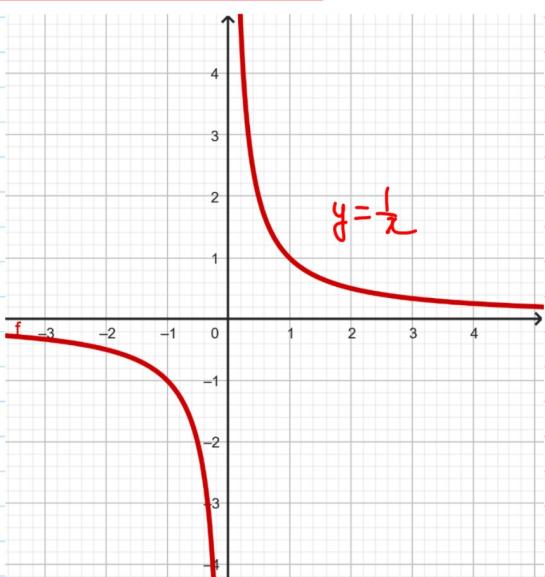




① Tiệm Cân Ngang

Quan sát:



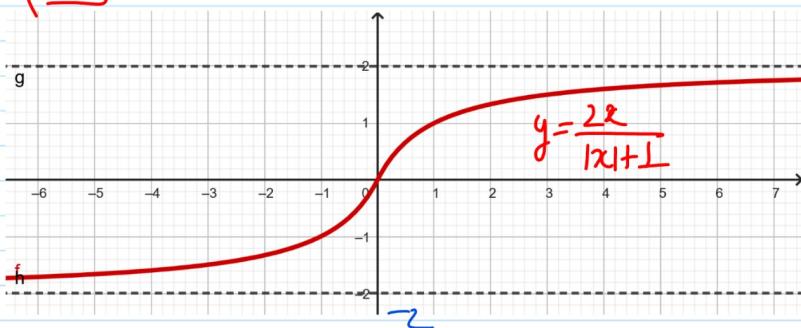
$$x = 1000 \Rightarrow y = \frac{1}{1000}$$

$$x = 99999 \Rightarrow y = \frac{1}{99999} \text{ (gần 0)}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow y=0$ tiệm cân ngang của

của ĐTHS $y = \frac{1}{x}$.

(VD)



$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

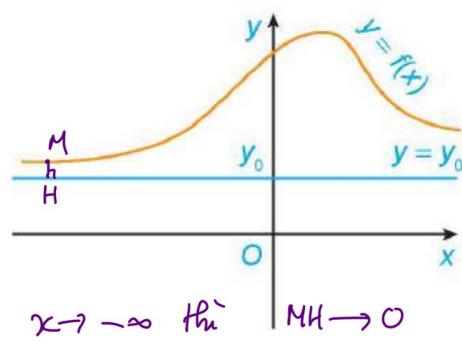
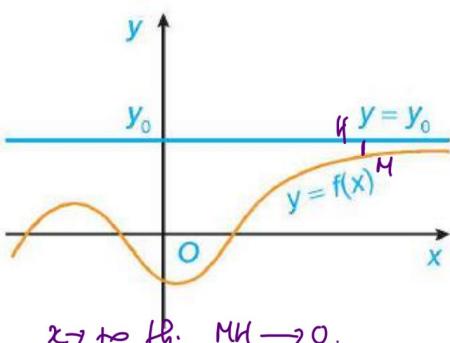
$y=2$ là TCN của ĐTHS $y = \frac{2x}{2x+1}$.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x-1} = -2 \Rightarrow y=-2 \text{ là TCN của ĐTHS } y = \frac{2x}{2x+1}.$$

