

Sequential Competitive Facility Location

Kodai Adachi

2024 年 10 月 10 日

0 イントロ

- **競争的施設配置問題 (CFLP: Competitive Facility Location Problem):**
 - **概要:** 複数の企業が、代替可能な製品やサービスの需要を競い合う市場において、新しい小売店の開設、パークアンドライドのレンタカーファシリティの配置、電気自動車の充電ステーションの建設などを行う **意思決定ゲーム**
- **競争の種類:**
 - **静的 CFLP (Static CFLP):**
 - * **新規参入企業**は、既存の施設（位置や魅力度など）によって設定された**優先順位**を事前に知っており、市場シェアを最大化するために新しい施設を配置する場所を決定
 - **逐次的 CFLP (Sequential CFLP):**
 - * 既存の施設が新しい施設を開設した後、企業は施設の配置に関して**対応策**を講じる
 - * リーダーは、新しい施設の配置後にフォロワーが取る可能性のある選択肢を考慮して、施設の配置を最適化
 - **動的 CFLP (Dynamic CFLP):**
 - * 競争企業が市場で非協力的に**同時かつ反復的に**意思決定を行い、ナッシュ均衡に至るまでのプロセス
- **顧客の振る舞い:**
 - CFLP では、顧客は独立した意思決定者として見なされ、距離、サイズ、価格などの要素に依存する**施設から得られる効用**に基づいて行動
- **研究の焦点:**
 - 本論文では、**逐次的 CFLP** を**多項ロジット (MNL) モデル**に基づく確率的な顧客選択を用いて研究
 - 実世界の問題サイズに対して、効率的な**厳密解法**と**近似解法**を導出することを目指す
 - CFLP の二段階計画問題は、ネットワーク妨害に似た**リーダーフォロワー型の動的ゲーム**としてモデル化される
 - しかし、CFLP は非線形目的関数や**混合整数非線形計画問題 (MINLP)** の定式化により、ネットワーク妨害問題よりも**複雑性が高い**
- **具体的なアプローチ:**
 - 逐次的 CFLP の目的関数を**ロバスト最適化 (RO) モデル**として再解釈し、MINLP に変形
 - これにより、逐次的 CFLP を**有限収束のブランチアンドカットアルゴリズム**を使用して**グローバル最適解**に到達させることが可能になる

1 Bilevel Model and Single-level Reformulation

- In sequential CFLP, two firms (a leader and a follower) deploy facilities to provide substitutable commodities to customers located in a set I of nodes.
 - 実験では $[0, 50] \times [0, 50]$ square on a planar surface, in which the locations of demand points and candidate facility sites are randomly
- In each node $i \in I$, there is h_i portion of the total customer demand to patronize these facilities, i.e., $\sum_{i \in I} h_i = 1$.
- The leader and the follower may already have existing facilities in the market, denoted by sets J^L and J^F respectively, with $J^L \cap J^F = \emptyset$.

- The new facilities may be deployed in a set J of candidate sites such that $J \cap (J^L \cup J^F) = \emptyset$.
 - 実験では $[0, 50] \times [0, 50]$ square on a planar surface, in which the locations of demand points and candidate facility sites are randomly generated with integer coordinates
- The competition follows a Stackelberg game (von Stackelberg 1934), in which:
 - The leader first locates at most p facilities to maximize the leader's market share.
 - The follower reacts and locates at most r facilities in the remaining candidate sites to maximize the follower's market share.
- It is assumed that $p + r \leq |J|$, and two or more facilities do not co-locate at one candidate site.
- The widely-used MNL model (多項ロジット: McFadden 1973, Ben-Akiva et al. 1985) is adopted for probabilistic customer choice.
- The utility u_{ij} of a customer at node i patronizing a facility at site j is given by:

$$u_{ij} := \alpha_j - \beta d_{ij} + \epsilon_{ij}$$

where:

- ϵ_{ij} denotes random noise.
- $-\beta < 0$ denotes the negative impact of traveling distance d_{ij} employed the Euclidean metric between node i and site j .
- α_j denotes the attractiveness of facility j .
- According to McFadden (1973), if the random noises ϵ_{ij} are independent and identically follow the standard Gumbel distribution, the probability P_{ij} of a customer patronizing facility j is:

$$P_{ij} = \frac{\exp \{\alpha_j - \beta d_{ij}\}}{\sum_{k \in J^0} \exp \{\alpha_k - \beta d_{ik}\}}$$

where J^0 denotes the set of facilities deployed by either the leader or the follower.

- 足立の解釈
- 分子は施設 j の効用を表す指数関数で、施設 j の魅力が高ければ高いほど、また距離が近ければ近いほど、顧客がその施設を選択する効用が高くなることを示す。
- 分母 $\sum_{k \in J^0} \exp \{\alpha_k - \beta d_{ik}\}$ は顧客が利用可能な全ての施設 J^0 に対する効用の合計を計算。これにより、単一の施設 (facility j) の魅力が他のすべての施設と比較してどの程度影響力を持つかを示している。
- 要するに、 P_{ij} は顧客が facility j を選択する確率を示している。
- ただしなんでガンベル分布に従うと仮定したのか、 P_{ij} の導出はわからない。
- 【解決：see here】多項 Logit モデルというもの。Logit モデルとはロジスティック回帰における、誤差項にガンベル分布を仮定した場合の離散選択モデルのこと。
- Define $w_{ij} := \exp \{\alpha_j - \beta d_{ij}\}$ for all $i \in I$ and $j \in J \cup J^L \cup J^F$.
- Let $U_i^L := \sum_{j \in J^L} w_{ij}$ and $U_i^F := \sum_{j \in J^F} w_{ij}$ denote the utility of the pre-existing facilities already open by the leader and the follower, respectively.
- Define binary variables x_j and y_j for all $j \in J$ to indicate whether or not the leader/follower deploys a facility at site j , respectively.
- The leader's market share is given by:

$$L^+(x, y) := \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} x_j}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} (x_j + y_j)} \right)$$

