



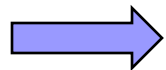
# Rappresentazione dell'informazione

Numeri negativi

# Rappresentazione dei numeri

- In un calcolatore i numeri sono rappresentati su raggruppamenti di bit, di dimensione prefissata (ad esempio: 8, 16, 32), detti *parole*.

(Nel caso di parole di 8 bit  
si usa il termine *byte*)




Su una parola di  $n$  bit,  
si possono rappresentare  $2^n$  numeri diversi.

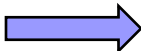
# *Rappresentazione dei numeri negativi*

- Di norma, se il bit più a sinistra della parola è 1, il numero viene interpretato come negativo.
- Principali convenzioni:
  - rappresentazione  
in modulo e segno
  - rappresentazione  
in complemento

# ***Rappresentazione in modulo e segno***

- Per rappresentare un numero, si considera:

□ il segno       bit più a sinistra della parola  
(0 per +, 1 per - )

□ il valore assoluto  
o modulo       restanti bit  
della parola

# *Rappresentazione in modulo e segno*

## ■ Osservazioni:

- il massimo numero rappresentabile, in modulo, è  $2^{n-1}-1$
- lo zero compare due volte (come  $+0$  e  $-0$ )
- è richiesta un'unità aritmetica per la sottrazione

## ***Rappresentazione in complemento***

- È la rappresentazione abitualmente utilizzata in quanto consente di effettuare le sottrazioni usando l'unità aritmetica di somma:
    - *la differenza tra due numeri positivi può essere ottenuta sommando al minuendo il complemento del sottraendo*
- ➡ Per illustrare la rappresentazione in complemento facciamo riferimento dapprima al sistema decimale.

# ***Rappresentazione in complemento dei numeri decimali***

- ***Complemento a 9:***

si ottiene sottraendo da 9  
ciascuna cifra del numero

- **Esempi:**

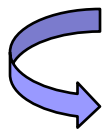
- il complemento a 9 di 41 è 58  
( $99 - 41 = 58$ )

- il complemento a 9 di 2607 è 7392  
( $9999 - 2607 = 7392$ )

# Rappresentazione in complemento dei numeri decimali

## ■ Complemento a 10:

si ottiene calcolando il complemento a 9  
e aggiungendo poi 1 all'ultima cifra



Nota: dato un numero  
decimale  $N$  a  $n$  cifre,  
il suo complemento  
a 10 è pari a  $10^n - N$



## ***Rappresentazione in complemento dei numeri decimali***

### ■ Esempi:

- il complemento a 10 di 41 è 59  
( $99 - 41 = 58 \rightarrow 59$ )
- il complemento a 10 di 2607 è 7393  
( $9999 - 2607 = 7392 \rightarrow 7393$ )
- il complemento a 10 di 3717 è 6283  
( $9999 - 3717 = 6282 \rightarrow 6283$ )

## Sottrazione in complemento a 10

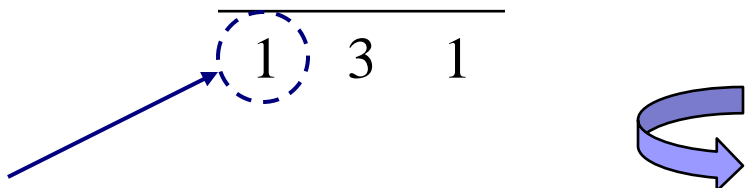
- Esempio:  $72 - 41 = 31$

Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 72 + \\ 59 = \\ \hline 131 \end{array}$$

il riporto viene scartato

*differenza positiva*



## Sottrazione in complemento a 10

- Esempio:  $2876 - 41 = 2835$

Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo (esteso a quattro cifre cioè 0041):

$$\begin{array}{r} 2 \ 8 \ 7 \ 6 \ + \\ 9 \ 9 \ 5 \ 9 \ = \\ \hline 1 \ 2 \ 8 \ 3 \ 5 \end{array}$$

il riporto  
viene scartato

*differenza  
positiva*

## Sottrazione in complemento a 10

- Esempio:  $72 - 357 = -285$

Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 072 + \\ 643 = \\ \hline 715 \end{array}$$

*differenza  
negativa*



Complementando a 10 il risultato si ottiene il valore assoluto della differenza cioè 285

## Sottrazione in complemento a 10

- Esempio:  $276 - 357 = -81$

Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 276 + \\ 643 = \\ \hline 919 \end{array}$$

