

令和5年度卒業論文

不正確な特定化を含む  
恒常所得モデルに関する研究

電気通信大学

I類 経営・社会情報学プログラム

学籍番号：2010020

氏名：足立 幸大

指導教員：岩崎 敦 准教授

提出年月日：令和6年10月10日

# 目次

1	序論	3
2	先行研究	4
2.1	恒常所得モデル . . . . .	4
2.2	線形二次レギュレータ . . . . .	6
2.3	リカッチ方程式 . . . . .	7
3	不確実な特定化を含む恒常所得モデル	9
3.1	定義 . . . . .	9
3.2	カルバック・ライブラー情報量 . . . . .	10
3.3	乗数問題の書き換え . . . . .	12
4	線形二次レギュレータへの帰着と数値解法	15
4.1	LQR への帰着 . . . . .	15
4.2	リカッチ方程式の可制御性 . . . . .	15
4.3	(別解)stackelberg game による解法 . . . . .	16
4.4	観察上の等価性 . . . . .	17
5	計算機実験	20
5.1	不確実性が存在しない場合 . . . . .	20
5.2	不確実性が存在する場合 . . . . .	20
5.3	観察上の等価性 . . . . .	21
6	結論	22

# 1 序論

本研究は、マクロ経済学を構成する基礎の1つである恒常所得モデルの拡張を議論する。マクロ経済学は、政府、企業、そして家計の効用をモデル化し、それぞれが効用を最大化するように振る舞った際の帰結を分析し、金融や景気といったその動きや構造が捉えにくい現象に対して示唆を与えることを目的とする。この中で恒常所得モデルとは、家計が日々の所得をどれだけ消費に割り振り、どれだけ投資や貯蓄に割り振るかをリカッチ方程式で表現する、マクロ経済学の基盤を構成するモデルであり、様々な拡張が行われている [14]。

恒常所得モデルは、任意の時点で取引される財が一種類のみであり、経済にはただ一人の個体が存在すると仮定される。さらにこの個人は永遠に生存すると想定されている。また将来の所得が一定の確率分布に従い、家計はその正しい確率分布を知っていると仮定する。しかし実際には、家計が将来の所得を見誤った状態で消費を決定していることも起こりえる。例えば、バブルの崩壊やリーマンショックの前の好景気において、家計は将来の所得を正しく認識できていたとは言えない。そこで将来の所得に対する確率分布（モデル）を家計が特定するとき、必ずしも正確に特定できるとは限らないケースにおけるモデル化と解法を提案するのが本研究の目的である。

本稿では所得の分布に不確実性がある場合でも安定した消費活動を実施するため、制御理論の考え方を導入する。モデルが完璧だと仮定して最適な意思決定を導くのは制御理論の得意とするところである。対してロバスト制御理論は、モデルが完璧でないという現実を前提に、どのようにして最適な意思決定を下すかを探求する。本稿でははじめに家計の効用関数が二次関数で与えられ、モデルが線形である場合のロバストな決定ルール of 計算方法について要約する。家計が所得を見誤っている状況をモデル内でどう表現するかを述べた後、そのモデルを計算可能にするために、標準的な線形二次動的計画問題に関連するベルマン方程式とリカッチ方程式を修正する。

また恒常所得モデルにおいて、家計が将来の所得に対する確率分布を正確に特定できないケースについて定式化を示し、基本的なパラメータにおける計算結果を示す。ここで、家計は期待利得の最大化のみを目的にしているにもかかわらず、消費を一定の範囲に収めるために、貯蓄を取り崩したり、投資を抑えるといった振る舞いを再現した。そのあとで家計が将来の所得に対する確率分布を正確に特定できるケースとの比較を行い、消費、貯蓄のふるまい方の違いを考察する。

## 2 先行研究

### 2.1 恒常所得モデル

本研究において、家計の行動と消費の選好を正確に表すモデルの存在は不可欠である。Hall [6] による恒常所得モデルは、このようなモデルの中でも特筆すべきものの一つである。このモデルでは家計が未来の収入を予測し、その予測に基づいて現在の消費を最適化する概念を取り入れている。恒常所得とは、長期的な視点で見たときの平均的な収入を指し、一時的な変動からは影響を受けにくい。したがって、このモデルでは家計は短期的な収入の変動に動じることなく、恒常所得を基にした計画的な消費を行うとされる。

また恒常所得モデルを用いて現在多くの研究がなされている分野として Retirement Saving Puzzle が挙げられる。通常人々は若い時期に働き、収入を得て、老後の生活費のために貯蓄をする。そして引退後はそれまでに蓄積した資産を使って生活費を賄う。恒常所得モデルによると高齢者は年々資産を減らしているはずであり、彼らは死亡時に資産を完全に使い果たすはずである。しかし先行研究 [7, 3, 15] に多くの引退後の高齢者が消費を抑え引き続き財産を増やしているか、あるいは財産を使い始めているが、その減少の速度が予想よりも遅く、人生の終わりまでに全財産を使い切るには不十分であることが明らかとなった。このような、引退が家計消費・貯蓄行動に大きな影響を与えていることは Retirement Saving Puzzle と呼ばれている。家計の消費が生涯を通じて一定となることを主張する恒常所得モデルは Retirement Saving Puzzle により限界があると指摘されている。

一方で Retirement Saving Puzzle そのものに疑問を呈する研究も存在する。Hurd and Rohwedder は、アメリカの Health and Retirement Survey という詳細なパネルデータを使用し、退職期における消費調査を行った結果、退職後の非耐久消費品の支出が大きく減少していないことを指摘した [10]。Aguiar and Hurst は、引退後に支出は減少するが、それは支出と消費の違いに着目することにより恒常所得モデルの枠組みで説明可能と主張している [1]。彼らは、引退により余暇時間が増加することで、食料品の買い物や調理に費やす時間が大幅に増加するという仮定をたて、アメリカ合衆国における家計のカロリー摂取データを用いて分析した。結果、引退後における支出額は低下しても食料品の消費水準は変化しておらず、消費量そのものは一定であるという結果を得ている。

上記のような退職後に消費が大幅に減少するという現象が実際に起きているのか、またその現象が恒常所得モデルで説明できるのかについては、高齢者を対象とした新しいデー

タの収集や、支出と実際の消費を区別するなど、理論モデルを拡張することによって新しい進展が見られている。

本研究ではその前段階として消費の平滑化に焦点を当てる。ここで期待利得の最大化のみを目的にしているのにもかかわらず費を特定の範囲内に維持するために貯蓄を取り崩したり、投資活動を控えるという行動を採る様子の再現を目標とする。

