TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Đinh Tiến Đạt - 52400006
Phan Hưng Long - 52400021

BÁO CÁO CUỐI KỲ

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH CHO CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2025

TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Đinh Tiến Đạt - 52400006

Phan Hưng Long - 52400021

BÁO CÁO CUỐI KỲ

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH CHO CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Người hướng dẫn

ThS. Võ Trần An

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2025

LỜI CẢM ƠN

Chúng em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến thầy Võ Trần An, người đã luôn hướng dẫn và hỗ trợ chúng em trong suốt quá trình thực hiện bài tiểu luận này. Nhờ những lời chỉ dẫn và phương pháp giảng dạy kết hợp giữa tư duy logic và phân tích thực tế của thầy, chúng em đã hiểu rõ hơn kiến thức và biết cách áp dụng vào thực hành. Dù còn nhiều khó khăn và thử thách nhưng nhờ sự động viên và định hướng từ thầy mà chúng em đã nỗ lực hoàn thành bài một cách tốt nhất có thể. Tuy vậy, bài làm vẫn có thể còn một vài thiếu sót, mong thầy có thể đóng góp ý kiến để chúng em cải thiện hơn trong những lần sau. Một lần nữa, chúng em xin chân thành cảm ơn và kính chúc thầy luôn mạnh khỏe và thành công!

TP. Hồ Chí Minh, ngày 15 tháng 05 năm 2025

Tác giả

(Ký tên và ghi rõ họ tên)

Đinh Tiến Đạt

Phan Hưng Long

CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH
TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi và được sự hướng dẫn khoa học của ThS.Võ Trần An. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong đề tài này là trung thực và chưa công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây. Những số liệu trong các bảng biểu phục vụ cho việc phân tích, nhận xét, đánh giá được chính tác giả thu thập từ các nguồn khác nhau có ghi rõ trong phần tài liệu tham khảo.

Ngoài ra, trong Dự án còn sử dụng một số nhận xét, đánh giá cũng như số liệu của các tác giả khác, cơ quan tổ chức khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện có bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung Dự án của mình. Trường Đại học Tôn Đức Thắng không liên quan đến những vi phạm tác quyền, bản quyền do tôi gây ra trong quá trình thực hiện (nếu có).

TP. Hồ Chí Minh, ngày 15 tháng 05 năm 2025

Tác giả

(Ký tên và ghi rõ họ tên)

Đinh Tiến Đạt **Phan Hưng Long**

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN

1.1 Yêu cầu 1: Nghiên cứu chi tiết phép phân tích giá trị kỳ dị (SVD) của một ma trận hình chữ nhật.

1.1.1 Định nghĩa và công thức của Giá trị Kỳ dị (Singular Values).

A. **Định nghĩa:** Cho ma trận **A** có kích thước $m \times n$ là các số thực không âm biểu diễn "độ lớn" của các thành phần chính trong ma trận. Chúng được kí hiệu là $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ với $p = \min(m, n)$ và có các tính chất quan trọng:

- Luôn **không âm:** $\sigma_i \geq 0$
- Được sắp xếp **giảm dần**: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$
- Số lượng giá trị kỳ dị khác không bằng **hạng (rank)** của A.

B. **Công thức:**

$$\boldsymbol{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}}$$

Trong đó: $\boldsymbol{\lambda_i}$ là **giá trị riêng không âm** của $A^T A$ (nếu $m \geq n$) hoặc AA^T (nếu $m < n$)

1.1.2 Định nghĩa và công thức của SVD (Singular Value Decomposition) .

A. **Định nghĩa:** là một phương pháp toán học rất quan trọng trong đại số tuyến tính, được sử dụng để phân tích ma trận. Nó có nhiều ứng dụng trong xử lý tín hiệu, học máy, nén dữ liệu, nhận dạng mẫu, và nhiều lĩnh vực khác.

B. **Công thức:**

$$\boldsymbol{A = U\Sigma V^T}$$

Trong đó:

- **U**: Ma trận trực giao $m \times m$ (vector kỳ dị trái).
- **Σ**: Ma trận chéo $m \times n$ chứa các giá trị kỳ dị $\sigma_1 \geq 0$ trên đường chéo.
- **V**: Ma trận trực giao $n \times n$ (vector kỳ dị phải) và $\boldsymbol{V^T}$ là chuyển vị của nó.

1.1.3 Các bước để tính SVD.

Bước 1: Tính toán ma trận $\boldsymbol{A^T A}$ (nếu $m \geq n$) hoặc $\boldsymbol{AA^T}$ (nếu $m < n$).

Bước 2: Tìm giá trị riêng và vector riêng:

- Giải phương trình đặc trưng: $\mathbf{det}(\boldsymbol{A^T A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$.
- Sắp xếp các giá trị riêng giảm dần: $\boldsymbol{\lambda_1} \geq \boldsymbol{\lambda_2} \geq \cdots \geq \boldsymbol{\lambda_n}$.
- Chuẩn hoá các vector riêng tương ứng để có hệ trực chuẩn.

Bước 3: Tính giá trị kỳ dị:

- $\boldsymbol{\sigma_i} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda_i}}$ với i = 1,2,...,p (p = min(m,n))

Bước 4: Xây dựng ma trận:

- Xây dựng ma trận **V**: Các cột là vector riêng chuẩn hóa của $A^T A$.
- Xây dựng ma trận **U**:
    - Với $\sigma_i \neq 0$: $\boldsymbol{u_i} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma_i}} \boldsymbol{A v_i}$.
    - Với $\sigma_i = 0$: $chọn\ \boldsymbol{u_i}$ để $\boldsymbol{U}\ trực\ giao$.
- Xây dựng ma trận **Σ** (size $m \times n$) với $\boldsymbol{\sigma_i}$ trên đường chéo.

Bước 5: Kiểm tra:

- Đảm bảo $\boldsymbol{A = U\Sigma V^T}$.
- Kiểm tra tính trực giao: $\boldsymbol{U^T U = I, V^T V = I}$.

1.1.4 Năm ứng dụng của SVD.

1. **Khôi phục hình ảnh**

   SVD được sử dụng để tái tạo lại hình ảnh bị hỏng hoặc thiếu dữ liệu. Bằng cách giữ lại các thành phần chính của ảnh thông qua các giá trị kỳ dị lớn, SVD giúp phục hồi ảnh gần giống ảnh ban đầu.

2. **Giảm chiều dữ liệu**

   Trong các bài toán có dữ liệu nhiều chiều, SVD giúp chuyển dữ liệu sang không gian có ít chiều hơn mà vẫn giữ lại phần lớn thông tin quan trọng. Nhờ đó, việc huấn luyện mô hình trở nên nhanh hơn và trực quan hóa dữ liệu cũng dễ dàng hơn.

3. **Hệ thống gợi ý**

SVD được dùng để phân rã ma trận người dùng – sản phẩm thành các thành phần tiềm ẩn, từ đó dự đoán các mục người dùng có thể quan tâm. Điều này giúp cải thiện chất lượng đề xuất trong các hệ thống như Netflix, Spotify,…

4. **Giảm nhiễu**

   Bằng cách loại bỏ các giá trị kỳ dị nhỏ trong phân rã SVD, ta có thể loại bỏ nhiễu và chỉ giữ lại những thành phần chính của dữ liệu. Điều này giúp cải thiện chất lượng ảnh hoặc tín hiệu mà không làm mất thông tin quan trọng.

5. **Nén ảnh**

   SVD cho phép biểu diễn ảnh bằng một số lượng thành phần nhỏ hơn nhiều so với ảnh gốc. Điều này giúp giảm kích thước lưu trữ và tăng tốc độ truyền tải, đồng thời vẫn duy trì chất lượng ảnh ở mức chấp nhận được.

