Topologia della retta reale

R e i suoi sottoinsiemi

$$A = \left\{\frac{8}{4}, \frac{1}{2}, 1.4\bar{9}, \sqrt{2}, \frac{2}{3}, 1.12, \sqrt[3]{3}\right\}$$

$$[-2,3]; (-3.12, -1,34); \left(-\sqrt{2}, 0\right]; [1, 5.23)$$

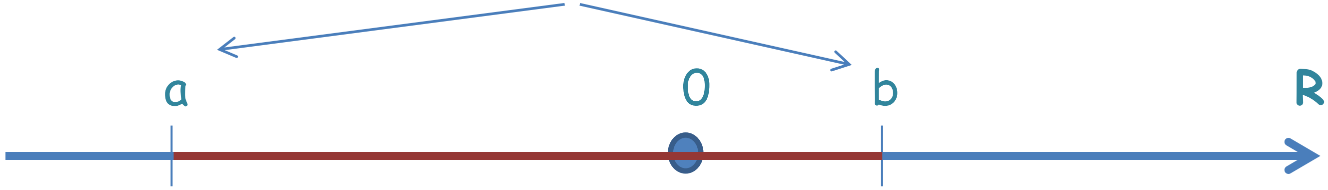
Intervalli

Si consideri l'insieme dei numeri reali R.

Siano a, b $\in$ **R**. Si definisce intervallo ogni sottoinsieme di R costituito dai punti compresi tra a e b.

$$I = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} \subset \mathbf{R}$$

Estremi dell'intervallo



Intervalli

Se gli estremi dell'intervallo sono compresi si parla di intervallo chiuso.

$I = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$I = [a,b]$

Altrimenti si parla di intervallo aperto.

$I = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$

$I = (a,b)$

Intervalli

Se uno degli estremi è ± ∞ si parla di intervallo illimitato.

$I = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < +\infty\}$

Altrimenti si parla di intervallo limitato.

N.B. Non è un intervallo un sottoinsieme di R costituito da punti sparsi, per esempio N

Intervalli

L'unione o l'intersezione di due intervalli è ancora un intervallo.

$\emptyset$ è un intervallo.

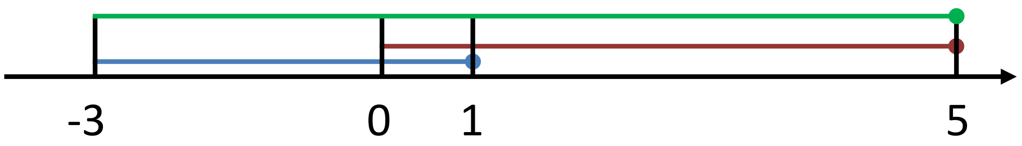
$\emptyset = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < a\}$

$\emptyset = (a,a)$

Esercizi

Determinare e rappresentare graficamente l'intervallo risultato delle seguenti operazioni

$A=(-3;1] \cup (0;5]$



$A \cup B$ e $A \cap B$, con $A=[1;5]$ e $B=[3;8]$

$A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$, con $A=(-2;1]$ e $B=[-1;4)$

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$ con $A=[-5;-1)$ e $B=(-3;1)$

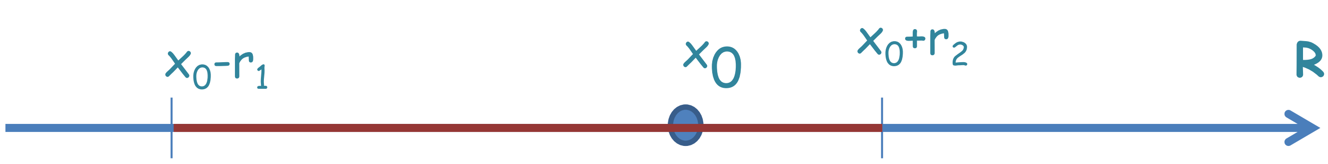
Intorni

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Si definisce intorno di x_0 ogni intervallo aperto

$$I(x_0) = \{x \in \mathbf{R} \mid x_0 - r_1 < x < x_0 + r_2\} \subset \mathbf{R}$$

con r_1 e r_2 numeri reali positivi arbitrari.

