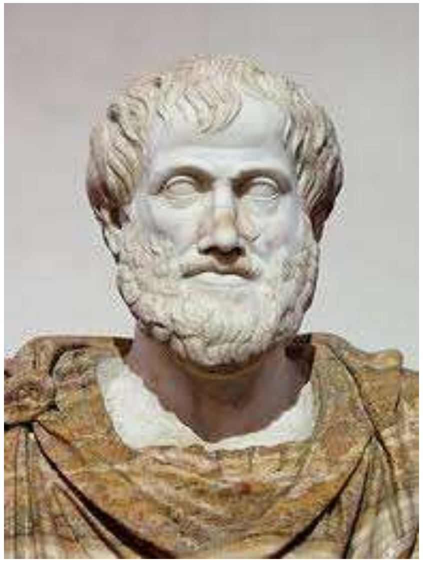
Logica binaria

La **logica** è la scienza del corretto ragionamento e consiste nello studio dei principi e dei metodi che consentono di individuare il corretto ragionamento.

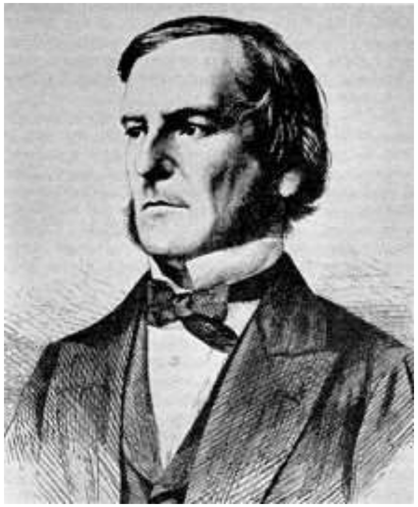
Lo studioso di logica si chiede se la conclusione segue correttamente dalla premesse fornite e se premesse sono buone per accettare la conclusione.

Aristotele (300 a.c.) è stato un filosofo, scienziato e logico greco antico. Fu il primo a formalizzare 'i corretti ragionamenti'. La dialettica aristotelica può essere infatti considerata come il primo tentativo di costruire una logica formale.



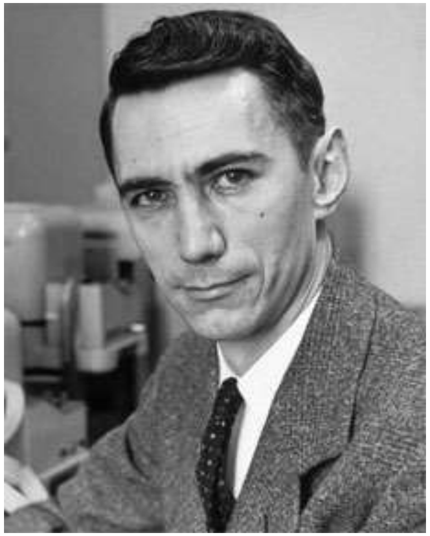
La logica aristotelica è di fatto la prima forma storica di calcolo letterale, fondamento dell'algebra, perché per la prima volta si utilizza l'astrazione (qualcosa per indicare una terza cosa qualsiasi: lettera, parola, volendo anche un numero) e per questo scopo di astrazione si usano le lettere dell'alfabeto.

George Boole è stato un matematico e logico britannico, vissuto nell'800. E' considerato il fondatore della logica matematica e la sua opera influenzò anche settori della filosofia.



Egli creò una disciplina scientifica della logica sorretta da un metodo: dopo aver rilevato le analogie fra oggetti dell'algebra e oggetti della logica, ricondusse le composizioni degli enunciati a semplici operazioni algebriche.

L'opera di Boole è stata la base (grazie a **Claude Shannon**, che ha riconosciuto la coincidenza tra il funzionamento dei circuiti commutatori e la logica proposizionale), per gli studi sui circuiti elettronici e sulla commutazione, e ha costituito un passo importante verso la concezione dei moderni computer.



Una **proposizione o enunciato** è una espressione del linguaggio, cioè una sequenza di suoni con contenuto linguistico organizzati in parole e frasi, per la quale ha senso domandarsi se essa è vera o falsa.

Hai sonno?

Che bello!

La luna è lontana.

Il cane di Marco è nero.

2+1=3

x>4

Ad ogni proposizione può essere associato un valore di verità (vero V o falso F).

