

## 12. Konvergenzkriterien

### Satz 12.1 (Leibnizkriterium)

Sei  $(b_n)$  eine monoton fallende Nullfolge und  $a_n := (-1)^{n+1}b_n$ . Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent.

### Beweis

Wie bei  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ . Von  $(b_n) = (\frac{1}{n})$  wurde nur benutzt:  $\frac{1}{n}$  ist eine fallende Nullfolge. ■

**Bemerkung:** Gilt  $a_n = b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist genau dann konvergent, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent ist.

### Satz 12.2 (Majoranten- und Minorantenkriterium)

- (1) **Majorantenkriterium:** Gilt  $|a_n| \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent, so gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.
- (2) **Minorantenkriterium:** Gilt  $a_n \geq b_n \geq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent, so gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.

### Beweis

- (1)  $s_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ,  $\sigma_n := |a_1| + \dots + |a_n| \forall n \in \mathbb{N}$ . O.b.d.A.:  $|a_n| \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ .  
 $(s_n)$  ist konvergent  $\xrightarrow{6.1} (s_n)$  ist beschränkt  $\implies \exists c \geq 0 : a_n \leq c \forall n \in \mathbb{N} \implies 0 \leq \sigma_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = s_n \leq c \forall n \in \mathbb{N} \implies (\sigma_n)$  ist beschränkt  
 $\xrightarrow{11.1(1)} (\sigma_n)$  konvergent.
- (2) Annahme:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent  $\xrightarrow{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist konvergent. Widerspruch! ■

### Beispiele:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ ,  $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$ . Bekannt:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent  $\xrightarrow{12.2(2)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent. Folgerung:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$ ,  $a_n = \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$ ,  $b_n := \frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2-n+\frac{1}{8}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty) \implies \exists m \in \mathbb{N} : \frac{a_n}{b_n} \leq 2 \forall n \geq m \implies a_n \leq 2b_n \forall n \geq m (|a_n| = a_n)$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} 2b_n$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.2(1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent.
- (3) Sei  $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ :  $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.2(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ist divergent.
- (4) Sei  $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{Q}$ :  $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.2(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ist konvergent.

- (5) In der Übung gezeigt: Ist  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ist konvergent genau dann, wenn  $\alpha > 1$ .  
 Bemerkung: Ist später die allgemeine Potenz  $a^x$  ( $a > 0, x \in \mathbb{R}$ ) bekannt, so zeigt man analog:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \iff \alpha > 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Definition ( $\infty$  als Limes Superior)**

Ist  $(\alpha_n)$  eine Folge und  $\alpha_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  und ist  $(\alpha_n)$  nicht nach oben beschränkt, so setze  $\limsup \alpha_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n := \infty$ .

**Vereinbarung:**  $x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

**Satz 12.3 (Wurzelkriterium)**

Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ .

- (1) Ist  $\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent
- (2) Ist  $\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent
- (3) Ist  $\alpha = 1$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Beweis**

- (1)  $\alpha < 1$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $x := \alpha + \varepsilon < 1$ . 9.2  $\implies \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon = x$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies |a_n| < x^n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.1(1)}$  Behauptung.
- (2) (i)  $\alpha > 1, \alpha < \infty$ : Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\alpha - \varepsilon > 1$ . 9.2  $\implies \sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon > 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies |a_n| > 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \not\rightarrow 0 \xrightarrow{11.1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.
- (ii)  $\alpha = \infty \implies \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{wie eben}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.
- (3) Siehe Beispiele ■

**Beispiele:**

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.  $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$ .
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.  $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2 \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$ .
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}}_{=: a_n}$ .  $\sqrt[n]{|a_n|} = (1 + \frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.
- (4) Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ n \cdot x^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ .  
 Betrachte  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .  $\alpha_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{n} |x| & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ .  
 $\alpha_{2n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ .  $\alpha_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{2n-1} \cdot |x| \rightarrow |x|$ . A16  $\implies \mathcal{H}(\alpha_n) = \{\frac{1}{2}, |x|\}$ .  
 Ist  $|x| < 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut.  
 Ist  $|x| > 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert.  
 Sei  $|x| = 1$ :  $|a_{2n-1}| = |(2n-1)x^{2n-1}| = 2n-1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.

