

Construction d'Iso-surfaces sous contraintes de Delaunay Codage par squelettes et Filtrage

Dominique ATTALI¹, Jacques-Olivier LACHAUD²

¹Laboratoire TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525

Institut Albert Bonniot, Domaine de la Merci, 38706 la Tronche Cedex, France

²University of Toronto, Computer Science Dpt, Visual Modeling Group

10 King's College Road, Sandford Fleming Bldg, Toronto, Ontario, M5S 3G4, CANADA

Dominique.Attali@imag.fr, lachaud@cs.toronto.edu

Résumé — Les *iso-surfaces* calculées à l'aide de l'algorithme de marching-cubes fournissent une triangulation des objets présents dans une image volumétrique. Dans cet article, nous construisons un nouveau type d'iso-surfaces ayant la propriété d'être incluses dans le graphe de Delaunay de leurs sommets. Pour chaque 8-cube, un ensemble de boucles est calculé dépendant uniquement de la connexité choisie pour les voxels intérieurs et extérieurs. Puis, chaque boucle est triangulée selon sa géométrie. Nous montrons que cette triangulation sous contrainte de Delaunay est toujours possible, et ceci même pour des voxels anisotropes. L'inclusion de l'iso-surface dans la triangulation de Delaunay a des conséquences importantes. Elle permet de déduire un modèle volumique des objets formés de tétraèdres. Elle permet également d'accéder au squelette de l'objet. Des applications au calcul du squelette sont présentées.

Abstract — *Iso-surfaces* computed with the marching-cubes algorithm provide a triangulation of objects in a volumetric image. In this paper, We construct a new type of iso-surfaces having the property to be included in the Delaunay graph of its vertices. Inside each 8-cube, a set of loops is first computed depending only on the connectedness of inner and outer voxels. Then, a triangulation of those loops is derived, depending on their geometry. We prove that such a triangulation always exists, even for anisotropic voxels. The inclusion of the iso-surface in the Delaunay triangulation has important consequences. It allows the construction of a volumic model for objects. It makes it possible to compute the skeleton of the objects. Some results to the skeleton computation are presented.

1 Introduction

Nous assistons à l'heure actuelle à une multiplication des *images volumétriques* provenant de diverses modalités d'acquisition (IRM, scanners, microscopie confocale). La *visualisation* de ces données passe par le calcul et l'affichage de surfaces particulières dans l'image comme les *surfaces digitales* ou les *iso-surfaces*.

Les iso-surfaces sont des surfaces triangulées de \mathcal{R}^3 approchant la frontière des objets présents dans une image. Elles présentent de bonnes propriétés topologiques et géométriques : ce sont des 2-variétés de \mathcal{R}^3 ; contrairement aux surfaces digitales, elles ne présentent pas d'aspect en marches d'escalier.

Malheureusement, une iso-surface fournit une *représentation surfacique* des objets qui peut s'avérer insuffisante dans un contexte autre que la visualisation. Par exemple, pour modéliser la déformation des objets par la méthode des éléments finis, il est nécessaire d'avoir une partition de l'intérieur des objets en briques de base jointives (cubes ou tétraèdres), autrement dit d'avoir une *représentation volumique*. De même, pour extraire des paramètres comme l'épaisseur ou la longueur, la *représentation par squelette* est mieux adaptée.

Dans cet article, à la différence des méthodes existantes, nous construisons des iso-surfaces incluses dans la triangu-

lation de Delaunay de leurs sommets. Cette construction se fait localement et reste valable même si le volume est anisotrope. Son coût est en $O(N^3)$, où N est la taille du volume et ne dépend donc pas du nombre de sommets de l'iso-surface. Nous montrons comment exploiter ce résultat pour passer facilement d'une représentation surfacique par iso-surfaces à une représentation volumique ou par squelette.

1.1 Rappels de géométrie algorithmique

Nous commençons par quelques rappels de géométrie algorithmique. Par la suite, d désigne la dimension de l'espace considéré. Si non précisé, d vaut 3.

