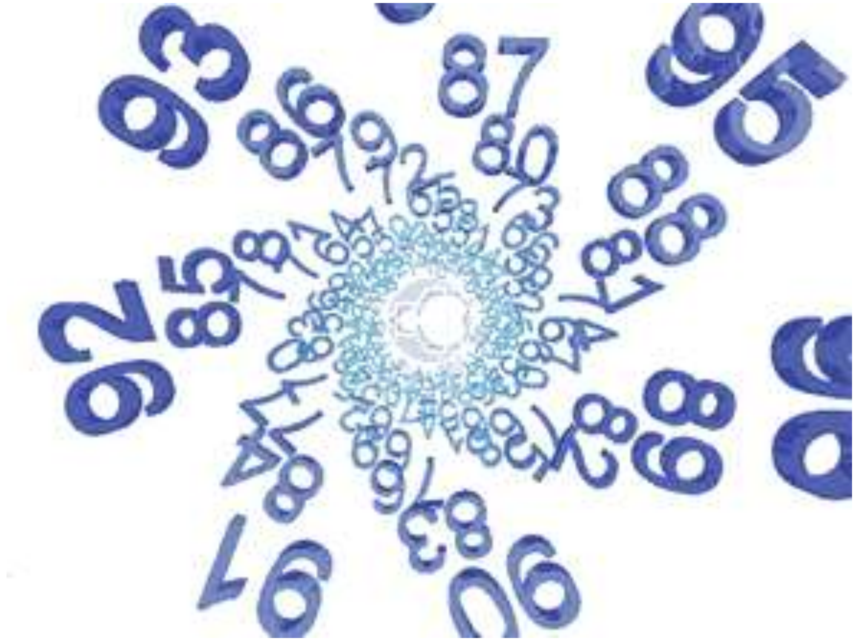
Insiemi numerici



I Naturali

I numeri naturali sono quegli oggetti matematici che servono per contare le cose che ci circondano.

0,1,2,3, … , 9, …

10 dita → base 10

<u>Sono un insieme ordinato</u>

Operazioni

- Somma $a+b$
- Moltiplicazione $a \times b = \overbrace{a+a+\ldots+a}^{\text{b volte}}$
- Elevamento a potenza $a^b = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{b volte}}$

Operazioni e ordinamento

- Somma $a+b$
- Moltiplicazione $a \times b$
- Elevamento a potenza a^b

Il risultato è maggiore di ciascuno dei termini dell'operazione

Operazioni

- Somma $a+b$
- Moltiplicazione $a \times b$
- Elevamento a potenza a^b

- Sottrazione $a-b=c \rightarrow a=b+c$

$\boxed{a \geq b}$

Operazioni

- Somma $a+b$
- Moltiplicazione $a \times b$
- Elevamento a potenza a^b

- Sottrazione $a-b=c \rightarrow a=b+c$
- Divisione con resto $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline \bullet & q \\ \hline r & \end{array} \rightarrow a=b \times q + r$

$$\boxed{a \geq b}$$

- Estrazione della radice $\sqrt[b]{a} = c \rightarrow a=c^b$

Operazioni e ordinamento

- Somma $a+b$
- Moltiplicazione $a \times b$
- Elevamento a potenza a^b

- Sottrazione $a-b=c$ $\boxed{c \le a}$
- Divisione con resto $\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline \bullet & q \\ \hline r & \end{array}$ $q \le a$ e $r \le b$

- Estrazione della radice $\sqrt[b]{a} = c$ $\boxed{c \le a}$

Proprietà delle operazioni

Somma

- Commutativa $a+b=b+a$
- Associativa $a+(b+c)=(a+b)+c$
- Esistenza elemento neutro 0 $a+0=a$

Sottrazione

- ~~Commutativa~~
- ~~Associativa~~ $(7-2)-1 \neq 7-(2-1)$
- Esistenza elemento neutro 0 $a-0=a$