1.1.5 Các ví dụ:

1.1.5.1 Ví dụ 1: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bước 1: Tính $A^T \times A$

$$A^T \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tìm giá trị riêng và vector riêng:

- $\det(A^T A - \lambda I) = 0$
- $A^T A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$
- $\det(A^T A - \lambda I) = (2-\lambda) \times det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} + 2 \times det\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)] - [(4-\lambda) - (2-\lambda)(\lambda^2\text{-}5\lambda + 4) - (4-\lambda)] = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5{,}3028 \\ \lambda_3 = 1{,}6972 \end{cases}$$

Bước 3: Tính giá trị kỳ dị:

- $\sigma = \sqrt{(\lambda)}$
- $\sigma_1 = \sqrt{0} = 0$
- $\sigma_2 = \sqrt{(5{,}3028)} \approx 2{,}303$
- $\sigma_3 = \sqrt{(1{,}6972)} \approx 1{,}303$
- Vì có hai giá trị riêng khác 0, hạng được xác nhận là 2.

Bước 4: Xây dựng ma trận:

- Với $\boldsymbol{\lambda_2}$ **= 5,3028** ta có:

$$A^T A - 5{,}3028I \approx \begin{pmatrix} 2 - 5{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & 1 - 5{,}3028 & 0 \\ 2 & 0 & 4 - 5{,}3028 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -3{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & -4{,}3028 & 0 \\ 2 & 0 & -1{,}3028 \end{pmatrix}$$

Giải $(\boldsymbol{A^T A - \lambda_2 I})\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{pmatrix} -3{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & -4{,}3028 & 0 \\ 2 & 0 & -1{,}3028 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình:

1. $-3{,}3028x + y + 2z = 0$
2. $x - 4{,}3028y = 0 \Rightarrow x = 4{,}3028y$
3. $2x - 1{,}3028z = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{1{,}3028}x \approx 1{,}5346x$

Thay $\mathbf{x} = \mathbf{4{,}3028y}$ vào **(3)**:

$$z = 1{,}5346 \times 4{,}3028y \approx 6{,}6032y$$

Thay vào **(1)**:

$$-3{,}3028 \times 4{,}3028y + y + 2 \times 6{,}6032y$$

$$= -14{,}2074y + y + 13{,}2064y \approx 0$$

Chọn $\boldsymbol{y = 1}$:

$$\rightarrow x = 4{,}3028, \qquad z \approx 6{,}6032$$

$$\Rightarrow \text{Vector riêng: } \begin{pmatrix} \mathbf{4,3028} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{6,6032} \end{pmatrix}$$

Chuẩn hoá:

$$\left\| \begin{pmatrix} 4{,}3028 \\ 1 \\ 6{,}6032 \end{pmatrix} \right\| \approx \sqrt{4{,}3028^2 + 1^2 + 6{,}6032^2}$$

$$\approx \sqrt{18{,}5136 + 1 + 43{,}6022} \approx \sqrt{63{,}1158} \approx 7{,}9443$$

$$v_1 \approx \begin{pmatrix} \frac{4{,}3028}{7{,}9443} \\ \frac{1}{7{,}9443} \\ \frac{6{,}6032}{7{,}9443} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5417 \\ 0{,}1258 \\ 0{,}8312 \end{pmatrix}$$

- Cho $\boldsymbol{\lambda_3} \approx \mathbf{1,6972}$:

$$A^T A - 1{,}6972 I \approx \begin{pmatrix} 0{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & -0{,}6972 & 0 \\ 2 & 0 & 2{,}3028 \end{pmatrix}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 0{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & -0{,}6972 & 0 \\ 2 & 0 & 2{,}3028 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình:

1. $0{,}3028x + y + 2z = 0$
2. $x - 0{,}6972y = 0 \Rightarrow x = 0{,}6972y$
3. $2x + 2{,}3028z = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{2{,}3028}x \approx -0{,}8682x$

Thay $\boldsymbol{x = 0,6972y}$ vào **(3)**:

$$z \approx -0{,}8682 \times 0{,}6972y \approx -0{,}6052y$$

Thay vào **(1)**:

$$0{,}3028 \times 0{,}6972y + y + 2 \times (-0{,}6052y) \approx 0{,}2110y + y - 1{,}2104y \approx 0$$

Chọn $\boldsymbol{y = 1}$:

$$\rightarrow x \approx 0{,}6972, \qquad z \approx -0{,}6052$$

$$\Rightarrow \text{Vector riêng} \begin{pmatrix} \mathbf{0,6972} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-0,6052} \end{pmatrix}$$

Chuẩn hoá:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0{,}6972 \\ 1 \\ -0{,}6052 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0,6972^2 + 1^2 + (-0{,}6052^2)}$$

$$\approx \sqrt{0{,}4859 \ + 1 + 0{,}3663} \approx \sqrt{1{,}8522} \approx 1{,}3609$$

$$v_2 \approx \begin{pmatrix} \dfrac{0{,}6972}{1{,}3609} \\ \dfrac{1}{1{,}3609} \\ \dfrac{-0{,}6052}{1{,}3609} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5123 \\ 0{,}7348 \\ -0{,}4447 \end{pmatrix}$$

- Cho $\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$ (không gian rỗng):

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình

1. $2x + y + 2z = 0$

2. $x + y = 0 \Rightarrow y = \ -x$

3.$2x + 4z = 0 \Rightarrow z = \ -\frac{x}{2}$

Thay vào **(1)**:

$$2x + (-x) + 2 \times \left(-\frac{x}{2}\right) = 2x - x - x = 0$$

Chọn $\boldsymbol{x = 2}$; $\boldsymbol{y = -2}$; $\boldsymbol{z = -1}$. Vector riêng $\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Chuẩn hoá:

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,6667 \\ -0,6667 \\ -0.3333 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **Σ**

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2,303 & 0 & 0 \\ 0 & 1,303 & 0 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận $\boldsymbol{V}$

$$V = \begin{pmatrix} 0,5417 & 0,5123 & 0,6667 \\ 0,1258 & 0,7348 & -0,6667 \\ 0,8312 & -0,4447 & -0,3333 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **U**

Tính: $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{2,303}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5417 \\ 0,1258 \\ 0,8312 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,957 \\ 0,2898 \end{pmatrix}$

Tính: $u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{1,303}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5123 \\ 0,7348 \\ -0,4447 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,2894 \\ 0,9571 \end{pmatrix}$

- Chuẩn hóa ma trận $\boldsymbol{u_1}$ và $\boldsymbol{u_2}$ ta có:

$$U \approx \begin{pmatrix} 0,957 & -0,2894 \\ 0,2898 & 0,9571 \end{pmatrix}$$

- Kết quả:

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0,957 & -0,2894 \\ 0,2898 & 0,9571 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2,303 & 0 & 0 \\ 0 & 1,303 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5417 & 0,5123 & 0,6667 \\ 0,1258 & 0,7348 & -0,6667 \\ 0,8312 & -0,4447 & -0,3333 \end{pmatrix}^T$$

1.1.5.2 Ví dụ 2: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Bước 1: Tính $A^T \times A$

$$A^T \times A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 105 & 75 \\ 105 & 245 & 175 \\ 75 & 175 & 125 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tìm giá trị riêng và vector riêng:

- $\det(A^T A - \lambda I) = 0$
- $A^T A - \lambda I = \begin{pmatrix} 45-\lambda & 105 & 75 \\ 105 & 245-\lambda & 175 \\ 75 & 175 & 125-\lambda \end{pmatrix}$
- $\det(\mathrm{A^T A} - \lambda\mathrm{I}) = (45-\lambda)[(245-\lambda)(125-\lambda) - 175 \times 175] - 105[105(125-\lambda) - 175 \times 75] + 75[105 \times 175 - 75(245-\lambda)] = \boldsymbol{\lambda^2(415-\lambda)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 415 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Bước 3: Tính giá trị kỳ dị:

- $\sigma = \sqrt{(\lambda)}$
- $\sigma_1 = \sqrt{415} \approx 20{,}371$
- $\sigma_2 = 0$
- $\sigma_3 = 0$

Bước 4: Xây dựng ma trận:

- Với $\boldsymbol{\lambda_1 = 415}$ ta có:

  $$A^T A - 415I \approx \begin{pmatrix} 45-415 & 105 & 75 \\ 105 & 245-415 & 175 \\ 75 & 175 & 125-415 \end{pmatrix}$$

  $$\approx \begin{pmatrix} -370 & 105 & 75 \\ 105 & -170 & 175 \\ 75 & 175 & -290 \end{pmatrix}$$

  Giải $\boldsymbol{(A^T A - \lambda_1 I) v_1 = 0}$

$$\begin{pmatrix} -370 & 105 & 75 \\ 105 & -170 & 175 \\ 75 & 175 & -290 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình:

1. $-370x + 105y + 75z = 0$

2. $105x - 170y + 175z = 0$

3. $75x + 175y - 290z = 0$

Lấy phương trình 1 chia cho 5: $-74x + 21y + 15z = 0$

Lấy phương trình 2 chia cho 5: $21x - 34y + 35z = 0$

Giải hệ phương trình trên đặt $z = t$:

Từ phương trình **1** ta được:

$$-74x + 21y + 15t = 0 \Rightarrow 74x = 21y + 15t \Longrightarrow x = \frac{21y + 15t}{74}$$

Từ phương trình **2**:

Thay $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{21y+15t}}{\boldsymbol{74}}$ vào phương trình **2** ta được:

$$21\,\frac{21y + 15t}{74} - 34y + 35z = 0 \Rightarrow -2075y + 2095z = 0$$

$$\Longrightarrow 2095z = 2075y \Longrightarrow y = \frac{2095z}{2075} = \frac{7t}{5}$$

Thay $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{7t}}{\boldsymbol{5}}$ vào phương trình $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{21y+15t}}{\boldsymbol{74}}$ ta được:

$$x = \frac{21y + 15t}{74} = \frac{21\,\frac{7t}{5} + 15t}{74} = \frac{3t}{5}$$

Vector riêng:

$$x = t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{t}{\sqrt{83}} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Chuẩn hoá:

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \approx \sqrt{3^2 + 7^2 + 5^2} \approx \sqrt{83} \approx 9{,}11$$

$$v_1 \approx \frac{1}{\sqrt{83}} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{83}} \\ \frac{7}{\sqrt{83}} \\ \frac{5}{\sqrt{83}} \end{pmatrix}$$

- Cho $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{0}$ (không gian rỗng):

$$\begin{pmatrix} 45-0 & 105 & 75 \\ 105 & 245-0 & 175 \\ 75 & 175 & 125-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 105 & 75 \\ 105 & 245 & 175 \\ 75 & 175 & 125 \end{pmatrix}$$

Phương trình

1. $45x + 105y + 75z = 0$

2. $105x + 245y + 175z = 0$

3.$75x + 175y + 125z = 0$

Đặt **y = 1, z = 0**:

$$3x + 7 = 0 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Đặt **x = 0, z = 1**:

$$0 + 7y + 5 = 0 \Rightarrow 7y = -5 \Rightarrow y = \frac{-5}{7}$$

$$\Rightarrow z = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Chuẩn hoá và trực chuẩn hóa $\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ bằng Gram-Schmidt:

Chuẩn hóa $\boldsymbol{v_2}$:

$$\|v_2\|^2 = \left(\frac{-7}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{58}{9}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{58}{9}}} \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{58}} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt cho $\boldsymbol{v_3}$:

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 v_2}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$v_3 v_2 = \frac{-5}{7}$$

$$\|v_2\|^2 = \frac{58}{9}$$

$$\frac{v_3 v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{\frac{-5}{7}}{\frac{58}{9}} \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}259 \\ -0{,}111 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}259 \\ -0{,}111 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}259 \\ -0{,}603 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Chuẩn hóa $\boldsymbol{u_3}$:

$$\|u_3\|^2 = (-0{,}259)^2 + (-0{,}603)^2 + 1^2 = 1{,}1967$$

$$\Longrightarrow v_3 = \frac{1}{1{,}1967} \begin{pmatrix} -0{,}259 \\ -0{,}603 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}216 \\ -0{,}504 \\ 0{,}835 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **Σ**

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20{,}371 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận ***V***

$$V = \begin{pmatrix} 0{,}329 & -0{,}919 & -0{,}216 \\ 0{,}768 & 0{,}394 & -0{,}504 \\ 0{,}549 & 0 & 0{,}835 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **U**

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{83}} \\ \frac{7}{\sqrt{83}} \\ \frac{5}{\sqrt{83}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{83} \\ 2\sqrt{83} \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{415}} \begin{pmatrix} \sqrt{83} \\ 2\sqrt{83} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}447 \\ 0{,}894 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}894 \\ 0{,}447 \end{pmatrix}$$

- Chuẩn hóa ma trận $\boldsymbol{u_1}$ và $\boldsymbol{u_2}$ ta có:

$$U \approx \begin{pmatrix} 0{,}447 & -0{,}894 \\ 0{,}894 & 0{,}447 \end{pmatrix}$$

- Kết quả

$$A = U\Sigma V^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}447 & -0{,}894 \\ 0{,}894 & 0{,}447 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20{,}371 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}329 & -0{,}919 & -0{,}216 \\ 0{,}768 & 0{,}394 & -0{,}504 \\ 0{,}549 & 0 & 0{,}835 \end{pmatrix}^T$$

1.1.6 Định nghĩa và công thức về phân tích giá trị kỳ dị rút gọn (Compact/Reduced SVD):

A. Định nghĩa: SVD rút gọn là một dạng phân rã của ma trận $A \in R^{m\times n}$ với $r \leq \min(m,\ n)$, trong đó chỉ các giá trị đơn khác không và các vector đơn tương ứng được giữ lại.

B. Công thức:

$$\boldsymbol{A = U_r\, \Sigma_r V_r^T}$$

Trong đó:

- $\mathbf{U_r}$(kích thước $m \times r$): Ma trận chứa r **vector kỳ dị trái** đầu tiên (tương ứng với r giá trị kỳ dị khác không).
- **Σr** (kích thước $r \times r$): Ma trận đường chéo chứa **r giá trị kỳ dị** σ1≥σ2≥⋯≥σr>0
- $\boldsymbol{V_r}$(kích thước $n \times r$)**:** Ma trận chứa **r vector kỳ dị phải** đầu tiên.

1.1.7 Tìm những SVD rút gọn từ 2 ví dụ cho trước.

1.1.7.1 Ví dụ 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bước 1: Tính $\boldsymbol{A^T \times A}$

$$A^T \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tìm giá trị riêng và vector riêng:

- $\det(A^T A - \lambda I) = 0$
- $A^T A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$
- $\det(\mathrm{A^T A - \lambda I}) = (2-\lambda) \times det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} -$ $det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} + 2 \times det\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)] -$ $[(4-\lambda) - (2-\lambda)(\lambda^2\text{-}5\,\lambda + 4) - (4-\lambda)] = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 9$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 (loại) \\ \lambda_2 = 5{,}3028 \\ \lambda_3 = 1{,}6972 \end{cases}$$

Bước 3: Tính giá trị kỳ dị:

- $\sigma = \sqrt{(\lambda)}$
- $\sigma_2 = \sqrt{(5{,}3028)} \approx 2{,}303$

- $\sigma_3 = \sqrt{(1{,}6972)} \approx 1{,}303$
- Vì có hai giá trị riêng khác 0, hạng được xác nhận là 2.