Grphe de Delaunay Soit $E \in \mathcal{R}^d$ un ensemble fini de points en position générale. La *triangulation de Delaunay* est l'ensemble des triangles en 2D et des tétraèdres en 3D dont la boule circonscrite ne contient aucun point de E dans son intérieur. Nous appelons graphe de Delaunay et notons $\text{Del}(E)$ le sous-complexe cellulaire de la triangulation de Delaunay formé des éléments de dimension $d - 1$.

Enveloppe convexe L'enveloppe convexe, notée $\text{Hull}(E)$ d'un ensemble de points $E \in \mathcal{R}^d$ est le plus petit ensemble convexe contenant E . Si E est un ensemble fini, l'enve-

loppe convexe est un polytope dont la frontière est incluse dans le grpahe de Delaunay de E .

Graphe de Voronoï Le *diagramme de Voronoï* d'un ensemble de points de E est une partition de l'espace en régions appelées *régions de Voronoï*. La région de Voronoï du point $p \in E$ est l'ensemble des points de \mathcal{R}^d plus proche de p que de tout autre point de E . Le diagramme de Voronoï est le dual de la triangulation de Delaunay. Nous appelons graphe de Voronoï et notons $\text{Vor}(E)$ le sous-complexe cellulaire du diagramme de Voronoï formé des éléments de dimension $d - 1$.

2 Iso-surface

2.1 Définition

Une *image volumétrique* associe à un sous-ensemble des points discrets \mathcal{Z}^3 une valeur appelée *niveau de gris*. Les points discrets de l'image sont encore appelés des *voxels*.

Une image volumétrique peut être considérée comme le résultat de l'échantillonnage d'un champ scalaire continu h en les points d'une grille discrète. L'iso-potentiel de valeur C (i.e. $\{M \in \mathcal{R}^3, h(M) = C\}$) définit une *surface* dans l'espace. Par la suite, on appelle *iso-surface* toute surface triangulée approchant l'iso-potentielle d'iso-valeur C . Le choix de C permet à l'utilisateur de sélectionner un objet particulier dans le volume.

2.2 Algorithme de marching-cubes

L'algorithme le plus répandu pour construire les iso-surfaces dans une image est certainement le *marching-cubes* [12, 17]. Son principe est de balayer l'image par blocs de huit voxels, appelés *8-cubes* et d'extraire pour chacun de ces blocs un ensemble de triangles qui sépare les *voxels intérieurs* ($h(v) \geq C$) des *voxels extérieurs* ($h(v) < C$).

Un sommet de l'iso-surface est défini comme un point dans le segment ouvert de la grille discrète formé par un voxel intérieur et un voxel extérieur adjacent. La position du sommet sur l'arête dépend linéairement des valeurs de h aux extrémités de l'arête. Différents ensembles de triangles peuvent être construits sur les sommets d'un 8-cube. La manière dont ce choix est effectuée influence la géométrie et la topologie de l'iso-surface triangulée, donc l'aspect et la qualité de l'approximation.

Le marching-cubes [12] propose un choix arbitraire qui ne dépend que de la valeur intérieure ou extérieure des voxels dans un 8-cube. Il existe 256 configurations de 8-cubes. L'extraction des triangles au sein de chaque bloc peut être optimisée en pré-calculant une table de configurations. D'autres auteurs raffinent ce choix en exploitant la valeur moyenne du champ h au milieu de chaque face [17], en effectuant une interpolation bi- ou tri-linéaire [15], ou en extrayant l'information de gradient [7]. Ces définitions ne prennent pas en compte la géométrie des sommets, ce qui explique que l'iso-surface obtenue ne coïncide pas généralement avec la triangulation de Delaunay.

