn es eine kleinste obere Schranke von  $M$  gibt, dann heißt diese *Supremum* von  $M$  (man schreibt  $\sup M$ ).
- b) Sei  $M$  nach unten beschränkt. Wenn es eine größte untere Schranke von  $M$  gibt, so heißt diese *Infimum* von  $M$  ( $\inf M$ ).

**Beispiel 1.14.** Sei  $M = (-\infty, b)$ . *Beh.*  $b = \sup M$ .

*Beweis.* Nach Def. 1.7. ist  $b$  eine obere Schranke von  $M$ . *Ann.*  $x$  sei eine echt kleinere obere Schranke von  $M$ . Nach Lemma 1.9 gilt:

$$x < \frac{x+b}{2} < b \implies \frac{x+b}{2} \in M \implies \text{falsch}.$$

□

*Bemerkung 1.15.* a) Wenn es existiert, dann ist das Supremum gleich dem Minimum der oberen Schranke von  $M$ , sowie  $\inf M$  das Maximum der unteren Schranken von  $M$ .

- b) Nach 1 Bem. 1.12. besitzt also  $M$  höchstens ein  $\sup$  und höchstens ein  $\inf$ .

**Beispiel 1.16.** Seien  $K = \mathbb{Q}$ ,  $M = \{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \leq 2\}$ .

*Beh.*  $\sup M$  ex. *nicht* in  $\mathbb{Q}$ , wobei  $M$  beschränkt ist (mit oberer Schranke 2).

*Beweis.* Ann. es existiere  $s = \sup M \in \mathbb{Q}$ .

$\implies \exists$  teilerfremde  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $s = \frac{p}{q}$ . Nach Lemma 1.24 muss dann  $s^2 = 2$  gelten.

$\implies p^2 = 2q^2 \implies p^2$  gerade  $\implies p$  gerade  $\implies \exists r \in \mathbb{N} : p = 2r$

$\implies 2q^2 = 4r^2 \implies q^2 = 2r^2 \implies q$  gerade  $\implies \nexists p, q$  teilerfremd.

$\implies s$  kann nicht in  $\mathbb{Q}$  existieren.

(Beweis ohne Vorgriff: Amann/Escher Ana I. Bsp. I. 10.3.) □

*Bem.* Haben gezeigt „ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ “.

**Definition 1.17.** Ein geordneter Körper  $K$ , in dem jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ein Supremum besitzt, heißt *ordnungsvollständig*. Die *reellen Zahlen*  $\mathbb{R}$  sind ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.

*Bemerkung.* a)  $\mathbb{Q}$  ist nach Bsp. 1.16 nicht ordnungsvollständig.

b) Man kann  $\mathbb{R}$  mit den Eigenschaften aus Def. 1.17 mit Mitteln der Mengentheorie konstruieren (Cantor, Dedekind ~1880). Durch Def. 1.17 ist  $\mathbb{R}$  eindeutig bestimmt („bis auf einen ordnungserhaltenden Körperisomorphismus“).

Siehe:

- Ebbinghaus et al. „Zahlen“, 1992.
- E. Landau. Grundlagen der Analysis, 1934.
- Aman/Escher Thm. I.10.4.

c) Wenn man die 1 in  $\mathbb{R}$  mit der 1 in  $\mathbb{Q}$  identifiziert, dann ist  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  enthalten ( $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ), wobei für  $x, y \in \mathbb{Q}$  die Verknüpfungen  $+$ ,  $\cdot$  und die Relation  $\leq$  von  $\mathbb{R}$  mit denen von  $\mathbb{Q}$  übereinstimmen.

*Denn:* Man definiert in  $\mathbb{R}$ :  $2 := 1 + 1$ ,  $3 := 2 + 1, \dots$ . Dabei liefern  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\leq$  von  $\mathbb{R}$  auf  $1, 2, 3, \dots$  die bekannten Verknüpfungen von  $\mathbb{N}$ , z.B. gilt auch Satz 1.4:  $1 < 2 < 3 < \dots$

Damit liegt auch  $-n$  in  $\mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , für  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

Der Rest der Behauptung ist leicht (aber langwierig) zu zeigen.

## Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und $\sup$ , $\inf$

**Satz 1.18.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  nichtleer und nach oben (unten) beschränkt und  $s \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

a)  $s = \sup M$  ( $s = \inf M$ )

b)  $s$  ist eine obere (untere) Schranke und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in M : s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s \quad (s \leq x_\varepsilon < s + \varepsilon)$$

*Beweis.* (Nur für sup): Sei  $B$  die Menge der oberen Schranken von  $M$ .  $1 \iff s = \min B \iff s$  ist obere Schranke von  $M$  und  $\forall \varepsilon > 0 : s - \varepsilon \notin B$  (da  $s$  kleinste obere Schranke)  $\iff s$  ist obere Schranke von  $M$  und  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in M : s - \varepsilon < x_\varepsilon \iff 2 \quad \square$

**Satz 1.19.** Sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  nichtleer. Dann existiert  $\min M$ .

*Beweis.* Da  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  und 1 eine untere Schranke von  $\mathbb{N}$  ist, existiert  $x = \inf M$ . Nach Satz 1.18 mit  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  existiert ein  $m_0 \in M$  mit  $x \leq m_0 < x + \frac{1}{3} \leq m + \frac{1}{3}$  für alle  $m \in M$ . Für  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \neq m_0$  gilt  $|m - m_0| \geq 1$ . Also gilt  $m_0 \leq m$  für alle  $m \in M \implies m_0 = \min M$ .  $\square$

**Satz 1.20.** a)  $\mathbb{R}$  ist „archimedisch geordnet“, d.h.  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n_x \in \mathbb{N} : n_x > x$

b)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ .

c) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Wenn  $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann  $x = 0$ .

*Beweis.* a) Annahme: Die Behauptung sei falsch, d.h.  $\exists x_0 \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x_0$ . Somit existiert  $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Nach Satz 1.18 mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  existiert dann  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$s - \frac{1}{2} < m \xrightarrow{+1} s < s + \frac{1}{2} < m + 1.$$

Da  $m + 1 \in \mathbb{N}$ , kann  $s$  kein Supremum sein.  $\nexists \implies 1$  gilt.

b) Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Setze  $x = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ . Nach 1 existiert  $n_x \in \mathbb{N}$  mit  $n_x > x = \frac{1}{\varepsilon} \implies \varepsilon > \frac{1}{n_x} \implies$  Beh. 2 mit  $n_\varepsilon = n_x$ .

c) folgt direkt aus 2.  $\square$

**Definition.** Seien  $M, N$  nichtleere Mengen. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt *injektiv*, wenn  $\forall x, y \in M$  mit  $x \neq y : f(x) \neq f(y)$ . Sie heißt *surjektiv*, wenn  $\forall z \in N \exists x \in M$  mit  $f(x) = z$ .  $f$  heißt *bijektiv*, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist, d.h.  $\forall z \in N \exists! x \in M$  mit  $f(x) = z$ . Für bijektive  $f : M \rightarrow N$  definiert man die Umkehrabbildung  $f^{-1} : N \rightarrow M$  durch  $f^{-1}(z) = x$ , wenn  $f(x) = z, z \in N$ .

**Definition 1.21.** Zwei Mengen  $M, N$  heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow N$  gibt.  $M$  hat die Mächtigkeit (Kardinalität)  $n \in \mathbb{N}$ , wenn  $M$  und  $\{1, 2, \dots, n\}$  gleichmächtig sind. Wenn dies für kein  $n \in \mathbb{N}$  der Fall ist, so ist  $M$  unendlich. Man schreibt dann  $\#M = n$  bzw.  $\#M = \infty$ .

**Beispiel.** Sei  $M = \{A, B, C\}$ . Dann ist  $f : M \rightarrow \{1, 2, 3\}$  mit  $f(A) = 1, f(B) = 3, f(C) = 2$  eine bijektive Abbildung  $\implies \#M = 3$ .



**Beachte:** Wenn  $\#M = n$ , dann gilt  $M = x_1, \dots, x_j$ , wobei  $x_j := f^{-1}(j)$  mit  $f$  aus Def. 1.21 und  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Wenn  $M$  und  $N$  gleichmächtig sind, dann  $\#M = \#N$ , da die Verkettung bijektiver Abbildungen bijektiv ist.

*Bemerkung.* Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

**Satz 1.22.** a) Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\#\{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = \infty$ . Speziell  $\#\mathbb{N} = \infty$

b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b > a$ . Dann  $\#\{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\} = \infty$

*Beweis.* a) Annahme:  $\#\{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = n$ . Dann  $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$  mit  $M := \{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = x_1, \dots, x_n$ . Dann  $y = x_1 + \dots + x_n + 1 \in \mathbb{N}$  und

$$y > \begin{cases} m & \implies y \in M \\ x_j, j \in \{1, \dots, n\} & \implies y \notin M \end{cases} \implies \text{↯}.$$

b) Zuerst konstruiert man ein  $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ . Nach Satz 1.20  $\exists n \in \mathbb{N} : b - a > \frac{1}{n} > 0$ , also

$$nb > 1 + na \quad (*)$$

Sei  $a \geq 0$ . Dann existiert nach Satz 1.20 und Satz 1.19 ein minimales  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > na$ . Sei  $a < 0$ . Dann erhält man genauso ein minimales  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l \geq -na$ , also  $-l \leq an$ . Somit liegt

$$m := \begin{cases} k & , a \geq 0 \\ 1 - l & , a < 0 \end{cases}$$

in  $\mathbb{Z}$  und  $na < m \leq an + 1 \stackrel{(*)}{<} nb \implies a < \frac{m}{n} < b$ ,  $q := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ . Nach Satz 1.20  $\exists j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $b - q > \frac{1}{j_0} > 0$ . Sei  $j \in J := \{k \in \mathbb{N} : k \geq j_0\} \implies q + \frac{1}{j} \in \mathbb{Q}$  und  $a < q + \frac{1}{j} \leq q + \frac{1}{j_0} < b, \forall j \in J$ . Die Menge  $M = \{q + \frac{1}{j}, j \in J\}$  ist nach 1 unendlich da  $f : J \rightarrow M, f(j) = q + \frac{1}{j}$  bijektiv ist.

□

**Definition.** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Dann setzt man

$$A + B := \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a + b\}$$

$$A \cdot B := \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\}$$

$$\text{speziell: } y + B = \{y\} + B = \{x = y + b, b \in B\}$$

$$y \cdot B = \{y\} \cdot B = \{x = y \cdot b, b \in B\}$$

**Beispiel.**  $[0; 1] + [2; 3] = [2; 4]$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “ ist klar. „ $\supseteq$ “ Sei  $x \in [2; 3]$ .

Wenn  $x \in [2; 3]$ , dann wähle  $a = x - 2 \in [0; 1]$  und  $b = 2$

Wenn  $x \in [3; 4]$ , dann wähle  $a = x - 3 \in [0; 1]$  und  $b = 3$

In beiden Fällen:  $a + b = x$

□

**Satz 1.23.** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  nichtleer.

a) Seien  $A$  und  $B$  nach oben beschränkt. Dann:

a) Wenn  $A \subseteq B$ , dann  $\sup A \leq \sup B$

b)  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

c) Wenn  $A, B \subseteq (0, \infty)$ , dann  $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

b) Seien  $A$  und  $B$  nach unten beschränkt. Dann gelten 1b und 1a von 1) auch für das Infimum. Weiter gelten:

a')  $A \subseteq B \implies \inf A \geq \inf B$

d)  $-A$  ist nach oben beschränkt und  $\inf A = -\sup(-A)$ , wobei  $-A := (-1) \cdot A$ .

*Beweis.* a) Sei  $A \subseteq B$ . Wenn  $z$  eine obere Schranke von  $B$  ist, dann auch von  $A$ .  $\implies$  Beh. 1a.

b) Seien  $x = \sup A$  und  $y = \sup B$ . Dann  $x + y \geq a + b \forall a \in A, b \in B \implies x + y$  ist obere Schranke von  $A + B$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben (fest aber beliebig). Setze  $\eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ . Satz 1.18 liefert  $a_\eta \in A$  und  $b_\eta \in B$  mit  $x - \eta < a_\eta \leq x$  bzw.  $y - \eta < b_\eta \leq y \implies x + y - \underbrace{2\eta}_\varepsilon < \underbrace{a_\eta + b_\eta}_{\in A+B} \leq x + y \xrightarrow{1.18} \text{Beh. 1b (Rest in \text{Übungen}).}$

□

## Potenzen mit rationalen Exponenten

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$ ,  $r = \frac{m}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  gegeben.

*Ziel:* Definiere  $a^{\frac{m}{n}}$  und zeige Potenzgesetze. Vorausgesetzt wird dabei der Fall

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ mal}} & \text{für } m > 0 \\ 1 & \text{für } m = 0 \\ \frac{1}{a^{|m|}} & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

Wir verwenden (wobei  $a, b > 0$ )

$$a < b \iff a^n < b^n \quad (1.1)$$

*Beweis.* „ $\implies$ “  $a < b \implies a^2 < ab$  und  $ab < b^2$  induktiv für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $a^n < b^n$ . Annahme:  $a \geq b \xrightarrow{\text{wie oben}} a^n \geq b^n \implies \text{↯}$

*Hauptschritt:* Fall  $m = 1$ . Sei  $M = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n \leq a\}$ . Dann

a)  $M \neq \emptyset$ , da  $0 \in M$

- b)  $M$  hat obere Schranke  $1 + a$ , denn Annahme:  $1 + a$  hat keine obere Schranke:  
 $x > 1 + a$  für  $x \in M \xRightarrow{(1.1)} x^n \geq (1 + a)^n \geq (1 + a) \cdot 1^{n-1} > a \nless$

□

$$\text{Def. 1.17} \implies \exists w = \sup M \quad (1.2)$$

**Lemma 1.24.**  $w$  ist die einzige positive reelle Lösung der Gleichung  $y^n = a$ .

*Beweis.* a) Annahme:  $w^n < a$ . Sei  $\varepsilon \in (0; 1]$ . Dann  $(w + \varepsilon)^n \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j}$

$$= w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \underbrace{w^j}_{\geq 0} \underbrace{\varepsilon^{n-j-1}}_{\leq 1} \leq w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^j \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} w^n + \varepsilon(1 + w)^n.$$

$$\text{Wähle speziell } \varepsilon = \min \left\{ 1, \frac{a - w^n}{(1 + w)^n} \right\} \in (0; 1]$$

$$\implies (w + \varepsilon)^n \leq w^n + \frac{a - w^n}{(1 + w)^n} (1 + w)^n = a$$

$$\implies w + \varepsilon \in M \implies \nless \text{ zu } w = \sup M \implies w^n \geq a.$$

b) Ähnlich sieht man  $w^n \leq a \implies w^n = a$

c) Es gelte  $v^n = a$  für ein  $v \in \mathbb{R}_+$ . Wenn  $v < (>) w$ , dann  $v^n < (>) w^n$  nach (1.1)  
 $\implies \nless \text{ zu } v^n = a = w^n \implies v = w$

□

**Folgerung.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $y = \sqrt{x^2}$  die einzige positive Lösung von  $y^2 = x^2$ . Weitere Lösung ist  $|x|$

$$\xRightarrow{\text{Eind.}} \sqrt{x^2} = |x| \quad (1.3)$$

**Definition 1.25.** Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $q = \frac{m}{n}$ ,  $w$  wie in (1.2). Dann setzen wir  $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} := w$  und  $a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$

**Satz 1.26.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ ,  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Dann gelten:

$$a) \quad a^p b^p = (ab)^p$$

$$b) \quad a^p a^q = a^{p+q}$$

$$c) \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$d) \quad a > b > 0 \implies \begin{cases} a^p > b^p, & p > 0 \\ a^p < b^p, & p < 0 \end{cases}$$

*Beweis.* a) Seien  $a, b > 0$ ,  $p = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Zu zeigen:  $a^p b^p = (ab)^p$  Dann:  
 $(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-mal}} = (a^{\frac{1}{n}})^n (b^{\frac{1}{n}})^n \stackrel{1.24}{=} ab \stackrel{1.24}{\implies} a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$ .  $n$ -te Potenz liefert  
 Beh. 1. b), c) gehen so ähnlich.

b) Sei  $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  mit  $a > b > 0$ . Zu zeigen:  $\begin{cases} p > 0 & \implies a^p > b^p \\ p < 0 & \implies a^p < b^p \end{cases}$

Annahme:  $a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$   $a \stackrel{\text{Def.}}{=} (a^{\frac{1}{n}})^n \stackrel{1.1}{\leq} (b^{\frac{1}{n}})^n \stackrel{\text{Def.}}{=} b^{\frac{1}{n}} \implies a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$   $n$ -te Potenz, 1.1, Übung 2.5, 1 für  $m < 0$  liefern 4

□

## 1.3 Komplexe Zahlen

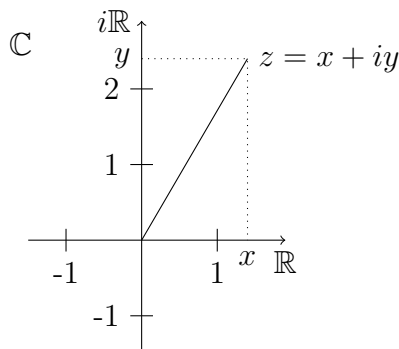
Ausgangspunkt: Löse  $x^2 = -1$  Nach Satz 1.4 hat diese Gleichung keine Lösung in einem geordneten Körper, insbesondere keine Lösung in  $\mathbb{R}$ . Idee: Konstruiere einen nicht geordneten Körper, der  $\mathbb{R}$  enthält und in dem  $x^2 = -1$  lösbar ist.

**Ansatz.** Auf  $\mathbb{R}^2$  gibt es (Vektor-)addition:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}$

Def.:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

Bsp.:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Neue Bezeichnungen: 1 statt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $i$  statt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x + iy = z$  statt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  (also  $i^2 = -1$ )



**Definition.**  $\mathbb{C} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$  Fasse  $\mathbb{R} = \{z = x + i \cdot 0 = x, x \in \mathbb{R}\}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auf.

Seien  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  für  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ . Dann setzt man

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot w := (xu - yr) + i(yu + xv) \in \mathbb{C}$$

**Beachte.** Auf der rechten Seite der obigen Definition stehen in den Klammern nur reelle Ausdrücke, die somit wohldefiniert sind. Falls  $z = x \in \mathbb{R}$  und  $w = u \in \mathbb{R}$ , so erhält man wieder die reellen  $+$ ,  $-$  Lineare Algebra:  $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$  ist ein Körper.

