Teoria degli insiemi

Insiemi ed elementi

Definizione (Georg Cantor):

Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si dicono elementi dell'insieme.

La definizione deve essere univoca e non soggettiva. Deve sempre essere possibile stabilire che un oggetto appartiene o non appartiene all'insieme.

Esempi:

- L'insieme delle persone simpatiche
- L'insieme degli alberi alti

Non sono insiemi

- L'insieme degli alberi alti 326 cm

Rappresentazione

Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole mentre gli elementi con lettere minuscole.

Intensiva o per proprietà
A={numeri naturali dispari e minori di 4}

Estensiva o per elencazione
B={1,3}

Grafica *(diagrammi di Eulero Venn)*

Rappresentazione

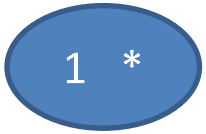
Intensiva

A={numeri naturali pari}

Estensiva

B={ 1, *, ciao, ♪ }

Grafica



C={alpini morti nella campagna di Russia}

Finito non decidibile

D={soluzioni dell'eq. $x^8+x^6+x-3=0$}

Finito e decidibile

Appartenenza

Un oggetto è elemento di un insieme se la proprietà che caratterizza l'insieme è vera per quell'oggetto.

$$a \in A$$

Altrimenti l'oggetto non appartiene all'insieme

$$a \notin A$$

Cardinalità

Si dice cardinalità di un insieme la quantità dei suoi elementi.

$\#A$

A={numeri naturali maggiori di 4 e minori di 7}

$\#A = 2$

Uguaglianza

Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi.

$$\mathbf{A=B \Leftrightarrow \forall x,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

A={insieme dei numeri naturali minori di 5}

$B=\{x | x \in N \wedge x < 5\}$

Insieme vuoto

Si dice **insieme vuoto** l'insieme che non contiene alcun elemento.

$$\varnothing = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}$$

A = {numeri naturali dispari minori di 1} = $\varnothing$

L'insieme vuoto ha cardinalità 0

Sottoinsiemi

Un insieme *A* è **sottoinsieme** di un insieme B se tutti gli elementi di *A* sono anche elementi di B.

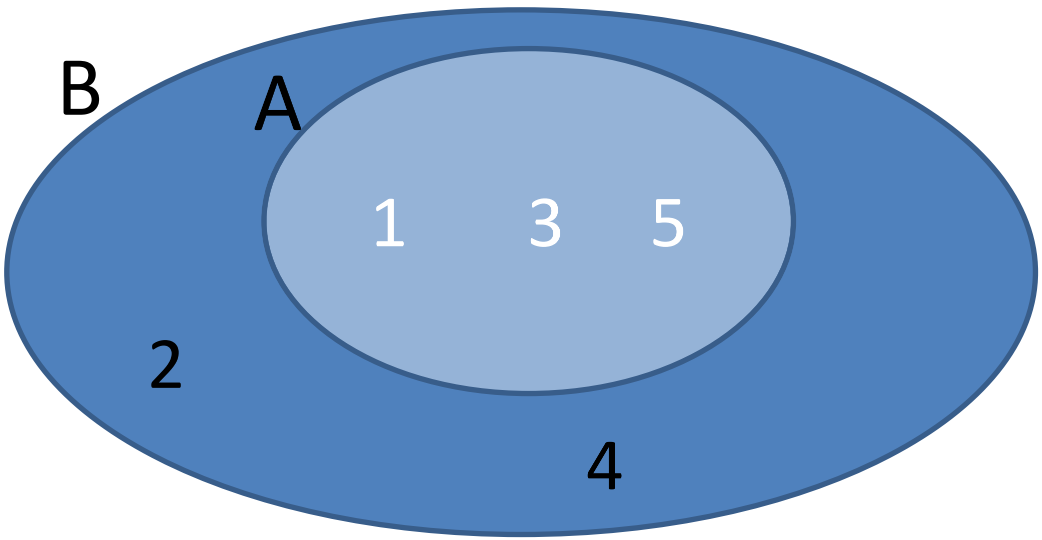
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Sottoinsiemi propri