2.3 Méthode de construction proposée

Nous nous basons sur la définition d'iso-surface proposée dans [9], qui exploite à la fois la connexité digitale des voxels — 6-, 18-, ou 26-connexité (e.g., cf.[8]) — et la position des sommets sur la grille. Sur les faces d'un 8-cube, les arêtes sont construites de manière déterministe en respectant les connexités choisies pour les voxels intérieurs et extérieurs; l'ensemble de ces arêtes forment des boucles (cf. Figure 2). La triangulation de ces boucles dépend ensuite de la géométrie des sommets, car les arêtes et les triangles sont construits sur l'*enveloppe convexe* des sommets et des voxels intérieurs (resp. extérieurs), si les voxels extérieurs (resp. intérieurs) suivent la 6-connexité. La Figure 3 illustre cette construction.

2.4 Contrainte de Delaunay

Le principal résultat de cet article est de montrer qu'une telle iso-surface a la propriété d'être incluse dans la triangulation de Delaunay de ses sommets. Pour établir ce résultat, nous montrons dans un premier temps que le calcul du graphe de Delaunay à l'intérieur de chaque 8-cube reste local. Par la suite, S_C désigne une iso-surface, E_C l'ensemble de ses sommets.

Théorème 1 Notons $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ les k sommets de l'iso-surface se trouvant sur les arêtes d'un même 8-cube. Alors

$$\partial \text{Hull}(\{e_1, e_2, \dots, e_k\}) \subset \text{Del}(\{e_1, e_2, \dots, e_k\}) \subset \text{Del}(E)$$

Démonstration. La première inclusion découle directement des propriétés de l'enveloppe convexe. La démonstration de la seconde inclusion repose sur le calcul de la sphère $B_{e_i e_j}$ de diamètre $e_i e_j$ avec la grille discrète. Ce calcul s'effectue par des considérations purement géométriques en recherchant les points v pour lesquels les droites (ve_i) et (ve_j) sont orthogonales. Soit $P_{e_i e_j}$ le plus petit parallépipède droit contenant les points e_i et e_j . Les sommets de $P_{e_i e_j}$ se trouvent sur la sphère $B_{e_i e_j}$. Quelle que soit la position des sommets e_i et e_j sur les arêtes du 8-cube considéré, le parallépipède $P_{e_i e_j}$ reste inclus dans ce 8-cube (voir figure 1). Par conséquent, la sphère $B_{e_i e_j}$ n'intersecte aucune arête des autres 8-cubes. Elle ne contient donc aucun points de $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ dans son intérieur, ce qui permet de conclure. \square

Théorème 2 Si S_C est une iso-surface de sommets E_C , alors $S_C \subset \text{Del}(E_C)$.

Démonstration. En effet, d'après construction, toute arête de l'iso-surface fait partie de l'enveloppe convexe des sommets du 8-cube auquel elle appartient. Le théorème 1 permet de conclure. \square

3 Calcul du squelette

3.1 Définition

Le squelette est une représentation des objets utilisée dans le domaine de l'analyse d'images pour la reconnaissance et la description de formes. La notion de squelette a été introduite pour la première fois par Blum [2] sous la

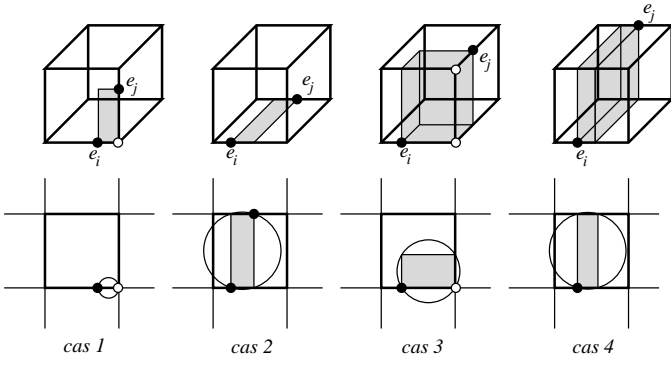


FIG. 1: La sphère de diamètre $e_i e_j$ intersecte le 8-cube selon 4 cas de figures qui correspondent aux différentes positions des sommets e_i et e_j sur les arêtes du 8-cube. Le plus petit parallélépipède droit contenant les points e_i et e_j a été grisé. Il est toujours contenu dans le 8-cube. La seconde ligne présente l'intersection de la sphère, du parallélépipède et du 8-cube avec le plan $\{z = 0\}$.