$$I(x_0) = (x_0 - r_1, x_0 + r_2)$$

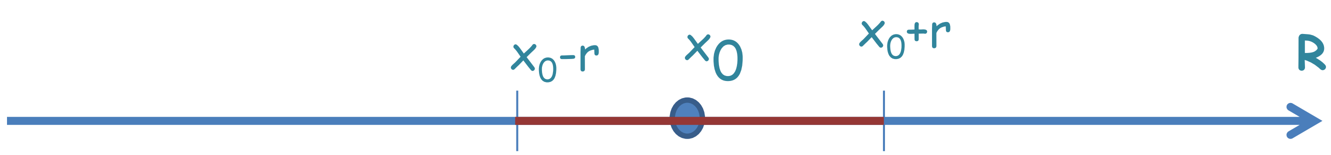


Intorni

Se $r_1 = r_2$ l'intorno si dice circolare.

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbf{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\} \subset \mathbf{R}$$

r è detto raggio dell'intorno

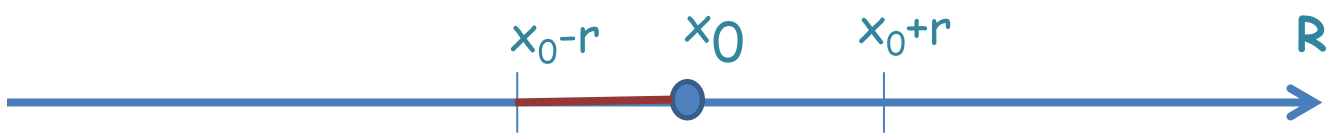


$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ $\quad$ $I_r(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < r\}$

Intorni

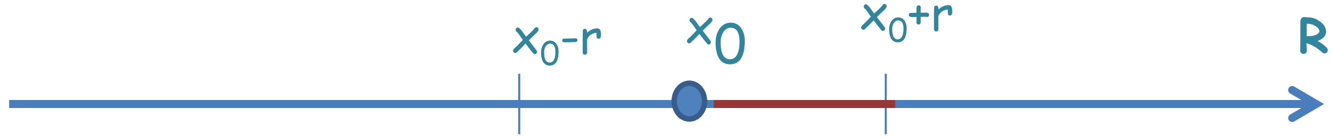
Un intorno sinistro di x_0 è un intervallo del tipo

$$I(x_0) = \{x \in \mathbf{R} \mid x_0 - r < x < x_0\} = (x_0 - r, x_0).$$



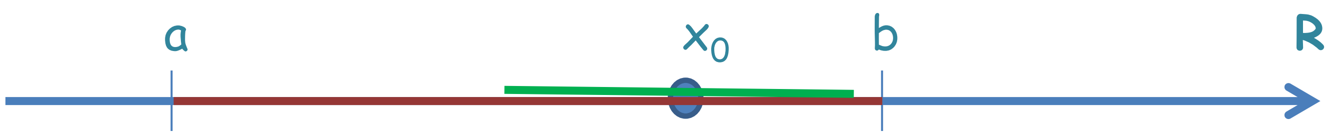
Un intorno destro di x_0 è un intervallo del tipo

$$I(x_0) = \{x \in \mathbf{R} \mid x_0 < x < x_0 + r\} = (x_0, x_0 + r)$$



Punti interni

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$. Si dice che x_0 è un punto interno ad A se $x_0 \in A$ ed esiste almeno un intorno circolare $I_r(x_0) \subset A$.



$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 3\} \subset \mathbf{R}$

$x_0 = 2$

$x_0 = 2 \in A$

$I(2) = \{x \in \mathbf{R} \mid 2-0{,}5 < x < 2+0{,}5\} \subset A$

Punti interni

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$. Si dice che x_0 è un punto interno ad A se $x_0 \in A$ ed esiste almeno un intorno circolare $I_r(x_0) \subset A$.

$A = [1, 3] \subset \mathbf{R}$ $\quad\quad x_0 = 3$

$x_0 = 3 \in A$ $\quad\quad I(3) = \{x \in \mathbf{R} \mid 3-r<x<3+r\} \not\subset A$

Punti esterni

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$. Si dice che x_0 è un punto esterno ad A se $x_0 \notin A$ ed esiste almeno un intorno circolare $I_r(x_0) \subset C_{\mathbf{R}}A$.

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\} \subset \mathbf{R}$ $\qquad x_0 = 3$

$x_0 = 3 \notin A \qquad I(3) = \{x \in \mathbf{R} \mid 3-0,5 < x < 3+0,5\} \subset C_{\mathbf{R}}A$

Punti di frontiera

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$. Si dice che x_0 è un punto di frontiera per A se non è né interno né esterno.

