Rappresentazione dell’informazione

Numeri negativi

Rappresentazione dei numeri

- In un calcolatore i numeri sono rappresentati su raggruppamenti di bit, di dimensione prefissata (ad esempio: 8, 16, 32), detti *parole*.

(Nel caso di parole di 8 bit
si usa il termine *byte*)

Su una parola di n bit,
si possono rappresentare 2^n numeri diversi.

Rappresentazione dei numeri negativi

- Di norma, se il bit più a sinistra della parola è 1, il numero viene interpretato come negativo.

- Principali convenzioni:
  - rappresentazione in modulo e segno
  - rappresentazione in complemento

Rappresentazione in modulo e segno

- Per rappresentare un numero, si considera:
  - il segno → bit più a sinistra della parola (0 per +, 1 per -)
  - il valore assoluto o modulo → restanti bit della parola

Rappresentazione in modulo e segno

- Osservazioni:
  - il massimo numero rappresentabile, in modulo, è $2^{n-1}-1$
  - lo zero compare due volte (come $+0$ e -0)
  - è richiesta un'unità aritmetica per la sottrazione

Rappresentazione in complemento

- È la rappresentazione abitualmente utilizzata in quanto consente di effettuare le sottrazioni usando l'unità aritmetica di somma:
  - *la differenza tra due numeri positivi può essere ottenuta sommando al minuendo il complemento del sottraendo*

⇨ Per illustrare la rappresentazione in complemento facciamo riferimento dapprima al sistema decimale.

Rappresentazione in complemento dei numeri decimali

- *Complemento a 9*:

  si ottiene sottraendo da 9 ciascuna cifra del numero

- Esempi:
  - il complemento a 9 di 41 è 58
    (99 – 41 = 58)
  - il complemento a 9 di 2607 è 7392
    (9999 – 2607 = 7392)

Rappresentazione in complemento dei numeri decimali

- *Complemento a 10*:

  si ottiene calcolando il complemento a 9
  e aggiungendo poi 1 all'ultima cifra

Nota: dato un numero decimale N a n cifre, il suo complemento a 10 è pari a $10^n - N$

Rappresentazione in complemento dei numeri decimali

- Esempi:
  - il complemento a 10 di 41 è 59
    $(99 - 41 = 58 \rightarrow 59)$
  - il complemento a 10 di 2607 è 7393
    $(9999 - 2607 = 7392 \rightarrow 7393)$
  - il complemento a 10 di 3717 è 6283
    $(9999 - 3717 = 6282 \rightarrow 6283)$

Sottrazione in complemento a 10

- Esempio: $72 - 41 \;=\; 31$

  Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo:

$$
\begin{array}{ccc l}
 & 7 & 2 & + \\
 & 5 & 9 & = \\
\hline
1 & 3 & 1 &
\end{array}
$$

il riporto
viene scartato

differenza positiva

Sottrazione in complemento a 10

- Esempio: 2876 - 41 = 2835

  Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo (esteso a quattro cifre cioè 0041):

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 8 & 7 & 6 & + \\ & 9 & 9 & 5 & 9 & = \\ \hline 1 & 2 & 8 & 3 & 5 & \end{array}$$

il riporto
viene scartato

differenza positiva

Sottrazione in complemento a 10

- Esempio: $72 - 357 = -285$

  Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo:

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 7 & 2 & + \\
6 & 4 & 3 & = \\
\hline
7 & 1 & 5 &
\end{array}
$$

differenza negativa

Complementando a 10 il risultato si ottiene il valore assoluto della differenza cioè 285

Sottrazione in complemento a 10

- Esempio: $276 - 357 = -81$

Sommiamo il minuendo col complemento a 10 del sottraendo:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 7 & 6 & + \\ 6 & 4 & 3 & = \\ \hline 9 & 1 & 9 & \end{array}$$

differenza negativa

Complementando a 10 il risultato si ottiene il valore assoluto della differenza cioè 81

Sottrazione in complemento a 10

- Riassumendo, si somma al minuendo il complemento a 10 del sottraendo:
  - in caso di riporto, la differenza è positiva ed è data dal risultato della somma, a meno del riporto che viene scartato
  - se non si ha riporto, la differenza è negativa e il suo valore assoluto si ottiene complementando a 10 il risultato della somma

Sottrazione in complemento a 9

- Sostanzialmente analoga alla sottrazione in complemento a 10.

- L'unica variante è che in caso di risultato positivo (ovvero in presenza di riporto) occorre sommare il riporto al risultato ottenuto.

Sottrazione in complemento a 9

- Esempio: 72 - 41 = 31

  Sommiamo il minuendo col complemento a 9 del sottraendo:

$$
\begin{array}{rrrl}
 & 7 & 2 & + \\
 & 5 & 8 & = \\
\hline
1 & 3 & 0 & + \\
 & & 1 & = \\
\hline
1 & 3 & 1 &
\end{array}
$$

somma del riporto

il riporto viene scartato

differenza positiva

Sottrazione in complemento a 9

- Esempio: 276 - 357 = -81

Sommiamo il minuendo col complemento a 9 del sottraendo:

$$\begin{array}{ccc l} 2 & 7 & 6 & + \\ 6 & 4 & 2 & = \\ \hline 9 & 1 & 8 & \end{array}$$

differenza negativa

Complementando a 9 il risultato si ottiene il valore assoluto della differenza cioè 81

Rappresentazione in complemento dei numeri binari

- *Complemento a* 1:

  il cambiamento di segno viene ottenuto complementando ciascun bit (cioè i bit a 1 diventano 0 e viceversa)

- *Complemento a* 2:

  si effettua il complemento a 1 e poi si aggiunge 1

Rappresentazione in complemento dei numeri binari

- Il complemento a 1 e il complemento a 2 corrispondono rispettivamente al complemento a 9 e al complemento a 10 del sistema decimale.