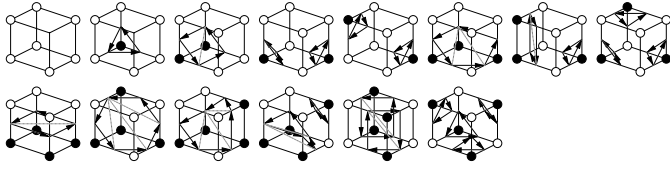


FIG. 2: Exemples de configurations de triangles. Les arêtes en traits continus ne sont déterminés que par les connexités choisies pour les voxels, les arêtes en traits pointillés dépendent de la géométrie des sommets.

terminologie d'*axe médian*. Le squelette d'un objet peut être défini comme l'ensemble des centres de ses boules maximales [6] (voir figure 4). Une boule incluse dans un objet est dite maximale s'il n'existe pas d'autres boules incluses dans l'objet et la contenant strictement. Remarquons que cette définition reste valable quelle que soit la dimension de l'espace considéré.

Lorsque défini dans l'espace continu \mathcal{R}^d , le squelette possède des propriétés remarquables [5]. Le squelette est un graphe formé de points et de courbes en 2D et de points, de courbes et de morceaux de surfaces en 3D. Il possède le même type d'homotopie que l'objet. De plus, si chaque point du squelette a été étiqueté par le rayon de la boule maximale centré en ce point, le squelette fournit un codage réversible de l'objet.

Le calcul du squelette a fait l'objet de nombreux travaux aussi bien dans l'espace discret que dans l'espace continu.

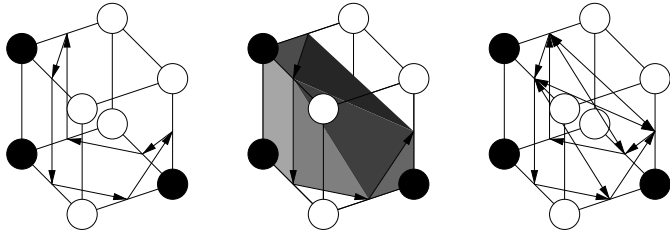


FIG. 3: Construction des triangles sur l'enveloppe convexe des sommets et des voxels intérieurs.

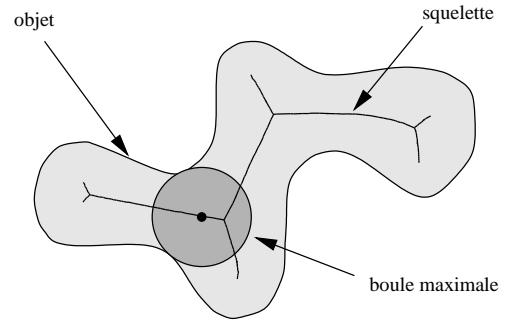


FIG. 4: Squelette

Dans l'espace discret, de nombreux algorithmes ont été proposés qui peuvent être partagés en deux familles :

- les algorithmes fondés sur un amincissement homotopique qui préservent l'homotopie [10, 13, 14, 11],
- les algorithmes utilisant le calcul de la carte de distance et qui assure la réversibilité [4, 16].

Un inconvénient des approches discrètes est la difficulté d'obtenir un squelette discret, c'est-à-dire un ensemble de voxels qui soit à la fois d'épaisseur 1, réversible et homotopique. Pour certains objets binaires, un tel ensemble de voxels n'existe simplement pas.