2 valori → logica binaria

In Informatica due diversi valori possono rappresentare varie situazioni:

Passa corrente con intensità i	Non passa corrente
Riflette la luce	Non riflette la luce
Magnetizzato	Non magnetizzato

Una proposizione si dice decidibile quando è possibile attribuirle uno specifico valore di verità, mediante una serie finita di passi.

Principi della Logica Binaria

Principio di identità: Ogni proposizione ha lo stesso valore di verità di se stessa.

Principio di non contraddizione: Una proposizione non può essere simultaneamente vera e falsa.

Principio del terso escluso: Una proposizione non può che essere vera o falsa. Non esistono altri valori di verità.

Connettivi logici

Un enunciato per il quale si può determinare subito il valore di verità è detto **enunciato semplice**.

Una combinazione di enunciati, legati da opportuni operatori detti operatori logici o connettivi, è detto **enunciato composto**.

Un **connettivo** è un operatore che consente di creare proposizioni composte a partire da quelle elementari.

Connettivi unari

Identità *Negazione*

p	i	¬ p
VERO	VERO	FALSO
FALSO	FALSO	VERO

Connettivi binari

p	q																
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F

http://www.dma.unina.it/cutolo/didattica/note/connettivi.pdf

Connettivi binari

Congiunzione, $\wedge$, et, e, AND

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

In quale delle seguenti frasi non è corretto utilizzare la congiunzione?

a) Mara e Sara vanno al mare

b) Sara è alta 167 cm ed è nata a Cagliari

c) Mara ha i capelli neri e 3+2=9

Connettivi binari

Disgiunzione (non esclusiva), $\vee$, vel, o,OR

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Connettivi binari

Disgiunzione esclusiva, ⊗, aut aut, o,XOR

p	q	p ⊗ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

In quale delle seguenti frasi le disgiunzione NON è esclusiva?

a) Oggi vado al mare oppure in montagna.

b) Stefano sposerà Sara o Daniela.

c) Per vincere quel concorso bisogna essere molto bravi o raccomandati.

d) Stasera vado al cinema oppure resto a casa a leggere un libro

Connettivi binari

Implicazione semplice o materiale, →, se…allora

antecedente

conseguente

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Connettivi binari

Implicazione semplice o materiale, →, se…allora

p=Consegui la laurea

q=Ti regalano una vacanza

p	q	p → q	
V	V	V	Consegui la laurea e ti regalano una vacanza
V	F	F	Consegui la laurea e non ti regalano una vacanza
F	V	V	Non consegui la laurea e ti regalano una vacanza
F	F	V	Non consegui la laurea e non ti regalano una vacanza

Connettivi binari

Implicazione semplice o materiale $\rightarrow$

- E' un connettivo
- Non esprime una relazione di causa effetto
- Non esprime un legame semantico tra l'antecedente e il conseguente

Implicazione logica $\Rightarrow$

- NON è un connettivo ma simboleggia una deduzione,
un ragionamento.
- Esprime un legame semantico tra l'antecedente e il conseguente

https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/6992-implicazione-matematica.html

Connettivi binari

Implicazione semplice o materiale, $\rightarrow$, se…allora

Condizione sufficiente

Se c'è il presupposto p allora q vale di sicuro.
Se non c'è p, q potrebbe comunque valere
(F $\rightarrow$ V è vero)

$$p \rightarrow q \qquad\qquad \neg q \rightarrow \neg p$$

Se sento il tuono allora c'è stato un fulmine.
Se Q è un quadrato allora è un rettangolo.

Se Lorenzo va a ballare Mario rimane a casa.

LB→MC

Se la precedente affermazione è vera si può dire che

a) Se Mario non è rimasta a casa, Lorenzo non è andato a ballare

¬ MC → ¬ LB

b) Se Mario è rimasta a casa, Lorenzo è andato a ballare

MC → LB

c) Mario rimane a casa solo se Lorenzo va a ballare

MC → LB

d) Se Lorenzo non va a ballare, Mario non rimane a casa

¬ LB → ¬ MC

Completare correttamente il seguente ragionamento:

«Se si ferma è perduto. Non si ferma quindi ...»