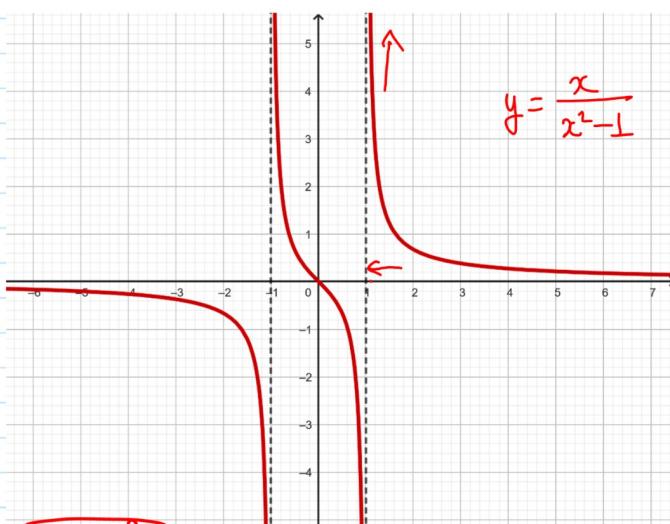
Khai Nghiêm

Đường thẳng $y = y_0$ là TCN của ĐTHS $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$



② Tiệm cận Đuôi



$$x = 1/1001 \Rightarrow y \approx 500,25$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \Rightarrow x=1 \text{ là TCĐ}$$

$$x = -1 + 0,00001 \Rightarrow y \approx 99999,75$$

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \Rightarrow x=-1 \text{ là TCĐ}.$$

Khai niêm

Đuôi thẳng $x=x_0$ là dg TCĐ của ĐTBS $y=f(x)$ nếu lf nhặt 1 trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

?

Tìm các đuôi TCĐ và TN của ĐTBS': $y = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$.

$$TXĐ: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}. \quad Ta có: y = \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty \Rightarrow x=-2 \text{ là dg TCĐ của ĐTBS}.$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\Rightarrow y=0 \text{ là dg TN}.$$

Một số lưu ý

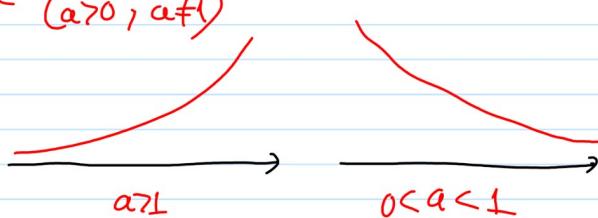
* Lưu ý 1: Hàm hằng $f(x) = 2$ | ĐTBS $y=f(x)$ có dg tiệm cận ngang $y=2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2 \Rightarrow y=2 \text{ là TN của ĐTBS } y=2.$$

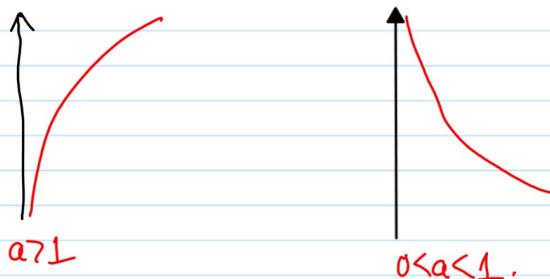
④ Luyện 2

Vẽ đồ thị hàm số mũ logarithm.

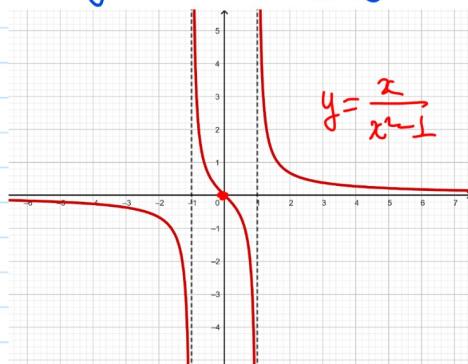
$$\textcircled{4} \quad y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

ĐTHS có tangency $y=0$, ko có TCA.

$$\textcircled{5} \quad y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

ĐTHS có TCA với $x=0$; ko có TN.**⑤ Luyện 3**

Đường tiệm cận ngang của ĐTHS có thể cắt đồ thị hay không?