Sottoinsiemi impropri: *A*, ∅

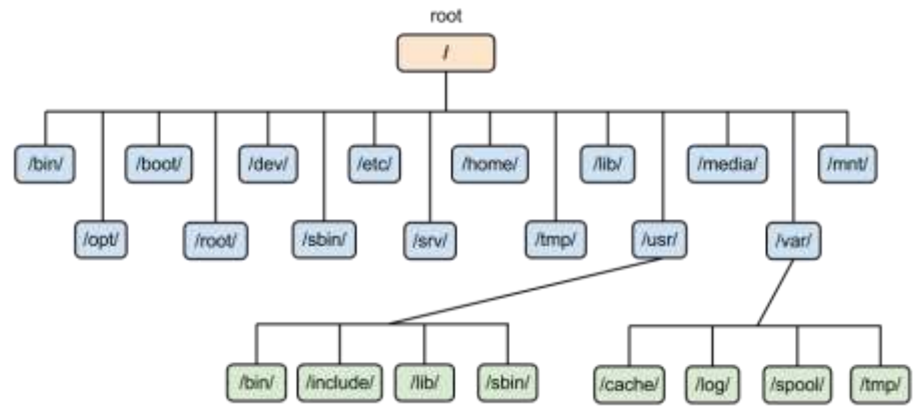
Sottoinsiemi

A={numeri naturali dispari minori di 6}
B={numeri naturali minori di 6}

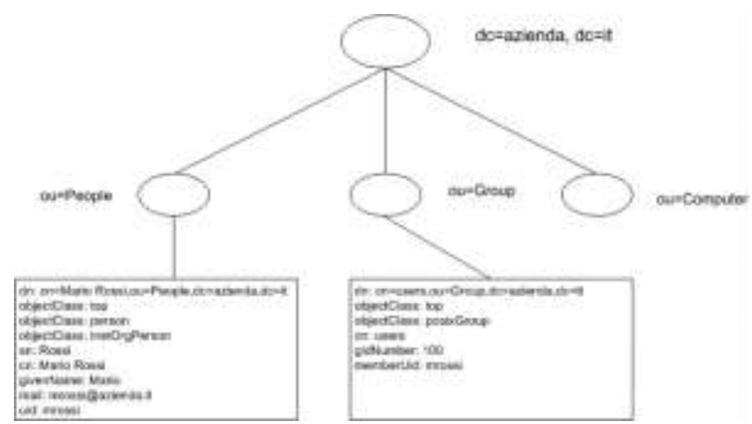


Sottoinsiemi

L'organizzazione gerarchica del file system



L'organizzazione gerarchica degli utenti di una organizzazione (ex. LDAP)



Sottoinsiemi

Consideriamo l'insieme M di tutte le carte da gioco presenti in un mazzo e siano C, Q, P, F i suoi sottoinsiemi contenenti le carte di uno stesso seme.

Siano A e B gli insiemi di carte posseduti da due giocatori:

A = {asso di fiori, donna di fiori, 10 di fiori}

B = {asso di cuori, 2 di cuori, re di fiori, 8 di cuori}

Dire se A e B sono sottoinsiemi di un qualche insieme tra quelli menzionati in precedenza.

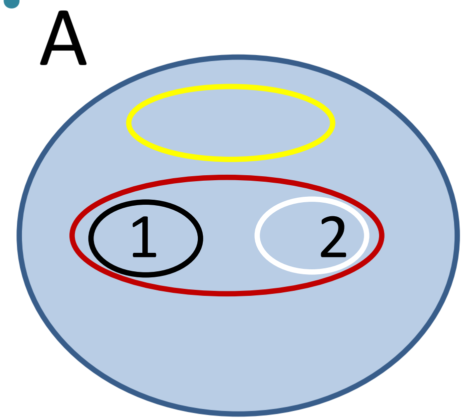
Insieme delle parti

L'insieme delle parti di un insieme *A* è un insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi, propri ed impropri dell'insieme *A*.