Connettivi binari

Implicazione inversa, $\leftarrow$

p	q	p $\leftarrow$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Connettivi binari

Implicazione inversa, $\leftarrow$

Condizione necessaria

Se c'è il presupposto p, allora q <u>può</u> valere. Se non c'è p allora q non vale.

$$p \leftarrow q \qquad\qquad \neg p \rightarrow \neg q$$

Solo se c'è benzina allora la macchina funziona.
Solo se x è pari allora è divisibile per 6.

Sara non piange la notte solo se Maria la culla prima di dormire.

$\neg$ SP→MC

Se la precedente affermazione è vera, allora è sicuramente vero che:

a) Se Sara piange la notte è perché Maria non l'ha cullata prima di dormire

SP→ $\neg$ MC

b) Sara non piange la notte è perché Maria non l'ha cullata prima di dormire

$\neg$ SP → $\neg$ MC

c) Se Maria non culla prima di dormire Sara, questa piange la notte

$\neg$ MC → SP

d) Se e solo se Maria ha cullato Sara prima di dormire, questa non dorme

MC ⇔ SD

Connettivi binari

Implicazione doppia, ⇔, se e solo se

p	q	p ⇔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Connettivi binari

Implicazione doppia, $\Leftrightarrow$, se e solo se

Condizione necessaria e sufficiente
p è la stessa identica cosa rispetto a q.
Uno implica l'altro e viceversa.

Un poligono ha tre lati se e solo se è un triangolo.

Un uomo è un padre se e solo se ha un figlio.

Condizione sufficiente, necessaria, necessaria e sufficiente

	NECESSARIA	NON NECESSARIA
SUFFICIENTE	se la condizione > è vera, l'evento si verifica > è falsa, l'evento non si verifica	se la condizione > è vera, l'evento si verifica > è falsa, l'evento può verificarsi oppure no
NON SUFFICIENTE	se la condizione > è vera, l'evento può verificarsi oppure no > è falsa, l'evento non si verifica	se la condizione > è vera, l'evento può verificarsi oppure no > è falsa, l'evento può verificarsi oppure no

Condizione sufficiente, necessaria, necessaria e sufficiente?

Se piove, la strada davanti casa è bagnata.

Piove è una condizione **sufficiente** perché l'evento «strada davanti casa si bagna» si verifichi.
Si considera assunto che la strada, essendo davanti casa, non si trovi in un tunnel o galleria.

E' una condizione **sufficiente ma non necessaria** perché, anche se non piove, la strada potrebbe bagnarsi per altre ragioni (esonda il fiume, si rompe una conduttura dell'acqua, stanno lavando la strada, ecc.)

Condizione sufficiente, necessaria, necessaria e sufficiente?

Per avere un diploma di scuola superiore, bisogna aver frequentato l'ultimo anno di scuola.

«Aver frequentato l'ultimo anno di scuola» è una condizione **necessaria** per il verificarsi dell'evento **«avere il diploma»**, perché non puoi avere un diploma di scuola superiore senza aver frequentato l'ultimo anno.

Non è una condizione sufficiente, perché frequentare l'ultimo anno non garantisce automaticamente il conseguimento del diploma.

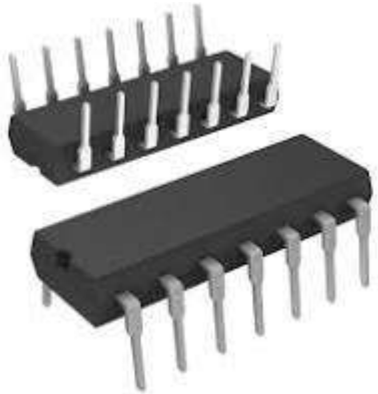
Condizione sufficiente, necessaria, necessaria e sufficiente?

Se una persona non è sposata, allora è celibe

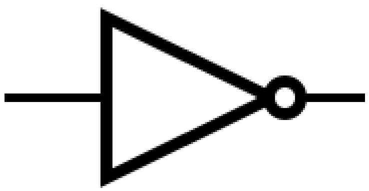
Non essere sposati è una condizione **necessaria** per essere celibi (è la definizione stessa di celibe).

E' anche una condizione **sufficiente** in quanto non ci sono altri modi per essere celibe.