Bước 4: Xây dựng ma trận:

- Với $\boldsymbol{\lambda_2}$ **= 5,3028** ta có:

$$A^T A - 5{,}3028I$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2\ -\ 5{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & 1\ -\ 5{,}3028 & 0 \\ 2 & 0 & 4\ -\ 5{,}3028 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -3{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & -4{,}3028 & 0 \\ 2 & 0 & -1{,}3028 \end{pmatrix}$$

- Giải $(\boldsymbol{A^T A - \lambda_2 I})\boldsymbol{v_1} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} -3{,}3028 & 1 & 2 \\ 1 & -4{,}3028 & 0 \\ 2 & 0 & -1{,}3028 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình:

4. $-3{,}3028x + y + 2z = 0$
5. $x - 4{,}3028y = 0 \Rightarrow x = 4{,}3028y$
6. $2x - 1{,}3028z = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{1{,}3028}x \approx 1{,}5346x$

Thay **x = 4,3028y** vào **(3)**:

$$z = 1{,}5346 \times 4{,}3028y \approx 6{,}6032y$$

Thay vào **(1)**:

$$-3{,}3028 \times 4{,}3028y + y + 2 \times 6{,}6032y$$

$$= -14{,}2074y + y + 13{,}2064y \approx 0$$

Chọn $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$:

$$\rightarrow x = 4{,}3028, \qquad z \approx 6{,}6032$$

$$\Rightarrow \text{Vector riêng: } \begin{pmatrix} \mathbf{4,3028} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{6,6032} \end{pmatrix}$$

Chuẩn hoá:

$$\left\|\begin{pmatrix}4{,}3028\\1\\6{,}6032\end{pmatrix}\right\| \approx \sqrt{4{,}3028^2+1^2+6{,}6032^2}$$

$$\approx \sqrt{18{,}5136+1+43{,}6022} \approx \sqrt{63{,}1158}$$

$$\approx 7{,}9443$$

$$v_1 \approx \begin{pmatrix}\dfrac{4{,}3028}{7{,}9443}\\\dfrac{1}{7{,}9443}\\\dfrac{6{,}6032}{7{,}9443}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0{,}5417\\0{,}1258\\0{,}8312\end{pmatrix}$$

Cho $\boldsymbol{\lambda_3 \approx 1{,}6972}$:

$$A^TA - 1{,}6972I \approx \begin{pmatrix}0{,}3028 & 1 & 2\\1 & -0{,}6972 & 0\\2 & 0 & 2{,}3028\end{pmatrix}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix}0{,}3028 & 1 & 2\\1 & -0{,}6972 & 0\\2 & 0 & 2{,}3028\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Phương trình:

1. $0{,}3028x + y + 2z = 0$

2. $x - 0{,}6972y = 0 \Rightarrow x = 0{,}6972y$

3. $2x + 2{,}3028z = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{2{,}3028}x \approx -0{,}8682x$

Thay $\boldsymbol{x = 0{,}6972y}$ vào **(3):**

$$z \approx -0{,}8682 \times 0{,}6972y \approx -0{,}6052y$$

Thay vào **(1)**:

$$0{,}3028 \times 0{,}6972y + y + 2 \times (-0{,}6052y)$$

$$\approx 0{,}2110y + y - 1{,}2104y \approx 0$$

Chọn $\boldsymbol{y = 1}$:

$$\rightarrow x \approx 0{,}6972, \qquad z \approx -0{,}6052$$

$$\Rightarrow \text{Vector riêng } \begin{pmatrix}\boldsymbol{0{,}6972}\\\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{-0{,}6052}\end{pmatrix}$$

Chuẩn hoá:

$$\left\|\begin{pmatrix} 0{,}6972 \\ 1 \\ -0{,}6052 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0,6972^2 + 1^2 + (-0{,}6052^2)}$$

$$\approx \sqrt{0{,}4859\ + 1 + 0{,}3663} \approx \sqrt{1{,}8522} \approx 1{,}3609$$

$$v_2 \approx \begin{pmatrix} \dfrac{0{,}6972}{1{,}3609} \\ \dfrac{1}{1{,}3609} \\ \dfrac{-0{,}6052}{1{,}3609} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5123 \\ 0{,}7348 \\ -0{,}4447 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **Σ**

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2{,}303 & 0 \\ 0 & 1{,}303 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận ***V***

$$V = \begin{pmatrix} 0{,}5417 & 0{,}5123 \\ 0{,}1258 & 0{,}7348 \\ 0{,}8312 & -0{,}4447 \end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **U**

Tính: $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{2{,}303}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5417 \\ 0{,}1258 \\ 0{,}8312 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}957 \\ 0{,}2898 \end{pmatrix}$

Tính: $u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{1{,}303}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5123 \\ 0{,}7348 \\ -0{,}4447 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}2894 \\ 0{,}9571 \end{pmatrix}$

- Chuẩn hóa ma trận $\boldsymbol{u_1}$ và $\boldsymbol{u_2}$ ta có:

$$U \approx \begin{pmatrix} 0{,}957 & -0{,}2894 \\ 0{,}2898 & 0{,}9571 \end{pmatrix}$$

- Kết quả:

$$\boldsymbol{A = U_r\ \Sigma_r V_r^T}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0{,}957 & -0{,}2894 \\ 0{,}2898 & 0{,}9571 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}303 & 0 \\ 0 & 1{,}303 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5417 & 0{,}5123 \\ 0{,}1258 & 0{,}7348 \\ 0{,}8312 & -0{,}4447 \end{pmatrix}^T$$

1.1.7.2 Ví dụ 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Bước 1: Tính $A^T \times A$

$$A^T \times A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 105 & 75 \\ 105 & 245 & 175 \\ 75 & 175 & 125 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tìm giá trị riêng và vector riêng:

- $\det(A^T A - \lambda I) = 0$
- $A^T A - \lambda I = \begin{pmatrix} 45-\lambda & 105 & 75 \\ 105 & 245-\lambda & 175 \\ 75 & 175 & 125-\lambda \end{pmatrix}$
- $\det(\mathrm{A^T A} - \lambda \mathrm{I}) = (45-\lambda)[(245-\lambda)(125-\lambda) - 175 \times 175] - 105[105(125-\lambda) - 175 \times 75] + 75[105 \times 175 - 75(245-\lambda)]$
- $= \boldsymbol{\lambda^2(415-\lambda)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 415 \\ \lambda_2 = 0 (loại) \\ \lambda_3 = 0 (loại) \end{cases}$$

Bước 3: Tính giá trị kỳ dị:

- $\sigma = \sqrt{(\lambda)}$
- $\sigma_1 = \sqrt{415} \approx 20{,}371$

Bước 4: Xây dựng ma trận:

- Với $\boldsymbol{\lambda_1 = 415}$ ta có:

$$A^T A - 415I \approx \begin{pmatrix} 45-415 & 105 & 75 \\ 105 & 245-415 & 175 \\ 75 & 175 & 125-415 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} -370 & 105 & 75 \\ 105 & -170 & 175 \\ 75 & 175 & -290 \end{pmatrix}$$

Giải $(\boldsymbol{A^T A - \lambda_1 I})\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{pmatrix} -370 & 105 & 75 \\ 105 & -170 & 175 \\ 75 & 175 & -290 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình:

1. $-370x + 105y + 75z = 0$

2. $105x - 170y + 175z = 0$

3. $75x + 175y - 290z = 0$

Lấy phương trình **1** chia cho 5: $-74x + 21y + 15z = 0$

Lấy phương trình **2** chia cho 5: $21x\ -\ 34y + 35z = 0$

Giải hệ phương trình trên đặt $z\ =\ t$:

Từ phương trình **1** ta được:

$$-74x + 21y + 15t = 0\ \Rightarrow 74x = 21y + 15t \Longrightarrow x = \frac{21y + 15t}{74}$$

Từ phương trình **2** ta được:

Thay $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{21y+15t}}{\boldsymbol{74}}$ vào phương trình **2** ta được:

$$21\ \frac{21y\ +\ 15t}{74} -\ 34y + 35z = 0 \Rightarrow -2075y\ + 2095z\ = 0$$

$$\Longrightarrow 2095z\ = 2075y\ \Longrightarrow\ y\ =\ \frac{2095z}{2075} = \frac{7t}{5}$$

Thay $\boldsymbol{y}\ =\ \frac{\boldsymbol{7t}}{\boldsymbol{5}}$ vào phương trình $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{21y+15t}}{\boldsymbol{74}}$ ta được:

$$x = \frac{21y + 15t}{74}\ = \frac{21\,\frac{7t}{5} + 15t}{74}\ = \frac{3t}{5}$$

