****

Recherche Quantitative

**Duration des instruments de dette**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Date** | **Version** | **Auteur** | **Description** |
| 12/04/2010 | 1.0 | MY | Création du document |
| 22/04/2010 | 1.1 | RL | Correction / Mise en page |
| 26/05/2010 | 1.2 | MY | Modification Risky Duration |
|  |  |  |  |

**Reference QR-DURATION-01**

**Dernière MAJ 26/05/2010**

**Version actuelle 1.2**

**Auteur MY**

Sommaire

[**1. Premières définitions** 3](#_Toc262824559)

[**1.1. Duration Macaulay** 3](#_Toc262824560)

[**1.2. Duration Modified** 3](#_Toc262824561)

[**1.3. Interprétation : duration taux et crédit** 4](#_Toc262824562)

[**1.4. Lien entre duration et DV01 (Discounted value of one basis point)** 5](#_Toc262824563)

[**1.5. Limitations** 5](#_Toc262824564)

[**2. Duration d'une obligation "standard" à coupon fixe** 5](#_Toc262824565)

[**3. Duration d'une obligation flottante** 6](#_Toc262824566)

[**3.1. Duration taux** 6](#_Toc262824567)

[**3.2. Duration crédit** 7](#_Toc262824568)

[**4. Duration d'une obligation fixed-to-float** 7](#_Toc262824569)

[**4.1. Duration taux** 7](#_Toc262824570)

[**4.2. Duration crédit** 7](#_Toc262824571)

[**5. Duration d'une obligation perpétuelle** 8](#_Toc262824572)

[**6. Duration risky** 9](#_Toc262824573)

[**6.1. Méthode de calcul des flux risky** 9](#_Toc262824574)

[**6.2. Interprétation des résultats** 11](#_Toc262824575)

[**7. Duration d'un CDS** 12](#_Toc262824576)

[**7.2. Risky duration crédit** 14](#_Toc262824577)

[**8. Récapitulatif des définitions présentées** 15](#_Toc262824578)

[**9. Bibliographie** 15](#_Toc262824579)

**1. Premières définitions**

**1.1. Duration Macaulay**

* La duration est une moyenne pondérée des instants où les flux sont payés, la pondération appliquée au temps étant la proportion du cash flow tombé au temps dans la valeur présente totale du bond.

et

avec *B :* prix de l'obligation

*y :* rendement actuariel (YTM) de l'obligation

: cash flow au temps i

*n :* nombre de cash flows jusqu'à la maturité

* **Important** : l'actualisation des flux se fait au rendement actuariel (YTM) et non au taux sans risque.
* La duration Macaulay permet de lier facilement le prix d'une obligation avec sa dérivée par rapport au rendement actuariel :
* On peut donc estimer :

**1.2. Duration Modified**

* La modified duration estutilisée lorsque les intérêts sont calculés sur des intervalles de temps, ce qui est presque toujours le cas dans la réalité (fréquences de paiement annuelles ou trimestrielles par exemple)

et

avec *m* : nombre de CF (par an si y annuel)

* Cette expression permet de conserver la relation entre une variation du prix et une variation du rendement actuariel. C'est donc cette duration qui doit être utilisée pour les interprétations de marché.
* **Remarque importante** : dans la suite, nous donnerons toujours les méthodes de calcul de la duration Macaulay. La duration Modified doit en être déduite par la formule ci-dessus.