Proprietà delle operazioni

Prodotto

- Commutativa $a \times b = b \times a$
- Associativa $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Esistenza elemento neutro 1 $a \times 1 = a$
- $a \times 0 = 0$
- Legge di annullamento del prodotto

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

Prodotto e somma

Distributiva $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Proprietà delle operazioni

Divisione

~~Commutativa~~

~~Associativa~~ $(8:4):2 \neq 8:(4:2)$

Esistenza elemento neutro 1 $a:1=a$

$0:a=0$ $a:0$ **IMPOSSIBILE**

$0:0$ **forma indeterminata**

Divisione e somma

~~Distributiva~~ $a:(b+c) \neq a:b + a:c$

Divisione e prodotto

~~Commutativa~~ $a:(b \times c) \neq (a:b) \times c$

Proprietà delle operazioni

Elevamento a potenza

$$\boxed{1^n = 1}$$

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$$\boxed{0^n = 0}$$

$$\boxed{0^0}$$

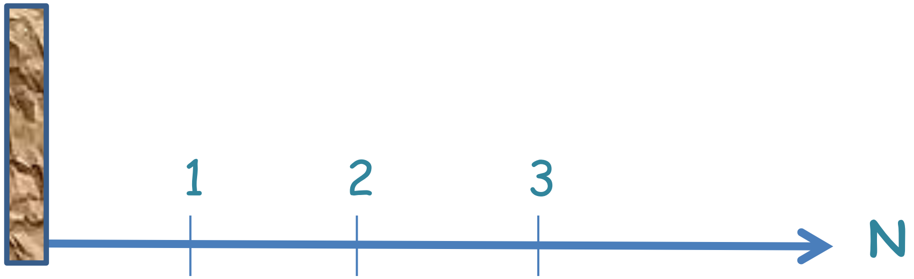
$$a^b \times a^0 = a^{b+0} = a^b$$

Proprietà delle operazioni

Elevamento a potenza

- $a^b \times a^c = a^{b+c}$
- $a^b : a^c = a^{b-c}$
- $(a^b)^c = a^{b \times c}$
- $a^b \times c^b = (a \times c)^b$
- $a^b : c^b = (a:c)^b$

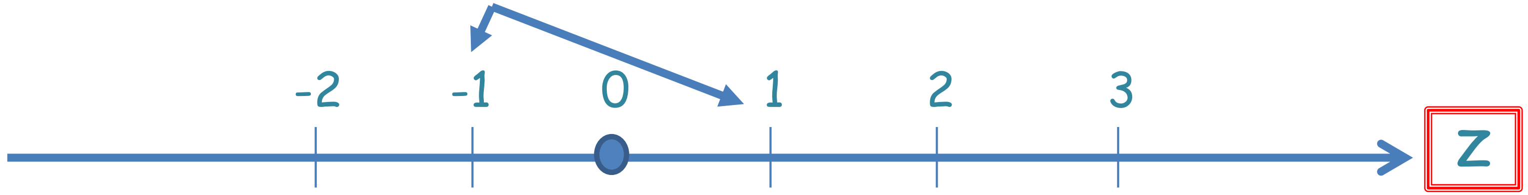
Gli Interi

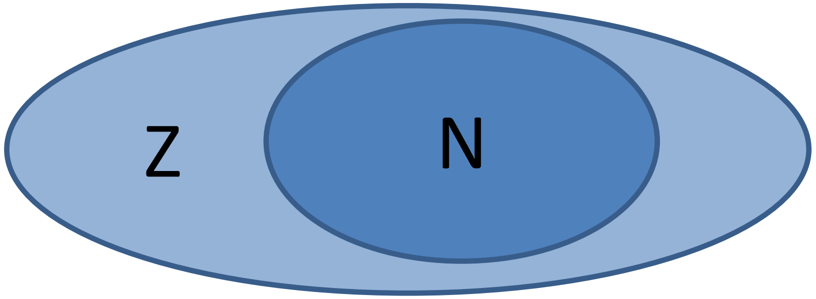


Gli Interi

OPPOSTO

$$a+(-a)=0$$





Valore assoluto

E' un operatore che restituisce il modulo di un numero intero.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Operazioni e ordinamento