Dans cet article, nous utiliserons une approche continue calculant le squelette à l'aide du graphe de Voronoï des points frontières. Une telle approche trouve sa légitimité dans la relation suivante :

$$\text{Sk}(\mathcal{R}^d \setminus E) = \text{Vor}(E)$$

3.2 Extraction à partir des iso-surfaces

Rappelons que le graphe de Voronoï $\text{Vor}(E)$ d'un ensemble de points E est le dual du graphe de Delaunay $\text{Del}(E)$. Nous utilisons ici l'approche continue proposée par Boissonnat [3] pour calculer le squelette. Nous avons vu dans la section précédente que les iso-surfaces étaient incluses dans le graphe de Delaunay de leurs points frontières. Les iso-surfaces étant des 2-variétés de \mathcal{R}^3 [9], elles séparent l'espace en deux composantes disjointes : un *intérieur* et un *extérieur*. Ainsi, d'après [3], il est possible de distinguer deux types de tétraèdres de Delaunay, les tétraèdres inclus dans l'intérieur de l'iso-surface et les tétraèdres inclus dans son complémentaire. Nous définissons le squelette comme le dual des éléments de Delaunay (tétraèdre, triangles ou arêtes) intérieurs. Le squelette ainsi calculé est formé de polygones, d'arêtes et de sommets qui définissent des morceaux de surfaces.

Différents résultats sont présentés figure 5. Le squelette dérivé du graphe de Voronoï est difficile à interpréter directement, car très sensible au bruit sur la frontière de l'objet. Son calcul doit obligatoirement être suivi d'une phase de filtrage afin de garder les branches réellement significatives. Nous avons utilisé pour cela une méthode de filtrage du squelette étendant les résultats de [1] à l'espace 3D.

Selon la connexité choisie pour les voxels intérieurs et extérieurs, des iso-surfaces différentes peuvent être obtenus pour le même volume et le même seuil C . Nous avons

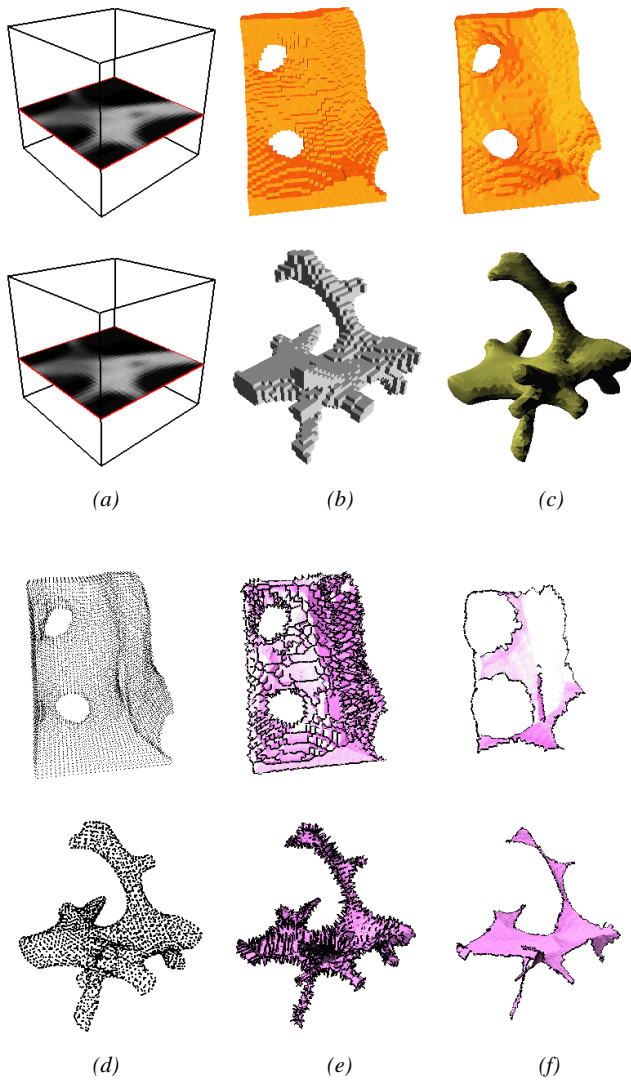


FIG. 5: (a) Coupe dans une image volumétrique. (b) Surface digitale. (c) Iso-surface S . (d) Sommets E de l'iso-surface. (e) Squelette extrait du graphe de Voronoï de E . (f) Squelette filtré.