**Definition 1.27.** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann heißt  $x$  der Realteil von  $z$ ,  $y$  der Imaginärteil von  $z$ ,  $|z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{x^2 + y^2}$  der Betrag von  $z$  und  $\bar{z} := x - iy$  das konjugiert Komplexe von  $z$ . Man schreibt  $x = \operatorname{Re} z$  und  $y = \operatorname{Im} z$ .

*Bemerkung.* Für  $z = x \in \mathbb{R}$  gilt  $|x|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2} \stackrel{??}{=} |x|_{\mathbb{R}}$ . Somit schreiben wir  $|z|$  statt  $|z|_{\mathbb{C}}$  für  $z \in \mathbb{C}$ .

Sei  $z \in \mathbb{C}$ ,  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ . Dann ist  $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$  die offene Kreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und Radius  $r$ ,  $\bar{B}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$  die abgeschlossene Kreisscheibe,  $s(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}$  die Kreislinie.

Ferner: Sei  $z = x \in \mathbb{R}$ . Dann  $B(x, r) \cap \mathbb{R} = \{x - r, x + r\}$ .

**Satz 1.28.** Für  $w, z \in \mathbb{C}$  gelten:

$$a) \bar{\bar{z}} = z, |z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad (\implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, z \neq 0)$$

$$b) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$c) \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$$

$$d) |\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|, |\bar{z}| = |z|$$

$$e) |z| \geq 0, z = 0 \iff |z| = 0$$

$$f) |zw| = |z| \cdot |w|$$

$$g) |z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$h) |z - w| \geq ||z| - |w||$$

*Beweis.* Seien  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  für  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ .

$$a1) \bar{\bar{z}} = \overline{x + i(-y)} = x - i(-y) = z$$

$$a2) z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

b1) ist klar

$$b2) \overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = xu - yv - i(xv + yu) = xu - yv - ixv - iyu = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}\bar{w}$$

$$c1) z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \iff \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = x$$

c2) genauso

$$\text{d1) } |\operatorname{Re} z| = |x| \stackrel{??}{=} \sqrt{x^2} \stackrel{1.26}{\leq} \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

d2) genauso

$$\text{d3) } |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$$

e1) klar

$$\text{e2) } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0, y = 0$$

$$\text{f) } |zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2 |w|^2$$

$$\text{g) } |z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + \underbrace{z\bar{w} + \overline{zw}}_{=2 \operatorname{Re}(z\bar{w})} + |w|^2 \leq$$

$$|z|^2 + 2 \underbrace{|z\bar{w}|}_{|z| \cdot |w|} + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \stackrel{\sqrt{\cdot}}{\implies} \text{Beh.}$$

□

# 2 Konvergenz von Folgen

## 2.1 Einfache Eigenschaften

**Definition 2.1.** Eine Abbildung  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Folge*. Man schreibt  $a_n$  statt  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n \geq 1}$  oder  $(a_n)$  statt  $A$ . Wenn  $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ , so heißt  $(a_n)$  *reelle Folge*.

**Definition 2.2.** Seien  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{C}$ .  $(a_n)$  *konvergiert* gegen  $a$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $|a_n - a| \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ , also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

$a$  heißt dann *Grenzwert* (oder *Limes*) von  $(a_n)$  und man schreibt „ $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ “ oder „ $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ “. Wenn  $(a_n)$  keinen Grenzwert hat, so heißt  $(a_n)$  *divergent* (div.).

*Bemerkung.*  $|a_n - a| \leq \varepsilon \iff a_n \in \overline{B}(a, \varepsilon) \iff$  Abstand von  $a_n$  und  $a$  ist kleiner als  $\varepsilon$

*Bemerkung.* Wenn  $a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann heißt  $(a_n)$  Nullfolge (NF). Somit  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty \iff (|a_n - a|)_{n \geq 1}$  ist Nullfolge.

**Beispiel 2.3.** (Sei stets  $n \in \mathbb{N}$ )

a) Sei  $z \in \mathbb{C}$  und  $a_n = z \forall n$ .

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow z$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wähle  $N_\varepsilon = 1$ . Sei  $n \geq N_\varepsilon = 1$ . Dann  $|a_n - z| = 0 < \varepsilon$ . □

b) Sei  $p \in \mathbb{Q}$  mit  $p > 0$  und  $a_n = n^{-p}$ , also  $(a_n) = (1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots)$ .

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (speziell für  $p = 1$ :  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wähle  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $N_\varepsilon \geq \varepsilon^{-\frac{1}{p}}$  ( $N_\varepsilon$  existiert nach Satz 1.20). Sei  $n \geq N_\varepsilon$ . Dann:

$$|a_n - 0| = n^{-p} \stackrel{1.264}{\leq} N_\varepsilon^{-p} \stackrel{1.264}{\leq} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}\right)^{-p} = \varepsilon.$$

□

c) Sei  $a_n = (-1)^n$ .

*Behauptung.* Diese Folge ist divergent.

*Beweis.* Zu zeigen:  $\forall a \in \mathbb{C} \exists \varepsilon_a > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n = n_{a,N} \geq N : |a_N - a| > \varepsilon_a$ .

1. Fall:  $a = 1$ . Wähle  $\varepsilon_1 = 1$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben. Sei  $n \geq N$  ungerade. Dann  $|a_n - a| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \varepsilon_1$ .
2. Fall:  $a = -1$  genauso.
3. Fall:  $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ . Wähle  $\varepsilon_a = \frac{1}{2} \min\{|1 - a|, |-1 - a|\} > 0$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben. Wähle  $n = N$ . Dann

$$|a_n - a| = \begin{cases} |1 - a|, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ |-1 - a|, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} > \varepsilon_a.$$

□

**Satz 2.4.** Die Folge  $(a_n)$  konvergiere gegen  $a \in \mathbb{C}$ . Dann gelten:

- a)  $(a_n)$  ist beschränkt, d.h.  $\exists M \geq 0 : |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- b) Wenn  $a_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $b \in \mathbb{C}$ , dann  $a = b$ .

*Beweis.* a) Wähle  $\varepsilon = 1$ . Nach Def. 2.2 gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| \leq 1, \forall n \geq N$

$$\begin{aligned} \implies |a_n| &= |a_n - a + a| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|, \forall n \geq N \\ \implies |a_n| &\leq \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\} =: M, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- b) Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach Voraussetzung und Def. 2.2 existieren  $N_{\varepsilon,a} \in \mathbb{N}$  und  $N_{\varepsilon,b} \in \mathbb{N}$ , sodass  $|a_n - a| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon,a}$  und  $|a_n - b| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon,b}$ . Setze  $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\}$ . Dann

$$0 \leq |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a - a_n| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon$$

(nach obiger Abschätzung). Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $|a - b| = 0$ , also  $a = b$  (siehe Satz 1.203)

□

**Beispiel 2.5.** Sei  $p \in \mathbb{Q}$  mit  $p > 0$  und  $a_n = n^p$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

*Behauptung.*  $(a_n)$  ist unbeschränkt, also divergent nach Satz 2.41

*Beweis.* Ann.: Es existiere ein  $M \geq 0$  mit  $a_n = n^p \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{1.264} n \leq M^{\frac{1}{p}} \forall n \in \mathbb{N} \implies \nexists$  Satz 1.20 □

*Bemerkung 2.6.* a) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge. Es gebe ein  $a \in \mathbb{C}$  und eine Konstante  $c > 0$ , sodass:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq c\varepsilon \quad (*)$$

*Behauptung.* Dann  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .



*Beweis.* Setze  $\eta = c\varepsilon \iff \varepsilon = \frac{\eta}{c}$ . Setze  $N_\eta = N_\varepsilon$ . Dann liefert (\*):

$$\forall \eta > 0 \exists N_\eta \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\eta : |a_n - a| \leq \eta$$

□

Vorsicht:  $c$  darf *nicht* von  $n, \varepsilon$  abhängen!

- b) Für  $n_0 \in \mathbb{Z}$  setze  $J(n_0) = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ . Eine Abbildung  $A : J(n_0) \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnet man auch als Folge. Man schreibt wieder  $a_n$  statt  $A(n)$  und  $(a_n)_{n \geq n_0}$  statt  $A$ . Die Konvergenz von  $(a_n)_{n \geq n_0}$  definiert man wie in Def. 2.2, wobei man zusätzlich  $N_\varepsilon \geq n_0$  fordert. Indem man  $b_n := a_{n+n_0-1}$  für  $n \in \mathbb{N}$  setzt, erhält man eine Folge  $(b_n)_{n \geq 1}$  mit Indexbereich  $J(n_0)$ . Offenbar konvergiert  $(a_n)_{n \geq n_0}$  genau dann, wenn  $(b_n)_{n \geq 1}$  konvergiert, und die jeweiligen Grenzwerte sind gleich. Somit können wir uns weiterhin auf den Fall  $n_0 = 1$  beschränken.

**Satz 2.7.** Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  Folgen und  $a, b \in \mathbb{C}$ . Es gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann:

- a)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  für  $n \rightarrow \infty$   
b)  $a_n \cdot b_n \rightarrow ab$  für  $n \rightarrow \infty$  (speziell  $ab_n \rightarrow ab$  für  $n \rightarrow \infty$ )  
c) Wenn  $a \neq 0$ , dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq N$  und es gilt  $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$  für  $n \rightarrow \infty$  ( $n \geq N$ ).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  (beliebig) gegeben. Nach Voraussetzung:

$$\exists N_{\varepsilon, a} \in \mathbb{N}, N_{\varepsilon, b} \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |a_n - a| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon, a} \text{ und } |b_n - b| \leq \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon, b} \quad (2.1)$$

Setze  $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon, a}, N_{\varepsilon, b}\}$ . Sei  $n \geq N_\varepsilon$ .

$$\text{a) } |a_n + b_n - (a + b)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \stackrel{(2.1)}{\leq} 2\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Bem 2.6}} \text{Beh. a)}$$

$$\text{b) } |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b + a(b_n - b)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl., 1.28}}{\leq} |a_n - a| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M \text{ nach 2.4}} + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$\stackrel{(2.1)}{\leq} (M + |a|) \cdot \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \xrightarrow{\text{Bem 2.6}} \text{Beh. b)}$$

- c) Sei  $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$  (da  $a \neq 0$ ). Sei  $N = N_{\varepsilon_0, a} \in \mathbb{N}$  aus (2.1). Dann gilt für  $n \geq N$ :

$$|a_n| = |a + a_n - a| \stackrel{1.288}{\geq} |a| - |a_n - a| \stackrel{(2.1)}{\geq} |a| - \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0 \implies \text{erste Beh.}$$

Setze  $\widetilde{N}_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, N\}$ . Sei  $n \geq \widetilde{N}_\varepsilon$ . Dann:

$$\left| \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a_n} \right| \stackrel{1.288}{=} \frac{|a - a_n|}{|a| - |a_n|} \stackrel{(2.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} \quad (\forall n \geq \widetilde{N}_\varepsilon).$$

$\implies$  Beh. c).

□

**Beispiel 2.8.**

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n}{5n^2 + 4n + i}$$

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow \frac{3}{5}$  für  $n \rightarrow \infty$

*Beweis.*

$$a_n = \frac{3 + \frac{2}{n}}{5 + \frac{4}{n} + \frac{i}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Bsp. 2.3:  $3 \rightarrow 3$ ,  $5 \rightarrow 5$ ,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Satz 2.7: Zähler  $\rightarrow 3 + 2 \cdot 0 = 3$ ,  
Nenner  $\rightarrow 5 \neq 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\xrightarrow{\text{Satz 2.73}} a_n \rightarrow \frac{3}{5}$  für  $n \rightarrow \infty$   $\square$

**Satz 2.9.** Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,  $(c_n)_{n \geq 1}$  reelle Folgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dabei sei  $a, b \in \mathbb{R}$  (dies gilt stets gemäß Satz 2.11). Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

- a) Wenn  $a_n \leq b_n$  für  $n \geq n_0$ , dann  $a \leq b$ .
- b) Wenn  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für  $n \geq n_0$  und  $a = b$ , dann  $c_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  („Sandwichprinzip“).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wie in (2.1) existiert ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \quad |b_n - b| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon \quad (*)$$

Sei  $n \geq \max\{N_\varepsilon, n_0\}$ .

a)

$$a - b = a - a_n + \underbrace{a_n - b_n}_{\leq 0 \text{ (n.V.)}} + b_n - b \leq |a - a_n| + |b - b_n| \stackrel{(*)}{\leq} 2\varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt  $a - b \leq 0$  (Wenn  $a - b > 0$  wäre, dann folgte  $\frac{1}{2}$  mit Satz 1.203)  $\implies a \leq b$ .

b)

$$|c_n - a| = \begin{cases} c_n - a \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} b_n - a \leq |b_n - a| & \text{für } c_n \geq a \\ a - c_n \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} a - a_n \leq |a_n - a| & \text{für } c_n < a \end{cases}$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon \quad \text{für } n \geq \max\{N_\varepsilon, n_0\}, \text{ da } a = b \implies c_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$\square$

**Beispiel 2.10.** *Behauptung.* Sei  $q > 0$ . Dann  $a_n := q^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
 $(a_n) = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \dots)$

*Beweis.* a) Sei zuerst  $q \geq 1$ . Dann  $a_n \geq$  nach Satz 1.264. Weiter:

$$q = a_n^n = \left(1 + \underbrace{(a_n - 1)}_{> -1}\right)^n \stackrel{\text{Bernoulli-U.}}{\geq} 1 + n(a_n - 1)$$

$$\implies 0 \leq a_n - 1 \leq \frac{q - 1}{n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(nach Bsp. 2.3, Satz 2.7)  $\implies$  nach Satz 2.92  $a_n - 1 \rightarrow 0 \implies a_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

b) Sei nun  $0 < q < 1$ . Dann  $\frac{1}{q} > 1$  und  $\frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  nach Teil a). Nach Satz 2.73  $\implies a_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{-1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . □

**Satz 2.11.** Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann:

- a) Sei zusätzlich  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gelten  $\overline{a_n} \rightarrow \overline{a}$ ,  $\operatorname{Re} a_n \rightarrow \operatorname{Re} a$ ,  $\operatorname{Im} a_n \rightarrow \operatorname{Im} a$ ,  $|a_n| \rightarrow |a|$  (jeweils für  $n \rightarrow \infty$ ). Wenn zusätzlich  $(a_n)$  reell ist, dann ist  $a \in \mathbb{R}$ .
- b) Es gelte  $\operatorname{Re} a_n \rightarrow b$  und  $\operatorname{Im} a_n \rightarrow c$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann  $a_n \rightarrow b + ic$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* a)  $0 \leq |\overline{a_n} - \overline{a}| \stackrel{1.28}{=} |\overline{a_n - a}| \stackrel{1.28}{=} |a_n - a| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Satz 2.92  $\implies |\overline{a_n} - \overline{a}| \rightarrow 0 \implies \overline{a_n} \rightarrow \overline{a}$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\implies \operatorname{Re} a_n \stackrel{1.28}{=} \frac{1}{2}(a_n + \overline{a_n}) \rightarrow \frac{1}{2}(a + \overline{a}) = \operatorname{Re} a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Entsprechend  $\operatorname{Im} a_n \rightarrow \operatorname{Im} a$  (verwende in beiden Fällen Satz 2.7).  
Ferner  $||a_n| - |a|| \stackrel{1.28}{\leq} |a_n - a| \xrightarrow{\text{n.V.}} 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Satz 2.92  $\implies |a_n| \rightarrow |a|$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wenn  $a_n \in \mathbb{R}$ , dann  $\operatorname{Im} a_n = 0 \implies \operatorname{Im} a = 0$ .

b)  $0 \leq |a_n - (b + ic)| = |(\operatorname{Re} a_n - b) + i(\operatorname{Im} a_n - c)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |\operatorname{Re} a_n - b| + |\operatorname{Im} a_n - c| \rightarrow 0$ , n. V. ( $n \rightarrow \infty$ ). Satz 2.92  $\implies$  Beh. b) □

## 2.2 Monotone Folgen

**Definition 2.12.** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine reelle Folge.

- a)  $(a_n)$  wächst (strikt), wenn  $a_{n+1} \geq a_n$  ( $a_{n+1} > a_n$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $(a_n)$  fällt (strikt), wenn  $a_{n+1} \leq a_n$  ( $a_{n+1} < a_n$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- c)  $(a_n)$  ist (strikt) monoton, wenn  $(a_n)$  (strikt) wächst oder (strikt) fällt.

*Bemerkung.*  $(a_n)$  wächst (strikt)  $\iff (-a_n)$  fällt (strikt)

**Beispiel 2.13.** a) Sei  $0 < p \in \mathbb{Q}$ . Dann fällt  $a_n = n^{-p}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) strikt, da  $(n+1)^{-p} < n^{-p}$  nach Satz 1.264.

- b)  $a_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}$  wächst strikt, da  $\frac{1}{2n+1}$  strikt fällt (vgl. a)).
- c)  $a_n = (-1)^n$  ist nicht monoton, da  $a_{n+1} = 1 > -1 = a_n$  für ungerade  $n$  und  $a_{n+1} = -1 < 1 = a_n$  für gerade  $n$ .