**1.3. Interprétation : duration taux et crédit**

* La **duration modified** fournit une bonne approximation de la relation entre le changement en % du prix d'une obligation et un changement de son rendement actuariel :
* **C'est une** **mesure de la sensibilité du prix de l'obligation aux variations de rendement actuariel**.
* Bien que le porteur d'une obligation soit soumis à différents risques (voir documentation risques), on considère pour simplifier que le rendement d'une obligation ne rémunère que le risque de taux et le risque de crédit.
* Le risque de crédit : C'est le risque de défaut de l'emprunteur. On le mesure avec le *spread* de CDS qui est la prime à payer pour se prémunir d'un défaut de l'emprunteur (ou la prime que l'on reçoit lorsque l'on vend cette protection). Le prix de l'obligation baisse quand elle augmente.
* Le risque de taux: Si le taux sans risque augmente, il devient plus cher pour une entreprise de s'endetter. Le cash investi dans une obligation achetée avant la hausse des taux empêche l'investisseur de profiter d'opportunités d'investissement plus avantageuses. Cela a donc pour effet de faire baisser le prix de l'obligation. Si le taux sans risque augmente, le rendement actuariel de l'obligation doit nécessairement augmenter d'autant, faute de quoi le risque de crédit est moins bien rémunéré.
* En utilisant la simplification évoquée précédemment et si l'on considère l'absence d'opportunité d'arbitrage, on peut écrire :
* A risque de crédit constant, la duration est donc la sensibilité du prix à un changement du taux sans risque. On peut ainsi estimer que, toutes choses égales par ailleurs, une hausse de 1% des taux d'intérêt induit une baisse de D (en %) sur le prix de l'obligation. C'est ce que nous appelons la **duration taux**.
* De même, à risque de taux constant, la duration est la sensibilité du prix à un changement du risque de crédit. On peut estimer que, toutes choses égales par ailleurs, une hausse de 1% du *spread* de CDS entraîne une baisse de D (en %) sur le prix de l'obligation. C'est ce que nous appelons la **duration crédit**.
* Il peut en effet être nécessaire de séparer la duration en tant que sensibilité du prix à un changement des taux d'intérêt et en tant que sensibilité du prix à un changement du risque de crédit, ces deux notions menant à des résultats différents sur certains types 'instruments.

**Interprétations marché**

Il existe principalement deux interprétations :

* Dans la littérature, la modified duration est une approximation de la variation de prix en % pour une augmentation de 100bp du taux sans risque. C'est ce que nous avons choisi d'appeler la Modified duration taux.
* Un instrument de duration 6 a la même sensibilité à un changement de taux qu'une obligation zéro-coupon de maturité 6 ans (la duration d'un obligation zéro-coupon est sa maturité).C'est par ailleurs la seule interprétation réellement quantifiable que l'on puisse donner pour interpréter la duration en tant que "mesure de temps".

**1.4. Lien entre duration et DV01 (Discounted value of one basis point)**

* Le DV01 est la valeur présente du changement de prix induit par une hausse de 1bp des taux d'intérêt.

avec : Modified duration taux

*P* : prix de l'instrument

**1.5. Limitations**

* La duration est une mesure très approximative de la sensibilité du prix à une variation du risque de taux ou du risque de crédit. En effet, celle-ci ne prend pas en compte la forme de la courbe du prix en fonction du taux sans risque ou en fonction du risque de crédit.

Des mesures plus consistantes sont le rho (ou delta-taux) qui mesure la sensibilité des prix à un changement de taux et le delta-crédit qui mesure la sensibilité des prix à un changement du risque de crédit en tenant compte de la forme des courbes.

* De nombreuses personnes raisonnent encore en duration. Les marchés financiers ayant beaucoup évolué -notamment avec le crédit- cette définition assez ancienne n'est pas forcément consistante avec le risque réel de taux ou de crédit. Toutefois, c'est un ordre de grandeur cohérent.

Il nous a paru opportun de bien comprendre ce que l'on entend par "duration", de la définir très clairement et de montrer ses limites.

**2. Duration d'une obligation "standard" à coupon fixe**

* La duration d'une obligation "standard" à coupon fixe rentre dans le cadre de ce qui a été défini précédemment.
* Il convient juste de remarquer que la duration telle qu'elle a été définie ci-dessus peut être interprétée comme une duration taux ou crédit.

**3. Duration d'une obligation flottante**

* Une obligation flottante verse un coupon dont le montant est fonction d'un taux de référence. Le coupon prend la forme 'Taux sans risque + *spread*', comme par exemple 'Taux EURIBOR 3 Mois +150bp'.
* Le *spread* correspond à l'ensemble des risques auxquels est soumis le porteur de l'obligation.