- 足立の解釈
- リーダーの施設 (オープン済みと新規開拓両方) のみによる効用と、リーダーとフォロワーの両方の施設による効用の比率をノードごとに計算し、その結果を顧客需要の割合で重み付けしたものの合計としてリーダーの市場シェアを算出
- 逐次的 CFLP の定式化:
 - 顧客の確率的選択を考慮した逐次的 CFLP を二段階計画問題として定式化する:

$$(S-CFLP) \quad \max_x L^+(x, y^*) \quad (2a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} x_j \leq p, \quad (2b)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J, \quad (2c)$$

$$\text{where} \quad y^* \in \arg \max_y \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} y_j}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} (x_j + y_j)} \right) \quad (2d)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} y_j \leq r, \quad (2e)$$

$$y_j \leq 1 - x_j, \quad \forall j \in J, \quad (2f)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J. \quad (2g)$$

– 上位問題 (upper-level problem) は **(S-CFLP)** 以降、下位問題 (lower-level problem) は **where** 以降を指す

• 計算複雑性:

– この手の問題は $P = NP$ でない限り、多項式時間で解けないことが知られている

Theorem 1 (Adapted from Theorem 3 of Krause et al. (2008)). *There does not exist a polynomial-time, constant approximation algorithm for (S-CFLP) unless $P = NP$. Specifically, let z^* represent the optimal value of (S-CFLP). If there exists a constant $c_0 > 0$ and an algorithm, which runs in time polynomial in $|J|, p$ and guarantees to find a solution x such that $L^+(x, y^*) \geq c_0 z^*$, then $P = NP$.*

• **(S-CFLP) の再構成:**

- (S-CFLP) を計算可能な形に再構成するために、ロバスト最適化 (RO) に持っていく
- (本節では、2つの企業のみを考慮するが、現実には顧客は外部競争者を利用する可能性がある。これを考慮に入れるためのモデル拡張は Appendix A.3 で行う。)
- リーダーとフォロワーの目的関数 (2a) および (2d) を合計すると 1 になる。これは、顧客がリーダーまたはフォロワーのいずれかを利用することを直感的に表している
- (S-CFLP) 問題を、フォロワーがリーダーの市場シェアを減少させるために敵対的に行動するという観点から、robust optimization (RO) モデルとして再解釈する (スタックルベルク)

• **RO モデル:**

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \min_{y \in \mathcal{Y}(x)} L^+(x, y) \quad (3)$$

– ここで、 $\mathcal{X} := \{x \in \{0, 1\}^{|J|} : e^\top x \leq p\}$, $\mathcal{Y}(x) := \{y \in \{0, 1\}^{|J|} : e^\top y \leq r, y_j \leq 1 - x_j\}$ は **RO** における不確実性集合として解釈される

• **提案された解法:**

- 内部最小化定式化の双対
 - * **問題点:** y に 0-1 制約があるため強双対性が成り立たず、この手法は使えない。
- 内部定式化を KKT 条件で置き換える
 - * **問題点:** y の 0-1 制約のため、この手法では最適性が失われる。
- 罰金法
 - * **問題点:** 大きな罰金係数を設定すると緩和問題が大きく弱められてしまう。

2 Theorem 2 の証明

Theorem 2. Define $a \vee b := \max\{a, b\}$, and $\theta^+, \theta : \{0, 1\}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\theta^+(x) := \min_{y \in \mathcal{Y}(x)} L^+(x, y)$ and $\theta(x) := \min_{y \in \mathcal{Y}} L(x, y)$, where $\mathcal{Y} := \{y \in \{0, 1\}^{|J|} : e^\top y \leq r\}$ and

$$L(x, y) := \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} x_j}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} (x_j \vee y_j)} \right)$$

Then, it holds that $\theta^+(x) = \theta(x)$ for all $x \in \mathcal{X}$.

Proof. Define $F_0 := \mathcal{Y} = \{y \in \{0, 1\}^{|J|} : e^\top y \leq r\}$ and $F_x := \{y \in \{0, 1\}^{|J|} : y_j \leq 1 - x_j, \forall j \in J\}$. Now, leaders' share is calculated by $L^+(x, y) := \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} x_j}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} (x_j \vee y_j)} \right)$. Then, for any $x \in \mathcal{X}$, we have

$$\begin{aligned} \theta^+(x) &= \min_{y \in \mathcal{Y}(x)} L^+(x, y) = \min_{y \in F_0 \cap F_x} L^+(x, y), \\ \theta(x) &= \min \{\theta_1(x), \theta_2(x)\}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \min_{y \in F_0 \cap F_x} L(x, y), \\ \theta_2(x) &= \min_{y \in F_0 \setminus F_x} L(x, y). \end{aligned}$$

