Monopolist With Unknown Demand

a2010020 足立幸大

2024 年 10 月 10 日

1 問題設定

A monopolist faces demand $y = f(x, \omega) = \phi_0(x) + \omega$ where $x \in \mathbb{X}$ is the price chosen and ω is a mean-zero shock with distribution $p \in \Delta(\Omega)$.

- The monopolist observes sales y, but not the shock.
- No signals in this game.
- Payoff function is $\pi(x, y) = xy$ (so no costs).
- The monopolist's uncertainty about p and f is described by a parametric model f_θ, p_θ, where $y = f_\theta(x, \omega) = a - bx + \omega$ is the subjective demand function, $\theta = (a, b) \in \Theta$ is a parameter vector, and
- $\omega \sim N(0, 1)$ (i.e., p_θ is a standard normal for all $\theta \in \Theta$).
- Let $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \mathbb{X}}$ denote a strategy, where σ_x is the Probability of choosing $x \in \mathbb{X}$.
- Denote objective distribution function by $Q_0(\cdot \mid x)$ which is a normal density with mean $\phi_0(x)$ and unit variance.
- Subjective Distribution function $Q_\theta(\cdot \mid x)$ is a normal density with mean $\phi_\theta(x) = a - bx$ and unit variance. So

$$K(\sigma, \theta) = \sum_{x \in \mathbb{X}} \sigma_x \frac{1}{2} \left(\phi_0(x) - \phi_\theta(x)\right)^2$$

For concreteness,

- Let $\mathbb{X} = \{2, 10\}, \phi_0(2) = 34$, and $\phi_0(10) = 2$.
- Assume $\Theta = [33, 40] \times [3, 3.5]$.
- Notice that perfect is $\phi_{\theta^0}(x) = \phi_0(x)$ for all $x \in \mathbb{X}$ then implies $\theta^0 = \left(a^0, b^0\right) = (42, 4) \notin \Theta$ and so misspecified.

1.1 条件を確認

wKLD

$$\begin{aligned} K(\sigma, \theta) &= \sum_{x \in \mathbb{X}} \sigma_x \frac{1}{2} \left(\phi_0(x) - \phi_\theta(x)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \{\sigma_2 (34 - a + 2b)^2 + \sigma_{10} (2 - a + 10b)^2\} \end{aligned}$$

F.O.C of a

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(\sigma, \theta)}{\partial a} &= \sum_{x \in \mathbb{X}} \sigma_x \left(\phi_0(x) - \phi_\theta(x)\right) \\ &= \sigma_2 (34 - a + 2b) + \sigma_{10} (2 - a + 10b) \end{aligned}$$

F.O.C of b

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(\sigma, \theta)}{\partial b} &= \sum_{x \in \mathbb{X}} \sigma_x \left(\phi_0(x) - \phi_\theta(x)\right) x \\ &= \sigma_2 (34 - a + 2b) \cdot 2 + \sigma_{10} (2 - a + 10b) \cdot 10 \end{aligned}$$

indifferent payoff (Line) Remember $\phi_\theta(x) = a - bx$ To find parameters that give indifferent payoff:

$$\begin{aligned} \phi_\theta(2) \times 2 = 2a - 4b = \phi_\theta(10) \times 10 = 10a - 100b \\ \rightarrow a = 12b \end{aligned}$$

