Rappresentazione dell’informazione

Rappresentazione analogica e rappresentazione digitale.

Numerazione posizionale e conversione di base.

Introduzione

- Aspetti coinvolti nella rappresentazione dell’informazione:
  - scelta di una grandezza fisica che funga da *rappresentante* dell’informazione
  - associazione, ad ogni possibile “aspetto” dell’informazione da rappresentare, di un valore della grandezza fisica rappresentante

Introduzione

- La scelta del tipo di grandezza fisica rappresentante è guidata da considerazioni di natura prettamente tecnologica.

Col progressivo affermarsi dell’elettronica, tale scelta è stata sempre più indirizzata verso fenomeni di tipo elettrico (tensione e/o corrente elettrica)

Introduzione

- *Rappresentazione analogica*:
  la grandezza rappresentante varia in modo continuo

- *Rappresentazione digitale*:
  la grandezza rappresentante può assumere
  solo un numero discreto di valori

rappresentazione meno fedele,
ma più “robusta” e affidabile

Introduzione

- *Rappresentazione digitale binaria*:
  usa solo due possibili valori della grandezza rappresentante

  - grande robustezza e affidabilità

  - ridotto consumo energetico, minore sensibilità al rumore

  - minor potere rappresentativo

Introduzione

- Quest'ultimo limite viene superato associando, ad ogni "aspetto" dell'informazione da rappresentare, un *insieme di rappresentanti elettronici.*

Ciascuno di essi fornisce
una delle "cifre" binarie (bit)
della sequenza o *stringa*
che rappresenta l'informazione

Introduzione

- In sintesi, risulta “elettronicamente conveniente” rappresentare le informazioni (di qualunque tipo) in termini di *stringhe di bit*.

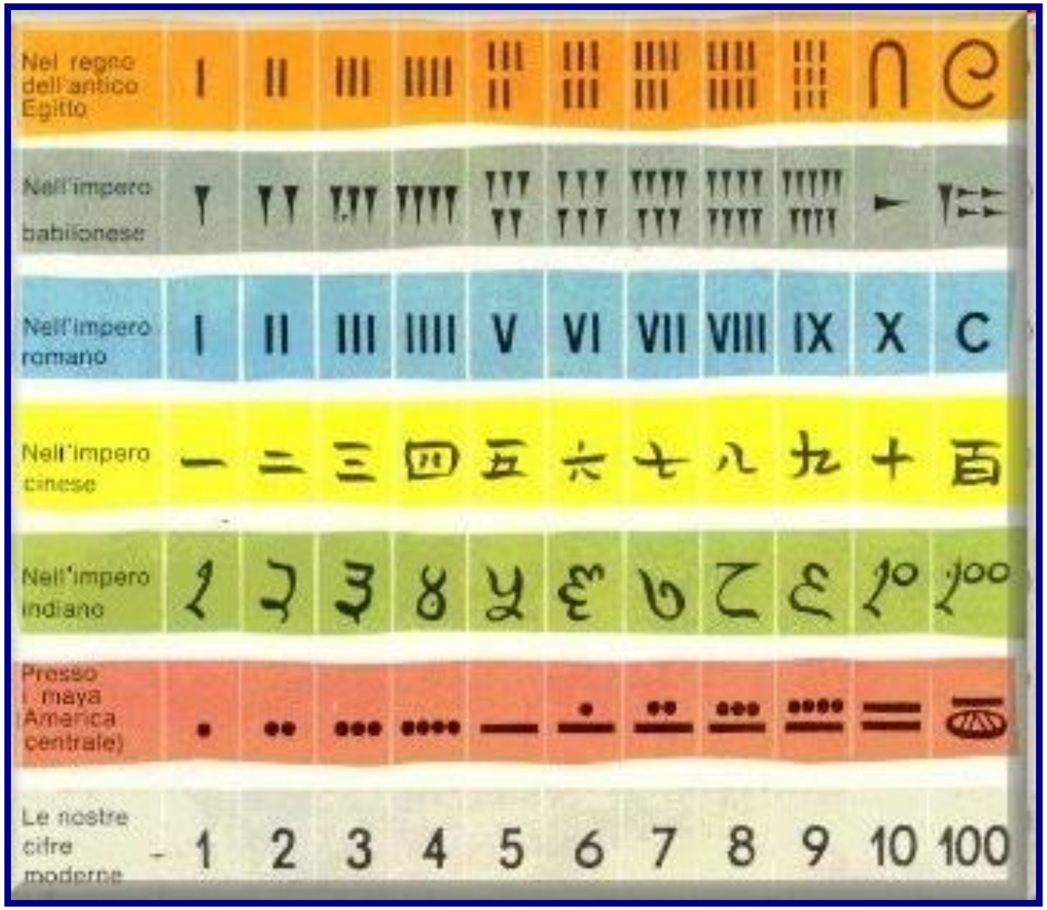
Il passaggio da un’informazione alla stringa che la rappresenta richiede opportune *tecniche di codifica*.