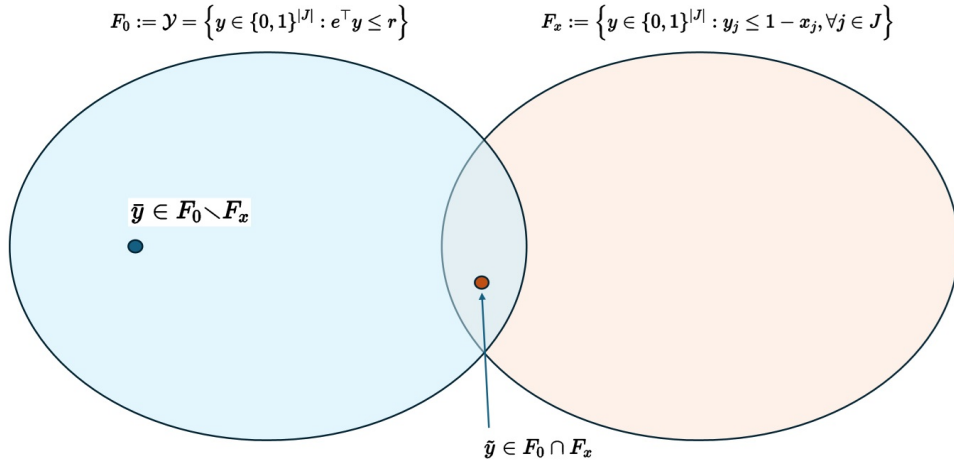


図1 F_0 と F_x のイメージ

In addition, for any $y \in F_0 \cap F_x$, we have $L^+(x, y) = L(x, y)$ because $x_j + y_j = x_j \vee y_j$ for all $j \in J$. Hence, $\theta^+(x) = \theta_1(x)$. It remains to show that $\theta_1(x) \leq \theta_2(x)$ for all $x \in \mathcal{X}$ and then the equivalence can be drawn between $\theta^+(x)$ and $\theta(x)$.

To this end, for any $x \in \mathcal{X}$ and $\bar{y} \in F_0 \setminus F_x$, we construct a $\tilde{y} \in F_0 \cap F_x$ such that $L(x, \tilde{y}) \leq L(x, \bar{y})$. Since $\bar{y} \in F_0 \setminus F_x$, there exists a nonempty subset $K \subseteq J$ such that:

- (i) $\bar{y}_j > 1 - x_j$, i.e., $x_j = \bar{y}_j = 1$ for all $j \in K$ (リーダーとフォロワーが同じ土地に出店している状況。これは禁止されているが、 J には存在している), and
- (ii) $\bar{y}_j \leq 1 - x_j$ for all $j \in J \setminus K$.

We claim that there exists a subset $M \subseteq J \setminus K$ with $|M| = |K|$ and $x_j = \bar{y}_j = 0$ for all $j \in M$. To see this, we denote $J_{mn} := \{j \in J : x_j = m, \bar{y}_j = n\}$ for $m, n \in \{0, 1\}$. Then, it holds that

$$\begin{aligned} |J_{00}| &= |J| - |J_{11}| - |J_{01}| - |J_{10}| \\ &\geq |J| - |K| - (r - |K|) - (p - |K|) \\ &= |K| + (|J| - r - p) \geq |K|, \end{aligned}$$

where the first inequality is because $\sum_{j \in J} \bar{y}_j \leq r$ and $\sum_{j \in J} x_j \leq p$, and the last inequality holds because $p + r \leq |J|$.

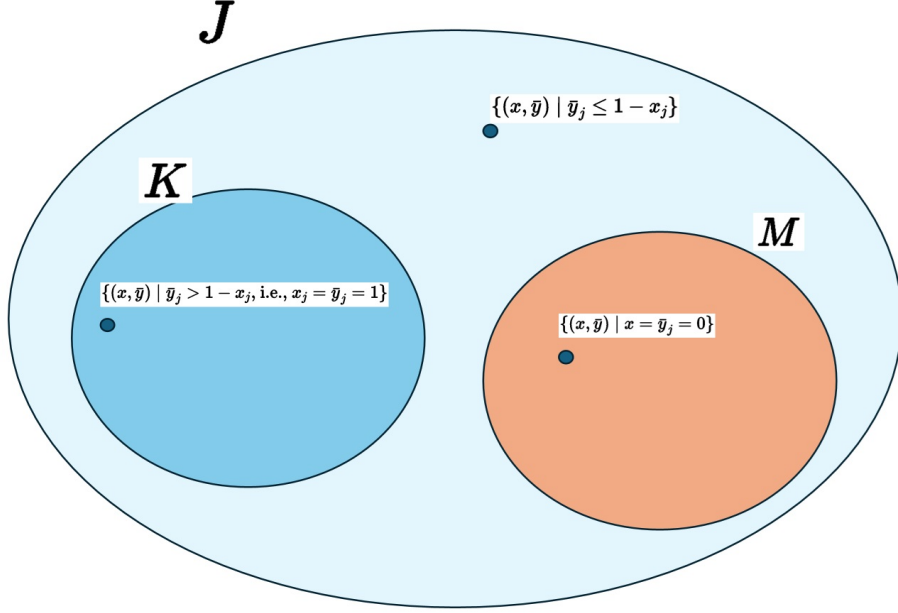


図2 J, K, M のイメージ

Then, the existence of M follows from the pigeonhole principle. Now define $\tilde{y} \in \{0, 1\}^{|J|}$ such that $\tilde{y}_j = \bar{y}_j$ for all $j \in J \setminus (K \cup M)$, $\tilde{y}_j = 0$ for all $j \in K$, and $\tilde{y}_j = 1$ for all $j \in M$. こうすると x, y のバイナリ値がダブらなくなる。Then, $\tilde{y} \in F_0 \cap F_x$ by construction. In addition, for each $i \in I$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} w_{ij} (x_j \vee \bar{y}_j) &= \sum_{j \in K} w_{ij} (x_j \vee \bar{y}_j) + \sum_{j \in M} w_{ij} (x_j \vee \bar{y}_j) + \sum_{j \in J \setminus (K \cup M)} w_{ij} (x_j \vee \bar{y}_j) \\ &= \sum_{j \in K} w_{ij} \times 1 + \sum_{j \in M} w_{ij} \times 0 + \sum_{j \in J \setminus (K \cup M)} w_{ij} (x_j \vee \bar{y}_j) \\ &\leq \sum_{j \in K} w_{ij} \times 1 + \sum_{j \in M} w_{ij} \times 1 + \sum_{j \in J \setminus (K \cup M)} w_{ij} (x_j \vee \bar{y}_j) \\ &= \sum_{j \in K} w_{ij} (x_j \vee \tilde{y}_j) + \sum_{j \in M} w_{ij} (x_j \vee \tilde{y}_j) + \sum_{j \in J \setminus (K \cup M)} w_{ij} (x_j \vee \tilde{y}_j) \\ &= \sum_{j \in J} w_{ij} (x_j \vee \tilde{y}_j). \end{aligned}$$

