Relazioni e funzioni

Relazioni binarie

Ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi A e B è una **relazione binaria** tra A e B.

Il prodotto cartesiano esprime tutti i possibili legami tra gli elementi dei due insiemi,
quindi
una relazione è uno specifico legame tra insiemi.

Relazioni binarie

Ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi A e B è una **relazione binaria** tra A e B.

Se $A = B$ si parla di relazione in un insieme

Rappresentazione

Elencazione

Proprietà caratteristica

Diagramma a frecce

Tabella a doppia entrata

Rappresentazione cartesiana

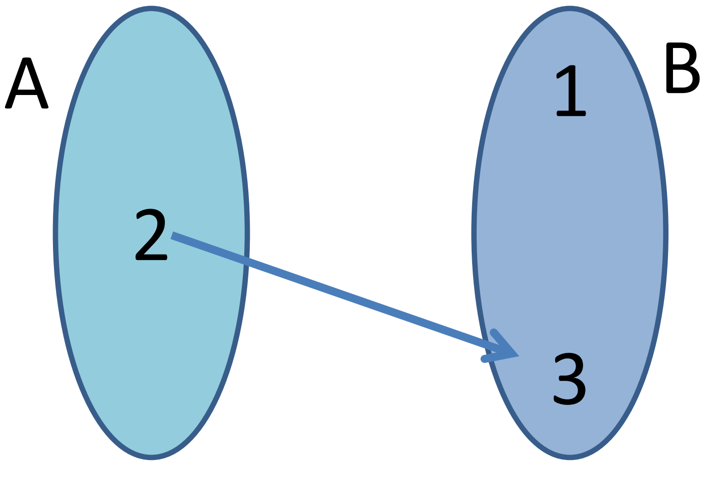
Rappresentazione

$A=\{2\}$ $B=\{1,3\}$ $A\times B=\{(2,1),(2,3)\}$

Elencazione $R=\{(2,3)\} \subset A\times B$

Proprietà caratteristica $R=\{(a,b) \in A\times B \mid a<b\}$

Diagramma a frecce



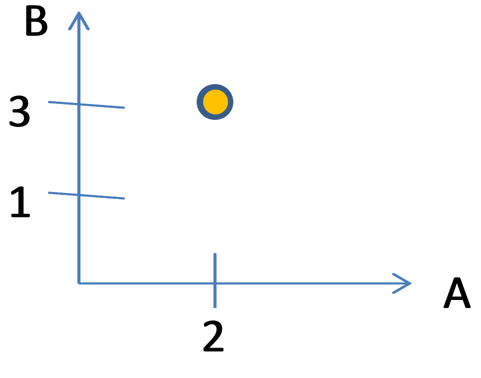
Rappresentazione

A={2} B={1,3} AxB={(2,1),(2,3)}

Tabella a doppia entrata

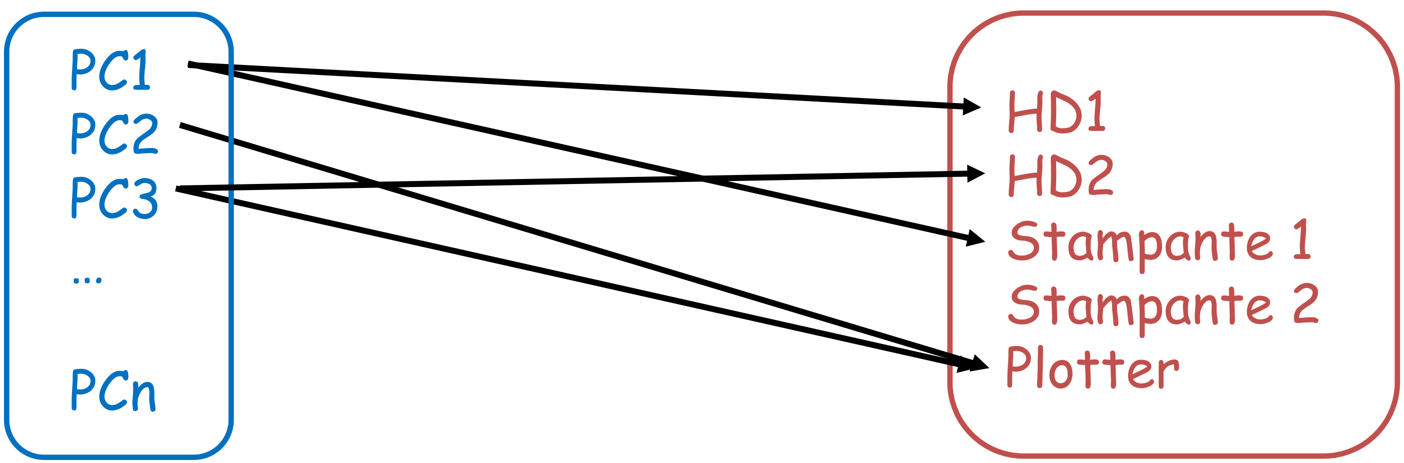
A \ B	1	3
2	(2,1)	(2,3)