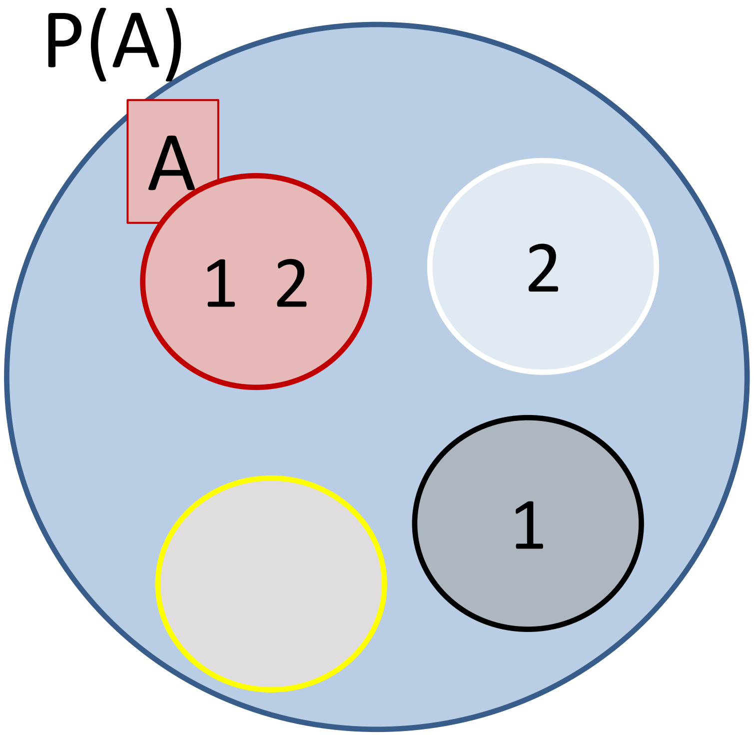
$$\mathbf{P(A)=\{B|B\subseteq A\}}$$

Insieme delle parti

$A=\{1,2\}$



$P(A)=\{A,\varnothing,\{1\},\{2\}\}$

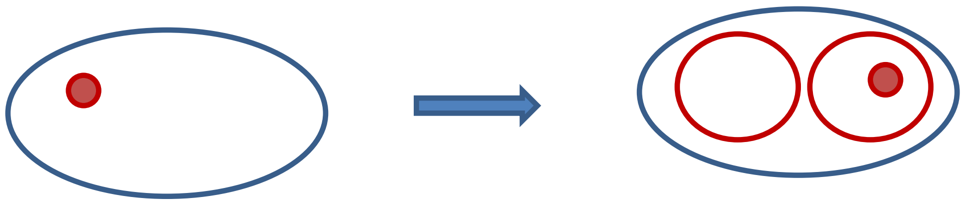


Insieme delle parti

Se l'insieme A ha cardinalità n allora l'insieme delle parti avrà cardinalità 2^n.

(Si dimostra per induzione)

Passo base: $n=1$



$A=\{1\}$ $\quad P(A)=\{A,\varnothing\}=\{\{1\},\{\}\}$

Ipotesi induttiva: la formula vale per un certo n

$A=\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}$

Sono 2^n

$P(A)=\{A,\varnothing,\{1\},\ \{2\},\ \dots\ \{n\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\dots\ \{1,2,3\}\dots\ \}$

Insieme delle parti

Se l'insieme *A* ha cardinalità n allora l'insieme delle parti avrà cardinalità 2^n.

$$A=\{1,\ 2,\ \ldots.\ ,\ n\}$$

$$P(A)=\{\boxed{A,\varnothing,\{1\},\ \{2\},\ \ldots\ \{n\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ldots\ \{1,2,3\}\ldots}\ \}$$

Si dimostra che vale per il successivo n: n+1

Sono 2^n

$$B=\{1,\ 2,\ \ldots.\ ,\ n,\ n+1\}$$

Sono 2^n

$$P(B)=\{\ \ldots\boxed{B,\{n+1\},\ \{1,n+1\},\ \{2,n+1\},\ldots\ \{1,2,n+1\}\ldots\ \}}$$

