16. Das Lebesguesche Integral

Es sei $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Im Folgenden lassen wir Funktionen und Reihen mit Werten in $\tilde{\mathbb{R}}$ zu.

Regeln: $a < \infty\ \forall a \in \mathbb{R}$. $\infty \le \infty$, $\infty \pm c = c \pm \infty = \infty\ \forall c \in \tilde{\mathbb{R}}$. $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty\ \forall c \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$. Ist (a_n) eine Folge in $\tilde{\mathbb{R}}$ und $a_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \infty$, falls alle $a_n \in \mathbb{R}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \infty$, falls $a_n = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ und $a \ge 0\ \forall a \in A$.

$$\inf A := \begin{cases} \infty & \text{, falls } A = \{\infty\} \\ \inf(A \setminus \{\infty\}) & \text{, falls } A \setminus \{\infty\} \neq \emptyset \end{cases}$$

Motivation: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, $f \ge 0$ auf $\mathbb{R}$ und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x)\}$. Es seien $Q_1, Q_2, \dots$ offene Quader im $\mathbb{R}^1$ und $c_1, c_2, \dots \ge 0$. Es gelte $f(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ ($\sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{Q_k}(x) = \infty$ ist zugelassen!)

Dann kann man $\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_1(Q_k)$ betrachten als obere Approximation an den „Inhalt" von M. ($\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_1(Q_k) = \infty$ ist zugelassen)

Im Folgenden bedeutet $\sum_k$ entweder eine endliche Summe oder eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \dots$

Definition
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Seien $(Q_1, c_1), (Q_2, c_2), \dots$ endlich viele oder abzählbar viele Paare mit Q_j *offener* Quader und $c_j \in [0, \infty)$ und es gelte $|f(x)| \le \sum_k c_k 1_{Q_k}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Dann heißt $\Phi := \sum_k c_k 1_{Q_k}$ eine **Hüllreihe** für f und $I(\Phi) := \sum_k c_k v_n(Q_k)$ ihr **Inhalt**. $\mathscr{H}(f) := \{\Phi : \Phi \text{ ist eine Hüllreihe für } f\}$ $\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) : \Phi \in \mathscr{H}(f)\}$ (**L^1-Halbnorm** von f.)

Beachte: $\|f\|_1 \ge 0$, $\|f\|_1 = \infty$ ist zugelassen.

Behauptung: $\mathscr{H}(f) \neq \emptyset$

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k := (-k, k) \times \dots \times (-k, k)$ ($\subseteq \mathbb{R}^n$). $\Phi := \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot 1_{Q_k}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n \implies \exists m_0 \in \mathbb{N} : x \in Q_{m_0} \implies x \in Q_k\ \forall k \ge m_0 \implies \Phi(x) \ge \sum_{k=m_0}^{\infty} 1 \cdot \underbrace{1_{Q_k}}_{=1} = \infty \implies$

$|f(x)| \le \Phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \Phi \in \mathscr{H}(f)$.
$(I(\Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^n = \infty)$.

Beispiel
$(n = 1), A = \{0\}$ ($\subseteq \mathbb{R}$); $f := 1_A$ (also: $f(0) = 1$, $f(x) = 0\ \forall x \neq 0$).

Sei $\varepsilon > 0$, $Q := (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Phi := 1_Q \implies \Phi \in \mathscr{H}(f)$.
$I(\Phi) = v_1(Q) = 2\varepsilon \implies \|f\|_1 \le 2\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\implies} \|f\|_1 = 0$. Aber: $f \neq 0$

Satz 16.1 (Rechenregeln der L^1-Halbnorm)
Seien $f, g, f_1, g_1, \ldots : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ Funktionen.

(1) $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1 \ \forall c \in \mathbb{R}$

(2) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

(3) Aus $|f| \leq |g|$ auf $\mathbb{R}^n$ folgt $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$

(4) $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1$

Beweis

(1) Klar

(2) O.B.d.A.: $\|f_1\|_1 + \|g_1\|_2 < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \Phi_1 \in \mathscr{H}(f)$, $\exists \Phi_2 \in \mathscr{H}(g)$: $I(\Phi_1) \leq \|f\|_1 + \varepsilon$, $I(\Phi_2) \leq \|g\|_1 + \varepsilon$. $\Phi := \Phi_1 + \Phi_2 \implies \Phi \in \mathscr{H}(f + g)$ und $I(\Phi) = I(\Phi_1) + I(\Phi_2) \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon \implies \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\implies}$ Beh.