まず初めに恒常所得モデルにおける家計の消費と貯蓄の間の選好を詳細に検討する。家計の持つ離散時間  $t \in \mathbb{N}_+$  までの情報における期待値を  $\mathbb{E}_t$  とする。時間  $t$  での消費を  $c_t$ 、貯蓄を  $k_t$ 、初期賦与を  $d_t$  とする。また  $k_t$  が負の時は借金額を表し、無限に借金が可能であるとする。 $\gamma$  は消費の飽和点であり、これ以上の消費は、家計の満足度を飽和させてしまうため、効用を増加させないものとする。割引因子を  $\beta \in (0, 1)$  とする。

恒常所得モデルでは、時間  $t$  において家計は初期賦与 (endowment)  $d_t$  を受け取り、それを消費 (consumption)  $c_t$  と貯蓄 (saving)  $k_t$  の間で配分し

$$\mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t (\gamma - c_t)^2 \right], \quad (2.1.1)$$

を最大化することを目指す。また家計の  $d_t$  はそれ以前の時点での初期賦与に依存する確率過程である。この初期賦与をもとに家計は次の差分方程式を基に  $t$  期の貯蓄、消費の分配を決定する：

$$k_t + c_t = Rk_{t-1} + d_t, \quad (2.1.2)$$

$$d_{t+1} = \mu_d(1 - \rho) + \rho d_t + c_d \hat{\epsilon}_{t+1}. \quad (2.1.3)$$

ここで  $R > 1$  は  $t - 1$  終了時に保有している  $k_{t-1}$  の金利である。 $|\rho| < 1$  は  $d_t$  の持続性を表す自己回帰係数であり、この値が大きいほど  $d_t$  の値が  $d_{t+1}$  に大きな影響を与えることを意味する。 $\hat{\epsilon}_{t+1}$  は i.i.d に従う標準誤差であり、その誤差は標準正規分布  $\mathcal{N}(0, 1)$  に従う。 $\mu_d$  は初期賦与の全体平均である。

ここで式 (2.1.2) および (2.1.3) を新たな状態変数  $y_t$  と制御変数  $u_t$  をもちいて変形する。状態変数  $y_t$  を  $y_t = \begin{bmatrix} 1 & d_t & k_{t-1} \end{bmatrix}'$ ,  $u_t = \begin{bmatrix} \gamma - c_t & \hat{\epsilon}_{t+1} \end{bmatrix}'$  とすると式 (2.1.2) および (2.1.3) は以下のように 1 つの式で書き換えることが可能である： $y_{t+1} = Ay_t + Bu_t$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ d_{t+1} \\ k_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1 - \rho)\mu_d & \rho & 0 \\ -\gamma & 1 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_t \\ k_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_d \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma - c_t \\ \hat{\epsilon}_{t+1} \end{bmatrix}. \quad (2.1.4)$$

ここで家計が無限に借金をしないようにポンジ・スキームを禁止させる。恒常所得モデルにおいては、家計の借入れや貯蓄の慣行を考慮する必要がある。この文脈において、ポンジ・スキームの禁止条件は特に重要な役割を果たしている。ポンジ・スキームとは、新規の投資家からの資金を使用して早期の投資家にリターンを支払う形式の投資詐欺を指す。経済モデルにおけるポンジ・スキーム禁止条件は、家計が無限に借金を転がし続けること、すなわち過去の借金を返済するために新たに借り入れを続けることを禁止するものである。ポンジ・スキームを抑制する条件式は次式である：

$$\mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_t^2 \right] < \infty. \quad (2.1.5)$$

この式は未来の債務レベルの現在価値が有限であることを確認するものである。この条件式は、家計が持続可能な借入れ戦略を維持していること、すなわち、永遠に制約なく借金を増やし続けることがないことを保証するものである。

したがって不正確な特定化を含まない恒常所得モデルは以下となる：

$$\begin{aligned} & \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t (\gamma - c_t)^2 \right] \\ \text{s.t. } & y_{t+1} = Ay_t + Bu_t \\ & \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_t^2 \right] < \infty. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

## 2.2 線形二次レギュレータ

線形二次レギュレータ (Linear Quadratic Regulator, LQR) は、線形時不変系における制御の問題を解決するための解法である。

**定義 1.** 線形二次レギュレータとは可制御性を満たす係数行列  $A, B$  で定義される線形時不変系  $y_{t+1} = Ay_t + Bu_t$  に対して、適切に選ばれた正定対称な重み行列  $Q, R$  を用いた 2 次形式評価関数

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{y_t' R y_t + u_t' Q u_t\}, \quad (2.2.1)$$

を最小にする制御入力  $u_t = -F y_t$  を求める問題である [8]。ここで  $F$  は  $F = \beta (R + \beta B' P B)^{-1} B' P A$  で求めることができ、最適レギュレータと呼ばれる。ただし  $P$  はリカッチ方程式の解で正定値行列になる必要があり、 $P = Q + \beta A' P A - \beta^2 A' P B (R + \beta B' P B)^{-1} B' P A$  を満たす。

また  $P$  は計算機による反復法を用いて算出することが可能である．この具体的な導出は 2.3 節で議論する．この計算手法を用いると係数行列  $A, B$  と重み  $Q, R$  を基に迅速に最適レギュレータを算出することが可能となる [19]．

不確実性を含まない恒常所得モデルを LQR で表現するため、以下のように変数変換を行う：

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

すると式 (2.1.6) は以下のように書き換えることができる：

$$\begin{aligned} \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t \{y_t' R y_t + u_t' Q u_t\} \\ \text{s.t. } y_{t+1} = A y_t + B u_t. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

しかしこの設定のままでは式 (2.1.5) が LQR で考慮されていない為、 $R$  の (3, 3) 要素に  $10^{-9}$  程度の十分に小さい正則化要素  $\epsilon > 0$  を加えることで  $k_t^2$  にペナルティを課しこの問題を解消する．

## 2.3 リカッチ方程式

式 (2.2.2) をベルマン方程式に変換する．目的関数を

$$-y_0' P y_0 - p = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t \{y_t' R y_t + u_t' Q u_t\}, \quad (2.3.1)$$