Introduzione

- Introduciamo ora i concetti di base
della codifica binaria delle informazioni,
partendo dalle informazioni di tipo numerico.

Sistemi di numerazione posizionali
e conversione di base

Sistemi di numerazione



Sistemi di numerazione

- In generale, un *sistema di numerazione* è un insieme di simboli e regole atti a rappresentare i numeri.

- Un sistema di numerazione è detto *posizionale* se un simbolo (o *cifra*) assume un valore diverso a seconda della posizione che occupa nella sequenza di simboli con cui viene rappresentato un numero.

Sistemi di numerazione

- Il sistema di numerazione che usiamo abitualmente è il *sistema posizionale decimale,* basato su 10 cifre ovvero $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Esempio:

$$1475 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Il valore assunto dalle cifre dipende dalla loro posizione

Notazione posizionale

- In generale, dato un numero $B \geq 2$, detto *base*, e dato l'insieme β composto da B simboli diversi $\beta = \{0, 1, 2, \ldots, B\text{-}1\}$, la stringa d n cifre

$$b_{n-1}b_{n-2} \;\ldots\; b_1b_0 \quad \text{(con } b_i \in \beta \text{)}$$

si interpreta come

$$b_{n-1} \cdot B^{n-1} + b_{n-2} \cdot B^{n-2} + \ldots + b_1 \cdot B^1 + b_0 \cdot B^0$$

Sistema ottale

- $B = 8, \quad \beta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

- Esempio: $$417 = 4 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$$ $$= 4 \cdot 64 + 1 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 271$$

Le stringhe di cifre 417 e 271 (dette *numerali*) sono la rappresentazione dello stesso numero in due diverse basi di numerazione:

$$417_8 = 271_{10}$$

Sistema esadecimale

- $B = 16, \quad \beta = \{0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

- Esempi:

$$22_{16} = 2 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0$$
$$= 2 \cdot 16 + 2 \cdot 1 = 34_{10}$$

$$3AF_{16} = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 =$$
$$= 3 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 943_{10}$$

Sistema binario

- $B = 2, \quad \beta = \{0, 1\}$

- Esempi:

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 19_{10}$$

$$110100_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$
$$= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 52_{10}$$

Base 10	Base 2	Base 3	Base 4	Base 5	Base 8	Base 16
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3	3
4	100	11	10	4	4	4
5	101	12	11	10	5	5
6	110	20	12	11	6	6
7	111	21	13	12	7	7
8	1000	22	20	13	10	8
9	1001	100	21	14	11	9
10	1010	101	22	20	12	A
11	1011	102	23	21	13	B
12	1100	110	30	22	14	C
13	1101	111	31	23	15	D
14	1110	112	32	24	16	E
15	1111	120	33	30	17	F
16	10000	121	100	31	20	10

(Tabella tratta da *G. Bucci. Calcolatori elettronici. Architettura e organizzazione. Copyright © 2009 - The McGraw-Hill Companies)*

Osservazioni

- La numerazione in base 2 è importante perché nei calcolatori elettronici l'informazione è rappresentata solo attraverso due simboli $\{0, 1\}$.