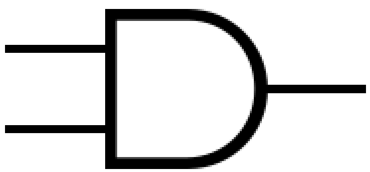
Porte logiche



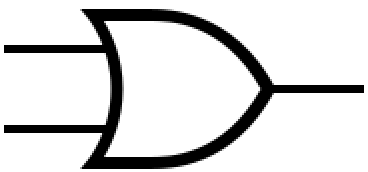
Una porta logica è un circuito elementare che implementa la funzionalità degli operatori logici.



NOT



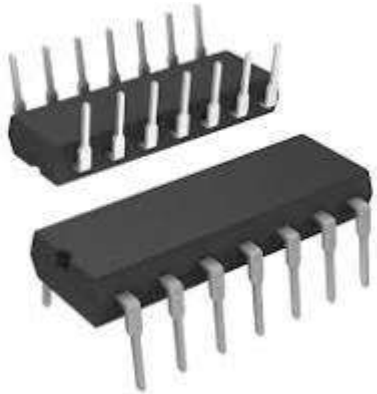
AND



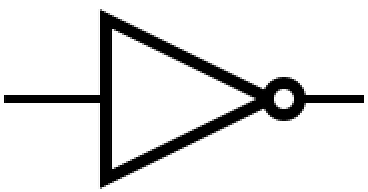
OR

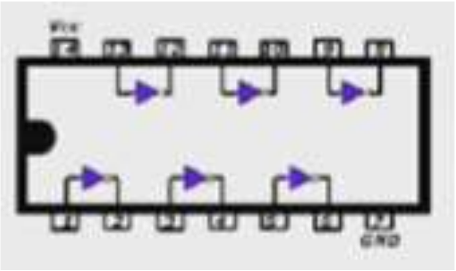
http://paso.wordpress.com/2008/07/21/ripassare-le-porte-logiche-con-i-domino