とおく．定数  $p$  は  $C$  に依存し、極値からの誤差を表す．また Modified certainty equivalence principle [9] より、 $\epsilon_{t+1} \equiv 0$  のように設定してもリカッチ方程式で求まる  $P$  の値に影響はしない為、以降  $\epsilon_{t+1} \equiv 0$  として分析を進める．加えて  $-y' P y - p$  より  $p$  を除外しても意思決定には問題ないことも注意する．すると式 (2.3.1) に対して以下のベルマン方程式を考えることができる：

$$\begin{aligned} -y' P y = \max_u \{-y' Q y - u' R u - \beta(Ay + Bu)' P(Ay + Bu)\} \\ \text{s.t. } y^* = Ay + Bu. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

ここで  $*$  は次期の値であることを表している．また式 (2.3.2) に対し二次形式の微分公式、 $\frac{\partial y' A y}{\partial y} = (A + A') y$ ,  $\frac{\partial y' B z}{\partial y} = B z$ ,  $\frac{\partial y' B z}{\partial z} = B' y$  を用いて一階条件を計算すると、

$(R + \beta B'PB)u = -\beta B'PAy$  となる. これを  $u$  について解くと  $u = -Fy$  もしくは

$$u = -\beta (R + \beta B'PB)^{-1} B'PAy, \quad (2.3.3)$$

と表すことができる. ここで  $F$  は最適レギュレータと呼ばれている. またこの式 (2.3.3) を式 (2.3.2) の目的関数右辺に代入し整理すると

$$P = Q + \beta A'PA - \beta^2 A'PB \left( \tilde{R} + \beta B'PB \right)^{-1} B'PA, \quad (2.3.4)$$

を得る. 式 (2.3.4) はリカッチ方程式と呼ばれる. ただし  $P$  はリカッチ方程式の解で正定値行列になる必要がある.



### 3 不確実な特定化を含む恒常所得モデル

現実のデータや現象を説明するために使用される数学的モデルが、実際の現象を正確に反映していない状態をモデルが不確実性を含むという。この不確実性に対する問題は経済学だけでなく物理学や工学など他の分野でも共通して存在しているが、経済学においては特に深刻である [8]。

不確実性を含まない恒常所得モデルに代表される合理的期待形成仮説では、主観的および客観的な確率分布やモデルが一致するため家計自身のモデルが信頼に値し、意思決定をするにあたり不確実性の心配をする必要がない。しかし実際にはリスク分散の基本を理解していない人々や、投資に関する不完全な情報を持つ投資家、自分の収入増加の見込みについて不完全な情報を持つ個人などがある。これらの知識不足は消費や貯蓄の意思決定に大きな不確実性をもたらす。加えて Ahn et al. [2] や Bhandari et al. [4] の研究によると個々の家計は不確実性を嫌い、ロバスト性を好む傾向にあることを主張している。

また Maenhout [12] や Collin-Dufresne et al. [5] らの研究によると、不確実性はモデル不確実性とパラメータ不確実性の 2 種類に分類されることが指摘されている。前者は消費活動を行う家計が自らの置かれた状況に対してモデルそのものを誤って認識している状況を指すのに対し、後者はモデルは正確に認識しているが各パラメータの予測を誤っている状況を指す。複雑な経済システムにおいて、データ分析者が正確なモデルを立てるのが難しいのと同じく、その環境内で行動する家計も適切なモデルを予想することは難しいと考えられるのは自然なことである。

そこで本研究ではモデル不確実性に焦点を当て、家計が将来の所得に対する確率分布を正確に特定できないケースについて定式化を行い、不確実性を含まない恒常所得モデルとの消費、貯蓄のふるまい方の違いを考察する。

#### 3.1 定義

2.1 節と同様、家計の効用関数は式 (2.1.1) で与えられるものとする。式 (2.1.3) で初期賦与が与えられると仮定したが、しかしながら、実際の経済状況は、しばしば複雑で予測困難な要素を含んでいる。したがって家計は標準誤差のみで記述されたものよりも、不確実性を導入し現実のデータにより適切に対応できるようなアプローチを取ると考えられる。そのため式 (2.1.3) を以下のように拡張する：

$$d_{t+1} = \mu_d(1 - \rho) + \rho d_t + c_d(\epsilon_{t+1} + w_{t+1}). \quad (3.1.1)$$

$\epsilon_{t+1}$  は i.i.d に従う標準誤差であり, 標準正規分布  $\mathcal{N}(0, 1)$  に従う.  $w_{t+1}$  はベクトルであり,  $y_t$  の過去の値に依存する非線形関数として作用する. また  $w_{t+1}$  は観測可能な関数  $g_t$  を用いて  $w_{t+1} = g_t(y_t, y_{t-1}, \dots)$  のように表現される. 式 (3.1.1) で初期賦与が生成されるとき, 式 (2.1.3) の標準誤差は  $\mathcal{N}(w_{t+1}, 1)$  に従うと観測される. この  $w_{t+1}$  を導入することにより, モデルは現実のデータ生成プロセスをより正確に捉えることが可能となり, 不確実性を含んだ複雑な状況下でも家計の行動を適切に予測し分析することができるようになる.

また  $\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & c_d & 0 \end{bmatrix}'$  とすると式 (2.1.4) は

$$y_{t+1} = Ay_t + \hat{B}u_t, \quad (3.1.2)$$

と書き換えることが可能である. 同様に式 (2.1.2) および (3.1.1) は

$$y_{t+1} = Ay_t + \hat{B}u_t + Cw_{t+1}, \quad (3.1.3)$$

と書き換えることが可能である.

## 3.2 カルバック・ライブラー情報量

$w_{t+1}$  はあくまでも式 (2.1.3) を補完的に説明するものであり, 大きく乖離してはならないため, これらの差異をカルバック・ライブラー情報量 (Kullback-Leibler divergence) を用いて定量化する. カルバック・ライブラー情報量とは, 機械学習や統計の様々な場面で分布どうしの違いを測るために用いられる尺度である [18].