$$2^n+2^n=2\ (\ 2^n\ )=2^{n+1}$$

Unione

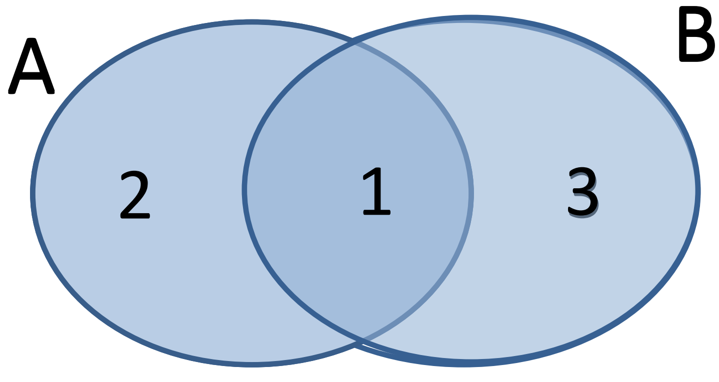
Si dice **insieme unione** degli insiemi *A* e B un insieme *C* avente come elementi tutti gli elementi di *A* o di B, presi una sola volta.

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

Unione

A={numeri naturali minori di 3}
B={numeri naturali dispari minori di 4}

C=A∪B={numeri naturali minori di 4}



Unione

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Intersezione

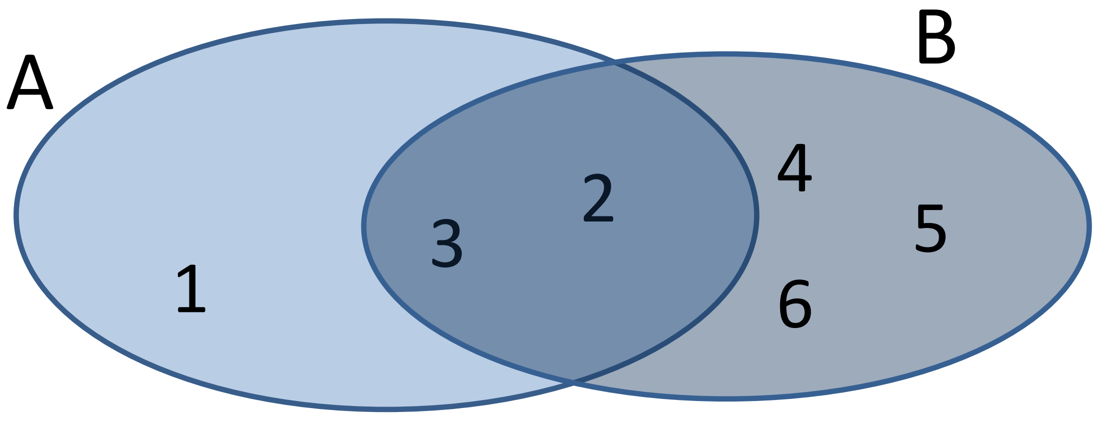
Si dice insieme **intersezione** degli insiemi *A* e B un insieme *C* avente come elementi tutti gli elementi di *A* <u>e</u> di B.

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

Intersezione

A={numeri naturali minori di 4}
B={numeri naturali compresi tra 1 e 7}

C= A$\cap$B={numeri naturali compresi tra 1 e 4}



Intersezione

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Differenza

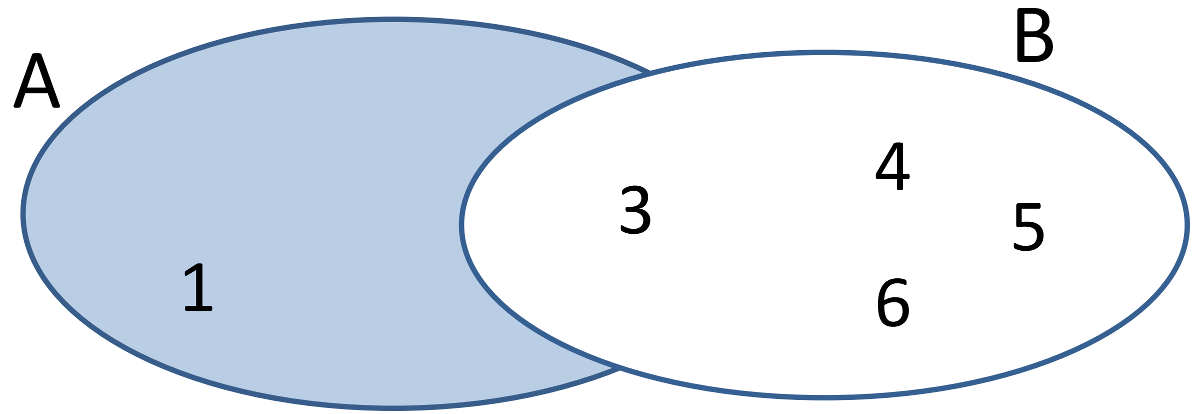
Si dice insieme **differenza** degli insiemi *A* e B un insieme *C* avente come elementi tutti gli elementi di *A* che non appartengano a B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Differenza