Rappresentazione cartesiana



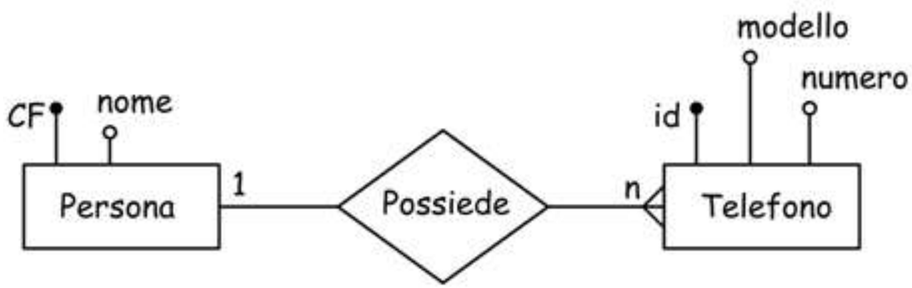
Esempio

Sia A={PC presenti in un certo ufficio} e B={Insieme dispositivi di rete}



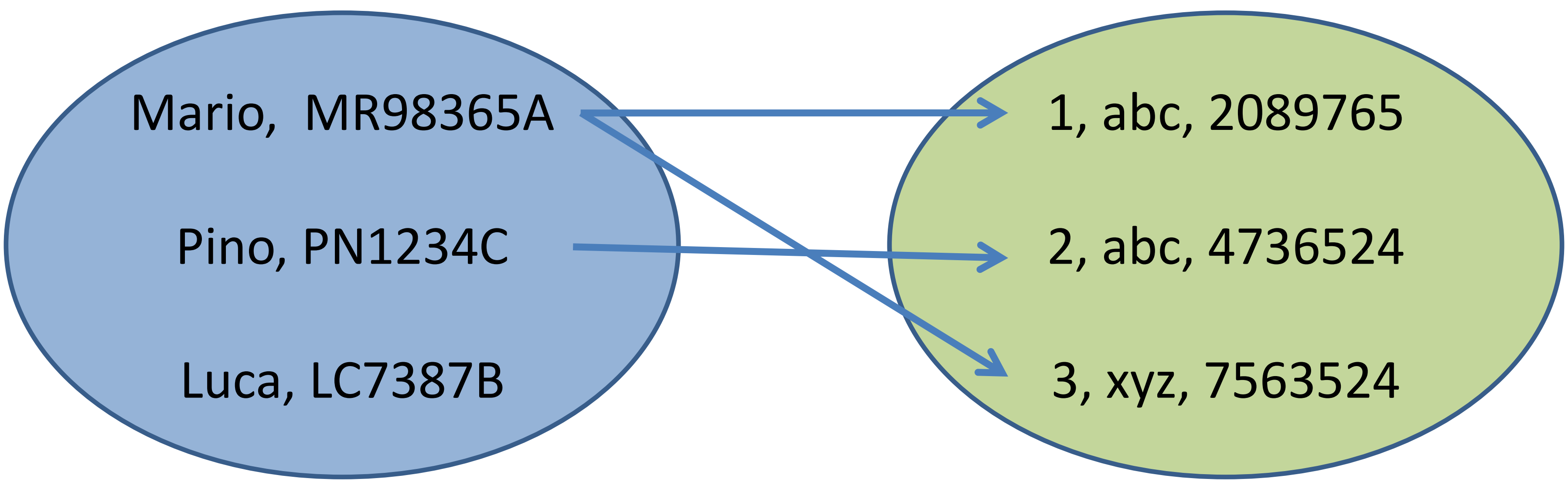
Relazioni in Informatica

Data Base relazionali



Persone

Telefoni



Proprietà di una relazione su un insieme

Riflessiva $\forall a \in A,\ aRa$

Antiriflessiva $\nexists a \in A,\ aRa$

Simmetrica $\forall a,b \in A,\ aRb \rightarrow bRa$

Antisimmetrica $\forall a,b \in A \mid a \neq b,\ aRb \rightarrow b\not{R}a$

$\boxed{\forall a,b \in A \mid aRb \wedge bRa \rightarrow a=b}$

Transitiva $\forall a,b,c \in A,\ aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

Proprietà di una relazione su un insieme

$A=\{1,2\}$ $A \times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$R=\{(1,1),(1,2)\}$

~~Riflessiva~~ ~~Antiriflessiva~~

~~Simmetrica~~ Antisimmetrica

Transitiva

Proprietà di una relazione su un insieme

$A=\{1,2\}$ $A \times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$R=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

Riflessiva ~~Antiriflessiva~~

~~Simmetrica~~ Antisimmetrica

Transitiva

Proprietà di una relazione su un insieme

$A=\{1,2\}$ $A \times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$R=\{(1,2)\}$

~~Riflessiva~~ Antiriflessiva

~~Simmetrica~~ Antisimmetrica

~~Transitiva~~

Relazioni di equivalenza

Riflessiva
Simmetrica
Transitiva

Uguaglianza
Congruenza

Equi-estensione
Similitudine

Avere lo stesso resto nella divisione per 5
Avere la stessa altezza di
Essere pari o dispari

Relazioni d'ordine

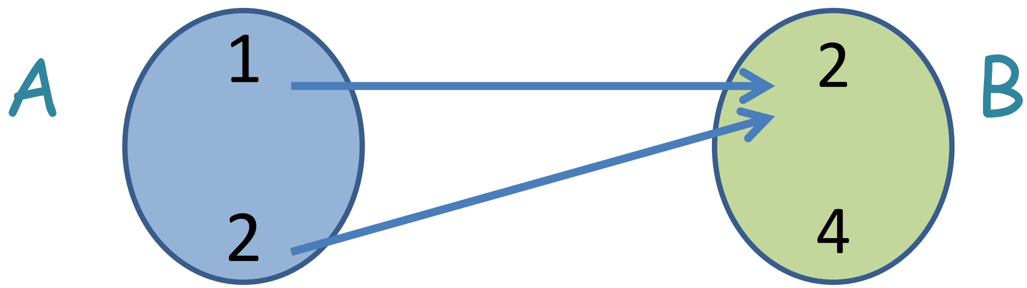
Antisimmetrica
Transitiva

Attenzione: può godere anche di altre proprietà come la riflessiva ma le prime due sono necessarie.

Essere maggiore di
Essere minore o uguale di
Essere più alto di
Essere più a destra di

Funzioni

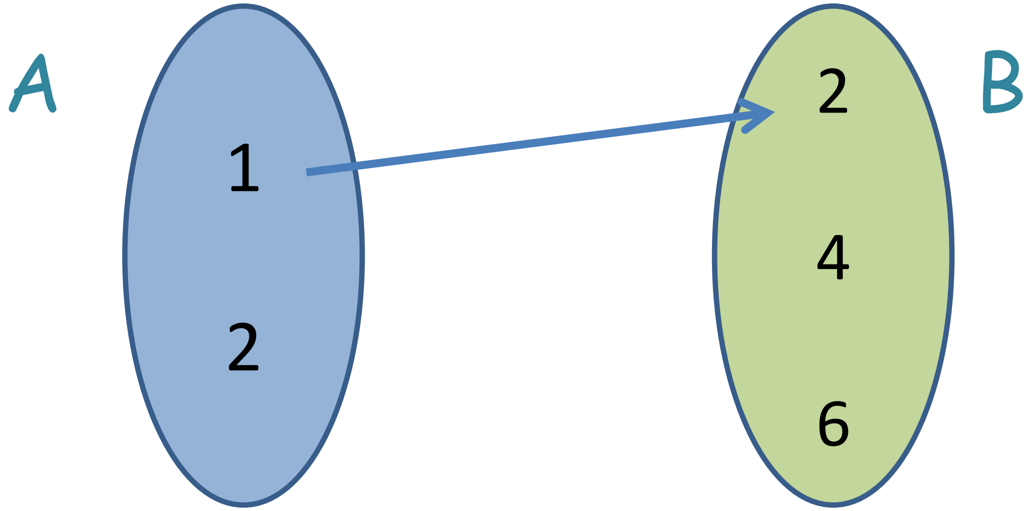
Una **funzione** di A in B è una particolare relazione che ad ogni elemento del primo insieme A associa uno ed un solo elemento del secondo insieme B.



L'insieme A si chiama **dominio** della funzione.
L'insieme B si chiama **codominio** della funzione

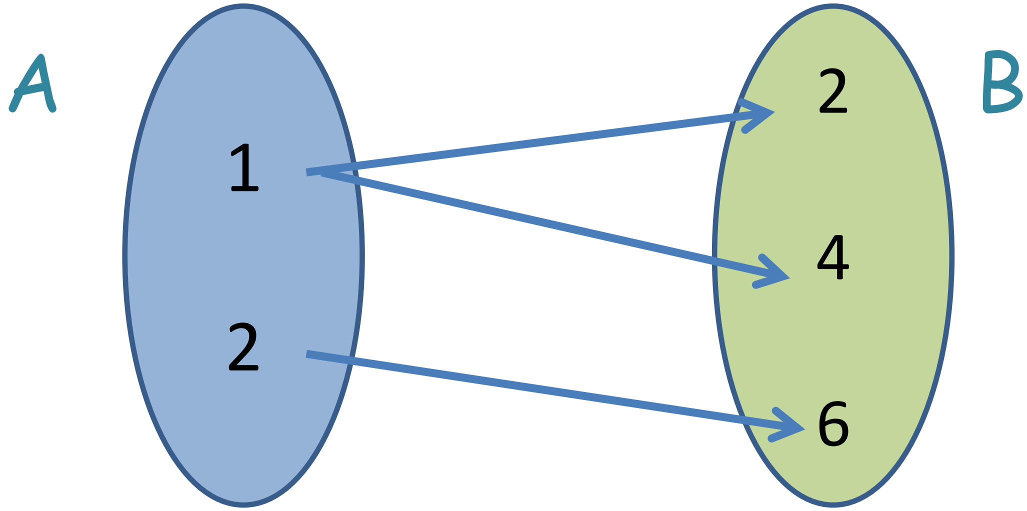
Funzioni

Una **funzione** di *A* in B è una relazione che ad ogni elemento del primo insieme *A* associa uno ed un solo elemento del secondo insieme B.