Standardbsp. für divergente Folgen:

- a)  $a_n = (-1)^n$  nicht monoton, aber beschränkt
- b)  $a_n = n$  monoton, aber nicht beschränkt

**Theorem 2.14.** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine reelle Folge. Dann gelten:

- a) Wenn  $(a_n)$  wächst und nach oben beschränkt ist, dann existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq 1} a_n := \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

- b) Wenn  $(a_n)$  fällt und nach unten beschränkt ist, dann existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq 1} a_n := \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

*Beweis.* a) n. V.  $\exists a := \sup_{n \geq 1} a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Satz 1.18  $\implies \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a$ . Sei  $n \geq N_\varepsilon$ . Da  $(a_n)$  wächst und  $a = \sup a_n$  gilt:

$$a - \varepsilon \leq a_{N_\varepsilon} \leq a_n \implies a_n - a \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

- b) Betrachte  $-a_n$  und verwende Teil a) und Satz 1.232

□

**Beispiel 2.15** (Heron-Verfahren zur Quadratwurzelbestimmung). Sei  $x > 0$  gegeben.

Definiere rekursiv  $a_1 = 1$  und  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$  für  $n \in \mathbb{N}$ . (Beachte:  $a_1 > 0$ . Wenn

$a_n > 0$ , dann  $a_{n+1} > 0 \xrightarrow{\text{Indukt.}} a_k > 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

*Behauptung.*  $a_n \rightarrow \sqrt{x}$  ( $n \rightarrow \infty$ )

*Beweis.* 1. Schritt: Zeige Konvergenz mit Thm. 2.14.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann

$$a_{n+1} - a_n \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{a_n}{2} + \frac{x}{2a_n} - a_n = \frac{1}{2a_n} \underbrace{(x - a_n^2)}_{>0 \text{ Vorzeichen?}} \quad (*)$$

Sei  $n \geq 2$ . Dann

$$\begin{aligned} a_n^2 - x &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{4} \left( a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}} \right)^2 - x = \frac{1}{4} \left( a_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{a_{n-1}^2} - 4x \right) - y \\ &= \frac{1}{4} \left( a_{n+1} - \frac{x}{a_{n-1}} \right)^2 \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{\underset{(**)}{\implies}} a_{n+1} - a_n \leq 0 \text{ und } a_n^2 \geq x \stackrel{1.26}{\implies} a_n \geq \sqrt{x} \text{ (für } n \geq 2).$$

Thm. 2.14  $\implies \exists a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Schritt: Berechne  $a$  mit Hilfe der Rekursion. Satz 2.9:  $a \geq \sqrt{x} > 0$ .

Ferner:  $\underbrace{a_{n+1}}_{\rightarrow a} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right)}_{\rightarrow \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right)}$  für  $n \rightarrow \infty$  (nach Satz 2.7,  $a \neq 0$ ). Nach Satz 2.4:

$$a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{x}{a} \right) \iff a = \frac{x}{a} \iff x = a^2 \stackrel{a>0}{\iff} a = \sqrt{x}$$

□

**Beispiel 2.16** (Die EULERSche Zahl  $e$ ). Sei  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad b_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!}$$

*Behauptung.*  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: e \approx 2,71828 \dots$

*Beweis.* Überblick:

Beh. a)  $(a_n)$  wächst strikt

Beh. b)  $a_n \leq b_n < 3 \forall n \in \mathbb{N}$

$$\implies \begin{cases} \text{a) + b) + Thm. 2.14} & \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b \\ \text{b) + Satz 2.9 1} & \implies a \leq b \end{cases} \quad (*)$$

Beh. c)  $a \geq b$

Beachte:  $(b_n)$  wächst strikt.

$\implies$  Beh.

a) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \frac{\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \left( \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \frac{n+2}{n+1} \left( \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \right)^n \\ &= \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{>0} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{(1+n)^2} \right)^n}_{>-1} \stackrel{1.8}{\geq} \frac{n+2}{n+1} \left( 1 - \frac{n}{(1+n)^2} \right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1+n+n^2}{(1+n)} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{(1+n)^3} \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1 \end{aligned}$$

$(b_n)$  wächst offensichtlich

b)

$$a_n \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j$$

Für  $1 \leq j \leq n$  ist

$$\binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} \cdot \frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\in(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\in(0,1)} \cdots \underbrace{\frac{n-j+1}{n}}_{\in(0,1)} \leq \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{2^{j-1}} \quad (+)$$

*Behauptung.*  $2^{n-1} \leq n! \forall n \in \mathbb{N}$

*Beweis.* (per vollst. Ind.)

IA:  $n = 1$  ist klar.

IS: Beh. gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

$$\Rightarrow 2^n \stackrel{\text{IV}}{\leq} 2n! \leq (n+1)n! = (n+1)! \quad \square$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= 1 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \stackrel{(+)}{\leq} 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} = b_n \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j-1}} \stackrel{k:=j-1}{=} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \stackrel{0.2}{=} 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

c) Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $n \geq m$ ,  $m$  fest. Wie in b):

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{1}{j!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-j+1}{n}}_{>0} \\ &\geq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1(n \rightarrow \infty)} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1(n \rightarrow \infty)} =: c_{mn} \quad (++) \end{aligned}$$

nach Bsp. 2.3, Satz 2.7  $\Rightarrow c_{mn} \rightarrow 1 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} = b_m$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  $m$  fest. Lasse

$n \rightarrow \infty$  gehen in  $(++)$ . Dann liefern  $(*)$  und Satz 2.9, dass  $a \geq b_m$  für  $m \in \mathbb{N}$ . Mit  $m \rightarrow \infty$ ,  $(*)$ , Satz 2.9 folgt  $a \geq b$ .

$\square$

## 2.3 Teilfolgen und Vollständigkeit

**Motivation.**  $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$  ist divergent, enthält aber konvergente „Teile“.

**Definition 2.17.** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge und  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine strikt wachsende Funktion (d.h.  $\varphi(n+1) > \varphi(n) \forall n \in \mathbb{N}$ ). Setze  $b_j = a_{\varphi(j)}, j \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die Folge  $(b_j)_{j \geq 1}$  *Teilfolge* von  $(a_n)_{n \geq 1}$  (TF). Man schreibt meist  $(a_{n_j})_{j \geq 1}$  statt  $(b_j)_{j \geq 1}$ .

**Beispiel.** a)  $(a_n)$  ist Teilfolge von sich selbst, wähle  $\varphi(j) = j \forall j \in \mathbb{N}$

b) Sei  $a_n = (-1)^n$ . Wähle  $\varphi(j) = 2j$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $b_j := a_{2j} = 1 \forall j \in \mathbb{N}$ .

c) Sei

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{wenn } n \text{ Primzahl} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, n \in \mathbb{N}. (a_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, 1, \frac{1}{25}, 1, \dots)$$

Setze  $\varphi(j) = j\text{-te Primzahl}, j \in \mathbb{N}. \implies (b_j) = (a_{\varphi(j)}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \dots)$

*Bemerkung.*  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty) \implies a_{n_j} \rightarrow a (j \rightarrow \infty)$  für jede Teilfolge.

**Definition 2.18.** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann heißt  $a$  *Häufungspunkt* (HP) von  $(a_n)$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  für unendlich viele  $n$  die Ungleichung  $|a - a_n| \leq \varepsilon$  gilt.

**Beispiel.** a)  $(-1)^n$  hat HP  $+1$  und  $-1$ , da  $a_n \in \overline{B}(1, \varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$  und alle geraden  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $a_n \in \overline{B}(-1, \varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$  und alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Die Folge  $a_n = n$  hat keinen HP, da  $|a_n - a_m| \geq 1, n \neq m$ . Also liegt in einer Kugel  $\overline{B}(a, \frac{1}{3})$  höchstens ein  $a_n$ .

**Satz 2.19.** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$a \text{ ist HP} \iff \exists \text{ TF mit } a_{n_j} \rightarrow a (j \rightarrow \infty)$$

*Beweis.* „ $\implies$ “ Sei  $a$  HP. Wir definieren rekursiv eine TF  $(a_{n_j})$  mit  $|a - a_{n_j}| \leq \frac{1}{j} \forall j \in \mathbb{N}$ .  $\implies a_{n_j} \rightarrow a$  nach Satz 2.9 (für  $j \rightarrow \infty$ ). Wähle  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n_1} - a| \leq 1$  (verwende Voraussetzung mit  $\varepsilon = 1$ ). Sei  $n_{j-1}$  mit  $n_{j-1} > n_{j-2}$  und  $|a_{n_{j-1}} - a| \leq \frac{1}{j-1}$  gewählt. Nach Voraussetzung gibt es unendlich viele  $a_n$  in  $\overline{B}(a, \frac{1}{j})$ . Da  $\{1, \dots, n_{j-1}\}$  endlich ist, existiert ein  $n_j > n_{j-1}$  mit  $|a_{n_j} - a| \leq \frac{1}{j}$ . Induktionsprinzip liefert gewünschte TF  $a_{n_j} \rightarrow a$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $a_{n_j} \rightarrow a (j \rightarrow \infty)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Dann  $\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall j \geq J_\varepsilon : |a_{n_j} - a| \leq \varepsilon$ . Also  $\#\{a_{n_j} : j \geq J_\varepsilon\} = \#\{j \in \mathbb{N} : j \geq J_\varepsilon\} = \infty$  nach Satz 1.22.  $\square$

**Korollar 2.20.** Wenn  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , dann ist  $a$  der einzige Häufungspunkt von  $(a_n)$ .

*Beweis.* Satz 2.19  $\implies a$  ist HP, da es der Limes ist. Sei  $b$  ein weiterer HP von  $(a_n)$ . Nach Satz 2.19  $\exists$  TF  $a_{n_j} \rightarrow b$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Dann gilt aber auch  $a_{n_j} \rightarrow a$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Satz 2.4  $\implies a = b$ .  $\square$

Sei  $(a_n)$  eine reelle beschränkte Folge. Setze  $A_n = \{a_j : j \geq n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Beachte  $A_{n+1} \subset A_n$ ,  $A_n$  ist beschränkt für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\implies \exists b_n := \sup A_n, c_n := \inf A_n, \text{ wobei } b_n \geq a_j \geq c_n \forall j \geq n \quad (2.2)$$

Satz 1.231a liefert  $b_1 \geq b_n \geq b_{n+1} \geq c_{n+1} \geq c_n \geq c_1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ . Nach Thm. 2.14 existieren

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} a_j =: \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ („Limes superior“)} \\ \text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \sup_{n \in \mathbb{N}} c_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq n} a_j =: \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ („Limes inferior“)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.2), Satz 2.9  $\implies$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (2.4)$$

**Beispiel.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$ , da in  $A_n$  nur  $+1$  und  $-1$  stehen.

**Theorem 2.21** (Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS). *Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  hat eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt. Wenn die Folge außerdem reell ist, dann ist  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  das Maximum aller Häufungspunkte und  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  das Minimum aller Häufungspunkte.*

*Beweis.* a) Sei  $(a_n)$  reell und beschränkt. Setze  $\bar{a} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Suche TF  $a_{n_j} \rightarrow \bar{a}$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Wir wissen aus (2.2) und (2.3):  $b_n = \sup_{j \geq n} a_j$  konvergiert gegen  $\bar{a}$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $b_n$  muss nicht ein Folgenglied sein.

Definiere rekursiv die gewünschte TF  $(a_{n_j})$ : wähle  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|\bar{a} - b_{N_1}| \leq \frac{1}{2}$ . Da  $b_{N_1} = \sup_{j \geq N_1} a_j$  ist, existiert nach Satz 1.18 ein  $n_1 > N_1$  mit  $|b_{N_1} - a_{n_1}| \leq \frac{1}{2} \implies |\bar{a} - a_{n_1}| \leq |\bar{a} - b_{N_1}| + |b_{N_1} - a_{n_1}| \leq 1$ . Es  $n_{j-1} > n_{j-2}$  konstruiert mit  $|\bar{a} - a_{n_{j-1}}| \leq \frac{1}{j-1}$ . Wähle  $N_j > n_{j-1}$  mit  $|\bar{a} - b_{N_j}| \leq \frac{1}{2j}$  (verwende (2.3)). Da  $b_{N_j} = \sup_{k \geq N_j} a_k$  existiert nach Satz 1.18 ein  $n_j \geq N_j > n_{j-1}$  mit  $|b_{N_j} - a_{n_j}| \leq \frac{1}{2j} \implies |\bar{a} - a_{n_j}| \leq |\bar{a} - b_{N_j}| + |b_{N_j} - a_{n_j}| \leq \frac{1}{j}$ . Erhalten induktiv TF  $a_{n_j} \rightarrow \bar{a}$ . Insbesondere ist  $\bar{a}$  ein HP von  $(a_n)$  nach Satz 2.19. Entsprechend sieht man, dass  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  ist ein HP von  $(a_n)$ . Sei  $(a_{n_l})$  eine weitere TF mit Grenzwert  $a$ .

$$\begin{array}{c} \xrightarrow[2.19]{(2.2)} \\ \underbrace{c_{n_l}}_{\rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} \leq \underbrace{a_{n_l}}_{\rightarrow a} \leq \underbrace{b_{n_l}}_{\rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} \end{array}$$

b) Sei  $(a_n)$  eine beschränkte Folge (in  $\mathbb{C}$ ). Sei  $x_n = \operatorname{Re} a_n$ ,  $y_n = \operatorname{Im} a_n$ . Dann ist (nach Satz 1.28)  $(x_n)_n$  beschränkt  $\xrightarrow{a)} \exists$  TF  $x_{n_l} \rightarrow x \in \mathbb{R}$  ( $l \rightarrow \infty$ ). Weiter ist  $(y_{n_l})_l$  beschränkt  $\xrightarrow{a)} \exists$  TF  $y_{n_{l_j}} \rightarrow y \in \mathbb{R}$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Damit gilt:

$$a_{n_{l_j}} = x_{n_{l_j}} + iy_{n_{l_j}} \rightarrow x + iy \quad (j \rightarrow \infty).$$

$\square$



**Lemma 2.22.** Sei  $(a_n)$  eine Folge mit den Häufungspunkten  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  und den zugehörigen Teilfolgen  $a_{\varphi_1(j)} \rightarrow \alpha_1, \dots, a_{\varphi_m(j)} \rightarrow \alpha_m$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Jedes  $a_n$  liege in (mindestens) einer Teilfolge. Dann hat  $(a_n)$  keine weiteren Häufungspunkte.

*Beweis.* Annahme: Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  ein weiterer HP. Satz 2.19  $\implies \exists$  TF  $a_{n_l} \rightarrow \alpha$  ( $l \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \min \{|\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \dots, |\alpha - \alpha_m|\} > 0$ . Ferner existiert  $L \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{n_l} - \alpha| \leq \varepsilon_0 \forall l \geq L$ .  $\implies$  Für  $l \geq L$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  gilt  $|a_{n_l} - \alpha_j| \geq |\alpha_j - \alpha| - |\alpha - a_{n_l}| \geq 3\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 \implies a_{n_l} \notin B(\alpha_j, \varepsilon_0) \forall l \geq L, j \in \{1, \dots, m\}$ . Andererseits liegen die  $a_{n_l}$  in mindestens einer TF die gegen ein  $\alpha_j$  konvergiert  $\implies \nexists$   $\square$

**Beispiel 2.23.**

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n} & , n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2n^2 + 3}{3n^2 - 1} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\exists$  konv. TF:

$$\begin{aligned} b_k &= a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{2k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \\ c_k &= a_{4k+1} = \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{=-1} \cdot \frac{2(4k+1)^2 + 3}{3(4k+1)^2 - 1} \rightarrow -\frac{2}{3} \quad (k \rightarrow \infty) \\ d_k &= a_{4k+3} = \underbrace{(-1)^{2k+2}}_{=1} \cdot \frac{2(4k+3)^2 + 3}{3(4k+3)^2 - 1} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$\implies \exists$  HP  $-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}$ . Nach Lemma 2.22 sind das alle HP der Folge.  
 $\xrightarrow{2.21} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{2}{3}$ .

**Korollar 2.24.** Sei  $(a_n)$  beschränkt und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann gelten:

- a)  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\iff (a_n)$  besitzt genau einen HP und dieser ist  $a$
- b) Sei  $(a_n)$  reell. Dann konvergiert  $(a_n)$  genau dann, wenn  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
In diesem Fall gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Beweis.* a) „ $\implies$ “ Kor. 2.20.

„ $\impliedby$ “ Sei  $a$  der einzige HP von  $(a_n)$ . Annahme:  $a_n \not\rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Das heißt  $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - a| > \varepsilon_0$ . Wir erhalten induktiv eine TF  $(a_{n_l})_l$  mit  $|a_{n_l} - a| > \varepsilon_0 \forall l \in \mathbb{N}$  (vgl. Beweis von Satz 2.19). Andererseits: Da  $(a_{n_l})_l$  beschränkt ist, liefert Thm. 2.21 eine konvergente TF  $(a_{n_{l_j}})_j$ . Nach Satz 2.19 und der Voraussetzung gilt  $a_{n_{l_j}} \rightarrow a \nexists$

- b) Sei nun  $(a_n)$  reell. Dann zeigt Thm. 2.21  $\exists!$  HP von  $(a_n)$   $\iff \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \xrightarrow{a)} \text{Beh.}$

$\square$

*Bemerkung.*

$$a_n = \begin{cases} 1 & , n \text{ gerade,} \\ n & , n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

hat genau einen HP ( $= 1$ ), ist aber unbeschränkt, also divergent.

$\implies$  in 2.24 muss man Beschränktheit voraussetzen!

**Definition 2.25.** Eine Folge  $(a_n)$  heißt *CAUCHY-Folge* (CF), wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

**Theorem 2.26.** Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist. (Man sagt, dass  $\mathbb{C}$  (und damit  $\mathbb{R}$ ) vollständig sind.)

*Beweis.* „ $\implies$ “ Sei  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Für  $\varepsilon > 0$  existiert also ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|a_k - a| \leq \varepsilon$  für alle  $k \geq N_\varepsilon$ . Damit  $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq 2\varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $(a_n)$  eine CF. Nach Def. 2.25 mit  $\varepsilon = 1$  existiert ein  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a_{N_1}| \leq 1$  für alle  $n \geq N_1$ .  $\implies |a_n| \leq |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1}| \leq 1 + |a_{N_1}|$  ( $\forall n \geq N_1$ )  $\implies (a_n)$  ist beschränkt. Thm 2.21  $\implies$  existiert TF  $a_{n_j} \rightarrow a$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert ein  $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_{n_j} - a| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq J_\varepsilon \quad (*)$$

Sei ferner  $N_\varepsilon$  aus Def. 2.25. Wähle  $n \geq N_\varepsilon$ . Dann existiert ein  $n_j \geq N_\varepsilon$  mit  $j \geq J_\varepsilon$ .

$$\text{Somit } |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| \stackrel{2.25, (*)}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

*Bemerkung.* a) CAUCHY-Folgen haben also (in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ ) dieselben Eigenschaften wie konvergente Folgen (kann man auch direkt zeigen).

b) In Bsp. 2.15 mit  $x = 2$  und  $a_1 = 1$  ist  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \in \mathbb{Q}$  (Beweis per Induktion). Ferner gilt  $a_n \rightarrow \sqrt{2}$ . Nach Bsp 1.16 gilt  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \implies \mathbb{Q}$  ist nicht vollständig

c) Bsp.  $a_n = \sqrt{a_n}$ . Folge ist unbeschränkt  $\implies$  divergent  $\implies$  keine CF. Andererseits:  $0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Also: Def 2.25 gilt für  $m = n+1$ , aber  $(a_n)$  ist keine CAUCHY-Folge.