- Somma
- Moltiplicazione
- Elevamento a potenza

~~Il risultato è maggiore di ciascuno dei termini dell'operazione~~

- Sottrazione
- Divisione

~~Il risultato è minore del sottraendo/dividendo~~

Proprietà delle operazioni

Somma

- Esistenza dell'opposto $a \rightarrow -a \mid a+(-a)=0$

Elevamento a potenza

Esponente negativo

$$a^b : a^b = a^{b-b} = a^{b+(-b)} = a^b \times a^{-b}$$

Proprietà delle operazioni

Elevamento a potenza

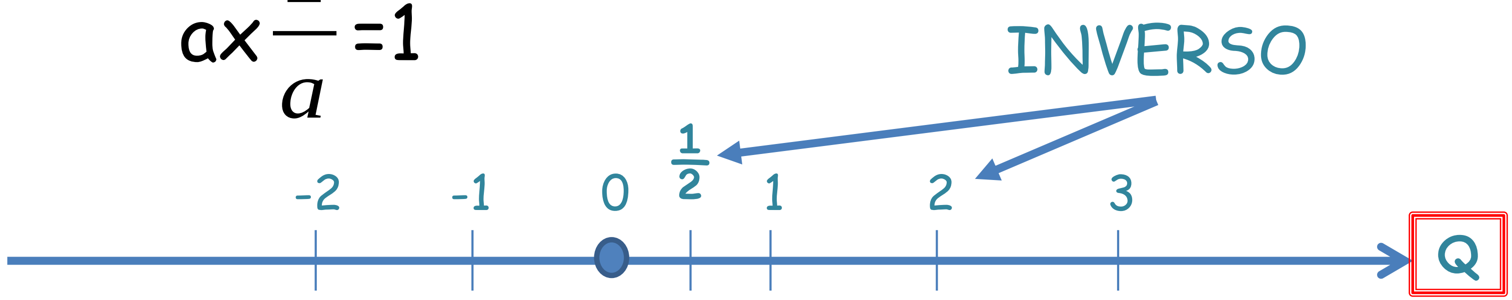
$$\boxed{a^0=1}$$

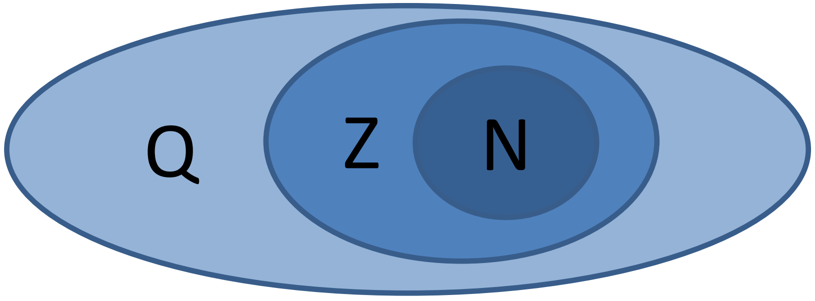
$$1 = a^b : a^b = a^{b-b} = a^0$$

I razionali Q

$$\frac{p}{q} \text{ con } p,q \in Z,\ q \neq 0$$

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$





Operazioni

- Somma
- Moltiplicazione
- Elevamento a potenza

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad a = a^1 = a^{\frac{p}{p}} = (a^p)^{\frac{1}{p}}$$