- Le numerazioni in base 8 e 16 interessano perché la conversione tra queste basi e la base 2 (e viceversa) è immediata.

- La numerazione in base 8, popolare fino agli anni Settanta, è ormai in disuso.

Conversione di base

- Vediamo ora come si effettua la conversione tra diverse basi di numerazione:
  - conversione tra base 10 e base 2
  - conversione tra base B^k e base B
  - conversione tra generiche basi

Conversione tra base 10 e base 2

- Come abbiamo visto negli esempi precedenti, la conversione da binario a decimale si effettua come calcolo del polinomio di potenze del *2*.

- Altro esempio:

$$1001101_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 77_{10}$$

… e la conversione inversa?

Conversione tra base 10 e base 2

- Dato un numero decimale N,
  dobbiamo trovare la stringa di n cifre

  $b_{n-1}b_{n-2}\ \dots\ b_1b_0$, con $b_i \in \{0, 1\}$

  tale che

$$\boxed{N = b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0}$$

Conversione tra base 10 e base 2

$$N = b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$$

dividendo per 2 si ottiene:

- b_0 come resto
- $b_{n-1} \cdot 2^{n-2} + b_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \ldots + b_1$ come quoziente

dividendo il quoziente per 2 si ottiene:

- b_1 come resto
- $b_{n-1} \cdot 2^{n-3} + b_{n-2} \cdot 2^{n-4} + \ldots + b_2$ come quoziente

Conversione tra base 10 e base 2

- Si itera il procedimento
  fino ad ottenere il quoziente nullo.

La rappresentazione binaria di N
si ottiene scrivendo, da sinistra verso destra,
i resti delle divisioni in ordine inverso
rispetto a quello con cui sono stati ottenuti.

Conversione tra base 10 e base 2

- Esempio: $N = 35$

Serie successiva di quozienti e resti ottenuti dividendo per *2*:

$(17, \mathbf{1})$ $(8, \mathbf{1})$ $(4, \mathbf{0})$ $(2, \mathbf{0})$ $(1, \mathbf{0})$ $(0, \mathbf{1})$