まず式 (3.1.2) の確率分布について考える. ここでは Modified certainty equivalence principle を用いる前のモデルを用いる. 標準誤差を削除してもリカッチ方程式の解は変わらないが, 今回の議論では影響を及ぼす点に注意する. 式 (3.1.2) の  $Ay_t + Bu_t$  は決定論的に決まり,  $\epsilon_t$  の平均は 0 であるため, 式 (3.1.2) 全体の平均は  $\mathbb{E}_t [Ay_t + \hat{B}u_t + C\epsilon_t] = \mathbb{E}_t [Ay_t + \hat{B}u_t]$  である. ここで  $\epsilon_t$  は単体で標準正規分布に従うが, 集合  $\{\epsilon_t\}$  は多変量の標準正規分布に従う. このときそれぞれの確率変数  $\epsilon_t$  は i.i.d. であるため分散共分散行列は単位行列となる. よって  $\{C\epsilon_t\}$  の分散共分散行列は線形変換より  $CIC'$  となり, もとの  $CC'$  倍となる. したがって\*を次期の値とすると式 (3.1.2) の確率分布は以下となる:

$$f_o(y^* | y) \sim \mathcal{N}(Ay + \hat{B}u, CC'). \quad (3.2.1)$$

同様に式 (3.1.3) の確率分布は

$$f(y^* | y) \sim \mathcal{N}(Ay + \hat{B}u + Cw, CC'), \quad (3.2.2)$$

と表すことができる。

したがって上記よりカルバック・ライブラー情報量を用いて二つの確率分布間の差異  $I(f_o, f)(y)$  を以下のように定量化することができる:

$$I(f_o, f)(y_t) = \int \log \left( \frac{f(y_{t+1} | y_t)}{f_o(y_{t+1} | y_t)} \right) f(y_{t+1} | y_t) dy^*. \quad (3.2.3)$$

これを計算すると,

$$\begin{aligned} I(f_o, f)(y) &= \int \log \left( \frac{f(y^* | y)}{f_o(y^* | y)} \right) f(y^* | y) dy^* \\ &= \log \left( \frac{CC'}{CC'} \right) + \frac{CC' + (Cw)(Cw)'}{2CC'} - \frac{1}{2} \\ &= 0 + \frac{CC' + (Cw)(Cw)'}{2CC'} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{CC' + (Cw)(Cw)' - CC'}{2CC'} \\ &= \frac{(Cw)(Cw)'}{2CC'} \\ &= \frac{ww'}{2}. \end{aligned}$$

また全体時間における  $w_{t+1}$  の影響  $R(w)$  を一定値  $\eta_0 \in [0, \bar{\eta})$  以下に抑えるために以下の制約を与える:

$$\begin{aligned} R(w) &= 2\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} \frac{w_{t+1}w'_{t+1}}{2} \\ &= \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} w_{t+1}w'_{t+1} \\ &\leq \eta_0. \end{aligned}$$

したがって  $R(w)$  によって記述される不確実性を含む恒常所得モデル (制約問題) は, 目的関数を  $\tilde{K}(\eta_0)$  として以下である。

**定義 2.**  $\eta_0 \in [0, \bar{\eta}]$  が与えられたとき, **制約問題**を以下とする:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\eta_0) = \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t (\gamma - c_t)^2 \right] \\ \text{s.t. } y_{t+1} = Ay_t + Bu_t + Cw_{t+1} \\ R(w) = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} w'_{t+1} w_{t+1} \leq \eta_0. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

### 3.3 乗数問題の書き換え

ここで式 (3.2.4) を LQR のフレームワークで考えるために制約問題を書き換えることを考える. まず乗数問題を以下で与える.

**定義 3.**  $\theta \in (\underline{\theta}, +\infty]$  が与えられたとき, **乗数問題**を以下とする:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [-(\gamma - c_t)^2 + \beta \theta w'_{t+1} w_{t+1}] \right] \\ \text{s.t. } y_{t+1} = Ay_t + Bu_t + Cw_{t+1}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

乗数問題のように問題を再構築できれば LQR で書き換えることが可能である. また実際に以下の定理 1 が成立する.

**定理 1.** 制約問題に対し, ある  $\theta$  が存在して, 等価な乗数問題に書き換えることができる.

**証明.** はじめに双対変数  $\theta$  を用いて (3.2.4) を変形する:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \max_{\theta > \underline{\theta}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t (\gamma - c_t)^2 + \theta (R(w) - \eta_0) \right]. \quad (3.3.2)$$

$\theta$  は条件式  $R(w) \leq \eta_0$  を満たすのにかかる費用と考えることができる.  $R(w) - \eta_0 > 0$  となるような  $w_{t+1}$  を選らんでいたら  $\theta \rightarrow +\infty$  となり, 限りなく不現実性を含まないモデルに近づくことを意味する.  $R(w) - \eta_0 \leq 0$  となるような  $w_{t+1}$  を選らんでいたら  $\theta \rightarrow 0$  となる. 以上の理解の下で式 (3.2.4) と式 (3.3.2) は等価な問題である.

式 (3.3.2) において  $\theta$  は  $c_t, w_{t+1}$  に依存せず,  $\theta \rightarrow +\infty$  でも解けるので, オペレータを入れ替えることができる:

$$\max_{\theta > \underline{\theta}} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t (\gamma - c_t)^2 + \theta (R(w) - \eta_0). \quad (3.3.3)$$

今回は  $c_t$  の挙動に一番興味があるので,  $\theta = \theta^*$  に固定する.  $-\theta^*\eta_0$  は定数項であり問題に影響しないので除外する:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t (\gamma - c_t)^2 + \theta^* R(w) \\ &= \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [-(\gamma - c_t)^2 + \beta \theta^* w'_{t+1} w_{t+1}] \right]. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

以上より式 (3.2.4) と以下の乗数問題は等価であり, 定理 1 は示された:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [-(\gamma - c_t)^2 + \beta \theta^* w'_{t+1} w_{t+1}] \right] \\ & \text{s.t. } y_{t+1} = Ay_t + Bu_t + Cw_{t+1}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

□

加えて制約問題と乗数問題が等価であるため  $\eta_0$  と  $\theta$  の関係を定式化することが可能である。あらためて式 (3.3.4) の値を  $\tilde{V}(\theta)$  とする。すると式 (3.3.3) について以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \max_{\theta > \underline{\theta}} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \min_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} -\beta^t (\gamma - c_t)^2 + \theta (R(w) - \eta_0) \\ &= \max_{\theta > \underline{\theta}} \tilde{V}(\theta) - \theta \eta_0. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

ここで新たに定理 2 を導入する。

**定理 2.**  $\eta_0 > 0$  について,  $c^*$  および  $w^*$  が  $\tilde{K}(\eta_0) > -\infty$  で与えられる制約問題を解くとする。すると  $\theta > 0$  なる双対変数が存在し乗数問題を解くことができ, また解は制約問題のそれと等しい。さらに, 次の等式が成り立つ:

$$\tilde{K}(\eta_0) = \max_{\theta > \underline{\theta}} \tilde{V}(\theta) - \theta \eta_0. \quad (3.3.6)$$

**証明.** この定理の証明は [13, Theorem 2.1] [11] を参照せよ。 □

定理 2 の式 (3.3.6) に対してルジャンドル変換を行うと以下の式を得る:

$$\tilde{V}(\theta) = \min_{\eta_0 \geq 0} \tilde{K}(\eta_0) + \eta_0 \theta. \quad (3.3.7)$$

式 (3.3.7) の両辺を  $\eta_0$  について偏微分し, 一階条件を求めると

$$-\theta = \frac{\delta}{\delta \eta_0} \tilde{K}(\eta_0), \quad (3.3.8)$$

となり  $\theta$  と  $\eta_0$  の関係が求まる. しかし特定の  $\eta_0^*$  が与えられた場合でも, それに関連する  $\theta^*$  が一意であるとは限らず, また特定の  $\theta^*$  に対しても, それに関連する  $\eta_0^*$  が一意であるとも限らない.