**3.1. Duration taux**

* Si l'on considère que la duration est une mesure de la sensibilité au taux d'intérêt, la duration d'une obligation flottante doit être très faible puisque son coupon évolue avec la courbe des taux. Le coupon n'est pas ajusté de façon continue au taux de référence mais à des dates dites de *fixing*.
* Ainsi, une obligation flottante est sensible à un changement de taux, mais seulement jusqu'à ce que son coupon soit réajusté sur le taux de référence i.e. jusqu'à la prochaine date de *fixing*.
* Le risque majeur sur une obligation flottante est donc le risque de crédit.
* Reprenons la définition classique de la duration :
* Ici, tout se passe comme si la position était dénouée au prix *clean* actuel en date du prochain fixing, il n'y a donc qu'un flux à considérer :
* Rappelons que le rendement actuariel est le taux tel que l'actualisation des flux futurs soit égale au prix de marché de l'obligation :

.

* Dans le cas où il ne reste qu'un flux, ce flux actualisé est donc égal au prix de l'obligation:

.

* La duration d'une obligation flottante se réduit donc à la durée restante jusqu'au prochain fixing:

**3.2. Duration crédit**

* On considère ici la sensibilité du prix d'une obligation flottante à une variation du risque de crédit.
* Les flux versés par une obligation flottante n'étant pas ajustés selon le risque de crédit comme ils le sont sur le taux sans risque, celle-ci est sensible au risque de crédit de la même façon qu'une obligation à coupon fixe. On peut utiliser le fait que la duration est la sensibilité au risque de crédit (à risque de taux constant).
* Le duration crédit d'une obligation flottante est donc :

.

* La jambe variable d'un coupon étant inconnue avant sa date de fixing, on utilise les taux *forward* pour avoir une idée des coupons à venir.

Par exemple, si le coupon de l'obligation est 'E3M+150bp', on peut dire que le coupon dans 6 mois sera '(taux *forward* 6 mois de l'E3M) + 150bp'.

**4. Duration d'une obligation fixed-to-float**

* Pour le calcul des durations d'une obligation *fixed-to-float*, les flux fixes sont traités comme ceux d'une obligation à coupon fixe, les flux flottants sont traités comme ceux d'une obligation à coupon flottant.

**4.1. Duration taux**

* De la même façon qu'une obligation flottante, une obligation *fixed-to-float* est sensible aux taux d'intérêts jusqu'à ce que son coupon soit réajusté sur le taux de référence i.e. jusqu'à la prochaine date de *fixing*.
* Les flux à prendre en compte pour le calcul de la duration taux sont donc les flux fixes (si il en reste) puisque la date de passage du coupon fixe vers le coupon flottant correspond à la date de prochain *fixing*.

Si en revanche les flux restants sont tous flottants, la duration taux se réduit à la durée restante jusqu'au prochain fixing, comme pour les obligations flottantes.

**4.2. Duration crédit**

* Une obligation *fixed-to-float* est sensible à une variation du risque de crédit de la même façon qu'une obligation à coupon fixe, avec les flux jusqu'à maturité. Comme pour une obligation flottante, les coupons flottants sont estimés en utilisant les taux forward.

**5. Duration d'une obligation perpétuelle**

* Une obligation perpétuelle a une échéance indéterminée. Le capital est remboursé seulement en cas de rachat par l'émetteur, à des dates de sortie programmées (*calls*). Elle verse donc théoriquement un coupon à perpétuité.
* En pratique, on fixe la maturité des obligations perpétuelles à une date lointaine (40 ans plus tard par exemple) : plus on s'éloigne, plus le facteur d'actualisation est faible. Considérer que l'obligation mature dans 40 ans revient à négliger les flux postérieurs à cette maturité, ce qui est acceptable car l'actualisation des flux très éloignés est quasi-nulle. Des simulations nous donnent un changement de rendement à 10-3.
* Avec cette approximation, l'obligation perpétuelle est assimilable à une obligation classique dans le calcul de ses durations taux et crédit.
* On dispose également de résultats théoriques quant à la duration d'une obligation perpétuelle. Comme le flux est le même à l'infini (c'est le coupon), le prix de l'obligation s'écrit :

(pour un coupon annuel)

On trouve alors une expression simplifiée de la duration modified :

d'où

**6. Duration risky**

**6.1. Méthode de calcul des flux risky**

* La *risky* duration est la sensibilité du prix à un changement du rendement actuariel, mais en considérant les flux dits *risky* (les flux pondérés par la probabilité de défaut de l'émetteur et par le taux de *recovery*). Ces flux *risky* correspondent à l'espérance des *cash-flows* .