Vector riêng:

$$x\ =\ t\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{t}{\sqrt{83}}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Chuẩn hoá:

$$\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right\| \approx\ \sqrt{3^2 + 7^2 + 5^2}\ \ \approx \sqrt{83}\ \approx 9{,}11$$

$$v_1 \approx \frac{1}{\sqrt{83}}\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{83}}\\\frac{7}{\sqrt{83}}\\\frac{5}{\sqrt{83}}\end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **Σ**

$$\Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20{,}371\\0\end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận ***V***

$$V = \begin{pmatrix}0{,}329\\0{,}768\\0{,}549\end{pmatrix}$$

- Tạo ma trận **U**

$$Av_1 = \begin{pmatrix}3 & 7 & 5\\6 & 14 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{83}}\\\frac{7}{\sqrt{83}}\\\frac{5}{\sqrt{83}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{83}\\2\sqrt{83}\end{pmatrix}$$

$$U = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{415}}\begin{pmatrix}\sqrt{83}\\2\sqrt{83}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0{,}447\\0{,}894\end{pmatrix}$$

- Chuẩn hóa ma trận $\boldsymbol{u_1}$ $\boldsymbol{v}$à $\boldsymbol{u_2}$ ta có:

$$U \approx \begin{pmatrix}0{,}447\\0{,}894\end{pmatrix}$$

- Kết quả: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U_r}\ \boldsymbol{\Sigma_r} \boldsymbol{V_r^T}$ = $\begin{pmatrix} 0,447 \\ 0,894 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20,371 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,329 \\ 0,768 \\ 0,549 \end{pmatrix}^T$

1.1.8 Định nghĩa và công thức của SVD cắt bớt (Truncated SVD):

A. **Định nghĩa:** SVD cắt bớt là một biến thể của phân tích giá trị kỳ dị (SVD), trong đó chỉ giữ lại k giá trị kỳ dị lớn nhất (với $k < rank(A)$) để tạo ra một xấp xỉ hạng thấp của ma trận gốc.

B. **Công thức:**

$$\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{A_k} = \boldsymbol{U_k \Sigma_k V_k^T}$$

Trong đó:

- $\boldsymbol{U_k}$: Ma trận $m \times k$ chứa k vector kỳ dị trái đầu tiên.
- $\boldsymbol{\Sigma_k}$: Ma trận chéo $k \times k$ chứa k giá trị kỳ dị lớn nhất.
- $\boldsymbol{V_k}$: Ma trận $n \times k$ chứa k vector kỳ dị phải đầu tiên.

1.1.9 Tìm SVD cắt bớt từ ma trận rank 2 từ ví dụ cho trước, và chúng ta chỉ giữ lại giá trị kỳ dị khác 0 duy nhất.

Ma trận hạng 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Từ những SVD đã tính toán trước ta có:

- Giá trị **kỳ dị**:
  - $\sigma_1 = \sqrt{0} = 0$
  - $\sigma_2 = \sqrt{(5,3028)} \approx 2,303$
  - $\sigma_3 = \sqrt{(1,6972)} \approx 1,303$
- Ma Trận **U**: $\begin{pmatrix} 0,957 & -0,2894 \\ 0,2898 & 0,9571 \end{pmatrix}$
- Ma Trận **V**: $\begin{pmatrix} 0,5417 & 0,5123 & 0,6667 \\ 0,1258 & 0,7348 & -0,6667 \\ 0,8312 & -0,4447 & -0,3333 \end{pmatrix}$

- Ma Trận **Σ**: $\begin{pmatrix} 2{,}303 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}303 & 0 \end{pmatrix}$

Để tính truncated SVD với s = 1 (giữ một giá trị kỳ dị lớn nhất):

Ta có:

- Ma Trận $\widehat{\mathbf{U}}$*:* $\begin{pmatrix} -0{,}2894 \\ 0{,}9571 \end{pmatrix}$
- Ma Trận $\widehat{\mathbf{V}}$*:* $\begin{pmatrix} 0{,}5417 \\ 0{,}1258 \\ 0{,}8312 \end{pmatrix}$
- Ma Trận $\widehat{\mathbf{\Sigma}}$*:* $(2{,}303)$

Tính ma trận xấp xỉ $\boldsymbol{A_{1,truncated}}$:

Thực hiện theo cách bước:

- Tính $\widehat{\boldsymbol{U}}\,\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$

$$\widehat{U}\,\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} -0{,}2894 \\ 0{,}9571 \end{pmatrix}(2{,}303) = \begin{pmatrix} -0{,}2894 \times 2{,}303 \\ 0{,}9571 \times 2{,}303 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}67 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}$$

- *Tính* $\widehat{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{T}}$

$$\widehat{V}^T = (0{,}5414 \quad 0{,}1258 \quad 0{,}8312)$$

- *Tính* $\widehat{\boldsymbol{U}}\,\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\,\widehat{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{T}}$

Ma trận kết quả sẽ là $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$, với mỗi phần tử là tích vô hướng của vector cột $\widehat{\boldsymbol{U}}\,\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ và vector hang $\widehat{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{T}}$**:**

$$\widehat{U}\,\widehat{\Sigma}\,\widehat{V}^T = \begin{pmatrix} -0{,}67 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} \times (0{,}5414 \quad 0{,}1258 \quad 0{,}8312)$$

$$\approx \begin{pmatrix} -0.363 & -0.084 & -0.557 \\ 1.191 & 0.277 & 1.829 \end{pmatrix}$$

- Kiểm tra: So sánh với ma trận $\boldsymbol{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận $\boldsymbol{A_{truncated}}$ là xấp xỉ hạng 1, giữ lại thành phần chính của A (tương tứng với σ_1) . Sự khác biệt là do chỉ giữ một giá trị kỳ dị, bỏ qua (σ_2 và σ_3).

Ý nghĩa: $\boldsymbol{A_{truncated}}$ là xấp xỉ tốt nhất hạng 1 của A theo chuẩn Frobenius, thường dùng trong nén dữ liệu hoặc giảm nhiễu.

1.1.10 Các bước làm bài tập.

- **Cách 1: Không chuẩn hóa dữ liệu:**

Ma trận ban đầu (đề cho):

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & ? \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ ? & 1 & 5 & 5 \\ ? & 1 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bước 1: **Tính trung bình hàng và cột của khoảng trống còn thiếu:**

- Liam – Casablancu:

  Trung bình hàng 1 (Liam): $\frac{5+5+1}{3} = \frac{11}{3}$

  Trung bình cột 4 (Casablancu): $\frac{1+2+1+5+5+5+2}{7} = 3$

  Giá trị cần điền: $(\frac{11}{3} + 3)\ /\ 2\ = \frac{10}{3}$

- Emma – Transformers:

  Trung bình hàng 6 (Emma): $\frac{1+5+5}{3} = \frac{11}{3}$

  Trung bình cột 1 (Transformers): $\frac{5+4+4+5+1+5}{6} = 4$

  Giá trị cần điền: $(\frac{11}{3} + 4)\ /\ 2\ = \frac{23}{6}$

- Mia - Transformers

  Trung bình hàng 7 (Mia): $\frac{1+5+5}{3} = \frac{11}{3}$

  Trung bình cột 1 (Transformers): $\frac{5+4+4+5+1+5}{6} = 4$

  Giá trị cần điền: $\left(\frac{11}{3} + 4\right)/2 = \frac{23}{6}$

- Ma trận A sau khi được tính toán:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & \frac{10}{3} \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ \frac{23}{6} & 1 & 5 & 5 \\ \frac{23}{6} & 1 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Tính $A'^T \times A'$

$$\text{B} = A'^T \times A' = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 5 & 1 & \frac{23}{6} & \frac{23}{6} & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 & 1 \\ \frac{10}{3} & 1 & 2 & 1 & 5 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & \frac{10}{3} \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ \frac{23}{6} & 1 & 5 & 5 \\ \frac{23}{6} & 1 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{B}_{(11)} = 5^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 1^2 + \left(\frac{23}{6}\right)^2 + \left(\frac{23}{6}\right)^2 + 5^2 \approx 137{,}39$$

$$\text{B}_{(12)} = 5^2 + 4 \times 5 + 5 \times 4 + 4^2 + 2 \times 1 + \frac{23}{6} \times 1 + \frac{23}{6} \times 1 + 5 \times 4 \approx 110{,}67$$

$$\text{B}_{(13)} = 5 + 4 + 4 + 5 + 5 + \frac{23}{6} \times 5 + \frac{23}{6} \times 5 + 5 \approx 66{,}33$$

$$\text{B}_{(14)} = 5 \times \frac{10}{3} + 4 + 4 \times 2 + 5 + 5 + \frac{23}{6} \times 5 + \frac{23}{6} \times 5 + 5 \times 2 \approx 87$$

$$\text{B}_{(21)} = B_{(12)} \approx 110{,}67 \ (\text{Đối xứng})$$

$$\text{B}_{(22)} = 5^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 2^2 + 1 + 1 + 4^2 \approx 104$$

$$\text{B}_{(23)} = 5 \times 1 + 5 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 5 + 4 \times 1 \approx 42$$

$$B_{(24)} = 5 \times \frac{10}{3} + 5 + 4 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 5 + 4 \times 2 \approx 61{,}67$$