Funzioni

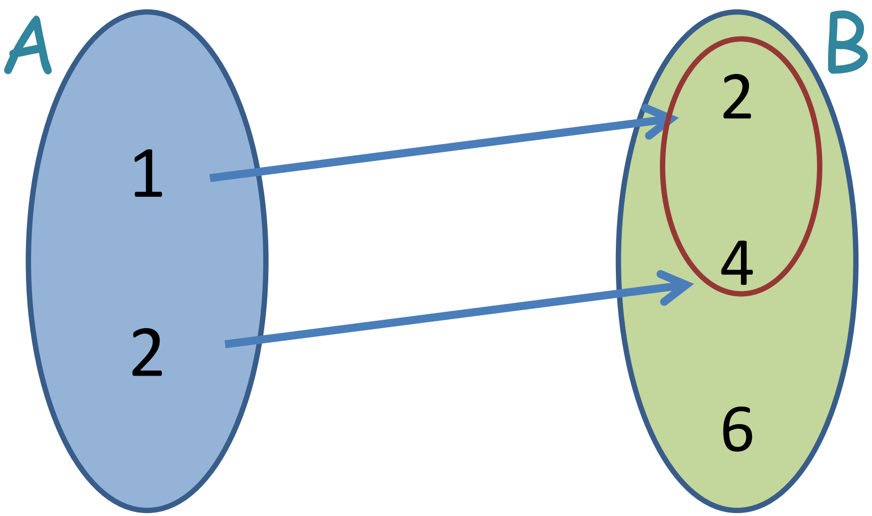
Una **funzione** di *A* in B è una relazione che ad ogni elemento del primo insieme *A* associa uno ed un solo elemento del secondo insieme B.



Funzioni

Una **funzione** da A in B esprime un legame. Ogni elemento di A ***ha almeno uno ed un*** solo corrispondente elemento in B.

Funzioni



$f: A \to B$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

y è l'immagine di x

Il sottoinsieme di B costituito da tutte le immagini degli elementi di A è detto immagine del dominio Im (A).

Dominio: A

Codominio: B

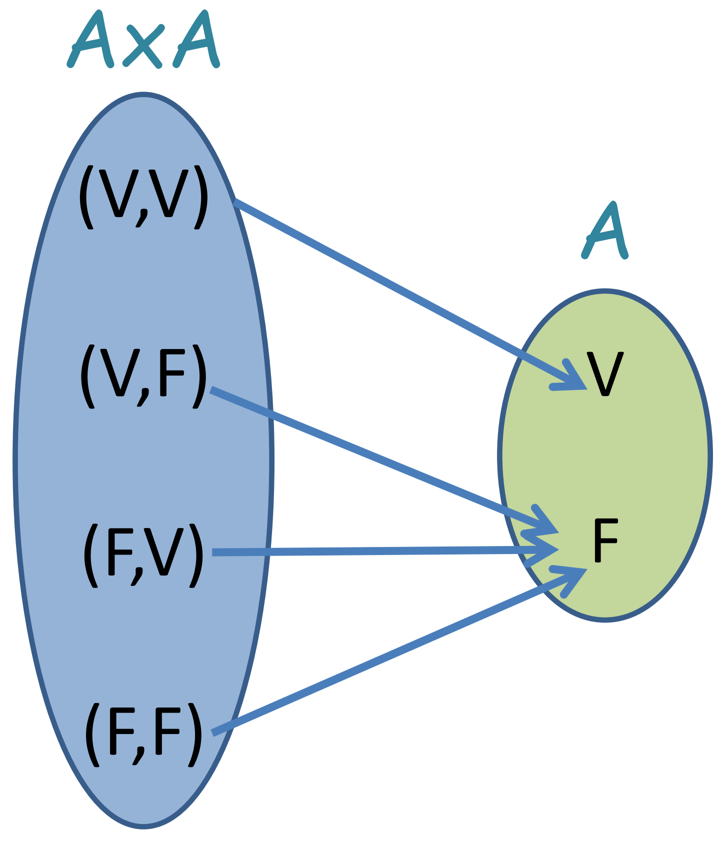
Immagine di A: {2,4}

Esempio

Sia $A = \{V, F\}$

$f: A \times A \rightarrow A$

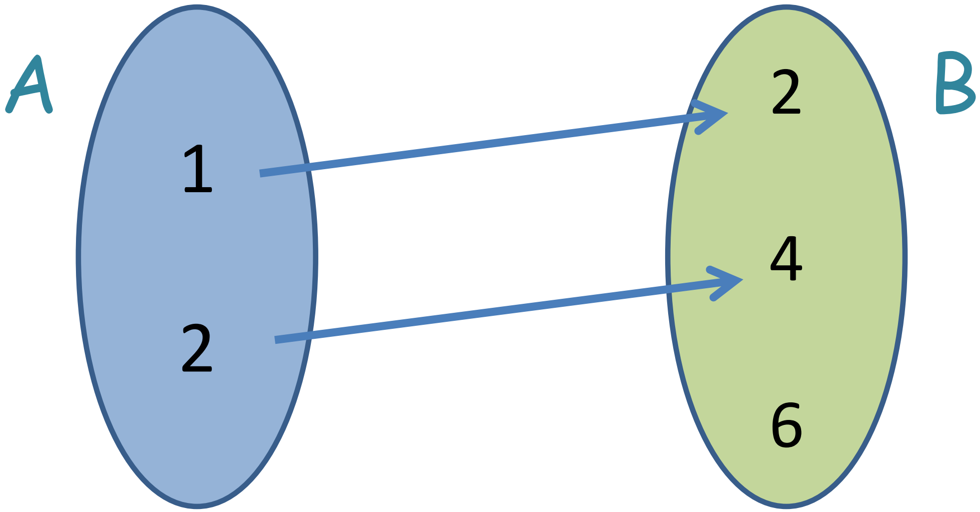
$(x,y) \rightsquigarrow z = x \wedge y$



Dominio: $A \times A$

Codominio = Immagine di $A = A$

Grafico di funzione



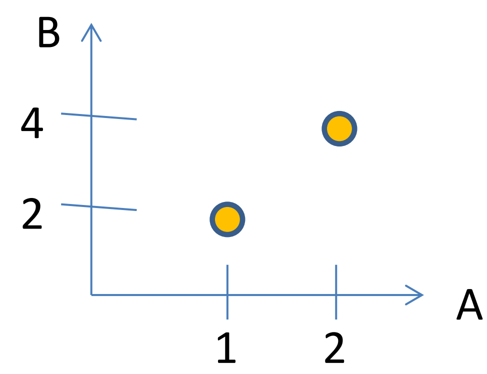
$f: A \rightarrow B$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