**Lemma 2.27.** Sei  $(a_n)$  eine beschränkte und reelle Folge und  $\varepsilon > 0$ . Dann

$$\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ mit } -\varepsilon + \varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_j \leq \varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \forall j \geq J_\varepsilon.$$

*Beweis.* Nach Satz 1.18  $\exists \overline{J}_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$\varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{2.3}{=} \varepsilon + \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} a_j \stackrel{1.18}{\geq} \sup_{j \geq \overline{J}_\varepsilon} a_j \geq a_j \quad \forall j \geq \overline{J}_\varepsilon.$$

Entsprechend:  $\exists \underline{J}_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $a_j \geq -\varepsilon + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \forall j \geq \underline{J}_\varepsilon \implies$  Beh. mit  $J_\varepsilon = \max \{\overline{J}_\varepsilon, \underline{J}_\varepsilon\}$ .  $\square$

**Satz 2.28.** Seien  $(a_n), (b_n)$  beschränkte reelle Folgen. Dann gelten:

a)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$$

b) Wenn  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

c)

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

d) Seien  $a_n, b_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

e) Wenn in 3 oder 4 eine der beiden Folgen konvergiert, dann gilt „=“ in den Aussagen.

*Bemerkung.* In 3 oder 4 kann „<“ bzw. „>“ gelten. Bsp.:  $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1} \implies a_n + b_n = 0 \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$

*Beweis.* a)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{(2.3)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq n} a_j \stackrel{1.23}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} (-\sup_{j \geq n} (-a_j)) \stackrel{1.23}{=} - \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} (-a_j) \stackrel{(2.3)}{=} - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$$

b) Sei  $a_j \leq b_j \quad \forall j$ . Nach Def. ?? des Supremums  $\sup_{j \geq n} a_j \leq \sup_{j \geq n} b_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Def. des Infimums liefert

$$\underbrace{\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} a_j}_{= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n} \leq \underbrace{\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} b_j}_{= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

c) Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Lemma 1.18  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass

$$a_j \leq \varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, b_j \leq \varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \forall j \geq N_\varepsilon.$$

$$\implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \stackrel{\text{Def.}}{\leq} \sup_{j \geq N_\varepsilon} (a_j + b_j) \geq 2\varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt Beh. c1).  
Andere Behauptungen zeigt man ähnlich. □

# 3 Reihen

**Ziel.** Untersuche „unendliche Summen“  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  für eine gegebene Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

## 3.1 Konvergenzkriterien

**Definition 3.1.** Sei  $(a_j)_{j \geq 0}$  gegeben und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann heißt

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j$$

$n$ -te *Partialsumme* und die Folge  $(s_n)_{n \geq 0}$  heißt *Reihe*. Man schreibt statt  $(s_n) \sum_{j \geq 0} a_j$  (oder  $\sum_j a_j$  oder  $\sum a_j$ ).

Die Reihe *konvergiert* (bzw. *divergiert*), wenn  $(s_n)_{n \geq 0}$  konvergiert (bzw. divergiert).

Wenn Konvergenz vorliegt, dann bezeichnet man den Grenzwert von  $(s_n)$  mit  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  („Reihenwert“).

**Beispiel 3.2.** a) Sei  $a_j = \frac{1}{j!}$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ).

$$\Rightarrow s_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty), \text{ nach Bsp. 2.16.}$$

$$\Rightarrow \exists \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

b) Geometrische Reihe: Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$ ,  $a_j = z^j$ .

$$(\text{Also } s_n = \sum_{j=0}^n z^j, (s_n) = 1, 1+z, 1+z+z^2, \dots)$$

$$\text{Bsp. 0.2: } \sum_{j=0}^n z^j = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{n+1}}{1 - z}, \text{ Übung: } z^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\Rightarrow \exists \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

Anderer Beweis: Sei  $|z| < 1$ . Setze  $b_n = |z^{n+1}| = |z|^{n+1}$ .

Dann:  $0 \leq b_{n+1} = |z| \cdot b_n \leq b_n$ .

Thm 2.14:  $\exists b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$ . Ferner folgt mit  $n \rightarrow \infty$ :

$$0 \leq b = |z| \cdot b \xrightarrow{|z| < 1} b = 0.$$

c) Sei  $a_j = \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_n &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \exists \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1. \end{aligned}$$

d) Harmonische Reihe: Sei  $a_j = \frac{1}{j}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Behauptung:*  $s_{2j} \geq 1 + \frac{j}{2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ .

$\Rightarrow (s_n)$  unbeschränkt.

$\Rightarrow (s_n)$  divergiert, also  $\sum \frac{1}{j}$  divergiert.

*Beweis.* (IA)  $j = 1$ .

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$$

(IS): Es gelte:  $s_{2j} \geq 1 + \frac{j}{2}$  für ein  $j \in \mathbb{N}$  (IV).

$$\text{Dann: } s_{2^{j+1}} = \sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \stackrel{(IV)}{\geq} 1 + \frac{j}{2} + \frac{2^j}{2^{j+1}} = 1 + \frac{j+1}{2}$$

(da in zweiter Summe  $k \leq 2^{j+1}$ ). □

e) Sei  $a_j = (-1)^j$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$s_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j = \begin{cases} 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1, & n \text{ ungerade} \\ 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1 + 1, & n \text{ gerade} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\implies (s_n)_n$  hat 2 verschiedene HP, 0 und 1.

Kor. 2.24  $\implies (s_n)$  divergiert, d.h. Reihe divergiert.

*Bemerkung.* Man definiert und behandelt Reihen, die bei  $k_0 \in \mathbb{Z}$  beginnen (statt  $k_0 = 0$  in Def. 3.1) genauso.

**Satz 3.3.** Seien  $\sum a_k, \sum b_k$  konvergente Reihen und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$\exists \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

*Beweis.*  $\sum_{j=0}^n (\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=0}^n a_j + \beta \sum_{j=0}^n b_j \longrightarrow \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \beta \sum_{j=0}^{\infty} b_j \quad (n \rightarrow \infty)$   
(nach Voraussetzung und Satz 2.7). □

**Satz 3.4.** Sei  $a_j \geq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und die Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  seien beschränkt. Dann:

$$\exists \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sup s_n.$$

*Beweis.* Es gilt  $s_{n+1} - s_n = \sum_{j=0}^{n+1} a_j - \sum_{j=0}^n a_j = a_{n+1} \geq 0 \implies (s_n)$  wächst.

Da  $(s_n)$  beschränkt, folgt Beh. aus Thm. 2.14. □

**Satz 3.5 (CAUCHY-Kriterium).** Sei  $(a_j)_{j \geq 0}$  gegeben.

Die Reihe  $\sum_j a_j$  konvergiert genau dann, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > m \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{j=n+1}^n a_j \right|. \quad (3.1)$$

*Beweis.*  $\sum a_j$  konvergiert  $\xLeftrightarrow{\text{Thm. 2.26}} (s_n)_n = \left( \sum_{j=0}^n a_j \right)_n$  ist CF.

$$\xLeftrightarrow{\text{Def. 2.25}} \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > m \geq N_\varepsilon : \varepsilon \geq |s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right|. \quad \square$$

**Korollar 3.6.** Wenn  $\sum a_j$  konvergiert, dann gilt  $a_j \longrightarrow 0$  für  $(j \rightarrow \infty)$ .

*Bemerkung.* Umkehrung ist falsch!  $\frac{1}{j} \longrightarrow 0$ , aber  $\sum \frac{1}{j}$  divergiert.

*Beweis des Korollars.* Wähle in (3.1)  $n = m + 1 > N_\varepsilon$  und erhalte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m \geq N_\varepsilon : |a_{m+1}| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Beispiel 3.7.** Für  $|z| \geq 1$  ist  $\sum_{j \geq 0} z^j$  divergent, da dann  $|z^j| = |z|^j \geq 1$  keine Nullfolge (NF). (Spezialfall:  $z = -1$ , schon im Bsp. 3.25 behandelt.)

**Satz 3.8** (LEIBNIZ-Kriterium). Sei  $b_k \geq b_{k+1} \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $b_k \rightarrow 0$  für  $(k \rightarrow \infty)$ . Dann:

$$\exists \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k.$$

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= \sum_{j=0}^{2n+2} (-1)^j b_j - \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j b_j \\ &= (-1)^{2n+2} b_{2n+2} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} \\ &= b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0 \text{ n.V.} \\ &\implies (s_n)_n \text{ fällt.} \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} - s_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} b_{2n+3} + (-1)^{2n+2} b_{2n+2} \\ &= -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0 \text{ n.V.} \\ &\implies (s_{2n+1})_n \text{ wächst.} \end{aligned}$$

Damit:  $s_1 \leq s_{2n+1} = \underbrace{(-1)^{2n+1} b_{2n+1}}_{\leq 0} + s_{2n} \leq s_{2n} \leq s_2$ .

$\implies (s_{2n})_n, (s_{2n+1})_n$  sind beschränkt.

Thm. 2.14  $\implies \exists s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}, t = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$ .

Ferner:  $t - s = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = 0$  (weil

$$|(-1)^{2n+1} b_{2n+1}| = b_{2n+1} \rightarrow 0$$

nach Voraus.).

Lemma 2.22  $\implies s = t$  ist einziger HP von  $(s_n)_n$ . Nach Kor. 2.24 konvergiert  $(s_n)$ .  $\square$

**Beispiel 3.9.**  $\exists \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} [\stackrel{!}{=} -\ln 2]$ . Denn:  $b_k = \frac{1}{k}$  ist fallende NF („alternierende Reihe“).

Beachte:  $\sum_k |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_k \frac{1}{k}$  divergiert nach Bsp. 3.2.

**Definition 3.10.** Eine Reihe  $\sum a_k$  konvergiert absolut, wenn die Reihe  $\sum_k |a_k|$  der Beträge konvergiert.

*Bemerkung 3.11.* a) Konv.  $\nRightarrow$  absolute Konvergenz (siehe Bsp. 3.9).

b)  $a_k \geq 0$ : Konvergenz = absolute Konvergenz.

c) absolute Konvergenz  $\implies$  Konvergenz.



*Beweis.* Nach Satz 3.5 und der absoluten Konvergenz gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ .

$$\forall n > m \geq N_\varepsilon : \varepsilon \geq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \stackrel{3.5}{\implies} \text{Beh.}$$

□

**Satz 3.12** (Majorantenkriterium). *Gegeben seien  $a_k, b_k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann:*

a) *Wenn  $0 \leq |a_k| \leq |b_k| \forall k \in \mathbb{N}_0$  und  $\sum_k b_k$  konvergiert, dann konvergiert  $\sum a_k$  absolut und*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

b) *Wenn  $a_k \geq b_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$  und  $\sum b_k$  divergiert, dann divergiert  $\sum a_k$ .*

*Beweis.* a)  $\sum_{j=0}^n |a_j| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=0}^n b_j \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$

Satz 3.4  $\implies \exists \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$

b) *Annahme:  $\sum a_k$  konvergiere  $\implies \sum b_k$  konvergiert  $\nleftrightarrow$  Voraussetzung in 2.*  
 $\implies$  Beh. 2.

□

**Beispiel 3.13.** *Beh.* Sei  $p \in \mathbb{Q}$ . Dann konvergiert  $\sum_{k \geq 1} k^{-p}$  für  $p \geq 2$  und divergiert für  $p \leq 1$ .

*Beweis.*  $p = 2$ : Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann  $k(k+1) \leq 2k^2 \implies \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} = b_k$

Bsp. 3.2, Satz 3.4  $\implies \exists \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 2$ . Satz 3.121  $\implies \exists \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ .

Sei  $p > 2$ :  $k^p = \underbrace{k^{p-2}}_{\geq 1_{p-2}=1} k^2 \geq k^2 \implies \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2} \stackrel{3.121}{\implies} \exists \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Sei  $p \leq 1$ : Dann:  $k^p = \underbrace{k^{p-1}}_{\leq 1} k \leq k \implies \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^p}$ . Bsp. 3.2:  $\sum \frac{1}{k} \text{ div. } \stackrel{3.121}{\implies} \sum \frac{1}{k^p} \text{ div. } \quad \square$

**Satz 3.14** (Quotientenkriterium). *Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$ , sodass es ein  $k_0 \geq 0$  gibt mit  $a_k \neq 0$  für  $k \geq k_0$  und sodass  $\left( \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \right)_{k \geq k_0}$  beschränkt sei. Dann gelten:*

a)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \implies \sum_k a_k \text{ konvergiert absolut.}$

$$b) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \implies \sum_k a_k \text{ divergiert.}$$

*Beweis.* a) Wähle  $\varepsilon > 0$ , sodass  $q = \varepsilon + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ .

Nach Lemma 2.27  $\implies \exists K \in \mathbb{N} : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$  für alle  $k \geq K$ , wobei  $K \geq k_0$ .

Sei  $k \geq K$ . Dann:

$$|a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k| \leq q^2 |a_{k-1}| \leq \dots \leq q^{k-K+1} |a_K|.$$

$$\text{Bsp 3.2: } \exists \sum_{k=K}^{\infty} q^{k-K+1} \xrightarrow{3.121} \exists \sum_{k=K}^{\infty} |a_{k+1}| \implies \exists \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ (da } q < 1\text{)}.$$

b) Ähnlich:  $\exists K \geq k_0$  mit  $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$  für alle  $k \geq K$ .

$$\implies |a_j| \geq |a_k| \neq 0 \quad \forall j \geq K$$

$$\implies (a_k)_k \text{ ist keine Nullfolge} \xrightarrow{3.6} \sum a_k \text{ divergiert.}$$

□

**Beispiel 3.15.** a) Sei  $z \in \mathbb{C}$  und  $a_k = \frac{z^k}{k!}$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ). Damit:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{z^k}{k!} \right|} = \frac{z^{k+1} k!}{(k+1)! |z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\xrightarrow{3.141} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ konvergiert absolut } \forall z \in \mathbb{C}.$$

b) Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq 1 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ , (\*) dann ist in 3.14 keine allgemeine Aussage möglich, denn (vgl. Bsp. 3.13):

a)  $a_k = \frac{1}{k}$ . Dann  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k}{k+1} \longrightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) \implies (*)$  gilt, also  $\sum \frac{1}{k}$  divergiert.

b)  $a_k = \frac{1}{k^2}$ . Dann  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \longrightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty) \implies (*)$  gilt, aber  $\sum \frac{1}{k^2}$  konvergiert.

**Satz 3.16** (Wurzelkriterium). Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  eine Folge, sodass  $\left( \sqrt[k]{|a_k|} \right)_{k \geq 0}$  beschränkt ist. Dann:

$$a) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \implies \sum a_k \text{ konvergiert absolut.}$$

$$b) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies \sum a_k \text{ divergiert.}$$

*Beweis.* a) Wähle  $q \in \left( \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}, 1 \right)$ .

$$\text{Lemma 2.27} \implies \exists K \in \mathbb{N} : |a_k|^{\frac{1}{K}} \leq q, \forall k \geq K \implies |a_k| \leq q^K (\forall k \geq K).$$

$$q < 1 : \text{Bsp. 3.2} \implies \exists \sum_{k=0}^{\infty} q^k \xrightarrow{3.141} \exists \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

b) Nach Voraussetzung  $\exists$  TF mit  $|a_{kj}|^{\frac{1}{k_j}} \geq 1 (\forall j)$ .

$$\implies |a_{kj}| \geq 1 (\forall j \in \mathbb{N}) \implies (a_k)_k \text{ ist keine NF.} \xrightarrow{3.6} \sum a_k \text{ divergiert.}$$

□

**Beispiel 3.17.** a) Sei  $a_k = 2^k z^k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und ein festes  $z \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = (2^k |z|^k)^{\frac{1}{k}} = 2|z| \begin{cases} < 1, & |z| < \frac{1}{2} \\ > 1, & |z| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Satz 3.16  $\implies \sum_{k \geq 0} 2^k z^k$  konvergiert absolut wenn  $|z| < \frac{1}{2}$  und divergiert, wenn  $|z| > \frac{1}{2}$ .

b) Es ist keine allgemeine Aussage in 3.16 möglich, wenn  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ . (Gleiches Beispiel wie in Bsp. 3.152).

## 3.2 Einige Vertiefungen/Vermischtes

**Beispiel 3.18** (Dezimaldarstellung). Sei  $r \in \mathbb{R}$ . Setze  $m := \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq r\} =: [r]$  („Gaußklammer“).  $\implies x := r - m \in [0, 1) \implies \exists! x_1 \in \{0, \dots, 9\}$  mit  $x_1 \cdot 10^{-1} \leq x < (x_1 + 1) \cdot 10^{-1}$ . Induktiv findet man für jedes  $n$  eine „Ziffer“  $x_n \in \{0, \dots, 9\}$  mit

$$x_n \cdot 10^{-n} \leq x - x_1 \cdot 10^{-1} - \dots - x_{n-1} \cdot 10^{-(n-1)} \leq (x_n + 1) \cdot 10^{-n}$$

$$\implies 0 \leq x - \sum_{j=1}^n x_j 10^{-j} < 10^{-n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exists x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 10^{-j} \text{ und } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( m + \sum_{j=1}^n x_j 10^{-j} \right)}_{\in \mathbb{Q}} = m + \sum_{j=0}^{\infty} x_j 10^{-j}.$$

Schreibweise:  $r = m, x_1 x_2 x_3 \dots$

Frage: Hat  $r$  genau eine solche Darstellung?

Problem: Sei  $x_k = 9$  für alle  $k \geq l + 1$  und  $x_l < 9$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ , also

$$r = m, x_1 \dots x_l 9999 \dots \quad (*)$$

Beachte

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{10} \right)^k - \sum_{k=0}^l \left( \frac{1}{10} \right)^k \right) \\ \stackrel{0.2,3.2}{=} 9 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1 - 10^{-(l+1)}}{1 - \frac{1}{10}} \right) = 9 \frac{10^{-l-1}}{\frac{9}{10}} = 10^{-l}$$

$r$  hat also zwei verschiedene Darstellungen, nämlich  $(*)$  und

$$r = m + \sum_{k=1}^{l-1} x_k 10^{-k} + (x_l + 1) 10^{-l} = m, x_1 \dots x_{l-1} (x_l + 1) \quad (**)$$

Man verwendet  $(**)$  statt  $(*)$ . Also setzt man

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k & , k = 1, \dots, l-1 \\ x_l + 1 & , k = l \\ 0 & , k > l \end{cases}$$

und verwendet  $\tilde{x}_k$  statt  $x_k$ . Entsprechend schreibt man statt  $r = m,999 \dots$  nun  $r = m+1$ . *Behauptung.* Mit dieser Vereinbarung hat jedes  $r \in \mathbb{R}$  genau eine Dezimaldarstellung  $r = m, x_1 x_2 \dots$ . Umgekehrt definiert jede Folge  $(x_k)_{k \geq 1}$  mit  $x_k \in \{0, \dots, 9\}$  ein  $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 10^{-k} \in [0, 1]$ .