As a result, $L(x, \bar{y}) \geq L(x, \tilde{y})$ and the proof is completed. \square

• シングルレベルの MINLP の定式化:

- この定理では、任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して $\theta^+(x) = \theta(x)$ が成り立つことが示されている。これにより、バイレベルの (S-CFLP) をシングルレベルの MINLP に再構成することが可能に
- 定理 2 に基づき、次のシングルレベル MINLP が導出される:

$$\max_{x \in \mathcal{X}, \theta} \theta \tag{5a}$$

$$\text{s.t. } \theta \leq L(x, y), \quad \forall y \in \mathcal{Y} \tag{5b}$$

ここで、 θ はリーダーの市場シェアを最大化するための変数。

- 制約条件は、すべてのフォロワーの選択枝 $y \in \mathcal{Y}$ に対して $\theta \leq L(x, y)$ を保証
- リーダーはフォロワーのいかなる戦略においてもロバストな戦略を立てることを言っている

● **DCG (Delayed Constraint Generation) の概略:**

- **課題:** シングルレベル MINLP には、フォロワーの選択枝 y が多いため、制約 (5b) の数が指数関数的に増加するという問題がある。
- **解法:** この問題を解決するために、DCG を使用する。
- **手順:**
 1. 最初に、 y を固定した制約 (5b) (以下緩和問題と呼ぶ) を解き、暫定解 $(\hat{x}, \hat{\theta})$ を得る。
 2. フォロワーの市場シェア最小化問題

$$\min_y \{L(\hat{x}, y) : y \in \mathcal{Y}\} \quad (6)$$

を解き、暫定解が制約 (5b) に違反していないか確認する。i.e., $\hat{\theta} > L(\hat{x}, \hat{y})$ だと違反している。(ここでいう BMP のこと。 y についての制約を考えている)

3. 違反がなければ、その暫定解を最適解とする。
 4. 違反があれば、違反している制約を追加し、再度緩和問題を解く。
- フォロワーの選択枝集合 \mathcal{Y} は有限であるため、DCG は有限回の反復でグローバル最適解に到達する。

3 Valid Inequalities, Approximate Separation, and Approximation Algorithm

● **DCG の適用における 2 つの課題:**

- $\theta \leq L(x, \hat{y})$ が非線形であること:
 - * DCG のお気持ちとして y を固定したら x について線形になってほしかった。
 - * しかし今回のケースではそうならず、各反復でモデル (5) の緩和定式化を MINLP として解く必要がある。
 - * しかも後述するが、 $L(x, \hat{y})$ は (4) のままだと x について **non-convex** である。
 - * つまり、整数制約をさらに緩和しても、緩和された定式化は非凸 NLP のままである。
 - * これらの課題に対処するために、セクション 3.1 と 3.2 でそれぞれ 2 つのクラスの *linear valid inequalities* を導出する。
 - * **凸性に関係するのはセクション 3.2**
 - * その二つを同時に用いることで、非線形・非凸の定式化を凸性を満たす MILP 緩和に変換し、既製のソルバーで容易に解くことができる。(制約を一番違反している条件式を探すときには片方ずつでも効力はある。実験パートで検証)
- **分離問題の取り扱い:**
 - * 分離問題 (6) 自体が MINLP である。
 - * その改善として、セクション 3.3 で (6) を解決し有効不等式を生成するための近似だがはるかに高速なアプローチを導出。このアプローチでは一回のソートを使用する。
 - * 2 つの有効不等式と近似分離手順はセクション 3.4 で述べるブランチ・アンド・カットアルゴリズムで使われ、セクション 3.5 では (S-CFLP) に対して定数近似保証を持つ近似アルゴリズムを導出する。

3.1 Submodular Inequalities

- 注: ここから先は y を固定した制約について考えていく
- まずは線形性を満たすように制約式をいじっていく

Definition 1 Submodular Functions. A function $f: 2^J \rightarrow \mathbb{R}$ is submodular if

$$f(S \cup \{j\}) - f(S) \geq f(R \cup \{j\}) - f(R)$$

for all subsets $S \subseteq R \subseteq J$ and all elements $j \in J \setminus R$.

- Intuitive
- 証明とかはスキップするけどまあ $L(x, y)$ が劣モジュラになるよってこを紹介
- すきっ腹のラーメンの方が満腹時に食べるのよりもおいしい (限界効用逓減の法則)
- 前の研究での効用関数 (2 次関数で定義してた奴に相当) の形が変わっただけ
- for any fixed $y \in \mathcal{Y}$, the function $L(x, y)$ is submodular with respect to the index set X of x , i.e., $X := \{j \in J : x_j = 1\}$.
- x を全部 1 としても劣モジュラだと言っている
- This enables us to represent the nonlinear constraint $\theta \leq L(x, y)$ as a set of linear inequalities
- 形式的に結果を述べるために、 y のインデックス集合を $Y := \{j \in J : y_j = 1\}$ とする。(要するにフォロワーはマンモス企業。お金がありすぎる相手を想定。最悪な相手に対するロバストな行動を考えてる?)
- また、集合関数 $L_Y : 2^J \rightarrow \mathbb{R}_+$ および $f_{i,Y} : 2^J \rightarrow \mathbb{R}_+$ を以下のように定義する:

$$- L_Y(X) := \sum_{i \in I} h_i f_{i,Y}(X)$$

-

$$f_{i,Y}(X) := \frac{U_i^L + \sum_{j \in X} w_{ij}}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in X \cup Y} w_{ij}} \quad (7)$$

- 直感的には、 $f_{i,Y}(X)$ は顧客 i がリーダーの施設を利用する需要の割合を評価し、 L_Y はリーダーの総市場シェアを評価するものである。

- なので $L(x, y) = L_Y(X)$ となる。

Proposition 1. For any $Y \subseteq J$, L_Y is submodular.