(3) Sei $\Phi \in \mathscr{H}(g) \implies \Phi \in \mathscr{H}(f)$. Also: $\mathscr{H}(g) \subseteq \mathscr{H}(f) \implies$ Beh.

(4) In der Übung ∎

Satz 16.2 (L^1-Halbnorm eines Quaders)
Es sei Q ein *abgeschlossener* Quader im $\mathbb{R}^n$. Dann:

$$v_n(Q) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q dx = \|1_Q\|_1$$

Beweis
$f := 1_Q$. $\int f dx \overset{\S 15}{=} v_n(Q)$. Zu zeigen: $v_n(Q) = \|f\|_1$.

(1) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein offener Quader $\hat{Q}$ mit: $Q \subseteq \hat{Q}$ und $v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon$. $\Phi := 1_{\hat{Q}} \implies \Phi \in \mathscr{H}(f)$ und $I(\Phi) = v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon \implies \|f\|_1 \leq v_n(Q) + \varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\implies} \|f\|_1 \leq v_n(Q)$

(2) Sei $\Phi = \sum_k f_k 1_{Q_k} \in \mathscr{H}(f)$, also $c_k \geq 0$, Q_k offene Quader.

Sei $\varepsilon \in (0, 1)$. Für $x \in Q$: $1 = 1_Q(x) = f(x) = |f(x)| \leq \sum_k c_k 1_{Q_k}(X)$

$\exists n(x) \leq \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon$ und (o.B.d.A.) $1_{Q_k}(x) = 1$ $(k = 1, \ldots, n(x))$. $Q_1, \ldots, Q_{n(x)}$ offen $\implies \exists \delta_x > 0 : U_\delta(x) \subseteq Q_j$ $(j = 1, \ldots, n(x)) \implies \sum_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(z) \geq 1 - \varepsilon \ \forall z \in U_{\delta_x}(x)$ $(*)$.

$$Q \subseteq \bigcup_{x \in Q} U_{\delta_x}(X) \overset{2.2(3)}{\implies} \exists x_1, \ldots, x_p \in Q : Q \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} U_{\delta_{x_j}}(x_j)$$

$N := \max\{n(x_1), \ldots, n(x_p)\}$. $\varphi_1 := \sum_{k=1}^N c_k 1_{Q_k}$, $\varphi_2(x) := (1-\varepsilon)1_Q$. Also: $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{T}_n$.

$$\int \varphi_2 dx = (1-\varepsilon)v_n(Q), \int \varphi_1 dx = \sum_{k=1}^N c_k v_n(Q_k) \leq \sum_k v_k v_n(Q_k) = I(\Phi)$$

Sei $x \notin Q$: $\varphi_2(x) = 0 \leq \varphi_1(x)$.

Sei $z \in Q$: $\exists j \in \{1, \ldots, p\} : z \in U_{\delta_{x_j}}(x_j) \implies \varphi_1(z) = \sum_{k=1}^N c_k 1_{Q_k}(z) \geq \sum_{k=1}^{n(x_j)} c_k 1_{Q_k}(z) \geq 1-\varepsilon = \varphi_2(z)$. Also $\varphi_2 \leq \varphi_1$ auf $\mathbb{R}^n$. 15.4 $\implies \int \varphi_2 dx \leq \int \varphi_1 dx \implies (1-\varepsilon)v_n(Q) \leq I(\Phi)$. $\Phi \in \mathscr{H}(f)$ beliebig $\implies (1-\varepsilon)v_n(Q) \leq \|f\|_1$. Also: $(1-\varepsilon)v_n(Q) \leq \|f\|_1 \; \forall \varepsilon > 0 \overset{\varepsilon \to 0}{\implies} v_n(Q) \leq \|f\|_1$.

(1) und (2) $\implies v_n(Q) = \|f\|_1$ ■

Vorbemerkung: Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nicht offene Quader. Dann existieren Quader $Q_1, \ldots, Q_\nu \subseteq \partial Q$ mit: $Q = Q^0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_\nu$ und $Q^0, Q_1, \ldots, Q_\nu$ paarweise disjunkt. Insbesondere: $v_n(Q_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ und $1_Q = 1_{Q^0} + 1_{Q_1} + \cdots + 1_{Q_\nu}$.

Satz 16.3 (L^1-Halbnorm einer Treppenfunktion)
Sei $\varphi \in \mathscr{T}_n$ und Q ein beliebiger Quader im $\mathbb{R}^n$.

(1) $\mathscr{H}(\varphi) = \mathscr{H}(|\varphi|)$, $\|f\|_1 = \||\varphi|\|_1$

(2) $\|\varphi\|_1 = \int |\varphi| dx$

(3) $v_n(Q) = \int 1_Q dx = \|1_Q\|_1$

Beweis

(1) Klar

(2) Sei $\varphi = \sum_{k=1}^m \hat{c_k} 1_{\hat{Q}_k}$ wobei $\hat{c_k} \in \mathbb{R}$, $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_m$ passende disjunkte Quader. Anwendung der Vorbemerkung auf jeden nichtoffenen Quader $\hat{Q}_j$ liefert:

$$\varphi = \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^r d_k 1_{R_k}$$

wobei $Q_1, \ldots, Q_s, R_1, \ldots, R_r$ paarweise diskunkt, $Q_1 \ldots, Q_s$ offen, $v_n(R_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$. Wegen (1): O.B.d.A: $\varphi \geq 0$; dann: $c_k, d_k \geq 0$, $\alpha := \sum_{k=1}^r d_k$. Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem R_k exisitert ein Quader $\hat{R}_k$: $v_n(\hat{R}_k) = \varepsilon$.

$$\Phi := \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^r d_k 1_{\hat{R}_k} \implies \Phi \in \mathscr{H}(f)$$

und

$$I(\Phi) = \underbrace{\sum_{k=1}^s c_k v_n(Q_k)}_{=\int \varphi dx} + \underbrace{\sum_{k=1}^r d_k v_n(\hat{R}_k)}_{=\varepsilon\alpha} = \int \varphi dx + \varepsilon\alpha \implies \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx + \varepsilon\alpha$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx$$

Wähle einen *abgeschlossenen* Quader Q mit $Q_1 \cup \ldots \cup Q_s \cup R_1 \cup \ldots \cup R_r \subseteq Q$. Dann: $\varphi(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash Q$, $m := \max\{\varphi(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, $\psi := m \cdot 1_Q - \varphi \in \mathscr{T}_n \implies \psi \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$. Wie oben: $\|\psi\|_1 \leq \int \psi dx$. $\int \psi dx = \int (m \cdot 1_Q - \phi) dx = m \int 1_Q dx - \int \psi dx \leq m \int 1_Q dx - \|\psi\|_1 \overset{16.2}{=} m\|1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|m \cdot 1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi\|_1$.

(3) folgt aus (2) und $\varphi = 1_Q$ ■

Satz 16.4 (Integration und Grenzwertbildung bei Treppenfunktionen)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$, seien $(\varphi_k), (\psi_k)$ Folgen in $\mathscr{T}_n$ mit $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$, $\|f - \psi_k\|_1 \to 0$ $(k \to \infty)$. Dann sind $(\int \varphi_k dx)$ und $(\int \psi_k dx)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx = \lim_{k\to\infty} \int \psi_k dx$$

Beweis
$a_k := \int \varphi_k dx$, $b_k := \int \psi_k dx$ $(k \in \mathbb{N})$.

$|a_k - a_l| = |\int \varphi_k dx - \int \varphi_l dx| = |\int (\varphi_k - \varphi_l) dx| \overset{15.4}{\leq} \int |\varphi_k - \varphi_l| dx \overset{16.3}{=} \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 = \|\varphi_k - f + f - \varphi_l\|_1 \leq \|\varphi_k - f\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1 \implies (a_k)$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und als solche konvergent. Genau so: (b_k) ist konvergent.

$a := \lim a_k$, $b := \lim b_k$. $|a_k - b_k| \overset{\text{wie oben}}{\leq} \|f - \varphi_k\|_1 + \|f - \psi_k\|_1 \overset{k\to\infty}{\Longrightarrow} a = b$. ■

Definition

(1) $L(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}} : \exists$ Folge $(\varphi_k) \in \mathscr{T}_n$ mit: $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0 \ (k \to \infty)\}$

(2) Ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$, so heißt f **Lebesgueintegrierbar über** $\mathbb{R}^n$.

(3) Ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und (φ_k) eine Folge in $\mathscr{T}_n$ mit $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$, so heißt

$$\int f dx := \int f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx$$

das **Lebesgueintegral** von f über $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: (1) Wegen 16.4 ist $\int f dx$ wohldefiniert und reell.

(2) Ist $\varphi \in \mathscr{T}_n$, so wähle $(\varphi_k) = (\varphi, \varphi, \varphi, \ldots) \implies \varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ und Integral von φ aus §15 stimmt mit obigem Integral überein. Insbesondere: $\mathscr{T}_n \subseteq L(\mathbb{R}^n)$

Satz 16.5 (Rechenregln für Lebesgueintegrale)
Es seien $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$.

(1) $\alpha f + \beta g \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$

(2) $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$ und $|\int f dx| \leq \int |f| dx = \|f\|_1$

(3) Aus $f \leq g$ auf $\mathbb{R}^n$ folgt: $\int f dx \leq \int g dx$

(4) Ist g auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt $\implies fg \in L(\mathbb{R}^n)$.

Beweis

(1) Klar.

(2) $\exists$ Folge (φ_k) in $\mathscr{T}_n$ mit $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$ $(k \to \infty)$. $|\varphi_k| \in \mathscr{T}_n$ $(k \in \mathbb{N})$. $||f| - |\varphi|| \leq |f - \varphi_k| \overset{16.4}{\implies} \||f| - |\varphi_k|\|_1 \leq \|f - k\varphi_k\|_1 \implies |f| \in L(\mathbb{R}^n)$ und $|\int f dx| = |\lim \int \varphi_k dx| = \lim |\int \varphi_k dx| \overset{15.4}{\leq} \lim \underbrace{\int |\varphi_k| dx}_{\overset{16.3}{=} \|\varphi_k\|_1} = \int |f| dx$.

$\|f\|_1 = \|f - \varphi_k + \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|\varphi_k\|_1 \overset{k\to\infty}{=} \|f\|_1 \leq \int |f| dx$. $\|\varphi_k\|_1 = \|\varphi_k - f + f\|_1 \leq \|\varphi_k - f\|_1 + \|f\|_1 \overset{k\to\infty}{\implies} \int |f| dx \leq \|f\|_1$

(3) Es ist $g - f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$. $\int g dx - \int f dx \overset{(1)}{=} \int \underbrace{(g-f)}_{>0} dx = \int |g - f| dx \overset{(2)}{=} \|g - f\|_1 \geq 0$.

(4) $\exists M \geq 0 : |g| \leq M$ auf $\mathbb{R}^n$. Sei $k \in \mathbb{N}$. $\exists \varphi_k \in \mathscr{T}_n : \|f - \varphi_k\|_1 \leq \frac{1}{2Mk}$. $\exists \gamma \geq 0$: $|\varphi_k| \leq \gamma$ auf $\mathbb{R}^n$. $\exists \psi_k \in \mathscr{T}_n : \|g - \psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2\gamma k}$. Dann: $\varphi_k \psi_k \in \mathscr{T}_n$.

$|fg - \varphi_k\psi_k| = |gf - g\varphi_k + g\varphi_k - \varphi_k\psi_k| \leq |g||f - \varphi_k| + |\varphi_k||g - \psi_k| \leq M|f - \varphi_k| + \gamma|g - \psi_k| \overset{16.1}{\implies} \|fg - \varphi_k\psi_k\|_1 \leq M\|f - \varphi_k\|_1 + \gamma\|g - \psi_k\|_1 \leq M \cdot \frac{1}{2Mk} + \gamma\frac{1}{2\gamma k} = \frac{1}{k} \implies$ Beh. ■

Definition

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ (nicht $\tilde{\mathbb{R}}$!) seien Funktionen.

$$\max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \ (x \in D)$$

$$\min(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \ (x \in D)$$

$$f^+ := \max(f, 0), \ f^- := \max(-f, 0) = (-f)^+$$

Es ist $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$, $f^+, f^- \geq 0$ auf D und $f = f^+ - f^-$.

Folgerung 16.6

Gilt für $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dass $f, g \in L(\mathbb{R}^n) \implies \max(f,g), \min(f,g), f^+, f^- \in L(\mathbb{R}^n)$.

Satz 16.7 („Kleiner“ Satz von Beppo Levi)

$f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ sei eine Fkt., (φ_k) sei eine Folge in $\mathscr{T}_n$ mit: $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$, $\varphi_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ und $(\int \varphi_k dx)$ sei beschränkt.

Dann: $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim \int \varphi_k dx$ $(\lim \int \varphi_k dx = \int \lim \varphi_k dx)$

Beweis
$a_j := \int \varphi_{j+1}dx - \int \varphi_j dx$ $(j \in \mathbb{N})$. $a_j \geq 0$ $(j \in \mathbb{N})$. $\sum_{j=1}^m a_j = \int \varphi_{m+1}dx - \int \varphi_1 dx \implies (\sum_{j=1}^m a_j)$ ist beschränkt. $\overset{\text{Ana I}}{\implies} \sum_{j=1}^\infty a_j$ konvergiert.

Für $k \in \mathbb{N} : c_k := \sum_{j=k}^\infty a_j$. Ana I $\implies c_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $m \geq k : \sum_{j=k}^m (\varphi_{j+1} - \varphi_j) = \varphi_{m+1} - \varphi_k \overset{m\to\infty}{\to} f - \varphi_k = \sum_{j=k}^\infty (\varphi_{j+1} - \varphi_j)$.

$||f - \varphi_k||_1 = ||\sum_{j=k}^\infty (\varphi_{j+1} - \varphi_j)||_1 \overset{16.1}{\leq} \sum_{j=k}^\infty ||\varphi_{j+1} - \varphi_j||_1 \overset{16.3}{=} \sum_{j=k}^\infty \int |\varphi_{j+1} - \varphi_j| dx = \sum_{j=k}^\infty a_j = c_k \to 0$ $(k \to \infty) \implies ||f - \varphi_k||_1 \to 0$ $(k \to \infty) \implies$ Beh. ■

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) Ist $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine Fkt.:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}, \quad f_A : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$$

$||f||_{1,A} := ||f_A||_1$

(2) $L(A) := \{f : A \to \tilde{\mathbb{R}} : f_A \in L(\mathbb{R}^n)\}$. Ist $f \in L(A)$, so heißt f **auf** A **Lebesgueintegrierbar** und $\int_A f dx := \int_A f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$ heißt das **Lebesgueintegral von** f **über** A. Bem.: $\int_\emptyset f dx$ existiert und $= 0$.

Satz 16.8 (Lebegueintegral und L^1-Halbnorm)
Die Sätze 16.5 bis 16.6 gelten sinngemäß für $L(A)$. Insbes.:

$$||f||_{1,A} = \int_A |f| dx$$

Beispiel
$(n = 1)$, $A := [0, 1]$.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A \backslash \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in A \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bekannt: $f \notin R[0, 1]$. Gr. Übung: $f \in L(A)$ und $\int_A f dx = 1$

Satz 16.9 (Riemann- und Lebegueintegrale)
Sei $I := [a, b]$ $(a < b)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f \in R[a, b]$. Dann: $f \in L(I)$,

$$\underbrace{\int_a^b f dx}_{\text{R-Int.}} = \underbrace{\int_I f dx}_{\text{L-Int.}}.$$

Also: $R[a, b] \subset L([a, b])$

Beweis
$h := f_I$

(1) Sei $Z = \{x_0, \dots, x_m\} \in \mathfrak{Z}$, $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $m_j := \inf f(I_j)$, $M_j := \sup f(I_j)$, $Q_j := (x_{j-1}, x_j)$ $(j = 1, \dots, m)$.

Zu Z definiere $\varphi \in \mathscr{T}_1$ durch:

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in Z \\ m_j & , x \in Q_j \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases}$$

$\int \varphi dx = \sum_{j=1}^m m_j \underbrace{v_1(Q_j)}_{=|I_j|} = s_f(Z)$

Def.: $\Phi := \sum_{j=1}^m (M_j - m_j) 1_{Q_j}$; Dann: $0 \le h - \varphi \le \Phi$ auf $\mathbb{R}$ $\implies$ $\Phi \in \mathscr{H}(h - f)$ und $I(\Phi) = \sum_{j=1}^m (M_j - m_j)|I_j| = S_f(Z) - s_f(Z)$ $\implies$ $||h - \varphi||_1 \le S_f(Z) - s_f(Z)$

(2) Sei (Z_k) eine Folge in $\mathfrak{Z}$ mit $|Z_k| \to 0$. Ana I, 23.18 $\implies$ $S_f(Z_k) \to \int_a^b f dx$, $s_f(Z_k) \to \int_a^b f dx$. Zu jedem Z_k konstruiere $\varphi_k \in \mathscr{T}_1$ wie in (1). Dann: $||h - \varphi_k||_1 \le S_f(Z_k) - s_f(Z_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ $\implies$ $h \in L(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}} h dx = \lim \int \varphi_k dx \overset{(1)}{=} \lim s_f(Z_k) = \int_a^b f dx$ $\implies$ $f \in L([a,b])$ und $\int_{[a,b]} f dx = \int_{\mathbb{R}} h dx = \int_a^b f dx$. ■

Satz 16.10 (Konvergente Treppenfunktionsfolge)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C(A, \mathbb{R})$ und $f \ge 0$ auf A. Dann: $\exists$ Folge (φ_k) in $\mathscr{T}_n$ mit: $\varphi_1 \le \varphi_2 \le \varphi_3 \le \dots$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\varphi_k(x) \to f_A(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Insbes.: $\varphi_k \le f_A$ auf $\mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Beweis
$g := f_A$, $\mathbb{Q}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}^+ := \{r \in \mathbb{Q} : r \ge 0\}$

Für $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}^+ : W_r(a) := [a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]$.

$m_{r,a} := \inf g(W_r(a)) \ge 0$, $\psi_{r,a} := m_{r,a} 1_{W_r(a)} \ge 0$, $\psi_{r,a} \in \mathscr{T}_n$.

Dann: $0 \le \psi_{r,a} \le g$ auf $\mathbb{R}^n$ (*)

$\mathscr{T} := \{\psi_{r,a} : a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$. $\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^+$ abzählbar $\implies$ $\mathscr{T}$ ist abzählbar, etwa $\mathscr{T} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$.

$s(x) := \sup\{\psi(x) : \psi \in \mathscr{T}\}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$

Aus (*) folgt: $s(x) \le g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$: Fall 1: $x \notin A$. Dann: $0 = g(x) \le s(x)$

Fall 2: $x \in A$. Sei $\varepsilon > 0$. A offen, f stetig
$\implies$ $\exists a \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}^+ : |f(z) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall z \in W_r(a) \subseteq A$

$\implies g(z) > f(x) - \varepsilon \; \forall z \in W_r(a) \implies m_{r,a} \geq f(x) - \varepsilon$
$\implies g(x) - \varepsilon \leq m_{r,a} = \psi_{r,a}(x) \leq s(x) \overset{\varepsilon \to 0}{\implies} g(x) \leq s(x)$.

Also: $s = g$ auf $\mathbb{R}^n$

$\varphi_k := \max(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ $(k \in \mathbb{N}) \in \mathscr{T}_n$. (φ_k) leistet das Verlangte. ■

Satz 16.11 (Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebegue-Integrierbar)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in C(A, \mathbb{R})$ sei beschränkt. Dann: $f \in L(A)$.

Beweis
$f = f^+ - f^-$, $f^+, f^- \in C(A, \mathbb{R})$, f^+, f^- beschr. auf A. O.B.d.A: $f \geq 0$ auf A.

Sei (φ_k) wie in 16.10. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $A \subseteq Q$. $\gamma := \sup\{f(x) : x \in A\}$. Dann:
$\varphi_1 \leq \varphi_k \leq f_A \leq \gamma \cdot 1_Q$ auf $\mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$
$\implies \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \gamma \int 1_Q dx = \gamma v_1(Q) \; \forall k \in \mathbb{N}$
$\implies (\int \varphi_k dx)$ ist beschränkt. 16.7 $\implies f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$. ■

Satz 16.12 (Stetige und beschränkte Funktionen sind Lebegue-Integrierbar)
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei abg. und beschr. und $f \in C(A, \mathbb{R})$. Dann: $f \in L(A)$.

Beweis
3.4 $\implies \exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : F = f$ auf A. Sei Q ein *offener* Quader mit $A \subseteq Q$. $\bar{Q}$ ist beschr. und abg. 3.3 $\implies F$ ist auf $\bar{Q}$ beschr. $\implies F$ ist auf Q beschr. $\overset{16.11}{\implies} F_{|Q} \in L(Q) \implies \underbrace{(F_{|Q})_Q}_{=F_Q} \in L(\mathbb{R}^n) \implies F_Q \in L(\mathbb{R}^n)$.

$Q \backslash A$ ist offen und beschr. $\overset{16.11}{\implies} 1 \in L(Q \backslash A) \implies 1_{Q \backslash A} \in L(\mathbb{R}^n) \overset{16.5}{\implies} F_Q \cdot 1_{Q \backslash A} \in L(\mathbb{R}^n)$.

Es ist $f_A = F_Q - F_Q \cdot 1_{Q \backslash A} \overset{16.5}{\implies} f_A \in L(\mathbb{R}^n) \implies f \in L(A)$. ■

Bezeichungen: $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, yG \in \mathbb{R}^m\}$. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Für $y \in \mathbb{R}^m : A_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^n : A_x := \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Satz 16.13 (“Kleiner” Satz von Fubini)
$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ sei beschränkt und offen und $f \in C(A, \mathbb{R})$ sei beschränkt (also $f \in L(A)$, 16.11!).

$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ sei beschränkt und abgeschlossen und $f \in C(A, \mathbb{R})$ sei beschränkt (also $f \in L(A)$, 16.12!).

Dann:

(1) Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ Lebesgueintegrierbar über A_y

(2) Die Funktion $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ ist Lebesgueintegrierbar über $\mathbb{R}^n$ und

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{A_y} f(x,y)dx)dy$$

(3) Analog zu (1),(2):

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{A_x} f(x,y)dy)dx$$

Beweis
Nur für A beschränkt und offen (für A beschränkt und abgeschlossen ähnlich wie bei 16.12). O.B.d.A.: $f \geq 0$ auf $A (f = f^+ - f^-)$.

(1) Sei (φ_k) eine Folge in $\mathscr{T}_{n+m}$ wie in 16.10. Wie im Beweis von 16.11: $(\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x,y)d(x,y))$ ist beschränkt. 16.7 $\implies \int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_A(x,y)d(x,y) = \lim \int \varphi_k(x,y)d(x,y)$

(2) Sei $y \in \mathbb{R}^m$ (fest). $\Psi_k(x) := \varphi_k(x,y), g(x) := f_A(x,y)(x \in \mathbb{R}^n), \tilde{f}(x) := f(x,y)(x \in A_y)$ Dann: $g = \tilde{f}_A$.

Es gilt: $\Psi_1 \leq \Psi_2 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$, $\Psi_k(x) = \varphi_k(x,y) \to f_A(x,y) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. $(\Psi_k \in \mathscr{T}_n)$ Übung: $(\int \Psi_k(x)dx)$ beschränkt.

16.7 $\implies g \in L(\mathbb{R}^n)$, also $\tilde{f}_{A_y} \in L(\mathbb{R}^n) \implies \tilde{f} \in L(A_y) \implies$ (1),

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx}_{\int_{A_y} f(x,y)dx} = \lim \int \Psi_k dx = \lim \int \Psi_k(x,y)dx$$

(3) $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)dx (y \in \mathbb{R}^m)$. Dann: $\Phi_k \in \mathscr{T}_m$, $\Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^m$.

$$\Phi_k(y) \overset{(2)}{\implies} \int_{A_y} f(x,y)dx$$

$\forall y \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \Phi_k(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)dx)dy \\ &=_{15.3} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x,y)d(x,y) \\ &\overset{(1)}{\implies} \int_A f(x,y)d(x,y)\end{aligned}$$

16.7 $\implies y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ ist Lebesgueintegrierbar über $\mathbb{R}^m$ und

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\int_{A_y} f(x,y)dx)dy = \lim \int \Phi_k(y)dy = \int_A f(x,y)d(x,y)$$

■

.

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^n)$. A heißt **einfach bezüglich des 1. Faktors** $(\mathbb{R}^{n-1})$ $:\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $A_x = \emptyset$ oder ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Sei $a \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} (= \mathbb{R}^n)$. A heißt **einfach bezüglich des 2. Faktors** $(\mathbb{R}^{n-1})$ $:\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $A_y = \emptyset$ oder ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Aus 16.13 folgt:

Satz 16.14 (Aufteilung des Integrals in Doppelintegrale)
$A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 1. Faktors.

$B := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : A_x \neq \emptyset\}$.

Dann:

(1) $\forall x \in B$ ist A_x ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$

(2)
$$\forall f \in C(A, \mathbb{R}) : \int_A f(x,y) d(x,y) = \int_B (\int_{A_x} f(x,y) dy) dx$$

$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ sei beschränkt und abgeschlossen und einfach bezüglich des 2. Faktors.

$B := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : A_y \neq \emptyset\}$.

Dann:

(1) $\forall y \in B$ ist A_y ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$

(2)
$$\forall f \in C(A, \mathbb{R}) : \int_A f(x,y) d(x,y) = \int_B (\int_{A_y} f(x,y) dx) dy$$

$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$. $f \in C(Q, \mathbb{R})$:
$$\int_Q f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} (\ldots (\int_{a_2}^{b_2} (\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1) dx_2) \ldots) dx_n$$

Die Reihenfolge der Integration darf beliebig vertauscht werden.

Beispiel
[1]

[1] Anmerkung des TEXers: in jedem dieser Beispiele kommt eine Skizze vor, mit deren Hilfe man sich klar machen kann, dass die entsprechenden Mengen einfach bezüglich des 1. Faktors sind. Diese Skizzen sind hier (bisher) nicht wiedergegeben.

(1) $(n=2)$, $Q := [0,1] \times [1,2]$, $f(x,y) = xy$.

$\int_Q xyd(x,y) = \int_1^2 (\int_0^1 xydx)dy = \int_1^2 ([\frac{1}{2}x^2y]_{x=0}^{x=1})dy = \int_1^2 \frac{1}{2}ydy = \frac{1}{4}y^2|_1^2 = \frac{3}{4}$.

(2) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], x^2 \leq y \leq x\}$, $f(x,y) = xy^2$

A ist einfach bezüglich des 1. Faktors

$B = [0,1]$

Für $x \in B : A_x = [x^2, x]$

$$\int_A xy^2 d(x,y) = \int_0^1 (\int_{x^2}^x xy^2 dy)dx$$
$$= \int_0^1 ([\frac{1}{3}xy^3]_{y=x^2}^{y=x})dx = \int_0^1 \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7 dx = \frac{1}{40}$$

(3) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = y$

$B = [-1,1]$

$x \in B : A_x = [0, \sqrt{1-x^2}]$;

$$\int_A yd(x,y) = \int_{-1}^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy)dx$$
$$= \int_{-1}^1 ([\frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}})dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-x^2)dx = \frac{2}{3}$$

(4) $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$, $f(x,y,z) = x$

A ist einfach bezüglich des 1. Faktors ($\mathbb{R}^2$)

Für $(x,y) \in B$: $A_{(x,y)} = [0, 1-(x+y)]$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], x+y \leq 1, y \geq 0\}$

$$\int_A xd(x,y,z) = \int_B (\int_0^{1-(x+y)} xdz)d(x,y) = \int_B [xz]_{z=0}^{z=1-(x+y)]} d(x,y)$$
$$= \int_B x(1-(x+y))d(x,y) = \int_0^1 (\int_0^{1-x} x(1-(x+y))dy)dx) = \frac{1}{24}(?)$$