*Beweis.* siehe Amann/Escher, Thm. II 7.11 □

*Bemerkung.* Hier kann man 10 durch jedes  $b \in \mathbb{N}$  mit  $b \geq 2$  ersetzen. Dann gilt  $x_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ .

*Beachte.* Wir haben gezeigt:  $\forall r \in \mathbb{R} \exists q_n \in \mathbb{Q} : q_n \rightarrow r \ (n \rightarrow \infty)$ .

**Definition 3.19** (CANTOR). Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist.  $M$  heißt *überabzählbar*, wenn  $M$  weder abzählbar unendlich noch endlich ist.

*Bemerkung.* Wenn  $M$  abzählbar unendlich ist, dann setze  $x_n = \varphi^{-1}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wenn  $\varphi$  bijektive Abbildung  $m \rightarrow \mathbb{N}$  ist, und schreibe  $M = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  als Folge.

**Beispiel 3.20.** a) *Behauptung.*  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar unendlich.

*Beweis.* Betrachte

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

zeige:  $\varphi$  ist bijektiv

TODO hier scheint in meinen Mitschrieb was zu fehlen... □

b) *Behauptung.*  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.

*Beweis.* Schreibe  $\mathbb{Q}$  in einem Schema (streiche ungekürzte Brüche).

TODO

$\rightsquigarrow$  Bild für Bijektion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

$\implies \mathbb{Q}$  ist abzählbar, d.h. mit  $q_n = \varphi(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\mathbb{Q} = (q_n)_{n \geq 1} = (0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2, \dots)$ .

Nach Bsp. 3.17 ist  $\mathbb{R}$  die Menge aller Häufungspunkte von  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

c) *Behauptung.* (CANTOR)  $M = (0, 1)$  ist überabzählbar. (Damit ist auch  $\mathbb{R}$  überabzählbar, da es eine Bijektion  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$  gibt, z.B.  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{1+2|x|}$ ).

*Beweis.* Annahme:  $(0, 1)$  sei abzählbar. Also existiert bijektives  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$  mit  $(0, 1) = (x_n)_{n \geq 1}$ , wobei  $x_n = \varphi(n)$ . Sei  $\xi_n$  die  $n$ -te Dezimalstelle von  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Setze

$$\eta_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0 \\ 1, & \xi_n \neq 0 \end{cases} \neq \xi_n$$

$$\text{Bsp. 3.17} \implies \begin{cases} y = 0, \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots & \in (0, 1) \\ \text{Da } \eta_k \neq \xi_k \forall k \in \mathbb{N}, \text{ ist } y \neq x_n \forall n \in \mathbb{N} & \implies y \notin (0, 1) \end{cases} \quad \nexists$$

$\square$

## Umordnung von Reihen

**Beispiel 3.21.** Nach Bsp. 3.9 konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ . Definiere rekursiv eine „Umordnung“  $(b_k)_{k \geq 1}$  von  $a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Setze:  $m = 1$ :  $b_1 := 1, b_2 := -\frac{1}{2} \implies b_1 + b_2 \geq \frac{1}{4}$

$m = 2$ :  $b_3 := \frac{1}{3}, b_4 := \frac{1}{5}, b_5 := -\frac{1}{4} \implies b_3 + b_4 + b_5 \geq \frac{1}{2}$

Definiert seien  $b_{n_m} = -\frac{1}{2m}$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2$ , sowie

$$b_{n_{m-1}+1} = \frac{1}{2l_{m+1}+1}, \dots, b_{n_m-1} = \frac{1}{2l_m-1}$$

für ein  $l_m \in \mathbb{N}$ . Da  $\sum_{k \geq l_m} \frac{1}{2k+1}$  divergiert (Übung) finden wir ein  $j \in \mathbb{N}$

$$b_{n_m+1} = \frac{1}{2l_m+1}, \dots, b_{n_m+j} = \frac{1}{2l+j},$$

sodass:  $b_{n_m+1} + \dots + b_{n_m+j} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2m+2}$ .

Setze  $n_{m+1} = n_m + j + 1$  und  $b_{n_{m+1}} = -\frac{1}{2m+2} \implies$  erhalten rekursiv  $(b_k)_{k \geq 1}$  mit

$$\sum_{k=1}^{n_m+1} b_n \geq (m+1) \frac{1}{4} \rightarrow \infty, \quad (m \rightarrow \infty)$$

**Fazit.**  $\sum_{k \geq 0} a_k$  divergiert, obwohl die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit den gleichen Summanden konvergiert! Also: Hier gilt kein „unendliches Kommutativgesetz“.

**Definition 3.22.** Sei  $\sum_{k \geq 0} a_k$  eine Reihe und  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Bijektion. Setze  $b_k = a_{\varphi(k)}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Die Reihe  $\sum_k b_k$  heißt Umordnung von  $\sum_k a_k$ .

**Satz 3.23.** Sei  $\sum_k a_k$  eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung von  $\sum_k a_k$  gegen den Wert  $\sum_k^{\infty} a_k$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $\sum |a_k|$  konvergiert, gilt:

$$\exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_{\varepsilon} : \sum_{j=N_{\varepsilon}+1}^n |a_j| \leq \varepsilon \quad \text{nach Satz 3.5} \quad (*)$$

Sei  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bijektiv. Sei  $M_{\varepsilon} = \max\{\varphi^{-1}(0), \dots, \varphi^{-1}(N_{\varepsilon})\} \implies \{0, \dots, N_{\varepsilon}\} \subseteq \{\varphi(0), \dots, \varphi(M_{\varepsilon})\}$ .

Seien  $n \geq N_{\varepsilon}$ ,  $m \geq M_{\varepsilon}$ . Setze

$$D_{m,n} = \sum_{j=0}^m a_{\varphi(j)} + \sum_{j=0}^n (-a_j).$$

Als Summanden treten in  $D_{m,n}$  nur  $\pm a_k$  auf mit  $k > N_{\varepsilon}$ . (alle  $a_k$  mit  $k \leq N_{\varepsilon}$  treten doppelt auf und kürzen sich).

$$\implies |D_{m,n}| \leq \sum_{k=N_{\varepsilon}+1}^{\infty} |a_k| \stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon \quad \forall n \geq N_{\varepsilon}, m \geq M_{\varepsilon}$$

Da  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  existiert, folgt mit  $n \rightarrow \infty$  und Satz 2.9, dass:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |D_{m,n}| = \left| \sum_{j=0}^m a_{\varphi(j)} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right| \leq \varepsilon, \forall m \geq M_{\varepsilon}$$

Das ist die Behauptung. □

## Cauchyprodukte

Frage: Wie multipliziert man Reihen?

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{j=0}^n a_j \right)}_{=: A_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n a_k \right)}_{=: B_n} \\ &\stackrel{2.7}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Schema für Summanden  $a_j b_k$ :

TODO

Setze  $Q_n = \{0, \dots, n\}^n$ ,  $D_n = \{(j, k) \in Q_n, k + j \leq n\}$ . Summiere  $A_n B_n$  „diagonal“, das heißt bilde zuerst

$$c_n = \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l}, n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

$c_n$  = Summe über  $a_j b_k$  mit  $j + k = n$ .

**Satz 3.24.** Seien  $\sum_k a_k$ ,  $\sum_k b_k$  absolut konvergente Reihen. Seien  $c_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) in (3.3) definiert. Dann konvergiert  $\sum_{n \geq 0} c_n$  absolut und es gilt:

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \quad (3.4)$$

*Bemerkung.* Satz ist (im Allgemeinen) falsch für konvergente, nicht absolut konvergente Reihen (siehe Übung).

*Beweis.* Seien  $A_n, B_n$  aus (3.2),  $A_n^* = \sum_{j=0}^n |a_j|$ ,  $B_n^* = \sum_{k=0}^n |b_k|$ ,  $C_n = \sum_{j=0}^n c_j$ . Nach Voraussetzung  $\exists A^* = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ ,  $B^* = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ . Dann:

$$\begin{aligned} |A_n B_n - C_n| &= \left| \sum_{(j,k) \in Q_n \setminus D_n} a_j b_k \right| \leq \sum_{(j,k) \in Q_n \setminus Q(\frac{n}{2})} |a_j| |b_k| \\ &= \sum_{(j,k) \in Q_n} |a_j| |b_k| - \sum_{(j,k) \in Q(\frac{n}{2})} |a_j| |b_k| \\ &= \underbrace{A_n^* B_n^*}_{\rightarrow A^* B^* \text{ nach Satz 2.7}} - \underbrace{A_{(\frac{n}{2})}^* B_{(\frac{n}{2})}^*}_{\rightarrow A^* B^* \text{ (da TF) } (n \rightarrow \infty)} \\ &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n B_n - C_n| = 0 \end{aligned}$$

Da  $A_n B_n \rightarrow AB$  ( $n \rightarrow \infty$ ), folgt  $\exists \sum_{n=0}^{\infty} C_n - AB \implies (3.4)$ . Ferner:

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \stackrel{(3.3)}{\leq} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n |a_j| |b_{n-j}| \leq A_N^* B_N^* \leq A^* B^*$$

für alle  $N \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 3.4 folgt die absolute Konvergenz von  $\sum c_n$ . □

**Beispiel 3.25** (Exponentialreihe). Sei  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ . Die Reihe konvergiert absolut nach Bsp. 3.15 ( $\forall z \in \mathbb{C}$ ). Beachte:  $\exp(0) = 1$ ,  $\exp(1) = e$  (Bsp. 3.17)

*Behauptung:*

a)  $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$

b)  $\exp(z) \neq 0, \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

c) Sei  $p \in \mathbb{Q}$ :  $\exp(p) = e^p$

*Beweis.* a)

$$\exp(z) \exp(w) \stackrel{\text{Satz 3.24}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j}}_{= \text{Bsp. 0.3: } (z+w)^n} = \exp(z+w)$$

b)  $1 = \exp(0) = \exp(z - z) \stackrel{\text{a)}}{=} \exp(z) \exp(-z) \implies \text{b)}$

c) Sei  $p = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für  $m > 0$

$$\exp(p)^n = \underbrace{\exp(p) \cdots \exp(p)}_{n\text{-mal}} \stackrel{\text{a)}}{=} \exp(\underbrace{np}_m) = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m\text{-mal}}) = \exp(1)^m = e^m$$

$$\implies \exp(p) = e^{\frac{m}{n}}. \text{ Fall } m < 0 \text{ mit b).}$$

□

### 3.3 Potenzreihen

**Definition 3.26.** Es sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  gegeben. Für  $z \in \mathbb{C}$  heißt  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  *Potenzreihe*.

*Bemerkung.* Sei  $D$  die Menge der  $z \in \mathbb{C}$ , sodass die Potenzreihe konvergiert, dann ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  eine Funktion. Es gilt stets  $0 \in D$ ,  $f(0) = a_0$ . (Man setzt  $0^0 := 1$ )

**Definition 3.27.** Der *Konvergenzradius*  $\varrho$  von  $\sum a_k z^k$  ist gegeben durch:

$$\varrho = \begin{cases} \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, & \text{wenn } \left( \sqrt[k]{|a_k|} \right) \text{ beschränkt und keine NF,} \\ 0, & \text{wenn } \left( \sqrt[k]{|a_k|} \right) \text{ unbeschränkt,} \\ \infty, & \text{wenn } \left( \sqrt[k]{|a_k|} \right) \text{ NF.} \end{cases}$$

**Theorem 3.28.** Sei  $\varrho$  der Konvergenzradius von  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ . Dann gelten:

a)  $0 < \varrho < \infty$ , dann konvergiert  $\sum a_k z^k$  absolut für  $|z| < \varrho$  und divergiert für  $|z| > \varrho$ , wobei  $z \in \mathbb{C}$ .

b) Wenn  $\varrho = 0$ , dann divergiert  $\sum a_k z^k$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) Wenn  $\varrho = \infty$ , dann konvergiert  $\sum a_k z^k$  absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$



Also:  $\varrho = \sup \{ r \geq 0 : \sum a_k z^k \text{ konvergiert } \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq r \}$  (dabei ist  $\sup \mathbb{R}_+ := \infty$ ).

*Beweis.* Es gilt  $\sqrt[k]{|a_k z^k|} = \left( |a_k| |z|^k \right)^{\frac{1}{k}} = |z| \sqrt[k]{|a_k|} =: b_k$

a)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_k \stackrel{5}{=} |z| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ . Nach Wurzelkriterium:

$$\implies \begin{cases} |z| < \varrho \iff \overline{\lim} b_k < 1 \implies \sum a_k z^k \text{ konvergiert absolut} \\ |z| > \varrho \iff \overline{\lim} b_k > 1 \implies \sum a_k z^k \text{ divergiert} \end{cases}$$

c)  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 \implies \sum a_k z^k \text{ konvergiert absolut } \forall z \in \mathbb{C} \text{ nach Wurzelkriterium}$

b) Falls  $|z| \neq 0$ , dann ist  $(b_k)$  unbeschränkt  $\implies (b_k^k)$  ist unbeschränkt  $\implies (a_k z^k)$  ist keine NF. Nach Kor. 3.6  $\implies \sum a_k z^k$  divergiert

□

**Beispiel 3.29.** a) Polynome  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  ( $z \in \mathbb{C}$ ), wobei  $a_1, \dots, a_n$  gegeben. Setze  $a_j = 0$  für  $j > n \implies \varrho = \infty \implies \text{konvergiert } \forall z \in \mathbb{C}$

b)  $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  konvergiert  $\forall z \in \mathbb{C}$  nach Bsp. 3.15. Nach Thm. 3.28 gilt:

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \quad (3.5)$$

da  $\varrho = \infty$  und  $a_k = \frac{1}{k!}$

c) Geometrische Reihe  $\sum_{k \geq 0} z^k$ . Hier ist  $a_k = 1 \implies \varrho = 1$ . Genauer: Bsp. 3.2 liefert  $\exists \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$  für  $|z| < 1$ . Bsp. 3.7  $\implies$  Divergenz wenn  $|z| \geq 1$ .

d) Sei  $a_k = k!$ . Nach (3.5)  $\forall n \in \mathbb{N} \exists K_n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \leq \frac{1}{n} \ (\forall k \geq K_n) \implies n \leq \sqrt[k]{k!}$  ( $\forall k \geq K_n$ )  $\implies (\sqrt[k]{k!})_k$  ist unbeschränkt. Thm. 3.28  $\implies \sum_k k! z^k$  konvergiert *nur* für  $z = 0$ , da  $\varrho = 0$ .

e) Betrachte  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (2z)^k$ , d. h.  $a_k = \frac{2^k}{k}$ . Damit  $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 2$  ( $k \rightarrow \infty$ , Üb.)  $\implies \varrho = \frac{1}{2}$ . Also absolute Konvergenz für  $|z| < \frac{1}{2}$ , Divergenz für  $|z| > \frac{1}{2}$ . Hier gilt Konvergenz für  $z = -\frac{1}{2}$ , Divergenz für  $z = \frac{1}{2}$  (nach Bsp. 3.9 und 3.2)

*Bemerkung.* Im Fall  $|z| = \varrho \in (0, \infty)$  ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Satz 3.30.** Es seien  $\sum a_k z^k, \sum b_k z^k$  Potenzreihen mit Konvergenzradius  $\varrho_a, \varrho_b > 0$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gelten für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$  (wobei  $\min\{x, \infty\} = x$  für  $x \in \mathbb{R}$ )

$$a) \exists \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) z^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

$$b) \exists \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) z^n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right)$$

*Beweis.* a) Thm. 3.28 und Satz 3.3

b) Thm. 3.28 und Satz 3.24, wobei in (3.3) gilt:

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j z^j b_{n-j} z^{n-j} = z^n \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$$

□

**Beispiel 3.31** (Sinus und Cosinus). Für  $z \in \mathbb{C}$  konvergieren absolut:

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Das sind Potenzreihen mit Koeffizienten

$$\sin: a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1 \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}, \quad \cos: a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & n = 2k \text{ gerade} \end{cases}$$

*Beweis.* Zeige  $\varrho = \infty$ .

$$\sin: \sqrt[n]{|a_k|} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \xrightarrow{(3.5)} 0, \quad n \rightarrow \infty$$

cos genauso.

□

Aus Reihen folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \cos x, \sin x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \quad (3.7)$$

**Satz 3.32.** Sei  $z \in \mathbb{C}$ . Dann gelten:

$$\text{Euler: } \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z), \quad (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \quad (3.8)$$

Für  $x \in \mathbb{R}$  folgt mit (3.6)  $\operatorname{Re} \exp(ix) = \cos x$ ,  $\operatorname{Im} \exp(iz) = \sin x$ ,  $|\exp(iz)| = 1$ ,  $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$ .

*Beweis.* Es gilt:  $\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(i^2)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \stackrel{i^2=-1}{=} \cos z + i \sin z$ . Ferner  $1 = \exp(iz - iz) \stackrel{(3.25)}{=} \exp(iz) \cdot \exp(i(z-z)) \stackrel{(3.7), \text{ Euler}}{=} (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = (\cos z)^2 + (\sin z)^2$ . (3.8) folgt ähnlich aus Euler, (3.7) □

**Korollar 3.33.** *Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann:*

$$\begin{aligned}
& -2 \sin \left( \frac{z+w}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{z-w}{2} \right) \stackrel{3.8}{=} \\
& \frac{-2}{(2i)^2} \left( \exp \left( \frac{i}{2}(z+w) \right) - \exp \left( -\frac{i}{2}(z+w) \right) \right) \cdot \left( \exp \left( \frac{i}{2}(z+w) \right) - \exp \left( -\frac{i}{2}(z-w) \right) \right) \\
& \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{2} \left( \exp \left( \frac{i}{2}2z \right) - \exp \left( \frac{i}{2}2w \right) - \exp \left( \frac{i}{2}(-2w) \right) + \exp \left( \frac{i}{2}(-2z) \right) \right) \\
& \stackrel{(3.8)}{=} \cos z - \cos w
\end{aligned}$$

## 4 Stetige Funktionen

Ab jetzt wird (fast) immer in  $\mathbb{R}$  gerechnet, insbesondere  $B(x, r) = (x - r, x + r)$ ,  $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$ . Stets sei  $D \neq \emptyset$ .