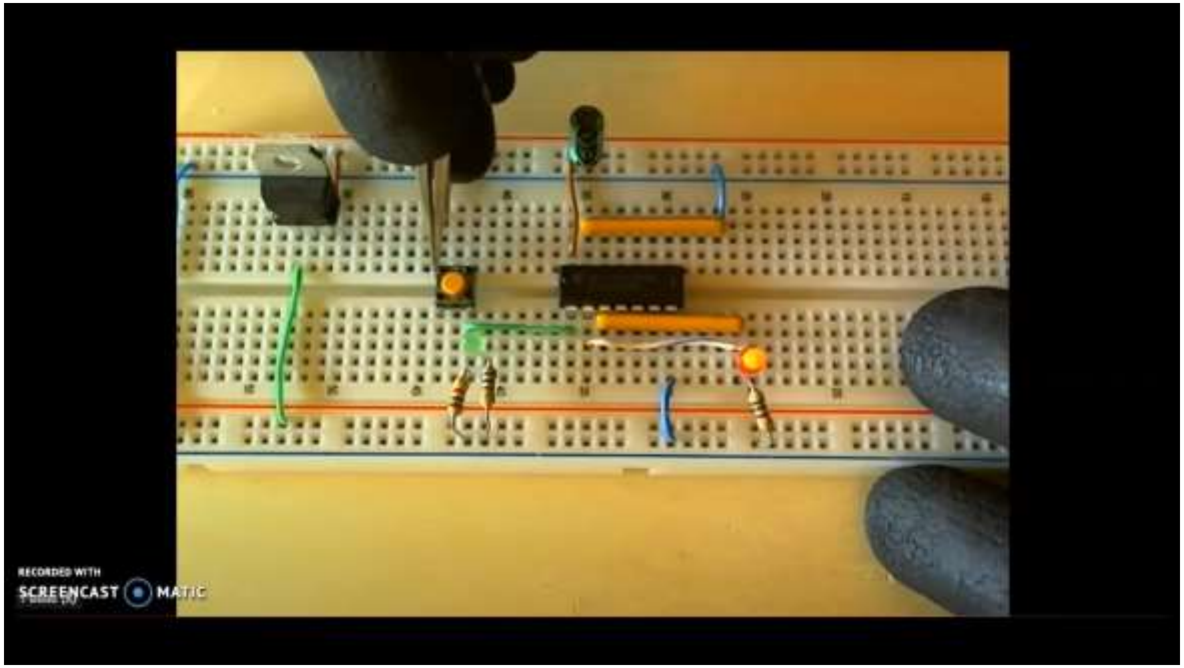
Porte logiche



NOT

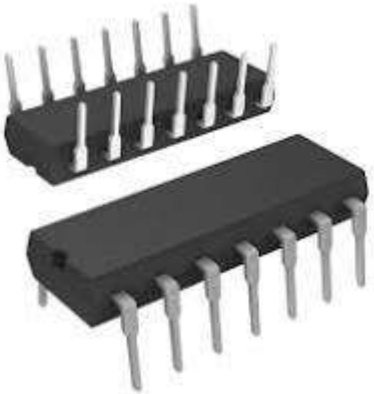




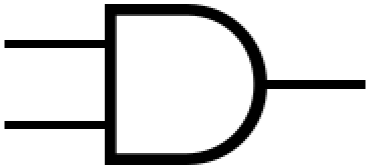


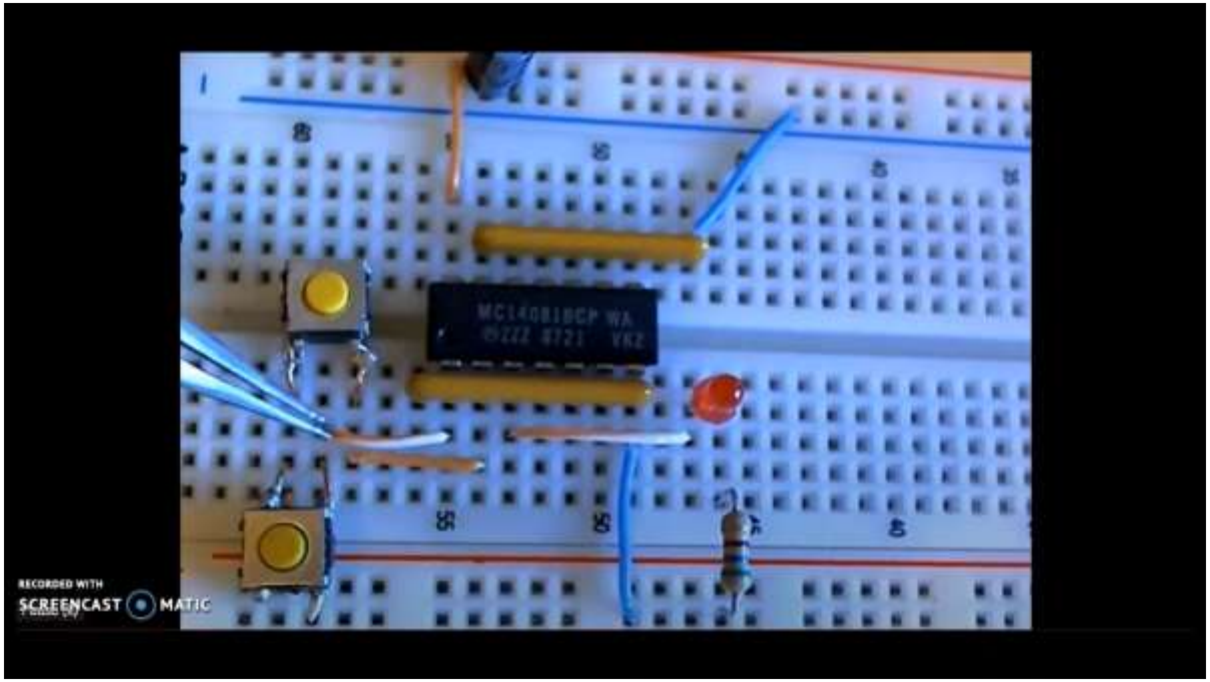
Massimo Manco - YouTube

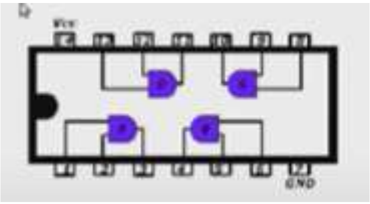
Porte logiche



AND

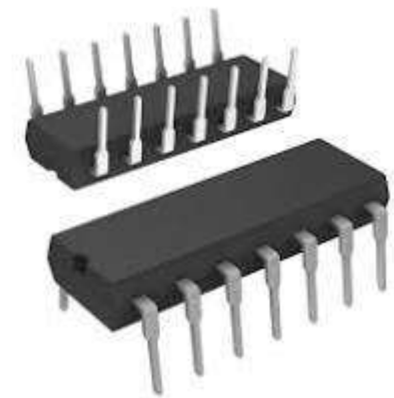




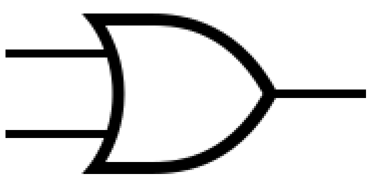


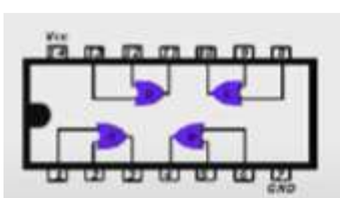
Massimo Manco - YouTube

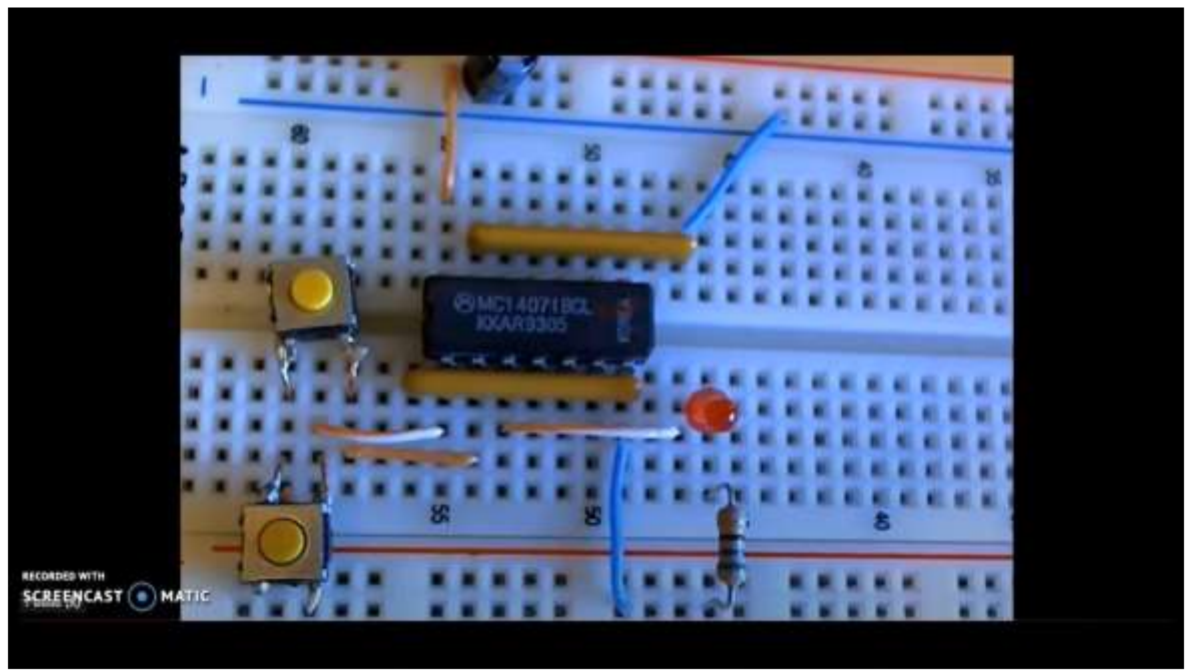
Porte logiche



OR

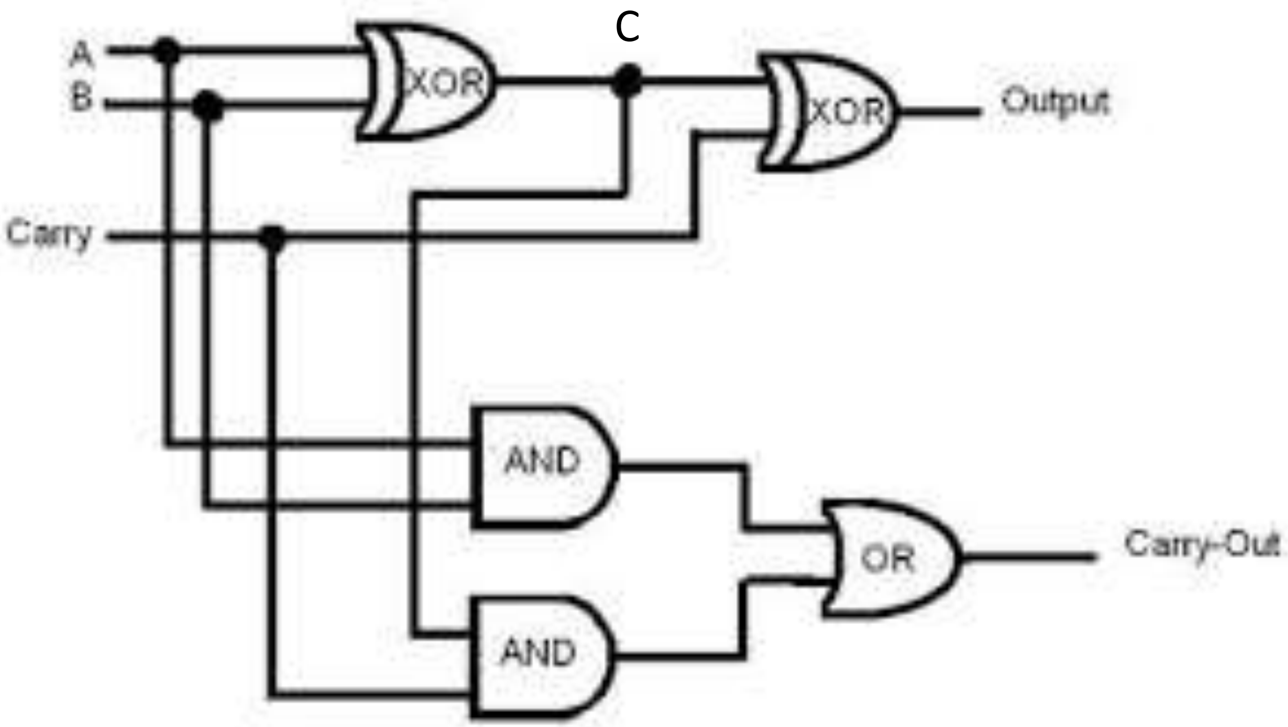






Massimo Manco - YouTube

Circuito sommatore completo



Una **proposizione aperta o predicato** è una proposizione che contiene delle variabili.