A={numeri naturali dispari minori di 4}
B={numeri naturali compresi tra 2 e 7}

$C = A \setminus B = \{1\}$



Complementazione

Se B è un sottoinsieme di *A* l'operazione di differenza prende il nome di complementazione ma si definisce allo stesso modo.

Si dice **complementare** di B rispetto ad *A* l'insieme degli elementi di *A* che non appartengono a B.

Complementazione

L'insieme rispetto al quale stiamo effettuando l'operazione di complementazione prende il nome di insieme universo U.

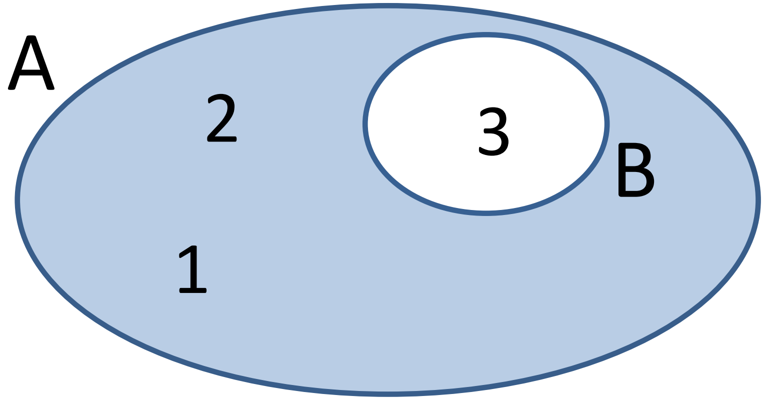
Attenzione: E' sempre necessario precisare rispetto a quale insieme universo stiamo effettuando la complementazione.

Esempio: $C_R N \neq C_Q N$

Complementazione

A={numeri naturali minori di 4}
B={numeri naturali compresi tra 2 e 4}

$C_A B=\{1,2\}$



Esempio

Consideriamo le caratteristiche di un Sistema Operativo

A = MS-DOS = {MonoUtente, MonoTask}

B = Unix = {MultiUtente, MultiTask}

C = Windows 95/98 = {MonoUtente, MultiTask}

$$A \cup B = \{MoU, MoT, MuU, MuT\}$$

$A \cap B = \emptyset$ $A \setminus C = \{MoT\}$ $C \setminus A = \{MuT\}$

Il prodotto cartesiano

Si definisce **coppia ordinata** ogni insieme di due elementi in cui si specifica l'ordine con cui compaiono i due oggetti.

$$(a,b)$$

$\{a,b\}=\{b,a\}$ $\qquad$ $(a,b) \neq (b,a)$

$\{a,a\}$ $\qquad$ (a,a)

Il prodotto cartesiano

Il **prodotto cartesiano** *A*x*B* è l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con a appartenente ad *A* e b appartenente a B.

$$\mathbf{AXB=\{(a,b)|\ a\in A \wedge b\in B\}}$$

La cardinalità di *A*x*B* è il prodotto delle cardinalità di *A* e di B

Il prodotto cartesiano

Rappresentazione

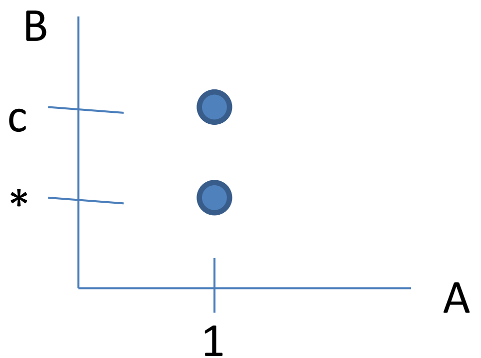
A={1}   B={*,c}

Per elencazione   AxB={(1,*),(1,c)}

Tabella doppia entrata

A \ B	*	c
1	(1,*)	(1,c)

Rappresentazione cartesiana



Il prodotto cartesiano

Esempio

Mario ha trascritto su un file l'elenco degli username che usa sul lavoro per accedere a diversi servizi web ed in un altro file l'elenco delle password. I due elenchi non sono ordinati e non riportano riferimenti utili all'abbinamento tra loro e con i servizi.