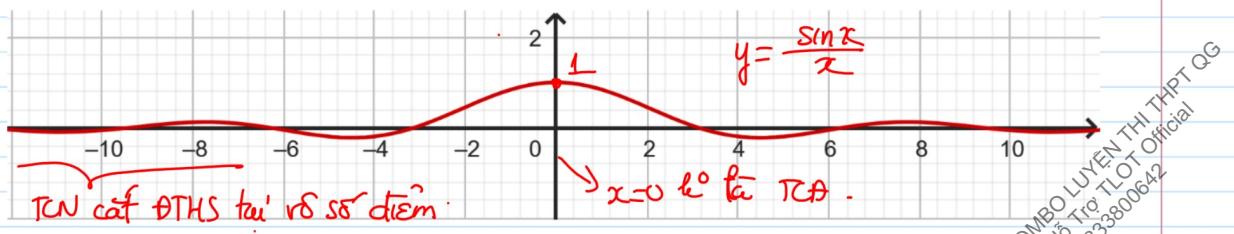


Có.

⑥ Luyện 4Vẽ ĐTHS $y = \frac{\sin x}{x}$.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \text{ĐTHS không có tiệm cận đứng.}$$

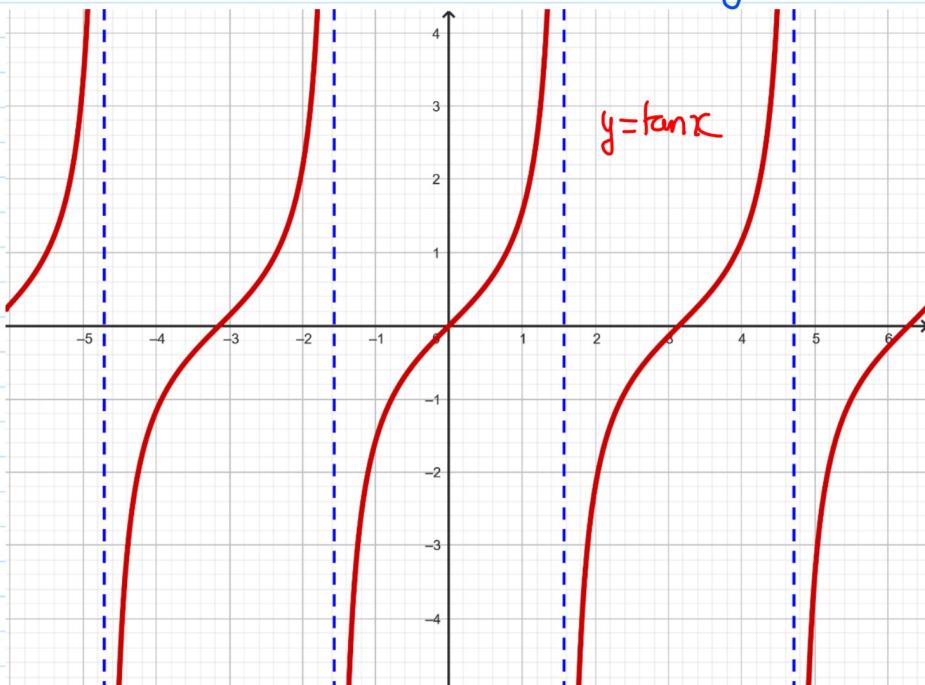
$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \left| \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \text{ mà } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \right.$$

 \Rightarrow ĐTHS có tiệm cận ngang: $y=0$.

Lưu ý 5

Xét ĐTHS $y = f(x)$ | ĐTHS có bờ đáy là 2 dg TCN.

ĐTHS có vở số dg tiệm cận đứng.