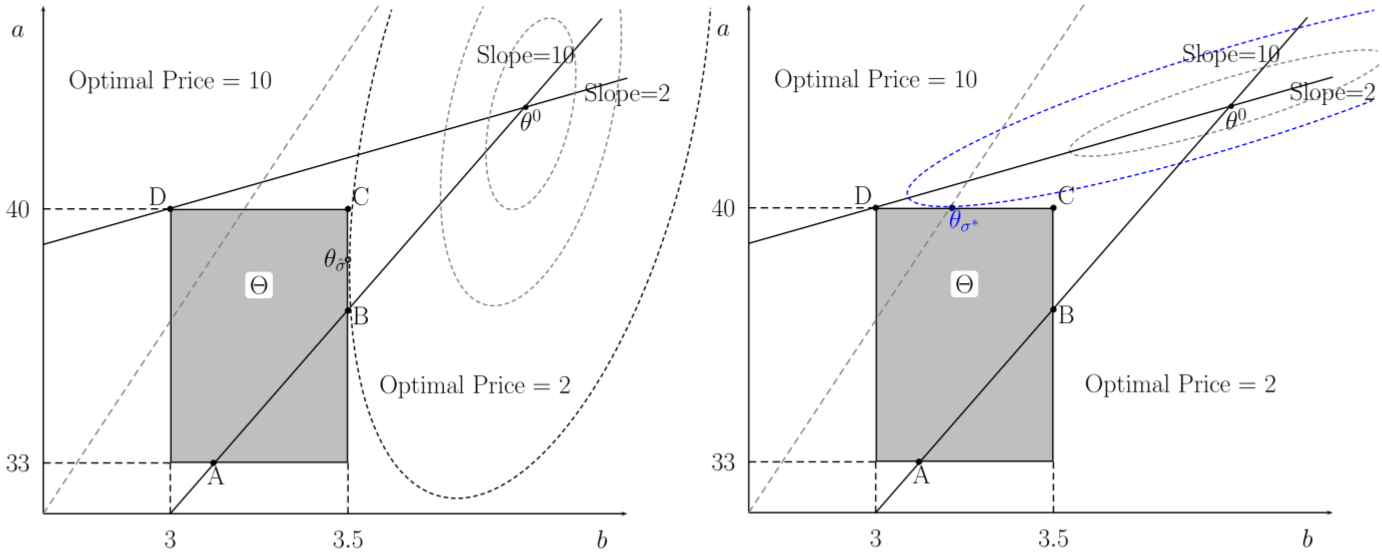

図 1 Monopolist with misspecified demand function. Left panel: The parameter value that minimizes the wKLD function given strategy $\hat{\sigma}$ is $\theta_{\hat{\sigma}}$. Right panel: σ^* is a Berk-Nash equilibrium (σ^* is optimal given θ_{σ^*} — because θ_{σ^*} lies on the indifference line—and θ_{σ^*} minimizes the wKLD function given σ^*).

1.2 (純粋戦略)Case 1: $\sigma = (0,1)$(i.e. $x = 10$)

the first-order conditions $\partial K(\sigma,\theta)/\partial a = \partial K(\sigma,\theta)/\partial b = 0$ imply $\phi_0(10) = \phi_\theta(10) = a - b10$, and any $(a,b) \in \Theta$ on the segment AB in Figure 1 minimizes $K(\sigma,\cdot)$. These minimizers, however, lie to the right of the dashed line, where it is not optimal to set a price of 10 . Thus, $\sigma = (0,1)$ is not an equilibrium. [1]

1.3 (純粋戦略)Case 2: $\sigma = (1,0)$(i.e. $x = 2$)

A similar argument establishes that $\sigma = (1,0)$ is not an equilibrium: If it were, the minimizer would be at D, where it is in fact not optimal to choose a price of 2 .

先の記述で判定は可能であるが、もう少しかみ砕いてみる。実際にこのケースで BNE を持つとするとそれは点 D(40,3) のみである。では点 D(40,3) に concerntrate したとき $\sigma = (1,0)$ は BNE となるのか。$\sigma = (1,0)$ が BNE となるとき、満たすべき条件は以下の 2 点である。

条件 1 $\{(40,3)\} \in \Theta^*(\sigma_2)$
条件 2 $\{(40,3)\}$ において $x = 2$ が最適である。

条件 1 について。

- wKLD= $\frac{1}{2}(34 - a + 2b)^2$ より $a - 2b = 34$ なら $\Theta^*(\sigma_2)$ に入っている。実際 $\{(40,3)\}$ はこれを満たす。

条件 2 について。

- $\pi(x,y) = xy$ であり、$y \sim \mathcal{N}(40 - 3x, 1)$ と Monopolist は考えている。
- ここで $\mathbb{E}[\pi(x,y)] = x(40 - 3x)$ である。
- こいつの頂点は $x = 20/3$ であり、$x = 10$ の方が近い。($x = 10$ の方が利得がおおきい。)
- したがって条件 2 は満たさないので $\sigma = (1,0)$ は BNE でない。

1.4 (混合戦略)Case 3: $\sigma = (\sigma_2, \sigma_{10})$

F.O.C of a と F.O.C of b は同時には満たされないが、とりあえずそれぞれの条件を確認しよう。

F.O.C of $a=0$ の時：

- この時 minimizer は segment BC であり、$b=3.5$
- $b=3.5$ を F.O.C of $a=0$ に代入して整理すると $-(4\sigma_2+37-a)=0 \longleftrightarrow a=4\sigma_2+37$
- $33 \leq a \leq 40$ および $0 \leq \sigma_2$ より $\sigma \in [0,3/4]$

F.O.C of $b=0$ の時：

- この時 minimizer は segment DC であり、$a=40$
- $a=40$ を F.O.C of $b=0$ に代入して整理すると $368\sigma_2-96b\sigma_2-380+100b=0 \longleftrightarrow b=380-368\sigma_2/100-96\sigma_2$
- $3 \leq b \leq 3.5$ および $\sigma_2 \leq 1$ より $\sigma \in [15/16,1]$

では σ_2 で条件分けして考える。

$\sigma \in [0,3/4]$ の時

F.O.C of $a=0$、$b=3.5$ であるが、これは indifferent payoff line より右側であるので BNE とならない。

$\sigma \in [3/4,15/16]$ の時

この時は点 C が最も θ_0 に近いが indifferent payoff line よりも右側にあるため BNE とならない。

$\sigma \in [15/16,1]$ の時

このケースでは indifferent payoff line と重なる点があり、それは $\theta_{\sigma^*}=(40,10/3)$ である。この時 $\sigma^*=(15/16,1/16)$ でこれは BNE である。

参考文献

[1] Ignacio Esponda and Demian Pouzo. Berk–nash equilibrium: A framework for modeling agents with misspecified models. *Econometrica*, Vol. 84, No. 3, pp. 1093–1130, 2016.