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\} \subset \mathbf{R}$ $\qquad x_0 = 2$

$x_0 = 2 \notin A$ $\qquad I(2) = \{x \in \mathbf{R} \mid 2-r < x < 2+r\} \not\subset A$

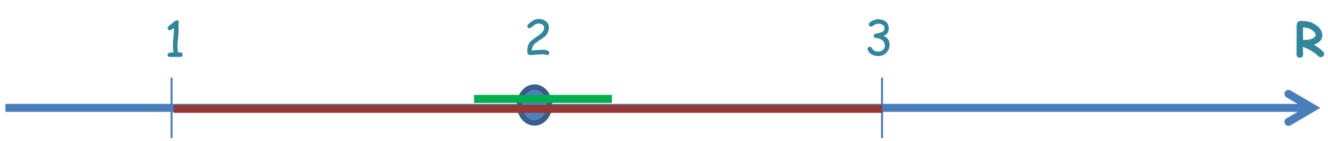
$\not\subset C_R A$

Punti di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$. Si dice che x_0 è un punto di accumulazione per A se ogni intorno di x_0 include almeno un punto di A diverso da x_0.

x_0 è un punto di accumulazione per A se $\forall\ I(x_0)$, $\exists\ x \neq x_0 \mid x \in A \wedge x \in I(x_0)$.

$A = (1,3) \subset \mathbf{R}$ $\qquad$ $x_0 = 2$



Punti di accumulazione

Il punto di accumulazione non deve necessariamente appartenere all'insieme.

$A = \{1/n, \text{ con } n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$

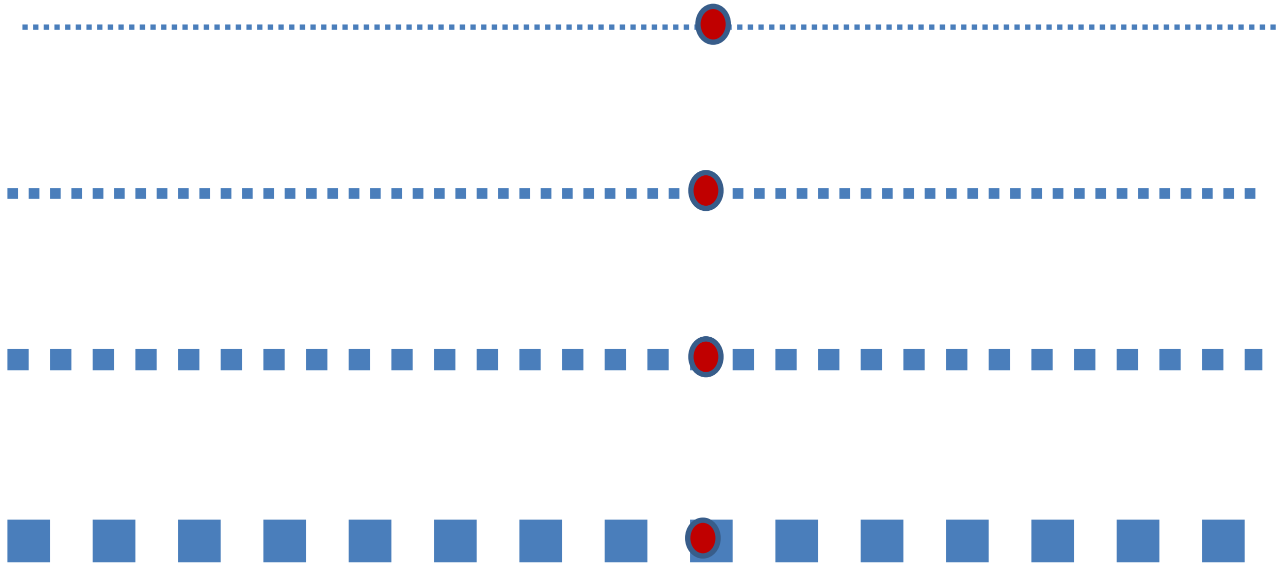
$x_0 = 0$

$x_0 = 0 \notin A$

$I(0) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 0 + r\}$

Punti di accumulazione

Intuitivamente essere punto di accumulazione per A significa che zoomando su x_0 continuo a vedere punti di A.