$\boxed{\text{Valido solo per } a>0}$

$$(-2)^{\frac{6}{6}} = \left\{(-2)^{\frac{1}{6}}\right\}^6 = \left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$$ **Impossibile!**

$$= \{(-2)^6\}^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Operazioni

- Sottrazione
- Divisione
- Estrazione della radice, base>0 per indici pari

Proprietà delle operazioni

Somma

- Esistenza dell'opposto

$$\frac{p}{q} \rightarrow -\frac{p}{q}$$

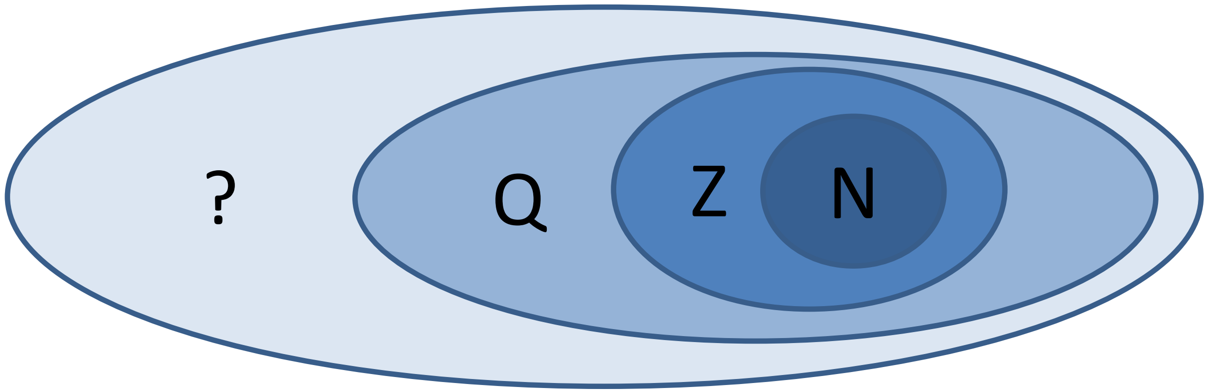
Prodotto

- Esistenza dell'inverso

$$\frac{p}{q} \rightarrow \frac{q}{p}$$

Gli irrazionali

Esistono? 0,01 001 0001 00001 ...



$\sqrt{2}$

π

e

sin1

ln5

Gli irrazionali

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Hp: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con p e q primi tra loro