- 証明略

Proposition 2. For any $y \in \mathcal{Y}$, the constraint $\theta \leq L(x, y)$ is equivalent to the following linear constraints:

$$\theta \leq L_Y(S) - \sum_{k \in S} \rho_Y(J \setminus \{k\}; k) (1 - x_k) + \sum_{k \in J \setminus S} \rho_Y(S; k) x_k, \quad \forall S \subseteq J \quad (8)$$

where $\rho_Y(S; k) := L_Y(S \cup k) - L_Y(S)$ for all $S \subseteq J$ and $k \in J \setminus S$.

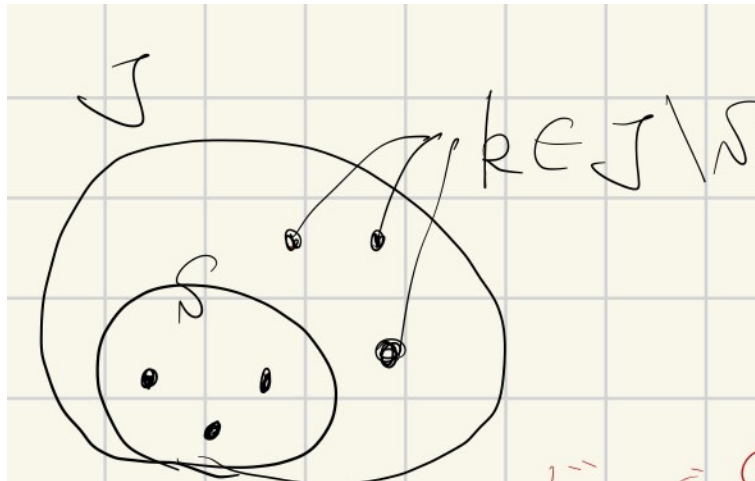


図3 例

- $(1 - x_k), x_k$ の係数は所詮定数なので、これで x についての線形不等式が完成した!
- $L_Y(S)$ はリーダーが S に店を出すときに得られる share
- $\rho_Y(J \setminus \{k\}; k)$ はリーダーが k に店を構えるときに得られる share
- $\rho_Y(S; k)$ もリーダーが k に店を構えるときに得られる share
- しかし制約 (8) には、指数的な数の不等式が含まれる。したがって、DCG では $\theta \leq L(x, y)$ を (8) に直接置き換えると、不等式の数が大幅に増加

- 代わりに、 $\theta \leq L(x, y)$ を (8) の中で最も違反している不等式のみを考慮するというアプローチをとる
- これにより、暫定解を切り捨てるという同じ目的を果たすことができる。
- 特に、与えられた $(\hat{x}, \hat{\theta})$ に対して、(8) の不等式が有効であるための条件は次の通り：

$$\hat{\theta} \leq \min_{S \subseteq J} \left\{ L_Y(S) - \sum_{k \in S} \rho_Y(J \setminus \{k\}; k) (1 - \hat{x}_k) + \sum_{k \in J \setminus S} \rho_Y(S; k) \hat{x}_k \right\} \quad (9)$$

- 最も違反している不等式を見つけるためには、(9) の右辺の組合せ最適化問題を解けば十分である。この作業は多項式時間で効率的に達成できる。
- 見つけたら cut として制約に追加
- より一般的に、 $\hat{x} \in [0, 1]^{|J|}$ を考える。

Proposition 3. For any $x \in [0, 1]^{|J|}$ and $Y \subseteq J$, define $H : 2^J \rightarrow \mathbb{R}$ such that $H(S) := L_Y(S) - \sum_{k \in S} \rho_Y(J \setminus \{k\}; k) (1 - x_k) + \sum_{k \in J \setminus S} \rho_Y(S; k) x_k$. Then, H is submodular.

- 命題 3 の証明は付録 C.4 に記載
- 実数範囲に拡張しても劣モジュラ性は満たすことを言っている

3.2 Bulge Inequalities

- 注：ここから先は y を固定した制約について考えていく
- 非線形制約 $\theta \leq L(x, y)$ の第 2 の代替方法として、関数 $L(x, y)$ のハイポグラフ (hypograph) の支持超平面 (supporting hyperplanes) を利用する方法がある。この方法は、外部近似法 (outer approximation method) として知られている (例: Duran and Grossmann 1986, Ljubić and Moreno 2018)。
 - 超平面による集合の支持を基に説明 (集合論だけどこれしか見つかりませんでした。。。集合を関数と見なしてくれば OK です)
 - ユークリッド空間 \mathbb{R}^n における超平面 $H(a, c)$ とは、非ゼロの法線ベクトル $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とスカラー $c \in \mathbb{R}$ から、

$$H(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = c\}$$

と定義される \mathbb{R}^n の部分集合

- 超平面 $H(a, c)$ が与えられれば、空間 \mathbb{R}^n を半空間へと分割することが可能。具体的には、上半空間 $H^+(a, c)$ と下半空間 $H^-(a, c)$ に分けることができる (至極当たり前)：

$$H^+(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \geq c\}$$

$$H^-(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq c\}$$

- ユークリッド空間上の集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、上半空間 $H^+(a, c)$ と下半空間 $H^-(a, c)$ のどちらか一方が集合 X を部分集合として含むとともに、集合 X の少なくとも 1 つの境界点が超平面 $H(a, c)$ 上にあるならば、集合 X は超平面 $H(a, c)$ によって支持される (supported) と言う。またこのとき、超平面 $H(a, c)$ を境界点における集合 X の支援超平面 (supporting hyperplane) と呼ぶ。

$$X \subset H^+(a, c) \quad \text{かつ} \quad \exists y \in X : y \in H(a, c)$$

$$X \subset H^-(a, c) \quad \text{かつ} \quad \exists y \in X : y \in H(a, c)$$

- これに X の凸性を仮定すればテイラー展開で低次元に落とし込むことが可能
- したがって今から $L(x, y)$ に凸性を持たせる変換を考えていく
- この方法では関数 $L(x, y)$ を次のように拡張する：

$$\tilde{L}(x, y) := \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} x_j}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} [(1 - y_j) x_j + y_j]} \right)$$