utilisé le couple de connexité (6,18) afin de minimiser la constante d'Euler de l'iso-surface et le nombre de trou dans l'objet. Le dernier point est important pour augmenter l'efficacité de l'étape de simplification.

On peut remarquer l'aspect lisse des morceaux de surface formant le squelette filtré. Un tel aspect est particulièrement difficile à obtenir avec les approches discrètes, dû aux problèmes posés par la discrétisation.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons construit un nouveau type d'iso-surface et nous avons montré son inclusion dans le graphe de Delaunay de ses sommets. La démonstration de cette propriété utilise des arguments purement géométriques et ne dépend pas de la taille des voxels. La construction reste ainsi valable pour des volumes anisotropes. Les iso-surfaces ont été utilisées pour calculer le squelette des

objets. Des travaux futurs viseront à utiliser le squelette pour extraire des paramètres comme l'épaisseur ou la longueur sur les objets.

Remerciements

Jacques-Olivier Lachaud a réalisé ce travail grâce à une bourse Lavoisier du Ministère des Affaires Etrangères.

Références

- [1] D. Attali and A. Montanvert. Modeling noise for a better simplification of skeletons. In *International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 13–16, Lausanne, Switzerland, September 1996.
- [2] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, Cambridge, MA, 1967. M.I.T. Press.
- [3] J. D. Boissonnat. Shape reconstruction from planar cross sections. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 44:1–29, 1988.
- [4] G. Borgefors. Centres of maximal disks in the 5-7-11 distance transform. In *Proc. of the 8th Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 105–111, Tromsø, Norway, 1993.
- [5] J. W. Brandt. Convergence and continuity criteria for discrete approximations of the continuous planar skeletons. *CVGIP: Image Understanding*, 59(1):116–124, 1994.
- [6] L. Calabi and W.E. Harnett. Shape recognition, prairie fires, convex deficiencies and skeletons. Technical Report Scientific Report No. 1, Parke Mathematical Laboratories Inc., Carlisle, MA, February 1966.
- [7] A. Van Gelder and J. Wilhelms. Topological Considerations in Isosurface Generation. *ACM Transactions on Graphics*, 13(4):337–375, October 1994.
- [8] T.Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital Topology: Introduction and Survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(3):357–393, December 1989.
- [9] J.-O. Lachaud. *Extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles : approche discrète et approche par modèle déformable*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1998.
- [10] L. Lam, S.-W. Lee, and C. Y. Suen. Thinning methodologies - a comprehensive survey. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(9):869–885, September 1992.
- [11] Ta-Chih Lee and Rangasami L. Kashyap. Building skeleton models via 3-d medial surface/axis thinning algorithms. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 56(6):462–478, November 1994.
- [12] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, 21(4):163–169, July 1987.
- [13] G. Malandain and G. Bertrand. Fast characterization of 3D simple points. In *11th ICPR*, pages 232–235, 1992.
- [14] S. Miguet and V. Marion-Poty. A new 2-D and 3-D thinning algorithm based on successive border generations. In *4th Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 195–206, Grenoble, September 1994.
- [15] B.K. Natarajan. On generating topologically consistent isosurfaces from uniform samples. *The Visual Computer*, 11(1):52–62, 1994.
- [16] E. Thiel. *Les distances de chanfrein en analyse d'images : Fondements et Applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1994.
- [17] G. Wyvill, C. McPheeters, and B. Wyvill. Data Structures for Soft Objects. *The Visual Computer*, 2(4):227–234, August 1986.