Pour une obligation:

avec : ième flux

: probabilité de survie au temps du ième CF

: probabilité de défaut pendant la période du ième CF

Recovery Rate : la norme marché est 40% pour une *senior*

Si il n'y a pas de défaut pendant la ième période, le flux reçu est le flux total.

Si il y a défaut pendant la ième période, le détenteur de l'obligation reçoit un pourcentage du nominal égal au taux de recovery. En revanche, aucun coupon n'est payé: même si l'obligation fait défaut en fin de période de coupon, l'*accrued* n'est pas payé (contrairement à un contrat CDS) .

Pour simplifier, on peut considérer que tous les flux sont perçus en fin de période de coupon: même si l'on considère que les évènement de défaut interviennent en milieu de période, en pratique la recovery est un évènement très incertain et les flux en cas de défaut sont touchés à un temps très aléatoire.

* Pour une obligation, rappelons que :
* Il est donc facile de déterminer le *spread* de CDS implicite de l'émetteur à partir du rendement actuariel de l'obligation et du taux sans risque.
* Le spread de CDS contient l'information relative au risque de crédit de l'émetteur, c'est ce qui va nous permettre de déterminer sa probabilité de défaut implicite.

|  |
| --- |
| Comment calcule-t-on la probabilité de défaut implicite d'un émetteur?   * Le calcul de la probabilité de défaut se fait à partir de l'espérance des flux d'un vendeur de protection i.e. à partir des flux d'un contrat CDS. * Notons d la probabilité de défaut par an et la probabilité de survie par an.   La probabilité de défaut l'année i est:  La probabilité de survie l'année i est:  avec et .  Attention à ne pas confondre la probabilité de défaut pendant l'année i avec la probabilité que l'émetteur ait fait défaut l'année i:  La relation liant à est donc:   * Il s'agit alors de calculer la valeur présente des flux que le vendeur de protection espère recevoir (le payement de la prime en cas de survie et de l'*accrued* en cas de défaut) ainsi que la valeur présente des flux qu'il espère livrer (le remboursement dû en cas de défaut). On note r le taux sans risque. * si on suppose que les évènements de défaut interviennent en milieu d'année * La probabilité de défaut implicite d est alors la valeur qui égalise la valeur présente totale des flux que le vendeur de protection espère recevoir avec la valeur présente totale des flux qu'il espère livrer. A tout temps i, on doit alors avoir : * En pratique, on approxime la probabilité de survie l'année i par: .   La probabilité de défaut l'année i en est déduite par les formules ci-dessus.  Cette approximation fournit des résultats proches à 10-2. |

* Le calcul de la probabilité de défaut implicite permet de déterminer les flux espérés.
* La *risky* duration est alors :

avec *D :* duration Macaulay risky

*y :* rendement actuariel (YTM)

: espérance du ième flux

*n :* nombre de flux jusqu'à la maturité

*t* **:** somme des valeurs présentes des flux espérés

**Récapitulatif des calculs de duration risky**

* La risky duration d'une **obligation à coupon fixe** est calculée de la même façon que la duration classique, à ceci près que les flux utilisés sont les flux *risky* tels qu'ils ont été définis précédemment.
* Pour une **obligation flottante**, la *risky* duration taux est la sensibilité du prix au changement de taux d'intérêt jusqu'au prochain fixing, calculée avec les flux *risky*.

Nous ne savons pas comment prendre en compte le fait que les flux *risky* comportent une partie déterministe (le nominal recouvré en cas de défaut) et une partie non déterministe (le coupon flottant). En attendant de trouver un modèle convenable, nous considérerons que la *risky* duration taux d'une obligation flottante est égale à sa duration taux.