Si definisce grafico di una funzione f

$\{(x,y) | x \in A \wedge y = f(x) \in B\} \subseteq \mathbf{A \times B}$

Rappresentazione cartesiana



Funzioni e relazioni

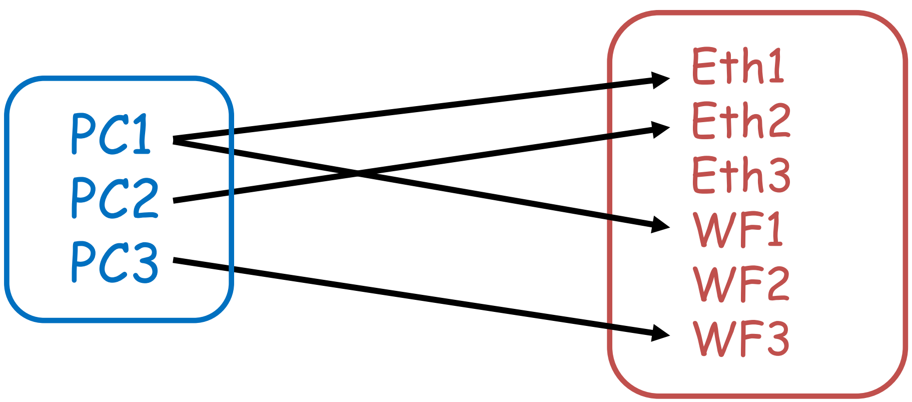
Tutte le funzioni sono relazioni, pertanto è possibile rappresentarle negli stessi modi,

ma non tutte le relazioni sono funzioni

Esempio

Relazione che non è funzione

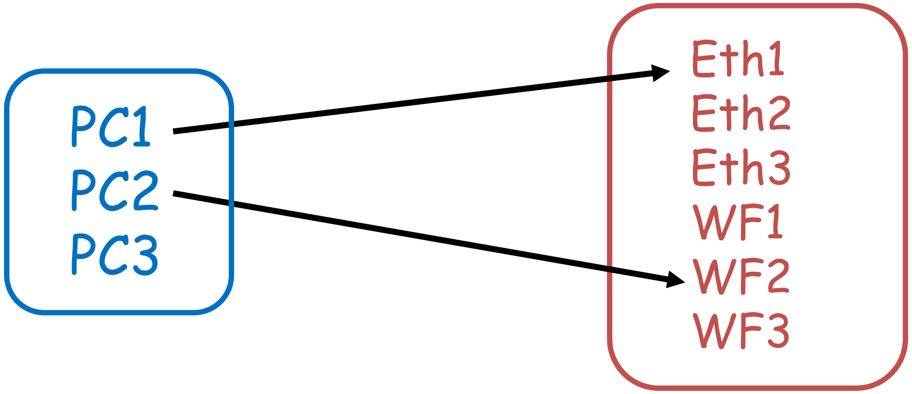
Sia A={PC} e B={schede di rete}



Esempio

Relazione che non è funzione

Sia A={PC} e B={schede di rete}



Esempio

Relazione che è anche una funzione

Sia A={Indirizzi IP} e B={schede di rete}

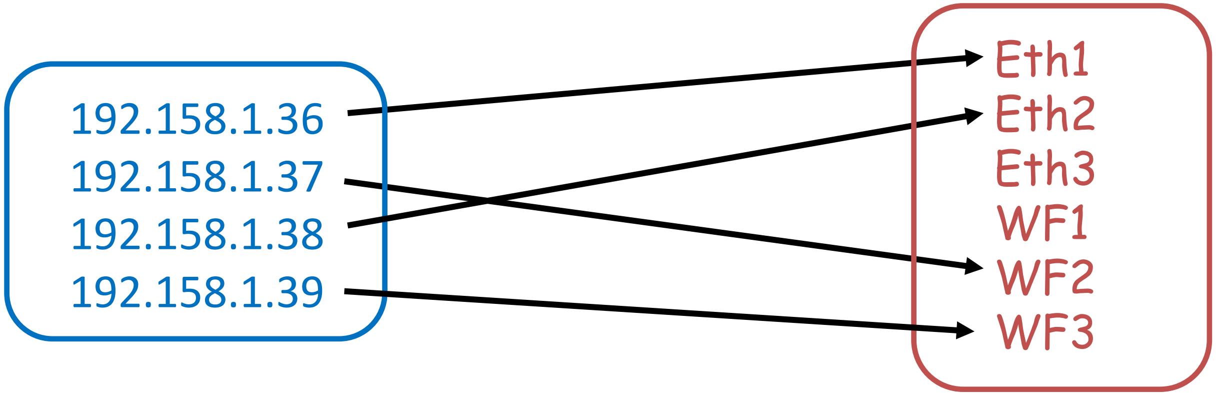
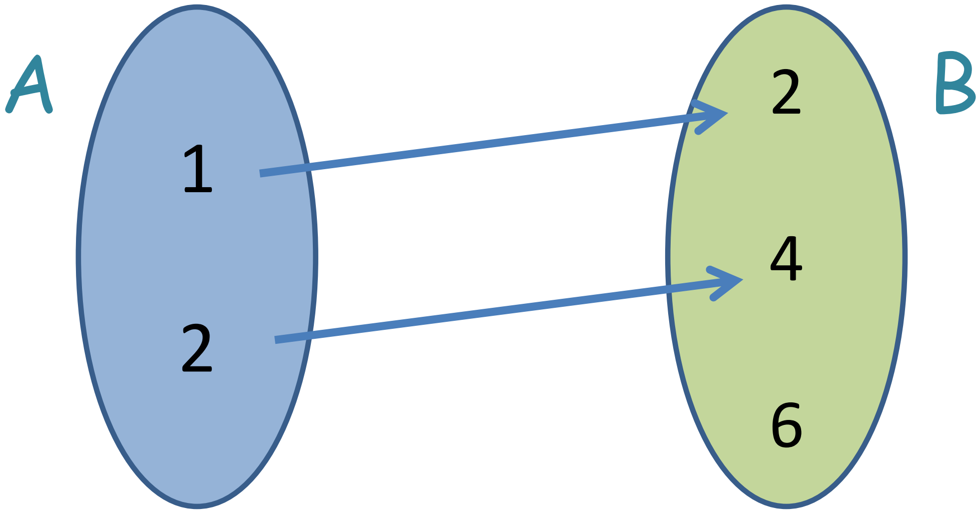


Grafico di funzione



$f: A \to B$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

Si definisce grafico di una funzione f

$\{(x,y) | x \in A \wedge y=f(x) \in B\} \subseteq \mathbf{A \times B}$

Rappresentazione cartesiana

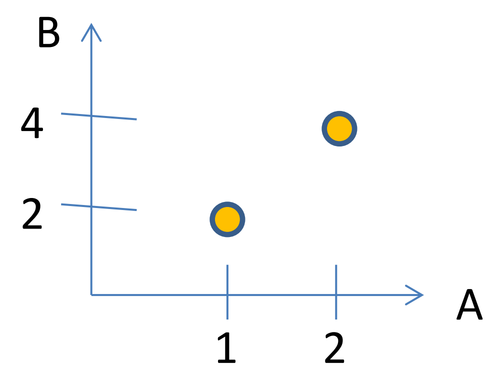


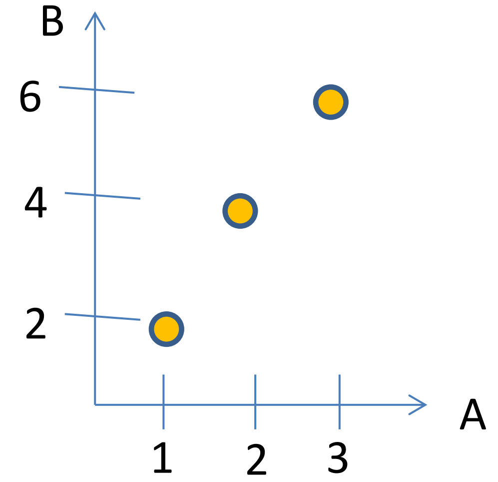
Grafico di funzione

Si definisce grafico di una funzione f
$\{(x,y) \mid x \in A \wedge y=f(x) \in B\} \subseteq \mathbf{A \times B}$