$\Updownarrow$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$$

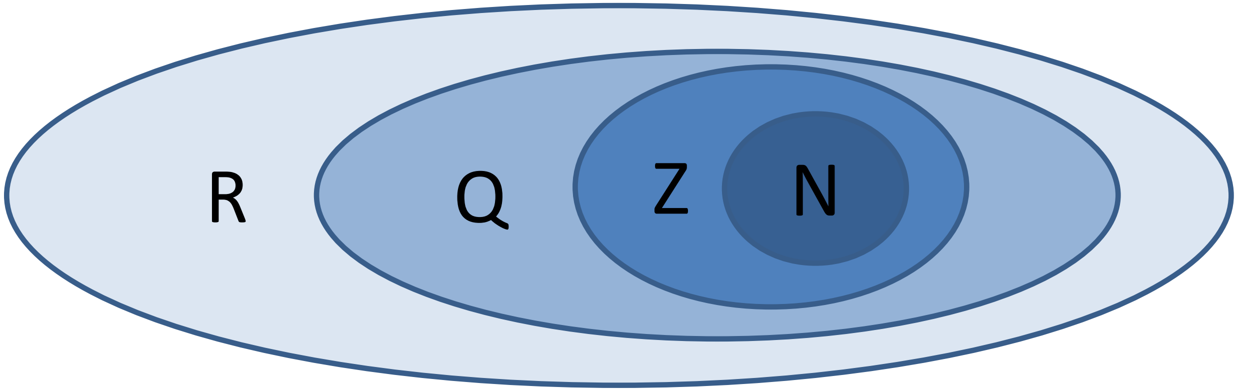
p pari → p=2r

$$q^2 = 2r^2$$

q pari

p e q non sono primi tra loro

I Reali



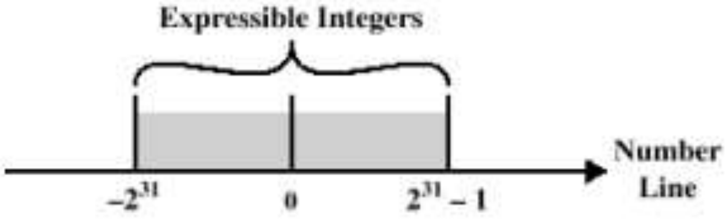
Approssimazione dei numeri reali

π

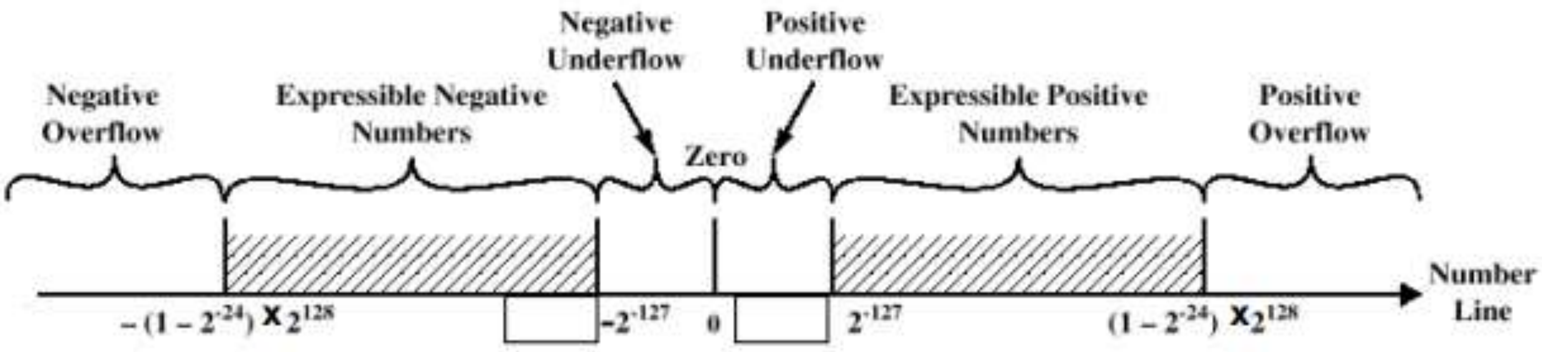
3	4
3,1	3,2
3,14	3,15
…	…

Attenzione: Il numero 3,14 e 3,140 sono approssimazioni diverse dello stesso numero.