La *risky* duration crédit est calculée de la même façon que la duration crédit mais avec les flux *risky.*

* Pour une **obligation perpétuelle**, la *risky* duration est calculée de la même façon que la duration mais avec les flux *risky*.

**6.2. Interprétation des résultats**

* Quand le *spread* de CDS augmente (et donc la probabilité de défaut), les temps de tombée des flux restent inchangés mais l'espérance des flux diminue. En conséquence, la duration diminue. D'une certaine façon, on peut dire que l'on est moins sensible à l'instant où les flux tomberont puisqu'on en touchera peu.
* Quand le *recovery* *rate* augmente, la duration diminue. En fait, à *spread* de CDS égal, si on a une meilleure *recovery*, c'est que la probabilité de défaut est plus grande (sinon il y a arbitrage) ce qui implique que la duration sera plus petite.
* Il n'est pas pertinent regarder l'impact d'une augmentation/diminution de la *recovery* seule. Si l'on a une *recovery* de 100%, le *spread* de CDS doit baisser fortement (pas de risque donc pas de prime !).
* De même quand la *recovery* diminue, le *spread* doit augmenter.
* Le problème est que le modèle présenté ne lie pas le *spread* au *recovery* rate. Rappelons que la *recovery* est le facteur le plus délicat à estimer, et le plus aléatoire. La norme marché l'estime la plupart du temps à 40% pour une émission *senior* (quasiment 100% pour des first lien).
* La question pertinente est donc de savoir ce qu'il se passe si la *recovery* augmente et que le *spread* diminue en conséquence (i.e. à probabilité de défaut implicite constante). Dans ce cas, la duration reste grossièrement inchangée.

**7. Duration d'un CDS**

* Lorsque l'on évalue le prix d'un CDS, on tient compte de la probabilité de défaut et de la *recovery* pour déterminer l'espérance des flux, i.e. les flux *risky*. Le prix du CDS est en fait la valeur présente de ces flux espérés.
* Les modèles de valorisation utilisés couramment par le marché (*pricer* JP Morgan, ISDA Standard que l'on trouve sur le CDSW de Bloomberg) utilisent les flux *risky* du CDS. On considère donc que la seule duration valable est la duration *risky*. Dans un souci de facilité d'agrégation, on considère que la duration non *risky* d'un CDS est la même que sa duration *risky*.
* Les flux risky correspondent à l'espérance des flux. Plaçons-nous dans le cas du vendeur de protection (les flux de l'acheteur de protection sont symétriques).

- S'il n'y a pas de défaut pendant la ième période, le flux reçu est le paiement de la prime correspondant à la ième période,

- S'il y a un défaut pendant la ième période, on considère qu'il a lieu en milieu de période. Dans le cas d'un contrat de CDS, le coupon *accrued* est payé: le vendeur de protection reçoit donc la moitié de la prime correspondant à la ième période. En revanche, il doit livrer le nominal non remboursé à l'acheteur de protection, soit 1-*Recovery*.

Le ième flux risky du CDS est donc:

avec : ième prime

: probabilité de survie au temps du ième CF

: probabilité de défaut pendant la période du ième CF

Recovery Rate : la norme marché est 40% pour une *senior*

* Comme pour les flux risky d'une obligation, on considère que tous les flux sont perçus en fin de période: même si on considère que les évènement de défaut interviennent en milieu de période, en pratique la recovery est un évènement très incertain et les flux en cas de défaut sont touchés à un temps très aléatoire.
* Remarquons que si le spread courant du CDS est le même que le spread du contrat, les flux *risky* sont nuls. En effet, la probabilité de défaut courante est la probabilité telle que la valeur présente des flux qu'un vendeur espère recevoir égale la valeur présente des flux qu'il espère livrer (avec le spread courant). Si le spread courant égale le spread du contrat, la probabilité de défaut est telle que les flux espérés du contrat sont nuls.
* La duration étant la sensibilité du prix à un changement du rendement actuariel, il convient de définir le rendement actuariel d'un CDS.