$f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$
$x \rightsquigarrow y = 2x$

grafico di f:
$\{(x,2x) \mid x \in A\}$

Rappresentazione cartesiana



Esercizio

A={pianeti del sistema solare}
B={lettere dell'alfabeto Italiano}

f:A→B

A

ad ogni pianeta associa la lettera iniziale del suo nome

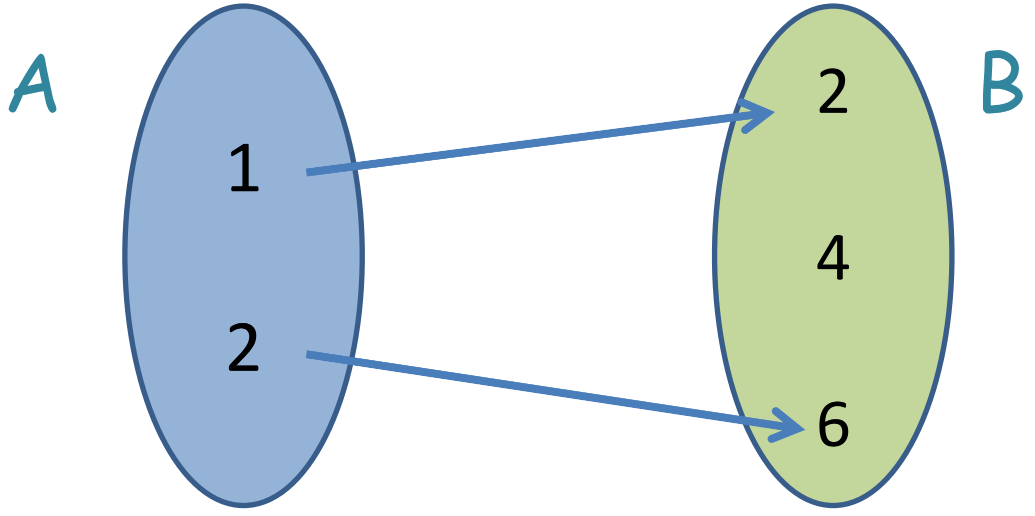
B

Determinare dominio e immagine del dominio

Fornire una rappresentazione grafica cartesiana della funzione.

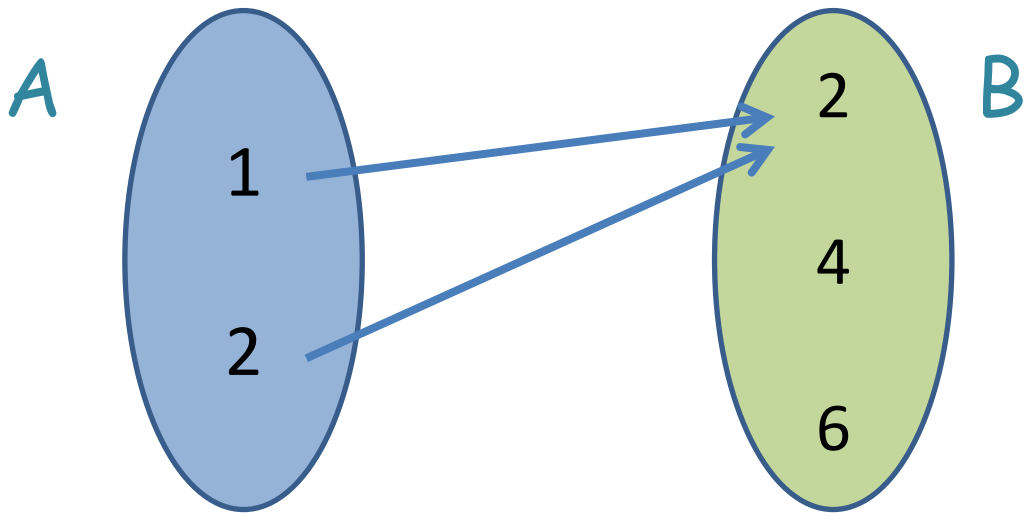
Funzione iniettiva

Una funzione $A \rightarrow B$ si dice iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{A},\ x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



Funzione non iniettiva

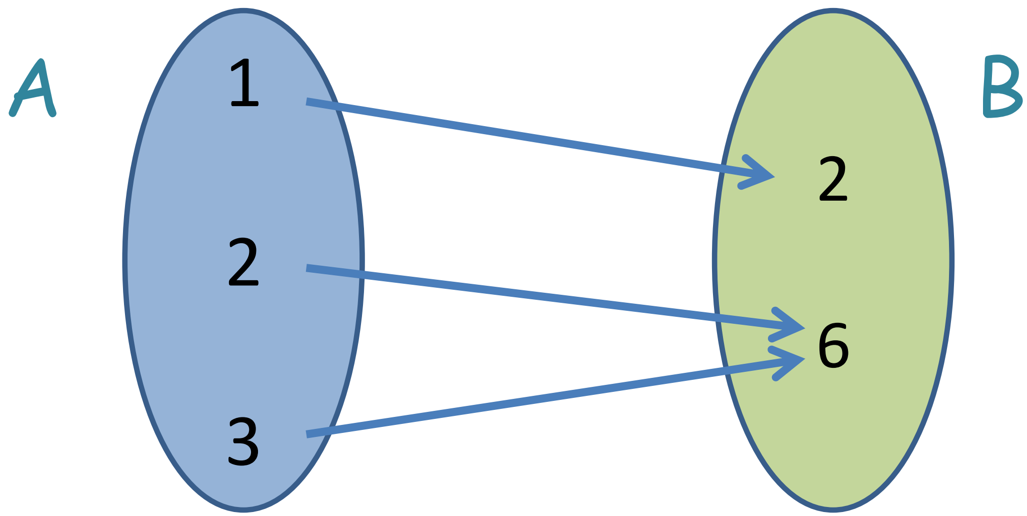
Due valori del dominio hanno la stessa immagine



Funzione suriettiva

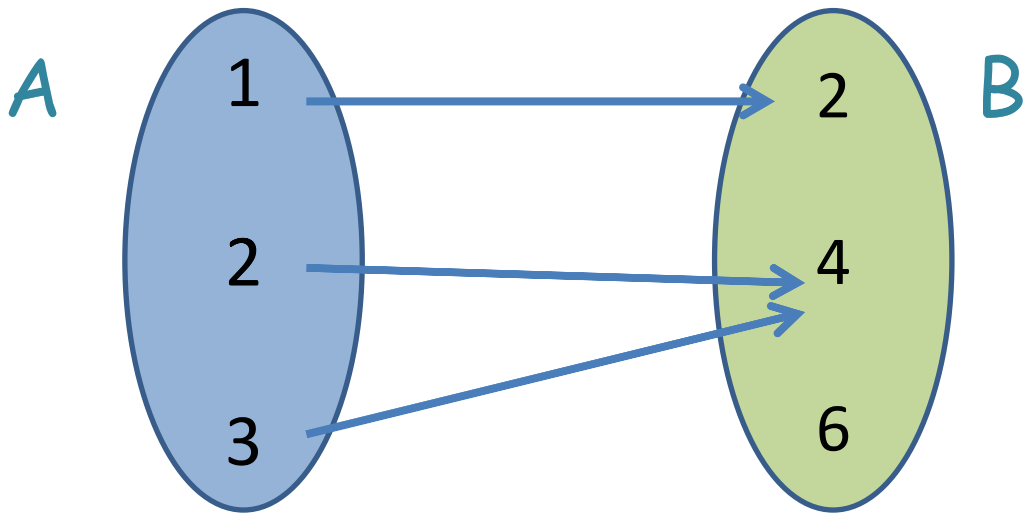
Una funzione $f{:}A \to B$ si dice suriettiva se $Im(A)=B$