Assegnando un valore alla variabile si chiude la proposizione ed è possibile valutarne il valore di verità.

Il valore di verità del predicato dipenderà, quindi, dal valore della variabile.

E' necessario precisare in quale ambito la variabile assume i valori.

Dominio della variabile

E' l'insieme in cui la variabile assume i valori

Insieme di verità

E' l'insieme dei valori del dominio che rendono vero il predicato

Esempio

Si consideri il predicato

A<4 AND (C=3 OR B>0)

Una terna (A,B,C) con A=-3 appartiene al dominio della variabile?

(A,B,C)=(2,3,2)

Vero

(A,B,C)=(2,-5,2)

Falso

Quale tra le precedenti terne appartiene all'insieme di verità?

Esempio

Si consideri il predicato

A<4 AND (C=3 OR B>0)

Determinare due terne, diverse dalle precedenti, una che appartenga anche al dominio della variabile e l'altra che, invece, renda falsa la proposizione.

Esercizi

Dato il seguente ambiente di valutazione
{(A,2); (B,3); (C,2); (D,6)}

Valutare le seguenti espressioni

1. (A<3) AND (B>0 OR C=3)
2. (B+3=0) AND (C<1 OR B/3>0)
3. (D+A=2) OR (C>7 AND A>0) OR (A<2 OR B>0)

Ripetere l'esercizio con l'ambito di valutazione
{(A,1); (B,5); (C,2); (D,3)}

Il predicato può essere chiuso anche mediante l'uso dei **quantificatori**.