⇒ $35_{10} = 100011_2$

Conversione tra base 10 e base 2

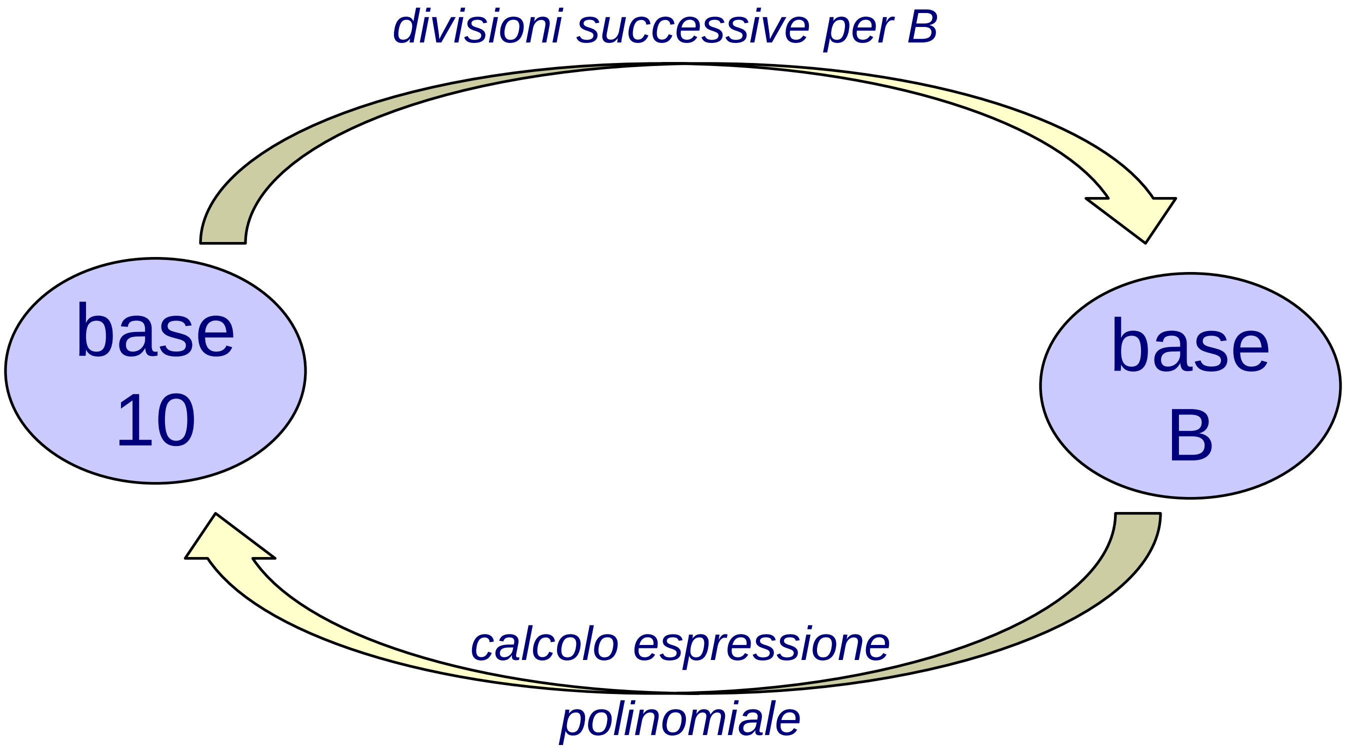
- Altro esempio: $N = 52$

Serie successiva di quozienti e resti ottenuti dividendo per 2:

(26, **0**) (13, **0**) (6, **1**) (3, **0**) (1, **1**) (0, **1**)

$\Rightarrow$ $52_{10} = 110100_2$

Conversione tra base 10 e base B



Conversione tra base B^k e base B

- Si consideri la stringa $b_{n-1}b_{n-2}\ \dots\ b_1b_0$ in base B^k , cui corrisponde il numero

$$b_{n-1}\,(B^k)^{n-1}+b_{n-2}\,(B^k)^{n-2}+\dots+b_1\,(B^k)^1+b_0\,(B^k)^0$$

dove ogni $b_i \in \{0, 1, \dots, B^k - 1\}$
ed è rappresentato in base B come

$$b_{i,k-1}b_{i,k-2}\ \dots\ b_{i,0} = b_{i,k-1}\,B^{k-1}+b_{i,k-2}\,B^{k-2}+\dots+b_{i,0}\,B^0$$

dove ogni $b_{i,j} \in \{0, 1, \dots, B - 1\}$

Conversione tra base B^k e base B

$$b_{n-1}\,(B^k)^{n-1}+b_{n-2}\,(B^k)^{n-2}+\ldots+b_1\,(B^k)^1+b_0\,(B^k)^0$$

Sostituendo a ciascun b_i la sua rappresentazione in base B si ottiene

$$
\begin{aligned}
&[b_{n-1,k-1}\,B^{k-1}+b_{n-1,k-2}\,B^{k-2}+\ldots+b_{n-1,0}\,B^0](B^k)^{n-1}\\
+\ &[b_{n-2,k-1}\,B^{k-1}+b_{n-2,k-2}\,B^{k-2}+\ldots+b_{n-2,0}\,B^0](B^k)^{n-2}\\
+\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\ &[b_{1,k-1}\,B^{k-1}+b_{1,k-2}\,B^{k-2}+\ldots+b_{1,0}\,B^0](B^k)^1\\
+\ &[b_{0,k-1}\,B^{k-1}+b_{0,k-2}\,B^{k-2}+\ldots+b_{0,0}\,B^0](B^k)^0
\end{aligned}
$$