Una funzione si dice suriettiva se
$\forall y \in B,\ \exists x \in A \mid f(x)=y.$



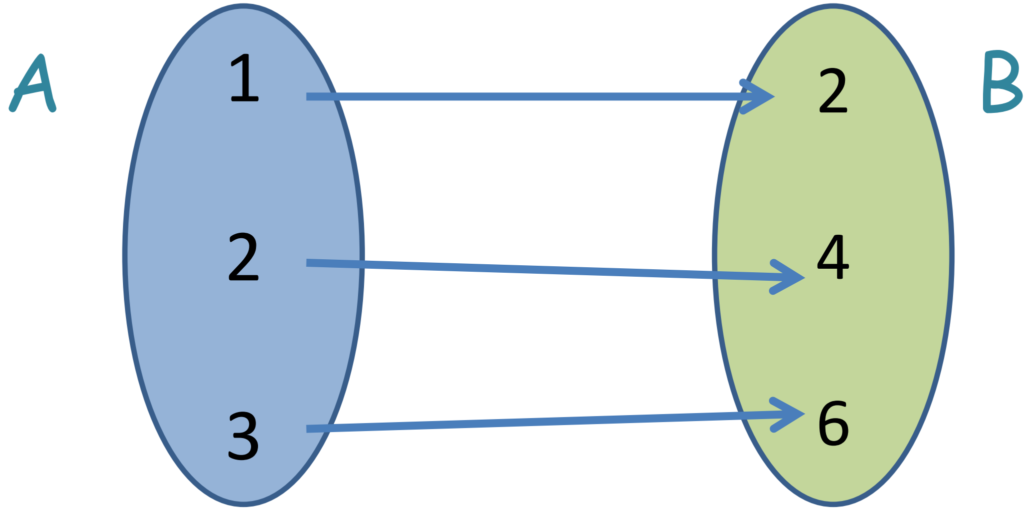
Funzione non suriettiva

Almeno un elemento del codominio non è immagine di alcun elemento del dominio



Funzione bigettiva o biunivoca

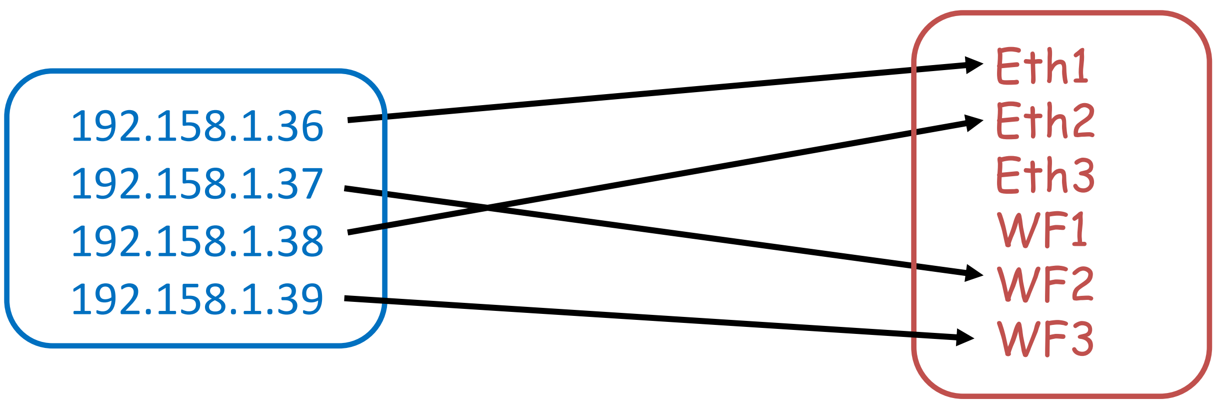
Una funzione si dice bigettiva se è iniettiva e suriettiva.



Esempio

Tale funzione è iniettiva, suriettiva, biunivoca?

Sia A={Indirizzi IP} e B={schede di rete}



Funzione identità

La funzione identità è una funzione su un insieme che ad ogni elemento del dominio fa corrispondere l'elemento stesso.

$i: A \to A$

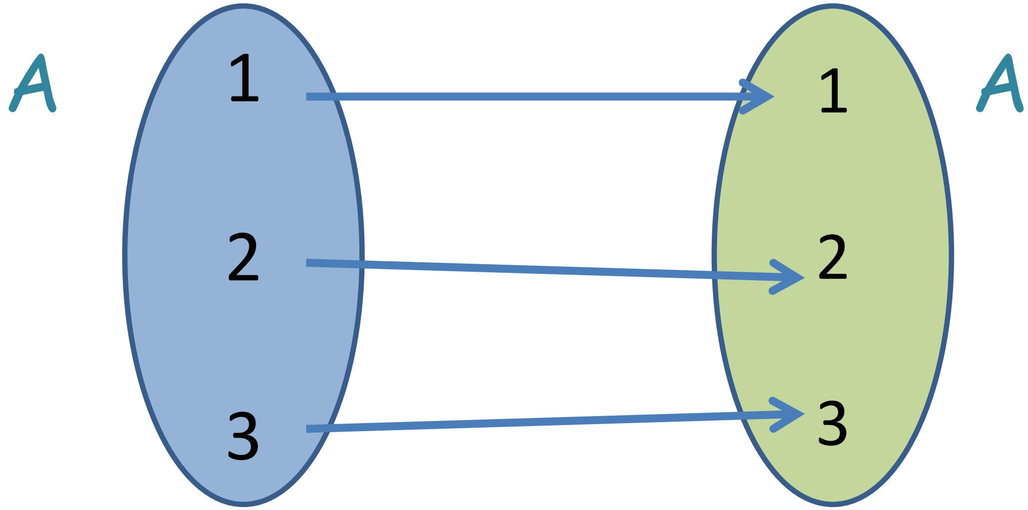
$x \rightsquigarrow y = f(x)=x$

$Im(D)=A$

La funzione identità è biunivoca.

Funzione identità

La funzione identità è una funzione su un insieme che ad ogni elemento del dominio fa corrispondere l'elemento stesso.