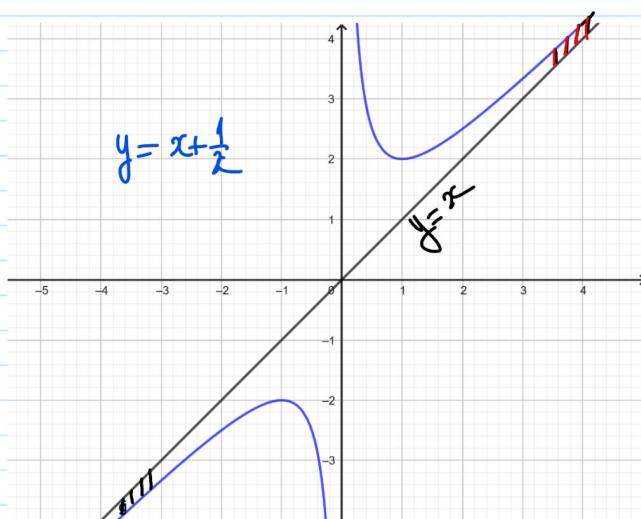
Lưu ý 6

Xét hcm ss' $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$) .

① ĐTHS hcm có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

② ĐTHS có dg tiệm cận đứng khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$.
(PT dg TCĐ: $x = -\frac{d}{c}$).

③ Đường hcm căn xem



$$\lim_{x \rightarrow \infty} [(x + \frac{1}{x}) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

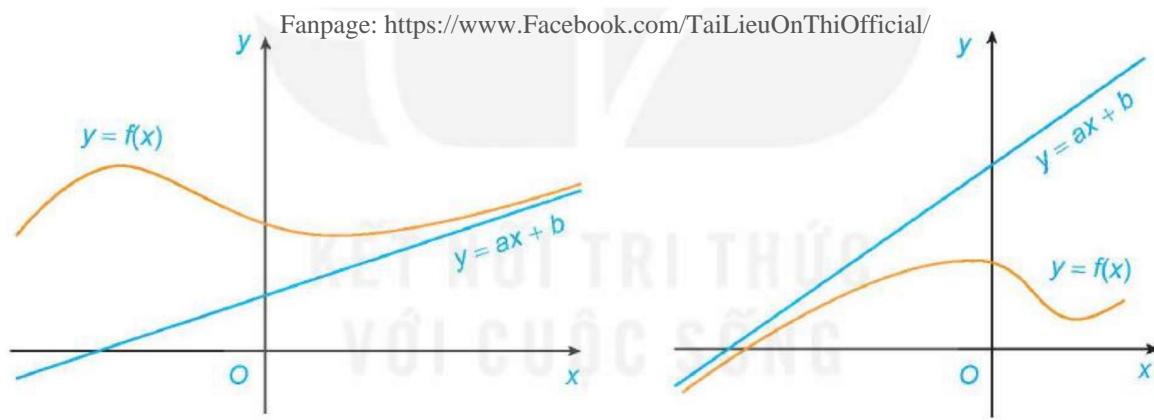
Khái niệm

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là dg TCX của ĐTHS $y = f(x)$

nếu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$$
 hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

View Full: <https://bit.ly/ComboLuyenThiTHPTQG>



Cách nhận biết DTHS có Tcx hay k^o.

$\exists a, b$ ($a \neq 0$) sao $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

Nếu: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

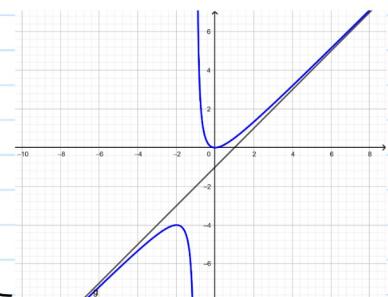
Khi đó: $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

VD Tìm độ Tcx (nếu có) của các DTHS:

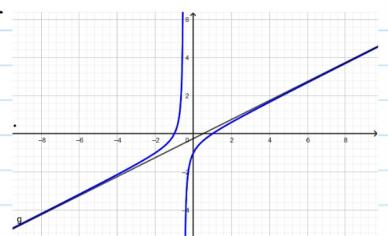
$$y = \frac{x^2}{x+1} \quad ; \quad y = \frac{x^2-1}{2x+1} \quad ; \quad y = \frac{x}{x^2+1} \quad ; \quad y = \frac{x^3+2x^2-1}{3x^2+x-2}$$