*differenza  
negativa*



Complementando a 10 il risultato si ottiene il valore assoluto della differenza cioè 81

## ***Sottrazione in complemento a 10***

- Riassumendo, si somma al minuendo il complemento a 10 del sottraendo:
  - in caso di riporto, la differenza è positiva ed è data dal risultato della somma, a meno del riporto che viene scartato
  - se non si ha riporto, la differenza è negativa e il suo valore assoluto si ottiene complementando a 10 il risultato della somma

## ***Sottrazione in complemento a 9***

- Sostanzialmente analoga alla sottrazione in complemento a 10.
- L'unica variante è che in caso di risultato positivo (ovvero in presenza di riporto) occorre sommare il riporto al risultato ottenuto.

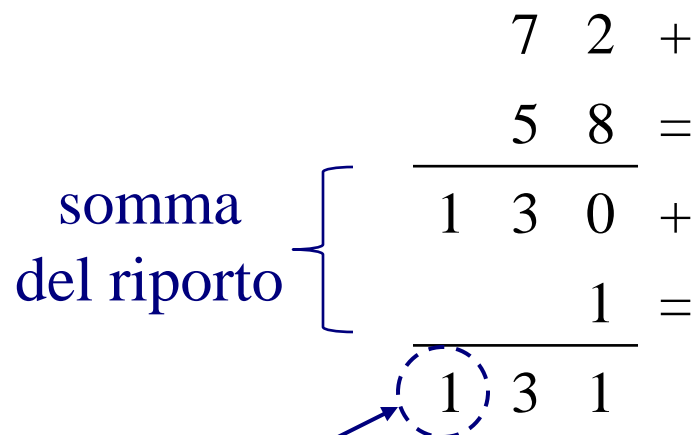
## Sottrazione in complemento a 9

- Esempio:  $72 - 41 = 31$

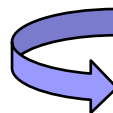
Sommiamo il minuendo col complemento a 9 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 72 + \\ 58 = \\ \hline 130 + \\ 1 = \\ \hline 131 \end{array}$$

somma  
del riporto



il riporto  
viene scartato



*differenza  
positiva*



## Sottrazione in complemento a 9

- Esempio:  $276 - 357 = -81$

Sommiamo il minuendo col complemento a 9 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 276 + \\ 642 = \\ \hline 918 \end{array}$$

*differenza  
negativa*



Complementando a 9 il risultato si ottiene il valore assoluto della differenza cioè 81



# ***Rappresentazione in complemento dei numeri binari***

- ***Complemento a 1:***

il cambiamento di segno viene ottenuto complementando ciascun bit (cioè i bit a 1 diventano 0 e viceversa)

- ***Complemento a 2:***

si effettua il complemento a 1  
e poi si aggiunge 1

## ***Rappresentazione in complemento dei numeri binari***

- Il complemento a 1 e il complemento a 2 corrispondono rispettivamente al complemento a 9 e al complemento a 10 del sistema decimale.

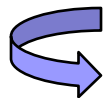


Nota: dato un numero  
binario  $N$  a  $n$  cifre,  
il suo complemento  
a 2 è pari a  $2^n - N$

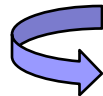
## *Rappresentazione in complemento dei numeri binari*

- Esempio: consideriamo la rappresentazione binaria, su una parola di 4 bit, del numero  $6_{10}$

$$6_{10} = 0110_2$$



complemento a 1: 1001



$$\begin{array}{r} \text{complemento a 2:} \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ + \\ \phantom{complemento a 2:} \phantom{1 \ 0 \ 0 \ 1} \phantom{+} 1 \ = \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

## ***Rappresentazione in complemento dei numeri binari***

- Metodo alternativo per il calcolo del complemento a 2:
  - si copiano i bit del numero da complementare, partendo da quello meno significativo, finché si incontra 1
  - una volta copiato il primo bit a 1, si invertono tutti i bit successivi

# Rappresentazione in complemento dei numeri binari

## ■ Esempi:

0110  $\xrightarrow{\text{complemento a 2}}$  1010

(si copiano i due bit meno significativi  
e si invertono gli altri due)

00010100  $\xrightarrow{\text{complemento a 2}}$  11101100

(si copiano i tre bit meno significativi  
e si invertono gli altri cinque)

