QuantEcon 26 を理解してみよう。

電気通信大学　足立幸大

2023 年 9 月 19 日作成

quantecon::::link

$$\max_w \{(Ax+Bu+Cw)'P(Ax+Bu+Cw)-\theta w'w\} \\ =(Ax+Bu)'\mathcal{D}(P)(Ax+Bu) \tag{1}$$

を導いてみよう。

$$J(w)=(Ax+Bu+Cw)'P(Ax+Bu+Cw)-\theta w'w \tag{2}$$

として、両辺を微分してみる。

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w}=2C'P(Ax+Bu+Cw)-2\theta w \tag{3}$$

$\frac{\partial J(w)}{\partial w}=0$ で最大化する w が分かるので、

$$2C'P(Ax+Bu+Cw)-2\theta w=0 \tag{4}$$

$$\theta w - C'PCw = C'P(Ax+Bu) \tag{5}$$

$$w^* = (\theta I - C'PC)^{-1}C'P(Ax+Bu) \tag{6}$$

これを J に入れて計算しなおすと、

$$J(w^*)=(Ax+Bu)'\left[P+PC\theta\left(I-C'PC\right)^{-1}C'P\right](Ax+Bu) \tag{7}$$

$$=(Ax+Bu)'\mathcal{D}(P)(Ax+Bu) \qquad (\text{但し } \mathcal{D}(P):=P+PC\left(\theta I-C'PC\right)^{-1}C'P) \tag{8}$$

導出できた。従ってそもそものベルマン方程式は以下の様に書き直すことができる。

$$x'Px=\min_u\{x'Rx+u'Qu+\beta(Ax+Bu)'\mathcal{D}(P)(Ax+Bu)\} \tag{9}$$

よって最適レギュレータは $F:=(Q+\beta B'\mathcal{D}(P)B)^{-1}\beta B'\mathcal{D}(P)A$

これをベルマン方程式に入れて整理すると、$x'Px=x'\mathcal{B}(\mathcal{D}(P))x$ を得る。where,

$$\mathcal{B}(P):=R-\beta^2A'PB\left(Q+\beta B'PB\right)^{-1}B'PA+\beta A'PA \tag{10}$$

Under some regularity conditions、$\mathcal{B}\circ\mathcal{D}$ は a unique positive definite fixed point を持つらしい。

その時の point を $\hat{P}$ とすると、

$$\hat{F}:=\left(Q+\beta B'\mathcal{D}(\hat{P})B\right)^{-1}\beta B'\mathcal{D}(\hat{P})A \tag{11}$$

$$\hat{K}:=\left(\theta I-C'\hat{P}C\right)^{-1}C'\hat{P}(A-B\hat{F}) \tag{12}$$

これは

$$Ax+Bu=Ax-BFx \tag{13}$$

$$=(A-B\hat{F})x \tag{14}$$

より分かる。

Note also that if θ is very large(σ がめっちゃ小さい), then $\mathcal{D}$ is approximately equal to the identity mapping. Hence, when θ is large, $\hat{P}$ and $\hat{F}$ are approximately equal to their standard LQ values. Furthermore, when θ is large, $\hat{K}$ is approximately equal to zero.(所得が正確に予測できているということ) Conversely, smaller θ is associated with greater fear of model misspecification and greater concern for robustness.