### 4.1 Grenzwerte stetiger Funktionen

**Definition 4.1.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Dann heißt die Menge  $\overline{D} := \{x \in \mathbb{R} : \exists x_n \in D \ (n \in \mathbb{N}) \text{ mit } x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty\}$  der *Abschluss* von  $D$ .  $D$  heißt *abgeschlossen* (abg.) falls  $D = \overline{D}$ .

*Bemerkung.* Es gilt  $D \subseteq \overline{D}$  (Betrachte für  $x \in D$  die Folge  $(x_n)_{n \geq 1} = (x)_{n \geq 1}$ )

**Beispiel.** Sei  $D = (0, 1]$ , dann ist  $\overline{D} = [0, 1]$

*Beweis.* Es gilt  $0 \in \overline{D}$ , da  $\frac{1}{n} \in D, \frac{1}{n} \rightarrow 0 \ n \in \mathbb{N} \implies [0, 1] \subseteq \overline{D}$ . Umgekehrt: Sei  $x_n \in (0, 1] = D$  mit  $x_n \rightarrow x$  für ein  $x \in \mathbb{R}$ . Satz 2.9:  $0 \leq x \leq 1 \implies \overline{D} \subseteq [0, 1] \implies \text{Beh.}$   $\square$

**Ebenso:**

a)  $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$

b) Abgeschlossene Intervalle im Sinne von Def. ?? sind abgeschlossen im Sinne von Def. 4.1, Bsp:  $\overline{[0, 1]} = [0, 1]$ .

**Definition 4.2.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \overline{D}, y_0 \in \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  *konvergiert* gegen den *Grenzwert*  $y_0$ , wenn für *jede* Folge  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq D$  mit  $x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow \infty)$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow y_0 \ (n \rightarrow \infty)$ . Man schreibt dann  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  oder  $f(x) \rightarrow y_0$  für  $x \rightarrow x_0$ . Wenn man zusätzlich  $x_n < x_0$ , bzw.  $x_n > x_0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$  fordert, dann spricht man vom *links-*, bzw. *rechtsseitigen Grenzwert* und schreibt  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , bzw.  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

**Beispiel 4.3.** a) Sei  $D = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3, x_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $x_n \in \mathbb{R}, x_n \rightarrow x_0$ . Dann  $f(x_n) = x_n^2 + 3 \rightarrow x_0^2 + 3 \ (n \rightarrow \infty)$  nach Satz 2.7  $\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2 + 3$

b) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Setze

$$\mathbf{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus M \end{cases} \quad (\text{charakteristische Funktion})$$

*Behauptung.* Sei  $D = \mathbb{R}, f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ . Dann:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht.

*Beweis.* Wähle  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Dann

$$f(x_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sei  $x_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Wenn  $x_n > 0$ , dann  $f(x_n) = 1$ . Wenn  $x_n < 0$ , dann  $f(x_n) = 0$   
 $\implies \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$   $\square$

- c) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D$ . Dann:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht, da  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , aber  $f(\frac{1}{n}) = n$  divergiert ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Satz 4.4** ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$   
b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)$  gilt:  $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$

*Beweis.* a) Es gelte 2). Sei  $x_n \in D$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $x_n \rightarrow x_0$  beliebig gegeben ( $n \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta_\varepsilon > 0$  aus 2). Dann  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_0| \leq \delta_\varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$ . 2) liefert:  $|f(x_n) - y_0| \leq \varepsilon$  ( $\forall n \geq N_\varepsilon$ )  $\implies f(x_n) \rightarrow y_0, n \rightarrow \infty \implies 1)$

- b) Es gelte 1). Annahme: 2) sei falsch. Daraus folgt mit  $\delta = \frac{1}{n}$ :  $\exists \varepsilon_\delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$  mit  $|x_0 - x_n| \leq \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - y_0| > \varepsilon_0$ , d. h.  $x_n \rightarrow x_0$  (Satz 2.9) und  $f(x_n) \not\rightarrow y_0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\nRightarrow 2$   $\square$

**Satz 4.5.** Es seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = z_0$ . Dann gelten:

- a)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = y_0 + z_0$   
b)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = y_0z_0$   
c)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |y_0|$   
d) Sei zusätzlich  $y_0 \neq 0$ . Dann  $\exists r > 0$ , sodass  $|f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2} > 0$  für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| \leq r$ . Ferner  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y_0}$   
e) Sei zusätzlich  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in D$ . Dann gilt  $x_0 \leq z_0$ . (Entsprechendes gilt für  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm}$ )

*Beweis.* c) Sei  $x_n \in D$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) beliebig gewählt.  $\xrightarrow{\text{n. V.}}$   
 $f(x_n) \rightarrow y_0 \xrightarrow{2.11} |f(x_n)| \rightarrow |y_0|$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies$  Behauptung

- d) Wähle  $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2} > 0$ . Nach Teil 3 und Satz 4.4  $\exists r = \delta_\varepsilon > 0$ , sodass für alle  $x \in D \cap \overline{B}(x_0, r)$  gilt  $\frac{|y_0|}{2} \geq ||f(x)| - |y_0|| \geq |y_0| - |f(x)| \iff |f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2}$ . Sei nun  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) mit  $x_n \in D \cap \overline{B}(x_0, r) \xrightarrow{\text{n.V.}} f(x_n) \rightarrow y_0 \xrightarrow{2.7} \frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{y_0}$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies$  Behauptung
- a), b), e) gehen genauso mit Satz 2.7 und Satz 2.9.  $\square$

## Uneigentliche Grenzwerte

**Definition.** Erweiterte Zahlengerade  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  (man schreibt oft  $\infty$  statt  $+\infty$ ). Ordnung:  $-\infty < x < +\infty$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ),  $|\pm\infty| := +\infty$

**Definition 4.6.** Man schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  ( $-\infty$ ) für  $x_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , falls:

$$\forall K \in \mathbb{N} \exists N_K \in \mathbb{N} \forall n \geq N_K: x_n \geq K \quad (x_n \leq -K)$$

Damit  $n^2 \rightarrow \infty$ ,  $-n^3 \rightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). *Beachte:*  $((-1)^n)$  divergiert nach wie vor.

*Bemerkung 4.7.* a) Wenn  $x_n \rightarrow \infty$  oder  $x_n \rightarrow -\infty$ , dann  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). (Beachte, nach Def. 4.6 gilt:  $x_n \neq 0$ ,  $n \geq N_1$ )

b) Wenn  $x_n \rightarrow 0$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n > 0$  für alle  $n \geq n_0$ , dann geht  $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$

c) Wenn  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n < 0$  ( $\forall n \geq n_0$ ), dann  $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$

*Beweis.* a) Sei  $x_n \rightarrow +\infty$  oder  $x_n \rightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Nach Def. 4.6 gilt

$$\forall K \in \mathbb{N} \exists N_K \in \mathbb{N} \forall n \geq N_K: |x_n| \geq K \iff 0 < \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{K} =: \varepsilon,$$

d. h.  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

b), c) zeigt man ähnlich.  $\square$

In Anbetracht von 4.7.1) schreibt man

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

(damit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$  auch in Bem. 4.71) Wenn  $(x_n)$  nach oben (nach unten) unbeschränkt ist (wobei  $x_n \in \mathbb{R}$ ) dann setzt man  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \infty$   $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := -\infty$ . Mit identischem Beweis gelten dann Wurzel- und Quotientenkriterium ohne die jeweilige Beschränktheitsvoraussetzung. Ferner liefert (4.1) und Bem. 4.7 in Thm. 3.28

$$\varrho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Gilt auch wenn  $\sqrt[k]{|a_k|}$  unbeschränkt ( $\varrho = \frac{1}{\infty} = 0$ ) oder wenn  $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 0^+$  ( $k \rightarrow \infty$ ) („ $\varrho = \frac{1}{0^+} = +\infty$ “). Weiter schreibt man  $\sup D = +\infty$  wenn  $D \subseteq \mathbb{R}$  nach oben unbeschränkt ist, sowie  $\inf D = -\infty$ , wenn  $D$  nach unten unbeschränkt ist.

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ ,  $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Dann definiert man  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$  wie in Def. 4.2, d. h. für alle  $x_n \rightarrow x_0$  muss  $f(x_n) \rightarrow y_0$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  gelten. Dabei ist  $+\infty \in \overline{D}$  wenn  $\sup D = \infty$  und  $-\infty \in \overline{D}$ , wenn  $\inf D = -\infty$ .

**Beispiel.** Mit Bem. 4.7 folgt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  und  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ .

## 4.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Definition 4.8.** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ . Dann heißt  $f$  *stetig in  $x_0$* , falls  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , d. h. für jede Folge  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $f$  heißt *stetig (auf  $D$ )*, wenn  $f$  für alle  $x_0 \in D$  stetig ist. Man schreibt:  $C(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$ .

**Beispiel 4.9** (vgl. 4.3). a) Sei  $D = \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$  (fest gegeben). Dann sind die Funktionen  $f(x) = c$ ,  $g(x) = x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) stetig auf  $\mathbb{R}$ .

b) Sei  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $x_0, x_n \in D$ . Übung: Wenn  $x_n \rightarrow x_0$ , dann  $\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{x_0}$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Also ist  $f(x) = \sqrt{x}$  stetig auf  $\mathbb{R}_+$

c) Sei  $D = \mathbb{R}$  und  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ .  $\implies f$  ist stetig für  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  aber unstetig für  $x_0 = 0$ ,  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D$  stetig auf  $D$

e) Sei  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \dots \implies f$  unstetig in  $x_0 = 0$ , da  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

**Definition.** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann definiere man die Funktion  $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$  punktweise durch  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  ( $x \in D$ ). Analog definiere man die Funktionen  $\alpha f$ ,  $f \cdot g$ ,  $|f|$  und  $\frac{1}{f}$  (soweit  $f(x) \neq 0$ ). Ferner sei  $f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D : f(x) = y\}$  und  $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definiert man die *Komposition*  $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ ,  $x \in D$ .

**Satz 4.10.** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sowie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$  und  $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $f(x_0)$ . Dann sind die Funktionen  $f + g$ ,  $fg$  (speziell  $\alpha g$ ),  $|f|$ ,  $h \circ f$  stetig bei  $x_0$ . Wenn  $f(x_0) \neq 0$ , dann existiert nach Satz 4.5 ein  $\delta > 0$  mit  $f(x) \neq 0$  für  $x \in \overline{B}(x_0, \delta) \cap D := \tilde{D}$ . Ferner ist  $\frac{1}{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ . (Also:  $C(D)$  ist ein Vektorraum).

*Beweis (beispielhaft).* Sei  $x_n \in D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann  $f(x_n) \in f(D)$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (da  $f$  stetig in  $x_0$ ). Also:  $h(f(x_n)) \rightarrow h(f(x_0))$ , da  $h$  stetig in  $f(x_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Somit ist  $h \circ f$  stetig in  $x_0$ . Der Rest folgt analog mit Satz 4.5.  $\square$

**Beispiel 4.11** (Satz 4.10 liefert:). a) Polynome sind auf  $\mathbb{R}$  stetig, da sie aus  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$  zusammengesetzt sind.

b) Rationale Funktionen  $f = \frac{p}{q}$  sind auf  $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$  stetig, als Quotient der Polynome  $p, q$ .

c)  $f(x) = \sqrt{1+3|x|}$  ist stetig auf  $D = \mathbb{R}$ , da  $f = w \cdot g$  mit  $w(y) = \sqrt{y}$  und  $g(x) = 1 + 3|x|$ ,  $g = 1 + 3|p_1|$ .

**Theorem 4.12.** Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\varrho > 0$ . Dann ist  $f : B(0, \varrho) = (-\varrho, \varrho) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, d. h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \quad (x_0 \in B(0, \varrho))$$

**Beispiel.** Stetig auf  $\mathbb{R}$  sind  $\sin, \cos, \exp$  sowie  $f(x) = \exp(1+2x^2)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), da  $f = \exp p$ ,  $p(x) = 1 + 2x^2$  (Hier sei vorrübergehend  $B(0, \infty) = \mathbb{R}$ ).

*Beweis des Theorems..* Sei  $x_0, x_n \in (-\varrho, \varrho)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Setze  $d := \varrho - |x_0| > 0 \implies \exists x_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \leq \frac{d}{2} \ (\forall n \geq n_0)$

$$\implies |x_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0| \leq \dots + |x_0| = \varrho - \frac{d}{2} < \varrho \quad (n \geq n_0) \quad (*)$$

Setze  $r = \varrho - \dots$ . Dann (nach Thm. 3.28)  $\exists \dots$  Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, fest gegeben. Dann  $\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sum_{j=J_\varepsilon+1}^{\infty} |a_j| r^j \leq \varepsilon \quad (**)$$

Setze  $p_\varepsilon(x) = \dots$  □

**Satz 4.13.** Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ . Dann sind äquivalent:

a)  $f$  ist stetig in  $x_0$

b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

c)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : f(D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)) : \dots$

*Beweis.* ... □

**Definition 4.14.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  heißt *gleichmäßig stetig* (glm stetig), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (4.2)$$

(Im Gegensatz zu 4.132 hängt  $\delta_\varepsilon$  nicht von  $x_0$  ab).

**Beispiel 4.15.** a) Sei  $D = (0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Sei  $\varepsilon_0 = 1$ , sei  $\delta > 0$  beliebig. Wähle  $x \in (0, 1]$  mit  $x \leq 2\delta$ ,  $y = \frac{x}{2} \implies |x - y| = \frac{x}{2} \leq \delta$ . ...

b) Sei  $D = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Sei  $\varepsilon_0 = 1$ , sei  $\delta > 0$  beliebig. Wähle  $x = \delta + \frac{1}{\delta}$ ,  $y = \frac{1}{\delta} \implies |x - y| = \delta$ , aber  $|f(x) - f(y)| \dots > 1 = \varepsilon_0 \implies f$  nicht glm stetig, obwohl  $f$  stetig.



### 4.3 Hauptsätze über stetige Funktionen

**Theorem 4.16.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann:  $f$  ist glm. stetig. (Beispiel:  $D = [a, b]$ )

*Beweis.* Annahme:  $f$  sei nicht glm. stetig. (4.2) (mit  $\delta = \frac{1}{n}$ ) liefert:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in D : |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0 \quad (*)$$

$D$  beschränkt, Thm. 2.21 (=BW)  $\implies \exists$  TF  $x_{n_k} \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ),  $y_{n_{k_l}} \rightarrow y$  ( $l \rightarrow \infty$ )  
 $\implies x, y \in \overline{D} \stackrel{\text{n.V.}}{=} D$ . Ferner:

$$|x - y| \leq |x - y_{n_{k_l}}| + \underbrace{|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}|}_{\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{n_{k_l}}} + |y_{n_{k_l}} - y| \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

$\stackrel{1.20.3}{\implies} x = y$ .  $f$  stetig:  $f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}}) \rightarrow f(x) - f(y) = f(x) - f(x) = 0$  ( $l \rightarrow \infty$ )  $\nmid$   
 (\*)  $\square$

**Definition 4.17.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  nicht abgeschlossen.  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D} \setminus D$ . Die Funktion  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$  (definiert auf  $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$ ) heißt *stetige Fortsetzung* von  $f$  in  $x_0$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .

**Beispiel 4.18.** a) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ,  $x \in D$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$

$$\implies \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, \text{ also } \tilde{f}(x) = x+1, x \in \tilde{D} = \mathbb{R}.$$

Da  $\tilde{f}$  stetig auf  $\mathbb{R}$ , ist  $f$  in 1 stetig fortsetzbar. (Wenn man  $y_0 = 3$  setzen würde, wäre  $\tilde{f}$  keine stetige Fortsetzung).

b) Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Nicht stetig fortsetzbar sind  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ , da jeweils  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht existiert. (siehe Bsp. 4.3)

**Satz 4.19.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \in \overline{D} \setminus D$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann:

- a) Wenn  $f$  auf  $D$  gleichmäßig stetig ist, dann hat  $f$  in  $x_0$  eine stetige Fortsetzung.
- b) Wenn  $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$  abgeschlossen und beschränkt ist und  $f$  in  $x_0$  stetig fortsetzbar ist, dann ist  $f$  mit  $D$  gleichmäßig stetig.

*Beweis.* b) Thm. 4.16:  $\tilde{f}$  ist gleichmäßig stetig auf  $\tilde{D}$ .  $\implies f$  gleichmäßig stetig auf  $D$ .

a) Sei  $f$  gleichmäßig stetig.

- a) Sei  $x_n \in D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Sei  $\delta_\varepsilon$  aus (4.2). Dann:  
 $\exists N_\varepsilon : |x_n - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq N_\varepsilon) \implies |x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| \leq \delta_\varepsilon \quad (\forall n, m \geq N_\varepsilon) \xrightarrow{(4.2)} |f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon \quad (\forall n, m \geq N_\varepsilon)$ . Thm. 2.26  
 $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =: y_0$
- b) Sei  $\tilde{x}_n$  in  $D$  eine weitere Folge mit  $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$ . Dann  $\exists \tilde{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$  mit  $|\tilde{x}_n - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies |x_n - \tilde{x}_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - \tilde{x}_n| \leq \delta_\varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon)$   
 $\xrightarrow{(4.2)} |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies |f(\tilde{x}_n) - y_0| \leq |f(\tilde{x}_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - y_0| \stackrel{1)}{\leq} \varepsilon + \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x_m)| \stackrel{1)}{\leq} 2\varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies f(\tilde{x}_n) \rightarrow y_0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .

□

**Theorem 4.20** (Satz vom Maximum). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann  $\exists x_\pm \in D$  mit  $f(x_+) = \max_{x \in D} f(x)$ ,  $f(x_-) = \min_{x \in D} f(x)$ . Insbesondere ist  $f$  beschränkt, d. h.  $|f(x)| \leq M \quad (:= \max\{f(x_+), f(x_-)\})$ ,  $\forall x \in D$ .

*Beweis.* a) ...

b) ...

□

**Korollar 4.21.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$ . Dann:  $f(x) \geq f(x_-) > 0 \quad (\forall x \in D)$ , (wobei  $x_- \in D$  aus Thm. 4.20).