- (5) Sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{R}$  und  $|q| < 1$ . **Behauptung:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ . **Beweis:**  $a_n := n^p q^n$ .  
 $\sqrt[p]{|a_n|} = \sqrt[p]{n^p} |q| = (\sqrt[p]{n})^p |q| \rightarrow |q| < 1 \xrightarrow{12.3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$ .

### Satz 12.4 (Quotientenkriterium)

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  $\alpha_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$  (ffa  $n \in \mathbb{N}$ ).

- (1) Ist  $|\alpha_n| \geq 1$  ffa  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.
- (2) Es sei  $(\alpha_n)$  beschränkt,  $\beta := \liminf |\alpha_n|$  und  $\alpha := \limsup |\alpha_n|$ .
  - (i) Ist  $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.
  - (ii) Ist  $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.
  - (iii) Ist  $\alpha = \beta = 1$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich.

### Beweis

O.B.d.A.:  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

- (1) Dann:  $|a_2| \geq |a_1| > 0$ ,  $|a_3| \geq |a_2| \geq |a_1| > 0$ , ... allgemein:  $|a_n| \geq |a_1| > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$  die Behauptung.
- (2) (i) Sei  $\beta > 1$ , Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\beta - \varepsilon > 1$ . 9.2  $\Rightarrow |\alpha_n| > \beta - \varepsilon > 1$  ffa  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  die Behauptung.
- (ii) Sei  $\alpha < 1$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $x := \alpha + \varepsilon < 1$ . 9.2  $\Rightarrow |\alpha_n| < \alpha + \varepsilon = x$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Dann:  $|a_2| \leq |a_1|x$ ,  $|a_3| \leq |a_2|x \leq |a_1|x^2$ , ... allgemein:  $|a_n| \leq |a_1|x^{n-1}$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x^{n-1}$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.
- (iii) siehe Beispiele ■

### Beispiele:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = \beta = 1$ .
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = \beta = 1$ .

### Beispiel 12.5 (Exponentialfunktion)

Für  $x \in \mathbb{R}$  betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert diese Reihe (absolut)?.

Klar: für  $x = 0$  konvergiert die Reihe.

Sei  $x \neq 0$  und  $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ;

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{also } \alpha = \beta = 0)$$

12.4  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ist absolut konvergent für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Also wird durch  $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) eine Funktion  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Diese Funktion  $E$  heißt die **Exponentialfunktion**.

$$E(0) = 1, E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

**Bemerkung:** Später zeige wir:  $E(r) = e^r \forall r \in \mathbb{Q}$ . Dann *definieren* wir  $e^x := E(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**Motivation:**  $b_n := (-1)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $b_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots$  ist divergent.  
 $a_1 := b_1 + b_2$ ,  $a_2 := b_3 + b_4$ , ... also:  $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots$  ist konvergent. Also: „Im Allgemeinen darf man Klammern in konvergenten Reihen nicht weglassen.“

**Satz 12.6 (In konvergenten Folgen darf man Klammern setzen)**

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent und es seien  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 < n_2 < \dots$ . Setze  $b_1 := a_1 + \dots + a_{n_1}$ ,  $b_2 := a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$ , allgemein:  $b_k := a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$  ( $k \geq 2$ ). Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Beweis**

$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ;  $\sigma_k := b_1 + b_2 + \dots + b_k$ . Es ist  $\sigma_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_k} = s_{n_k} \implies \sigma_k$  ist eine Teilfolge von  $s_n \xrightarrow{8.1(3)} (\sigma_k)$  konvergent und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . ■