# Lineare Algebra II

Die Mitarbeiter von http://mitschriebwiki.nomeata.de/

12. Dezember 2016

# Inhaltsverzeichnis

# I. Vorwort

## I.1. Über dieses Skriptum

Dies ist ein erweiterter Mitschrieb der Vorlesung „Lineare Algebra II“ von Prof. Dr. Schmidt im Sommersemester 2010 an der Universität Karlsruhe (KIT). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Prof. Dr. Schmidt hier veröffentlicht, Prof. Dr. Schmidt ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

## I.2. Wer

Gestartet wurde das Mitschriebwiki von Joachim Breitner. Beteiligt an diesem Mitschrieb sind Rebecca Schwerdt, Manuel Kaiser und Philipp Ost.

## I.3. Wo

Alle Kapitel inklusive LaTeX-Quellen können unter `http://mitschriebwiki.nomeata.de` abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die LaTeX-Funktionen erweitert worden. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.

# 14. Normalformen von Endomorphismen

In diesem Abschnitt sei $\dim V < \infty$.

**Ziel:** Für ein $\phi \in \mathrm{End}(V)$ finde man eine Basis $B$, so dass die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\phi)$ eine einfache Form hat.

**Erinnere:** Falls eine Basis $B$ aus Eigenvektoren existiert, so ist $D_{BB}(\phi)$ eine Diagonalmatrix – der Idealfall. Dies gilt genau dann, wenn

$$g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} (T - \lambda)^{e_\lambda} \in K[T]$$

ein Produkt von Linearfaktoren ist (in $\mathbb{C}$ immer erfüllt) und

$$e_\lambda = \dim E_\lambda$$

**Strategie:** Ersetze die Eigenvektoren durch Vektoren mit schwächerer Eigenschaft.

**Definition:** Für $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$ heißt

$$H(\phi, \lambda) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Kern}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^k\right)$$

der **Hauptraum** von $\phi$ zu $\lambda$.

**Bemerkung (1):** $H(\phi, \lambda)$ ist ein $\phi$-invarianter Untervektorraum von $V$, denn es gilt

$$\mathrm{Kern}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^k\right) \subseteq \mathrm{Kern}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^{k+1}\right)$$

und

$$(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^k x = 0$$
$$(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^k \phi(x) = 0$$

**Bemerkung (2):**

$$H(\phi, \lambda) \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$$

**Beweis:** $\Longleftarrow$ : Sei $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$. Dann:

$$0 \neq E_\lambda(\phi) \subseteq H(\phi, \lambda)$$

$\Longrightarrow$ : Sei $x \neq 0$ in $H(\phi, \lambda)$. Dann existiert ein $k \geq 1$ mit $(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^k(x) = 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k$ minimal. Damit:

$$\underbrace{(\phi - \lambda\,\mathrm{id}_v)^{k-1}}_{=:y}(x) \neq 0 \quad \text{und } y \in E_\lambda(\phi)$$

■

**Satz 1:**
Sei das charakteristische Polynom

$$g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)} (T-\lambda)^{e_\lambda}$$

Dann gilt für jedes $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)$:

(1) $H(\phi,\lambda) = \operatorname{Kern}\left((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^{e_\lambda}\right)$

(2) $\dim H(\phi,\lambda) = e_\lambda$

**Beweis:** Fixiere $\lambda$ und $e = e_\lambda$. Schreibe $g_\phi(T) = (T-\lambda)^e \cdot h(T)$ – in $h(T)$ werden die restlichen Linearfaktoren untergebracht. Setze $H := \operatorname{Kern}\left((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^e\right)$ und $U := \operatorname{Kern}(h(\phi))$.

Wegen $\operatorname{ggT}\left((T-\lambda)^e, h(T)\right) = 1$ folgt mit der letzten Proposition

$$V = H \bigoplus U$$

mit $\phi$-invarianten Teilräumen.

Für alle $k \geq 1$ gilt: $(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\big|_U$ ist injektiv, denn

$$1 = r \cdot (T-\lambda)^k + s \cdot h$$

mit $r, s \in K[T]$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} id_v &= r(\phi) \cdot (\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k + s(\phi) \cdot h(\phi)|_U \\ id_v &= r(\phi)|_U \cdot (\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\Big|_U + 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $k \geq 1$:

$$\operatorname{Kern}\left((\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^k\right) \subseteq H$$

also gilt (1).

Ferner gilt:

$$g_\phi(T) = g_{\phi|_H} \cdot g_{\phi|_U}$$

und $(T-\lambda)^e$ annulliert $\phi|_H$ (da $(\phi - \lambda \operatorname{id}_v)^e|_H = 0$). Daraus folgt: das Minimalpolynom von $\phi|_H$ teilt $(T-\lambda)^e$, also ist $g_{\phi|_H}$ eine Potenz von $T-\lambda$.

Damit gilt: $g_{\phi|_H} = (T-\lambda)^{\dim H}$ und $\dim H \leq e$ (da $(T-\lambda)^e$ höchste Potenz in $g_\phi$ ist).

$e > \dim H$, also $T - \lambda | g_{\phi|_H}$, steht im Widerspruch zu $\operatorname{ggT}(T-\lambda, h) = 1$.
Damit gilt: $e = \dim H$. ∎

**Erinnere:** Summen von Eigenräumen sind direkt. Das Analogon für Haupträume gilt auch:

**Satz 2:**
Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden, so gilt

$$\sum_{i=1}^{k} H(\phi, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} H(\phi, \lambda_i)$$

**Beweis:** Schreibe kurz: $H_i := H(\phi, \lambda_i)$.
Führe eine vollständige Induktion nach $k$ durch.

$k = 1$: ✓

$k - 1 \to k$: Zu zeigen: für $v_i \in H_i$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = 0$$

d.h. alle $v_i = 0$.

$v_k \in H_k$, d.h. es existiert $e > 0$ mit $(\phi - \lambda_k \operatorname{id}_v)^e(v_k) = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi - \lambda_k \operatorname{id}_v)^e(0) \\ &= (\phi - \lambda_k \operatorname{id}_v)^e \left( \sum_{i=1}^{k} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\phi - \lambda_k \operatorname{id}_v)^e(v_i)}_{=0 \text{ für } i=k} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\phi - \lambda_k \operatorname{id}_v)^e(v_i)}_{=:w_i \in H_i} \end{aligned}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $w_1 = \ldots = w_{k-1} = 0$.

Nun fixiere $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.
Analog zum Fall $i = k$:

$$\exists f > 0 : (\phi - \lambda_i \operatorname{id}_v)^f(v_i) = 0$$

Wegen $i \neq k$ ist $\lambda_i \neq \lambda_k$, also $\operatorname{ggT}(T - \lambda_i, T - \lambda_k) = 1$, also existieren $g,\ h \in K[T]$ mit

$$1 = g(T - \lambda_i)^f + h(T - \lambda_k)^e$$

$\phi$ einsetzen:

$$\begin{aligned} v_i &= \operatorname{id}_v(v_i) \\ &= g(\phi) \circ \underbrace{(\phi - \lambda_i \operatorname{id}_v)^f(v_i)}_{0} + h(\phi) \circ \underbrace{(\phi - \lambda_k \operatorname{id}_v)^e(v_i)}_{=w_i = 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit folgt: $v_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$ und somit folgt wegen $\sum_{i=1}^{k} v_i = 0$ auch $v_k = 0$. ∎

**Zentrale Frage:** Wann ist $V$ die direkte Summe aller Haupträume?

**Satz 3:**
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum endlicher Dimension. Weiter sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $g_\phi(T)$ und Minimalpolynom $f_\phi(T)$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} H(\phi, \lambda)$

(2) $g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} (T - \lambda)^{\dim H(\phi,\lambda)}$

(3) $g_\phi(T)$ ist Produkt von Linearfaktoren

(4) $f_\phi(T)$ ist Produkt von Linearfaktoren

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Ringschluss:

(1) $\implies$ (2): Für $H_\lambda := H(\phi, \lambda)$ bekannt:

$$g_{\phi|_{H_\lambda}} = (T - \lambda)^{\dim H_\lambda}$$

Wegen $V = \bigoplus_\lambda H_\lambda$ folgt

$$g_\phi = \prod_\lambda g_{\phi|_{H_\lambda}} = \prod_\lambda (T - \lambda)^{\dim H_\lambda}$$

(2) $\implies$ (3): ✓

(3) $\implies$ (4): Wegen $f_\phi | g_\phi$✓

(4) $\implies$ (1): Vollständige Induktion nach $r :=$ #Nullstellen von $f_\phi$.

$r = 0$: $f_\phi$ hat keine Linearfaktoren, also $f_\phi = 1$ $\quad (\rightsquigarrow V = 0)$.

$r = 1$: $f_\phi = (T - \lambda)^e$ impliziert $V = \mathrm{Kern}(\underbrace{f_\phi(\phi)}_{=0}) = H(\phi, \lambda)$

$r \geq 2$: Sei $\lambda$ eine Nullstelle von $f_\phi$, dann existiert ein $\phi$-invarianter Teilraum $U$ : $V = H \bigoplus U$, wobei $\lambda$ keine Nullstelle des Minimalpolynoms $f_{\phi|_U}$ ist. Wegen $f_\phi = f_{\phi|_U} \cdot f_{\phi|_{H_\lambda}}$ ist die Anzahl der Nullstellen von $f_{\phi|_U}$ $r - 1$.

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$U = \bigoplus_{\lambda' \in \mathrm{Spec}(\phi|_U)} H(\phi|_U, \lambda')$$

Da $\mathrm{Spec}(\phi) = \mathrm{Spec}(\phi|_U) \,\dot\cup\, \{\lambda\}$ und $H(\phi|_U, \lambda') = H(\phi, \lambda')$ für alle $\lambda' \neq \lambda$ folgt (1). ∎

Ein wichtiger Spezialfall von Haupträumen ist der mit $\lambda = 0$.

**Definition:** Ein Endomorphismus heißt **nilpotent**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\phi^n = 0$.

**Bemerkung (1):** Für nilpotentes $\phi$ ist $\mathrm{Spec}(\phi) = \{0\}$ und $V = \mathrm{Kern}(\phi^n) = H(\phi, 0)$.

**Beweis:** Das Minimalpolynom ist von der Form: $f_\phi = T^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. ■

**Bemerkung (2):** Für beliebiges $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim(V) < \infty$ ist $(\phi - \lambda \, \mathrm{id}_v)|_{H(\phi,\lambda)}$ nilpotent.

**Beweis:** Wir haben gesehen, dass gilt

$$H(\phi, \lambda) = \mathrm{Kern}\left((\phi - \lambda \, \mathrm{id}_v)^{\dim H(\phi,\lambda)}\right)$$

■

---

**Hilfssatz 1:**
Sei $\dim(V) < \infty$, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent mit Minimalpolynom $f_\phi = T^d$. Ferner sei $u \in V$ mit $\phi^{d-1}(u) \neq 0$.

Dann existiert ein $\phi$-invarianter Teilraum $W$ derart, dass gilt:

$$V = U \bigoplus W$$

für den zyklischen ($\phi$-invarianten) Teilraum

$$U := \left\langle u, \phi(u), \phi^2(u), \ldots, \phi^{d-1}(u) \right\rangle$$

---

**Beachte:** Ein solches $u$ existiert stets, da andernfalls $\phi^{d-1} = 0$. Dies wäre ein Widerspruch zu $f_\phi = T^d$.

**Beweis:** Es gilt $\dim U = d$, da offenbar $U \leq V$ und

$$\dim U = \mathrm{Grad}(g_{\phi|_U}) \geq \mathrm{Grad}(f_{\phi|_U}) = d$$

$f_{\phi|_U} | f_\phi = T^d$ und kein echter Teiler, da $\phi^{d-1}(u) \neq 0$.

Wähle $\phi$-invarianten Teilraum $W$ mit $U \cap W = 0$ und $\dim W$ maximal.

**Behauptung:** $V = U \bigoplus W$

**Beweis:** angenommen es gilt $U \underset{\neq}{>} V$, d.h. es existiert $\tilde{v} \in V \setminus (U \bigoplus W)$.

Wenn $\phi^d(\tilde{v}) = 0 \in U \bigoplus W$, dann existiert ein kleinstes $e \in \mathbb{N}$ mit $\phi^e(\tilde{v}) \in U \bigoplus W$.
Setze $v := \phi^{e-1}(\tilde{v})$, so dass also $v \notin U \bigoplus W$ und $\phi(v) \in U \bigoplus W$. Damit folgt:

$$\phi(v) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \phi^i(u) + w$$

mit geeignetem $a_i \in K$, $w \in W$. Wende $\phi^{d-1}$ an:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi^d(v) \\ &= a_0 \cdot \underbrace{\phi^{d-1}(u)}_{\neq 0} + \phi^{d-1}(w) \end{aligned}$$

Damit folgt $\phi^{d-1}(w) \in W \cap U = 0$, also $a_0 = 0$.

$$\phi(v) = \phi \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{d-1} a_i \cdot \phi^{i-1}(u) \right)}_{=:\tilde{u} \in U} + w \Longleftrightarrow \phi(v - \tilde{u}) = w$$

Nun betrachte den Teilraum $\tilde{W} := W + K \cdot (v - \tilde{u})$

- $\tilde{W}$ ist $\phi$-invariant
- $\tilde{W} \underset{\neq}{>} W$ (denn $v - \tilde{u} \notin W$ wegen $v \notin U + W$)
- $\tilde{W} \cap U = 0$

Letzteres gilt, da für $u' = w' + \alpha(v - \tilde{u}) \in \tilde{W} \cap U$ folgt $(\alpha\tilde{u} + u') - w' = \alpha \cdot v \in U \bigoplus W$, also $\alpha = 0$.
Daraus folgt $u' = w' \in U \cap W = 0$. ■

Da $\dim \tilde{W} > \dim W$ folgt Widerspruch zur Maximalität von $\dim W$. ■

**Folgerung:** Für nilpotentes $\phi$ ist $V$ direkte Summe von $\phi$-zyklischen Teilräumen.

**Beweis:** Vollständige Induktion nach $n = \dim V$

$n = 0, 1$: Klar ✓

$n \geq 2$: $V = U \bigoplus W$ mit $\phi$-zyklischem $U \neq 0$ nach Hilfssatz 1.

Damit folgt: $\dim W < n$.
Induktionsvoraussetzung: $W$ ist direkte Summe $\phi$-zyklischer Teilräume. ■

**Erinnere:** Die Darstellungsmatrix von $\phi|_U$ bezüglich der Basis $B = \{u, \phi(u), \phi^2(u), \ldots, \phi^{d-1}(u)\}$ lautet für jedes nilpotente $\phi$ mit Minimalpolynom $f_\phi = T^d$

$$D_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} =: J_d(0)$$

$J_d(0)$ heißt **Jordankästchen der Länge d zum Eigenwert 0**.

**Übung:** Für $e = 0, 1, \dots, d$ gilt: $\operatorname{rg}(J_d(0)^e) = d - e$ und $J_d(0)^e = 0$ für $e \geq d$.

**Satz 4 (Jordannormalform für nilpotente Matrizen):**
Sei $A \in K^{n\times n}$ nilpotent. Dann gibt es eine Partition (Summenzerlegung) $n = \sum_{i=1}^k d_i$ mit eindeutig bestimmenten $k$, $d_i \in \mathbb{N}$ mit $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k \geq 1$, so dass $A$ ähnlich ist zu der **Blockdiagonalmatrix**

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & & 0 \\ & J_{d_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

**Beweis:** Bereits bekannt:

$$K^n = V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$$

mit $\phi$-zyklischem $U_i$ zu $\phi = \phi_A$, wobei für $d_i := \dim U_i$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k$ und $n = \sum_{i=1}^k d_i$ gilt.
Ferner ist bezüglich der Basis $B_i = \{u_i, \phi(u_i), \dots, \phi^{d-1}(u_i)\}$

$$D_{B_i B_i}(\phi|_{U_i}) = J_{d_i}(0)$$

Dies zeigt die Existenz von $\tilde{A}$.

**Eindeutigkeit:** Zu zeigen: Für $d \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl $m_d$ von Jordankästchen $J_d(0)$ der Länge $d$ eindeutig durch $A$ bestimmt.

Nach der Rangformel ($\longrightarrow$Übung!) gilt:

$$\begin{aligned} r_e &:= \operatorname{rg}(A^e) \\ &= \operatorname{rg}\left(\tilde{A}^e\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \underbrace{\operatorname{rg}(J_{d_i}(0)^e)}_{(\alpha_i - e)} \\ &= \sum_{d=e}^n (d-e)\cdot m_d \qquad (e = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:M} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

Es ist $\det(M) = 1$, insbesondere ist $M$ invertierbar, so dass $(m_1, \dots, m_n)$ eindeutig durch $A$ bestimmt ist. ∎

**Beachte:**

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt:

$$m_d = r_{d-1} - 2r_d + r_{d+1} \tag{14.1}$$

**Definition:** Für $\lambda \in K$ und $d \in \mathbb{N}$ heißt die Matrix

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_d(0) + \lambda \cdot I_d$$

ein **Jordankästchen der Länge d zum Eigenwert** $\lambda$.

**Satz 5 (Jordannormalform):**
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $\dim V < \infty$ und $\phi \in \mathrm{End}(V)$, so dass das charakteristische Polynom $g_\phi$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$g_\phi(T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} (T - \lambda)^{\mu_a(\lambda)}$$

Dabei sei $\mathrm{Spec}(\phi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$ für $l := |\mathrm{Spec}(\phi)|$.

Dann gibt es zu jedem $\lambda_i$ eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $k_i$ und $d_{1,i} \geq d_{2,i} \geq \ldots \geq d_{k_i,i} \geq 1$, sodass bezüglich einer geeigneten Basis $B$ von $V$ die Darstellungsmatrix von $\phi$ die folgende Blockdiagonalform hat:

$$D_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_l \end{pmatrix} \text{ mit } D_i := \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_{k_i,i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Dabei ist $D_i = D_{B_iB_i}\left(\phi|_{H(\phi,\lambda_i)}\right)$ die Darstellungsmatrix der Einschränkung von $\phi$ auf den Hauptraum $H(\phi, \lambda_i)$ bezüglich einer Basis $B_i$ dieses Raumes.
Bezeichnet $m_d(\lambda)$ die Anzahl der Jordankästchen der Länge $d$ zum Eigenwert $\lambda$, so gilt für alle $d \in \mathbb{N}$:

$$m_d(\lambda) = \mathrm{rg}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{d-1}\right) - 2\,\mathrm{rg}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{d}\right) + \mathrm{rg}\left((\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{d+1}\right)$$

Diese **Jordannormalform** $D_{BB}(\phi) =: \mathrm{JNF}(\phi)$ ist, bis auf die Reihenfolge der **Jordanblöcke** $D_i$, eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Wegen der Voraussetzung an $g_\phi$ ist $V = \bigoplus_\lambda H(\phi, \lambda)$ mit $H(\phi, \lambda) = \text{Kern}\left((\phi - \lambda\,\text{id})^{\mu_a(\lambda)}\right)$. Es ist bereits bekannt, dass

$$\Psi_i := (\phi - \lambda\,\text{id})|_{H(\phi,\lambda_i)}$$

nilpotent ist.

Nach Satz 4 existiert also eine Basis $B_i$ von $H(\phi, \lambda_i)$ mit

$$D_{B_iB_i}(\Psi_i) = \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_{k_i,i}}(0) \end{pmatrix}$$

Also gilt für $\phi|_{H(\phi,\lambda_i)} = \Psi_i + \lambda_i \cdot \text{id}$

$$D_{B_iB_i}\left(\phi|_H(\phi, \lambda_i)\right) = D_{B_iB_i}(\Psi_i) + \lambda_i I_{\mu_a(\lambda_i)} = D_i$$

(wegen $J_d(\lambda) = J_d(0) + \lambda I_d$)

Nehme also Basis für $V$: $B := B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \ldots \dot\cup B_l$ so dass $D_{BB}(\phi)$ die gewünschte Form hat. Die Formel für $m_d(\lambda)$ kennen wir schon (Gleichung (14.1)), ebenso die Eindeutigkeit aus dem Spezialfall nilpotenter Matrizen.

(Beachte hierbei: $(\phi - \lambda\,\text{id})^d\big|_{H(\phi,\lambda')}$ ist invertierbar für $\lambda \neq \lambda'$.) ∎

**Korollar:**

(1) Die Länge des Jordanblockes $D_i$ zum Eigenwert $\lambda_i$ ist

$$|B_i| = \dim\left(H(\phi, \lambda_i)\right) = \mu_a(\lambda_i)$$

(2) Die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_i$ ist

$$k_i = \dim E_{\lambda_i} = \mu_g(\lambda_i) \qquad \text{(Dimension des Eigenraumes)}$$

(3) Die Vielfachheit $e_i$ eines Linearfaktors $T - \lambda_i$ im Minimalpolynom

$$f_\phi(T) = \prod_{i=1}^{e} (T - \lambda_i)^{e_i}$$

ist die größte Länge der Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_i$, also

$$e_i = d_{1,i} = \min\left\{e \geq 0 \mid \text{rg}\left((\phi - \lambda_i\,\text{id})^e\right) = \text{rg}\left((\phi - \lambda_i\,\text{id})^{e+1}\right)\right\}$$

**Beweis:** (1) Bekannt!

(2) **Erinnere:** Mit $\Psi_\lambda := (\phi - \lambda\,\text{id})|_{H(\phi,\lambda)}$ gilt:

$$E_\lambda = \text{Kern}\,\Psi_\lambda \leq \text{Kern}\,\Psi_\lambda^{\mu_a(\lambda)} = H(\phi, \lambda)$$

$$\text{mit JNF}(\Psi_\lambda) = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

Wegen $\operatorname{rg}(J_d(0)) = d-1$ folgt

$$\operatorname{rg}(\Psi_\lambda) = (d_1 + \ldots + d_k) - k = \dim H(\phi - \lambda) - k$$

also

$$\dim E_\lambda = \dim \operatorname{Kern} \Psi_\lambda = \dim H(\phi, \lambda) - \operatorname{rg}(\Psi_\lambda) = k$$

(3) Wir haben

$$\text{JNF}(\phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_l \end{pmatrix}$$

Betrachte annullierende Polynome von $\phi$ (also von JNF($\phi$)) der Form

$$f(T) = \prod_{i=1}^{l} (T - \lambda_i)^{f_i}$$

Setze JNF($\phi$) ein:

$$0 = f(\text{JNF}(\phi)) = \begin{pmatrix} f(D_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(D_l) \end{pmatrix} \iff \forall j : \prod_{i=1}^{l} (D_j - \lambda_i I)^{f_i} = 0$$

Wegen $D_j - \lambda_i I$ invertierbar für $i \neq j$ besagt dies:

$$\iff \forall j : \underbrace{(D_j - \lambda_j I)}_{\text{JNF}(\Psi_{\lambda_j})}{}^{f_j} = 0$$

Also wegen $\left[\operatorname{rg}\left(J_d(0)^f\right) = 0 \iff f \geq d\right]$ genau dann, wenn für alle $j$ gilt:

$$f_j \geq d_{1,j} (\geq d_{2,j} \geq \ldots)$$

also überall $\min f_j = e_j = d_{1,j}$. ∎

# 15. Multilineare Abbildungen und Tensorprodukte

## 15.1. Bilinearformen

**Definition:** Seien $V, W$ $K$-VRme. Eine Abbildung $P : V \times W \to K$ heißt **(Vektorraum-)Paarung**, falls $P$ in jedem Argument linear ist, d.h. wenn für jedes feste $w_o \in W$

$$P(\cdot, w_0) : V \to K, v \mapsto P(v, w_0)$$

und für jedes feste $v_0 \in V$

$$P(v_0, \cdot) : W \to K, w \mapsto P(v_0, w)$$

eine lineare Abbildung, also Linearform ist.
Im Fall $V = W$ heißt $P$ eine **Bilinearform** auf $V$.
Eine Paarung $P$ heißt **nicht ausgeartet**, wenn für jedes $w_0 \in W$ und für jedes $v_0 \in V$ die Abbildung $P(\cdot, w_0)$ bzw. $P(v_0, \cdot)$ nicht die Nullabbildung ist.

**Bemerkung:** Die Menge $\mathcal{P}(V, W)$ aller Paarungen von $V$ und $W$ ist ein Untervektorraum des $K$-VRms $\mathrm{Abb}(V \times W, K)$ aller Abbildungen von $V \times W$ nach $K$.

**Beispiel:** Auf dem Dualraum $W := V^*(= \mathrm{Hom}(V, K))$ ist die nicht ausgeartete Paarung

$$P : V \times V^* \to K, (v, f) \mapsto f(v)$$

eine Bilinearform.
Für eine Paarung $P : V \times W \to K$ setzen wir $\rho_w(v) := P(v, w)$ und erhalten so Linearformen $\rho_w \in V^*$ für alle $w \in W$.

**Satz 6:**
(1) Die Abbildung $\rho : W \to V^*, w \mapsto \rho_w$ ist ein Homomorphismus von $K$-VRmen.

(2) Die Zuordnung $\eta : P \mapsto \rho$ ist ein Isomorphismus, es gilt:

$$\mathcal{P}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(W, V^*)$$

**Beweis:** (1) Es gilt für alle $\alpha \in K, w_1, w_2 \in W$:

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha w_1 + w_2} &= (v \mapsto P(v, \alpha w_1 + w_2)) \\
&= (v \mapsto \alpha P(v, w_1) + P(v, w_2)) \\
&= \alpha((v \mapsto P(v, w_1)) + (v \mapsto P(v, w_2))) \\
&= \alpha \rho_{w_1} + \rho_{w_2}
\end{aligned}$$

(2) Homomorphie selbst nachrechnen!
Die Umkehrabbildung ist:

$$\mathrm{Hom}(W, V^*) \to \mathcal{P}(V, W), \rho \mapsto P := ((v, w) \mapsto (\rho(w))(v)) \qquad \blacksquare$$

**Erinnere:** Lineare Abbildungen sind bereits durch ihre Wirkung auf einer Basis eindeutig bestimmt. Dieses Prinzip gilt auch für Paarungen.

**Bemerkung:** Seien $V, W$ $K$-VRme mit jeweiliger Basis $B := \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V, C := \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq W$, so ist eine Paarung $P$ auf $V \times W$ Bereits durch ihre Einschränkung auf $B \times C$ festgelegt.
Für $v := \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i, w := \sum_{j=1}^n \beta_j c_j$ gilt:

$$P(v, w) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \cdot P(b_i, c_j)$$

Jede Abbildung $P' : B \times C \to K$ definiert über diese Gleichung eine Paarung $P' : V \times W \to K$. Diese heißt **bilineare Fortsetzung**.

**Definition:** Die Matrix $D_{BC}(P) := (P(b_i, c_j)) \in K^{m \times n}$ heißt **Fundamentalmatrix** der Paarung $P$ bzgl. der Basen $B$ und $C$. Mit den Kkordinatenvektoren:

$$D_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \text{ und } D_C(w) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

gilt nach obiger Gleichung:

$$P(v, w) = D_B(v)^T \cdot D_{BC}(P) \cdot D_C(w)$$

**Satz 7:**
Eine Paarung $P$ endlichdimensionaler $K$-VRme $V, W$ mit Basen $B, C$ ist genau dann nicht ausgeartet, wenn die Dimensionen von $V$ und $W$ gleich und $D_{BC}(P)$ invertierbar ist.

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Implikation in beiden Richtungen:

„ $\Longleftarrow$ “ Sei $\dim V = \dim W$ und $F := D_{BC}(P)$ invertierbar. Sei nun $w \neq 0 \in W$, dann ist $D_C(w) \neq 0$.
Daraus folgt, dass auch $F \cdot D_C(w)$ nicht null ist. O.B.d.A sei die $i$-te Koordinate ungleich null. Dann gilt:

$$P(b_i, w) = e_i^T \cdot F \cdot D_C(w) \neq 0$$

Insbesondere ist $P(\cdot, w) \neq 0$. Analog folgt $P(v, \cdot) \neq 0$ für alle $0 \neq v \in V$. Also ist $P$ nicht ausgeartet.

„ $\Longrightarrow$ “ Sei $P$ nicht ausgeartet, dann ist insbesondere $\rho : W \to V^*, w \mapsto \rho_w = (v \mapsto P(v,w))$ injektiv. Daraus folgt:

$$\dim V = \dim V^* \geq \dim W$$

Analog gilt:

$$\dim W = \dim W^* \geq \dim V$$

Also haben $V$ und $W$ gleiche Dimension.
**Annahme:** $F$ ist nicht invertierbar.
Dann existiert ein $D_C(w) \neq 0$, sodass $F \cdot D_C(w)$ gilt. Daraus folgt für alle $v \in V$:

$$P(v,w) = D_B(v)^T \cdot F \cdot D_C(w) = 0 \;\lightning$$

Also ist $P(\cdot, w) = 0$, was einen Widerspruch zur nicht Ausgeartetheit von $P$ darstellt. ∎

**Satz 8:**
Seien $B, \hat{B}$ Basen von $V$, $C, \hat{C}$ Basen von $W$ und $P$ eine Paarung von $V$ und $W$. Dann gilt:

$$D_{BC}(P) = D_{\hat{B}B}(\mathrm{id}_V)^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot D_{\hat{C}C}(\mathrm{id}_W)$$

**Beweis:** Für $(v,w) \in V \times W$ gilt:

$$\begin{aligned} P(v,w) &= D_{\hat{B}}(v)^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot D_{\hat{C}}(w) \\ &= (D_{\hat{B}B}(\mathrm{id}_V) \cdot D_B(v))^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot (D_{\hat{C}C}(\mathrm{id}_W) \cdot D_C(w)) \\ &= D_B(v)^T \cdot (D_{\hat{B}B}(\mathrm{id}_V)^T \cdot D_{\hat{B}\hat{C}}(P) \cdot D_{\hat{C}C}(\mathrm{id}_W)) \cdot D_C(w) \end{aligned}$$

Aber es gilt auch:

$$P(v,w) = D_B(v)^T \cdot D_{BC}(P) \cdot D_C(w)$$

Durch einsetzen aller Basispaare $b_i, c_j$ folgt die Behauptung. ∎

**Bemerkung:** Mit der Dualbasis $B^* = \{b_1^*, \ldots, b_m^*\}$ von $V^*$ zu $B$ (erinnere: $b_k^*(b_i) = \delta_{ik}$) gilt für $\rho = \eta(P) : W \to V^*$:

$$\rho(c_j) = \sum_{i=1}^{n} P(b_i, c_j) \cdot b_i^*$$

D.h. $D_{B^*C}(\rho) = D_{BC}(P)$.

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \rho(c_j) &= P(\cdot, c_j) \\ &= (b_i \mapsto P(b_i, c_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(b_i, c_j) \cdot b_i^* \end{aligned}$$

∎

**Beispiel:** Sei $W = V^*$ und für alle $f \in V^*$ sei $P(v, f) = f(v)$. Nehme nun die Dualbasis $C = B*$ zur Basis $B$ von $V$. Dann gilt:

$$P(b_i, b_k^*) = b_k^*(b_i) = \delta ik$$

Also ist $D_{BB}(P) = I_m$

Wir spezialisieren nun $W = V$.

**Definition:** Sei $P$ eine Paarung von $V$ und $V$.

(a) $P$ heißt **symmetrisch**, falls für alle $v, w \in V$ gilt:

$$P(v, w) = P(w, v)$$

(b) Eine Basis $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ heißt **Orthogonalbasis** (OGB) von $V$ bezüglich $P$, wenn für alle $i \neq j$ gilt:

$$P(b_i, b_j) = 0$$

(c) Eine Basis $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ heißt **Orthonormalbasis** (ONB) von $V$ bezüglich $P$, wenn $B$ OGB ist und für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$P(b_i, b_i) = 1$$

**Bemerkung:** Falls eine OGB $B$ existiert, so ist die Fundamentalmatrix $D_{BB}(P)$ diagonal, insbesondere symmetrisch, also ist $P$ symmetrisch.

**Satz 9:**
Sei $K$ ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$ und $P$ eine symmetrische Bilinearform auf einem $K$-VRm $V$ mit $\dim V =: n < \infty$. Dann existiert eine OGB von $V$ bzgl. $P$.

**Beweis:** Der beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der Dimension $n$.
Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr, nehmen wir also als Induktionsvoraussetzung an, dass sie für $n - 1$ erfüllt sei.
Da für $P = 0$ jede Basis Orthogonalbasis ist, lässt sich im Folgenden o.B.d.A annehmen, dass $P \neq 0$ ist. Also existieren $v, w \in V$ mit $P(v, w) \neq 0$, es gilt:

$$\begin{aligned} P(v + w, v + w) &= P(v, v) + P(w, w) + P(v, w) + P(w, v) \\ &= P(v, v) + P(w, w) + 2P(v, w) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P(v, v) \neq 0 \lor P(w, w) \neq 0 \lor P(v + w, v + w) \neq 0$$

Also existiert ein $b_1 \in V$ mit $P(b_1, b_1) \neq 0$. Nun betrachte:

$$\begin{aligned} W &:= \{v \in V \mid P(v, b_1) = 0\} \\ &= \mathrm{Kern}(P(\cdot, b_1)) \end{aligned}$$

Nach Dimensionsformel ist $\dim W = n - 1$ und $V = K \cdot b_1 \oplus W$. Da die Einschränkung $P|_{W \times W}$ symmetrisch ist, existiert nach Induktionsvoraussetzung eine OGB $\{b_2, \ldots, b_n\}$ von $W$ bzgl. $P|_{W \times W}$.
Da außerdem für alle $w \in W$ $P(w, b_1) = 0$ ist, ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ OGB von $V$ bzgl. $P$. ■

**Bemerkung (Fourierformel):** Die Basisdarstellung bzgl. einer ONB $B$ lautet:

$$v = \sum_{b \in B} P(v, b) \cdot b$$

**Beweis:** Leichte Übung! ■

## 15.2. Multilineare Abbildungen

Veralgemeinere nun die Bilinearität und den Zielbereich.

**Definition:** Seien $V_1, \ldots, V_n, W$ $K$-VRme und $M : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ eine Abbildung. $M$ heißt **(n-fach) multilinear**, falls für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ bei fester Wahl von $v_j \in V_j$ (für alle $j \neq i$) $M(v_1, \ldots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \ldots, v_n) : V_i \to W$ eine lineare Abbildubg ist.

**Beispiel:** Multilineare Abbildungen sind:

(1) Die Determinantenabbildung:

$$\det : K^n \times \ldots \times K^n \to K$$

(2) Die Skalarmultiplikation:

$$K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

(3) Die Matrizenmultiplikation:

$$K^{p \times q} \times K^{q \times r} \times K^{r \times s} \to K^{p \times s}, (A, B, C) \mapsto A \cdot B \cdot C$$

## 15.3. Tensorprodukte

**Definition:** Seien $V, W$ $K$-VRme. Ein $K$-VRm $T$ mit einer bilinearen Abbildung $\tau : V \times W \to T$ heißt ein **Tensorprodukt** von $V$ und $W$, falls $\tau$ die folgende **universelle Abbildungseigenschaft** (UAE) erfüllt:
Zu jedem $K$-VRm $U$ und jeder bilinearen Abbildung $\beta : V \times W \to U$ existiert genau eine lineare Abbildung $\Phi_\beta : T \to U$ derart, dass $\beta = \Phi_\beta \circ \tau$.
Schreibe: $T =: V \otimes_K W, \tau(v, w) =: v \otimes w$

**Bemerkung:** (1) Falls $T$ existiert, so hat man eine Bijektion:

$$\mathrm{Bil}(V \times W, U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T, U), \beta \mapsto \Phi_\beta$$

(2) Sind $(T_1, \tau_1), (T_2, \tau_2)$ Tensorprodukte von $V$ und $W$, so existiert genau ein Isomorphismus $\Phi : T_1 \to T_2$ mit $\tau_2 = \Phi \circ \tau_1$.

**Aufgabe:** Beweise die Existenz von Tensorprodukten.

**Beispiel:** (1) Sei $V := K^{n\times 1}, W := K^{m\times 1}, T := K^{n\times m}$ und die bilineare Abbildung:

$$\tau : K^n \times K^m \to T, (v, w) \mapsto v \cdot w^T$$

Für die Standardbasen $\{e_i\} \subseteq V, \{e'_j\} \subseteq W$ ist $\tau(e_i, e'_j) = E_{ij}$ die Elementarmatrix. $D := \{E_{ij} \mid i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$ ist Basis von $T$.
Im folgenden wollen wir die UAE nachweisen. Sei dazu $\beta : V \times W \to U$ bilinear. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung $\Phi : K^{n\times m} \to U$ für jede Vorgabe einer Abbildung $D \to U$ (vgl. lineare Fortsetzung). Insbesondere also auch für die Vorgabe:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\} : \Phi(E_{ij}) := \beta(e_i, e'_j)$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
\beta(v, w) &= \beta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{m} \gamma_j e'_j\right) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \cdot \beta(e_i, e'_j) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \cdot \Phi(E_{ij}) \\
&= \Phi\left(\sum_{ij} \alpha_i \gamma_j \cdot E_{ij}\right) \\
&= \Phi\left(\tau\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{m} \gamma_j e'_j\right)\right) \\
&= \Phi(\tau(v, w)) = (\Phi \circ \tau)(v, w)
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\beta = \Phi \circ \tau$ gilt.
Falls für ein $\Phi' : T \to U$ auch $\beta = \Phi' \circ \tau$ gilt, folgt insbesondere $\beta(e_i, e'_j) = \Phi'(\tau(e_i, e'_j))$ und damit:

$$\Phi'(E_{ij} = \beta(e_i, e'_j) = \Phi(\tau(e_i, e'_j)) = \Phi(E_{ij)}$$

D.h. $\Phi|_D = \Phi'|_D$, also ist $\Phi = \Phi'$ eindeutig.

(2) Seien $V, W$ beliebige VRme mit endlichen Dimensionen $\dim V = n, \dim W = m$. Die Existenz des Tensorproduktes folgt etwa durch Koordinatenisomorphismen und Beispiel (1) Für eine **koordinatenfreie Konstruktion** nehme $T := \mathrm{Hom}(V^*, W)$ und

$$\tau : V \times W \to T, (v, w) \mapsto (V^* \to W, f \mapsto f(v) \cdot w)$$

Leichte Übung: $(T, \tau)$ ist Tensorprodukt von $V, W$ und für Basen $B, C$ von $V, W$ gilt:

$$D := \{b \otimes c \in T \mid b \in B, c \in C\}$$

ist Basis von $T = V \otimes_K W$.

**Satz 10:**
Sind $V, W$ beliebige $K$-VRme, so existiert ein Tensorprodukt von $V$ und $W$.

**Beweis:** Finde einen $K$-Vektorraum $T$ und eine lineare Abbildung $\tau: V \times W \to T$ mit der universellen Abbildungseigenschaft. Dazu benutze den $K$-Vektorraum $F := \mathrm{Abb}(V \times W, K)_0$.
Sei $f : V \times W \to K$ eine Abbildung mit endlichem Träger $\mathrm{Supp}(f) := \{(v, w) \mid f(v, w) \neq 0\}$.
$B := \{f_{(v,w)} \mid (v, w) \in V \times W\}$ ist eine Basis von $F$ (da für beliebiges $f \in F$ gilt: $f(x, y) = \sum_{(v,w)\in \mathrm{Supp}(f)} f(v, w) \cdot f_{(v,w)}$).
Setze $\varphi: V \times W \to F$, $(v, w) \mapsto f_{(v,w)}$. Vorsicht: $\varphi$ ist nicht bilinear!

Für die Bilinearität benötigen wir den Untervektorraum $R \leq F$, erzeugt von den "fehlenden Relationen".

$$f_{(\alpha v_1+v_2,\beta w_1+w_2)} - \alpha\beta f_{(v_1,w_1)} - \beta f_{(v_2,w_1)} - \alpha f_{(v_1,w_2)} - f_{(v_2,w_2)} \,\forall \alpha, \beta \in K, v_i \in V, w_i \in W$$

Bilde den Faktorraum $T := \frac{F}{R}$ versehen mit der kanonischen Abbildung

$$\pi: F \to T,\, f \mapsto f + R =: [f]$$

Betrachte

$$\tau: V \times W \to T,\, (v, w) \mapsto \pi(\varphi(v, w)) = [f_{(v,w)}]$$

Nun gilt offenbar Bilinearität:

$$\left[f_{(\alpha v_1+v_2,\beta w_1+w_2)}\right] = \alpha\beta\left[f_{(v_1,w_1)}\right] + \beta\left[f_{v_2,w_1)}\right] + \alpha\left[f_{(v_1,w_2)}\right] + \left[f_{(v_2,w_2)}\right]$$
$$\tau(\alpha v_1 + v_2, \beta w_1 + w_2) = \alpha\beta\tau(v_1, w_1) + \beta\tau(v_2, w_1) + \alpha\tau(v_1, w_2) + \tau(v_2, w_2)$$

**Nachweis der universellen Abbildungseigenschaft:** Sei wieder $\beta: V \times W \to U$ bilinear gegeben. Da $F = \langle B\rangle = \langle \mathrm{Bil}(\varphi)\rangle$ und $\pi$ surjektiv sind, folgt $T = \langle \mathrm{Bil}(\tau)\rangle$.
Jede lineare Abbildung $\phi: T \to U$ ist eindeutig bestimmt durch $\phi|_{\mathrm{Bil}(\tau)}$, also ist durch die Forderung $\beta = \phi \circ \tau$ $\phi$ eindeutig bestimmt (falls existent).

**Existenz von $\phi$:** Zunächst definiere die lineare Abbildung

$$\phi_F: F \to U$$

durch Vorgabe auf der Basis $B$.

$$\phi_F\left(f_{(v,w)}\right) := \beta(v, w)$$

Da $\beta$ bilinear ist, folgt

$$\phi_F\left(f_{(\alpha v_1+v_2,\beta w_1+w_2)} - \alpha\beta f_{(v_1,w_1)} - \beta f_{(v_2,w_1)} - \alpha f_{(v_1,w_2)} - f_{(v_2,w_2)}\right) = 0$$

also $R \leq \operatorname{Kern} \phi_F$.
Mit dem Homomorphiesatz folgt: Es existiert eine lineare Abbildung $\phi : \frac{F}{R} = T \to U$ mit

$$\phi([f]) = \phi_F(f)$$

und

$$\phi\left(\tau(v,w)\right) = \phi\left([\varphi(v,w)]\right) = \phi_F\left(f_{(v,w)}\right) = \beta(v,w)$$

■

**Anwendung:** Das Tensorprodukt wird zur Erweiterung des Skalarbereiches eines VRms genutzt. Sei $V$ $K$-VRm, $L$ ein Körper mit Teilkörper $K \leq L$. Insbesondere ist also $L$ ein $K$-VRm (vgl. früher). Nach Satz 10 existiert das Tensorprodukt $L \otimes_K V =: V_L$ ($K$-VRm).
Im Folgenden wollen wir zeigen, dass $V_L$ ein $L$-Vektorraum ist. Dazu fehlt die Skalarmultiplikation $L \times V_L \to V_L$, die wir mittels der UAE definieren. Für alle $l \in L$ ist:

$$\beta_l : L \times V \to V_L, (x,v) \mapsto lx \otimes v$$

bilinear, sodass $\beta_l(x,v) = \Phi_{\beta_l}(x \otimes v)$.
Nehme nun $\Phi_{\beta_l}$ als Skalarmultiplikation mit $l \in L$:

$$L \times V_L \to V_L, (l,u) \mapsto \Phi_{\beta_l}(u)$$

Leichte Übung: Dies erfüllt die Axiome für eine Skalarverknüpfung.

**Bemerkung:** $V_L$ enthält $V$ als $K$-Untervektorraum über die Einbettung:

$$V \to V_L, v \mapsto 1 \otimes v$$

Für eine Basis $B$ von $V$ ist das Bild $\{1 \otimes b \mid b \in B\} \subseteq V_L$ eine Basis des $L$-VRms $V_L$. Insbesondere ist

$$L \otimes_K K^n \stackrel{\sim}{=} L^n$$

eine Isomorphie von $L$-VRmen.

# 16. Metriken, Normen und Skalarprodukte

**Definition:** Metriken abstrahieren Abstände. Sei $X$ eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine **Metrik** oder ein **Abstand** auf $X$, falls gilt:

(a) $d$ ist **smmetrisch**, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x,y) = d(y,x)$$

(b) $d$ ist **positivdefintit**, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x,y) \geq 0 \text{ und } (d(x,y) = 0) \implies (x = y)$$

(c) Für alle $x, y, z \in X$ gilt die **Dreicksungleichung**:

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$$

**Beispiel:** (1) Die **diskrete Metrik** $d_0$ auf $X$:

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & ,(x \neq y) \\ 0 & ,(x = y) \end{cases}$$

(2) $X = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ mit Betrag $|\cdot|$ hat die Metrik:

$$d(x,y) = |x - y|$$

Auf Vektorräumen über $K = \mathbb{R}$ entstehen natürliche Metriken aus sogenannten Normen.
Im Folgenden schreibe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VRm. Eine Abbildung:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$$

heißt eine **Norm**, falls für $x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) Die Abbildung ist **positivdefinit**, d.h.:

$$\|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \iff x = 0)$$

(b) Die Abbildung ist **homogen**, d.h.:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

(c) Es gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ist dies erfüllt, so ist $(V, \|\cdot\|)$ ein **normierter Raum**.

**Beispiel:** (1) Der Raum $V = \mathbb{K}$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und den Normen:

$$\text{(a) } \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\text{(b) } \|x\|_{\max} := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

$$\text{(c) } \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(2) Der Raum der beschränkten Abbildungen $V = \mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})$ mit einer beliebigen Menge $M$ und der Norm:

$$\|f\|_\infty := \sup_{m \in M} |f(m)|$$

(3) Der Raum $V = C[a,b]$ der stetigen Abbildungen nach $\mathbb{K}$ mit der Norm:

$$\|f_1\| := \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

**Bemerkung:** (1) Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ besitzt die Metrik:

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

(2) In der Linearen Algebra tauchen hauptsächlich Normen auf, die mit **Skalarprodukten** definiert werden.

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VRm. Für $\alpha \in \mathbb{K}$ sei $\overline{\alpha}$ die komplexe Konjugierte.

(a) Eine Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt **Sesquilinearform** („sesqui“ bedeutet $1\frac{1}{2}$), falls

$$s(\alpha x + y, z) = \alpha \cdot s(x,z) + s(y,z)$$

gilt, also $s(\cdot, z)$ linear ist und außerdem noch gilt:

$$s(x, \alpha y + z) = \overline{\alpha} \cdot s(x,y) + s(x,z)$$

(b) Ist $s$ **schiefsymmetrisch**, d.h. es gilt:

$$s(y,x) = \overline{s(x,y)}$$

so heißt es **hermitesche Form** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. **symmetrische Bilinearform** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

(c) Eine schiefsymmetrische Sesquilinearform heißt **Skalarprodukt** auf $V$, falls $s$ positivdefinit ist.

**Bemerkung:** Ist $\dim V = n < \infty$ mit einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, so ist eine Sesquilinearform $s$ bestimmt durch die Werte $s(b_i, b_j) \in \mathbb{K}$, also durch die **Darstellungsmatrix**

$$D_{BB}(s) := (s(b_i, bj)) \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Jede beliebige Matrix $D = (d_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiert ein $s := s_B^D$ mit:

$$s(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \cdot d_{ij}$$

**Definition:** $D$ heißt **hermitesch** (bzw. **positivdefinit**), wenn das zugehörige $s$ diese Eigenschaft hat.
Also gilt etwa:

$$\begin{aligned} & A = (a_{ij}) \text{ hermitesch} \\ \iff & \forall i, j = 1, \dots, n : a_{ij} = \overline{a_{ji}} \\ \iff & A = \overline{A}^T \end{aligned}$$

**Beispiel:** Das **Standardskalarprodukt** auf $V = \mathbb{K}^n$

$$D = I \implies s(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

ist hermitesch und positivdefinit.

**Satz 11 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung):**
Ist $V$ VRm mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so gilt für alle $x, y \in V$:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

**Beweis:** Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle \\ &= \alpha\langle x, \alpha x + \beta y\rangle + \beta\langle y, \alpha x + \beta y\rangle \\ &= \alpha^2\langle x, x\rangle + \alpha\beta(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle) + \beta^2\langle y, y\rangle \end{aligned}$$

Sei nun:

$$F := \langle x, x\rangle \qquad 2G := \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \qquad H := \langle y, y\rangle$$

**Annahme:** $G^2 > FH$
Dann hat $P(X) := FX^2 + 2GX + H \in \mathbb{R}[X]$ zwei verschiedene Nullstellen und es existiert ein $\xi \in \mathbb{R} : P(\xi) < 0$. Dies stellt einen Widerspruch zu obiger Überlegung da (mit $\alpha = \xi$ und $\beta = 1$). Also gilt:

$$G^2 \leq FH$$

**Fall 1:** $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$
Dann gilt $G = \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ und mit $G^2 \leq FH$ folgt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.
**Fall 2:** $\langle x, y\rangle \notin \mathbb{R}$
Ersetze $y$ durch $\zeta y$ mit $\zeta \in \mathbb{C}^\times, |\zeta| = 1$. Wähle $\zeta := \frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle x, \zeta y\rangle &= \overline{\zeta}\langle x, y\rangle \\ &= \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{|\langle x, y\rangle|} \cdot \langle x, y\rangle \\ &= \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{|\langle x, y\rangle|} \\ &= |\langle x, y\rangle| \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Nach Fall 1 folgt daraus:

$$\begin{aligned}|\langle x, y\rangle|^2 &= |\langle x, \zeta y\rangle|^2 \\ &\leq \langle x, x\rangle \cdot \langle \zeta y, \zeta y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle \cdot \zeta\overline{\zeta} \cdot \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle\end{aligned}$$

■

**Bemerkung:** Im Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \overline{\eta_i}|^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2)(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2)$$

**Satz 12:**
Jeder VRm $V$ mit einem Skalarprodukt ist normiert durch die Norm:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

**Beweis:** (1) Es ist klar, das $\|x\| \in \mathbb{R}$ und $\|x\| \geq 0$ ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\|x\| = 0 &\implies \langle x, x\rangle = 0 \\ &\implies x = 0\end{aligned}$$

(2) Es gilt:

$$\begin{aligned}&\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq 2\|x\| \cdot \|y\| \\ \iff &\langle x, x\rangle\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle 2\|x\| \cdot \|y\| + \langle y, y\rangle \\ \iff &\langle x + y, x + y\rangle \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \iff &\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

(3) Es gilt:

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle = |\alpha|^2 \cdot \|x\|^2$$

■

**Bemerkung:** (1) Mit Hilfe der Norm lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

(2) Damit eine Norm von einem Skalarprodukt stammt, ist offenbar notwendig, dass sie die **Parallelogrammgleichung** erfüllt:

$$\forall x, y \in V : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Denn falls die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ kommt, gilt:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

Tatsächlich kommt eine Norm genau dann von einem Skalarprodukt, wenn sie die Parallelogrammgleichung erfüllt. Dies wird jedoch ohne Beweis angegeben.

# 17. Orthogonalsysteme

## 17.1. Winkel und Orthogonalität

**Vorbemerkung:** Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalaprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$, dann gilt nach Cauchy-Schwarz:

$$\forall x, y \in V \setminus \{0\} : \quad \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

**Definition:** (a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $x, y \in V \setminus \{0\}$ sei $\phi = \angle(x, y) \in [0, \pi]$ diejenige (eindeutig bestimmte) Zahl mit

$$\cos\phi = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$\phi$ heißt der **Winkel** zwischen $x$ und $y$.

(b) $x, y$ heißen **orthogonal** oder senkrecht zueinander, falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. Schreibe: $x \perp y$.

(c) Teilmengen $M, N \subseteq V$ heißen orthogonal, falls gilt:

$$\forall x \in M \forall y \in N : \quad x \perp y$$

Schreibe: $M \perp N$.

(d) Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt **Orthogonalsystem** (OGS), falls für $x, y \in B$ gilt:

$$x \neq y \implies x \perp y$$

(e) Ein Orthogonalsystem $B$ heißt **Orthonormalsystem** (ONS) wenn gilt:

$$\forall x \in B : \quad \|x\| = 1$$

(f) Eine Basis $B$ von $V$ heißt **Orthogonalbasis** (OGB), bzw. **Orthonormalbasis** (ONB), falls $B$ ein Orthogonalsystem, bzw. Orthonormalsystem, ist.

**Beispiel:** (1) Sei $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $S := \{e_1, \ldots, e_n\}$ Standardbasis.
Dann ist $S$ eine Orthonormalbasis und jede Teilmenge $T \subseteq S$ ist ein Orthonormalsystem.

(2) Sei $I := [a, b]$ ein Intervall.
Sei $V := \{p \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathbb{C}[T] : p(t) = P(t)\}$.
$w : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei stetig und mit der Eigenschaft $w(t) = 0$ nur für endlich viele $t \in I$.

Wir erhalten ein Skalarprodukt auf $V$:

$$\langle p, q\rangle_w := \int\limits_I w(t)p(t)\overline{q(t)}\mathrm{d}t$$

Eine Basis von $V$ ist $\{p_n(t) =: t^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Gesucht ist eine Orthonormalbasis und ein Verfahren zu ihrer Bestimmung.

**Bemerkung:** Jedes Orthogonalsystem $B$ mit $0 \notin B$ ist linear unabhängig.

**Beweis:** Es ist

$$\sum_{b\in B} \alpha_b \cdot b = 0$$

Dann gilt für alle $c \in B$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, c\rangle \\ &= \left\langle \sum_b \alpha_b b, c \right\rangle \\ &= \sum_b \alpha_b \langle b, c\rangle \\ &\overset{b=0\forall b\neq c}{=} \alpha_c \underbrace{\langle c, c\rangle}_{\neq c} \\ &\implies \alpha_c = 0 \end{aligned}$$

■

## 17.2. Das E. Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

**Satz 13:**
Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und sei $M := \{x_0, x_1, \ldots\}$ eine abzählbare Teilmenge von $V$.

(1) Es existiert ein Orthogonalsystem $\{y_0, y_1, \ldots\}$ derart, dass gilt:

$$\forall n : \quad \langle y_0, y_1, \ldots, y_n\rangle = \langle x_0, \ldots, x_n\rangle \quad \text{(gleiche lineare Hülle)} \tag{17.1}$$

(2) Falls $M$ linear unabhängig ist, so sind alle $y_i \neq 0$ und $B := \{z_0, z_1, \ldots\}$ mit

$$z_i := \frac{1}{\|y_i\|} y_i$$

ist ein Orthonormalsystem mit

$$\forall n : \quad \langle z_0, z_1, \ldots, z_n\rangle = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$$

**Beweis:** (1) Wir beschreiben einen Algorithmus zum Auffinden der $y_n$.
Start: $y_0 := x_0$. Angenommen: alle $y_m$ für $m < n$ sind bereits gefunden. Setze

$$y_n := x_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i$$

(nur über $i$ mit $y_i \neq 0$ summieren).
Damit folgt:

$$y_n \in \langle \underbrace{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}}_{=\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle}, x_n \rangle = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$$
$$x_n \in \langle y_0, y_1, \dots, y_n \rangle$$

Daraus folgt (17.1).

Rest: Für alle $m < n: \ y_n \perp y_m$. Damit:

$$\begin{aligned}
\langle y_n, y_m \rangle &= \langle x_n, y_m \rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} \langle y_i, y_m \rangle \\
&= \langle x_n, y_m \rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} \delta_{im} \langle y_i, y_i \rangle \\
&= \langle x_n, y_m \rangle - \langle x_n, y_m \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) ✓ Leicht selbst zu verifizieren. ∎

**Beispiel:** Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dann:

$$\begin{aligned}
y_0 &= x_0, \quad \|y_0\| = \sqrt{2} \\
y_1 &= x_1 - \frac{\langle x_1, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|y_1\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle} y_0 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{y_1, y_1 \rangle} y_1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Auswirkungen (des Orthogonalisierungsverfahrens) auf Matrizen:
Sei $V \cong \mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt $s$ und Basis $B := \{b_1, \dots, b_n\}$. Das Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthogonalbasis $C = \{c_1, \dots, c_n\}$.

$$c_\nu = b_\nu - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle}{\langle \cdot, \cdot \rangle} \cdot c_i = \dots = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i \longrightarrow A = M_{BC} = (\alpha_{i\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{c_\nu}{\|c_\nu\|} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\alpha_{i\nu}}{\|c_i\|} b_i = z_\nu \longrightarrow M_{BZ} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

**Erinnere (Darstellungsmatrix):**

$$D_{BB}(s) = (s\,(b_\nu, b_\mu)) \in \mathbb{K}^n$$

Da $C$ eine Orthogonalbasis ist, folgt $s\,(c_\nu, c_\mu) = \delta_{\nu\mu}\|c_\nu\|^2$, also

$$D_{CC}(s) = \operatorname{diag}\left(\ldots, \|c_\nu\|^2, \ldots\right)$$

Falls $Z$ eine Orthonormalbasis ist, so folgt $D_{ZZ}(s) = I$.

Generell für beliebige Basen $B, C$ und $A = M_{BC}$:

$$\begin{aligned} D_{CC}(s) &= (s\,(c_\nu, c_\mu)) \\ &= \left(s\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i\nu}, \sum_j \alpha_{j\mu} b_j\right)\right) \\ &= \left(\sum_i \sum_j \alpha_{i\nu}\overline{\alpha_{j\mu}} \cdot s(b_i, b_j)\right) \\ &= A^\top\,(s(b_i, b_j))\,\overline{A} \end{aligned}$$

**Definition:** Für beliebige $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ setze $D^* := \overline{D}^\top$ (die sogenannte **Adjungierte**).

$$D_{CC}(s) = A^\top D_{BB}(s)\overline{A}$$

Speziell für jede Orthonormalbasis $C$:

$$D_{CC}(s) = I,$$

das folgt wegen $M_{BC}^{-1} = M_{CB}$.
Es ist

$$D_{BB}(s) = D^* D$$

für $D := \overline{M}_{CB}$, wobei $D$ obere Dreiecksmatrix ist.

**Satz 14:**
Für $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist äquivalent:

(1) $P$ ist hermitesch (symmetrisch) und positiv definit

(2) Es gibt ein $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $P = A^* A$.

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Ringschluss:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sei $V = \mathbb{K}^n$, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis.
$P$ definiert ein Skalarprodukt:

$$s(x, y) = (\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$P = (s(e_i, e_j)) = D_{BB}(s)$$

Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthonormalbasis und damit $P = D^*D$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $P = A^*A$ ist hermitesch; zu zeigen: $P^* = P$

$$\begin{aligned} P^* &= (A^* \cdot A)^* \\ &= \overline{(A^* \cdot A)}^\top \\ &= \overline{\left(\overline{A}^\top \cdot A\right)}^\top \\ &= \left(A^\top \cdot \overline{A}\right)^\top \\ &= \overline{A}^\top \cdot A \\ &= A^*A \\ &= P \end{aligned}$$

Daraus folgt: $s(x,y)$ ist hermitesche Form. Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} s(x,x) &= \overline{x}^\top \cdot P \cdot x \\ &= \overline{x}^\top \left(\overline{A}^\top \cdot A\right) x \\ &= \left(\overline{A}\overline{x}\right)^\top Ax \\ &= s_0(Ax, Ax) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned} & s_0(Ax, Ax) = 0 \\ \Longleftrightarrow & Ax = 0 \\ \overset{A \text{ inv.}}{\Longleftrightarrow} & x = 0 \\ \Longrightarrow & s \text{ positiv definit} \end{aligned}$$

■

Falls speziell $B$ und $C$ Orthonormalbasen sind, folgt:

$$D_{BB}(s) = I = D_{CC}(s)$$

und $D := \overline{M}_{CB}$.

**Folgerung:** Die Basiswechselmatrix $A = M_{BC}$ einer Orthonormalbasis $C$ in eine andere Orthonormalbasis $B$ gehört zur **orthogonalen Gruppe**

$$O(n) := \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top \cdot A = I\right\} \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

beziehungsweise zur **unitären Gruppe**

$$U(n) := \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^\top \cdot \overline{A} = I\right\} \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

**Bemerkung:** $O(n)$, beziehungsweise $U(n)$, ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, beziehungsweise $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

**Folgerung (Iwasawa-Zerlegung):** Jede Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ hat eine eindeutige Produktzerlegung

$$g = k \cdot b$$

mit $k \in O(n)$ und $b \in B(n) := \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \mid \beta_\nu > 0 \right\}$. Das heißt:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = O(n) \cdot B(n)$$

Analog gilt:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = U(n) \cdot B(n)_\mathbb{C}$$

mit

$$B(n)_\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \beta_\nu \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

**Beweis:** Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}\, g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ folgt: Die Spalten $b_1, \dots, b_n$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthonormalbasis $\{c_1, \dots, c_n\}$ mit Übergangsmatrix $A = M_{BC} \in B(n)$. Denn:

$$c_\nu := \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i$$

besagt $g \cdot A = (c_1, \dots, c_n)$ und $k = (c_1, \dots, c_n) \in O(n)$, da $k^\top \cdot k = (\langle c_i, c_j \rangle) = I$. ■

## 17.3. Orthogonale Projektion und orthogonales Komplement

**Satz 15 (Satz von Pythagoras):**
Für $x, y \in V$ mit $x \perp y$ gilt:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ist $\{x_1, \dots, x_N\}$ ein Orthogonalsystem, so folgt

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu \right\|^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \|x_\nu\|^2$$

Der Beweis folgt leicht mit vollständiger Induktion. ■

**Satz 16:**
Sei $U \leq V$ mit $\dim V < \infty$.

(1) Für alle $x \in V$ existiert genau ein $y \in U$ mit $d := \|x - y\| = \min\{\|x - u\| \mid u \in U\}$.

(2) Dieses $y \in U$ ist auch charakterisiert durch: $(x - y) \perp U$.
Schreibe: $y =: \Pi_U(x)$.

(3) Die Abbildung $\Pi_U \in \operatorname{End}(V)$ ist stetig; es gilt $\Pi_U^2 = \Pi_U$ und $\|\Pi_U(x)\| \leq \|x\|$.
$d$ heißt **Abstand** von $x$ und $U$, $y = \Pi_U(x)$ die **orthogonale Projektion** von $x$ auf $U$, $z := x - y$ heißt **Lot** von $x$ auf $U$, $y$ **Lotfußpunkt**.

**Beweis:** (1) Wähle eine Orthonormalbasis $S = \{e_i \mid i = 1, \ldots, r\}$ in $U$. Setze $y = \Pi_U(x) := \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i$.

**Behauptung:** $\forall u' \in U : \quad x - y \perp y - u'$

$$\langle x - y, y - u' \rangle = \underbrace{\langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle}_{\stackrel{!}{=} 0} + \underbrace{\langle y, u' \rangle - \langle x, u' \rangle}_{\stackrel{!}{=} 0}$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = \sum_i \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle$$

$u'$ in Basisdarstellung: Mit $u' = \sum_j \alpha_j e_j$ folgt

$$\begin{aligned} \langle y, u' \rangle &= \left\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_j \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_i \langle x, e_i \rangle \overline{\alpha}_i \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \langle x, u' \rangle &= \left\langle x, \sum_j \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_j \overline{\alpha}_j \langle x, e_j \rangle \end{aligned}$$

Mit Pythagoras folgt:

$$\begin{aligned} \|x - u'\|^2 &= \|x - y + y - u'\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \underbrace{\|y - u'\|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Es ist also $\|x - u'\| \geq \|x - y\|$, wobei Gleichheit genau für $y - u' = 0$ gilt. Damit folgt die Eindeutigkeit von $y$.

(2) Sei $y \in U$ und $x - y \perp U$. Dann gilt $\langle x, e_i \rangle = \langle y, e_i \rangle$ für alle $i$.
Es folgt:

$$\begin{aligned} y &= \sum_i \langle y, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \\ &= \Pi_U(x) \end{aligned}$$

(3) Aus $x - y \perp y$ folgt mit Pythagoras:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x-y\|^2 + \|y\|^2 \\ &\geq \|y\|^2 \\ &= \|\Pi_U(x)\|^2 \end{aligned}$$

Es folgt: $\Pi_U$ ist (Lipschitz-)stetig.
$\Pi_U^2 = \Pi_U$ ist leicht selbst zu verifizieren. ■

**Definition:** Sei $M \subseteq V$ Teilmenge. Der Vektorraum

$$M^\perp := \{y \in V \mid y \perp M\}$$

heißt **Orthogonalraum** oder **orthogonales Komplement** von $M$.

**Lemma:**

(1) $M_1 \subseteq M_2 \implies M_1^\perp \geq M_2^\perp$

(2) $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$

(3) Aus $M_i \subseteq V$, $(i = 1, \ldots, n)$ folgt

$$\left( \bigcup_{i=1}^n M_i \right)^\perp = \bigcap_{i=1}^n M_i^\perp$$

(4) Aus $U_i \leq V$ (Teilräume) folgt

$$\left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right)^\perp \geq \sum_{i=1}^n \left( U_i^\perp \right)$$

(5) $\langle M \rangle \leq \left(M^\perp\right)^\perp$ und $M^\perp = \left(\left(M^\perp\right)^\perp\right)^\perp$.

(6) Im Spezialfall $\dim V < \infty$ gilt:

(a) Mit $U \leq V$ folgt $V = U \oplus U^\perp$ (insbesondere $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$) und $\left(U^\perp\right)^\perp = U$

(b) Mit $U_i \leq V$ folgt $\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right)^\perp = \sum_{i=1}^n \left(U_i^\perp\right)$

**Beweis:** Übung! ■

# 18. Normale Endomorphismen

## 18.1. Die adjungierte lineare Abbildung

Seien $V$, $W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$

**Lemma:**
Sei $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Falls $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ mit der Eigenschaft

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle x, \Psi(y) \rangle_V \, \forall x \in V, \, y \in W,$$

so ist $\Psi$ hierdurch eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Sei $\Psi' : W \to V$ ein Homomorphismus mit derselben Eigenschaft
$\implies$ Für $\Omega := \Psi - \Psi' \in \mathrm{Hom}(W, V)$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in V, \, y \in W : \langle x, \Omega(y) \rangle_V &= \langle x, \Psi(y) - \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle x, \Psi(y) \rangle_V - \langle x, \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle \phi(x), y \rangle_W - \langle \phi(x), y \rangle_W \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\implies \langle \Omega(y), \Omega(y) \rangle_V = 0 \quad \implies \Omega(y) = 0 \, \forall y$
Also: $\Omega = 0$, d.h. $\Psi = \Psi'$. ∎

**Definition:** Falls $\Psi$ existiert wie oben, so heißt $\Psi$ der zu $\phi$ adjungierte Homomorphismus.
Schreibe: $\Psi =: \phi^*$ $\quad \mathrm{Hom}^a(V, W) := \{\phi \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \phi^* \text{existiert}\}$

**Beispiel:** $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ mit Standardskalarprodukt.
$A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $\phi := \Lambda_A : x \mapsto A \cdot x$

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle Ax, y \rangle_W = \overline{y}^T Ax = (y^* A)x = (A^* y)^* = \langle x, A^* y \rangle_V = \langle x, \Lambda_{A^*}(y) \rangle$$

Das heißt: $(\Lambda_A)^* = \Lambda_{A*}$. Insbesondere existiert die Adjungierte.

**Proposition:**

(1) $\mathrm{Hom}^a(V, W) \leq \mathrm{Hom}(V, W)$

(2) Für die Abbildung $* : \mathrm{Hom}^a(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, V)$, $\phi \mapsto \phi^*$ gilt:

$$(\alpha \phi + \beta \Psi)^* = \overline{\alpha} \phi^* + \overline{\beta} \Psi^*$$

Die Abbildung ist **semilinear**.

(3) Aus $\phi \in \mathrm{Hom}^a(V,W)$, $\Theta \in \mathrm{Hom}^a(W,U)$ folgt $\Theta \circ \phi \in \mathrm{Hom}^a(V,U)$ und $(\Theta \circ \phi)^* = \phi^* \circ \Theta^*$

(4) Aus $\phi \in \mathrm{Hom}^a(V,W)$ folgt $\phi^* \in \mathrm{Hom}^a(W,V)$ und $(\phi^*)^* = \phi$, sowie $\mathrm{Kern}\,\phi = \mathrm{Bil}(\phi^*)^\perp$.

**Beweis:** (1) +(2) Sei $\phi, \Psi \in \mathrm{Hom}^a(V,W)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
$\overline{\alpha}\phi^* + \overline{\beta}\Psi^*$ ist die Adjungierte zu $\alpha\phi + \beta\Psi$, denn

$$\begin{aligned}\langle(\alpha\phi + \beta\Psi)(x), y\rangle &= \alpha \underbrace{\langle\phi(x), y\rangle}_{\langle x,\phi^*(y)\rangle} + \beta \underbrace{\langle\Psi(x), y\rangle}_{\langle x,\Psi^*(y)\rangle} \\ &= \langle x, \overline{\alpha}\phi^*(y) + \overline{\beta}\Psi^*(y)\rangle\end{aligned}$$

(3) Für alle $x \in V$, $y \in U$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle\Theta \circ \phi(x), y\rangle &= \langle\Theta(\phi(x)), y\rangle \\ &= \langle\phi(x), \Theta^*(y)\rangle \\ &= \langle x, \phi^*(\Theta^*(y))\rangle\end{aligned}$$

(4) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle\phi^*(y), x\rangle &= \overline{\langle x, \phi^*(y)\rangle} \\ &= \overline{\langle\phi(x), y\rangle} \\ &= \langle y, \phi(x)\rangle\end{aligned}$$

Das heißt $\phi^*$ hat die Adjungierte $(\phi^*)^* = \phi$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}x \in \mathrm{Kern}(\phi) &\iff \phi(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in W : \underbrace{\langle\phi(x), y\rangle}_{\langle x,\phi^*(y)\rangle} = 0 \\ &\iff x \perp \phi^*(w)\end{aligned}$$

■

Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\langle\phi(x), y\rangle = \langle x, \phi^*(y)\rangle$.

**Lemma:**
Sei $\dim V < \infty$, $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi) \implies \overline{\lambda} \in \mathrm{Spec}(\phi^*)$$

**Beweis:** Sei $u \neq 0$, $\phi(u) = \lambda \cdot u$. Dann gilt für alle $y \in V$:

$$0 = \langle(\phi - \lambda\,\mathrm{id})(u), y\rangle = \langle u, e(\phi - \lambda\,\mathrm{id})^*(y)\rangle$$

Nach Proposition gilt $(\phi - \lambda\,\mathrm{id})^* = \phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$.
Dann ist $0 = \langle u, \underbrace{(\phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(y)}_{\neq u}\rangle$ (wegen der positiven Definitheit und $u \neq 0$).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id} \text{ ist nicht surjektiv} &\iff \phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id} \text{ ist nicht injektiv} \\ &\iff \exists v \neq 0 : \phi^*(v) = \overline{\lambda} v \\ &\implies \overline{\lambda} \in \mathrm{Spec}(\phi^*) \end{aligned}$$

■

## 18.2. Der Spektralsatz

**Proposition:** Sei $\phi \in \mathrm{End}^a(V)$

(1) Für $\lambda, \mu \in \mathrm{Spec}(\phi)$ mit $\lambda \neq \mu$ gilt:

$$E_\lambda(\phi) \perp E_\mu(\phi)$$

(2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$

(b) $\forall x, y \in V : \langle \phi(x), \phi(y)\rangle = \langle \phi^*(x), \phi^*(y)\rangle$
$\phi$ heißt **normal**.

(3) Ist $\phi$ normal, dann folgt $\mathrm{Kern}(\phi) = \mathrm{Kern}(\phi^*)$, insbesondere $E_\lambda(\phi) = E_{\overline{\lambda}}(\phi^*)$.

**Beweis:** (1) Seien $u \in E_\lambda(\phi)$, $v \in E_\mu(\phi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\langle u, v\rangle &= \langle \lambda u, v\rangle \\ &= \langle \phi(u), v\rangle \\ &= \langle u, \phi^*(v)\rangle \\ &= \langle u, \overline{\mu} v\rangle \\ &= \mu\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

Mit $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle u, v\rangle = 0$ ■

**Satz 17 (Spektralsatz):**
Sei $\dim V < \infty$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Skalarprodukt mit $\phi \in \mathrm{End}(V)$ normal.
Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ habe das charakteristische Polynom $f_\phi(T)$ nur reelle Nullstellen. Dann existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\phi$.

**Beweis:** Sei $n := \dim V$, $\lambda_1 \in \operatorname{Spec}(\phi)$, $b_1 \neq 0 \in E_{\lambda_1}(\phi)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\|b_1\| = 1$.
Betrachte das orthogonale Komplement $U := b_1^\top$. Es gilt

$$V = \langle b_1 \rangle \oplus U,$$

wobei $\phi(U) \subseteq U$, $\phi^*(U) \subseteq U$ ist, denn für alle $u \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi(u), b_1 \rangle &= \langle u, \phi^*(b_1) \rangle \\ &= \langle u, \overline{\lambda_1} b_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \underbrace{\rangle u, b_1 \rangle}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $\phi(u) \perp b_1$, das heißt $\phi(U) \perp b_1$, damit folgt $\phi(U) \subseteq U$.
Für $\phi^*$ ist die Vorgehensweise analog.
Insbesondere ist $\phi|_U \in \operatorname{End}(U)$.

Ferner gilt $\left(\phi|_U\right)^* = \phi^*|_U$, also

$$\begin{aligned} \phi|_U \, \phi^*|_U &= (\phi\phi^*)|_U \\ &\overset{\phi \text{ normal}}{=} (\phi^*\phi)|_U \\ &= \phi^*|_U \, \phi|_U \end{aligned}$$

Also ist $\phi$ normal.

Vollständige Induktion nach $n$:
$n - 1 \rightsquigarrow n$: $U$ hat eine Orthonormalbasis $\{b_2, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von $\phi|_U$.
Dann ist $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ die gesuchte Orthonormalbasis. ∎

**Lemma (Transfer zu Matrizen):**
Für beliebiges $\phi \in \operatorname{End}(V)$ sei $s_\phi$ die Sesquilinearform

$$s_\phi(x, y) := \langle \phi(x), y \rangle$$

$B$ sei eine Orthonormalbasis von $V$. Dann gilt:

(1) $D_{BB}(\phi^*) = D_{BB}(\phi)^*$

(2) $D_{BB}(s_\phi) = D_{BB}(\phi)^\top$

(3) $\phi$ ist normal, genau dann wenn für $A := D_{BB}(\phi)$ gilt:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

**Beweis:** Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.
Erinnere: $D_{BB}(\phi) = (x_{ij})$ ist definiert durch $\phi(b_{ij}) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$.

Es gilt

$$\begin{aligned} s_\phi(b_j, b_k) &= \langle \phi(b_j), b_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \underbrace{\langle b_i, b_k \rangle}_{=\delta_{ik}} \\ &= \alpha_{kj} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (2).

Sei $D_{BB}(\phi^*) = (\beta_{ij})$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_{ji}} &= \overline{\langle \phi(b_i), b_j \rangle} \\ &= \langle b_j, \phi(b_i) \rangle \\ &= \langle \phi^*(b_j), b_i \rangle \\ &= \beta_{ij} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (1).

Es bleibt noch Behauptung (3) zu zeigen:

$$\phi \cdot \phi^* \iff \underbrace{D_{BB}(\phi\phi^*)}_{=AA^*} = \underbrace{D_{BB}(\phi^*\phi)}_{=A^*A}$$

■

**Korollar (zum Spektralsatz):**
Für $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)$ sei $U_\lambda := E_\lambda(\phi)$ und $\Pi_\lambda := \Pi_{U_\lambda}$ (orthogonale Projektion). Dann gilt für $p(T) \in \mathbb{K}[T]$:

$$p(\phi) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)} p(\lambda) \cdot \Pi_\lambda$$

und

$$\phi^* = \sum_\lambda \overline{\lambda} \cdot \Pi_\lambda$$

**Beweis:** Da $U_\lambda \perp U_\mu$ für $\lambda \neq \mu$ folgt $\Pi_\lambda \Pi_\mu = \delta_{\lambda\mu}\Pi_\lambda$.
Spektralsatz: Aus $V = \bigoplus_\lambda U_\lambda$ folgt $\operatorname{id}_V = \sum_\lambda \Pi_\lambda$.
Aus $p(\phi)|_{U_\lambda} = p(\lambda) \cdot \operatorname{id}_{U_\lambda}$ folgt $p(\phi) = \sum_\lambda p(\lambda)\Pi_\lambda$.
$\phi^*|_{U_\lambda} = \overline{\lambda} \cdot \operatorname{id}_{U_\lambda}$ liefert

$$\begin{aligned} \phi^* &= \phi^* \cdot \operatorname{id}_{U_\lambda} \\ &= \phi^* \cdot \sum_\lambda \Pi_\lambda \\ &= \sum_\lambda \phi^* \Pi_\lambda \\ &= \sum_\lambda \overline{\lambda} \Pi_\lambda \end{aligned}$$

■

**Satz 18:**
Seien $\phi,\ \Psi \in \mathrm{End}(V)$ normal und $\phi \cdot \Psi = \Psi \cdot \phi$.
Falls in $V$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren existiert und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu $\Psi$, dann existiert eine Orthonormalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren zu $\phi$ und $\Psi$.

**Beweis:** Seien $V = \bigoplus\limits_{\lambda} U_\lambda$, $U_\lambda := E_\lambda(\phi)$.
Zeige: $\Psi(U_\lambda) \subseteq U_\lambda$ und $\Psi|_{U_\lambda}$ sind diagonalisierbar.

Dazu:

$$\begin{aligned} u \in U_\lambda &\implies \phi(u) = \lambda u \\ &\implies \Psi(\phi(u)) = \Psi(\lambda u) = \lambda \Psi(u) \\ &\iff \phi(\Psi(u)) = \lambda\Psi(u) \qquad \implies \Psi(u) \in U_\lambda \end{aligned}$$

Analog: $\phi(E_\mu(\Psi)) \subseteq E_\mu(\Psi)$.
Da $V = \bigoplus\limits_{\mu} E_\mu(\Psi)$, gilt insbesondere für alle $u \in U_\lambda :\ u = \sum_\mu x_\mu \in E_\mu(\Psi)$. Es gilt sogar: jedes $x_\mu \in U_\lambda$, denn:

$$\phi(x_\mu =: x'_\mu \in E_\mu(\Psi)$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_\mu{}^{\oplus} x_\mu = \lambda u& \\ &= \phi(u) \\ &= \sum_\mu \phi(x_\mu) \\ &= \sum_\mu{}^{\oplus} x'_\mu \end{aligned}$$

Da die Summe direkt ist, folgt für alle $\mu$

$$\lambda \cdot x_\mu = x'_\mu = \phi(x_\mu),$$

das heißt $x_\mu \in U_\lambda$.

Insgesamt gezeigt:

$$U_\lambda = \bigoplus_\mu E_\mu(\Psi) \cap U_\lambda$$

(d.h. $\Psi|_{U_\lambda}$ ist diagonalisierbar). Damit folgt

$$V = \bigoplus_\lambda \bigoplus_\mu E_\mu(\Psi) \cap E_\lambda(\phi)$$

■

## 18.3. Selbstadjungierte Endomorphismen

**Definition:** $\phi \in \mathrm{End}(V)$ heißt **selbstadjungiert**, falls $\phi^* = \phi$.

**Bemerkung:** (1) $\phi$ ist selbstadjungiert impliziert $\phi$ ist normal.

(2) Ist $\dim V < \infty$, $B$ Orthonormalbasis und $A := D_{BB}(\phi)$, dann ist $\phi$ selbstadjungiert genau dann wenn $A = A^*$, d.h. $A$ ist hermitesch.

**Hintergrund:** Viele Problem in Physik und Technik führen auf hermitesche Matrizen.

**Satz 19:**

(1) $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit $A = A^\top$ impliziert $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ (oder: das charakteristische Polynom hat nur reelle Nullstellen).

(2) Für hermitesche $A$ gilt:

$$A \text{ ist positiv definit} \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A) :\ \lambda > 0$$

**Beweis:** (1) Sei $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ und $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Dann:

$$\begin{aligned}
\lambda \langle v, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \\
&= \langle Av, v \rangle \\
&= \langle v, A^* v \rangle \\
&= \langle v, Av \rangle \\
&= \langle v, \lambda v \rangle \\
&= \overline{\lambda}\ \underbrace{\langle v, v \rangle}_{= \|v\|^2 \neq 0}
\end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = \overline{\lambda}$, das heißt $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $A$ ist nach Definition genau dann positiv definit wenn $s_A(x, y) = x^\top A \overline{y}$ positiv definit ist.
Für eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von $A = A^*$ gilt

$$Ab_i = \lambda b_i$$

und Basisdarstellung

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i \rightsquigarrow x = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i} \overline{b_i}$$

und somit

$$
\begin{aligned}
s_A(x,x) &= x^\top A\overline{y} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i}\overline{b_i} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \underbrace{Ab_j}_{\lambda_j b_j} \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j\lambda_j \overline{b_i}^\top b_j \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j\lambda_j \underbrace{\overline{\langle b_i, b_j\rangle}}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2\lambda_i
\end{aligned}
$$

Also: $s_A(x,x) = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2\lambda_i$.
Dann folgt:

$$s_A(x,x) \geq 0\,\forall x \iff \forall\lambda_i \geq 0$$

und

$$s_A(x,x) = 0 \implies x = 0$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i$ größer Null sind. ■

**Bemerkung:** Für selbstadjungierte, reelle $A$ ist die Extravoraussetzung im Spektralsatz immer erfüllt.

**Korollar:**
Ist $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V < \infty$ und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, so besitzt $V$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu $\phi$.

**Definition:** Sei $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$.
Dann heißt $\rho(\phi) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)\}$ der **Spektralradius** von $\phi$. Für $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ setze $\rho(A) := \rho(\Lambda_A)$.

**Bemerkung:** Auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ ist durch

$$\|A\| := \sup\{\|A\| \mid x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1\}$$

eine Norm definiert.

**Satz 20:**
Es gilt $\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}$.
Falls $m = n$ und $A$ normal ist, gilt sogar $\|A\| = \rho(A)$.

**Beweis:** $A^*A$ ist selbstadjungiert, das heißt es gilt $(A^*A)^* = A^* \cdot (A^*)^* = A^*A$.
Dann existiert eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren, etwa $A^*Ab_i = \mu_i b_i$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle \\
&= \langle x, A^*Ax \rangle \\
&\overset{x=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i}{=} \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i b_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \underbrace{\overline{\mu_i}}_{=\mu_i}
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &\leq \sum_i |\alpha_i|^2 \underbrace{\max\{|\mu_i|\}}_{=\rho(A^*A)} \\
&= \rho(A^*A)\|x\|^2
\end{aligned}$$

Sei $x = \sum_i \alpha_i b_i$ die Basisdarstellung. Dann ist $\|Ax\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 \mu_i$, also alle $\mu_i \geq 0$.
Weiterhin: $A^*Ab_i = \mu_i b_i$ und $\rho(A^*A) = \mu_{\max} = \mu_{i_0}$, dazu $b_{i_0}$. Mit $x := b_{i_0}$ folgt $\|Ax\|^2 = \mu_{\max}$.
**Speziell für normales** $A$ $(m = n)$:
Es gilt $E_\lambda(A) = E_{\overline{\lambda}}(A^*)$. Dann:

$$\mu_i = \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2$$

und damit folgt

$$\|A\| = |\mu_{\max}| = \rho(A)$$

■

**Vorsicht:** Im allgemeinen ist $\|A\| \neq \rho(A)$.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\rho(A) = 0$ aber $\|A\| = 1$. Es ist

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 19. Isometrien

**Aufgabe:** Studiere alle linearen Abbildungen, die **Abstände** von Punkten nicht ändern. Z.B. Drehungen um einen Punkt im $\mathbb{R}^2$.

## 19.1. Charakterisierung und orthogonale Gruppe

**Definition:** Seien $V_1, V_2$ $\mathbb{K}$-VRme mit Sesquilinearformen $s_1, s_2$.

(a) Ein **Morphismus von $\mathbb{K}$-VRmen mit Sesquilinearform** ist $\Phi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ mit:

$$\forall x, y \in V_1 : s_2(\Phi(x), \Phi(y)) = s_1(x, y)$$

Schreibe: $\Phi : (V_1, s_1) \to (V_2, s_2)$.

(b) Ist $\Phi$ zusätzlich bijektiv, so heißt $\Phi$ eine **(lineare) Isometrie**.

(c) Eine Isometrie $\Phi : (V, s) \to (V, s)$ heißt **Automorphismus** von s.
Die Gruppe $\mathrm{Aut}(s) \leq \mathrm{Aut}(V)$ heißt die **Automorphismengruppe** von s.

**Beispiel:** In der Relativitätstheorie wichtig ist die **Lorenzgruppe** $\mathrm{Aut}(s)$ zu

$$s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -c \end{pmatrix} y$$

für $c$ :=Lichtgeschwindigkeit.

**Definition:** Im Folgenden sei $s$ stets SKP.
**Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:**
$O(V, s) := \mathrm{Aut}(s)$ heißt **orthogonale Gruppe**. Die Elemente der Gruppe heißen **orthogonale Abb. bzgl. s**.
**Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:**
$U(V, s) := \mathrm{Aut}(s)$ heißt **unitäre Gruppe**. Die Elemente der Gruppe heißen **unitäre Abb. bzgl. s**.

**Bemerkung:** Eine wichtige Isometrie ist: abstrakter VRm $\cong$ Standardraum

**Satz 21:**
Sei $V$ VRm mit SKP $s$, $\dim(V) = n$ und ONB $B$. Dann ist die Koordinatendarstellung:

$$D_B : (V, s) \to (\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

eine Isometrie.

**Beweis:** Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}, x, y \in V$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, y = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{b_j} \cdot s(b_i, b_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{b_i} \\ &= \langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle D_B(x), D_B(y) \rangle \end{aligned}$$

■

**Bemerkung:** (1) Sei $\Phi : V_1 \to V_2$ Morphismus von SKP-Räumen, dann ist $\Phi$ **längentreu**.

$$\iff \|x\|_1 = \|\Phi(x)\|_2$$

**Winkeltreue** für $K = \mathbb{R}$ bedeutet:

$$\frac{\langle x, y \rangle_1}{\|x\|_1 \|y\|_1} = \frac{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2}{\|\Phi(x)\|_2 \|\Phi(y)\|_2}$$

(2) $\Phi : (V, s) \to (V, s)$ Endomorphismus von SKP-Räumen und $\dim(V) < \infty \implies \Phi$ ist Isomorphismus und Automorphismus, also orthogonal und unitär.

**Satz 22 (Isometriekriterium):**
Sei $V$ VRm mit SKP $s = \langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\Phi \in \mathrm{Aut}(V)$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\Phi$ ist Isometrie (d.h. $\Phi \in \mathrm{Aut}(s)$).

(2) $\Phi \in \mathrm{End}^a(V)$ und $\Phi^* = \Phi^{-1}$.

(3) $\forall x \in V : \|x\| = \|\Phi(x)\|$

(4) $\forall y \in V : (\|y\| = 1) \implies (\|\Phi(y)\| = 1)$ (Einheitssphärenabbildung).

**Beweis:** Die Äquivalenz ergibt sich aus folgendem Ringschluss:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es gilt $\forall x, y \in V,\ z := \Phi(y)$:

$$\begin{aligned} &\Phi \text{ Isometrie} \\ &\Longleftrightarrow \forall x, y \in V : \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\overset{\Phi^{-1} \text{ ex.}}{\Longleftrightarrow} \forall x, z \in V : \langle \Phi(x), z \rangle = \langle x, \Phi^{-1}(z) \rangle \end{aligned}$$

Nach Definition der Adjungierten folgt daraus $\Phi^{-1} = \Phi^*$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Es gilt für alle $x \in V$:

$$\|\Phi(x)\|^2 = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle \overset{(2)}{=} \langle x, \Phi^*\Phi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

(3) $\Longleftrightarrow$ (4) ✓

(3) $\Longrightarrow$ (1) Es gilt für alle $x, y, \in V, \alpha \in K$ :

$$\begin{aligned} & \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = \langle \Phi(\alpha x + y), \Phi(\alpha x + y) \rangle \\ \Longleftrightarrow\ & \langle \alpha x, y \rangle + \langle y, \alpha x \rangle = \langle \Phi(\alpha x), \Phi(y) \rangle + \langle \Phi(y), \Phi(\alpha x) \rangle \\ \Longleftrightarrow\ & \alpha \langle x, y \rangle + \overline{\alpha} \overline{\langle x, y \rangle} = \alpha \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle + \overline{\alpha} \overline{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle} \end{aligned}$$

**Fall $K = \mathbb{R}$:**
Mit $\alpha := \frac{1}{2} : \langle x, y \rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$
**Fall $K = \mathbb{C}$:**
Mit $\alpha := \frac{1}{2} : \mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$
Mit $\alpha := \frac{i}{2} : \mathrm{Im}\langle x, y \rangle = \mathrm{Im}\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$ ■

**Korollar:**
Sei $\dim(V) = n < \infty$, $B$ ONB von $V$ und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\Phi$ ist Isometrie.

(2) Es gilt für alle $x \in V : \|\Phi(x)\| = \|x\|$

(3) $\Phi(B)$ ist ONB.

(4) Es gilt $D_{BB}(\Phi)^{-1} = D_{BB}(\Phi^*)$, d.h. $D_{BB}(\Phi)$ ist unitär bzw. orthogonal.

(5) Die Spalten (bzw. Zeilen) von $D_{BB}(\Phi)$ bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$ bzgl. dem Standard-SKP.

(6) Es existiert eine ONB $C$ von $V$ mit $D_{BC}(\Phi) = I_n$.

**Beweis:** Jede der Aussagen impliziert $\Phi \in \mathrm{Aut}(V)$.
Sei $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$.

(1) $\iff$ (2) $\iff$ (4) Klar nach Isometriekriterium.

(4) $\iff$ (5) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&D_{BB}(\Phi)^{-1} = D_{BB}(\Phi^*)\\
&\implies D_{BB}(\Phi) \cdot D_{BB}(\Phi^*) = I_n\\
&\iff \{\text{Zeilen von } \Phi\} \text{ sind ONB bezgl. Standardform}\\
&\implies D_{BB}(\Phi^*) \cdot D_{BB}(\Phi) = I_n\\
&\iff \{\text{Spalten von } \Phi\} \text{ sind ONB bezgl. Standardform}
\end{aligned}$$

(3) $\implies$ (2) Da für alle $b_i, b_j \in B$ gilt:

$$\langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \delta_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$$

Folgt für alle $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in V$ :

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle &= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle\\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle b_i, b_j \rangle\\
&= \langle x, x \rangle
\end{aligned}$$

Also ist $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ und $\Phi$ längenerhaltend.

(1) $\implies$ (3) Da $\Phi$ Isometrie ist, gilt:

$$\implies \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

D.h. $\Phi(B)$ ist ONB.

(3) $\implies$ (6) Sei $C := \Phi(B)$. Dann gilt:

$$D_{BC}(\Phi) = I_n$$

(6) $\implies$ (4) Es existiert eine ONB $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, sodass gilt:

$$D_{BC}(\Phi) = I_n$$

Daraus folgt: $D_{BB}(\Phi) = D_{BC}(\Phi) \cdot M_{CB} = M_{CB} =: (\gamma_{ij})$
Also gilt für alle $b_j \in B$:

$$b_j = \sum_k \gamma_{kj} \cdot c_k$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle b_j, b_i \rangle\\
&= \langle \sum_k \gamma_{kj} \cdot c_k, \sum_l \gamma_{li} \cdot c_l \rangle\\
&= \sum_{k,l} \gamma_{kj} \cdot \overline{\gamma_{li}} \cdot \langle c_k, c_l \rangle\\
&= \sum_k \gamma_{kj} \cdot \overline{\gamma_{ki}}\\
&= \sum_k \overline{\gamma_{ki}} \cdot \gamma_{kj} - (\overline{M}_{CB}^T \cdot M_{CB})_{ij}
\end{aligned}$$

Es gilt also $M_{CB}^* = M_{CB}^{-1}$. ■

## 19.2. Normalformen für Isometrien und normale Endomorphismen

Sei $V$ VRm mit SKP $\langle \cdot, \cdot \rangle, \dim(V) = n < \infty$.

### 19.2.1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Lemma:**
Ein Endomorphismus $\Phi$ ist genau dann unitär, wenn er normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

**Beweis:** Da $\Phi$ unitär ist, also $\Phi^* = \Phi^{-1}$ gilt, ist $\Phi$ normal. Nach Spektralsatz existiert dann eine ONB $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von $\Phi$. Also gilt:

$$\Phi(b_i) = \lambda_i b_i \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Mit dem Korollar folgt:

$$\begin{aligned} &\Phi \text{ unitär} \\ \iff\ &\Phi(B) \text{ ONB} \\ \iff\ &\delta_{ij} = \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \langle \lambda_i b_i, \lambda_j b_j \rangle = |\lambda_i|^2 \cdot \delta_{ij} \\ \iff\ &|\lambda_i|^2 = 1 \\ \iff\ &|\lambda_i| = 1 \end{aligned}$$

■

**Folgerung:** $D_{BB}(\Phi) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $|\lambda_i| = 1$ heißt **Normalform** der unitären Abb. $\Phi$ und ist bis auf die Reihenfolge der Eigenwerte eindeutig bestimmt.

**Korollar:**
Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal, so existieren $M \in U_n$ und $\lambda_i \in \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

D.h. jedes normale $A$ erlangt durch **unitären Basiswechsel** Normalform.
Falls $A$ unitär ist, so existiert $\Phi_j \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\lambda_j = e^{i\Phi_j} = \cos \Phi_j + i \sin \Phi_j$$

**Beweis:** Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt, $\varphi = \Lambda_A : x \mapsto Ax$

Aus dem Basiswechsel zwischen einer Orthonormalbasis $S$ (der Standardbasis) und einer Orthonormalbasis $B$ aus Eigenvektoren von $\phi$ folgt: $M := M_{SB}$ ist unitär.

Das heißt:

$$M^{-1} D_{SS}(\Lambda_A) M = M^{-1} A M = D_{BB}(\Lambda_A) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad \blacksquare$$

### 19.2.2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Sei $\Psi \in \operatorname{End}(V)$ normal; das char. Polynom $f = f_\Psi \in \mathbb{R}[X]$.

Beachte: Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle ist, so ist auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle.

$$\begin{aligned} 0 &= f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i \\ 0 &= \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \bar{\lambda}^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{\lambda}^i \quad \text{da } a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Das heißt: Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ treten stets als Paare $(\lambda, \bar{\lambda})$ auf.

Via Isometrie:

$$\begin{array}{rcl} D_{BB}: \quad V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^n \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Lambda_A \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ normal} \\ V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Betrachte zunächst: $\phi := \Lambda_A \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$

**Lemma:**
Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig und $\phi = \Lambda_A \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$, so gilt:

(1) für $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi) \cap \mathbb{R}$ hat $E_\lambda(\phi) (\subseteq \mathbb{C}^n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n (\subseteq \mathbb{C}^n)$

(2) für $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi) \setminus \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}^n \cap E_\lambda(\phi) = 0$ und $\overline{E_\lambda(\phi)} = E_{\bar{\lambda}}(\phi)$

Für normale $A$ gilt: $\overline{E_\lambda(\phi)} \perp E_\lambda(\phi)$

**Beweis:** (1) Vorbemerkung: Die lineare Unabhängigkeit von $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ bleibt in $\mathbb{C}^n$ erhalten.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt daher:

$$\operatorname{rg}_\mathbb{R}(A - \lambda I) = \operatorname{rg}_\mathbb{C}(A - \lambda I) \implies \dim_\mathbb{R} \operatorname{Kern}(A - \lambda I) = \dim_\mathbb{C} \operatorname{Kern}(A - \lambda I)$$

Also ist jede $\mathbb{R}$-Basis von $\operatorname{Kern}_\mathbb{R}(A - \lambda I)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\operatorname{Kern}_\mathbb{C}(A - \lambda I) = E_\lambda(\phi)$

(2) Sei $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi) \setminus \mathbb{R}$.

Aus $A \cdot b = \lambda \cdot b$ folgt $b \notin \mathbb{R}^n$ oder $b = 0$, denn:
falls $b \in \mathbb{R}^n$ folgt $Ab \in \mathbb{R}^n \implies \lambda b \in \mathbb{R}^n \overset{\lambda \notin \mathbb{R}}{\implies} b = 0$

Ferner folgt:

$$\bar{\lambda} \cdot \bar{b} = \bar{A} \cdot \bar{b} = A \cdot \bar{b}$$

d.h. $b \in E_{\bar{\lambda}}(\phi) \implies$ "$\subseteq$" $\implies$ "$=$"

Ist $A$ normal, dann folgt mit dem Spektralsatz: $\lambda \neq \bar{\lambda}$, d.h. $E_\lambda \perp E_{\bar{\lambda}}$ ■

**Korollar:**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normal, $\phi := \Lambda_A \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$.
Ferner sei $Spec(\phi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s}, \bar{\lambda}_{r+s}\}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}\,(j = 1, \ldots, r)$, $\lambda_{r+k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,(k = 1, \ldots, s), n = r + 2s$ (evtl. sind gleiche dabei)

- Dann existiert eine Orthonormalbasis

$$B = \{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \bar{b}_{r+1}, \ldots, b_{r+s}, \bar{b}_{r+s}\}$$

  aus Eigenvektoren von $\phi$, wobei $b_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, \ldots, r$.
  Es ist $b_{r+k} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n\,(k = 1, \ldots, s)$ und $Ab_j = \lambda_j b_j$, $A\bar{b}_j = \bar{\lambda}_j \bar{b}_j$

- Mit

$$U_j := \begin{cases} \mathbb{C} \cdot b_j & j = 1, \ldots, r \\ \mathbb{C} \cdot b_j \oplus \mathbb{C} \cdot \bar{b}_j & j = r+1, \ldots, r+s \end{cases}$$

  geht die direkte Zerlegung:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{r+s} U_j$$

  in $\phi$-invariante Teilräume, die paarweise orthogonal sind (d.h. $U_j \perp U_k$ für $j \neq k$).

**Beweis:** Lemma (1): Für $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi) \cap \mathbb{R} : E_\lambda(\phi)$ hat die Basis $B_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$.

Orthonormalisierungsalgorithmus: $B_\lambda \rightsquigarrow$ ONB $\subseteq \mathbb{R}^n$.

Für Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existiert nach Spektralsatz gleichfalls eine Orthonormalbasis $B_\lambda$ von $E_\lambda(\phi)$.

Lemma (2): $\bar{B}_\lambda := B_{\bar{\lambda}}$ ist ONB von $E_{\bar{\lambda}}(\phi)$. Beachte: Für das Standardskalarprodukt gilt: $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$.

Also: Zu $b_j \in B_\lambda$ gehört $\bar{b}_j \in B_{\bar{\lambda}}$.

Es ist klar, daß $U_j = \langle b_j, \bar{b}_j \rangle$ $\phi$-invariant und $U_j \perp U_k$ ist, da alle $b$ paarweise orthogonal sind.
Problem: Wie lässt sich die Zerlegung im Korollar auf die reelle Situation übertragen? ■

**Satz 23:**
Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V = n < \infty$, $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt:

(1)

$$f_\Psi(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j) \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_{r+k})(X - \bar{\lambda}_{r+k})$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (OBdA sei $\lambda_1 \leq \ldots \lambda_n$), $\lambda_{r+k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Beachte: Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt: $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda}) = X^2 - 2\gamma \cos(\phi) X + \gamma^2$ mit $\gamma := |\lambda| > 0$ und $\phi \in (0, \pi)$.

(2) Es existiert eine ONB $C = \{c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, c'_{r+1}, \ldots, c_{r+s}, c'_{r+s}\}$ von $V$ so, daß $D_{CC}(\Psi)$ **Drehkästchennormalform** hat, d.h.

$$D_{CC}(\Psi) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \gamma_1 D_{\phi_1}, \ldots, \gamma_s D_{\phi_s})$$

(eindeutig bestimmt durch $\Psi$), wobei

$$\gamma D_\phi = \gamma \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

(3) $\Psi$ ist orthogonal genau dann, wenn alle reellen $\lambda_j = \pm 1$ und alle $\gamma_k = 1$ sind.

**Beweis:** (1) ✓

(2) Nehme aus Korollar $c_j = b_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \ldots, r)$ und für $U = \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}\bar{b}$ finden wir eine ONB $\subseteq \mathbb{R}^n$ wie folgt: Behauptung: $C := \{\sqrt{(2)}\Re(b), -\sqrt{(2)}\,\mathrm{Im}(b)\}$ ist ONB von $U$
denn: $M_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 1 & -\imath \end{pmatrix}$ ist unitär, also $M_{CB} = M_{BC}^{-1} = M_{BC}^*$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} D_{CC}(\Psi|_U) &= M_{CB} \cdot D_{BB}(\Psi|_U) \cdot M_{BC} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\imath & \imath \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 1 & -\imath \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda + \bar{\lambda} & \imath(\lambda - \bar{\lambda}) \\ -\imath(\lambda - \bar{\lambda}) & \lambda + \bar{\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) $D_{CC}(\Psi) = A$ orthogonal $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A^*A = I \Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $|\lambda| = 1$. ■

**Definition:** (a) $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal heißt **Drehung um den Winkel** $\phi$, falls eine ONB $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ existiert, so daß $D_{BB}(\Phi) = \mathrm{diag}(D_{phi}, 1, \ldots, 1)$.

$U = \mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2$ heißt **Drehebene von** $\phi$ und $U^\perp = \langle b_3, \ldots, b_n\rangle$ **verallgemeinerte Drehachse**.

(b) $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal heißt **Spiegelung** an einer **Hyperebene** $H$, falls eine ONB $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ existiert, so daß $D_{BB}(\Psi) = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ und $H := \langle b_4, \ldots, b_n\rangle$.

**Bemerkung:** Falls $\Phi \neq \mathrm{id}$ Drehung ist, folgt $D_\phi \neq \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ und $U^\perp = \mathrm{Kern}(\phi - \mathrm{id}_V)$.

Insbesondere sind $U$ und $U^\perp$ durch $\Phi$ eindeutig bestimmt (unabhängig von der Basis).

**Satz 24:**
Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $s$ und $\dim V = n < \infty$. Dann ist die Gruppe $O(V, s)$ erzeugt durch Drehungen und Spiegelungen. Genauer:$\forall \Psi \in O(V, s) \exists$Zerlegung $n = r + 2r'$, so daß $\Psi$ Produkt von höchstens $r$ Spiegelungen und $r'$ Drehungen ist.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} D_{BB}(\Psi) &= \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, D_{\phi_1}, \ldots, D_{\phi_r}) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda_j, 1, \ldots, 1) \prod_{k=1}^{r'} \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, D_{\phi_k}, 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$ ■

# 20. Affine Räume

Man möchte vom Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ abstrahieren:

- statt $\mathbb{R}$ **beliebige** Körper $K$
- statt Dimension 3 **beliebige** Dimensionen $< \infty$

**Aufgabe:** Finde die „richtige" Verallgemeinerung der vertrauten **geometrischen** Begriffe, sodass bekannte geometrische Sätze richtig bleiben.

Im Folgenden sei $K$ stets ein beliebiger Körper.

## 20.1. Grundbegriffe

**Definition:** Sei $V$ $K$-VRm mit $\dim(V) = n < \infty$.

(a) Eine Menge $A \neq \emptyset$ heißt **affiner Raum mit Richtungsvektorraum** $V$, falls $(V, +)$ auf $A$ operiert, d.h. es existiert eine Paarung „+" genannt **Translation** $V \times A \to A$, $(x, P) \mapsto x + P$, mit der Eigenschaft:

$$\forall P, Q \in A \exists_1 x \in V : Q = x + P$$

(b) Elemente von $A$ heißen **Punkte**.
Der zu gegebenen Punkten $P$, $Q$ eindeutig bestimmte Vektor $x$ mit $Q = x + P$ heißt der **Translationsvektor von** $P$ **nach** $Q$.
Schreibe: $x := \overrightarrow{PQ}$

(c) $\dim(A) := \dim(V)$ heißt **Dimension von** $A$.

**Bemerkung:** (1) Vorsicht in (1) wird das Zeichen „+" für verschiedene Verknüpfungen benutzt.

(2) Es gilt für $P, Q, R, \in A$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP} &= 0 \\ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PR} \\ \overrightarrow{QP} &= -\overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

(3) $A$ besteht aus genau einer Bahn:

$$\forall P \in A : A = V + P := \{x + P \mid x \in V\}$$

**Beispiel:** Der **affine Standardraum** $\mathbb{A}_n(K)$ ist definiert als Punktmenge $\mathbb{A} := K^n$ und $V := K^n$, mit Translation := Addition in $K^n$, d.h. für $P, Q \in K^n$ gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

**Definition:** Eine Teilmenge $B \neq \emptyset$ eines affinen Raumes A heißt **(affiner) Teilraum** oder **lineare Varietät** von $A$, falls ein VRm $U_B \leq V$ existiert, sodass $B$ affiner Raum ist, mit Richtungsvektorraum $U_B$ (unter der in $A$ gegebenen Operation).
Auch $B = \emptyset$ werde affiner Teilraum genannt.
Spezielle affine Teilräume B sind:

(a) **Gerade** $\iff \dim(B) = 1$

(b) **Ebene** $\iff \dim(B) = 2$

(c) **Hyperebene** $\iff \dim(B) = \dim(A) - 1$

**Lemma:**

(1) Ist $B \neq \emptyset$ affiner Teilraum, dann gilt:

$$U_B = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in B\}$$

(2) Sind $\emptyset \neq B \subseteq C$ affine Teilräume und $\dim(B) = \dim(C)$, dann ist $B = C$.

(3) Durch zwei Punkte $P \neq Q$ in $A$ geht genau eine Gerade.

$$PQ := K \cdot \overrightarrow{PQ} + P = \{\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P \mid \lambda \in K\} \leq A$$

Diese wird die **Verbindungsgerade** von $P$ und $Q$ genannt.

(4) Drei Punkte $P, Q, R \in A$ liegen genau dann auf **einer** Geraden, wenn gilt, dass $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ linear abhängig sind.

**Beweis:** (1) „$\supseteq$“ ✓

„$\subseteq$“ Da $B$ affiner Teilraum mit Richtung $U_B$ ist, gilt für alle $P, Q \in B$:

$$\exists_1 x \in B : x = \overrightarrow{PQ} \iff x + P = Q$$

(2) Aus (1) folgt mit $B \subseteq C$, dass $U_B \subseteq U_C$ gilt. Da diese die gleiche Dimension haben muss dann schon $U_B = U_C$ gelten. Für $P \in B \cap C$ gilt dann:

$$B = U_B + P = U_C + P = C$$

(3) Es ist klar, dass $P$ und $Q$ auf der Geraden $PQ$ liegen, daher muss lediglich die Eindeutigkeit gezeigt werden.
Sei $B$ eine Gerade mit $P, Q \in B$ und $U := U_B$. Da $P \neq Q$ ist, ist $\overrightarrow{PQ} \in U$ nicht der Nullvektor. Da außerdem $\dim U = 1$ ist, gilt:

$$U = K \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Daraus folgt:

$$B = U + P = PQ$$

(4) Sei $x := \overrightarrow{PQ}$ und $y := \overrightarrow{QR}$. Es existiert genau dann eine Gerade $B$ mit $P, Q, R \in B$, wenn gilt:

$$\exists \text{ VRm } U : \dim U = 1, x, y \in U$$

Also genau dann, wenn $x$ und $y$ linear abhängig sind. ■

**Satz 25 (Teilraumkriterium):**
Sei $A$ affiner Raum mit Richtung $V$ und sei $\emptyset \neq B \subseteq A$. Dann sind äquivalent:

(1) $B$ ist affiner Teilraum.

(2) Es existieren $P \in A$ und $U \leq V$, sodass gilt:

$$B = U + P$$

(3) Falls $|K| > 2$, so ist auch äquivalent:

$$\forall P, Q \in B : P \neq Q \implies PQ \subseteq B$$

(4) Falls $A = \mathbb{A}_n(K)$, so ist auch äquivalent, dass $B$ Lösungsmenge eines LGS ist.

**Beweis:** Die Äquivalenz ergibt sich aus folgendem Ringschluss:

(1) $\implies$ (2) Ist $B$ affiner Teilraum, so gilt:

$$\exists U \leq V : \forall P \in U : B = U + P$$

(2) $\implies$ (1) $B = U + P$ ist affiner Teilraum, denn $U$ operiert auf $B$ und für $Q, R \in B$ : gilt:

$$\exists x, y \in U : Q = x + P, R = y + P \text{ und}$$

$$\exists_1 \text{ Translation } \overrightarrow{QR} = y - x \in U$$

Daraus folgt, dass $U$ affiner Teilraum ist.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Sei $B$ affiner Teilraum mit $P, Q \in B, P \neq Q$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{PQ} \in U_B \\ &\Longrightarrow \forall \lambda \in K : \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P \in B \\ &\Longrightarrow PQ \subseteq B \end{aligned}$$

(3) $\Longrightarrow$ (2) Setze $U := \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in B\} \subseteq V$.
**Zeige zunächst:** Für alle $P \in B$ gilt:

$$U + P \subseteq B$$

D.h. für alle $y \in U$ gilt:

$$y + P \in B$$

„$\subseteq$" Sei also $0 \neq y \in U$, dann existiert ein $Q \neq R \in B$, sodass gilt:

$$y = \overrightarrow{QR}$$

Setze $z := \overrightarrow{PQ}$.
**Fall $y, z$ linear abhängig:**
Aus dem Lemma folgt, dass $P, Q, R$ auf der Geraden $QR = \{\lambda \cdot y + P \mid \lambda \in K\} \overset{(3)}{\subseteq} B$ liegen. Insbesondere gilt:

$$y + P \in B$$

**Fall $y, z$ linear unabhängig:**
Wähle $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Betrachte $S := \frac{\lambda}{\lambda - 1} y + P$, $N := \lambda z + P$.
Dann ist $N \in PQ \subseteq B$.
Annahme: $N = R$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} N &= \lambda z + p \\ &= R \\ &= y + z + P \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $y$ und $z$ linear abhängig sind. $\lightning$ Es gilt also $N \neq R$.
Ferner gilt, dass $S, N, R$ auf einer Geraden liegen, denn:

$$\overrightarrow{NR} = y + z - \lambda z = y + (1 - \lambda) z \text{ und}$$

$$\overrightarrow{SN} = \lambda z - \frac{\lambda}{1 - \lambda} y = \frac{\lambda}{\lambda - 1}((\lambda - 1) z - y)$$

sind linear abhängig.
Aus $N, R \in B$ folgt:

$$S \in NR \overset{(3)}{\subseteq} B$$

Außerdem gilt: $S \neq P$, also $SP \in B$ und damit $y + P \in B$
Es gilt sogar: $B = U + P$, da für alle $Q \in B$ gilt:

$$Q = \overrightarrow{PQ} + P \in U + P$$

„$\supseteq$“ ✓

**Es bleibt zu zeigen:** $U \leq V$ (Untervektorraum)
Seien $x, y \in U, \alpha \in K$. O.B.d.A lässt sich $x \neq 0$ annehmen, etwa $x = \overrightarrow{PQ}, P, Q \in B$. Dann gilt:

$$\alpha x + P \in PQ \subseteq B \implies \alpha x \in U$$

Also genügt es zu zeigen, dass $x + y$ in $U$ liegt. Sei $P' := x + P$.
Dann gilt mit $x = \overrightarrow{PQ}$ und $y + P \in U + P \subseteq B$:

$$\begin{aligned}&(x + y) + P = x + (y + P) \in U + P' \subseteq B \\ &\implies x + y \in U\end{aligned}$$

■

## 20.2. Eigenschaften affiner Teilräume

**Lemma:**
Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge und $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie affiner Teilräume von $A$.
Dann ist $B := \bigcap_{i \in I} B_i$ affiner Teilraum von $A$ mit Richtung $U_B = \bigcap_{i \in I} U_{B_i}$, falls $B \neq \emptyset$.

**Beweis:** Sei $B \neq \emptyset$, dann existiert ein $P \in \bigcap_{i \in I} B_i$. Setze $U := \bigcap_{i \in I} U_{B_i} \leq V$.
Dann gilt für ein $Q \in A$:

$$\begin{aligned} Q \in U + P &\iff \forall i \in I : Q \in U_{B_i} + P \\ &\iff Q \in \bigcap_{i \in I} B_i \\ &\iff Q \in B \end{aligned}$$

Daraus folgt: $B = U + P$ ■

**Definition:** Sei $M$ Teilmenge von $A$, $C$ die Menge aller affinen Teilräume von $A$, die $M$ enthalten.
Dann heißt:

$$[M] := \bigcap_{B \in C} B$$

die **affine Hülle** von $M$.
Für $M = \{P_1, \ldots, P_m\}$ schreibe: $[P_1, \ldots, P_m] := [M]$.

**Beispiel:** Sei $P \neq Q$, dann ist $[P, Q] = PQ$ die Gerade durch $P$ und $Q$.

**Lemma:**
Seien $P_0, \dots, P_m \in A$ und sei $x_i := \overrightarrow{P_0 P_i} \in V$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.
Dann gilt:

$$[P_0, \dots, P_m] = \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

Insbesondere ist $\dim [P_0, \dots, P_m] \leq m$.
Falls gilt: $\dim [P_0, \dots, P_m] = m$ sagt man, $P_0, \dots, P_m$ sind in **allgemeiner Lage**.

**Beweis:** „$\subseteq$" Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$P_i = x_i + P_0 \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

„$\supseteq$" Sei $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$, und sei $B \supseteq \{P_0, \dots, P_m\}$ beliebiger affiner Teilraum. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, \dots, m\} : x_i = \overrightarrow{P_0 P_i} \in U_B \\ \implies &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in U_B \\ \implies &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in U_B + P_0 = B \end{aligned}$$

Da dies für einen beliebigen affinen Teilraum $B$ gilt, der $\{P_0, \dots, P_m\}$ enthält, gilt dies für alle solche Teilräume. Sei $C$ die Menge aller affinen Teilräume die $\{P_0, \dots, P_m\}$ enthalten. Dann folgt:

$$\begin{aligned} &\forall B \in C : \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in B \\ \iff &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in \bigcap_{B \in C} B \\ \iff &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in [P_0, \dots, P_m] \end{aligned}$$

■

**Satz 26:**
Seien $A_1 := U_1 + P_1, A_2 := U_2 + P_2$ affine Teilräume von A. Dann gilt:

(1) $U_{[A_1 \cup A_2]} = U_1 + U_2 + \langle \overrightarrow{P_1 P_2} \rangle$

(2) $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \implies \dim([A_1 \cup A_2]) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim (A_1 \cap A_2)$
$A_1 \cap A_2 = \emptyset \implies \dim([A_1 \cup A_2]) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim (U_1 \cap U_2) + 1$

**Beweis:** (1) Sei $y := \overrightarrow{P_1 P_2}$ und $U := U_1 + U_2 + \langle y \rangle$.
**Zu Zeigen:** $U + P_1 = [A_1 \cup A_2]$, d.h. $U_{[A_1 \cup A_2]} = U$

„$\subseteq$“ Für einen beliebigen affinen Raum $B \supseteq A_1 \cup A_2$ gilt: $U_B \geq U_1, U_2, \langle y \rangle$.
Also gilt für $x = x_1 + x_2 + \alpha y \in U$ mit $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \alpha y \in U_B \\ &\implies x + P_1 \in U_B + P_1 = B \\ &\implies x + P_1 \in \bigcap B = [A_1 \cup A_2] \end{aligned}$$

„$\supseteq$“ **Zu zeigen:** $A_1 \cup A_2 \subseteq U + P_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1 + P_1 \subseteq U + P_1 \\ A_2 &= U_2 + P_2 = U_2 + y + P_1 \subseteq U + P_1 \end{aligned}$$

(2) **Fall** $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$**:** Nach Lemma gilt $U_{A_1 \cap A_2} = U_1 \cap U_2$, und dass $P_1 = P_2$ wählbar ist.
Daraus folgt $U = U_1 + U_2$ (mit $y = 0$). Also gilt: $[A_1 \cup A_2] = U_1 + U_2 + P_1$ mit:

$$\begin{aligned} \dim [A_1 + A_2] &= \dim (U_1 + U_2) \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2) \\ &= \dim A_1 + \dim A_2 - \dim (A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

**Fall** $A_1 \cap A_2 = \emptyset$: Annahme: $y \in U_1 + U_2$.
Dann ist $y = x_1 + x_2$ für ein $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$. Daraus folgt:

$$x_1 + P_1 = -x_2 + y + P_1 = -x_2 + P_2 \in A_1 \cap A_2 \ \lightning$$

Also ist $y \notin U_1 + U_2$. Daraus folgt:

$$\dim U = \dim (U_1 + U_2) + 1$$

Der restliche Beweis erfolgt analog zum ersten Fall. ∎

**Definition:** Affine Teilräume $B, C$ von $A$ heißen **parallel**, wenn gilt:

$$U_B \leq U_C \text{ oder } U_C \leq U_B$$

Schreibe: $B \parallel C$.

**Beispiel:** Man denke nicht nur an parallele Geraden oder Ebenen, sondern etwa auch an Gerade $\parallel$ Ebene.

**Bemerkung:** (1) Auf den Teilräumen einer festen Dimension ist Parallelität eine Äquivalenzrelation.

(2) Aus $B \parallel C$ folgt: $(B \subseteq C) \vee (B \supseteq C) \vee (B \cap C = \emptyset)$

(3) Für alle $P \in A$ und alle affinen Teilräume $B \neq \emptyset$ existiert genau ein affiner Teilraum $C$ mit:

(a) $P \in C$

(b) $B \parallel C$

(c) $\dim C = \dim B$

**Beweis:** (1) Leichte Übung!

(2) Sei $P \in B \cap C$ und o.B.d.A $U_B \leq U_C$. Dann gilt:

$$B = U_B + P \leq U_C + P = C$$

(3) Es muss $C = U_B + P$ gelten, da aus b) und c) folgt: $U_C = U_B$ ∎

---

**Satz 27:**
Sei $A$ affiner Raum mit $\dim A = n > 1$, $G \subseteq A$ Gerade und $H$ Hyperebene in $A$.
Dann gilt:

(1) $G \cap H = \emptyset \implies G \parallel H$

(2) $G \nparallel H \implies \exists P : G \cap H = \{P\}$

---

**Bemerkung:** $\dim G \cap H \leq \dim G = 1 \implies G \cap H = \begin{cases} \emptyset \\ \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \end{cases}$

**Beweis:** (1) Sei $G \cap H = \emptyset$, dann ist $G \cup H$ echte Obermenge von $H$. Es gilt also:

$$H \subsetneq G \cup H \subseteq [G \cup H]$$

Daraus folgt für die Dimensionen:

$$\begin{aligned} n - 1 = \dim H &< dim[G \cup H] \leq n \\ &\implies \dim[G \cup H] = n \\ &\implies [G \cup H] = A \end{aligned}$$

Aus der Dimensionsformel für die affine Hülle folgt:

$$\begin{aligned} n &= \dim[G \cup H] \\ &= \dim G + \dim H - \dim(U_G \cap U_H) + 1 \\ &= n - \dim(U_G \cap U_H) + 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &\dim(U_G \cap U_H) = 1 = \dim U_G \\ &\implies U_G \cap U_H = U_G \\ &\implies U_G \subseteq U_H \\ &\implies G \parallel H \end{aligned}$$

(2) Aus (1) folgt, dass $G \cap H$ nicht die leere Menge ist, wenn $G$ und $H$ nicht parallel sind.
Sei nun $G' := G \cap H$ eine Gerade. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & G' \subseteq G \\ & \implies G' = G \\ & \implies G \subseteq H \\ & \implies G \parallel H \end{aligned}$$

Also kann $G \cap H$ auch keine Gerade sein, wenn $G$ und $H$ nicht parallel sind. Mit der Vorbemerkung folgt daraus, dass $G \cap H$ ein Punkt sein muss. ■

# 21. Affine Koordinaten und affine Abbildungen

## 21.1. Grundbegriffe

**Definition:** Sei $A$ ein affiner Raum mit Richtungs-VRm V der Dimension n.

(a) Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen von V. Ein Paar $\mathcal{K} := (\mathcal{O}, B) \in A \times \mathcal{B}$ heißt **affines Koordinatensystem**, wobei $\mathcal{O}$ der **Ursprung** heißt.

(b) Durch die Koordinatendarstellung $D_B : V \to K^n$ zur Basis $B$ definiert:

$$D_{\mathcal{K}} : A \to K^n, P \mapsto D_B(\overrightarrow{\mathcal{O}P})$$

den **Koordinatenvektor** $D_{\mathcal{K}}(P)$ von P bezüglich $\mathcal{O}$.

(c) Die Abbildung $D_{\mathcal{K}} : A \to \mathbb{A}^n(K)$ heißt **Koordinatendarstellung** zum Koordinatensystem $\mathcal{K}$.

**Aufgabe:** Was entspricht Homomorphismen von VRmen bei affinen Räumen?

**Definition:** Seien $A, B$ affine Räume mit Richtungen $V, W$. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt **affine Abbildung** oder **Morphismus affiner Räume**, falls ein $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in V, \forall P \in A : \varphi(x + P) = \Phi(x) + \varphi(P)$$

Schreibe: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B) := \{\varphi : A \to B \mid \varphi \text{ affin } \}$.

**Beispiel:** (1) Die Identität $\mathrm{id}_A : A \to A$ ist affin mit zugehörigem $\Phi = \mathrm{id}_V$.

(2) Für **festes** $Q \in B$ ist die konstante Abbildung $\varphi_Q : A \to B, P \mapsto Q$ affin, mit der Nullabbildung als zugehörigem Homomorphismus.

**Bemerkung:** (1) $\varphi : A \to B$ mit zugehörigem $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists P_0 \in A : \forall x \in V : \varphi(x + P_0) = \Phi(x) + \varphi(P_0)$$

(2) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$, so ist der zugehörige Homomorphismus $\Phi =: \Lambda_\varphi$ eindeutig bestimmt.

(3) Die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen ist affin, d.h.:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, C), (\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

(4) $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ ist genau dann injektiv (bzw. surjektiv), wenn $\Lambda_\varphi$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

(5) Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ bijektiv, so existiert $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(B, A)$.

**Definition:** Ein bijektives $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ heißt **Isomorphismus affiner Räume** oder **Affinität**.
Ist zusätzlich $A = B$, so heißt $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, A)$ **Automorphismus**. Diese Automorphismen bilden die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(A)$, genannt die **affine Gruppe** von $A$.

**Beweis:** (1) Sei $P \in A$ beliebig und $y := \overrightarrow{P_0P}$. Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\begin{aligned}\varphi(x + P) &= \varphi(x + y + P_0)\\ &= \Phi(x + y) + \varphi(P_0)\\ &= \Phi(x) + \Phi(y) + \varphi(P_0)\\ &= \Phi(x) + \varphi(y + P_0)\\ &= \Phi(x) + \varphi(P)\end{aligned}$$

(2) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$ gegeben, dann gilt für alle $P \in A, x \in V$:

$$\begin{aligned}\varphi(x + P) &= \Phi(x) + \varphi(P)\\ \implies \Phi(x) &= \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(x + P)}\end{aligned}$$

Also ist $\Phi$ durch $\varphi$ eindeutig bestimmt.

(3) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(B, C)$. Dann gilt für alle $P \in A, x \in V$:

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi(x + P) &= \psi(\varphi(x + P))\\ &= \psi(\Lambda_\varphi(x) + \varphi(P))\\ &= \Lambda_\psi(\Lambda_\varphi(x)) + \psi(\varphi(P))\\ &= \Lambda_\psi \circ \Lambda_\varphi(x) + \psi \circ \varphi(P)\end{aligned}$$

Also ist $\psi \circ \varphi$ affin mit zugehörigem Homomorphismus $\Lambda_{\psi\circ\varphi} = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\varphi$.

(4) Es gilt für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B)$:

$$\begin{aligned}\varphi \text{ injektiv} &\iff (\varphi(P) = \varphi(Q) \implies P = Q)\\ &\iff (\varphi(\overrightarrow{QP} + Q) = \varphi(Q) \implies P = Q)\\ &\iff (\Lambda_\varphi(\overrightarrow{QP}) + \varphi(Q) = \varphi(Q) \implies P = Q)\\ &\iff (\Lambda_\varphi(\overrightarrow{QP}) = 0 \implies \overrightarrow{QP} = 0)\\ &\iff \Lambda_\varphi \text{ ist injektiv}\end{aligned}$$

Der Beweis für Surjektivität erfolgt analog.

(5) Leichte Übung! ∎

**Satz 28:**
Seien $A, B$ affine Teilräume mit Richtungen $V, W$. Zu $(P_0, Q_0) \in A \times B$ und $\Phi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ existiert genau eine affine Abbildung $\varphi : A \to B$ mit $\Lambda_\varphi = \Phi$ und $\varphi(P_0) = Q_0$.

**Beweis:** Es ist $A = V + P_0$. Definiere $\varphi(x + P_0) := \Phi(x) + Q_0$, so ergibt sich nach Bemerkung (1) eine affine Abbildung mit $\varphi(P_0) = Q_0$. Dies legt $\varphi$ bereits eindeutig fest. ∎

**Satz 29:**
Die Koordinatenabbildung $D_{\mathcal{K}} : A \to \mathbb{A}^n(K)$ zu einem Koordinatensystem $\mathcal{K} = (\mathcal{O}, B)$ ist ein affiner Isomorphismus (mit zugehöriger linearer Abbildung $D_B : V \to K^n$).

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{K}}(x + \mathcal{O}) &\overset{Def.}{=} D_B(x) \\ &= D_B(x) + 0 \\ &= D_B(x) + D_{\mathcal{K}}(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Nach Satz 29 existiert genau eine affine Abbildung, die dies tut. Dass es sich bei $D_{\mathcal{K}}$ um eine Isometrie handelt, wurde bereits früher eingesehen, da $D_B$ Isometrie ist. ∎

**Korollar:**
Affine Räume über festen Körper sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimension gleich ist.

**Satz 30 (Erhaltung von Teilräumen):**
Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\text{aff}}(A, B)$ und $C \subseteq A$. Falls $C$ affiner Teilraum mit Richtung $U := U_C$ ist, so ist $\varphi(C) \subseteq B$ affiner Teilraum mit Richtung $\Lambda_\varphi(U)$.
Ist $\varphi$ Isomorphismus, so gilt:

(1) $C \subseteq A$ ist genau dann affiner Teilraum, wenn $\varphi(C) \subseteq B$ affiner Teilraum ist.

(2) Es gilt $\dim C = \dim \varphi(C)$ für jeden affinen Teilraum $C$.

(3) Sind $C, C' \subseteq A$ affine Teilräume, so gilt:

$$\varphi([C \cup C']) = [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

und:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

(4) $C \parallel C' \implies \varphi(C) \parallel \varphi(C')$

**Beweis:** Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\text{aff}}(A, B), P \in C$ (d.h. $C = U + P$). Nach Teilraumkriterium gilt dann:

$$\varphi(C) = \Phi(U) + \varphi(P)$$

Daraus folgt, dass $\varphi(C)$ affiner Teilraum ist.

(1) Leichte Übung!

(2) Leichte Übung!

(3) Sogar für beliebige Teilmengen $C, C' \subseteq A$ gilt, wenn $\varphi$ bijektiv ist:

$$\varphi(C \cap C') = \varphi(C) \cap \varphi(C')$$

Für alle affinen Teilräume $D$, die $C \cup C'$ enhalten, gilt:

$$\varphi(D) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Also gilt insbesondere auch für $D := [C \cup C']$:

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq \varphi(C) \cup \varphi(C')$$

Daraus folgt (für jede affine Abbildung, also insbesondere auch für $\varphi^{-1}$):

$$\varphi([C \cup C']) \supseteq [\varphi(C) \cup \varphi(C')]$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}[C \cup C'] &\supseteq \varphi^{-1}([\varphi(C) \cup \varphi(C')]) \\ &\supseteq [\varphi^{-1}(\varphi(C)) \cup \varphi^{-1}(\varphi(C'))] \\ &= [C \cup C']\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit.

(4) Leichte Übung! ■

### 21.1.1. Grundaufgaben im affinen Standardraum $\mathbb{A}_n(K)$

Seien $P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_s \in K^n$ und $B := [P_0, \ldots, P_m], C := [Q_0, \ldots, Q_s]$ gegeben. Ziel ist es $[B \cup C]$ und $B \cap C$ zu berechnen.

Mit $x_i := \overrightarrow{P_0 P_i} = P_i - P_0$ gilt:
$$B = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle + P_0$$
Analog gilt mit $z_j := \overrightarrow{Q_0 Q_i} = Q_i - Q_0$:

$$C = \langle z_1, \ldots, z_s \rangle + Q_0$$

Daraus folgt dann mit $y := \overrightarrow{P_0 Q_0}$:

$$[B \cup C] = \langle x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_s, y \rangle + P_0$$

(1) Finde mit dem Gauß-Algorithmus eine Basis $\{b_1, \dots, b_r\}$ von $U$, dann gilt:

$$[B \cup C] = [b_1 + P_0, \dots, b_r + P_0, P_0]$$

mit erzeugenden Punkten in allgemeiner Lage.

(2) Interpretiere $B$ als Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ eines LGS $Ax = b$.
Sei $x_0 = P_0 \in K^n$, dann liefert der Spezialfall $B = C$ in (1):

$$B = U + x_0$$

wobei $b_1, \dots, b_r$ Basis von $U$ ist.
Ziel ist es nun, eine Matrix $A \in K^{n-r \times n}$ zu finden, mit $U = \text{Kern}(\Lambda_A)$. Dazu betrachte die Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt $\text{rg}(M) = r$.
Betrachte nun die Rechtsmultiplikation:

$$P_M : K^n \to K^r, y \mapsto yM$$

Dann hat der Kern von $\rho_M$ Dimension $n-r$ und eine Basis aus Zeilenvektoren $\{c_1, \dots, c_{n-r}\}$.
Damit lässt sich nun die Matrix $A$ wie folgt definieren:

$$A := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Da der Rang von A offensichtlich $n - r$ ist, ist die Dimension des Kerns genau $r$, und es gilt:

$$\begin{aligned} &\forall t \in \{1, \dots, n-r\} : c_t M = 0 \\ \iff &\forall t \in \{1, \dots, n-r\}, j \in \{1, \dots, r\} : c_t \cdot b_j = 0 \\ \iff &\forall j \in \{1, \dots, r\} : Ab_j = 0 \end{aligned}$$

Also ist $U$ Unterraum von $\text{Kern}(\Lambda_A)$ und aus der Gleichheit der Dimensionen beider Räume folgt dann:

$$B = \mathcal{L}(A, b)$$

(3) Durchschnittsberechnung:
Finde mit Hilfe von (2) Matrizen $A, A'$ und $b, b' \in K^n$, sodass $B = \mathcal{L}(A, b), C = \mathcal{L}(A', b')$ ist. Dann gilt:

$$B \cap C = \mathcal{L}(D, d) \text{ mit } D := \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

Es genügt nun das LGS $Dx = d$ zu lösen, um $B \cap C$ zu erhalten.

**Beispiel:** Betrachte den affinen Raum $\mathbb{A}_3(\mathbb{F}_2) = \{0, 1\}^3$. Gegeben seien die Ebenen:

$$E := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [e_1, e_2, 0]$$

$$F := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3]$$

Zur Bestimmung von $E \cap F$ werden zunächst die zu $E$ und $F$ gehörigen Gleichungssysteme aufgestellt:

$$E = \{x \in \mathbb{F}_2^3 \mid x_3 = 0\} = \mathcal{L}((0,0,1),0)$$
$$F = \mathrm{Kern}(\Lambda_{(0,1,0)}) + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathcal{L}((0,1,0),1)$$

Daraus folgt:

$$E \cap F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \{e_2, e_1 + e_2\}$$

**Satz 31 (Satz von Pappos):**
In einem affinen Raum $A$ mit Dimension 2 seien $G, G'$ verschiedene Geraden mit $G \cap G' = \{O\} \in A$. Ferner seien $P_1, P_2, P_3 \in G \setminus \{O\}$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in G' \setminus \{O\}$, sodass gilt:

$$P_1Q_3 \parallel P_3Q_1 \text{ und } P_1Q_2 \parallel P_2Q_1$$

Daraus folgt:

$$P_2Q_3 \parallel P_3Q_2$$

**Beweis:** Da $Q_3 \notin G$ ist, sind $O, P_1, Q_3$ in allgemeiner Lage. Daraus erhalten wir folgendes Koordinatensystem:

$$\mathcal{K} := (O, \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OQ_3}\})$$

Da die Koordinatendarstellung $D_{\mathcal{K}} : A \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_2(K)$ Parallelitäten und Schnittpunkte erhält, können wir o.B.d.A annehmen:

$$A = \mathbb{A}_2(K) \text{ und } O = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$P_1 = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\0\end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix}\lambda_3\\0\end{pmatrix}$$
$$Q_3 = \overrightarrow{OQ_3} = \begin{pmatrix}0\\\mu_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix}0\\\mu_2\end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix}0\\\mu_3\end{pmatrix}$$

Wobei $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3 \neq 0$ sind. Daraus folgt für die Richtungen:

$$\forall i,j \in \{1,2,3\} : U_{P_iQ_j} = \langle \overrightarrow{P_iQ_j} \rangle = \langle \begin{pmatrix}\lambda_i\\-\mu_j\end{pmatrix} \rangle$$
$$\implies U_{P_1Q_3} = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rangle$$

Nach Vorraussetzung ist $\lambda_3 = \mu_1$ und es existiert ein $\rho \in K^\times$, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix}\lambda_2\\-\mu_1\end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix}1\\-\mu_2\end{pmatrix}$$

Daraus folgt mit $\lambda_3 = \rho\mu_2 = \lambda_2\mu_2$:

$$\begin{aligned} U_{P_2Q_3} &= \langle \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\mu_3 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} \lambda_2\mu_2 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \rangle \\ &= U_{P_3Q_2} \end{aligned}$$

Also sind $P_2Q_3$ und $P_3, Q_2$ parallel. ■

## 21.2. Koordinatenwechsel und Darstellung affiner Abbildungen

**Lemma:**
Seien $\mathcal{K} = (O, B)$ und $\mathcal{L} = (Q, C)$ Koordinatensysteme des affinen Raums $A$ mit Richtung $V$. Sei $M_{CB} := D_{CB}(\mathrm{id}_V)$ die Basiswechselmatrix.
Dann rechnen sich Koordinaten eines Punktes $P$ bzgl. $\mathcal{K}$ in die Koordinaten bzgl. $\mathcal{L}$ wie folgt um:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q))$$

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{L}}(P) &= D_C(\overrightarrow{QP}) \\ &= M_{CB} \cdot D_B(\overrightarrow{QP}) \\ &= M_{CB} \cdot D_B(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \\ &= M_{CB} \cdot (D_B(\overrightarrow{OP}) - D_B(\overrightarrow{OQ})) \\ &= M_{CB} \cdot (D_{\mathcal{K}}(P) - D_{\mathcal{K}}(Q)) \end{aligned}$$

■

**Anwendung:** Ist ein beliebiges Koordinatensystem $\mathcal{L} = (Q, B)$ gegeben, so lässt sich ein Punkt $P$ einfach in das Koordinatensystem $\mathcal{K} = (0, S)$ von $\mathbb{A}_n(K)$ mit Standardbasis $S$ überführen. Schreibe dazu $B$ als:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in K^{(n \times n)}$$

Dann ist $M_{SB} = B$ und es gilt:

$$D_{\mathcal{L}}(P) = M_{BS}(P - Q) = B^{-1}(P - Q)$$

**Lemma:**

(1) Die Abbildung $\psi : K^n \to K^m$ ist genau dann affin, wenn gilt:

$$\exists A \in K^{m\times n}, a \in K^m : \Psi(x) = Ax + a$$

Schreibe daher kurz: $\psi =: (A, a)$

(2) Ist ferner $C \in K^{t\times m}, c \in K^t$, so gilt:

$$(C, c) \circ (A, a) = (CA, Ca + c)$$

(3) Ist $m = n$ und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist $(A, a)$ bijektiv und es gilt:

$$(A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a)$$

**Beweis:** (1) Die Abbildung $\psi$ ist genau dann affin, wenn ein $\Lambda_\varphi = \Lambda_A \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(K^n, K^m)$ für ein $A \in K^{m\times n}$, sodass gilt:

$$\psi(x) = \psi(x + 0) = \Lambda_\varphi(x) + \psi(0)$$

Die Behauptung folgt mit $a := \psi(0)$.

(2) Leichte Übung!

(3) Leichte Übung! ■

**Definition:** Seien $A, A'$ affine Räume mit Koordinatensystemen $\mathcal{K} = (O, B), \mathcal{K}' = (O', B')$ und zugehörigen Koordinatenisomorphismen $D_\mathcal{K}, D_{\mathcal{K}'}$. Definiere:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) := D_{\mathcal{K}'} \circ \varphi \circ D_\mathcal{K}^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(K^n, K^m)$$

**Lemma:**
Es gilt:

$$D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi) = (D_{B'B}(\Lambda_\varphi), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))$$

**Beweis:** Sei $P \in A$ beliebig, so entspricht es $D_\mathcal{K}(P) \in K^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)(D_\mathcal{K}(P)) &\overset{Def.}{=} D_{\mathcal{K}'}(\varphi(P)) \\
&\overset{Def.}{=} D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(P)}) \\
&= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\
&= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + D_{B'}(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}) \\
&= D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) + D_{B'}(\Lambda_\varphi(\overrightarrow{OP})) \\
&= D_{B'B}(\Lambda_\varphi) \cdot D_B(\overrightarrow{OP}) + D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}) \\
&= (D_{B'B}(\Lambda_\varphi), D_{B'}(\overrightarrow{O'\varphi(O)}))(D_\mathcal{K}(P))
\end{aligned}$$

Da also beide Abbildungen auf einen beliebigen Punkt $P$ die selbe Wirkung haben, müssen sie gleich sein. ∎

**Bemerkung:** Das Zusammenfügen von kommutativen Diagrammen liefert für einen weiteren affinen Raum $A''$ mit Koordinatensystem $\mathcal{K}'' = (O'', B'')$ und einer affinen Abbildung $\Psi : A' \to A''$:

$$D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}}(\psi \circ \varphi) = D_{\mathcal{K}''\mathcal{K}'}(\psi) \circ D_{\mathcal{K}'\mathcal{K}}(\varphi)$$

**Korollar:**

(1) Speziell für eine affine Abbildung $\varphi : A \to A$ und zwei Koordinatensysteme $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ gilt:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{L}\mathcal{K}}(\mathrm{id}) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi) \circ D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\mathrm{id})$$

(2) Insbesondere gilt für $\varphi = \mathrm{id}$:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi)$$

(3) Für $\mathbb{A}_n(K)$ mit Standardkoordinatensystem $\mathcal{K} = (0, S)$, sei $D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\mathrm{id}) =: (M, b)$. Dann gilt für $\varphi = (A, a) = D_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\varphi)$:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = (M^{-1}AM, M^{-1}((A - I)b + a))$$

**Beweis:**

(1) Folgt aus zweimaligem anwenden der obigen Bemerkung.

(2) Folgt aus (1).

(3) Es gilt:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{K}}(\mathrm{id}) = (M, b)^{-1} = (M^{-1}, -M^{-1}b)$$

Der restliche Beweis ergibt sich aus (1). ∎

## 21.3. Geometrische Eigenschaften von affinen Abbildungen

Wir haben gesehen, dass Koordinaten für den Umgang mit affinen Abbildungen **nützlich** sind. Nun stellen wir die Frage, inwiefern Koordinaten **nötig** sind, d.h. welche Eigenschaften von der Koordinatenwahl abhängen.

**Definition:** Sei $A$ affiner Raum und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, A)$.

(a) $P \in A$ heißt **Fixpunkt** von $\varphi$, falls gilt:

$$\varphi(P) = P$$

(b) Ein affiner Teilraum $\emptyset \neq B \subseteq A$ heißt **Fixraum** von $\varphi$, falls gilt:

$$\varphi(B) \subseteq B$$

(c) Ein Untervektorraum $U$ des Richtungsvektorraums $U_A$ heißt **Fixrichtung** von $\varphi$, falls gilt:

$$\Lambda_\varphi(U) \subseteq U$$

**Beispiel:** (1) Sei $x \in V := U_A$ fest und eine **Translation**

$$\varphi = \tau_x : A \to A, P \mapsto x + P$$

gegeben, dann gilt:

(a) Für alle $U \leq V$ ist $U$ Fixrichtung, da $\Lambda_\varphi = \mathrm{id}_V$ ist.

(b) Für $x \neq 0$ existieren keine Fixpunkte.

(c) Für eine Fixgerade $G$ muss gelten:

$$\varphi(G) = x + G \subseteq G$$
$$\iff x \in U_G$$

Also ist die Menge aller Fixgeraden für $X \neq 0$:

$$\{Kx + P \mid P \in A\}$$

Beachte dass eine Fixgerade hier **keinen** Fixpunkt enthält.

(2) Seien $\mu \in K \setminus \{0\}$ und $P \in A$ fest und eine **Streckung**

$$\varphi : A \to A, x + P \mapsto \mu x + P$$

mit Zentrum $P$ und Streckungsfaktor $\mu$ gegeben.
Da im Fall $\mu = 1$ $\varphi = \mathrm{id} = \tau_0$ gilt, wollen wir im Folgenden $\mu \neq 1$ annehmen.

(a) Die Menge der Fixpunkte ist gleich $\{P\}$.

(b) Für alle $U \leq V$ ist $U$ Fixrichtung.

(c) Fixgeraden sind genau die Geraden, die $P$ enthalten.

**Lemma:**
Für $A \in K^{n \times n}, a \in K^n$ und $\varphi = (A, a)$ gilt:

(1) Die Fixpunkte bilden den affinen Teilraum $\mathcal{L}(A - I, -a)$.

(2) Genau dann, wenn 1 kein Eigenwert von $A$ ist, ist die Menge der Fixpunkte einelementig.

(3) $B$ ist genau dann Fixraum von $\varphi$, wenn $U_B$ Fixrichtung ist und ein Punkt $P \in B$ mit $\varphi(P) \in B$ existiert.

**Beweis:** (1) Es ist $\varphi = Ax + a$, also gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x &\iff Ax + a = x\\ &\iff Ax - x = -a\\ &\iff (A - I)x = -a\\ &\iff x \in \mathcal{L}(A - I, -a)\end{aligned}$$

(2) Ist 1 kein Eigenwert von $\varphi$, so existiert $(A-I)^{-1}$, daraus folgt für einen Fixpunkt $x$:

$$x = (A - I)^{-1}(-a)$$

Also ist $x$ eindeutig bestimmt.

(3) $B = U + P$ ist genau dann Fixraum, wenn gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(B) \subseteq B &\iff \varphi(U + P) \subseteq U + P = B\\ &\iff \Lambda_\varphi(U) + \varphi(P) \subseteq U + P\\ &\iff \varphi(P) \in B \wedge \Lambda_\varphi(U) \subseteq U\end{aligned}$$

Also ist $U$ Fixrichtung. ■

## 21.4. Geometrische Charakterisierung von Affinitäten

**Definition:** Sei $A$ ein affiner Raum mit einer (nicht notwendigerweise affinen) Abbildung $\varphi : A \to A$. $\varphi$ heißt **geradentreu**, wenn für $G \subseteq A$ gilt:

$$G \text{ Gerade} \iff \varphi(G) \text{ Gerade}$$

**Beispiel:** (1) Affinitäten sind geradentreu.

(2) Die Abbildung:

$$\varphi : \mathbb{A}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}_2(\mathbb{C}), (\alpha, \beta) \mapsto (\overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

ist geradentreu, aber **nicht** affin.

**Lemma:**
Sei $A$ ein affiner Raum über $K \neq \mathbb{F}_2$ und sei $\varphi : A \to A$ bijektiv und geradentreu.

Dann gilt für $O, P, Q \in A$ : $\varphi([P, Q]) = [\varphi(Q), \varphi(P)]$ und $\varphi([O, P, Q]) = [\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)]$.
Falls $\dim(A) = 2$, so gilt:

(1) Sind $P \neq Q$ Fixpunkte von $\varphi$, so folgt: $G := [P, Q]$ ist Fixgerade

(2) Sind $H \nparallel G$ Fixgeraden, so folgt: $H \cap G = \{Q\}$ mit Fixpunkt $Q$.

(3) Ist $G$ Fixgerade und $P$ Fixpunkt, so folgt: $H$ mit $H \parallel G \wedge P \in H$ ist Fixgerade.

**Vorbemerkung:** Auch $\varphi^{-1}$ ist geradentreu

$$\underbrace{\varphi^{-1}(G)}_{=:L} \text{ Gerade } \Longleftrightarrow \underbrace{\varphi(L)}_{=G} \text{ Gerade}$$

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei $P \neq Q$.

Aus $\varphi$ geradentreu folgt

$$\varphi([P,Q]) \text{ Gerade } \ni \varphi(P), \varphi(Q) \supseteq [\varphi(P), \varphi(Q)]$$

Daraus folgt die Gleichheit, da die Dimension gleich ist.

**Behauptung:** $B := \varphi([O,P,Q])$ ist ein affiner Teilraum.

Wende das Teilraumkriterium an
[Sei $\varphi(R), \varphi(S) \in B$ mit $R, S \in [O,P,Q]$, dann folgt $[\varphi(R), \varphi(S)] = \varphi([R,S]) \subseteq B$]
und $B \supseteq [\underbrace{\varphi(O)}_{=:O'}, \underbrace{\varphi(P)}_{=:P'}, \underbrace{\varphi(Q)}_{=:Q'}]$

Gleicher Schluss für $vp^{-1}$:

$$\varphi^{-1}([O', P', Q']) \supseteq [\varphi^{-1}(O'), \varphi^{-1}(P'), \varphi^{-1}(Q')] = [O,P,Q]$$

Wende $\varphi$ an:

$$[O', P', Q'] \supseteq \varphi([O,P,Q]) = B$$

Damit folgt die Gleichheit.

Speziell für $\dim A = 2$:

(1) Für $G := [P,Q]$ gilt:

$$\varphi(G) = [\varphi(P), \varphi(Q)] = [P,Q] = G$$

(2) $G \not\parallel H$, $G \cap H =: \{Q\}$; dann folgt

$$\{\varphi(Q)\} = \varphi(G \cap H) \subseteq \varphi(G) \cap \varphi(H) = G \cap H$$

Daraus folgt $\{\varphi(Q)\} \subseteq G \cap H = \{Q\}$, also $\varphi(Q) = Q$.

(3) Fall $P \in G$: also $H = G$. Fertig.
Fall $P \notin G$:

$$H \parallel G \implies H \cap G = \varnothing \overset{\varphi \text{ bij.}}{\Longleftrightarrow} \varphi(H) \cap \underbrace{\varphi(G)}_{G} = \varnothing \implies \varphi(H) \parallel G$$

Aus $P = \varphi(P) \in \varphi(H)$ folgt $H = \varphi(H)$. ■

**Satz 32:**

(1) Sei $A$ ein affiner Raum mit $\dim A > 1$ über dem Körper $K = \mathbb{F}_p\,(p > 2)$ oder $K = \mathbb{Q}$. Für eine Abbildung $\varphi : A \to A$ gilt:

$$\varphi \text{ Affinität} \iff \varphi \text{ bijektiv und geradentreu}$$

(2) Sei $K$ ein Körper mit Teilkörper $\mathbb{Q}$, $n > 1$. Ist $\varphi : K^n \to K^n$ bijektiv und geradentreu mit $\varphi(0) = 0$, so folgt: $\varphi$ ist $\mathbb{Q}$-linear.

**Beweis:** (1) “$\Longrightarrow$”: bekannt ✓

“$\Longleftarrow$”: Wähle Koordinatensystem $\mathcal{K} = (0, B)$ und $\mathcal{L} = (\varphi(0), B)$.
Schachtele mit den affinen Bijektionen $D_{\mathcal{K}}^{-1}$ und $D_{\mathcal{L}}$ zu

$$\tilde{\varphi} := D_{\mathcal{L}} \circ \varphi \circ D_{\mathcal{K}}^{-1} : K^n \to K^n \qquad (\text{mit } \tilde{\varphi}(0) = 0)$$

Es gilt: $\varphi$ ist geradentreu, bijektiv (bzw. Affinität) genau dann, wenn $\tilde{\varphi}$ die entsprechende Eigenschaft hat.
Daher gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\varphi : K^n \to K^n$ und $\varphi(0) = 0$.

(1)$\wedge$(2) Restbehauptung: Für $K_0 := \mathbb{F}_p$ oder $\mathbb{Q}$ gilt: $\varphi$ ist $K_0$-linear.

Zu zeigen: Für $P, Q \in K^n$, $\lambda \in K_0$ gilt: $\varphi(\lambda P) = \lambda\varphi(P)$, $\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
Oder: Auf $U_0 := K_0P + K_0Q$ ist $\varphi|_{U_0}$ $K_0$-linear.

Dies ist leicht zu reduzieren auf den Fall: $P$, $Q$ sind linear unabhängig: $O := 0, P, Q$ in allgemeiner Lage, $E := [O, P, Q]$ ist Ebene mit zwei verschiedenen Geraden $[O, P]$, $[O, Q] \subseteq E$.
Mit $\varphi$ geradentreu und bijektiv folgt: $[\varphi(O), \varphi(P), \varphi(Q)] = \varphi(E) \supseteq 2$ verschiedene Geraden; daraus folgt $\varphi(E)$ ist Ebene, also $\{\underbrace{\varphi(0)}_{=0}, \varphi(P), \varphi(Q)\}$ in allgemeiner Lage, d.h. $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ sind linear unabhängig.

Daraus folgt: es existiert $\rho \in \mathrm{Aut}(K^n)$ mit $\rho(P)\varphi(P)$, $\rho(Q) = \varphi(Q)$

**Beachte:** $\Psi|_{U_0} := \rho^{-1} \circ \varphi|_E : E \to E$ ist bijektiv, geradentreu und hat mindestens die Fixpunkte $O, P, Q$.

**Zeige:** $\Psi|_{U_0} = \mathrm{id}$ $\quad$ ($\rightsquigarrow$ $\varphi|_{U_0}$ ist $K_0$-linear; mit anderen Worten: $U_0$ besteht aus Fixpunkten von $\Psi$) **1. Schritt:** Für alle $n \in \mathbb{N} :$ $nP$ Fixpunkte von $\Psi$ (mit vollständiger Induktion)

$n = 0, 1$: ✓

$n - 1 \to n$: Falls $(n - 1)P = 0$, so ist $nP = P$ Fixpunkt. Fertig.
Falls $R := (n - 1)P \neq 0$ Fixpunkt ist, dann folgt nach Lemma: die parallelen

Geraden $G_1 \parallel [O,Q]$ mit $R \in G_1$ und $G_2 \parallel [O,P]$ mit $Q \in G_2$ sind Fixgeraden $G_i$ und $G_1 \cap G_2 = \{R+Q\}$ ist Fixpunkt. Damit und mit $[Q,P]$ Fixgerade folgt, dass eine parallele Gerade $G_3$ durch $R+Q$ Fixgerade ist.

Also ist

$$(R+Q+K(P-Q)) \cap K \cdot P = G_3 \cap [O,P] = \{nP\}$$

ein Fixpunkt.

Analog: für alle $m \in \mathbb{N}$ : $mQ$ ist Fixpunkt.

**2. Schritt:** $K_0 \cdot P$ (und analog $K_0 \cdot Q$) besteht aus Fixpunkten.

Fall $K_0 = \mathbb{F}_p$: Fertig nach dem ersten Schritt, da $\mathbb{F}_p = \{n - 1_{\mathbb{F}_p} \mid n \in \mathbb{N}\}$
Fall $K_0 = \mathbb{Q}$: Seien $m\, n > 0$ in $\mathbb{N}$. $[mQ, nP]$ ist Fixgerade.

Die Parallele $G_4$ durch $Q$ ist Fixgerade

$$G_4 = K \cdot (mQ - nP) + Q$$

Daraus folgt: $G_4 \cap [O,P] =: \{S\}$ ist Fixpunkt mit $S = \frac{n}{m}P$. Ferner ist $-S$ Fixpunkt, denn:

$$\{S+Q\} = \underbrace{(K \cdot Q + S)}_{\parallel [O,Q]} \cap \underbrace{(K \cdot S + Q)}_{\parallel [O,S]}$$

Beides sind Fixgeraden, also ist $\{S+Q\}$ Fixpunkt

$$\{-S\} = [O,S] \cap (K \cdot (S+Q) + Q)$$

**3. Schritt:** Zu zeigen: für alle $T \in U_0$ : $T$ ist Fixpunkt

$$\exists \alpha, \beta \in K_0 : T = \alpha P \beta Q$$

$$\{T\} = \underbrace{(KP + \underbrace{\beta Q}_{Fixpunkt})}_{\parallel [O,P]} \cap \underbrace{(KQ + \underbrace{\alpha P}_{Fixpunkt})}_{\parallel [O,Q]}$$

■

# 22. Euklidische Punkträume

Hier sei stets $K = \mathbb{R}$. Neu in diesem Paragraphen sind **Abstände** zwischen Punkten im affinen Raum.

## 22.1. Grundbegriffe

**Definition:** (a) $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit einem affinen Raum $E$ über $\mathbb{R}$ und einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf dem Richtungs-VRm $V = U_E$ von $E$ heißt **euklidischer Raum**.

(b) Der **Abstand** von $P, Q \in E$ ist definiert als:

$$d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| \left( = \sqrt{\langle\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}\rangle} \right)$$

**Beispiel:** Der **euklidische Standardraum** $E = \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt

$$d(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

**Bemerkung:** Der Abstand $d$ eines euklidischen Raums $E$ definiert eine Metrik auf $E$ (Positivdefinitheit, Symmetrie und Dreiecksungleichung).

**Definition:** (a) Ein Koordinatensystem $\mathcal{K} = (O, B)$ auf dem euklidischen Raum $E$ heißt **cartesisch**, falls $B$ Orthonormalbasis (bzgl $\langle\cdot,\cdot\rangle$) ist.

(b) Seien $E, F$ euklidische Räume und $\varphi : E \to F$ eine beliebige Abbildung. $\varphi$ heißt **längentreu**, falls gilt:

$$\forall P, Q \in E : d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P,Q)$$

(c) $\varphi$ heißt **isometrisch**, falls $\varphi$ affin und längentreu ist.
$\varphi$ heißt **Bewegung** von $E$, falls $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(E)$ und isometrisch ist. Ist ferner $\det(\Lambda_\varphi) = 1$, so heißt $\varphi$ eine **eigentliche Bewegung**.

**Bemerkung:** Die Menge aller Bewegungen (schreibe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(E)$) ist eine Gruppe mit Untergruppe der Menge aller eigentlichen Bewegungen (schreibe $\mathrm{Aut}^+_{\mathrm{dist}}(E)$).

**Lemma:**
Seien $E, F$ euklidische Räume und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(E, F)$. Falls $\Lambda_\varphi$ ein Morphismus von Skalarprodukträumen ist, so ist $\varphi$ isometrisch.

**Beweis:** Sei $\Phi := \Lambda_\varphi$, dann gilt $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ und es folgt:

$$\begin{aligned} d(\varphi(P), \varphi(Q)) &= \|\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}\| \\ &= \|\Phi(\overrightarrow{PQ})\| \\ &= \|\overrightarrow{PQ}\| \\ &= d(P, Q) \end{aligned}$$

■

**Korollar:**
Sei $\mathcal{K} = (O, B)$ cartesisches Koordinatensystem eines euklisischen Raums $E$. Dann ist die Koordinatendarstellung $D_\mathcal{K} : E \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer affiner Isomorphismus.
Daher genügt es meistens, den euklidischen Standardraum zu behandeln.

**Beweis:** Es ist $D_\mathcal{K}(P) = D_B(\overrightarrow{OP})$ mit $B$ ONB. Daraus folgt:

$$D_B : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

d.h. $D_B$ ist Isometrie von $V$ in den $\mathbb{R}^n$. ■

**Bemerkung:** Im Standardraum gilt:

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(\mathbb{R}^n) = \{(A, a) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid A \in O_n\}$$

**Definition:** $A, B$ affine Teilräume eines euklidischen Raumes $E$ heißen **orthogonal**, falls $U_A \perp U_B$.

**Aufgabe:** Bestimme den **Abstand** zwischen zwei Teilräumen $A, B$. Dieser ist wie folgt definiert:

$$d(A, B) := \min\{d(P, Q) \mid P \in A, Q \in B\}$$

**Methode:** Lot fällen! (Dabei genügt es $E = \mathbb{R}^n$ zu betrachten.)

**Definition:** Eine Gerade $G$ heißt **gemeinsames Lot** von $A, B$ mit **Lotfußpunkten** $P^+$ und $Q^+$, falls gilt:

$$\begin{aligned} &G \perp A & &G \perp B \\ &G \cap A = \{P^+\} & &G \cap B = \{Q^+\} \end{aligned}$$

**Satz 33:**
Seien $A, B$ affine Teilräume von $\mathbb{R}^n$ mit $A \neq \emptyset \neq B$. Aus $\dim(U_A + U_B) < n$ folgt, dass ein gemeinsames Lot $G$ mit Lotfußpunkten $P^+, Q^+$ und $d(A, B) = d(P^+, Q^+)$ existiert.

**Beweis:** Falls $G$ existiert, so gilt für alle $P \in A, Q \in B$:

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \| \underbrace{\overrightarrow{PP^+}}_{=:x \in U_A} + \underbrace{\overrightarrow{P^+Q^+}}_{=:y \in U_G} + \underbrace{\overrightarrow{Q^+Q}}_{=:z \in U_B} \|$$

wobei nach Vorraussetzung $y \perp y$ und $y \perp z$, also auch $y \perp (x+z)$ ist. Nach Pythagoras gilt:

$$\|y + (x+z)\|^2 = \|y\|^2 + \|x+z\|^2 \geq \|y\|^2$$

Mit Wurzelziehen folgt daraus:

$$d(P,Q) \geq \|y\| = d(P^+, Q^+)$$

Also ist $d(P^+, Q^+) = d(A, B)$, falls $G$ existiert.
Schreibe:

$$A = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R} \cdot x_i + x_0 \qquad\qquad B = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{R} \cdot y_j + y_0$$

Es gelten folgende notwendige Bedingungen für $P^+, Q^+$:

(1) $P^+ = \sum_i \lambda_i x_i + x_0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

(2) $Q^+ = \sum_j \mu_i y_j + y_0$ mit $\mu_j \in \mathbb{R}$.

(3) $\forall i \in \{1, \dots, r\} \langle x_i, P^+ - Q^+ \rangle = 0$

(4) $\forall j \in \{1, \dots, s\} \langle y_j, P^+ - Q^+ \rangle = 0$

Daraus erhalten wir ein LGS für die unbestimmten $\lambda_i, \mu_j$, dessen Lösung $P^+$ und $Q^+$ ergibt. Das LGS ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\exists P^+ - Q^+ : \sum_i \lambda_i x_i + x_0 - \sum_j \mu_j y_j + y_0 \in (U_A + U_B)^\perp$$

Wegen $\mathbb{R}^n = (U_A + U_B) \oplus (U_A + U_B)^\perp$ ist sicher $x_0 - y_0 \in \langle x_i, y_j \rangle + (U_A + U_B)^\perp$, also ist das LGS lösbar.
Nach Vorraussetzung existiert ein $z \neq 0$ mit $z \in (U_A + U_B)^\perp$
Nehme:

$$G := \begin{cases} [P^+, Q^+] & , P^+ \neq Q^+ \\ \mathbb{R} \cdot z + P^+ & , P^+ = Q^+ \end{cases}$$

■

**Bemerkung:** Sei $\{b_1, \dots, b_t\}$ ONB von $(U_A + U_B)^\perp$. Dann gilt mit $\beta_\tau = \langle x_0 - y_0, b_\tau \rangle$:

$$P^+ - Q^+ = \sum_{\tau=1}^{t} \beta_\tau \cdot b_\tau$$

Dann erhalten wir zwei Methoden zur Abstandsbestimmung:

(1) Löse das LGS in $\lambda_i, \mu_j$!

(2) Bestimme eine ONB $\{b_1, \dots, b_t\}$ von $(U_A + U_B)\perp$, dann gilt:

$$d(A,B) \big(= \|P^+ - Q^+\|\big) = \sqrt{\sum_{\tau=1}^{t} \langle x_0 - y_0, b_\tau \rangle^2}$$

Diese Methode kommt **ohne** Berechnung von $P^+, Q^+$ aus.

## 22.2. Bewegungen im $\mathbb{R}^2$

**Aufgabe:** Klasseneinteilung von $\mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(\mathbb{R}^2)$.

**Methode:** Die folgende Methode funktioniert analog zu der bei Affinitäten.
$\varphi = (A, a)$ (bzgl. Standardkoordinatensystem $\mathcal{K} = (O, B)$) wird in ein anderes Koordinatensystem $\mathcal{L} = (P, B)$ umgerechnet:

$$D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = \big((M^{-1}AM), M^{-1}((A-I)b + a)\big) =: (A', b')$$

wobei $(M, b) := D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(\mathrm{id})$ mit $M = M_{SB}$ den Wechsel **cartesischer** Koordinatensysteme beschreibt, so dass $(A', b')$ einfache Gestalt erhält ("Normalform").
$A'$ hat folgende Form:
$A' = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (Drehung) oder $A' = C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung)

- Fall $D_\alpha$ mit $0 < \alpha < 2\pi$:
  Es gilt: $1 \notin \mathrm{Spec}(A) \implies \varphi$ hat genau einen Fixpunkt $P \iff (A-I)P + a = 0$ wobei $(A-I)$ invertierbar ist.

  Wähle Koordinatensystem $\mathcal{L} := (P, B) \ \rightarrow \ (A', b') = (D_\alpha, 0)$

- Fall $A' = I$:
  Sei $\varphi = (I, a)$ eine Translation, $a \neq 0$.
  Wähle $\mathcal{L} := (0, (b_1, b_2))$ mit $b_1 := \frac{a}{||a||}$. Dann gilt:

  $$M_{SB} = (b_1, b_2), \quad M_{SB}^{-1}(b_1, b_2) = (e_1, e_2)$$

  also $b' = M_{SB}^{-1} a = \lambda_{e_1}$.
  Dann ist $D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi) = (I, \lambda_{e_1})$ mit $\lambda := ||a|| > 0$.

- Fall $A' = C$: analog

**Satz 34:**
Zu $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(\mathbb{R}^2)$ existiert ein cartesisches Koordinatensystem $\mathcal{L}$ so, dass $D_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi)$ eine der folgenden Normalformen hat:

(1) $(I, 0) = \mathrm{id}$

(2) $(I, \lambda_{e_1})$ Translation ($\lambda > 0$), keine Fixpunkte

(3) $(D_\alpha)$ Drehungen ($0 < \alpha < 2\pi$), genau ein Fixpunkt $O$.

(4) $(C, 0)$ Spiegelung an einer Achse, die Achse ist die Menge der Fixpunkte

(5) $(C, \lambda_{e_1})$ Gleitspiegelung, kein Fixpunkt, genau eine Fixgerade

Eigentliche Bewegungen sind die Identität, Translationen und Drehungen.

## 22.3. Geometrische Kennzeichnung von Bewegungen

Betrachte zunächst generell eine längentreue Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (nicht notwendig affin).

**Lemma:**
Zu $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \neq Q \in \mathbb{R}^n$ existiert genau ein Punkt $R \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} d(P, R) &= |\lambda| \cdot d(P, Q) \\ d(Q, R) &= |1 - \lambda| \cdot d(P, Q) \end{aligned}$$

nämlich $R := \lambda y + P$ für $y := \overrightarrow{PQ}$.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} d(P, R) &= ||\lambda y|| = |\lambda| ||y|| = |\lambda| \cdot d(P, Q) \\ d(Q, R) &= ||y + P - (\lambda y + P)|| = |1 - \lambda| ||y|| = |1 - \lambda| \cdot d(P, Q) \end{aligned}$$

Sei $S$ ein weiterer Punkt mit $d(P, S) = d(P, R)$, $d(Q, S) = d(Q, R)$. Etwa $S = x + R$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P = 0$ (nach Koordinatenwechsel), also

$$Q = y,\ R = \lambda y,\ S = x + \lambda y$$

$\implies ||R|| = d(0, R) = d(0, S) = ||S||$, also

$$\langle \lambda y, \lambda y \rangle = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \implies \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle = 0$$

und

$$||Q - R|| = ||Q - S|| \implies ||y - \lambda y|| = ||y - \lambda y - x|| \overset{\text{analog}}{\implies} \langle x, x \rangle + (2\lambda - 2)\langle x, y \rangle = 0$$

Insgesamt: $\langle x, y \rangle = 0$, $\langle x, x \rangle = 0$, also $x = 0$, d.h. $R = S$. ■

**Korollar:**
Ist $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ längentreu, so gilt für alle $P$, $Q \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Psi(\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P) = \lambda\overrightarrow{\Psi(P)\Psi(Q)} + \Psi(P)$$

Insbesondere ist $\Psi$ geradentreu für $n = m$.

**Beweis:** Klar für $P = Q$.
Sei nun $y := \overrightarrow{PQ} \neq 0$, $R := \lambda y + P$. Da $\Psi$ längentreu, folgt nach Lemma

$$d(\Psi(P), \Psi(R)) = |\lambda| \cdot d(\Psi(P), \Psi(Q))$$
$$d(\Psi(Q), \Psi(R)) = |1 - \lambda| d(\Psi(P), \Psi(Q))$$

Lemma anwenden auf die Bildpunkte $P' := \Psi(P)$, $Q' := \Psi(Q)$, $R' := \Psi(R)$ liefert $R' = \lambda\overrightarrow{P'Q'} + P'$. ∎

**Korollar:**
$\Psi(\mathbb{R}^n)$ ist affiner Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

**Beweis:** Nach dem vorhergehenden Korollar gilt für beliebige Punkte $P'$, $Q' \in \Psi(\mathbb{R}^n)$, dass die Verbindungsgerade $[P', Q'] \subseteq \Psi(\mathbb{R}^n)$. Mit dem Teilraumkriterium folgt die Behauptung. ∎

**Korollar:**
Sei $n = m$, $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ längentreu, $B = b_1, \ldots, b_n$ Orthonormalbasis und $\Psi(0) = 0$. Dann ist auch $\Psi(B)$ eine Orthonormalbasis.

**Beweis:** $n = 1$: Klar.
Sei $n > 1$. Betrachte Abstände $d(\mathbb{R} \cdot b_i, b_j)$ für $i \neq j$.
$\implies 0 = \Psi(0) \in \Psi(\mathbb{R} \cdot b_i) = [0, \Psi(b_i)]$ hat minimalen Abstand von $\Psi(b_j)$.
Lotgerade $G = [0, \Psi(b_j)] \perp [0, \Psi(b_i)]$, also $\Psi(b_i) \perp \Psi(b_j)$
Ferner ist: $||\Psi(b_i|| = d(0, \Psi(b_i)) = d(0, b_i) = ||b_i|| = 1$. Also ist $\Psi(B)$ eine Orthonormalbasis. ∎

**Korollar:**
$\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ längentreu $\implies$ $\Psi$ ist bijektiv.

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\Psi(0) = 0$, also $\Psi(\mathbb{R}^n)$ Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ mit einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ $\implies$ $\Psi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
Injektiv: $\Psi(P) = \Psi(Q)$

$$\implies 0 = d(\Psi(P), \Psi(Q)) = d(P, Q) \quad \implies P = Q$$ ∎

**Satz 35:**
Jede längentreue Abbildung $\Psi : E \to E$ eines euklidischen Raumes $E$ ist eine Bewegung (also $\Psi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(E)$).

**Beweis:** Die Wahl eines cartesischen Koordinatensystems erlaubt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E = \mathbb{R}^n$ zu nehmen.
Wechsel zu $\Psi' := (x \mapsto \Psi(x) - \Psi(0))$ ergibt $\Psi'(0) = 0$.

Beachte: $\Psi$ ist affin (bzw. längentreu) genau dann, wenn $\Psi'$ affin (bzw. längentreu) ist.

Also sei ohne Einschränkung $\Psi(0) = 0$. Restbehauptung: $\Psi$ ist eine lineare Abbildung.
$n = 1$: Klar.
$n > 1$: $\Psi$ ist geradentreu nach dem ersten Korollar, also $\mathbb{Q}$-linear (nach 21.4), insbesondere additiv.

$$\lambda \in \mathbb{R}: \ \Psi(\lambda x) = \lambda \cdot \overrightarrow{\Psi(0)\Psi(x)} + \underbrace{\Psi(0)}_{=0} = \lambda \Psi(x)$$

■

# 23. Analytische Geometrie

## 23.1. Quadriken

$K$ sei ein Körper, $f \in K[X_1, \dots, X_n]$

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}}_{=: \underline{X}^{\underline{i}}} = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} \alpha_{\underline{i}} \cdot \underline{X}^{\underline{i}}$$

$\underline{i}$ heißt **Multiindex**.

**Definition:** Für $\underline{i} \in \mathbb{N}^n$ sei $|\underline{i}| := i_1 + \ldots + i_n$ der **Grad** von $\underline{X}^{\underline{i}}$.
Der **(Gesamt-)Grad** von $f$ ist $\deg(f) := \max\{|\underline{i}| : \alpha_{\underline{i}} \neq 0\}$.

**Ziel:** Beschreibe die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(f) := \{x = (x_1, \dots, x_n \in K^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ für ein Polynom $f$ mit $\deg(f) = 2$.

**Bemerkung:** Den Fall eines oder mehrerer Polynome vom Grad 1 erledigt die lineare Algebra. Mehrere Polynome vom Grad $\geq 2$ behandelt die **Kommutative Algebra und algebraische Geometrie**.

**Vorarbeit:** Klassifiziere die Menge $\mathcal{N}(f)$ durch Klassifizierung der Polynome. (Erinnerung: Klasseneinteilung entspricht einer Äquivalenzrelation)

Dazu sei $G \leq \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(K^n)$ (Untergruppe).

Definiere hiermit eine Äquivalenzrelation auf Polynomen bzw. auf Teilmengen $T \subseteq K^n$.

$$\begin{aligned} f_1 \approx_G f_2 &:\Longleftrightarrow \exists \mu \in K^\times \exists \varphi \in G : \ f_2 = \mu \cdot (f_1 \circ \phi) \\ M_1 \sim_G M_2 &:\Longleftrightarrow \exists \varphi \in G : \ M_2 = \varphi(M_1) \end{aligned}$$

Klar: $f_1 \approx_G f_2 \implies \mathcal{N}(f_1) \sim_G \mathcal{N}(f_2)$

**Ziel:** Klassifiziere die Polynome für spezielle $G$.

- Affine Klassifikation (für Char(K)$\neq 2$):

$$G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(K^n) = \{\varphi = (A, b) \mid A \in \mathrm{GL}_n(K), b \in K^n\}$$

- Euklidische Klassifikation:

$$G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(\mathbb{R}^n) = \{(A, b) \mid A \in O_n, b \in \mathbb{R}^n\}$$

Sei nun Char(K)$\neq$ 2.

**Vorbereitung:** Jedes Polynom $f$ mit $\deg(f) = 2$ hat die Form

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i + \gamma$$

$$\text{mit einer symmetrischen Matrix } A = (\alpha_{ij}) \neq 0,\ b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in K^n,\ y \in K.$$

**Beweis:** (Symmetrie von A)
Falls $A$ nicht symmetrisch ist, ersetze $A$ durch

$$\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) =: A'$$

■

**Beachte:** Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt

$$f\left(x^\top\right) = x^\top A x + 2b^\top x + \gamma$$

mit $A^\top = A$.

$Q := \mathcal{N}(f)$ heißt **affine Quadrik**.

**Lemma:**
Für $f$ wie oben und $\varphi = (C, d) \in \mathrm{Aut}_{\text{aff}}(K^n)$ sei $g(y) := (f \circ \varphi)(y)$. Dann ist

$$g(y) = y^\top A' y + 2b'^\top y + \gamma'$$

wobei $A' := C^\top A C$, $b' := C^\top(Ad + b)$, $\gamma' := f(d)$.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} f(\varphi(y)) &= f(Cy + d) \\ &= \underbrace{(Cy + d)^\top}_{y^\top C^\top + d^\top} A(Cy + d) + 2b^\top (Cy + d) + \gamma \\ &= y^\top \underbrace{C^\top A C}_{=:A'} y + d^\top A C y + \underbrace{\overbrace{y^\top C^\top A d}^{\in K^{1\times 1}}}_{= d^\top A^\top C y = d^\top A C y} + 2b^\top C y + \underbrace{d^\top A d + 2b^\top d + \gamma}_{=:\gamma'} \\ &= y^\top A' y + 2b'^\top y + \gamma' \end{aligned}$$

■

**Prinzip der Klassifikation:** Zu gegebenem $f$ finde $(C, d)$, so dass $A'$, $b$", $\gamma'$ eine einfache, übersichtliche "Normalform" annehmen.

**Bemerkung:** $\varphi$ bewirkt Wechsel des Koordinatensystems $y = \varphi^{-1}(x) = D_{\mathcal{L}}(x)$. $y$ beschreibt $Q = \mathcal{N}(f)$ im Koordinatensystem $\mathcal{L}$.

**Satz 36 (Satz von der quadratischen Ergänzung):**
Sei $A \in K^{n\times n}$ symmetrisch vom Rang $r$ und $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. Dann existiert $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ so dass

$$C^\top AC = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$$

**Beweis:** Sei $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ für alle $i, j$.
Nutze eine Variante des Gaußalgorithmus; es genügt Diagonalgestalt zu erreichen, den Rest erledigen Vertauschungsmatrizen $V_{ij}$.

$\nu$-ter Schritt: Angenommen die Zeilen (Spalten) mit einer Nummer kleiner $\nu$ haben die gewünschte Form. Dann ist:

$$A_\nu := \begin{pmatrix} * & & 0 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & * & & 0 \\ 0 & & & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Unterscheide folgende Fälle:

(1) $\alpha_{\nu\nu} \neq 0$:
Mache Zeilenumformung: Subtrahiere Vielfaches der $\nu$-ten Zeile von der unteren Zeile, so dass dort die $\nu$-te Spalte Null wird.
Dies geht mit

$$C' := I - \sum_{k=\nu+1}^{n} \frac{\alpha_{k\nu}}{\alpha_{\nu\nu}} E_{k\nu} : \quad C'A_\nu = (\beta_{ij})$$

mit $\beta_{\nu+1,\nu} = \ldots = \beta_n = 0$. Die $\nu$-te Zeile ist $\beta_{\nu j} = \alpha_{\nu j}$ $(= \alpha_{j\nu})$.

(2) $\alpha_{\nu\nu} = 0$, $\alpha_{kk} \neq 0$ für ein $k > \nu$:
Bilde $A'_\nu := V_{\nu k} A_\nu V_{\nu k}$, dann weiter wie in Fall 1.

(3) $\alpha_{kk} = 0$ für $k = \nu, \dots, n$:
Ist $\alpha_{k\nu} = 0\,\forall k \geq \nu$, so ist bereits $A_\nu$ diagonal bis Zeile $\nu$.
Sonst sei $\beta := \alpha_{k\nu} \neq 0$ für ein $k > \nu$ (addiere die $k$-te Zeile zur $\nu$-ten). Nutze die Additionsmatrix $T := A_{\nu k}(1) = I + E_{\nu k}$ mit $T^\top = I + E_{k\nu}$.
Dann folgt $A'_\nu := TA_\nu T^\top$ hat $\alpha'_{\nu\nu} = 2\beta \neq 0$ (da $\mathrm{Char}(K) \neq 2$). Fahre fort wie in Fall 1. ∎

**Vorsicht:** Die $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind im allgemeinen nicht eindeutig.

**Satz 37 (Trägheitssatz von Sylvester):**
Sei $A \in K^{n\times n}$ symmetrisch vom Rang $r$.

(1) Für $K = \mathbb{C}$ existiert $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$C^\top AC = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},0,\ldots,0)$$

(2) Für $K = \mathbb{R}$ existiert $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$$C^\top AC = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q},0,\ldots,0)$$

wobei $p,q$ durch $A$ eindeutig bestimmt sind.

**Beweis:** (1) Nach Satz 36 mit $D := \mathrm{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_r,0,\ldots,0)$.
Weiteres umformen liefert:

$$D^\top \cdot \mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,0,\ldots,0)\cdot D = \mathrm{diag}(\beta_1^2\alpha_1,\ldots,\beta_r^2\alpha_r,0,\ldots,0)$$

Falls $\beta_i$ Nullstelle von $X^2 - \frac{1}{\alpha_i}$ ist, existiert in $\mathbb{C}$ immer in eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$.

(2) Ähnlich für $\mathbb{R}$. Vorzeichen berücksichtigen

Restbehauptung: $p$ ist eindeutig bestimmt durch $A$
Behauptung: $p = \max\{\dim U \mid U \leq \mathbb{R}^n \text{ mit } s_A|_U \text{ positiv definit}\}$ wobei $s_A(x,y) := \langle Ax, y\rangle$.
Sei anderes $C'$ mit zugehörigem $p'$, $q'$. Setze

$$\begin{aligned}
b_i &:= Ce_i\\
b_i' &:= C'e_i\\
U &:= \langle b_1,\ldots,b_p\rangle\\
U' &:= \langle b_1',\ldots,b_{p'}'\rangle\\
V &:= \langle b_{p+1},\ldots,b_{p+q}\rangle\\
V' &:= \langle b_{p'+1}',\ldots,b_{p'+q'}'\rangle
\end{aligned}$$

Dann sind $s_A|_U$, $s_A|_{U'}$, $-s_A|_V$, $-s_A|_{V'}$ positiv definit.

Für $W := \mathrm{Kern}(\Lambda_A) = \langle b_{r+1},\ldots,b_n\rangle = \langle b_{r+1}',\ldots,b_n'\rangle$ gilt

$$\mathbb{R}^n = U \oplus V \oplus W = U' \oplus V' \oplus W$$

Damit folgt

$$U \cap (V' \oplus W) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned}\forall x \in U \cap (V' \oplus W) : s_A(x,x) \geq 0, s_A(x,x) \leq 0 &\implies s_A(x,x) = 0\\ &\implies x = 0\end{aligned}$$

Damit folgt $p = \dim U \leq \dim U' = p'$, da

$$\begin{aligned}\dim U' + \dim(V' + W) &= n\\ &\geq \dim(U + V' + W)\\ &= \dim(U \oplus V' + W)\\ &= \dim U + \dim(V' + W)\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt $p = p'$. ■

**Fortsetzung der Polynomklassifikation (**$\deg = 2$**) über beliebigem Körper** $K$**:** Aus obigem Lemma und Satz 37 folgt: Der quadratische Anteil der Polynome $f(x) = x^\top Ax + 2b^\top x + \gamma$ lässt sich durch eine geeignete affine Abbildung $\varphi = (C, d)$ auf folgende einfache Gestalt bringen:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

**Beachte:** Abändern von $C$, etwa $C_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, B)$ mit $B \in \mathrm{GL}_{n-r}(K)$, ändert den quadratischen Anteil **nicht**.

**Nächste Vereinfachung:** linearer Term $2b'^\top y$
Kann eventuell $2b'^\top y = 0$ erreicht werden?

$$b' \overset{\text{Def.}}{=} C^\top (Ad + b) = 0 \iff Ad + b = 0$$

Das heißt das LGS $Az = -b$ hat die Lösung $z = d$.

**Definition:** Falls eine Lösung $d$ existiert, so heißt $d$ **Mittelpunkt** der Quadrik.
**Beachte:**

$$y = d + t \in \mathcal{N}(f) \implies d - t \in \mathcal{N}(f)$$

**Beweis:** $f(d + t) = 0$, das heißt:

$$\begin{aligned}&(d+t)^\top A(d+t) + 2b^\top (d+t) + \gamma = 0\\ &(d+t)^\top A(d+t) + 2(-Ad)^\top (d+t) + \gamma = 0\\ &(d+t)^\top A(d+t) - 2d^\top A(d+t) + \gamma = 0\\ \iff &(d-t)^\top A(d+t) + \gamma = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(d-t) &= (d-t)^\top A(d-t) + 2(-Ad)^\top (d-t) + \gamma\\ &= -(d-t)^\top A(d+t) + \gamma\\ &= 0\end{aligned}$$

■

**Affine Klassifikation der Quadriken mit Mittelpunkt:**

(1) Fall $K = \mathbb{C}$:

(a) $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 \quad (\gamma' = 0)$

(b) $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

(2) Fall $K = \mathbb{R}$:

(a) $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2$ (ohne Einschränkung $p \geq q$)

(b) $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2 + 1 \quad (\gamma' \neq 0)$

**Beispiel:** $n = r = 2$

(1) Ellipse: $f = X_1^2 + X_2^2 - 1$

(2) Hyperbel: $f = X_1^2 - X_2^2 + 1$

**Affine Klassifikation der Quadriken ohne Mittelpunkt:**

Jetzt sei $Az = -b$ unlösbar. Es ist aber auch für $A$ Diagonalform erreichbar: $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$, wobei $r = \operatorname{rg}(A)$ ist.
Daraus folgt: es existiert ein $d$ mit

$$Ad + b =: c \in \langle e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle \quad (c \neq 0)$$

Nun wähle $C_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, B)$, so dass $C_1^\top c = -e_{r+1}$.

$$C_1^\top c = C_1^\top (Ad + b) =: b'$$

**Beachte:** $c$ bleibt unverändert wenn $d$ durch $d + y$ mit $y \in \langle e_{r+1}, \ldots, e_n = \operatorname{Kern}(\Lambda_A)$ ersetzt wird.

Somit: $f = \alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 \underbrace{-2X_{r+1}}_{2b'^\top X} + \gamma'$

Schließlich: affine Transformation $\varphi = \left(I, \frac{1}{2}\gamma' e_{r+1}\right)$ führt zu

$$\begin{aligned} f &= \alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 - 2\left(X_{r+1} + \frac{1}{2}\gamma'\right) + \gamma' \\ &= \alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 - 2X_{r=1} \end{aligned}$$

(1) Fall $K = \mathbb{C}$: $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 - 2X_{r+1} \quad$ (für $r < n$)

(2) Fall $K = \mathbb{R}$: $f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2 - 2X_{r+1} \quad (p \geq q)$

**Euklidische Klassifikation**

($\varphi = (x \mapsto Cx + d)$ mit $C \in O_n$ sei zugelassen)
Zur Diagonalisierung von $A$ verwende den Spektralsatz. Das heißt, es existiert $C \in O_n$ : $C^\top AC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r$ sei.

Der Rest ist wie oben. Damit erhalten wir folgende Normalformen:

(1) $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2$ (bis auf einen gemeinsamen Faktor $\mu \neq 0$ eindeutig)

(2) $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 + 1$

(3) $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 - 2X_{r+1}$

**Definition:** Die Zahlen $|\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}$ heißen **Halbachsenlängen**, die Geraden $\langle e_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, r)$ heißen die **Hauptachsen** der Quadrik in Normalform. Der Übergang in Normalform heißt auch **Hauptachsentransformation**.

## 23.2. Der Tangentialraum

Sei $K$ ein beliebiger Körper.

**Definition:** Die Nullstellenmenge $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f)$ eines Polynoms $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ heißt **Hyperfläche**.

Im folgenden sei stets $\mathcal{N}(f) \neq \varnothing$. Es sei $P \in \mathcal{F} \subseteq K^n$ ein Punkt auf der Hyperfläche.
Betrachte die Geraden $G = P + \langle u \rangle$ mit $u \in K^n$.

$$Q \in G : \; Q = P + \tau u \quad \text{mit } u \in K^n$$

**Beachte:** $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ impliziert $T| \, f(P + Tu) \in K[T]$ (da Nullstelle bei $T = 0$).

**Definition:** Eine Gerade heißt **Tangente** an $\mathcal{F}$ in $P$, falls $T^2 \Big| \, f(P + Tu)$ gilt.

**Ziel:** Bestimme alle Tangenten durch $P$ (d.h. $u$ variiert).

Dazu schreibe:

$$f(P + Tu) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots \quad \text{mit } \alpha_i = \alpha_i(u)$$

Es gilt: $\alpha_1 \in \operatorname{Hom}(K^n, K)$. Daraus folgt: es existiert ein Vektor $J_p(f) := J_p \in K^{1 \times n}$ mit $\alpha_1(u) = J_p \cdot u$. $J_p$ heißt **Jacobi-Matrix**.

In Analogie zur Analysis schreibe

$$J_p =: \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}$$

Es gilt

$$J_p = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n}\right)\bigg|_{x=p}$$

Das heißt:

$$G = P + \langle u \rangle \text{ ist Tangente} \iff J_p u = 0 \iff u \in J_p^{\perp}$$

**Definition:** (a) $P \in \mathcal{F}$ heißt **regulär**, falls $J_p \neq 0$.
Die Hyperebene $T_p(\mathcal{F}) := P + J_p^{\perp}$ heißt **Tangentialraum**.

(b) Sonst heißt $P$ **singulär** (oder **Singularität**).

**Beispiel:** (1) "Kurven" $y = p(x)$ mit $p(x) \in K[x]$

$$f(X, Y) = Y - p(X)$$

$\mathcal{N}(f)$ ist Singularitätenfrei, da

$$\begin{aligned} J_p &= \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}\right)\bigg|_{(X,Y)=P} \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial X}, 1\right)\bigg|_{(X,Y)=P} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

(2) Kurve $y^2 - x^3 \quad f(X, Y) = Y^2 - X^3$

$$J_p = \left(3X^2, 2Y\right)_{(X,Y)=P} = 0 \iff P = (0, 0)$$

Also: $(0, 0)$ ist die einzige Singularität.

**Satz 38:**
Sei $\varphi$ eine Affinität von $K^n$ und $\mathcal{F}$ eine Hyperfläche. Dann gilt

(1) $P \in \mathcal{F}$ regulär $\Longleftarrow$ $\varphi(P)$ regulär in $\varphi(\mathcal{F})$

(2) $P$ regulär $\iff T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) = \varphi(T_p(\mathcal{F}))$

**Beweis:** (1) $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{N}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)$
Taylorentwicklung von $f \circ \varphi^{-1}$ bei $\varphi(P)$
Schreibe:

$$\varphi^{-1}(x) = Ax + b$$

mit $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$.
Kettenregel anwenden auf $f \circ \varphi^{-1}(X) = f(AX + b)$ mit

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},\ AX + b = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_i}(AX+b)\bigg|_{X=\varphi(P)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_j}\bigg|_{Y=P} \cdot \frac{\partial (AX+b)_j}{\partial X_i}\bigg|_{X=\varphi(P)} \\ &= J_p(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$J_{\varphi(P)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) = J_P(f) \cdot A$$

$$\begin{aligned} P \text{ regulär in } \mathcal{F} &\iff J_P(f) \neq 0 \\ &\overset{\exists A^{-1}}{\iff} J_{\varphi(P)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) \neq 0 \\ &\iff \varphi(P) \text{ regulär in } \varphi(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} T_{\varphi(P)}(\varphi(\mathcal{F})) &= \varphi(P) + J_{\varphi(P)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)^{\perp} \\ &\overset{!}{=} \varphi(\underbrace{P + J_P(f)^{\perp}}_{=T_P(\mathcal{F})}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_P(f)Av = 0 &\iff Av \in J_P(f)^{\perp} \\ &\iff v \in A^{-1}\left(J_P(f)^{\perp}\right) \end{aligned}$$

**Beachte:** $A^{-1} = \Lambda_\varphi$

**Beispiel:** $\mathcal{F} = Q$ Quadrik mit $f(P) = P^\top AP + 2b^\top P + \gamma = 0 \quad \left(A = A^\top\right)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} f(P+Tu) &= \underbrace{f(P)}_{=0} + 2TP^\top Au + 2Tb^\top u + T^2u^\top Au \\ &= T \cdot 2\left(P^\top A + b^\top\right) u + T^2 u^\top Au \\ &= T \cdot J_P(f) \cdot u + T^2 u^\top Au \end{aligned}$$

$P$ singulär genau dann wenn $f(P) = 0$ und $AP = -b$ (das liefert entweder eine Hyperebene oder die leere Menge).

**Folgerung (aus Satz 38):**

(1) Alle Singularitäten bleiben bei Affinitäten erhalten

(2) Es genügt die Normalformen der affinen Klassifikation auf Singularitäten zu untersuchen

## 23.3. Die oskulierende Quadrik

Sei $\mathcal{F} = \mathcal{N}(f) \in K^n$ Hyperfläche, $P \in \mathcal{F}$ regulärer Punkt mit

$$T_P(\mathcal{F}) = \left\{ P + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top,\ \lambda_i \in K,\ \left( \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_{X=P} \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top = 0 \right\}$$

Die definierende Gleichung ist aus der formalen Taylorentwicklung um $P$ ablesbar.

$$f\left(P + (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top\right) = f(P) + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X_i X_j}\right|_{X=P} \lambda_i \lambda_j + \text{ höhere Terme}$$

(Dabei ist $\mathrm{Char}(K) \neq 2$)
Daher sagt man: Der Tangentialraum approximiert $\mathcal{F}$ in einer Umgebung von $P$ in “erster” Näherung (d.h. Terme vom Grad größer 2 weglassen). Die Approximation wird besser je höher der Grad der zugelassenen Terme ist.

Wir lassen nun nur Terme bis zum Grad 2 zu.

**Definition:** Die Quadrik

$$Q_{P,\mathcal{F}} := \left\{ P + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mid \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X=P} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X_i X_j}\right|_{X=P} \cdot \lambda_i \lambda_j = 0 \right\}$$

heißt **oskulierende** Quadrik zu $\mathcal{F}$ im Punkt $P$ (auch **Schmieg-Quadrik** genannt).

**Bemerkung:** Die oskulierende Quadrik ist eine affine Invariante wie der Tangentialraum, d.h. für jede Affinität $\varphi$ gilt:

$$Q_{\varphi(P),\varphi(\mathcal{F})} = \varphi\left(Q_{P,\mathcal{F}}\right)$$

**Beweis:** wie für den Tangentialraum. ∎

**Beispiel:** Die **Torusfläche**
$\mathcal{T} = \mathcal{N}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ für

$$f(x,y,z) = (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) - 4R^2(x^2 + y^2)$$

Wir benötigen eine Liste der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x &= 4x(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\ f_y &= 4y(-R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\ f_z &= 4z(R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Welche singulären Punkte $f|_P = 0 = f_x|_P = f_y|_P = f_z|_P$ existieren?

- Fall $0 < r < R$:

$$R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2 > 0 \quad \forall x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$$

Aus $P = (x, y, z)$ singulär folgt $z = 0$ (da $f_z|_P = 0$). Währe $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, so ergäbe $f_x = f_y = 0$

$$x^2 + y^2 = R^2 + r^2$$

In $f$ einsetzen:

$$\left(2R^2\right)^2 = 4R^2(R^2 + r^2) \quad \text{Widerspruch!}$$

Also folgt $x = y = z = 0$. Aber: $f(0, 0, 0) = R^2 - r^2 > 0$, da $R > r$, d.h. $(0, 0, 0) \notin \mathcal{T}$.

Damit sind alle Punkte auf $\mathcal{T}$ regulär.

- Fall $r \geq R > 0$:
  Es gibt singuläre Punkte. Welche? Übung.

## 23.4. Durchschnitte von Hyperebenen

Sei $K$ ein beliebiger Körper, $R = K[X_1, \ldots, X_n]$.

**Problem:** Beschreibe die (gemeinsamen) Nullstellen endlich vieler vorgegebener Polynome $f_i \in \mathbb{R}$.

Mit $\mathcal{F}_i := \mathcal{N}(f_i)$ betrachte also

$$\mathcal{D} := \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{N}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

Eine Gerade $G = P + \langle u \rangle$ heißt Tangente an $\mathcal{D}$ in $P \in \mathcal{D}$, wenn $G$ Tangente an jede Hyperfläche $\mathcal{F}_i$ ist, d.h.

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial X_n}\right)_{X=P} \cdot u = 0 \quad \forall i$$

d.h. mit der **Jacobi-Matrix**:

$$J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{X=P} \in K^{m \times n}$$

Es gilt: $J_P \cdot u = 0$.

**Definition:** Die $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ schneiden sich in $P \in \mathcal{D}$ **transversal** wenn $\operatorname{rg}(J_P) = m$. Dann heißt $P$ regulärer Punkt von $\mathcal{D}$ und

$$T_{P,\mathcal{D}} := P + \operatorname{Kern}\left(\Lambda_{J_P}\right)$$

heißt Tangentialraum.

**Bemerkung:** $T_{P,\mathcal{D}} = T_{P,\mathcal{F}_1} \cap \ldots \cap T_{P,\mathcal{F}_n}$ bei transversalem Schneiden.

**Beispiel:** Die orthogonale Gruppe $O_n = \left\{A = (\alpha_{rs}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^\top = I\right\}$

(1) $O_n$ ist der Durchschnitt von Hyperflächen (Quadriken) im $\mathbb{R}^3$.

Der zugehörige Polynomring ist

$$R = \mathbb{R}[X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}, X_{21}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nn}] \in \mathbb{R}[X]$$

Nach Definition von $O_n$ gilt:

$$O_n = \left\{ (\alpha_{rs}) \mid \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} = \delta_{ij} \right\}$$

d.h. $\alpha_{rs} \in \mathbb{R}^{n^2}$ ist Nullstelle des Polynoms

$$f_{ij}(X) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}X_{jk} - \delta_{ij} \in \mathbb{R}$$

**Beachte:** $f_{ij} = f_{ji}$, daraus folgt $O_n = \bigcap_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathcal{F}_{ij}$ mit $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{N}(f_{ij})$.

(2) Die $\mathcal{F}_{ij}$ schneiden sich transversal in $P = I$.

Also insbesondere

$$T_{I,O_n} = \bigcap_{i \leq j} T_{I,\mathcal{F}_{ij}}$$

mit

$$\begin{aligned}
\dim T_{I,O_n} &= n^2 - \operatorname{card}\{(i,j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} \\
&= n^2 - \sum_{j=1}^{n} j \\
&= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} n(n-1)
\end{aligned}$$

**Beweis (der Transversalität):** Aus $\frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} =: f_{ik,pq}$ folgt: Jacobi-Matrix $J_I = \alpha_{ik,pq}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times n^2}$ mit $\alpha_{ik,pq} := f_{ik,pq}|_{X=I}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{ik}}{\partial X_{pq}} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_{ij} X_{kj}}{\partial X_{pq}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left( X_{ij} \frac{\partial X_{kj}}{\partial X_{pq}} + X_{kj} \frac{\partial X_{ij}}{\partial X_{pq}} \right) \\
&= X_{iq}\delta_{kp} + X_{kq}\delta_{ip}
\end{aligned}$$

Auswerten bei $P = I$ liefert $\delta_{iq}\delta_{kp} + \delta_{kq}\delta_{ip} = \alpha_{ik,pq}$.

Bilde das Skalarprodukt zweier Zeilen von $J_I$ (Zeile $ik$ mit Zeile $jl$):

$$\begin{aligned}\sum_{pq} \alpha_{ik,pq} \cdot \alpha_{jl,pq} &= \sum_{pq} (\delta_{iq}\delta_{kp} + \delta_{kq}\delta_{ip})(\delta_{jq}\delta_{lp} + \delta_{lq}\delta_{jp}) \\ &= \delta_{ji}\delta_{lk} + \delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{jk}\delta_{li} + \delta_{lk}\delta_{ji} \\ &= 2(\delta_{ij}\delta_{lk} + \delta_{jl}\delta_{jk}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } ik \neq jl \\ 2 \vee 4 & \text{für } ik = jl \end{cases}\end{aligned}$$

$\delta_{il}\delta_{jk} = 1$ impliziert $i = l$, $j = k$ und wegen $i \leq k$, $j \leq l$ gilt $i \leq k = j \leq l = i$, also $ik = ii = il$.

Damit folgt: Die Zeilen von $J_I$ sind paarweise orthogonal und jeweils ungleich Null. $\mathrm{rg}(J_I)$ ist gleich der Anzahl Zeilen. Das heißt die $\mathcal{F}_{ij}$ schneiden sich transversal bei $I$. ■

(3) Der Tangentialraum bei $I$ ist

$$T_{I,O_n} = I + \bigoplus_{i<k} \mathbb{R}(\underbrace{E_{ik} - E_{ki}}_{=:B_{ik}})$$

**Beweis:** Die $B_{ik}$ sind offenbar linear unabhängig im $\mathbb{R}^{n^2}$, also

$$\dim\langle B_{ik} \mid i < k\rangle = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

und $B_{ik} \in \mathrm{Kern}(\Lambda_{J_I})$, da $J_I \cdot B_{ik} = 0$ (leicht). ■

**Definition:** Eine Untergruppe $\mathcal{J} \leq \mathrm{GL}_n(K)$ (wie hier $O_n$), die als Durchschnitt von Hyperflächen definiert ist, heißt **algebraische (Matrizen-)Gruppe**.

**Bemerkung:** Solche $\mathcal{J}$ haben den großen Vorzug, dass Regularität an einem Punkt $Q \in \mathcal{J}$ sich auf alle anderen Punkte von $\mathcal{J}$ überträgt.

**Satz 39:**
Sei $\mathcal{J}$ eine algebraische Gruppe mit mindestens einem Punkt. Dann ist jeder Punkt $Q \in \mathcal{J}$ regulär und

$$T_{Q,\mathcal{J}} = Q \cdot T_{I,\mathcal{J}} = \{Q \cdot T \mid T \in T_{I,\mathcal{J}}\}$$

**Beweis:** $\Lambda_Q : B \mapsto Q \cdot B$ ist eine Affinität von $K^{n\times n}$.

Schon gesehen: Affinitäten erhalten die Regularität und führen Tangentialräume ineinander über. ■

**Korollar:**
$Q_n$ ist Singularitätenfrei und die Dimension von $T_{P,O_n}$ ist $\frac{n(n-1)}{2}$.

# 24. Projektive Geometrie

## 24.1. Projektive Räume

**Zweck:** Störende Ausnahmefälle der affinen Geometrie beseitigen durch geschickte Erweiterung affiner Räume zu sogenannten projektiven Räumen, wo die Ausnahmen nicht mehr auftreten.

Sei $K$ ein beliebiger Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum.

**Definition:** Die Menge der eindimensionalen Teilräume von $V$

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(V) := \{Kx \mid x \in V \setminus \{0\}\}$$

heißt **projektiver Raum**.

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ heißt **projektiver Teilraum** von $\mathbb{P}(V)$, falls ein Untervektorraum $U_x \leq V$ existiert mit

$$X = \mathbb{P}(U_x) := \{Kx \mid x \in U_x \setminus \{0\}\}$$

$\dim(\mathbb{P}) := \dim(U) - 1$ heißt **Dimension** von $\mathbb{P}$.

$$X \text{ heißt } \begin{Bmatrix} \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \\ \text{Ebene} \end{Bmatrix} \text{ falls } \dim X = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}.$$

$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$ heißt der **projektive Standardraum**.

**Bemerkung:** Die leere Menge $\varnothing$ ist ein projektiver Raum mit $U_\varnothing = \{0\}$, also $\dim \varnothing = -1$.

**Lemma:**
Ist $I$ eine beliebige Indexmenge und $\forall i \in X : X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Teilräume. Dann ist

$$X := \bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \mathbb{P}(V)$$

ein projektiver Teilraum.

Insbesondere existiert für jede beliebige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{P}(V)$ die **projektive Hülle**

$$[M] := \bigcap_{X \text{ proj. TR}; M \subseteq X} X$$

Speziell:

(1) $X, Y \subseteq \mathbb{P}(V)$ projektive Teilräume

$$[X \cup Y] = \mathbb{P}(U_x + U_y)$$

(2) Für $M = \{P_1, \dots, P_r\}$ setze

$$[M] := [P_1, \dots, P_r]$$

**Beweis:** Sei $X_i = \mathbb{P}(U_i)$ zu Teilvektorräumen $U_i \leq V$. Damit:

$$\begin{aligned} X &= \bigcap_{i \in I} \{Kx \mid x \in U_i \setminus \{0\}\} \\ &= \left\{ Kx \mid x \in \bigcap_{i \in I} U_i,\, x \neq 0 \right\} \\ &\overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{P}\left( \bigcap_{i \in I} U_i \right) \end{aligned}$$

■

**Definition:** Ein projektiver Teilraum $H \subsetneq \mathbb{P}(V)$ heißt **(proj.) Hyperebene**, falls ein Punkt $p = Kx \in \mathbb{P}(V)$ existiert mit

$$[H \cup \{p\}] = \mathbb{P}(V)$$

**Bemerkung:** Falls $n = \dim \mathbb{P}(V) < \infty$ ist, so gilt für projektive Teilräume $H \subseteq \mathbb{P}(V)$:

$$H \text{ Hyperebene} \iff \dim H = n - 1$$

**Satz 40:**
Ist $\dim \mathbb{P}(V) < \infty$, so gilt:

(1) Für projektive Teilräume $X, Y \subseteq \mathbb{P}$ ist

$$\dim X + \dim Y = \dim[X \cup Y] + \dim X \cap Y$$

(2) Für jede Hyperebene $H$ und jeden projektiven Teilraum $X \nsubseteq H$ ist

$$\dim(X \cap H) = \dim X - 1$$

Insbesondere besitzen zwei verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$ genau einen Schnittpunkt.

**Beweis:** (1)

$$\begin{aligned}\dim X + \dim Y &\overset{\text{Def.}}{=} \dim U_x - 1 + \dim U_y - 1 \\ &= \dim(U_x + U_y) + \dim(U_x \cap U_y) - 2 \\ &= \dim[X \cup Y] + \dim(X \cap Y)\end{aligned}$$

(2) $X \subseteq H$ impliziert $[X \cup H] = \mathbb{P}(V)$. Damit folgt:

$$\dim[X \cup H] = \dim \mathbb{P}(V) = \dim H + 1$$

$$\dim X \cap H \overset{(1)}{=} \dim H + \dim X - \dim[X \cup H] = \dim X - 1$$

■

## 24.2. projektive Koordinaten

**Definition:** Die Punkte $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\dim[p_0, p_1, \dots, p_k] = k$$

**Lemma:**
Für $p_\varkappa = K \cdot v_\varkappa \quad (v_\varkappa \in V)$ gilt:

$$p_0, p_1, \dots, p_k \text{ unabhängig} \iff \dim(Kv_0 + \ldots + Kv_k) = k+1 \text{ linear unabhängig}$$

**Beweis:**

$$p_0, \dots, p_k \text{ unabhängig} \iff \dim(Kv_0, \dots, Kv_k) = k+1$$

■

**Definition:** Sei $\dim \mathbb{P} = n < \infty$ und seien $p_0, \dots, p_k, e \in \mathbb{P}$.

Das $n+2$-Tupel $(e; p_0, \dots, p_n)$ heißt ein **Koordinatensystem** von $\mathbb{P}$, wenn je $n+1$ Punkte hiervon linear unabhängig sind.

**Beachte:** Ein Koordinatensystem legt eine (bijektive) **Koordinatenabbildung**

$$D : \mathbb{P} \overset{\sim}{\to} \mathbb{P}(K^{n+1})$$

fest wie folgt:

(1) Jede Wahl von Erzeugern $v'_\varkappa$ der $p_\varkappa$ ergibt eine Basis $\{v'_0, \dots, v'_n\}$ von $V$.

Insbesondere hat jedes $v \in V$ mit $e = Kv$ die Darstellung

$$v = \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{x'_\nu v'_\nu}_{=:v_\nu}$$

mit $x'_\nu \neq 0 \, \forall \nu$ (wegen der Voraussetzung über lineare Unabhängigkeit). Dabei sind die $v_\nu$ unabhängig von der Wahl der $v'_\nu$.

(2) Zu festem $v$ existiert also eine eindeutig bestimmte Basis $\{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v = \sum_{\nu=0}^{n} v_\nu$. Zu einem beliebigen anderen $v' = \lambda \cdot v \in K \cdot v$ gehört die Basis $\{\lambda v_0, \dots, \lambda v_n\}$.

(3) Für einen beliebigen Punkt $p = K \cdot w$ mit Basisdarstellung

$$w = \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu v_\nu$$

setze $D(p) := K \cdot (x_0, \dots, x_n) =: (x_0 : \dots : x_n)$.

Das ist wohldefiniert, da für $w' = \lambda \cdot w$ mit $\lambda \neq 0$ gilt:

$$w' = \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{\lambda x_\nu}_{=:x'_\nu} v_\nu$$

Daher:

$$K(x'_0, \dots, x'_n) = K(x_0, \dots, x_n)$$

$D(p)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von $v$.

$(x_0 : \dots : x_n)$ heißen **homogene Koordinaten** von $\mathbb{P}$.

(4) Es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} D(p_\nu &= (0 : \dots : \overset{\nu}{1} : 0 : \dots : 0) \\ D(e) &= (1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

## 24.3. Projektivitäten

**Vorbemerkung:** Jede injektive lineare Abbildung $\phi : V \to W$ von $K$-Vektorräumen definiert eine Abbildung der zugehörigen projektiven Räume.

$$\tilde{\phi} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W),\ p = K \cdot v \mapsto \tilde{\phi}(p) := \phi(Kv) = K\phi(v)$$

**Definition:** Eine Permutation $\varphi$ von $\mathbb{P}$ heiß t **Projektivität**, wenn ein Vektorraumautomorphismus $\phi \in \operatorname{Aut}(V)$ existiert mit $\tilde{\phi} = \varphi$.

**Lemma:**
Für $\phi_1$, $\phi_2 \in \operatorname{Aut}(V)$ gilt:

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 \Longleftrightarrow \exists c \in K,\, c \neq 0 :\ \phi_1 = c \cdot \phi_2$$

**Beweis:** $\Longrightarrow$ : klar

$\Longleftarrow$: Für alle $x$ gilt: $\phi_1(Kx) = \phi_2(Kx)$, d.h. es existiert ein $c_x \in K$ mit $\phi_1(x) = c_x \cdot \phi_2(x)$.

Für $x, y$ linear unabhängig setze $z := x + y$.

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= c_z \cdot \phi_2(z) = c_z\left(\phi_2(x) + \phi_2(y)\right)\\ \phi_1(z) &= \phi_1(x) + \phi_1(y) = c_x\phi_2(x) + c_y\phi_2(y)\end{aligned}$$

Da $x$, $y$ linear unabhängig und $\phi_i$ Automorphismus folgt: $\phi_2(x)$, $\phi_2(y)$ linear unabhängig.

Koeffizientenvergleich liefert $c_x = c_z = c_y$. Damit sind alle $c_x$ gleich $=: c$. ■

**Bemerkung:**

(1) Die Projektivitäten von $\mathbb{P}$ bilden eine Gruppe, wobei $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2 = \phi_1 \tilde{\circ} \phi_2$ und $\tilde{\phi}_1^{-1} = \widetilde{\phi_1^{-1}}$ ist.

(2) Jede Projektivität bildet einen projektiven Teilraum auf einen projektiven Teilraum gleicher Dimension ab.

**Satz 41:**
Zu verschiedenen Koordinatensystemen $(e; p_0, \ldots, p_n)$ und $(e'; p'_0, \ldots, p'_n)$ von $\mathbb{P}$ existiert genau eine Projektivität $\varphi$, die sie ineinander überführt, d.h.

$$\begin{aligned}\varphi(p_\nu) &= p'_\nu\\ \varphi(e) &= e'\end{aligned}$$

**Beweis:** Übung. ■

## 24.4. Der Zusammenhang zwischen affinen und projektiven Räumen

Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, fixiere eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{P}$ und $a = Ky \in \mathbb{P} \setminus H$. Also $\mathbb{P} = [H, a]$ und $V = U_H \oplus Ky$.

**Vorbemerkung:** Jedes $p \in \mathbb{P} \setminus H$ ist von der Form $p = K(u_p + y)$ mit $u_p \in U_H$ eindeutig.

Für $p = Kx \in \mathbb{P}$ gilt:

$$p \in H \Longleftrightarrow p = Kx \leq U_H$$

Also gilt: $p \in \mathbb{P} \setminus H \Longleftrightarrow p = Kx \not\leq U_H$.

Wegen direkter Summe ist $x$ eindeutig zerlegbar:

$$x = u'_p + \lambda y \qquad (u'_p \in U_H)$$

$$x \notin U_H \Longleftrightarrow \lambda \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad Kx = K(\underbrace{\lambda^{-1}u'_p}_{=:u_p} + y)$$

**Satz 42:**
Die Menge $\mathbb{A} := \mathbb{P} \setminus H$ ist ein affiner Raum mit $U_H$ als Translationsvektorraum bezüglich der Operation
$$(u, p) \mapsto K(u + u_p + y)$$
wobei $p = K(u_p + y)$ gilt, mit eindeutig bestimmtem $u_p \in U_H$.
Dabei ist die Translation $\overrightarrow{pq} = u_q - u_p$.

**Beachte:**
$$\dim \mathbb{A} = \dim U_H = \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V)$$

**Definition:** Die Punkte von $\mathbb{A}$ heiß en **eigentliche Punkte**, die von $H$ **uneigentlich**.

Umgekehrt lässt sich jeder affine Raum $\mathbb{A}$ erweitern zu einem projektiven Raum durch disjunkte Vereinigung mit einer projektiven Hyperebene $H$ gleicher Dimension:
ohne Einschränkung sei $\mathbb{A} = K^n$. Zum Beispiel haben wir die injektive Abbildung
$$j_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{P}(K^{n+1}),\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$$
$H := \mathbb{P}(\underbrace{0 \times K^n}_{\leq K^{n+1}})$.

Für eigentliche Punkte $p = (y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$, d.h. $p \notin H$, gilt: $y_0 \neq 0$, also $p = \left(1 : \frac{y_1}{y_0} : \ldots : \frac{y_n}{y_0}\right)$, d.h. $p$ hat die affinen Koordinaten $\left(\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right)$ in $\mathbb{A}$.

Es gilt: $j_1(\mathbb{A}) \mathbin{\dot\cup} H = \mathbb{P}(K^{n+1})$

Ferner gilt mit den den Einbettungen
$$j_\nu : K^n \to \mathbb{P}(K^{n+1}),\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 : \ldots : x_{\nu-1} : 1 : x_{\nu+1} : \ldots : x_n)$$
folgende Gleichheit:
$$\mathbb{P}(K^{n+1}) = \bigcup_{\nu=1}^{n+1} j_\nu(\mathbb{A})$$
Aber: nicht disjunkt.

**Beispiel:** (1) Die reelle projektive Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Es gibt zwei Modelle:
$$\left\{\mathbb{R} \cdot x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\} \longleftrightarrow \left\{G \subseteq \mathbb{R}^2 \mid G \text{ affine Gerade mit } 0 \in G\right\}$$
Dies ist das sogenannten **Büschelmodell** von $\mathbb{P}^1$.

Fixiere $g$ (die Hyperebene besteht hier aus einem Punkt)
$$\mathbb{P}^1 \setminus \{g\} \underset{\text{bijekt.}}{\longleftrightarrow} g' \quad (\text{affine Gerade } \neq g,\ g' \parallel g)$$

eigentliche Punkte $g_a \mapsto g_a \cap g'$

$g$ ist der einzige uneigentliche Punkt; das entspricht anschaulich einem unendlich fernen Punkt $F$ auf $g'$. Sprich: **Fernpunkt**.

Wir erhalten das **Punktmodell** von $\mathbb{P}^1 : g' \dot\cup \{F\}$.

Ein einheitliches Modell liefert der Einheitskreis um $(0,1) \in \mathbb{R}^2$

$$S := \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - (0,1)\| = 1\right\}$$

$$\begin{aligned}\left\{\mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\} &\xleftrightarrow{\text{bij.}} S \\ \mathbb{R}x &\mapsto \mathbb{R}x \cap S \rightsquigarrow \{s_x\} \quad (s_x \neq (0,0))\end{aligned}$$

(2) Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
Bündelmodell:

$$\left\{\mathbb{R}x \leq \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{\text{affine Gerade } g \leq \mathbb{R}^3,\ 0 \in g\right\}$$

Fixiere die affine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $0 \notin E$ und eine dazu parallele $E'$ mit $0 \in E'$.

Dabei entsteht eine Bijektion

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2 \setminus \{g' \subseteq E'\} &\longleftrightarrow E \\ g &\mapsto g \cap E \\ A &\mapsto g = 0A\end{aligned}$$

Jedem $g' \in E'$ ordnet man genau einen **Fixpunkt** $F_{g'} \in \mathbb{P}^2$ zu.

$\{g' \in E'\}$ ist projektive Gerade. $f := \{F_{g'} \mid g' \subseteq E'\}$ heißt **Ferngerade**.

$E \dot\cup f$ ist das Punktmodell des $\mathbb{P}^2$.

Analog lassen sich generell Bündel- und Punktmodell des $\mathbb{P}^n$ mittels $\mathbb{A}^{n+1}$ beschreiben.

# Stichwortverzeichnis