$B_{(31)} = B_{(13)} \approx 66{,}33$ $(Đối\ xứng)$

$B_{(32)} = B_{(23)} \approx 42$ $(Đối\ xứng)$

$B_{(33)} = 1 + 1 + 1 + 1 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2 \approx 80$

$$B_{(34)} = \frac{10}{3} \times 1 + 1 + 2 + 1 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 2 \times 1 \approx 84{,}33$$

$B_{(41)} = B_{(14)} \approx 87$ $(Đối\ xứng)$

$B_{(42)} = B_{(24)} \approx 61{,}67$ $(Đối\ xứng)$

$B_{(43)} = B_{(34)} \approx 84{,}33$ $(Đối\ xứng)$

$$B_{(44)} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 2^2 \approx 96{,}11$$

➔Ta được ma trận $A'^T \times A'$

$$A'^T \times A' = \begin{pmatrix} 137{,}39 & 110{,}67 & 66{,}33 & 87 \\ 110{,}67 & 104 & 42 & 61{,}67 \\ 66{,}33 & 42 & 80 & 84{,}33 \\ 87 & 61{,}67 & 84{,}33 & 96{,}11 \end{pmatrix}$$

Bước 3: Giải phương trình:

- Tìm các giá trị lớn nhất của $A'^T \times A'$

  det$(A'^T \times A' - \lambda I) = 0$

  ➔$\lambda = 337{,}5$

- Giá trị kỳ dị tương ứng $\sigma_1 = \sqrt{(337{,}5)} \approx 18{,}37$

Bước 4: Tìm vector riêng:

- Giải hệ $(A'^T \times A' - \lambda I) \times v_1 = 0$

$$\begin{cases} 137{,}39v_1 + 110{,}67v_2 + 66{,}33v_3 + 87v_4 = 337{,}5v_1 \\ 110{,}67v_1 + 104v_2 + 42v_3 + 61{,}67v_4 = 337{,}5v_2 \\ 66{,}33v_1 + 42v_2 + 80v_3 + 84{,}33v_4 = 337{,}5v_3 \\ 87v_1 + 61{,}67v_2 + 84{,}33v_3 + 96{,}11v_4 = 337{,}5v_4 \end{cases}$$

- Rút gọn hệ phương trình ta được:

Chia phương trình (1),(2),(3),(4) lần lượt cho v_1, v_2, v_3, v_4 ta được:

$\frac{v_1}{v_2} \approx 1{,}25$, $\frac{v_2}{v_3} \approx 1{,}23$, $\frac{v_3}{v_4} \approx 0{,}82$

Chuẩn hóa vector: Chọn $\begin{cases} v_1 = 0{,}6106 \\ v_2 = 0{,}4879 \\ v_3 = 0{,}395 \\ v_4 = 0{,}4827 \end{cases}$ sao cho $\|v_1\| = 1$

$$\rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6106 \\ 0{,}4879 \\ 0{,}395 \\ 0{,}4827 \end{pmatrix}$$

$A \times v_1$

$$= \begin{pmatrix} 5 \times 0{,}6106 & 5 \times 0{,}4879 & 1 \times 0{,}395 & \frac{10}{3} \times 0{,}4827 \\ 4 \times 0{,}6106 & 5 \times 0{,}4879 & 1 \times 0{,}395 & 1 \times 0{,}4827 \\ 4 \times 0{,}6106 & 4 \times 0{,}4879 & 1 \times 0{,}395 & 2 \times 0{,}4827 \\ 5 \times 0{,}6106 & 4 \times 0{,}4879 & 1 \times 0{,}395 & 1 \times 0{,}4827 \\ 1 \times 0{,}6106 & 2 \times 0{,}4879 & 5 \times 0{,}395 & 5 \times 0{,}4827 \\ \frac{23}{6} \times 0{,}6106 & 1 \times 0{,}4879 & 5 \times 0{,}395 & 5 \times 0{,}4827 \\ \frac{23}{6} \times 0{,}6106 & 1 \times 0{,}4879 & 5 \times 0{,}395 & 5 \times 0{,}4827 \\ 5 \times 0{,}6106 & 4 \times 0{,}4879 & 1 \times 0{,}395 & 2 \times 0{,}4827 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 5{,}76 \\ 5{,}75 \\ 5{,}88 \\ 5{,}97 \\ 7{,}22 \\ 7{,}22 \\ 6{,}37 \end{pmatrix}$$

Chuẩn hóa bằng σ_1(với $\sigma_1 = 18{,}376$):

$$\rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4081 \\ 0{,}3135 \\ 0{,}3132 \\ 0{,}3202 \\ 0{,}3252 \\ 0{,}3929 \\ 0{,}3929 \\ 0{,}3465 \end{pmatrix}$$

Bước 5: Xây dựng ma trận xấp xỉ:

Tính tích ngoài $\sigma_1 \times u_1 \times v_1^T$

Mỗi phần tử: $A_{(approx)}[i,j] = \sigma_1 \times u_1[i] \times v_1[j]$

Phần tử (1,1): $18{,}376 \times 0{,}4081 \times 0{,}6106 \approx 4{,}58$

Phần tử (1,2): $18{,}376 \times 0{,}4081 \times 0{,}4879 \approx 3{,}65$

Phần tử (1,3): $18{,}376 \times 0{,}4081 \times 0{,}395 \approx 2{,}96$

Phần tử (1,4): $18{,}376 \times 0{,}4081 \times 0{,}4827 \approx 3{,}62$

Phần tử (2,1): $18{,}376 \times 0{,}3135 \times 0{,}6106 \approx 3{,}52$

Phần tử (2,2): $18{,}376 \times 0{,}3135 \times 0{,}4879 \approx 2{,}81$

Phần tử (2,3): $18{,}376 \times 0{,}3135 \times 0{,}395 \approx 2{,}28$

Phần tử (2,4): $18{,}376 \times 0{,}3135 \times 0{,}4827 \approx 2{,}78$

Phần tử (3,1): $18{,}376 \times 0{,}3132 \times 0{,}6106 \approx 3{,}51$

Phần tử (3,2): $18{,}376 \times 0{,}3132 \times 0{,}4879 \approx 2{,}81$

Phần tử (3,3): $18{,}376 \times 0{,}3132 \times 0{,}395 \approx 2{,}27$

Phần tử (3,4): $18{,}376 \times 0{,}3132 \times 0{,}4827 \approx 3{,}78$

Phần tử (4,1): $18{,}376 \times 0{,}3202 \times 0{,}6106 \approx 3{,}59$

Phần tử (4,2): $18{,}376 \times 0{,}3202 \times 0{,}4879 \approx 2{,}87$

Phần tử (4,3): $18{,}376 \times 0{,}3202 \times 0{,}395 \approx 2{,}32$

Phần tử (4,4): $18{,}376 \times 0{,}3202 \times 0{,}4827 \approx 2{,}84$

Phần tử (5,1): $18{,}376 \times 0{,}3252 \times 0{,}6106 \approx 3{,}65$

Phần tử (5,2): $18{,}376 \times 0{,}3252 \times 0{,}4879 \approx 2{,}91$

Phần tử (5,3): $18{,}376 \times 0{,}3252 \times 0{,}395 \approx 3{,}36$

Phần tử (5,4): $18{,}376 \times 0{,}3252 \times 0{,}4827 \approx 2{,}89$

Phần tử (6,1): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}6106 \approx 4{,}41$