Composizione di funzioni

Siano date 2 funzioni f e g così definite

$$f: A \to B \qquad x \rightsquigarrow y = f(x)$$

$$g: B \to C \qquad y \rightsquigarrow z = g(y)$$

Si definisce funzione composta di f e g la funzione $h = g \circ f$

$$g \circ f : A \to C \qquad x \rightsquigarrow z = g(f(x))$$

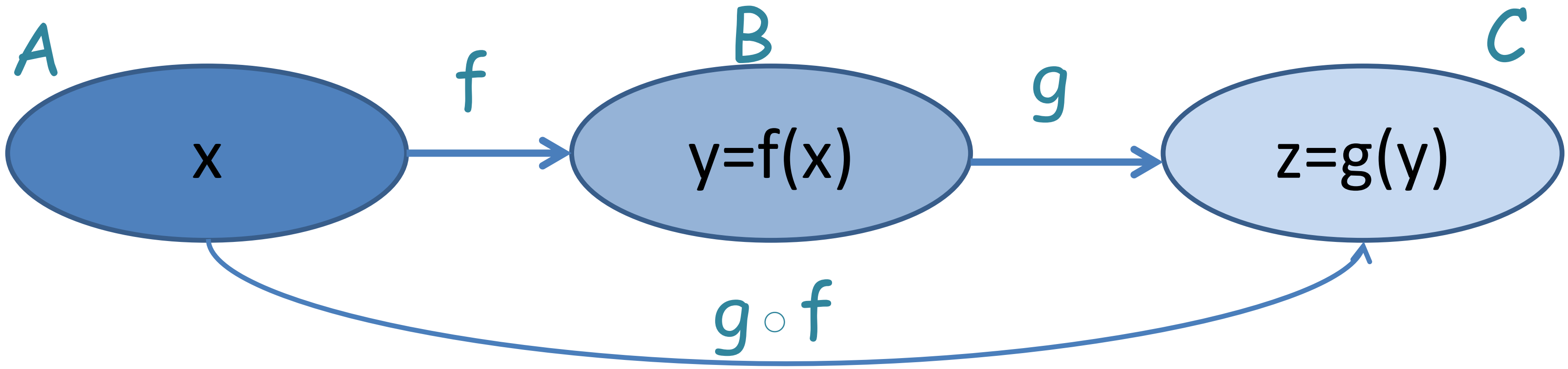
Composizione di funzioni

$f: A \to B$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

$g: B \to C$

$y \rightsquigarrow z = g(y)$



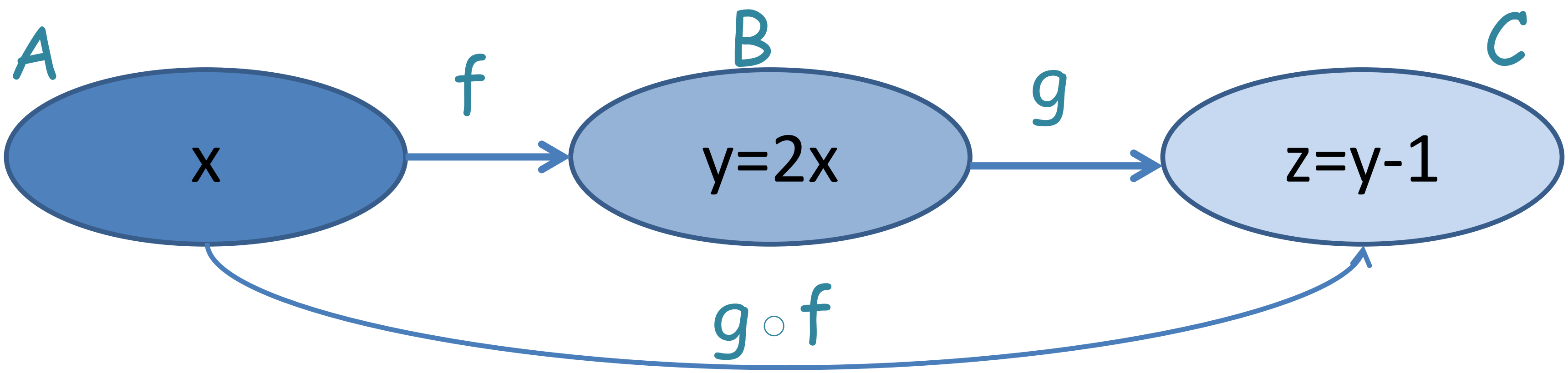
$g \circ f : A \to C$

$x \rightsquigarrow z = g(f(x))$

Funzioni composte

$f: \{1,2\} \rightarrow \{2,4\}$
$x \rightsquigarrow y = 2x$

$g: \{2,4\} \rightarrow \{1,3\}$
$y \rightsquigarrow z = y-1$

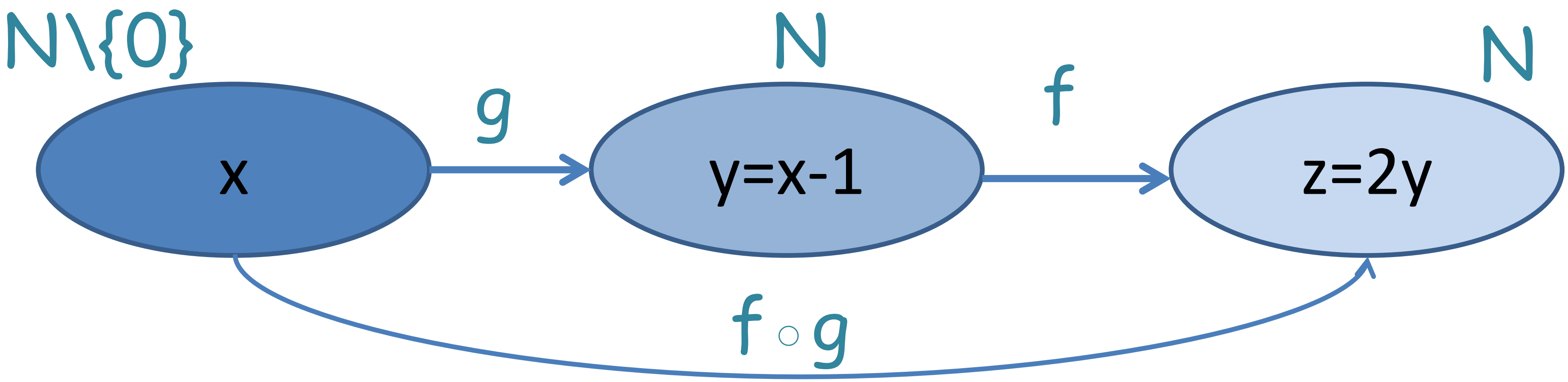


$g \circ f : A \rightarrow C$
$x \rightsquigarrow z = g(f(x))=2x-1$

Funzioni composte

$f: \{1,2\} \rightarrow \{2,4\}$
$x \rightsquigarrow y = 2x$

$g: \{2,4\} \rightarrow \{1,3\}$
$y \rightsquigarrow z = y-1$



$f \circ g\,(4) = f(3)$????