Giai -

$$\textcircled{a} \quad y = \frac{x^2}{x+1} \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \end{array} \right\} \text{Tcx: } y = x - 1.$$



$$\textcircled{b} \quad y = \frac{x^2-1}{2x+1} \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{(2x+1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+2x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{2x+1} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-2-2x^2-x}{2(2x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{4x+2} = -\frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \text{DTHS nhận độ } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ làm Tcx.}$$



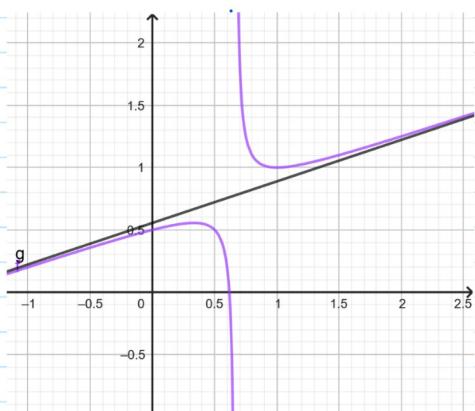
$$\textcircled{c} \quad y = \frac{x}{x^2+1} \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x^2+1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{DTHS là k}^o \text{ c} \epsilon \text{Tcx})$$

$$d) \cdot y = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{3x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x(3x^2 + x - 2)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{3x^2 + x - 2} - \frac{1}{3}x \right) = \frac{5}{9}$$

ĐTHS c/c TCX: $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$





THẦY ĐỖ VĂN ĐỨC

BUỔI IA4 | NỀN TẢNG VỀ TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN LÝ THUYẾT (ĐÃ LIVE TRONG KHÓA HỌC)

PHẦN BÀI TẬP

Câu 1. Tìm tất cả các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{x^2}{x-3}$

d) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Câu 2. Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang (nếu có) của các đồ thị hàm số sau?

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

b) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

c) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

d) $y = \frac{\sin x}{x}$.

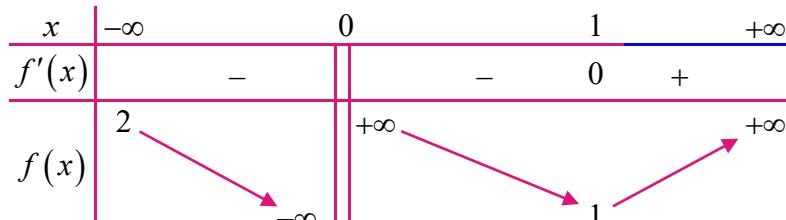
Câu 3. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau.

a) $y = x + 1 + \frac{1}{x}$.

b) $y = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$.

c) $y = \frac{x}{|x|-1}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

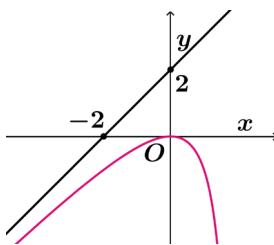
A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên (với đường màu đen là tiệm cận xiên). Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là



- A. $y = 2x - 2$. B. $y = x + 2$. C. $y = 2x + 2$. D. $y = x - 2$.

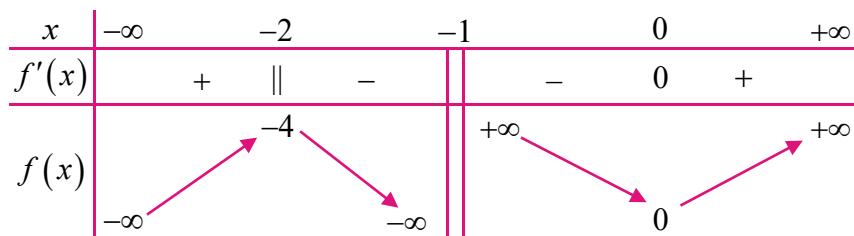
Câu 6. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \ln(x - 1)$ là

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.