Conversione tra base B^k e base B

Ovvero:
$$b_{n-1,k-1}\, B^{nk-1} + b_{n-1,k-2}\, B^{nk-2} + \ldots + b_{n-1,0}\, B^{(n-1)k}$$
$$+\, b_{n-2,k-1}\, B^{(n-1)k-1} + b_{n-2,k-2}\, B^{(n-1)k-2} + \ldots + b_{n-2,0}\, B^{(n-2)k}$$
$$+\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\, b_{1,k-1}\, B^{2k-1} + b_{1,k-2}\, B^{2k-2} + \ldots + b_{1,0}\, B^{k}$$
$$+\, b_{0,k-1}\, B^{k-1} + b_{0,k-2}\, B^{k-2} + \ldots + b_{0,0}\, B^{0}$$

che corrisponde alla stringa:

$$b_{n-1,k-1}\, b_{n-1,k-2}\, \ldots\, b_{n-1,0} b_{n-2,k-1}\, b_{n-2,k-2}\, \ldots b_{n-2,0}$$
$$\ldots\ldots\ldots b_{1,k-1}\, b_{1,k-2}\, \ldots\, b_{1,0}\, b_{0,k-1}\, b_{0,k-2}\, \ldots\, b_{0,0}$$

Conversione tra base B^k e base B

- Dunque:

$$b_{n-1}b_{n-2}\ \ldots\ b_1 b_0 \qquad \text{(base } B^k\text{)}$$

A ciascun b_i della base B^k si sostituisce la corrispondente rappresentazione in base B

$$b_{n-1,k-1}\ b_{n-1,k-2}\ \ldots\ b_{n-1,0} b_{n-2,k-1}\ b_{n-2,k-2}\ \ldots b_{n-2,0}$$
$$\ldots\ldots\ldots b_{1,k-1}\ b_{1,k-2}\ \ldots\ b_{1,0}\ b_{0,k-1}\ b_{0,k-2}\ \ldots\ b_{0,0} \qquad \text{(base } B\text{)}$$

Conversione tra base B^k e base B

- Di particolare interesse è la conversione tra esadecimale e binario ($B = 2$, $k = 4$).

- Esempi:

$$C567 = 1100\ \ 0101\ \ 0110\ \ 0111$$

$$C567_{16} = 1100010101100111_2$$

$$1AB07 = 0001\ \ 1010\ \ 1011\ \ 0000\ \ 0111$$

$$1AB07_{16} = 11010101100000111_2$$

Conversione tra base B^k e base B

- Il processo viene applicato in modo inverso per la conversione da binario a esadecimale:
  - si raggruppano le cifre binarie a quattro a quattro, partendo da destra, ed eventualmente completando l’ultimo gruppo con degli zeri nel caso abbia meno di quattro cifre
  - si sostituisce ciascun gruppo con la corrispondente cifra esadecimale

Conversione tra base B^k e base B

- Esempi:

10111000011 → 0101 1100 0011

5C3

10110110110111 → 0010 1101 1011 0111

2DB7

Conversione tra generiche basi

- È possibile passare direttamente da una base all’altra se si riesce a fare i conti in un generico sistema posizionale.

Per evitare questa difficoltà si può passare dalla base di partenza alla base *10* e da questa alla base di arrivo.

Conversione tra generiche basi

- Esempio:

  conversione in base 3 del numero 143_5

$$143_5 = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$$

$$= 1 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 48_{10}$$

Applichiamo ora a 48_{10} l'algoritmo delle divisioni successive per 3

Conversione tra generiche basi

48_{10} $\Rightarrow$ $(16, \mathbf{0})$ $(5, \mathbf{1})$ $(1, \mathbf{2})$ $(0, \mathbf{1})$

$\Downarrow$

1210_3

Ovvero: $143_5 = 1210_3$