|  |
| --- |
| Comment calcule-t-on le rendement actuariel d'un CDS?   * Comme expliqué précédemment, pour une obligation classique, une bonne approximation du YTM est: * **Dans le cas d'un CDS**, qui est un instrument synthétique, il n'y a pas de cash "bloqué". Le CDS n'est donc pas sensible à un changement du taux sans risque (si le taux sans risque augmente, l'investisseur ne perd pas d'opportunité d'investissement plus intéressante). Le YTM du CDS ne rémunère donc pas le risque de taux, il ne rémunère que le risque de crédit: |

**7.1. Risky duration taux**

* Le rendement actuariel d'un CDS ne rémunérant pas le risque de taux, il est inexact de parler de duration taux pour un CDS. Cependant, afin que l'agrégation soit possible sur un portefeuille contenant des obligations et des CDS, nous définissons une duration taux qui est une approximation de la sensibilité du prix du CDS à un changement des taux d'intérêt.
* Comme expliqué précédemment, il n'y a pas de cash bloqué dans un contrat CDS. L'investisseur ne perd donc pas d'opportunité d'investissement plus avantageuse si les taux d'intérêt augmentent. **Cependant, quand la valeur de marché du CDS change, il y a une plus ou moins value latente pour l'investisseur.** Cette plus ou moins value latente est sensible à un changement des taux d'intérêt.
* Nous définissons la duration taux d'un CDS comme suit :

avec D *:* duration Macaulay risky du CDS

, prix du CDS

*r :* taux sans risque

La dérivée du prix par rapport au taux sans risque est ici calculée en utilisant la méthode des différences finies à l'ordre 1.

**7.2. Risky duration crédit**

* Le rendement actuariel d'un CDS étant égal à son *spread* de crédit, la définition classique de la duration comme sensibilité du prix à un changement du rendement actuariel est en fait sa duration crédit.
* Il s'agit donc de calculer la probabilité de défaut implicite à partir du *spread* de CDS: La probabilité de défaut est la probabilité qui égalise l'espérance des flux que le vendeur de protection espère recevoir avec l'espérance des flux qu'il espère livrer. (voir encadré *Comment calcule-t-on la probabilité de défaut implicite d'un émetteur?*)
* La duration est alors la sensibilité de la valeur présente des flux espérés (flux *risky*) à un changement de rendement actuariel (et donc de *spread* de CDS).

avec *D :* duration Macaulay *risky* du CDS

*y :* rendement actuariel du CDS i.e. *spread* de CDS

* A noter que dans le cadre du calcul de la duration, les flux *risky* doivent être actualisés au rendement actuariel du CDS. En revanche, tout ce qui a trait au calcul du prix du CDS (probabilité de défaut notamment) est calculé avec une actualisation au taux sans-risque.

**8. Récapitulatif des définitions présentées**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Duration taux | Duration crédit | Risky duration taux | Risky duration crédit |
| Obligation à coupon fixe | Définition classique | Identique à la duration taux | Définition classique avec flux risky | Identique à risky duration taux |
| Obligation flottante | Temps jusqu'au prochain fixing | Définition classique avec tous les coupons fixés (selon les taux *forward*) jusqu'à maturité | Identique à la duration taux | Définition classique avec flux risky. Les coupons sont fixés (selon les taux *forward*)jusqu'à maturité |
| Obligation fixed-to-float | - Si il reste des flux fixes: Calcul classique avec les flux fixes jusqu'au 1er fixing.  - Si il ne reste plus de flux fixes: temps jusqu'au prochain fixing. | Définition classique avec tous les coupons flottants fixés (selon les taux *forward*) jusqu'à maturité | Identique à la duration taux | Définition classique avec flux risky. Les coupons flottants sont fixés (selon les taux *forward*)jusqu'à maturité |
| Obligation perpétuelle | Mêmes définitions que pour une obligation non perpétuelle (coupon fixe ou coupon flottant) avec les 40 premiers flux seulement. | | | |
| CDS | Risky duration taux | Risky duration crédit | Sensibilité de la +/- value latente à un changement de taux | Définition classique avec les flux espérés par les acteurs du contrat CDS |

**9. Bibliographie**

* CFA program curriculum, Volume 5
* Options, futures and other derivatives, John C.Hull (pages 528-532)