Nota: dato un numero binario N a n cifre, il suo complemento a 2 è pari a $2^n - N$

Rappresentazione in complemento dei numeri binari

- Esempio: consideriamo la rappresentazione binaria, su una parola di 4 bit, del numero 6_{10}

$6_{10} = 0110_2$

complemento a 1: 1001

complemento a 2:

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 0\ 1\ + \\
1\ = \\
\hline
1\ 0\ 1\ 0\
\end{array}
$$

Rappresentazione in complemento dei numeri binari

- Metodo alternativo per il calcolo del complemento a 2:
  - si copiano i bit del numero da complementare, partendo da quello meno significativo, finché si incontra 1
  - una volta copiato il primo bit a 1, si invertono tutti i bit successivi

Rappresentazione in complemento dei numeri binari

- Esempi:

$$0110 \xrightarrow{\textit{complemento a 2}} 1010$$

(si copiano i due bit meno significativi e si invertono gli altri due)

$$00010100 \xrightarrow{\textit{complemento a 2}} 11101100$$

(si copiano i tre bit meno significativi e si invertono gli altri cinque)

Rappresentazioni binarie di interi su 4 bit

Positivi o nulli		Negativi o nulli			
	Tutte le notazioni		Segno e modulo	Complem. a 1	Complem. a 2
+0	0000	−0	1000	1111	
+1	0001	−1	1001	1110	1111
+2	0010	−2	1010	1101	1110
+3	0011	−3	1011	1100	1101
+4	0100	−4	1100	1011	1100
+5	0101	−5	1101	1010	1011
+6	0110	−6	1110	1001	1010
+7	0111	−7	1111	1000	1001
		−8			1000

(Tabella tratta da *G. Bucci. Calcolatori elettronici. Architettura e organizzazione. Copyright © 2009 - The McGraw-Hill Companies)*

Rappresentazioni binarie di interi: osservazioni

- Con una parola di n bit:
  - i numeri positivi vanno da 0 a $2^{n-1}-1$, qualunque sia la notazione scelta
  - i numeri negativi vanno:
    - da -0 a $-(2^{n-1}-1)$ sia con la notazione in modulo e segno che con la notazione in complemento a 1
    - da -1 a -2^{n-1} con la notazione in complemento a 2

Rappresentazioni binarie di interi: osservazioni

- La notazione in complemento a 2
  è quella normalmente usata:
  - una sola rappresentazione per lo zero
  - calcoli meno macchinosi

  $\Rightarrow$ addizione e sottrazione sono trattate come un'unica operazione

Addizione e sottrazione in complemento a 2

- L'addizione di due numeri di n bit rappresentati in complemento a 2 non tiene conto del segno degli operandi ed è effettuata con le usuali regole della somma aritmetica, trascurando però l'eventuale riporto sul bit $n+1$.

- La sottrazione si riduce ad un'operazione di addizione ed è effettuata sommando al minuendo il complemento a 2 del sottraendo.

Sottrazione in complemento a 2

- Esempio: 00011110 - 00010110 = 00001000
  (30_{10} - 22_{10} = 8_{10})

Sommiamo il minuendo col complemento a 2 del sottraendo:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & + \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & = \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

il riporto
viene scartato

differenza positiva
(il primo bit della parola è 0)

Sottrazione in complemento a 2

- Esempio: $00010011 - 00010110 = 11111101$

  $(19_{10} - 22_{10} = -3_{10})$

  Sommiamo il minuendo col complemento a 2 del sottraendo:

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & + \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & = \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

differenza negativa

(il primo bit della parola è 1)

Sottrazione in complemento a 2

- Se si sommano due numeri con lo stesso valore assoluto, uno positivo e uno negativo in complemento a 2, si ottiene lo zero (positivo e unico).

- Esempio:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 1 & + \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & = \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$7_{10} - 7_{10} = 0_{10}$$

Overflow

- Si verifica quando il risultato di un'operazione non è rappresentabile correttamente con n bit.

Regola pratica, in caso di notazione
in complemento a 2:

si ha overflow se c'è riporto al di fuori del bit di segno e non sul bit di segno,
oppure se c'è riporto sul bit di segno ma non al di fuori

Overflow

- Esempio: somma dei numeri $+7_{10}$ e $+6_{10}$,
  rappresentati su una parola di 4 bit

riporto sul bit di segno (e nessun riporto al di fuori)

$$
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{1} & & & & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & + \\
0 & 1 & 1 & 0 & = \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

corrisponde -3_{10} *(in complemento a 2)*

Il risultato corretto della somma, ovvero 13_{10} ,
non è rappresentabile con soli 4 bit.

Overflow

- Esempio: somma dei numeri -4_{10} e -5_{10},
  rappresentati (in complemento a 2)
  su una parola di 4 bit

riporto al di fuori del bit di segno (e nessun riporto sul bit di segno)

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 0 \quad + \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 \quad = \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

corrisponde 7_{10}

Il risultato corretto della somma, ovvero -9_{10} ,
non è rappresentabile con soli 4 bit.