Punti di accumulazione

Teorema di Bolzano- Weierstrass

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di R ammette sempre punto di accumulazione.

Ogni intervallo di R è infinito e limitato (almeno da una parte) e quindi ammette almeno un punto di accumulazione.

Per l'assioma di completezza ogni punto di R è di accumulazione per R.

Punti di accumulazione

Negli intervalli chiusi tutti i punti sono di accumulazione.

Negli intervalli aperti sono di accumulazione tutti i punti dell'intervallo più i punti di frontiera, cioè gli estremi dell'intervallo.

Insiemi aperti e chiusi

Un insieme è aperto se è fatto solo da punti interni.

Un insieme è chiuso se il suo complementare è aperto. Un insieme chiuso è dato dall'unione di un insieme aperto e dai suoi punti di frontiera.

Esercizi

Attenzione!
Si ricorda che i numeri che finiscono con 9 periodico sono uguali al numero non periodico successivo.
Di seguito dimostrazione in un caso particolare

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0,\bar{3} + 0,\bar{6} = 0,\bar{9}$$

- Dire se i seguenti insiemi sono aperti o chiusi.

$$(3, 5.6) \cup [2, 4.3] \qquad [3,5) \cap (2.\bar{9}, 4.9)$$
$$(-\infty, 3.4) \cap [-7.23\,, 3.4] \qquad (2.\bar{9}, 5.\bar{2}) \cup [3, 5.19]$$
$$(2.\bar{9}, 5.\bar{2}) \cup \emptyset \qquad (2.\bar{9}, 5.\bar{2}) \setminus \emptyset$$
$$(2.\bar{9}, 5.\bar{2}) \setminus [3.1, 5.2) \qquad (2.\bar{9}, 5.\bar{2}) \cap \emptyset$$

- Rappresentare i seguenti insiemi utilizzando gli intervalli:

$$A = \{x \in R: 1 < x \leq 98\}$$
$$B = \{x \in R: x \geq 198\}$$
$$C = \{x \in R: x < -8 \vee 0 \leq x < 16\}$$

Maggioranti e minoranti

Sia $A \subseteq B \subseteq R$. Si dice maggiorante dell'insieme a un numero $b \in B$ che sia maggiore di tutti gli elementi di A.

$b \in B$ è maggiorante per A se $\forall\ a \in A$, $b \geq a$

$A = (2,3)$ $\quad$ $B = (2,4)$ $\quad$ $A \subset B \subset R$

Sono maggioranti per A tutti gli elementi di $[3,4)$

Maggioranti e minoranti

Sia $A \subseteq B \subseteq R$. Si dice minorante dell'insieme a un numero $b \in B$ che sia minore di tutti gli elementi di A.

$b \in B$ è minorante per A se $\forall\ a \in A$, $b \leq a$

$A = (2,3)$ $B = (1,3)$ $A \subset B \subset R$

Sono minoranti per A tutti gli elementi di $(1,2]$

Estremo superiore ed inferiore

Si dice estremo superiore di A il più piccolo dei maggioranti di A.

$A = (2,3)$ $B = (1,4)$ $A \subset B \subset R$

L'estremo superiore di A è 3.

Si dice estremo inferiore di A il più grande dei minoranti di A.

L'estremo inferiore di A è 2.

Estremo superiore ed inferiore

Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato di R ammette sia estremo superiore che inferiore ed essi sono finiti.

Se l'insieme è illimitato superiormente l'estremo superiore è infinito.

Se l'insieme è illimitato inferiormente l'estremo inferiore è infinito.

Massimo e minimo

Se l'estremo superiore di A appartiene ad A allora si chiama massimo di A.

$A = (2,3]$ $\qquad$ $B = (2,4)$ $\qquad$ $A \subset B \subset R$

Il massimo di A è 3.

Se l'estremo inferiore di A appartiene ad A allora si chiama minimo di A.

Ogni sottoinsieme non vuoto, chiuso e limitato di R ammette massimo e minimo.

Determinare per ciascuno dei seguenti insiemi, se esistono, i punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo rispetto a R. Stabilire, inoltre se l'insieme è aperto o chiuso, limitato o illimitato.

1. A=[1,+∞)
2. B=[2,3) U {7,9}
3. $$C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in N_0 \right\}$$
4. $$D = \left\{ 1 + \frac{2}{3^n}, n \in N \right\}$$
5. E=[1,2] U (3,4) U (5,6]