La composizione non è commutativa

Funzioni composte

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \rightsquigarrow y = 2x$$

$$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$y \rightsquigarrow z = y-1$$

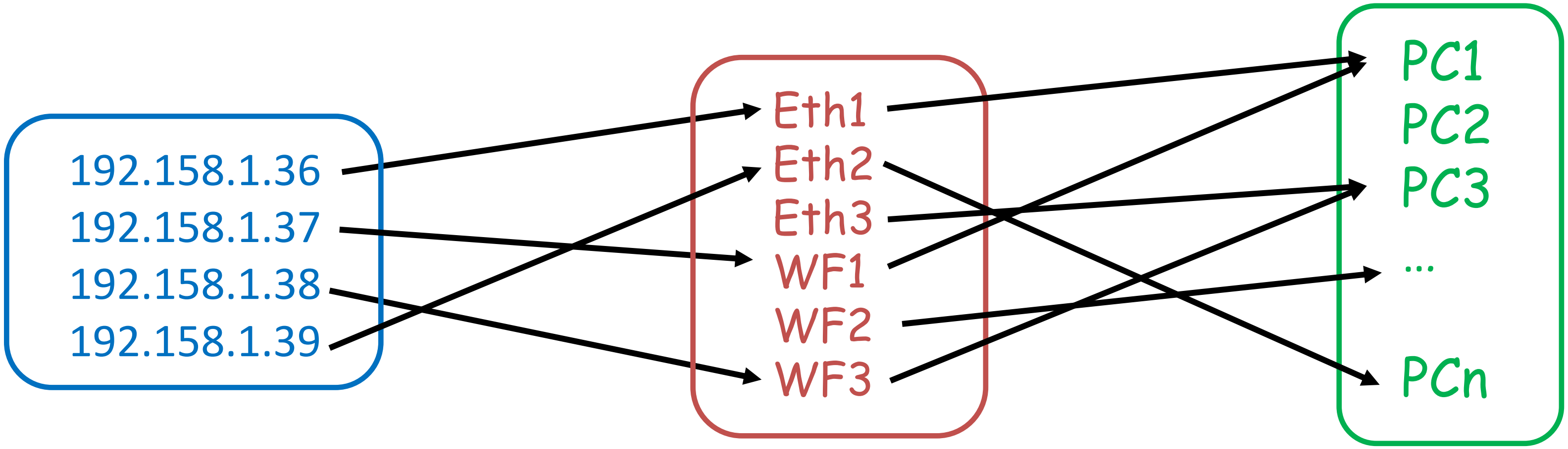
$$g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \rightsquigarrow z = g(f(x))=2x-1$$

$$f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \rightsquigarrow z = f(g(x))=2(x-1)$$

La composizione non è commutativa

Esempio

Sia A={Indirizzi IP}, B={schede di rete} e C={PC}



Funzione inversa

Sia data una funzione biunivoca

$$f: A \to B$$
$$x \rightsquigarrow y = f(x)$$

Si definisce funzione inversa di f la funzione f^{-1}

$$f^{-1}: B \to A$$
$$y \rightsquigarrow x \mid f(x) = y$$

Anche la funzione inversa è biunivoca e invertibile.

Funzione inversa

N.B: Non confondere f^{-1} con $1/f$

Ogni funzione $f{:}A \to B$ iniettiva è invertibile se si riduce il codominio a $Im(A)$.

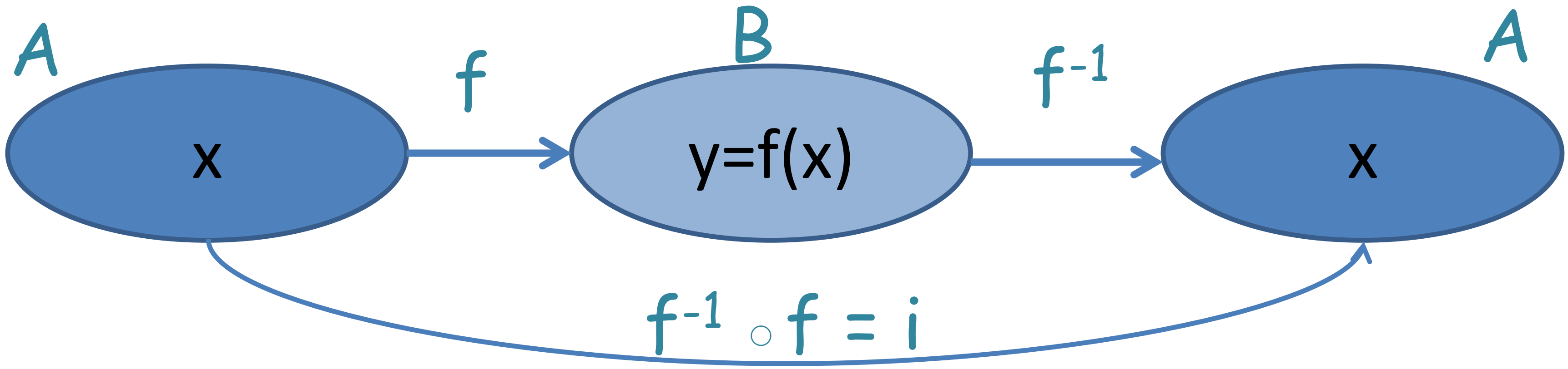
Funzione inversa

$f: A \to B$

$x \rightsquigarrow y = f(x)$

$f^{-1}: B \to A$

$y \rightsquigarrow x \mid f(x) = y$



$i = f^{-1} \circ f : A \to A$

$x \rightsquigarrow f^{-1}(f(x)) = x$

Funzione inversa

$f: A \to B$

$\quad x \rightsquigarrow y = f(x)$

$f^{-1}: B \to A$

$\quad y \rightsquigarrow x \mid f(x) = y$

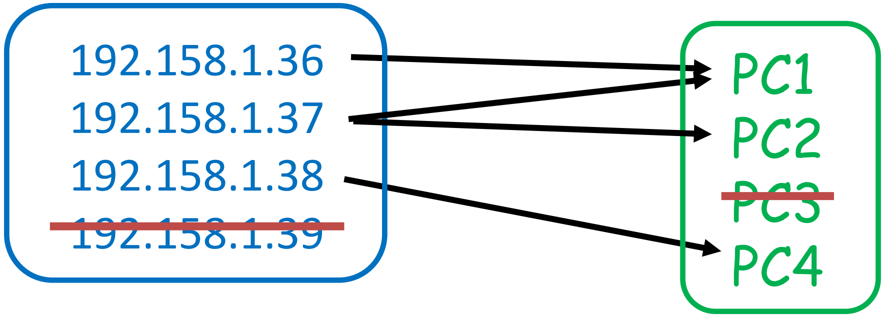
$$\begin{tikzcd}
\overset{B}{y} \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f \circ f^{-1} = i"'] & \overset{A}{x} \arrow[r, "f"] & \overset{B}{y}
\end{tikzcd}$$

$i = f \circ f^{-1}: B \to B$

$\quad y \rightsquigarrow f(f^{-1}(y)) = y$

Esempio

Sia A={Indirizzi IP} e B={PC}



E' una funzione? E' invertibile?

Esercizio

A={pianeti del sistema solare}
B={lettere dell'alfabeto Italiano}

$f: A \rightarrow B$

$$A \longrightarrow \boxed{\text{ad ogni pianeta associa la lettera iniziale del suo nome}} \longrightarrow B$$

Stabilire se f è iniettiva, suriettiva o bigettiva.

Dopo aver ristretto B a Im(A), valutare se la funzione è invertibile

Esercizio

A={pianeti del sistema solare}
B={coppie di lettere}

$f: A \rightarrow B$

A

ad ogni pianeta associa la coppia delle prime due lettere del suo nome

B

Stabilire se f è iniettiva, suriettiva o bigettiva.

Dopo aver ristretto B a Im(A), determinare f^{-1}

Esercizio

A={pianeti del sistema solare}
B={lettere dell'alfabeto Italiano}
C={numeri naturali minori di 22}

$f: A \rightarrow B$

ad ogni pianeta associa la lettera iniziale del suo nome

$g: B \rightarrow C$

ad ogni lettera associa un numero che rappresenta la sua posizione nell'alfabeto

Costruire e rappresentare in un modo a scelta la funzione $g \circ f$