## 4 線形二次レギュレータへの帰着と数値解法

### 4.1 LQR への帰着

乗数問題を LQR で表現するため, 以下のように変数変換を行う:

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta\theta I \end{bmatrix}, \\ \hat{u}_t &= \begin{bmatrix} u_t \\ w_{t+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

すると式 (2.1.6) は以下のように書き換えることができる:

$$\begin{aligned}\min_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ y_t' R y_t + \hat{u}_t' \hat{Q} \hat{u}_t \right\} \\ \text{s.t. } y_{t+1} = A y_t + B \hat{u}_t.\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

しかしこの設定のままでは式 (2.1.5) が LQR で考慮されていない為,  $R$  の  $(3, 3)$  要素に  $10^{-9}$  程度の十分に小さい正則化要素  $\epsilon > 0$  を加えることで  $k_t^2$  にペナルティを課しこの問題を解消する.

### 4.2 リカッチ方程式の可制御性

ロバスト制御理論における線形動的システムの制御の主な目的は, システムの状態を特定の望ましい状態に維持することである [17]. あるシステムが有限時間内に任意の目標状態に到達可能な場合, この系は可制御であるという. この状況では, 途中経過の軌道や制御入力の大きさに関する制約は存在しない. 通常, 出力は内部状態の線形結合であり, 状態量の次元よりも小さい次元を持つ. 可制御であると言い換えると, 原点から出発した式 (3.1.2) および (3.1.3) の解を任意の状態に有限時間で到達させる入力  $u$  が存在することを指す [16].

また係数行列  $A, B$  に対して式 (2.1.3) および (3.1.1) が可制御であるための必要十分条件は  $3 \times 6$  の行列

$$Co = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix},\tag{4.2.1}$$

の階数が 3 であることである.

しかし今回のモデルは  $y_t' = \begin{bmatrix} 1 & d_t & k_{t-1} \end{bmatrix}'$  と状態変数  $y_t$  の  $(1, 1)$  に定数要素を含んでいる. 状態変数  $y_t$  に含まれる状態変数は 2 変数のため, 今回は  $Co$  の階数は 2 となればよい.

### 4.3 (別解)stackelberg game による解法

Modified certainty equivalence principle と式 (3.1.3) を用いると

$$y_{t+1} = Ay_t + \hat{B}u_t + Cw_{t+1},$$

を仮定できる．これにより不確実性と期待効用最大化に問題を分けて考えることができ，ロバストな意思決定をすることが可能となる．不確実性がないモデルでは， $w_{t+1} \equiv 0$  と仮定される．ここで Modified certainty equivalence principle により標準誤差  $\epsilon_{t+1}$  が排除されたとしても，係数行列  $C$  は， $w_{t+1}$  が状態にどのようにフィードバックするかに影響を与えるため，ロバストな意思決定に影響を与えることに注意する．

はじめに式 (3.1.3) を用いて式 (3.3.1) を以下のようにベルマン方程式に変形する．その結果，以下の式が得られる：

$$\begin{aligned} -y'Py &= \max_u \min_w \mathbb{E} \{ -(\gamma - c_t)^2 + \theta\beta w'w - \beta y^{*'}Py^* \} \\ \text{s.t. } y^* &= Ay + \hat{B}u + Cw. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

この式 (4.3.1) を  $w$  に関して検討する． $w$  の関数  $J(w)$  を次のように定義する：

$$J(w) = (Ax + \hat{B}u + Cw)'P(Ax + \hat{B}u + Cw) - \theta w'w, \quad (4.3.2)$$

次にこの関数の  $w$  に関する微分を考える：

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w} = 2C'P(Ax + \hat{B}u + Cw) - 2\theta w.$$

$\frac{\partial J(w)}{\partial w} = 0$  となる  $w$  を求めることにより最適解  $w^*$  が得られる．したがって

$$\begin{aligned} 2C'P(Ax + \hat{B}u + Cw) - 2\theta w &= 0 \\ \theta w - C'PCw &= C'P(Ax + \hat{B}u) \\ w^* &= (\theta I - C'PC)^{-1}C'P(Ax + \hat{B}u), \end{aligned}$$

となる．この  $w^*$  を式 (4.3.2) に代入し再計算すると次の結果が得られる：

$$\begin{aligned} J(w^*) &= (Ax + \hat{B}u)' \left[ P + \theta^{-1}PC (I - \theta^{-1}C'PC)^{-1}C'P \right] (Ax + \hat{B}u) \\ &= \min_w \{ \theta w'w - y^{*'}Py^* \}. \end{aligned}$$



ここで

$$\mathcal{D}(P) = P + \theta^{-1} P C (I - \theta^{-1} C' P C)^{-1} C' P, \quad (4.3.3)$$

とする. 以上より式 (4.3.1) のベルマン方程式は以下のように書き直すことができる:

$$-y' P y = \max_u \{r(y, u) - \beta y'^* \mathcal{D}(P) y^*\}.$$

ここで  $\mathcal{D}(P)$  内で  $w$  を反映しているため式 (3.1.2) の時不変系が使用される点に注意する.