Quantificatore universale $\forall$ (per ogni)

Quantificatore esistenziale $\exists$ (esiste)

$\exists!$ (esiste un solo)

x è un triangolo

D: {poligoni}

$\forall x$, x è un triangolo

$\exists x$, x è un triangolo

$\exists! \, x$, x è un triangolo

x contiene fruttosio

D: {frutti}

$\forall x$, x contiene fruttosio

$\exists x$, x contiene fruttosio

$\exists!\, x$, x contiene fruttosio

x è castano

D:

$\forall x$, x è castano

$\exists x$, x è castano

$\exists! \, x$, x è castano

Nelle frasi seguenti alcuni quantificatori sono citati, in modo implicito ma non del tutto chiaro, mediante l'articolo "un".
Precisa, volta per volta, di che quantificatore si tratta:

a) Il quadrato di un numero pari è pari; $\forall$
b) 16 è il quadrato di un numero pari; $\exists$
c) Dato un segmento AB, un punto lo divide in due parti uguali; $\exists!$

Negazione dei quantificatori

$$\neg[\forall x, p(x)] \Leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$$

Non tutti i cani sono bianchi.
Esiste <u>almeno un</u> cane che non è bianco.

$$\neg[\exists x, p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$$

Non è vero che esiste un numero pari non divisibile per 2.
Tutti i numeri pari sono divisibili per 2.

Scrivi la negazione delle seguenti frasi

a) Ogni numero che termina con 3 è primo;

b) Esiste un pentagono con quattro lati;

c) Ogni esagono è un poligono regolare;

d) Esiste un numero Irrazionale con sviluppo decimale limitato.

Se è vero che:

Alessandra è una persona disponibile ed
Alessandra è una persona tranquilla

allora è sicuramente vero che

a) Almeno una persona è disponibile e tranquilla
b) Alessandra è generosa
c) Non è detto che tutte le persone disponibili siano anche tranquille
d) Non è detto che tutte le persone tranquilli siano disponibili

L'affermazione "non tutti gli oggetti di vetro sono prodotti a Venezia" equivale a

A) Tutti gli oggetti di vetro sono prodotti a Venezia
B) Non tutti gli oggetti prodotti a Venezia sono oggetti di vetro
C) tutti gli oggetti di vetro non sono prodotti fuori Venezia
D) Alcuni oggetti di vetro non sono prodotti a Venezia
E) Alcuni oggetti prodotti a Venezia non sono oggetti di vetro

Non c'è nessun turista senza la guida.

Se la precedente affermazione è falsa, allora è sicuramente vero che:

a) Nessun turista ha la guida
b) Tutti i turisti hanno la guida
c) Una buona parte dei turisti non ha la guida
d) Alcuni turisti non hanno la guida
e) Almeno un turista non ha la guida

Metodi deduttivi

Modus ponens

p	Affermo che p è vera.
$p \rightarrow q$	Affermo che $p \rightarrow q$ è vera.
q	Ciò accade con p vero solo se anche q è vero.

Metodi deduttivi

Riduzione all'assurdo

$\neg p$ Affermo che p è falso

Per il principio di non contraddizione

$$\frac{q \wedge \neg q}{p}$$

Mostro che si arriva ad una contraddizione

Per il principio del terzo escluso p deve necessariamente essere vero

Voglio dimostrare che p è vero.

Metodi deduttivi

Induzione matematica

Si ha una proprietà o una formula che dipende dai valori di un numero naturale h

- *Dimostro che la proprietà è vera per il primo valore di h*
- *Ipotizzo che la proprietà sia vera per un certo valore di h e (<u>sfruttando quanto ipotizzato</u>) dimostro che la proprietà è vera per h+1*
- *La proprietà sarà vera per tutti i valori di h*

Metodi deduttivi

Induzione matematica

Effetto domino

Metodi deduttivi

Induzione matematica – Esempio

Somma dei primi n numeri naturali

$$\sum_{h=1}^{n} h = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per n=4 $\quad$ 1+2+3+4 = 4(4+1)/2 = 10

Induzione matematica - Esempio

$$\sum_{h=1}^{n} h = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per n=1 $\quad 1 = 1(1+1)/2 = 1$

Ipotizzo che
per n $\quad 1+2+\ldots n = n(n+1)/2$

Per n+1 $\quad \boxed{1+2+\ldots n} + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1)$

$= (n+1)(n+2)/2$

Induzione matematica – Esempio 2

Per ogni numero naturale n, l'espressione
$n^3 + 5n$ è divisibile per 6

$n=1$ $1 + 5 = 6$ che è divisibile per 6

Ipotizzo che per un certo n, $n^3 + 5n$ sia divisibile per 6, allora $n^3 + 5n$

Per $n+1$ $(n+1)^3+5(n+1)= n^3+3n^2+3n+1+5n+5$

$n^3+5n+3n(n+1)+6$

è divisibile per 6