- ここで、 $L(x, y)$ における $x_j \vee y_j$ を $(1 - y_j)x_j + y_j$ に置き換えている。
- (x, y) がバイナリ値であるとき、 $L(x, y)$ と $\tilde{L}(x, y)$ は一致するが、 $\tilde{L}(x, y)$ は $[0, 1]^{2|J|}$ の範囲で well-defined
- 固定された $y \in \mathcal{Y}$ に対して、もし $\tilde{L}(x, y)$ が x に関して凹であれば、 $\theta \leq L(x, y)$ を支持平面に置き換えることができる。
- 残念ながら、この凹性は成り立たない。
- 上記の例は、 $\tilde{L}(x, y)$ を「bulge up(持ち上げる)」ことで凹なハイボグラフを得ることができることを示唆している。
このため、 $\tilde{L}(x, y)$ の定義の分子にある線形項 x_j を、より大きな二次項に置き換える。これにより、望ましい凹関数が得られる。詳細な証明は付録 C.5 に記載する。

Proposition 4. For fixed $y \in \{0, 1\}^{|J|}$, define $\hat{L} : [0, 1]^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$\hat{L}(x, y) := \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} [-y_j x_j^2 + (1 + y_j) x_j]}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} [(1 - y_j) x_j + y_j]} \right). \quad (10)$$

Then, $\hat{L}(x, y)$ is concave in x . In addition, $\hat{L}(x, y) = L(x, y)$ for all $x \in \{0, 1\}^{|J|}$.

- 問題は y についての凸性が示されていないこと。(APMD に落とし込むときに考えればいいので一旦スキップ)
- Non-convex constraints $\theta \leq L(x, y)$ are replaced with convex ones $\theta \leq \hat{L}(x, y)$.
- ここまで行けるとあとは $x = \hat{x}$ でテイラー展開するだけ
- Specifically, for given (\hat{x}, \hat{y}) in DCG, we incorporate the linear inequality

$$\theta \leq \hat{L}(\hat{x}, \hat{y}) + \sum_{j \in J} g_j(\hat{x}, \hat{y}) (x_j - \hat{x}_j) \quad (11)$$

where, for all $j \in J$,

$$g_j(\hat{x}, \hat{y}) := \left. \frac{\partial \hat{L}(x, \hat{y})}{\partial x_j} \right|_{x=\hat{x}} = \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{-w_{ik} (1 - \hat{y}_k) Q}{P^2} + \frac{w_{ik} (-2\hat{y}_k \hat{x}_k + 1 + \hat{y}_k)}{P} \right),$$

但し $P = U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} [(1 - \hat{y}_j) \hat{x}_j + \hat{y}_j]$, and $Q = U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} [-\hat{y}_j \hat{x}_j^2 + (1 + \hat{y}_j) \hat{x}_j]$ とした

- The linear inequality introduced is referred to as "bulge inequalities".

3.3 Approximate Separation

- 注：ここからは x を固定した制約の近似を考えていく

Lemma 1. There exists an optimal solution x^* to $(S - CFLP)$ such that $e^\top x^* = p$. In addition, for any fixed $\hat{x} \in \mathcal{X}$, there exists an optimal solution y^* to the separation problem (6) such that $e^\top y^* = r$.

- この補題を基に近似式を作っていく。
- 近似前は非線形なので、これをどうにかして線形問題までもっていきたい
- 再掲

$$\min_y \{L(\hat{x}, y) : y \in \mathcal{Y}\} \quad (6)$$

- Based on Lemma 1, the separation problem (6) can be reformulated as:

$$\min_{y \in \overline{\mathcal{Y}}} L(\hat{x}, y)$$

for a given $\hat{x} \in \mathcal{X}$, where $\overline{\mathcal{Y}} = \{y \in \{0, 1\}^J : e^\top y = r\}$.

- 不等号が等号に代わったことに注意
- The nonlinear function $L(\hat{x}, y)$ is approximated from above using a linear function.(なんで補題 1 が必要だったのかはわからない。)
- This leads to a relaxation of the separation problem (6) that can be solved by a single-round sorting.

Proposition 5. For fixed $\hat{x} \in [0, 1]^{|J|}$, define constants $a_i(\hat{x}) := U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} \hat{x}_j$, $w_i^L(\hat{x}) := \min_{y \in \bar{\mathcal{Y}}} \{U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} (1 - \hat{x}_j) y_j\}$, and $w_i^U(\hat{x}) := \max_{y \in \bar{\mathcal{Y}}} \{U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} (1 - \hat{x}_j) y_j\}$ for all $i \in I$. In addition, define

$$\alpha(\hat{x}) := \sum_{i \in I} h_i \left[\frac{a_i(\hat{x}) (a_i(\hat{x}) + w_i^U(\hat{x}) + w_i^L(\hat{x}) - U_i^F)}{(a_i(\hat{x}) + w_i^U(\hat{x})) (a_i(\hat{x}) + w_i^L(\hat{x}))} \right]$$

and vector $\beta(\hat{x}) := [\beta_1(\hat{x}), \dots, \beta_{|J|}(\hat{x})]^\top$ with

$$\beta_j(\hat{x}) := \sum_{i \in I} h_i \left[\frac{a_i(\hat{x}) w_{ij} (1 - \hat{x}_j)}{(a_i(\hat{x}) + w_i^U(\hat{x})) (a_i(\hat{x}) + w_i^L(\hat{x}))} \right]$$

for all $j \in J$. Then, it holds that

$$L(\hat{x}, y) \leq \alpha(\hat{x}) - \beta(\hat{x})^\top y, \quad \forall y \in \bar{\mathcal{Y}}$$

In addition, the problem $\min_{y \in \bar{\mathcal{Y}}} \{\alpha(\hat{x}) - \beta(\hat{x})^\top y\}$ admits an optimal solution $\hat{y} = \{[1], \dots, [r]\}$, where $\{[j] : j \in J\}$ is a sorting of the set J such that $\beta_{[1]}(\hat{x}) \geq \beta_{[2]}(\hat{x}) \geq \dots \geq \beta_{[|J|]}(\hat{x})$.