ここで式 (2.3.4) を  $\mathcal{B}(P)$  と再定義する:

$$\mathcal{B}(P) = Q + \beta A' P A - \beta^2 A' P B (R + \beta B' P B)^{-1} B' P A.$$

$\mathcal{D}$  は変数  $w$  に関して式 (4.3.1) を最小化する演算子である. これは, 通常, システムに対する最悪のシナリオを想定して意思決定をするため, この  $\mathcal{D}$  は家計が考慮する不確実性をモデル化するのに用いられる. 一方  $\mathcal{B}$  は制御変数  $u$  について最大化を行う演算子である.  $P$  が  $\mathcal{B} \circ \mathcal{D}$  の不動点であることから反復法で  $P$  を求めることが可能となる. その際最適レギュレータは,

$$F = \beta \left( R + \beta \hat{B}' \mathcal{D}(P) \hat{B} \right)^{-1} \hat{B}' \mathcal{D}(P) A, \quad (4.3.4)$$

で与えられる. また家計は  $R(w) \leq \eta_0$  の範囲で自分が誤った初期賦与を予測していることは知っている. その最悪の  $w$  は  $w = Ky$  で与えられ,

$$K = \theta^{-1} (I - \theta^{-1} C' P C)^{-1} C' P (A - \hat{B} F), \quad (4.3.5)$$

を満たす.

上記の分析より, パラメーター  $\theta$  の値が大きい場合 (対応する  $\sigma$  の値が小さい場合), 関数  $\mathcal{D}$  は恒等写像として機能することが分かる. この恒等写像の特性により  $P$  と  $F$  は, 3.1 節の線形二次レギュレータの値に近似する. また  $\theta$  が大きいとき  $K$  が 0 に近くなることを意味し, これは所得が正確に予測できる状況を反映している. 一方で,  $\theta$  の値が小さい場合は, モデルの誤指定に対する感応度と予測の正確性のトレードオフを反映しており, 適切なパラメーター選択がモデルの性能に重要な影響を与えることを示唆している.

#### 4.4 観察上の等価性

このセクションでは  $\theta^{-1} \equiv \sigma = 0$  として, 家計に堅牢性への懸念がない場合の意思決定を観察する. ここで式 (3.3.1) について式 (2.1.2) とのラグランジアンを考える. 式 (2.1.2)

についてのラグランジュ係数を  $2\beta^t \mu_{ct}$  とする. ここで  $\mu_{ct}$  は消費に対する限界効用を表しており,  $\mu_{ct} = \gamma - c_t$  が成り立っている. したがってラグランジアンは

$$L = \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [-(\gamma - c_t)^2 + \beta \theta w'_{t+1} w_{t+1}] \right] + \sum_{t=0}^{\infty} 2\beta^t \mu_{ct} (k_t + c_t - Rk_{t-1} - d_t), \quad (4.4.1)$$

となる. ここでこれを時刻  $t$  での貯蓄に関して微分し一階条件を求めると,

$$\frac{\partial L}{\partial k_t} = -2\beta^t \mu_{ct} + 2\mathbb{E}_t [\beta^{t+1} R \mu_{ct+1}] = 0,$$

を得る. これより以下の条件を得る:

$$\mu_{ct} = \beta R \mathbb{E}_t [\mu_{ct+1}]. \quad (4.4.2)$$

時刻  $t$  に対して  $t+1$  期の式 (2.1.2) を考えているので期待値を取ることに注意する. またこの式 (4.4.2) はあるベクトル  $\nu$  を用いて,

$$\mu_{ct+1} = (\beta R)^{-1} \mu_{ct} + \nu \epsilon_{t+1}, \quad (4.4.3)$$

と表すこともできる. ここで  $u_t = \mu_{ct} = b - c_t$  であるから, LQR の最適解より  $u_t = -F y_t = \mu_{ct}$  が成り立つ. したがって時不変系は  $y_{t+1} = (A - BF)y_t + C\epsilon_{t+1}$  となり,

$$\mu_{ct+1} = -F(A - BF)y_t - FC\epsilon_{t+1}, \quad (4.4.4)$$

が成立することが分かる. したがって式 (4.4.3) と比較することにより  $\nu = -FC$  を得る.

ここで以下の定理を考える.

**定理 3** (観察上の等価性).  $(\sigma, \beta)$  以外のパラメータを全て固定する. また  $\sigma = 0$  のとき  $\beta R = 1$  と仮定する. ここである  $\underline{\sigma} < 0$  が存在し, 任意の  $\sigma \in (\underline{\sigma}, 0)$  に対して,  $(0, \beta)$  での最適意思決定は,  $\hat{\beta}(\sigma) < \beta$  と  $\alpha = \sqrt{\nu' \nu}$  を満たす  $(\sigma, \hat{\beta}(\sigma))$  での最適意思決定と等しい. ここで  $\hat{\beta}(\sigma)$  は次の式を満たす:

$$\hat{\beta}(\sigma) = \frac{1}{R} + \frac{\sigma \alpha^2}{R - 1}. \quad (4.4.5)$$

**証明.** この定理の証明は [8, Theorem 10.3.1] を参照せよ. □

本定理は,  $(0, \beta)$  および  $(\sigma, \hat{\beta})$  のパラメータ設定の下で同じ消費・貯蓄計画が採用されることを示しており, これにより両者は観測上では区別がつかないという事実を明示している. つまり, 検証可能な予測がすべて一致する状況下では, これら二つの設定は観測的に

同等であり、どちらの理論が正しいかを判断することは不可能であることを主張している。この観測的同等性の概念は、モデル選定やパラメータ推定において非常に重要な意味を持ち、経済学の理論構築や政策評価の文脈で慎重に考慮されるべきである。

## 5 計算機実験

パラメータを  $\mu_d$  は 13.0,  $\rho$  は 0.05,  $\gamma$  は 8.0,  $c_d$  は 0.2,  $\beta$  は 0.95 と設定した計算機実験の結果を示す. 初期賦与の係数行列  $A, B$  は以下ようになる:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12.35 & 0.05 & 0 \\ -13 & 1 & 1.05263158 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

この  $A, B$  をもとに可制御行列  $Co$  を求めると以下になり, 階数は 2 となり可制御性を満たすことを確認した:

$$Co = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.05 & 0 & 0.0025 \\ 1 & 0 & 1.05263158 & 1 & 1.10803324 & 1.10263158 \end{bmatrix}.$$

### 5.1 不確実性が存在しない場合

$\theta = +\infty$  と設定することにより, 不確実性を除外した. 平均 0, 標準偏差 1 の誤差項をランダムに生成し, 式 (2.1.4) の係数行列,  $Q, R$  の重み行列を 3 章の通り適切に設定し消費, 初期賦与, 貯蓄を描画したところ図 1 のようになり, 毎期の消費が初期賦与に影響されることなく, 均衡的に動きを保持していることを確認できた.