Phần tử (6,2): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}4879 \approx 3{,}52$

Phần tử (6,3): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}395 \approx 2{,}85$

Phần tử (6,4): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}4827 \approx 3{,}48$

Phần tử (7,1): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}6106 \approx 4{,}41$

Phần tử (7,2): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}4879 \approx 3{,}52$

Phần tử (7,3): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}395 \approx 2{,}85$

Phần tử (7,4): $18{,}376 \times 0{,}3929 \times 0{,}4827 \approx 3{,}48$

Phần tử (8,1): $18{,}376 \times 0{,}3165 \times 0{,}6106 \approx 3{,}89$

Phần tử (8,2): $18{,}376 \times 0{,}3165 \times 0{,}4879 \approx 3{,}11$

Phần tử (8,3): $18{,}376 \times 0{,}3165 \times 0{,}395 \approx 2{,}51$

Phần tử (8,4): $18{,}376 \times 0{,}3165 \times 0{,}4827 \approx 3{,}07$

➔Kết quả:

$$A_{(approx)} = \begin{pmatrix} 4{,}58 & 3{,}66 & 2{,}96 & 3{,}62 \\ 3{,}52 & 2{,}81 & 2{,}28 & 2{,}78 \\ 3{,}51 & 2{,}81 & 2{,}27 & 2{,}78 \\ 3{,}59 & 2{,}87 & 2{,}32 & 2{,}84 \\ 3{,}65 & 2{,}92 & 2{,}36 & 2{,}88 \\ 4{,}41 & 3{,}52 & 2{,}85 & 3{,}48 \\ 4{,}41 & 3{,}52 & 2{,}85 & 3{,}48 \\ 3{,}89 & 3{,}11 & 2{,}51 & 3{,}07 \end{pmatrix}$$

- **Cách 2: Chuẩn hóa dữ liệu:**

Bước 1: Từ cách 1 ta có ma trận A sau khi được tính toán:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & \frac{10}{3} \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ \frac{23}{6} & 1 & 5 & 5 \\ \frac{23}{6} & 1 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bước 2: Chuẩn hóa dữ liệu theo hàng:

- Tính trung bình hàng:

Hàng 1: $\frac{5 + 5 + 1 + \frac{10}{3}}{4} = \frac{43}{12} \approx 3{,}58$

Hàng 2: $\frac{4 + 5 + 1 + 1}{4} = \frac{11}{4} \approx 2{,}75$

Hàng 3: $\frac{4 + 4 + 1 + 2}{4} = \frac{11}{4} \approx 2{,}75$

Hàng 4: $\frac{5 + 4 + 1 + 1}{4} = \frac{11}{4} \approx 2{,}75$

Hàng 5: $\frac{1 + 2 + 5 + 5}{4} = \frac{13}{4} \approx 3{,}25$

Hàng 6: $\frac{\frac{23}{6} + 1 + 5 + 5}{4} = \frac{89}{24} \approx 3{,}71$

Hàng 7: $\dfrac{\frac{23}{6} + 1 + 5 + 5}{4} = \dfrac{89}{24} \approx 3{,}71$

Hàng 8: $\dfrac{5 + 4 + 1 + 2}{4} = 3$

- Trừ trung bình hàng mới tìm được:

$$B = A - \begin{pmatrix} 3{,}58 \\ 2{,}75 \\ 2{,}75 \\ 2{,}75 \\ 3{,}25 \\ 3{,}71 \\ 3{,}71 \\ 3{,}00 \end{pmatrix} 1^T$$

Ta được ma trận B:

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}42 & 1{,}42 & -2{,}58 & -0{,}25 \\ 1{,}25 & 2{,}25 & -1{,}75 & -1{,}75 \\ 1{,}25 & 1{,}25 & -1{,}75 & -0{,}75 \\ 2{,}25 & 1{,}25 & -1{,}75 & -1{,}75 \\ -2{,}25 & -1{,}25 & 1{,}75 & 1{,}75 \\ 0{,}12 & -2{,}71 & 1{,}29 & 1{,}29 \\ 0{,}12 & -2{,}71 & 1{,}29 & 1{,}29 \\ 2{,}00 & 1{,}00 & -2{,}00 & -1{,}00 \end{pmatrix}$$

Bước 3: Sử dụng SVD:

- Tính $\boldsymbol{B^T}$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1{,}42 & 1{,}25 & 1{,}25 & 2{,}25 & -2{,}25 & 0{,}12 & 0{,}12 & 2{,}00 \\ 1{,}42 & 2{,}25 & 1{,}25 & 1{,}25 & -1{,}25 & -2{,}71 & -2{,}71 & 1{,}00 \\ -2{,}58 & -1{,}75 & -1{,}75 & -1{,}75 & 1{,}75 & 1{,}29 & 1{,}29 & -2{,}00 \\ -0{,}25 & -1{,}75 & -0{,}75 & -1{,}75 & 1{,}75 & 1{,}29 & 1{,}29 & -1{,}00 \end{pmatrix}$$

- Tính $\boldsymbol{B^T} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{4} \times \boldsymbol{4})$:

$$\begin{pmatrix} 19{,}295 & 13{,}366 & -19{,}604 & -13{,}045 \\ 13{,}366 & 27{,}4547 & -23{,}155 & -17{,}597 \\ -19{,}604 & -23{,}155 & 26{,}235 & 16{,}473 \\ -13{,}045 & -17{,}597 & 16{,}473 & 14{,}141 \end{pmatrix}$$

- Giá trị riêng lớn nhất $\boldsymbol{\lambda_1}$ =**74,929**

$\rightarrow \sigma_1 = \sqrt{(74{,}929)} \approx 8{,}65$

- Tìm vector riêng:

  Giải hệ: $(\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{B} - 74{,}929\mathrm{I}) \times v1$

  Rút gọn phương trình và chuẩn hóa ta có:

$$v1 = \begin{pmatrix} 0{,}434 \\ 0{,}556 \\ -0{,}578 \\ -0{,}411 \end{pmatrix}$$

Bước 4: Tính vector u_1

- Tính $B \times v_1$

$$B \times v_1 = \begin{pmatrix} 1{,}42 & 1{,}42 & -2{,}58 & -0{,}25 \\ 1{,}25 & 2{,}25 & -1{,}75 & -1{,}75 \\ 1{,}25 & 1{,}25 & -1{,}75 & -0{,}75 \\ 2{,}25 & 1{,}25 & -1{,}75 & -1{,}75 \\ -2{,}25 & -1{,}25 & 1{,}75 & 1{,}75 \\ 0{,}12 & -2{,}71 & 1{,}29 & 1{,}29 \\ 0{,}12 & -2{,}71 & 1{,}29 & 1{,}29 \\ 2{,}00 & 1{,}00 & -2{,}00 & -1{,}00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}434 \\ 0{,}556 \\ -0{,}578 \\ -0{,}411 \end{pmatrix}$$

$$B \times v_1 \approx \begin{pmatrix} 3{,}00 \\ 3{,}52 \\ 2{,}56 \\ 3{,}4 \\ -3{,}4 \\ -2{,}73 \\ -2{,}73 \\ 3{,}00 \end{pmatrix}$$

Chuẩn hóa bằng σ_1(với $\sigma_1 = 8{,}65$):

$$u_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}346 \\ 0{,}41 \\ 0{,}295 \\ 0{,}3929 \\ -0{,}3929 \\ -0{,}3154 \\ -0{,}3154 \\ 0{,}3455 \end{pmatrix}$$

Bước 5: Xây dựng ma trận xấp xỉ:

Tính tích ngoài $\sigma_1 \times u_1 \times v_1^T$ + trung bình hàng

Mỗi phần tử: $A_{(approx)}[i,j] = \sigma_1 \times u_1[i] \times v_1[j]$

Phần tử (1,1):$8{,}65 \times 0{,}346 \times 0{,}434 + 3{,}58 \approx 4{,}88$

Phần tử (1,2):$8{,}65 \times 0{,}346 \times 0{,}556 + 3{,}58 \approx 5{,}24$

Phần tử (1,3):$8{,}65 \times 0{,}346 \times (-0{,}578) + 3{,}58 \approx 1{,}85$

Phần tử (1,4):$8{,}65 \times 0{,}346 \times (-0{,}411) + 3{,}85 \approx 2{,}35$

Phần tử (2,1):$8{,}65 \times 0{,}41 \times 0{,}434 + 2{,}75 \approx 4{,}29$

Phần tử (2,2):$8{,}65 \times 0{,}41 \times 0{,}556 + 2{,}75 \approx 4{,}72$

Phần tử (2,3):$8{,}65 \times 0{,}41 \times (-0{,}578) + 2{,}75 \approx 0{,}7$

Phần tử (2,4):$8{,}65 \times 0{,}41 \times (-0{,}411) + 2{,}75 \approx 1{,}29$

Phần tử (3,1):$8{,}65 \times 0{,}295 \times 0{,}434 + 2{,}75 \approx 3{,}86$

Phần tử (3,2):$8{,}65 \times 0{,}295 \times 0{,}556 + 2{,}75 \approx 4{,}17$

Phần tử (3,3):$8{,}65 \times 0{,}295 \times (-0{,}578) + 2{,}75 \approx 1{,}28$

Phần tử (3,4):$8{,}65 \times 0{,}295 \times (-0{,}411) + 2{,}75 \approx 1{,}7$

Phần tử (4,1):$8{,}65 \times 0{,}3929 \times 0{,}434 + 2{,}75 \approx 4{,}22$

Phần tử (4,2):$8{,}65 \times 0{,}3929 \times 0{,}556 + 2{,}75 \approx 4{,}64$

Phần tử (4,3):$8{,}65 \times 0{,}3929 \times (-0{,}578) + 2{,}75 \approx 0{,}78$

Phần tử (4,4):$8{,}65 \times 0{,}3929 \times (-0{,}411) + 2{,}75 \approx 1{,}35$

Phần tử (5,1):$8{,}65 \times -0{,}3929 \times 0{,}434 + 3{,}25 \approx 1{,}78$

Phần tử (5,2):$8{,}65 \times -0{,}3929 \times 0{,}556 + 3{,}25 \approx 1{,}36$

Phần tử (5,3):$8{,}65 \times -0{,}3929 \times (-0{,}578) + 3{,}25 \approx 5{,}21$

Phần tử (5,4):$8{,}65 \times -0{,}3929 \times (-0{,}411) + 3{,}25 \approx 4{,}65$

Phần tử (6,1):$8{,}65 \times -0{,}3154 \times 0{,}434 + 3{,}71 \approx 2{,}53$

Phần tử (6,2):$8{,}65 \times -0{,}3154 \times 0{,}556 + 3{,}71 \approx 2{,}19$

Phần tử (6,3):$8{,}65 \times -0{,}3154 \times (-0{,}578) + 3{,}71 \approx 5{,}29$

Phần tử (6,4):$8,65 \times -0,3154 \times (-0,411) + 3,71 \approx 4,83$

Phần tử (7,1):$8,65 \times -0,3154 \times 0,434 + 3,71 \approx 2,53$

Phần tử (7,2):$8,65 \times -0,3154 \times 0,556 + 3,71 \approx 2,19$

Phần tử (7,3):$8,65 \times -0,3154 \times (-0,578) + 3,71 \approx 5,29$

Phần tử (7,4):$8,65 \times -0,3154 \times (-0,411) + 3,71 \approx 4,83$

Phần tử (8,1):$8,65 \times 0,3455 \times 0,434 + 3 \approx 4,30$

Phần tử (8,2):$8,65 \times 0,3455 \times 0,556 + 3 \approx 4.66$

Phần tử (8,3):$8,65 \times 0,3455 \times (-0,578) + 3 \approx 1,27$

Phần tử (8,4):$8,65 \times 0,3455 \times (-0,411) + 3 \approx 1,77$

➔Kết quả:

$$A_{(approx)} = \begin{pmatrix} 4,88 & 5,24 & 1,85 & 2,35 \\ 4,29 & 4,72 & 0,7 & 1,29 \\ 3,86 & 4,17 & 1,28 & 1,7 \\ 4,22 & 4,64 & 0,78 & 1,35 \\ 1,78 & 1,36 & 5,21 & 4,65 \\ 2,53 & 2,19 & 5,29 & 4,83 \\ 2,53 & 2,19 & 5,29 & 4,83 \\ 4,30 & 4,66 & 1,27 & 1,77 \end{pmatrix}$$

KẾT LUẬN

Trong bài báo cáo này, chúng em đã sử dụng phương pháp phân tích giá trị kỳ dị (SVD) và cụ thể là truncated SVD để giải quyết bài toán hệ thống gợi ý trên ma trận đánh giá người dùng-các bộ phim. Hai cách thực hiện bài toán:

Cách 1: Không chuẩn hóa dữ liệu (Non-centering data): Chúng em đã tính toán các giá trị thiếu bằng cách tìm trung bình hàng và cột, sau đó áp dụng truncated SVD với (s=1). Kết quả dự đoán:

- Liam - Casablanca: 3.62.
- Emma - Transformers: 4.41.

- Mia - Transformers: 4.41.

Cách 2: Chuẩn hóa dữ liệu (Centering data): Chuẩn hóa dữ liệu bằng cách trừ trung bình hàng, sau đó áp dụng truncated SVD và khôi phục trung bình để dự đoán.

Kết quả dự đoán:

- Liam - Casablanca: 2.35.
- Emma - Transformers: 2.53.
- Mia - Transformers: 2.53.

Phân tích kết quả:

- **Cách 1** cho kết quả cao hơn, đặc biệt với Emma và Mia (Transformers: 4.41), phản ánh xu hướng giữ nguyên các giá trị lớn trong ma trận gốc. Điều này phù hợp khi dữ liệu ban đầu có sự phân tán lớn và không cần chuẩn hóa.
- **Cách 2** cho kết quả thấp hơn (Transformers: 2.53), do đã chuẩn hóa dữ liệu, tập trung vào biến thiên quanh trung bình hàng. Điều này giúp giảm thiểu ảnh hưởng của các giá trị cực đại, dẫn đến dự đoán cân bằng hơn.
- **Cả 2 phương pháp** đều cho kết quả hợp lý khi so sánh với trung bình cột (Casablanca: 3, Transformers: 4), nhưng **cách 2** thường mang lại kết quả ổn định hơn trong các hệ thống gợi ý thực tế, vì nó giảm thiểu sự thiên lệch từ các giá trị lớn.

Ý nghĩa:

- Phương pháp SVD, đặc biệt là truncated SVD, là một công cụ mạnh mẽ trong việc xử lý ma trận thưa (sparse matrix) và dự đoán giá trị thiếu, có ứng dụng rộng rãi trong hệ thống gợi ý.
- Việc chuẩn hóa dữ liệu (cách 2) giúp cải thiện độ chính xác của dự đoán trong một số trường hợp, đặc biệt khi dữ liệu có sự khác biệt lớn giữa các hàng hoặc cột.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

Các Định Nghĩa SVD: Singular Value Decomposition - Machine Learning cơ bản

1 số ứng dụng SVD: [Handbook] Singular Values Decomposition và một số ứng dụng

Các tính chất: Phương pháp phân tích suy biến - Deep AI KhanhBlog

Tiếng anh

Phân tích giá trị kỳ dị: Singular value decomposition - Wikipedia

SVD định nghĩa và các bước giải: Singular Value Decomposition (SVD) - Geeksforgeeks