Paolo, un collega invidioso di Mario, vuole accedere ad un certo servizio con le credenziali di Mario per compiere degli illeciti e farlo licenziare.

Quanti e quali tentativi dovrà effettuare Paolo?

Il prodotto cartesiano

Esempio

Mario
Marietto
Mario 23
User 51

Password
12345
Mario

Il prodotto cartesiano

Proprietà

$$A \times B \neq B \times A$$
$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ $\quad$ $\emptyset \times A = \emptyset$ $\quad$ $A \times \emptyset = \emptyset$

Esercizio

1) Dati gli insiemi

   A = {le lettere della parola rosa}

   B = {*,#,@}

   Determinare il prodotto cartesiano BxA e farne una rappresentazione cartesiana.

2) Dato il seguente prodotto cartesiano

   L=AxB={(a,1),(b,1)}

   determinare gli insiemi A e B

Esercizio

$$A=\{x \mid x \in N \wedge x^2-x-6=0\}$$

$$B=\{x \mid x \in Z \wedge (2x-1)(x^2-x-6)=0\}$$

Rappresentare A e B per elencazione.
I due insiemi sono uguali?
A è sottoinsieme di B?
Determinare $P(B)$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A x B$.
Posso determinare $C_B A$?

Esercizio

- Sia $A = \{n | n \in N \wedge 2n = 8\}$
  Quali sono gli elementi di A?

Fornire una rappresentazione estensiva dei seguenti insiemi:

- B = $\{x | x \in$ N $\wedge$ $x < 3\}$
- $C = \{x|$ "x è una figura geometrica" $\wedge$ "x ha 4 lati"}
- D = $\{n \in$ N: $n \leq 4 \vee 7 < n \leq 12\}$

Esercizio

Dati gli insiemi
$A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{4,7,8,9\}$, $C = \{1\}$

Determinare gli insiemi
$A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$,
$A \setminus B$, $A \setminus C$, $A \setminus A$.

E' presente una relazione di sottoinsieme tra gli insiemi A, B e C?
In caso positivo determinare il complementare del sottoinsieme rispetto al sovrainsieme.