### 5.2 不確実性が存在する場合

$\theta = 10$  と設定した. 平均 0, 標準偏差 1 の誤差項に加え, 式 (3.1.3) のように  $w_{t+1}$  を含む初期賦与を採用し,  $Q, R$  の重み行列を 3 章の通り適切に設定し消費, 初期賦与, 貯蓄を描画したところ図 2 のようになった. 消費は平滑であるが図 1 と比べ, 消費, 貯蓄共に上昇がみられた. 図 2 において消費はおおよそ平滑であるが, 図 1 と比べると, 消費と貯蓄は共に増加した.  $\theta = +\infty$  における消費の平均は 11.97 であり,  $\theta = 10$  における消費平均のそれは 13.67 であった. さらに 19 期目で, 前者の消費は後者のそれを上回り, その後, 消費が下回ることにはなかった.

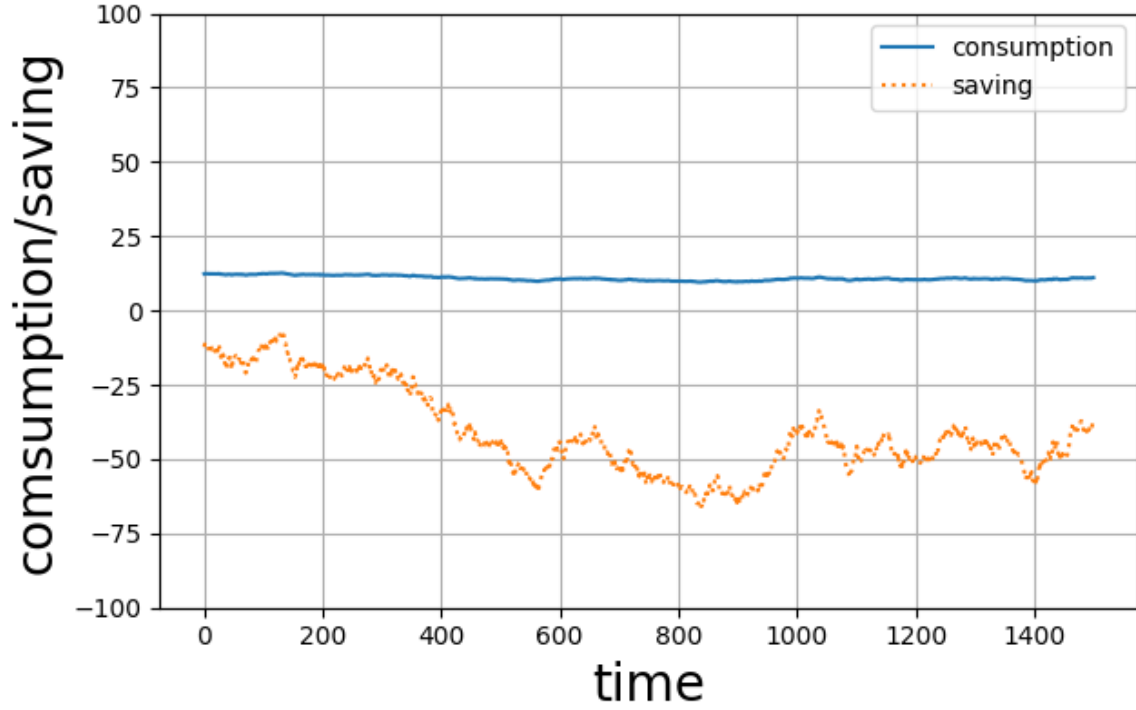


図 1: 家計がモデルを把握しているケース ( $\theta = \infty$ )

### 5.3 観察上の等価性

まず初めに  $\theta = +\infty$  時の最適レギュレータを用いて  $\nu$  を算出した. この時の最適レギュレータは  $F = \begin{bmatrix} -4.31758509 & -0.05249346 & -0.0526316 \end{bmatrix}$  であった. この値を用いて (4.4.5) に従い  $\hat{\beta}$  を更新したところ  $\hat{\beta} = 0.9191855804663918$  となり最適レギュレータは  $F = \begin{bmatrix} -4.31758491 & -0.05249345 & -0.05263159 \end{bmatrix}$  で,  $\theta = +\infty$  時同様の最適レギュレータを算出することができた. ここで式 (4.3.3) について,  $\theta = +\infty$  時の  $\mathcal{D}_{\theta=\infty}(P)$  は

$$\mathcal{D}_{\theta=\infty}(P) = \begin{bmatrix} 143.906976 & -2.81618368 & -2.82359469 \\ -2.81618368 & 0.0551112406 & 0.0552562703 \\ -2.82359469 & 0.0552562703 & 0.0554016826 \end{bmatrix},$$

であり,  $\theta = 10$  時の  $\mathcal{D}_{\theta=10}(P)$  は

$$\mathcal{D}_{\theta=10}(P) = \begin{bmatrix} 161.733654 & -3.16504234 & -3.17337140 \\ -3.16504234 & 0.0619382204 & 0.0621012158 \\ -3.17337140 & 0.0621012158 & 0.0622646411 \end{bmatrix},$$