Numeri macchina



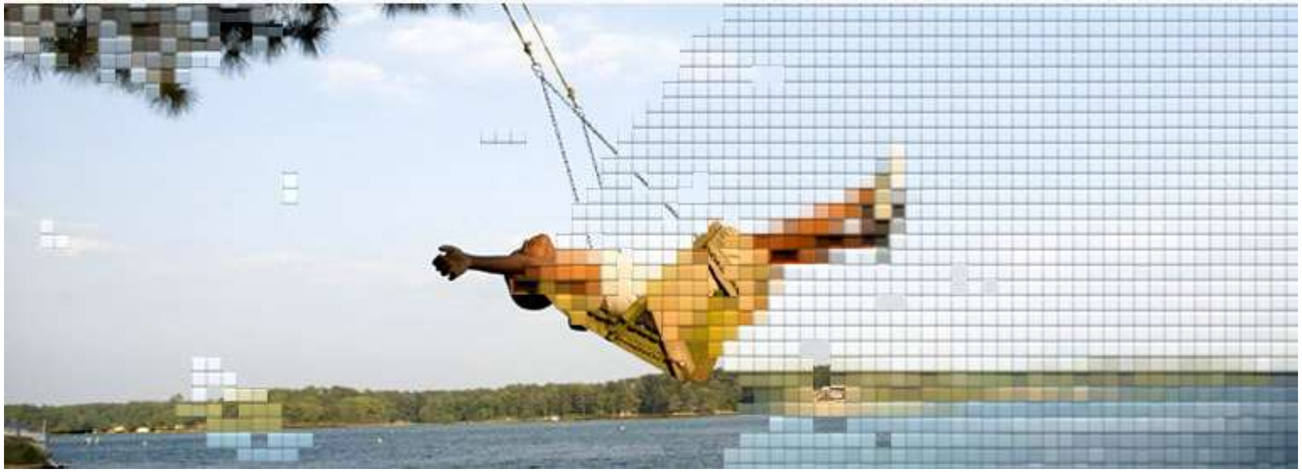
(a) Twos Complement Integers



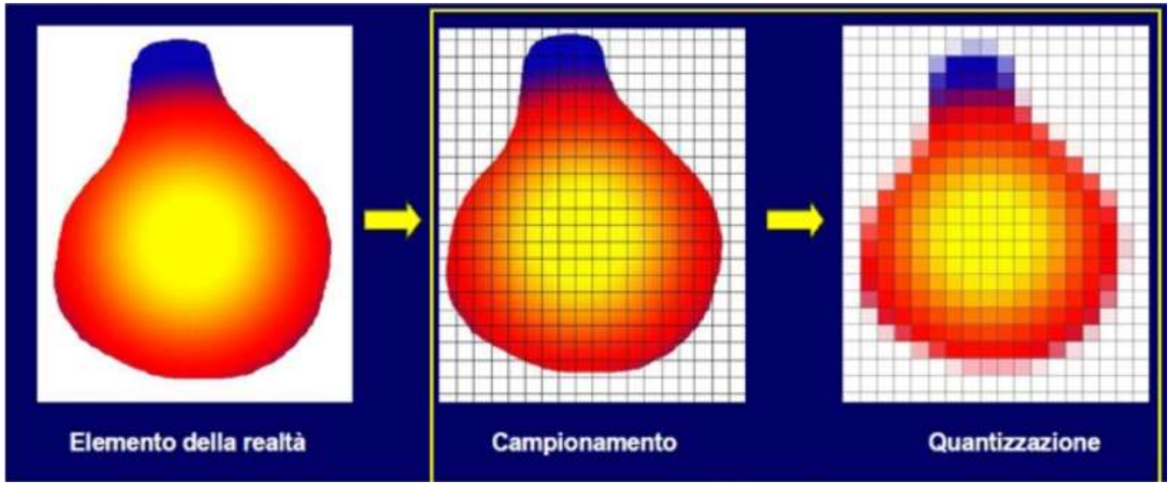
(b) Floating-Point Numbers

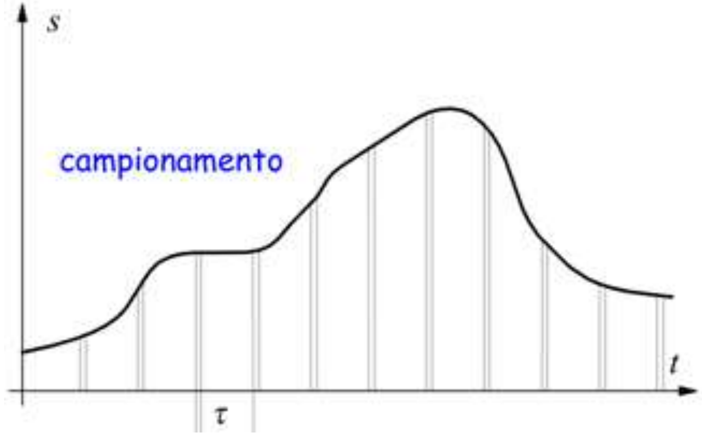
Discretizzazione e quantizzazione

Sono due processi che permettono di tradurre un ambiente continuo in ambiente discreto, quindi funzioni f:R→R in oggetti rappresentabili dal calcolatore



Discretizzazione e quantizzazione





I Reali

Assiomi relativi alle operazioni + ×

- Commutativa
- Associativa
- Distributiva
- Esistenza elemento neutro
- Esistenza dell'opposto
- Esistenza dell'inverso

I Reali

Assiomi relativi all'ordinamento $\leq$

- Dicotomia $a \leq b$ oppure $b \leq a$
- Asimmetria   se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a=b$
- Se $a \leq b$ allora $a+c \leq b+c$
- Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora $0 \leq a+b$ e $0 \leq a \times b$