Insiemi e Logica

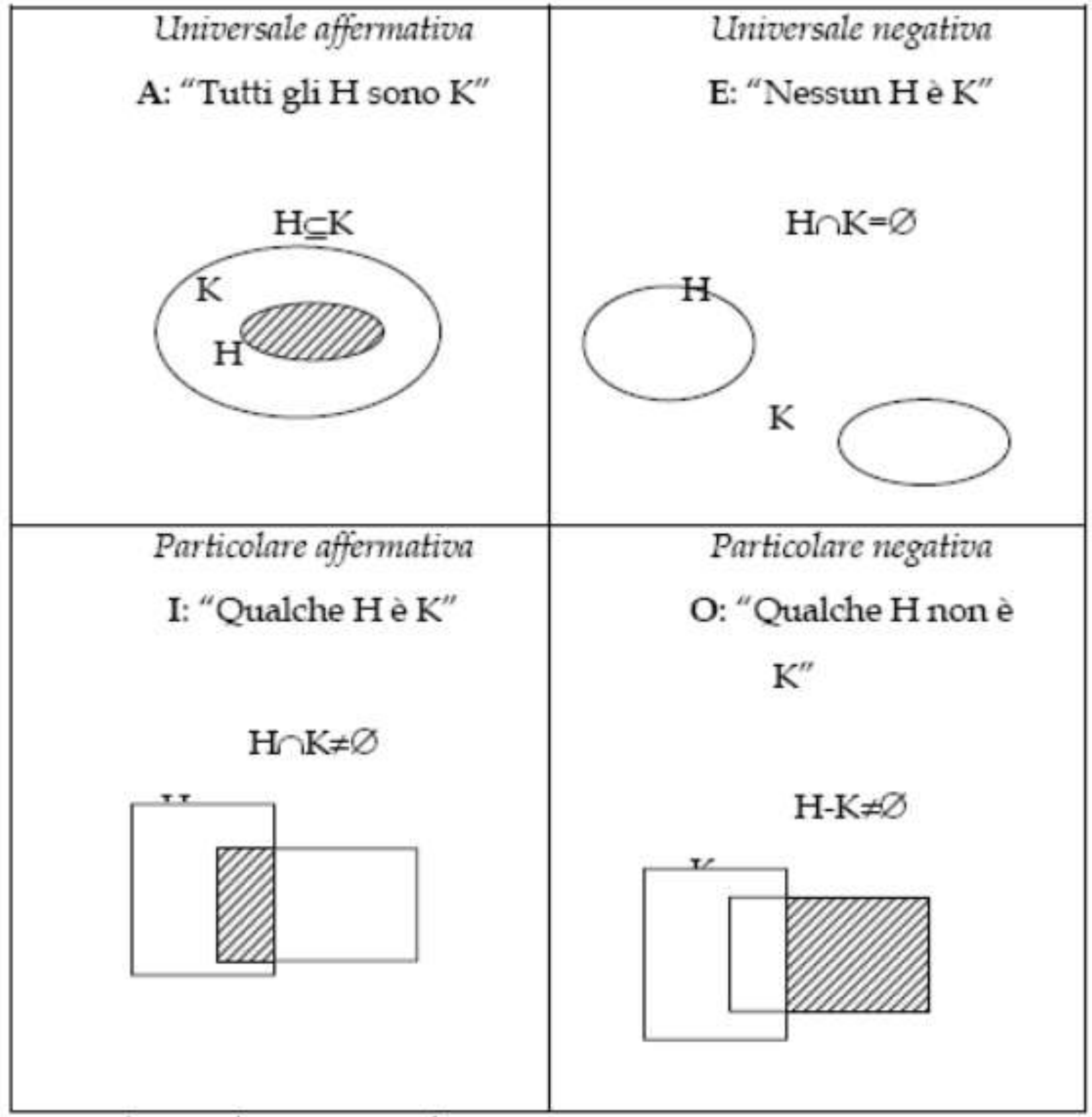
Corrispondenza tra

operazioni insiemistiche

e

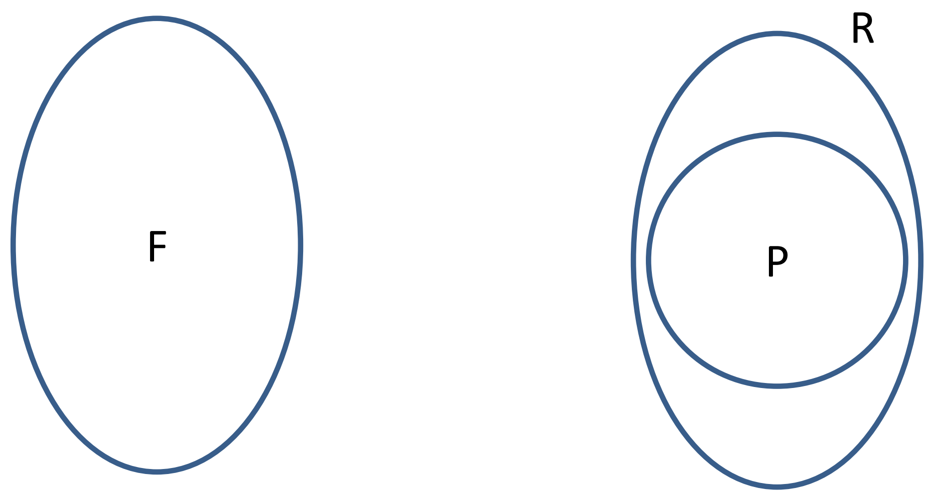
Connettivi – uso quantificatori

Schemi di ragionamento



Sapendo che tutti i pitoni sono rettili e che nessun felino è un rettile

E' corretto concludere che nessun felino è un pitone?



Sapendo che
qualche divisore di 8 è divisore di 12 e che
Tutti i divisori di 8 sono potenze di 2

E' corretto concludere che
Qualche potenza di 2 è divisore di 12?