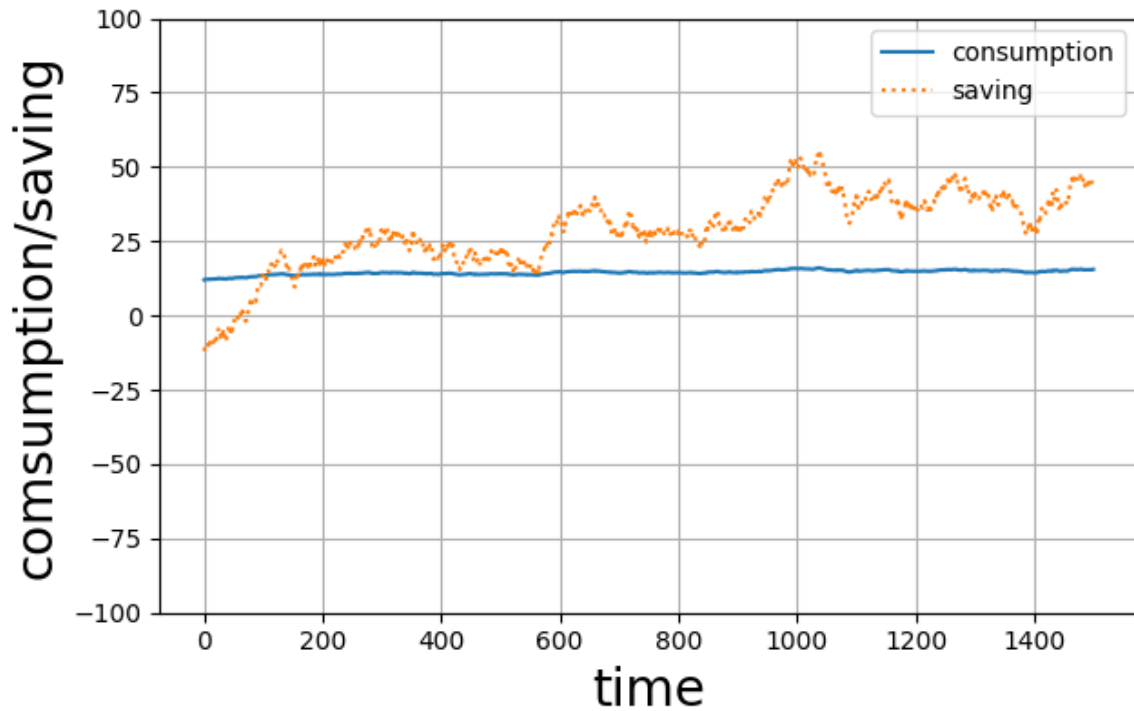


図 2: 家計がモデルを把握していないケース ( $\theta = 10$ )

であった。

## 6 結論

本論文では、不確実性のある状況下での家計の消費と貯蓄の振る舞いを分析した。このとき、家計は将来のリスクに備えるため、初期段階で消費を抑制し、貯蓄を優先する傾向があることが分かった。これは、家計が定常状態に達するまで継続し、いったん定常状態に到達すると、家計の貯蓄は、追加の労働収入に依存せずに、投資収益などを通じて定期的な収入を生むようになる。その結果、家計は即時的な貯蓄を控えて、消費を増加させるようになったと考えられる。

また観察上の等価性について  $\theta = +\infty$  と  $\theta = 10$  で同じ最適レギュレータを観測した。しかし式 (4.3.3) と  $\mathcal{D}_{\theta=\infty}(P)$  および  $\mathcal{D}_{\theta=10}(P)$  の計算機実験から両者の値は異なることが分かった。したがって  $\theta = +\infty$  と  $\theta = 10$  で同じ意思決定を行うことが明らかになった一方で、家計が不確実性に対して想定した最悪のシナリオに関しては異なる評価をしていることが分かった。

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々にご協力をいただきました。指導教員である岩崎敦准教授には、研究の進め方から、文章の書き方、発表スライドの作り方まで、多大なご指導をいただきました。毎朝の英語ミーティングに始まり、研究について行き詰ったときも励みになる言葉をかけていただくなど、精神面等多方面で多大なサポートをしていただきました。心から感謝申し上げます。また、長濱章仁助教には研究室でも普段からお声がけいただき、研究の励みとなりました。ニューヨーク大学の池上慧様には、研究を進める上で専門的なご意見を数多くいただきました。マクロ経済学の初学者で右も左も分からない僕でしたが様々な参考文献をあげて下さり、また毎週のミーティングでも多角的にわかりやすく教示くださりました。みなさまに、深く感謝申し上げます。

先生方のみならず、岩崎研究室の先輩方をはじめ、大変お世話になりました。島田さんには研究活動において、研究に必要な物品の購入や、学会の事務処理など、様々なご支援をいただきました。谷川颯希君や石橋宙希君には他愛ない会話から研究の相談までいろいろなお話に乗ってくれました。学生生活では仲良くしてくれる皆なでしたが個々の研究では模範となる姿を示してくれ僕もそれに続くことができました。厚くお礼申し上げます。最後に生活費や精神面等たくさんの助力をいただいた両親に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] Mark Aguiar and Erik Hurst. Consumption vs. expenditure. Working Paper 10307, National Bureau of Economic Research, February 2004.
- [2] David Ahn, Syngjoo Choi, Douglas Gale, and Shachar Kariv. Estimating ambiguity aversion in a portfolio choice experiment. *Quantitative Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 195–223, 2014.
- [3] B. Douglas Bernheim, Jonathan Skinner, and Steven Weinberg. What accounts for the variation in retirement wealth among u.s. households? *The American Economic Review*, Vol. 91, No. 4, pp. 832–857, 2001.
- [4] Anmol Bhandari, Jaroslav Borovička, and Paul Ho. Identifying ambiguity shocks in business cycle models using survey data. Working Paper 22225, National Bureau of Economic Research, May 2016.
- [5] Pierre Collin-Dufresne, Michael Johannes, and Lars A. Lochstoer. Parameter learning in general equilibrium: The asset pricing implications. *The American Economic Review*, Vol. 106, No. 3, pp. 664–698, 2016.
- [6] R.E. Hall. *Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence*. The Journal of Political Economy, 1981.
- [7] Daniel S. Hamermesh. Consumption during retirement: The missing link in the life cycle. Working Paper 930, National Bureau of Economic Research, July 1982.
- [8] Lars Peter Hansen and Thomas J. Sargent. *Robustness*. Princeton University Press, 2008.
- [9] Lars Peter Hansen, Thomas J. Sargent, et al. Certainty equivalence and model uncertainty. In *Conference on Models and Monetary Policy: Research in the Tradition of Dale Henderson, Richard Porter, and Peter Tinsley*. Citeseer, 2004.
- [10] Michael D. Hurd and Susann Rohwedder. The adequacy of economic resources in retirement. *Employee Benefits*, 2008.
- [11] David G. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, 1997.
- [12] Pascal J. Maenhout. Robust portfolio rules and asset pricing. *Review of financial studies*, Vol. 17, No. 4, pp. 951–983, 2004.
- [13] Ian R. Petersen, Matthew R. James, and Paul Dupuis. Minimax optimal control



- of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, pp. 398–412, 2000.
- [14] David Romer. 上級マクロ経済学. Advanced macroeconomics. 日本評論社, 東京, Japan, 2010.3.
- [15] Midori Wakabayashi. The retirement consumption puzzle in japan. *Journal of Population Economics*, Vol. 21, pp. 983–1005, 2008.
- [16] 木村英紀, 森武宏, 藤井隆雄. ロバスト制御. コロナ社, 1994.
- [17] 加藤寛一郎. 最適制御入門. 東京大学出版会, 1987.
- [18] 佐藤竜馬. 最適輸送の理論とアルゴリズム. 講談社, 2023.
- [19] 國松禎明. 最適制御の実用設計法. 計測と制御, Vol. 55, No. 4, pp. 380–380, 2016.