**Beispiel.** Wenn  $D$  nicht abgeschlossen oder unbeschränkt, dann sind Thm. und Kor. im Allgemeinen falsch.

a)  $D = (0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $g(x) = x$ .  $\implies f, g$  stetig und unbeschränkt.

b)  $D = [1, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \geq 1$ . Aber  $\inf_{x \in D} f(x) = 0$ .

**Frage.** Wie sieht Bild von  $f$  aus?  $f(D)$  kann Lücken haben, wenn:

**Theorem 4.22** (Zwischenwertsatz/ZWS). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann:  $f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$ . Also:  $\forall y_0 \in [\min f, \max f] \exists x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .

*Beweis.* ...

□

**Korollar 4.23** (Nullstellensatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ . Dann  $\exists x_* \in [a, b] : f(x_*) = 0$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung  $f(x) \leq 0 \leq f(b)$ ,  $f(b) \leq 0 \leq f(a) \implies 0 \in f([a, b])$ . ZWS  $\implies$  Beh. □

**Korollar 4.24.** Sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I)$  ein Intervall (Intervallsatz).

*Beweis.* Annahme:  $f(I)$  sei kein Intervall  $\implies \exists a, b \in I$  mit  $y := f(a) < f(b) =: z$  und  $u \in (y, z)$  mit  $u \notin f(I)$ . Sei etwa  $a < b$ . ZWS  $\implies f([a, b])$  Intervall,  $y, z \in f([a, b]) \implies u \in f([a, b]) \implies \text{Z}$   $\square$

**Beispiel 4.25.** a)  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = x^k$  ( $k \in \mathbb{N}$  fest). Dann  $f$  stetig,  $f(0) = 0$ ,  $f(x) \geq 0$  ( $\forall x \geq 0$ ),  $f(n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Kor. 4.24:  $f(\mathbb{R}_+) = \text{Intervall} \implies f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

b) Suche  $x_0 \geq 0$ :  $\exp(-x_0) = x_0 \iff f(x_0) = \exp(-x_0) - x_0 = 0$ . Hier  $f$  stetig:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ . 4.23  $\implies \exists x_0 : f(x_0) = 0$ .

**Definition 4.26.**

**Beispiel.** a) ...

b) ...

*Bemerkung 4.27.*

*Beweis.*  $\square$

**Theorem 4.28.**

*Beweis.*  $\square$

**Beispiel 4.29.**

## 4.4 Exponentialfunktion und ihre Verwandtschaft

...

**Definition 4.30.**

**Definition 4.31.**

*Bemerkung 4.32.* ...

a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

f) ...

## Trigonometrische Funktionen

...

Satz 4.33.

Definition.

...

Definition 4.34.

Definition 4.35.

Beispiel 4.36.

# 5 Differentialrechnung

Stets sei  $I$  ein Intervall das stets mehr als einen Punkt enthält.

## 5.1 Rechenregeln

*Ziel:* Finde beste lineare Approximation für  $f$  nahe bei  $x_0$ . *Idee:* Betrachte Tangente bei  $(x_0, f(x_0))$

$t(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ , wobei  $m =$  Tangentensteigung in  $x_0 =$  Grenzwert der Steigung

der Sekante in  $x_0, x_1$  also  $s(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m(x_1)}(x - x_0)$

**Definition 5.1.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0 \in I$  differenzierbar (diff'bar), falls  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0)$   $f'(x_0)$  heißt Ableitung von  $f$  an  $x$ .  $f$  heißt diff'bar (auf  $I$ ), wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  diff'bar ist. Damm definiert man iterativ  $f'' = (f')'$ ,  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) die n-te Ableitung. Entsprechend def. man die rechts/linksseite Ableitung:

$$\frac{d \pm f}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.1)$$

*Beweis.* a) Die Fkt.  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ist für  $I \setminus \{x_0\}$  definiert

b) Wenn  $I = [a, b]$  und  $x_0 = a, b$ , dann stimmen überein soweit existent.

c) Sei  $f$  in  $x$  diff'bar. Sei  $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$  mit  $a \neq f'(x_0)$  eine weitere Gerade durch  $(x_0, f(x_0))$ . *Beh.*  $\exists \delta > 0 : |f(x) - g(x)| > |f(x) - t(x)|$  für alle  $x \in I \setminus \{x_0\}$ ,  $|x - x_0| < \delta$

*Beweis.*  $\left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| \rightarrow |f'(x_0) - a| \neq 0, x \rightarrow x_0$  genauso:  $\left| \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} \right| \rightarrow 0, x \rightarrow x_0 \implies \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| \geq \frac{1}{2} |f'(x_0) - a| > \frac{1}{4} |f'(x_0) - a| \geq \left| \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} \right| \implies$   
Beh. □

d) Andere Interpretation:

Sei  $u(t) \in \mathbb{R}$  eine Größe zur Zeit  $t \in \mathbb{R}$  (z.B. Stoffmenge, Ort) und  $h > 0$ . Dann ist  $\frac{1}{h}u(t+h) - u(t)$  der mittlere Zuwachs der Größe im Zeitintervall  $[t, t+h]$ . Somit

ist  $n'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t))$  die momentane Änderungsgeschwindigkeit der Größe.  $u''(t)$  ist die Beschleunigung.

□

**Beispiel 5.2.** a) Seien  $a, m \in \mathbb{R}$  fest gegeben. Setzte  $f(x) = mx + a$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m (\forall x \neq x_0)$ .  $\implies \exists f'(x_0) = m$

b)  $f(x) = |x|$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Dann  $\exists f'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$  Ferner  $\exists \frac{d^+ f}{dx}(0) =$

c) ...

**Satz 5.3.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.4.** ...

a) ...

b) ...

c) ...

*Beweis.* a) ...

b) ...

c) ...

□

**Korollar 5.5.**

**Satz 5.6.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.7.**

*Bemerkung.*

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.8.** a) ...

b) ...

**Theorem 5.9.**

*Beweis.* a) ...

b) ...

□

**Beispiel 5.10.** a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

**Beispiel 5.11.**

**Definition 5.12.**

*Bemerkung.*

## 5.2 Qualitative Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

**Definition 5.13.**

**Satz 5.14.** a) ...

b) ...

c) ...

*Beweis.*

□

*Bemerkung.*

**Beispiel.**

*Beweis.*

□

**Theorem 5.15.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.16.**

*Beweis.*

□

**Definition 5.17.**

*Bemerkung 5.18.* a) ...

b) ...

c) ...

**Korollar 5.19.**

*Beweis.*

□

**Satz 5.20.**    a) ...

b) ...

*Bemerkung.*

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.21.**

*Beweis.*

□

**Korollar 5.22.**    a) ...

b) ...

*Bemerkung.*

*Beweis.*    a) ...

b) ...

□

**Definition 5.23.**

*Bemerkung.*

**Satz 5.24.**

**Beispiel 5.25.**    a) ...

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.26.**    a) ...

*Beweis.*

□

**Theorem 5.27.**    a) ...

b) ...

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.28.**    a) ...

b) ...

c) ...

d) ...



## 5.3 Der Satz von Taylor

**Theorem 5.29.**

*Beweis.*

□

**Definition 5.30.**

*Bemerkung 5.31.*    a) ...

     b) ...

**Theorem 5.32.**    a) ...

     b) ...

     c) ...

**Beispiel.**

*Beweis.*

□

**Definition 5.33.**

**Beispiel 5.34.**    a) ...

     b) ...

     c) ...

## Newton-Verfahren

**Theorem 5.35.**

*Beweis.*

□

**Beispiel 5.36.**

# 6 Integralrechnung

## 6.1 Riemann-Integrale

(siehe Walter: Analysis I)

**Definition 6.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Eine *Zerlegung*  $Z$  von  $[a, b]$  ist eine Menge der Form

$$Z = \{(t_0, t_1, \dots, t_n), (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \\ \tau_k \in I_k := [t_{k-1}, t_k] \text{ für } k = 1, \dots, n\},$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig.  $\mathcal{Z}(a, b)$  ist die Menge aller Zerlegungen von  $[a, b]$ . Die *Riemann-Summe* von  $f$  bzgl.  $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$  ist

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Man setzt  $d_k = t_k - t_{k-1}$  und  $|Z| = \max_{k=1, \dots, n} d_k$  (*Feinheit*).  $t_k$  heißt *Teilungspunkt*,  $\tau_k$  heißt *Stützstelle*. Kurzschreibweise:  $Z = \{t_k, \tau_k, k \leq n\}$ .  $f$  heißt *Riemann-integrierbar*, falls es ein  $J \in \mathbb{R}$  gibt, sodass für jede Folge  $(Z_n) \subseteq \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt:  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, Z_n) = J$ . Dann heißt  $J$  das *Riemann-Integral* von  $f$ . Man schreibt

$$J = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Ferner  $R([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt und Riemann-integrierbar}\}$ .

**Lemma 6.2** (CAUCHY-Kriterium). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $J \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

a)  $f$  ist Riemann-integrierbar mit  $J = \int_a^b f(x) \, dx$

b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall Z, Z' \in \mathcal{Z}(a, b) \text{ mit } |Z|, |Z'| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt:}$

$$|S(f, Z) - S(f, Z')| \leq \varepsilon \tag{6.1}$$

*Beweis.* b)  $\Rightarrow$  a) Es gelte (6.1). Sei  $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Wähle  $\varepsilon > 0$ . Sei  $\delta_\varepsilon > 0$  aus (6.1). Dann  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|Z_j| \leq \delta_\varepsilon$  für alle  $j \geq N_\varepsilon$ . (6.1) liefert  $|S(f, Z_n) - S(f, Z_m)| \leq \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$ . Thm. 2.26 zeigt  $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, Z_m) = J$ . Damit  $|S(f, Z_n) - J| \leq \varepsilon$  ( $\forall n \geq N_\varepsilon$ ) (\*)  
 Sei  $Z'_n \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z'_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann  $\exists N'_\varepsilon \geq N_\varepsilon$  mit  $|Z'_n| \leq \delta_\varepsilon$  für alle  $n \geq N'_\varepsilon$ .  $\xrightarrow{6.1} |S(f, Z_n) - S(f, Z'_n)| \leq \varepsilon \forall n \geq N'_\varepsilon$  (\*\*)  
 $\Rightarrow |S(f, Z'_n) - J| \leq |S(f, Z'_n) - S(f, Z_n)| + |S(f, Z_n) - J| \leq 2\varepsilon$  für alle  $n \geq N'_\varepsilon$ , nach (\*), (\*\*).  $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = J$

a)  $\Rightarrow$  b)  $f$  sei Riemann-integrierbar. Annahme: (6.1) sei falsch, also  $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists Z_n, Z'_n \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n|, |Z'_n| < \frac{1}{n}$ , aber  $\underbrace{|S(f, Z_n) - S(f, Z'_n)|}_{\substack{\text{n.V.} \rightarrow J \\ \rightarrow J \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}}} > \varepsilon \nmid$

□

**Beispiel 6.3.** a) Sei  $a \leq c \leq d \leq b$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Setze  $f = \alpha \mathbf{1}_{[c, d]}$ . Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar und  $\int_a^b f(x) dx = \alpha(d-c)$ . Speziell  $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b-a)$ ,  $\int_a^b \alpha \mathbf{1}_{[c, d]}(x) dx = 0$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Sei  $Z = \{t_j, \tau_j, j \leq n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z| \leq \varepsilon$ . Seien  $l \leq m \leq n$ , sodass  $c \in I_l$ ,  $d \in I_m$ . Dann  $f(\tau_j) = \alpha$  für  $l < j < m$  und  $f(\tau_j) = 0$  für  $j < l - 1$  und  $j > m + 1$ .

$$|S(f, Z) - \alpha(d - c)| = \left| \sum_{j=l-1}^{m+1} f(\tau_j) d_j - \left( \sum_{j=l+1}^{m-1} \alpha d_j + \alpha(t_l - c + d - t_{m-1}) \right) \right| \leq 6|\alpha| |Z| \leq 6|\alpha| \varepsilon$$

Mit  $|Z_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgt Beh.

□

b) Sei  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ . *Behauptung.*  $f$  ist nicht Riemann-Integrierbar.

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Setze  $Z = \{t_k = \frac{k}{n}, k = 0, \dots, n; \tau_k = t_{k-1} \in \mathbb{Q}\}$ ,  $Z' = \{t' = \frac{k}{n}, \tau'_k = \frac{k}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{n}, k = 1, \dots, n\}$ .  $\Rightarrow |Z| = |Z'| = \frac{1}{n}$ ,

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\tau_k)}_{=1} \cdot \frac{1}{n} = 1, S(f, Z') = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\tau'_k)}_{=0} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$  (6.1) kann für  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  nicht gelten.

□

**Bemerkung 6.4** (Verfeinerung). Seien  $Z = \{t_k, \tau_k, k \leq n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  und  $t'_1, \dots, t'_l \in [a, b]$ . Ordne die  $t_k, t'_j$  zu  $a = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \dots < \hat{t}_m = b$ . Setze  $\hat{I}_j = [\hat{t}_{j-1}, \hat{t}_j]$ ,  $\hat{d}_j = \hat{t}_j - \hat{t}_{j-1}$ . Wenn  $\hat{I}_j \subseteq [t_{k-1}, t_k]$ , dann definiere Stützstellen  $\hat{\tau}_j = \tau_k$ . Dann ist  $S(f, Z) = \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}_j) \hat{d}_j$  im Allgemeinen keine Riemann-Summe, weil u. U.  $\hat{\tau}_j \notin \hat{I}_j$ .

**Satz 6.5.**  $C([a, b]) \subset R([a, b])$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Thm 4.16  $\implies f$  ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt: } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Seien  $Z = \{t_k, \tau_k\}, Z' = \{t'_k, \tau'_k\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z|, |Z'| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2}$ . Verfeinere  $Z$  und  $Z'$  wie in Bem. 6.4 zu den gemeinsamen Teilungspunkten  $\{t_k, t_i\} = \{\hat{t}_j\}$ . Erhalte dabei Stützstellen  $\hat{\tau}_j$  zu  $Z$  und  $\hat{\tau}'_j$  zu  $Z'$ , wobei  $|\hat{\tau}_j - \hat{\tau}'_j| \leq 2\frac{\delta_\varepsilon}{2} = \delta_\varepsilon$ , weil  $\hat{I}_j \subseteq I_k \cap I'_{l_j}$  und  $\hat{\tau}_j \in I_{k_j}, \hat{\tau}'_j \in \hat{I}_{l_j}$ . Somit

$$|S(f, Z) - S(f, Z')| \stackrel{6.4}{=} \left| \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}_j) \hat{d}_j - \sum_{j=1}^m f(\hat{\tau}'_j) \hat{d}_j \right| \leq \sum_{j=1}^m \underbrace{|f(\hat{\tau}_j) - f(\hat{\tau}'_j)|}_{\leq \varepsilon} \hat{d}_j \leq \varepsilon(b-a)$$

Lemma 6.2  $\implies$  Beh. □

**Satz 6.6.** Seien  $f, g \in R([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in [a, b], h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gelten:

$$a) \alpha f + \beta g \in R([a, b]) \text{ und } \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$b) \text{ Wenn } f(x) \leq g(x) \ (\forall x \in [a, b]), \text{ dann } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{Speziell } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

$$c) |f| \in R([a, b]) \text{ und } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$d) h \in R([a, b]) \iff h|_{[a, c]} \in R([a, c]) \wedge h|_{[c, b]} \in R([c, b]).$$

$$\text{Dann } \int_a^b h(x) dx = \int_a^c h(x) dx + \int_c^b h(x) dx.$$

*Beweis.* Sei  $Z_n = \{t_{j,n}; \tau_{j,n}; j \leq m_n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ . Setze  $d_{j,n} = t_{j,n} - t_{j-1,n}$ .

a)

$$S(\alpha f + \beta g, Z_n) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha f(\tau_{j,n}) d_{j,n} + \beta \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n} = \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx} + \beta \underbrace{\sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n}}_{\rightarrow \int_a^b g(x) dx \ (n \rightarrow \infty)}$$

b)

$$\underbrace{S(f, Z_n)}_{\rightarrow \int_a^b f(x) dx} = \sum_{j=1}^{m_n} f(\tau_{j,n}) d_{j,n} \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_{j,n}) d_{j,n} = \underbrace{S(g, Z_n)}_{\rightarrow \int_a^b g(x) dx}$$

c) Abschätzung folgt aus  $\pm f \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \sup |f|$ . Siehe Ilias.

d) Siehe Ilias.

□

Man setzt für  $f \in R([a, b])$ ,  $a \leq b$   $\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$ . Auch in diesem Fall gilt Satz 6.6 entsprechend.

## 6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Definition 6.7.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Stammfunktion* von  $f$ , wenn  $F$  differenzierbar ist und  $F' = f$  ist. Man schreibt  $F = \int f dt = \int f = f^{[1]}$ . Beachte: mit  $F$  ist auch die Funktion  $F(x) + c$  für ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  ( $x \in [a, b]$ ) eine Stammfunktion von  $f$ .

**Lemma 6.8.** Sei  $f \in R([a, b])$  und  $f$  sei stetig bei  $x_0 \in [a, b]$ . Dann ist das unbestimmte Integral  $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $x \in [a, b]$ , differenzierbar bei  $x_0$  und  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Beweis.* Sei  $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ . Dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x - x_0} (F_0(x) - F_0(x_0)) - f(x_0) \right| &\stackrel{\text{Bsp. 6.3}}{=} \\ \left| \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{=} \\ \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \underbrace{\sup_{|x_0 - t| \leq |x - x_0|} |f(t) - f(x_0)|}_{\rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0)} \end{aligned}$$

□

**Theorem 6.9** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). a) Sei  $f \in C([a, b])$ . Dann ist jede Stammfunktion  $F$  gegeben durch

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt \quad (\forall x \in [a, b]).$$

Speziell  $x = b$ :

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a) =: F|_b^a.$$

b) Sei  $g \in C^1([a, b])$ . Dann  $\int_a^b g'(t) \, dt = g(b) - g(a)$ .

*Beweis.* a) Lem. 6.8  $\implies F_0(x) = \int_0^x f(t) \, dt$  ist eine Stammfunktion von  $f$ . Sei  $F$  eine weitere Stammfunktion von  $f$ . Dann  $(F - F_0)' = f - f = 0 \xrightarrow{\text{TODO 5.20}} F(x) - F_0(x) = F(a) - F_0(a) = F(a)$ .

b) folgt aus 1 mit  $f = g'$ .