- 非線形問題を線形に近似できた
- $\beta_j(\hat{x})$ の計算は numpy など一括に計算できる
- $\min_{y \in \bar{\mathcal{Y}}} \{\alpha(\hat{x}) - \beta(\hat{x})^\top y\}$ は結局 $\beta_j(\hat{x})$ の中で一番大きなものをもってこれば OK なので、 $\min_{y \in \bar{\mathcal{Y}}} \{\alpha(\hat{x}) - \beta(\hat{x})^\top y\}$ は 1 回のソートで実行できることになる。
- $\min_{y \in \bar{\mathcal{Y}}} \{\alpha(\hat{x}) - \beta(\hat{x})^\top y\}$ で違反するなら、元の制約もちろん違反する

4 A Branch-and-Cut Framework

Algorithm 1: A Branch-and-Cut Framework for Solving (S-CFLP)

Input: Create a set \mathcal{F} of formulations and insert the formulation $\max_{x, \theta} \{\theta : e^\top x = p, x \in [0, 1]^{|J|}, \theta \in [0, 1]\}$, a continuous relaxation of (5), into \mathcal{F}

Output: Best solution found

```

1 Set BestSol  $\leftarrow \emptyset$  and  $\theta_{LB} \leftarrow 0$ ;
2 while  $\mathcal{F}$  is non-empty do
3   Remove a formulation from  $\mathcal{F}$ ;
4   Solve the formulation and obtain an incumbent solution  $(\hat{x}, \hat{\theta})$  with optimal value  $\hat{\theta}$ ;
5   Solve either the approximate separation problem  $\min_{y \in \bar{\mathcal{Y}}} \{\alpha(\hat{x}) - \beta(\hat{x})^\top y\}$  or the exact separation problem
      (6) and obtain an optimal solution  $\hat{y}$ ;
6   if  $\hat{\theta} > L(\hat{x}, \hat{y})$  then
7     Add a cut  $\theta \leq L(\hat{x}, \hat{y})$  based on either the submodular inequality (8) or the bulge inequality (11) to
        strengthen the formulation and all formulations in  $\mathcal{F}$ ;
8     Insert the strengthened formulation back into  $\mathcal{F}$ ;
9   else
10    if  $\hat{\theta} > \theta_{LB}$  and  $\hat{x}$  is integral then
11      Set BestSol  $\leftarrow \hat{x}$  and  $\theta_{LB} \leftarrow \hat{\theta}$ ;
12    else
13      Branch on  $\hat{x}$  and insert the two resulting formulations into  $\mathcal{F}$ ;

```

- In Algorithm 1, the DCG (Decomposition-Cut Generation) algorithm for solving the Stochastic Capacitated Facility Location Problem (S-CFLP) or its reformulation (5) is summarized within a branch-and-cut framework.

- The framework employs a single branching tree to manage the optimization process.
- The algorithm maintains a set \mathcal{F} of formulations, which corresponds to the active tree nodes.
- Active tree nodes are defined as those nodes that have not yet produced an integral solution or whose optimal value is not dominated by the best lower bound, denoted as θ_{LB} , found so far.
- In line 8 of Algorithm 1, a valid inequality is added globally to all active tree nodes.
 - The inequality takes the form $\theta \leq L(x, \hat{y})$, where \hat{y} represents a candidate solution.
- Since there is a finite number of valid cuts and a finite number of candidate solutions \hat{x} , the following proposition holds.
- **Proposition 6.** Algorithm 1 terminates in a finite number of steps with a global optimal solution to the Stochastic Capacitated Facility Location Problem (S-CFLP).
 - The finite number of cuts and candidate solutions ensures that the algorithm does not run indefinitely.
 - Each iteration progressively improves the lower bound or adds a valid inequality, guiding the algorithm toward an optimal solution.

5 Approximation Algorithm

数式が何言ってるか分かんないのでスキップ。ただ algorithm 1 の解は大域最適解に近いよーって言ってるっぽい。

6 Computational Results

- We test a variety of sequential CFLP instances to validate the efficacy of our approaches on obtaining optimal or approximate solutions to (S-CFLP).
- We describe parameter configurations and experimental design in Section 4.1 and conduct result analysis to demonstrate that:
 - (i) The submodular inequalities (8) and bulge inequalities (11) significantly accelerate the branch-and-cut framework for solving (S-CFLP) in Section 4.2;
 - (ii) The approximate separation provides a further speed-up in Appendix E.2;
 - (iii) The approximation algorithm can quickly find a good-quality solution in Appendix E.3;
 - (iv) **The patterns of the leader' s and follower' s optimal locations highly depend on settings of the choice model, generating insights on winning market share in Section 4.3.**

6.1 Experimental Design

- All the code is written in C++ and we solve all mixed-integer programs in CPLEX 12.6 using the default configurations of the solver.
- All numerical tests are run on a PC with Intel CORE(TM) i7-8550 1.8GHz CPU, 16G RAM running 64-bit Windows 10.
- When implementing Algorithm 1, we generate valid inequalities derived in Sections 3.1 and 3.2 via the lazy callback function in CPLEX, which is called upon when a binary-valued solution is found at a branching node.
- (In a separate implementation not reported in this paper, we tried separating the submodular inequalities (8) for incumbent solutions \hat{x} that are fractional-valued, but the computational efficacy is inferior to that obtained by separating (8) for binary-valued solutions only.)
- All the code and instances are available at <https://github.com/MingyaoQi/S-CFLP.git>.
- To the best of our knowledge, there are no immediately available benchmark instances having comparable sizes to what we aim to solve in the existing literature.
- Therefore, we generate our instances following the settings in the sequential CFLP literature including Küçükdıyn et al. (2012), Haase and Müller (2014), and Gentile et al. (2018).