Il prodotto di due numeri positivi è positivo

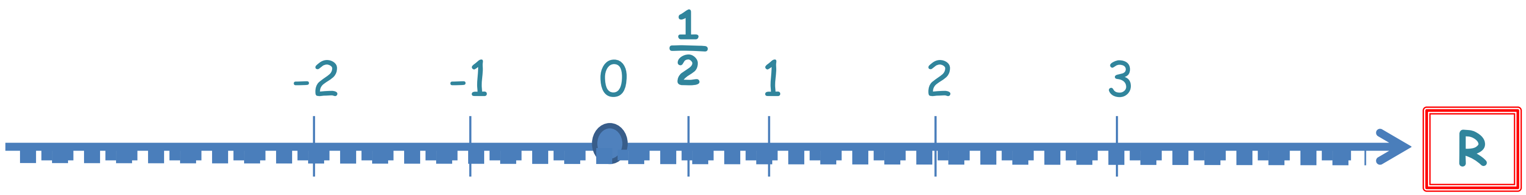
Il quadrato di un numero positivo è positivo

I Reali

Assioma di completezza

Siano A e B due sottoinsiemi dei Reali tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$ allora esiste almeno un $c \in R$ tale che $a \leq c \leq b$

Rappresentazione grafica



I razionali non soddisfano l'assioma di completezza

Siano A e B due sottoinsiemi di Q tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$ allora esiste almeno un $c \in Q$ tale che $a \leq c \leq b$

$A = \{a \in Q \mid a^2 \leq 2\}$ $\qquad$ $B = \{b \in Q \mid b^2 \geq 2\}$

$c^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{2} \notin Q$

Legge di annullamento del prodotto

$$a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0 \vee b=0$$

- $a \times 0 = 0$

  $a + a \times 0 = a \times (1+0) = a \times 1 = a$

- Se $a \times b = 0$ e $a \neq 0$ allora $b=0$

  $b = b \times 1 = b \times (a \times a^{-1}) = (b \times a) \times a^{-1} = 0 \times a^{-1} = 0$

Regole dei segni

$+ \times + = +$ dagli assiomi

$+ \times - = -$

$$0 = a \times 0 = a \times (b-b) = a \times b + a \times (-b)$$

$- \times - = +$

$$0 = (-a) \times 0 = (-a) \times (b-b) = -a \times b + (-a) \times (-b)$$

Operazioni e ordinamento

- Somma e sottrazione mantengono l'ordine
- Moltiplicazione e divisione

$a > 0 \rightarrow$ mantiene

$a < 0 \rightarrow$ inverte

- Passaggio all'opposto inverte
- Passaggio all'inverso

segno concorde $\rightarrow$ inverte

segni discordi $\rightarrow$ mantiene

Potenze ad esponente reale

Si definiscono solo quando la base è > 0

	π			2^{π}	
3		4	8		16
3,1		3,2	8,57		9,1
3,14		3,15	8,81		8,87

… …

2^{π} è l'elemento di separazione tra le due successioni

Il logaritmo

Dato $a^x = y$, il logaritmo in base a di y è l'esponente che deve avere a per ottenere y.

$x = \log_a y$

base
10, e

argomento

$a > 0$ e $a \neq 1$

$y > 0$

$\left(\frac{7}{8}\right)^x = 5$

$x = \log_{\frac{7}{8}} 5$

Esercizi

$y = \log_3 9$	y=2
$y = \log_3 \frac{1}{9}$	y=-2
$y = \log_2 1$	y=0
$y = \log_2 2$	y=1
$y = log_2(-2)$ $y = log_0 4$	impossibile

Esercizi

$$\log_3 x = 2$$

$$\log_x 81 = 4$$

$$\log_{\frac{3}{2}} x = -1$$

$$\log_x 8 = -1$$

$$\log_{\frac{3}{2}} x = \frac{2}{3}$$

$$\log_x \frac{1}{169} = 2$$

$$\log_5 x = 0$$

$$\log_x \sqrt[5]{49} = \frac{2}{5}$$