□

*Bemerkung.* Für unstetige  $f$ ,  $g'$  ist der Hauptsatz viel schwieriger und zum Teil falsch. Ein Beispiel ist

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Wie in Bsp. TODO 5.11:  $g$  ist auf  $[0, 1]$  differenzierbar und  $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$ ,  $x > 0 \implies g$  ist unbeschränkt und somit nicht Riemann-integrierbar. Also ist 6.9 2 nicht sinnvoll.

**Beispiel 6.10.** a) Wir kennen schon zahlreiche Stammfunktionen aus Kapitel 5.

b) Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $|x| < \varrho = \text{Konvergenzradius}$ . Betrachte  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ . Wie im Beweis von Thm. TODO 5.9 zeigt man, dass  $F$  den gleichen Konvergenzradius  $\varrho > 0$  hat. Thm. TODO 5.9  $\implies F'(x) = f(x)$ ,  $|x| < \varrho$ .  $F$  ist also eine Stammfunktion von  $f$ .

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1) \\ \implies F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

ist Stammfunktion von  $f$ . Weitere Stammfunktion ist  $\arctan$ . Da  $\arctan 0 = 0 = F(x)$ , folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

- c) Fläche  $A$  zwischen  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = x^2 - \pi x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ). Beachte  $f(\pi) \geq 0 \geq g(x)$  für alle  $x \in [0, \pi]$ . Also

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi (f(x) - g(x)) \, dx \stackrel{\text{HS}}{=} \left( e^x - \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 \right) \right) \Big|_0^\pi \\ &= e^\pi - \left( \frac{1}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2}\pi^2 \right) - (1 - 0) = e^\pi - \frac{\pi^3}{6} - 1. \end{aligned}$$

**Satz 6.11.**

**Beispiel 6.12.**

**Satz 6.13.**

**Beispiel 6.14.**

*Bemerkung 6.15* (Integration rationaler Funktionen). Sei  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , wobei  $p, q$  reelle gekürzte Polynome,  $q$  sei nicht konstant 0, höchster Koeffizient von  $p$  und  $q$  sei gleich 1.

- a) Polynomdivision: es existieren Polynome  $p_0, r$  mit  $\text{grad } p_0 \leq \text{grad } q$ , sodass  $f = r + \frac{p_0}{q}$ .  
 $\implies r$  kann integriert werden
- b) Fundamentalsatz der Algebra:  $\exists! z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  (mit  $z_i \neq z_j$  für  $i \neq j$ ) und  $\exists! n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ , sodass:  $q(x) = (x - z_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - z_m)^{n_m}$ .
- c) Komplexe Partialbruchzerlegung (TODO Königsberger §4.3):  $\exists! c_{jk} \in \mathbb{C}$ :

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{c_{11}}{(x - z_1)} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{(x - z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_{m1}}{(x - z_m)} + \dots + \frac{c_{mn_m}}{(x - z_m)^{n_m}} \quad (6.2)$$

- d) Integration:

- a) Terme mit  $c_{jk}, z_j \in \mathbb{R}$  in (6.2) können integriert werden (man hat Formel für Stammfunktion)
- b) Komplexer Fall für Nennerpotenz  $k = 1$ : Da  $p_0, q$  reell sind, gilt (für  $x \in \mathbb{C}$ ):

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{\overline{p_0(\bar{x})}}{q(\bar{x})} \stackrel{(6.2)}{=} \sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{(\bar{x} - z_j)^k} = \sum_{j,k} \frac{\overline{c_{jk}}}{(x - z_j)^k}$$

Da (6.2) eindeutig ist, gilt: wenn  $c_{jk}, z_j \notin \mathbb{R}$ , dann  $\exists l \neq j$ , sodass  $\bar{z}_j = z_l$  und  $\overline{c_{jk}} = c_{lk}$  (gleiches  $k$ ). Für  $k = 1$  treten im komplexen Fall also Terme der Form auf:

$$\frac{c}{x - z} + \frac{\bar{c}}{x - \bar{z}} = \frac{(c + \bar{c})x - (c\bar{z} + \bar{c}z)}{(x - z)(x - \bar{z})} = \frac{2 \operatorname{Re}(c)x - 2 \operatorname{Re}(c\bar{z})}{x^2 - 2 \operatorname{Re}(z)x + |z|^2} =: \frac{ax + b}{x^2 + \alpha x + \beta}, \quad (6.3)$$

mit  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$ .

Übung: Stammfunktion für (6.3)

e) Komplexer Fall für  $k > 1$ : Mit komplexer Integration erhält man:

$$\int \left( \frac{c}{(t-z)^k} + \frac{\bar{c}}{(t-\bar{z})^k} \right) dt = \frac{-2 \operatorname{Re} (c(x-\bar{z})^k)}{(k+1) (x^2 - 2 \operatorname{Re}(z)x + |z|^2)^{k-1}} \quad (6.4)$$

(siehe TODO Amann/Escher: Analysis II, Bem. II.5.10)

reelle Methode: Walter, Analysis I, §11.5

**Fazit.** 2 zugestanden, findet man Formel für eine Stammfunktion von  $f$ .

**Beispiel.** a) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  gegeben,  $a \neq b$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ .

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)} \stackrel{(6.2), \text{Ansatz}}{=} \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2}{x-b} \implies 1 = c_1(x-b) + c_2(x-a) \quad (*)$$

(für zu bestimmende  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ )

Berechne  $c_1, c_2$ : (\*) gilt nach stetiger Fortsetzung für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Einsetzen:

$$\begin{aligned} x = a : \quad 1 &= c_1(a-b) \neq 0 & \implies c_1 &= \frac{1}{a-b} \\ x = b : \quad 1 &= 0 + c_2(b-a) & \implies c_2 &= \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{b-a} \left( -\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right)$$

$$\begin{aligned} \implies \int f(t) dt &= -\frac{1}{b-a} \left( \int \frac{dt}{t-a} - \int \frac{dt}{t-b} \right) \\ &= -\frac{1}{b-a} (\ln |x-a| - \ln |x-b|) \\ &= \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| \quad (x \neq a, b) \text{ (Probe!)} \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

Ansatz mit (6.2) und (6.3):

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{1+x^2}, \text{ wobei } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ zu bestimmen sind}$$

$$\implies x = a(x-1)(1+x^2) + b(1+x^2) + (cx+d)(x-1)^2 \quad (*)$$



Einsetzen:

$$\begin{aligned} x = 1: \quad 1 &= 0 + 2b + 0 &\implies b &= \frac{1}{2} \\ x = 0: \quad 0 &= -a + b + d &\implies a - d &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (+)$$

Koeffizientenvergleich (vgl. Thm. TODO 5.28):

$$\begin{aligned} \text{für } x^2: \quad 0 &= a + 0 + c &\implies c &= -a \\ \text{für } x^3: \quad 0 &= -a + b - 2c + d = -a + \frac{1}{2} + 2c + d &\implies a + b &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (++)$$

$$(+)\text{ und }(++): 2a = 0 \implies a = 0 = c, d = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} \\ \implies \int f(t)dt &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \arctan x \right) \end{aligned}$$

## 6.3 Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

**Beispiel** (Zinseszins). Gegeben seien Anfangskapital  $u_0$ , Anlage dauert Zinsrate nach Zeit  $\frac{t}{n}$  mit Wiederanlage der Zinsen.  $u_k$  sei Kapital zur Zeit  $\frac{kt}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$\begin{aligned} \implies u_1 &= u_0 + \frac{at}{n} u_0 = \left( 1 + \frac{at}{n} \right) u_0 \\ u_2 &= u_1 + \frac{at}{n} u_1 = \left( 1 + \frac{at}{n} \right)^2 u_0 \\ \text{iterativ: } u_n &= \left( 1 + \frac{at}{n} \right)^n u_0 \end{aligned}$$

„instantane Wiederanlage“ = TODO „ $n \rightarrow \infty$ “. Damit  $u_n \rightarrow e^{at} u_0$  (vgl. Aufg. 5.6, Aufg. 12.3 e).  $\rightsquigarrow u(t) = e^{at} u_0$  = Kapital zur Zeit  $t$  bei instantaner Wiederanlage.

Nach Bem. TODO 5.21 ist  $u \in C^1(\mathbb{R})$  die einzige Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (a, u_0 \in \mathbb{R} \text{ gegeben})$$

Andere Interpretation:  $a = \frac{u'(t)}{u(t)}$  = momentane, relative Änderung des Kapitals („pro Kopf“). Weitere Beispiele für diese Differentialgleichung: Radioaktiver Zerfall ( $a < 0$ ), Populationswachstum bei unbeschränktem Nahrungsangebot ( $u(t)$  = Stoffmenge)

„ $\frac{u'}{u} = a$ “ ist unplausibel für Population (etwa da  $u(t) \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) für  $a > 0$ ).  
 VERHULST (1837): Gesetz für begrenztes Wachstum:  $\frac{u'(t)}{u(t)} = \lambda - \frac{\lambda u(t)}{u_\infty}$  ist  $u(t)$ -abhängig.  
 „mehr Konkurrenten“ = TODO  $u(t)$  groß = TODO weniger Wachstum

$$\implies \begin{cases} u'(t) = \lambda \left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right) u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

Gegeben sind  $\lambda, u_0, u_\infty > 0$  ( $\lambda$ : Wachstumsparameter,  $u_\infty$ : Sättigungsparameter,  $u_0$ : Anfangswert). Gesucht:  $u \in C^1(\mathbb{R}_+)$ , das (6.5) für  $t \geq 0$  löst.

*Bemerkung.* Spezielle, „stationäre“ Lösungen:  $u(t) = 0$  mit  $u_0 = 0$  oder  $u(t) = u_\infty$  mit  $u_0 = u_\infty$  (für alle  $t \in \mathbb{R}$ ). Im folgenden sei  $u_0 \neq u_\infty$ ,  $u_0 > 0$ .

Lösung von (6.5): Wir nehmen an, es gebe eine Lösung  $u \in C^1([0, b])$  von (6.5). Wenn  $u_0 > u_\infty$  ( $u_0 < u_\infty$ ), dann existiert ein  $t_0 > 0$ , sodass  $u(t) > 0$ ,  $u(t) > u_\infty$  ( $u(t) < u_\infty$ ) für alle  $0 \leq t \leq t_0$  (da  $u$  stetig und  $u(0) = u_0$ ).

$$(6.5) \implies \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} = \frac{\lambda}{u_\infty} \quad (\forall 0 \leq s \leq t_0)$$

$$\xrightarrow{\int_0^t \dots ds} \int_0^t \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} ds = \int_0^t \frac{\lambda}{u_\infty} ds = \frac{\lambda}{u_\infty} t \quad (\forall 0 \leq t \leq t_0)$$

Substitution:  $x = u(s)$ ,  $\frac{dx}{ds} = u'(s)$ ,  $u(0) = u_0$

$$\begin{aligned} &\implies \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{(u_\infty - x)x} = \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{x}{|x - u_\infty|} \Big|_{u_0}^{u(t)} \\ &\xrightarrow{x>0} \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} = \frac{\lambda}{u_\infty} t + \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\ &\xrightarrow{\cdot u_\infty, \exp} \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} = e^{\lambda t} \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} \\ &\implies u(t) = \frac{u_0 u_\infty}{u_0 + (u_\infty - u_0)e^{\lambda t}}. \end{aligned}$$

Probe zeigt, dass dieses  $u$  (6.5) für alle  $t \geq 0$  löst.

Es gilt:

- $u(t) > 0$  für alle  $t \geq 0$  ( $u_0 > 0$ ) (biologisch sinnvoll)
- $u(t) \rightarrow u_\infty$  für  $t \rightarrow \infty$
- $u(t)$  wächst und  $u(t) < u_\infty$  ( $\forall t > 0$ ), falls  $u_0 < u_\infty$
- $u(t)$  fällt und  $u(t) > u_\infty$  ( $\forall t > 0$ ), falls  $u_0 > u_\infty$

Gegeben sei  $f \in C([a, b])$ ,  $g \in C(\mathbb{R}_+)$ ,  $u_0 \in (a, b)$ . Suchen  $u \in C^1([0, \tau))$  und  $\tau \in (0, \infty)$ , sodass  $u(t) \in (a, b)$  für alle  $t \in [0, \tau)$  und

$$\begin{cases} u'(t) = g(t)f(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (6.6)$$

(in (6.5):  $f(x) = \left(1 - \frac{x}{u_\infty}\right)x$ ,  $g(x) = \lambda$ )

**Satz 6.16** (Trennung der Variablen). *Sei  $f \in C((a, b))$ ,  $g \in C(\mathbb{R}_+)$ ,  $u_0 \in (a, b)$ ,  $f(u_0) \neq 0$ . Dann existiert ein  $t_0 > 0$  und eine eindeutige Lösung  $u \in C^1([0, t_0])$  von (6.6).*

*Beweis.* Sei etwa  $f(u_0) > 0$  und  $\tau > 0$ . Wähle  $\varepsilon \in (0, f(u_0))$ . Da  $f$  stetig ist, existiert  $\delta > 0$  mit  $f(x) > \varepsilon$  für alle  $x \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \subseteq (a, b)$ . Sei  $M := \max_{|x-u_0| \leq \delta} f(x) < \infty$  (Satz vom Maximum). Setze  $t_0 = \min\{\frac{\delta}{Mc}, T\}$ ,  $c = \max_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$ .

a) Eindeutigkeit: Sei  $u \in C^1([0, \tau))$  eine Lösung von (6.6). Annahme:  $\tau > t_0$  und es existiere  $t_1 \in (0, t_0)$  mit  $|u(s) - u_0| \leq \delta$  für alle  $0 \leq s < t_1$  und  $|u(t_1) - u_0| = \delta$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow |u(t_1) - u_0| &\stackrel{\text{HS}}{=} \left| \int_0^{t_1} \underbrace{u'(s)}_{\stackrel{(6.6)}{=} f(u(s))g(s)} ds \right| \\ &\stackrel{\text{Satz 6.6}}{\leq} \int_0^{t_1} |f(u(s))| |g(s)| ds \leq \int_0^{t_1} M c ds \leq M c t_1 < M c t_0 = \delta \quad \nexists \end{aligned}$$

$\Rightarrow |u(s) - u_0| \leq \delta$  für alle  $0 \leq s < \min\{t_0, T\} =: \bar{t}$ . Damit (6.6)  $\Rightarrow \frac{u'(s)}{f(u(s))} = g(s)$ .

$$\Rightarrow G(t) := \int_0^t g(s) ds = \int_0^t u'(s) df(u(s))s \stackrel{x=u(s)}{=} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} \quad \text{für alle } 0 \leq t < \bar{t} \quad (6.7)$$

Setze  $H(y) = \int_{u_0}^y dx f(x)$  für  $y \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \Rightarrow H(u(t)) = G(t)$ .  $H$  ist strikt wachsend

$$u(t) = H^{-1}(G(t)) \quad (\forall 0 \leq t < \bar{t}) \quad (6.8)$$

b) Existenz: Sei  $u$  durch (6.8) für  $0 \leq t \leq t_0$  gegeben. Dann  $u(0) = H^{-1}(G(0)) = H^{-1}(0) = u_0$ . Kettenregel und Umkehrsatz liefern:

$$\exists u'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(t)))} G'(t) \stackrel{\text{HS}}{=} \frac{1}{H'(u(t))} \stackrel{\text{HS}}{=} \frac{1}{\frac{1}{f(u(t))}} g(t) = f(u(t))g(t)$$

$\Rightarrow u$  löst (6.6).

Fazit:  $u$  aus (6.8) ist eine Lösung von (6.6) und jede weitere Lösung ist auf  $[0, t_0]$  gleich diesem  $u$  und kann, falls  $\tau < t_0$ , zu  $u$  auf  $[0, t_0]$  fortgesetzt werden.  $\square$

**Beispiel 6.17.** a)

$$\text{Betrachte } \begin{cases} u'(t) = u(t)^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0. \text{ Es sei } u_0 > 0.$$

$$\implies f(x) = x^2, g(t) = 1.$$

$$\xrightarrow{\text{TV, (6.7)}} \underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x^2}}_{= -\frac{1}{x} \Big|_{u_0}^{u(t)}} = \int_0^t 1 \, ds = t$$

$$\implies t = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}$$

$$\implies u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t} \text{ für } 0 \leq t < \frac{1}{u_0} =: \tau$$

Zum Beispiel für  $u_0 = 1$ :  $u(t) = \frac{1}{1-t}$  (Probe!). „blow up“.

b)

$$\text{Sei } a \in C(\mathbb{R}), u_0 \in \mathbb{R}. \text{ Betrachte } \begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, t \geq 0.$$

$\implies f(x) = x$ . Sei  $u_0 > 0$ . Trennung der Variablen liefert

$$\underbrace{\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x}}_{=\ln u(t) - \ln u_0} = \int_0^t a(s) \, ds$$

$$\implies u(t) = \exp \left( \ln u_0 + \int_0^t a(s) \, ds \right) = \exp \left( \int_0^t a(s) \, ds \right) u_0$$

Probe zeigt: Dies löst die Gleichung für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $u_0 \in \mathbb{R}$ .

c)  $u'(t) = \sqrt{u(t)}$ ,  $u(0) = 0$ ,  $t \geq 0$ .  $\implies f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(t) = 1$ .  $\implies f(0) = f(u_0) = 0$ , haben Lösung  $v(x) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ . Führe Trennung der Variablen trotzdem durch. Sei  $u$  eine weitere Lösung, die auf  $(0, t_0]$  ungleich 0 ist. Dann  $\frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} = 1$  für  $0 < s \leq t_0$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < t_0$

$$\xrightarrow{\text{TV}} \int_{\varepsilon}^t 1 \, ds = \int_{\varepsilon}^t \frac{u'(s)}{\sqrt{u(s)}} \, ds = \int_{u(\varepsilon)}^{u(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \left( \sqrt{u(t)} - \sqrt{u(\varepsilon)} \right).$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ :  $t = 2\sqrt{u(t)}$  ( $0 < t \leq t_0$ )  $\implies u(t) = \frac{t^2}{4}$ . Probe:  $u$  löst Gleichung.

## 6.4 Uneigentliche Integrale

**Definition 6.18.**    a)

b)

*Bemerkung 6.19.*    a)

b)

**Beispiel 6.20.**    a)

b)

c)

d)

**Satz 6.21.**    a)

b)

**Beispiel 6.22.**    a)

b)

c)

d)

**Beispiel 6.23.**

**Beispiel 6.24.**

**Trapezregel.**    ...