## Rappresentazioni binarie di interi su 4 bit

Positivi o nulli		Negativi o nulli			
	Tutte le notazioni		Segno e modulo	Complem. a 1	Complem. a 2
+0	0000	−0	1000	1111	
+1	0001	−1	1001	1110	1111
+2	0010	−2	1010	1101	1110
+3	0011	−3	1011	1100	1101
+4	0100	−4	1100	1011	1100
+5	0101	−5	1101	1010	1011
+6	0110	−6	1110	1001	1010
+7	0111	−7	1111	1000	1001
		−8			1000


(Tabella tratta da *G. Bucci. Calcolatori elettronici. Architettura e organizzazione.*  
Copyright © 2009 - The McGraw-Hill Companies)

## ***Rappresentazioni binarie di interi: osservazioni***

- Con una parola di  $n$  bit:
  - i numeri positivi vanno da 0 a  $2^{n-1}-1$ , qualunque sia la notazione scelta
  - i numeri negativi vanno:
    - ✓ da - 0 a - ( $2^{n-1}-1$ ) sia con la notazione in modulo e segno che con la notazione in complemento a 1
    - ✓ da - 1 a -  $2^{n-1}$  con la notazione in complemento a 2



## ***Rappresentazioni binarie di interi: osservazioni***

- La notazione in complemento a 2  
è quella normalmente usata:
    - una sola rappresentazione per lo zero
    - calcoli meno macchinosi
-  addizione e sottrazione  
sono trattate come  
un'unica operazione

## ***Addizione e sottrazione in complemento a 2***

- L'addizione di due numeri di  $n$  bit rappresentati in complemento a 2 non tiene conto del segno degli operandi ed è effettuata con le usuali regole della somma aritmetica, trascurando però l'eventuale riporto sul bit  $n+1$ .
- La sottrazione si riduce ad un'operazione di addizione ed è effettuata sommando al minuendo il complemento a 2 del sottraendo.

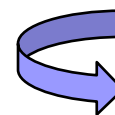
## Sottrazione in complemento a 2

- Esempio:  $00011110 - 00010110 = 00001000$   
( $30_{10} - 22_{10} = 8_{10}$ )

Sommiamo il minuendo col complemento a 2 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ + \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ = \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

il riporto  
viene scartato



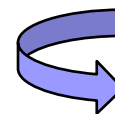
*differenza positiva*  
(il primo bit della parola è 0)

## Sottrazione in complemento a 2

- Esempio:  $00010011 - 00010110 = 11111101$   
( $19_{10} - 22_{10} = -3_{10}$ )

Sommiamo il minuendo col complemento a 2 del sottraendo:

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ + \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ = \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$



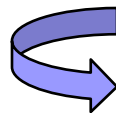
*differenza negativa*  
(il primo bit della parola è 1)

## Sottrazione in complemento a 2

- Se si sommano due numeri con lo stesso valore assoluto, uno positivo e uno negativo in complemento a 2, si ottiene lo zero (positivo e unico).

- Esempio:

$$\begin{array}{rcccc} 0 & 1 & 1 & 1 & + \\ 1 & 0 & 0 & 1 & = \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$



$$7_{10} - 7_{10} = 0_{10}$$

# Overflow

- Si verifica quando il risultato di un'operazione non è rappresentabile correttamente con  $n$  bit.



Regola pratica, in caso di notazione in complemento a 2:

*si ha overflow se c'è riporto al di fuori del bit di segno e non sul bit di segno, oppure se c'è riporto sul bit di segno ma non al di fuori*

# Overflow

- Esempio: somma dei numeri  $+7_{10}$  e  $+6_{10}$ ,  
rappresentati su una parola di 4 bit

*riporto sul bit  
di segno (e nessun  
riporto al di fuori)*

0	1	1	1	+
0	1	1	0	=
<hr/>				
1	1	0	1	

*corrisponde  $-3_{10}$   
(in complemento a 2)*

Il risultato corretto della somma, ovvero  $13_{10}$ ,  
non è rappresentabile con soli 4 bit.

# Overflow

- Esempio: somma dei numeri  $-4_{10}$  e  $-5_{10}$ ,  
rappresentati (in complemento a 2)  
su una parola di 4 bit

*riporto al di fuori  
del bit di segno  
(e nessun riporto  
sul bit di segno)*

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ + \\ 1\ 0\ 1\ 1\ = \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

*corrisponde  $7_{10}$*

Il risultato corretto della somma, ovvero  $-9_{10}$ ,  
non è rappresentabile con soli 4 bit.