Câu 7. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2^{2x+1}$ là

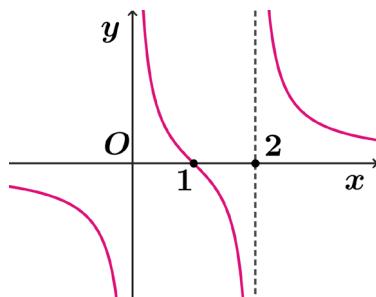
- A. $y = \frac{1}{2}$. B. $y = 1$. C. $y = 0$. D. $y = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên?



- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-2; 0)$.
 b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.
 c) Đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng
 d) Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên \mathbb{R} .

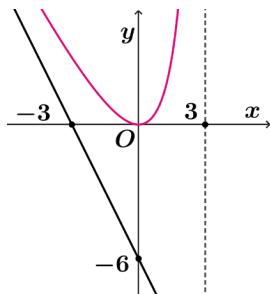
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Các khẳng định sau là **đúng** hay **sai**?



- a) Hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0; 2)$.
 b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
 c) Đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận ngang.
 d) Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 2.

Fanpage - Thầy Đỗ Văn Đức - Ôn luyện 10, 11, 12 môn Toán

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



- a) $f(0) = 0$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- c) Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang.
- d) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = -2x - 6$.

Câu 11. Chi phí để loại $X\%$ chất gây ô nhiễm là C (nghìn đô la) với $C(x) = \frac{12x}{100-x}$.

- a) Tính chi phí để loại bỏ 25% chất gây ô nhiễm và 50% chất gây ô nhiễm?
- b) Điều gì xảy ra khi $x \rightarrow 100^-$? Có thể loại bỏ hoàn toàn chất gây ô nhiễm không?

Câu 12. Anh A là một nhà quy hoạch đô thị, mô hình hóa dân số $P(t)$ (nghìn người) của vùng anh áy sống sau t năm kể từ thời điểm hiện tại là $P(t) = \frac{40t}{t^2+10} - \frac{50}{t+1} + 70$.

- a) Dân số hiện tại của vùng đó là bao nhiêu?
- b) Dân số sẽ thay đổi bao nhiêu người trong năm thứ ba? Dân số tăng lên hay giảm xuống trong khoảng thời gian này?
- c) Dân số mà anh A dự kiến trong dài hạn là bao nhiêu (khi $t \rightarrow +\infty$).

Câu 13. Nồng độ thuộc trong máu của một bệnh nhân t giờ sau khi tiêm là $C(t)(\frac{mg}{ml})$ với $C(t) = \frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013$

- a) Nồng độ thuốc là bao nhiêu ngay sau tiêm?
- b) Nồng độ thuốc thay đổi một lượng bằng bao nhiêu trong giờ thứ năm? Nồng độ thuốc tăng hay giảm trong khoảng thời gian này?
- c) Tìm nồng độ thuốc tồn dư, tức là nồng độ thuốc vẫn còn trong cơ thể nạn nhân trong dài hạn (khi $t \rightarrow +\infty$).

Câu 14. Hai loài cùng tồn tại trong cùng một hệ sinh thái. Sau t năm, số lượng cá thể loài I là $P(t)$ nghìn con, số lượng cá thể loài II là $Q(t)$ nghìn con, trong đó P và Q được mô hình hóa bởi các hàm $P(t) = \frac{30}{t+3}$ và

$Q(t) = \frac{64}{4-t}$ với mọi $t \geq 0$ sao cho số lượng cá thể tương ứng là đại lượng không âm.

- a) Tìm số lượng cá thể ban đầu của mỗi loài.
- b) Điều gì xảy ra với $P(t)$ khi t tăng lên, tương tự như thế thì điều gì xảy ra với $Q(t)$?
- c) Loài I được cho là sẽ phải đối mặt với sự **tuyệt chủng**, trong khi số lượng cá thể loài II sẽ **bùng nổ**. Tình huống nào có thể gây ra sự tuyệt chủng hay bùng nổ của mỗi loài?

--- Hết ---