- Specifically, we consider a $[0, 50] \times [0, 50]$ square on a planar surface, in which the locations of demand points and candidate facility sites are randomly generated with integer coordinates.
- We employ the Euclidean metric to compute distances and use an MNL model with the default $\beta := 0.1$ to generate probabilistic utilities.
- In the default case, we set $\alpha_j := 0$ for all $j \in J$ to generate homogeneous attractiveness among facilities.
- In Section 4.3, we vary the values of β and test heterogeneous α_j -values to observe their impacts on the optimal locations selected by the leader and the follower.
- We assume that $J_L = J_F = \emptyset$ as the case where both the leader and the follower do not own any pre-existing facilities.
- Before introducing our results, we briefly review the scale of experiments conducted by previous studies on sequential CFLP in Table 2, where entries * indicate that the corresponding paper also optimized p or r , in addition to optimizing locations.
- Note that except for Küçükaydn et al. (2011), where only five candidate sites are considered, none of the previous studies can guarantee solution optimum.
- In this paper, we take up the challenge of solving problems with up to 100 facility sites and 2000 customer nodes to global optimum.

6.2 Strength of Valid Inequalities

7 スタッケルベルグとミニマックス

- bilevel programming の問題は Stackelberg games と同じ
- この問題上で、APMD が均衡解に収束することが示せれば優勝
- APMD を確認するためにはまず目的関数の monotone 性を確認する必要がある

8 Nash equilibrium and monotone games

- The most widely used solution concept for non-cooperative games is the Nash equilibrium (NE), defined as any action profile $x^* \in \mathcal{X}$ that is resilient to unilateral deviations:

$$u_i(x_i^*; x_{-i}^*) \geq u_i(x_i; x_{-i}^*) \quad \text{for all } x_i \in \mathcal{X}_i, i \in \mathcal{N}.$$

- By Debreu's theorem (1952), every concave game has a Nash equilibrium. Nash equilibria can be characterized by the first-order optimality condition:

$$\langle v_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle \leq 0 \quad \text{for all } x_i \in \mathcal{X}_i,$$

where $v_i(x)$ is the payoff gradient of player i :

$$v_i(x) = \nabla_i u_i(x_i; x_{-i}).$$

- この内積がゼロ以下であるということは、プレイヤー i が現在の戦略 x_i^* から新しい戦略 x_i に変えた場合、効用が増加しないことを示している
- $v_i(x)$ は効用が最も急激に増加する方向を提示している
- それと $x_i - x_i^*$ が同じ方 (utility を増加させる方向) を向いていないということは utility は減少する
- Rosen (1965) introduced diagonal strict concavity (DSC), where there exist constants $\lambda_i > 0$ such that:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i \langle v_i(x') - v_i(x), x'_i - x_i \rangle < 0 \quad \text{for all } x, x' \in \mathcal{X}, x \neq x'.$$

Games satisfying DSC are called **(strictly) monotone** and have a **unique** Nash equilibrium x^* , which solves the variational inequality:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i \langle v_i(x), x_i - x_i^* \rangle < 0 \quad \text{for all } x \neq x^*.$$

- Monotone games include many applications, such as atomic splittable congestion games and multi-user covariance matrix optimization problems in MIMO systems. They also contain strictly convex-concave zero-sum games and games with a strictly concave potential function f where $v_i(x) = \nabla_i f(x)$.
- Monotonicity is crucial for our analysis, and we will focus on monotone games throughout this paper. The supplement includes a second-order test for monotonicity.

9 式 (10) の monotonicity

$$\hat{L}(x, y) := \sum_{i \in I} h_i \left(\frac{U_i^L + \sum_{j \in J} w_{ij} [-y_j x_j^2 + (1 + y_j) x_j]}{U_i^L + U_i^F + \sum_{j \in J} w_{ij} [(1 - y_j) x_j + y_j]} \right). \quad (10)$$

- x については凹であることはわかっている
- y について凸であることが示せるとすごくうれしい
- では最小化問題のナッシュ均衡、および monotonicity はどのような条件で与えられるのか。
- **For minimization problems**, the Nash equilibrium (NE), defined as any action profile $x^* \in \mathcal{X}$ that is resilient to unilateral deviations:

$$u_i(x_i^*; x_{-i}^*) \leq u_i(x_i; x_{-i}^*) \quad \text{for all } x_i \in \mathcal{X}_i, i \in \mathcal{N}.$$

- 最小化問題なのでもちろん効用が上がってしまう点に注目すべき
- では DSC については

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i \langle v_i(x') - v_i(x), x'_i - x_i \rangle > 0 \quad \text{for all } x, x' \in \mathcal{X}, x \neq x'.$$

- 勾配と戦略差の内積が正であるとは、戦略変更 $x'_i - x_i$ が、効用関数 $u_i(x)$ の増加方向（勾配の方向）と同じ方向にあることを意味する。
- 最小化問題の文脈では、勾配が増加方向を指しているため、もし戦略差 $x'_i - x_i$ がその方向と一致しているならば、プレイヤーの効用は増加してしまう。
- しかし、プレイヤーは効用を最小化したいため、勾配の方向とは逆の方向に戦略を調整する必要がある。
- 内積が正である場合、プレイヤーがその方向に戦略を変更すると、効用が増加してしまうため、この戦略変更は望ましくないことを意味する。
- したがってこの DSC を満たせば目的関数の monotonicity が言えそう
- 実際計算機実験では満たした