МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ОСНОВНЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

Выполнила:
студентка 4 курса
очной формы обучения
физико-математического факультета
Матвейкина Виталия Вячеславовна

Руководитель:
старший преподаватель
кафедры высшей математики
Гетманова Екатерина Николаевна

Воронеж 2023

Оглавление

Введение ... 3

О стереометрии ... 4

Методы решения стереометрических задач ... 5

1. Поэтапно-вычислительный метод. ... 5
2. Метод дополнительных построений. ... 8
3. Координатный метод. ... 10
4. Векторный метод. ... 12
5. Координатно-векторный метод. ... 14
6. Метод объемов. ... 19
7. Метод опорных задач. ... 22

Список литературы ... 24

Приложение 1 ... 25

Приложение 2 ... 27

Приложение 3 ... 28

Введение

Стереометрия является очень важным разделом математики. Ее теоретическая база необходима во многих сферах деятельности, например, в архитектуре, в строительстве, в медицине и т.д. Умение решать стереометрические задачи имеет большую практическую значимость и является важным элементом образования в школе и ВУЗе. Сами того не замечая, мы используем стереометрию ежедневно.

Со стереометрическими задачами мы впервые сталкиваемся в школе, но, как правило, большинство учителей знакомят обучающихся лишь с парой универсальных методов их решения, чаще всего с поэтапно-вычислительным и реже координатно-векторным. Из-за недостаточного знания различных методов, а также из-за отсутствия определенных навыков их использования могут возникнуть трудности при решении задач повышенного уровня сложности, а также при сдаче ЕГЭ по математике, ведь далеко не все стереометрические задачи легко решаются только с помощью универсальных методов. Правильно подобранный метод может не только значительно облегчить процесс решения задачи, но и сократить время, затраченное на нее. Даже великий венгерский математик Дьёрдь Пойа (1887-1985 г.г.) утверждал, что лучше научиться решать одну задачу несколькими способами, чем много задач одним способом.

Часто геометрические задачи вызывают значительные затруднения у обучающихся. Чтобы таких сложностей возникало меньше, необходимо изучать новые методы решения и самостоятельно тренироваться в их использовании. Разработанное учебно-методическое пособие по решению стереометрических задач, с помощью которого обучающиеся смогут углубить знания по данной теме и повысить навык их практического применения, крайне актуально как для учителей, так и для обучающихся.

О стереометрии

Стереометрия – раздел евклидовой геометрии, в котором изучаются свойства тел и фигур не на плоскости, а в пространстве.

Основными (неопределяемыми) понятиями в стереометрии являются точка, прямая и плоскость. Рассматриваются различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, различные пространственные фигуры, например, призма, пирамида, тела вращения, правильные многогранники и др.

Слово «стереометрия» древнегреческого происхождения, оно произошло от двух слов: στερεός [стереос] – «твёрдый; объёмный, пространственный» + μετρέω [метрео] – «измеряю». Если переводить дословно, то стереометрия означает измерение твердого или пространственного, иными словами «теломерие».

Свое зарождение стереометрия начала в Древней Греции, законы и свойства стереометрии применяли в строительстве, а также создавали труды по этому разделу геометрии. Основоположником стереометрии считается Евклид (3 век до н.э.), его главная работа «Начала» содержит изложение основ стереометрии.

Возникновение и развитие стереометрии, как и планиметрии, обусловлено потребностью практической деятельности человека. При строительстве даже самых примитивных сооружений необходимо было рассчитать сколько материала пойдёт на постройку, уметь вычислять расстояние между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур.

Египетские пирамиды, сооружённые за 2-4 тысячелетия до н.э., поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что строители уже знали многие стереометрические положения и расчёты.

Сейчас нашу жизнь невозможно представить без стереометрии.

(Информация взята с сайта: https://my-stereometry.site/)

Методы решения стереометрических задач

Дополнительный теоретический материал (определения, аксиомы, теоремы), который потребуется при решении задач, ~~смотрите~~ приводится в приложениях 1, 2, 3.

У стереометрических задач, как и у любых других, существует множество методов их решения.

Рассмотрим основные из них.

1. Поэтапно-вычислительный метод.

Поэтапно-вычислительный метод является традиционным, чаще всего при решении стереометрических задач используют именно его.

Данный метод заключается в том, что решение задачи происходит с помощью поэтапных вычислений отдельных промежуточных величин, которые затем, дополняя друг друга и постепенно связываясь между собой, помогают дать ответ на вопрос, поставленный изначально. Метод основан на аксиомах и теоремах стереометрии. Но вычисления производятся с помощью теории не только из стереометрии, но и из планиметрии, так как зачастую удобнее перенести некоторые элементы чертежа из трехмерного пространства в двумерное.

Поэтапно-вычислительный метод требует отличного знания теории, умения правильно строить чертежи, а также развитого пространственного воображения.

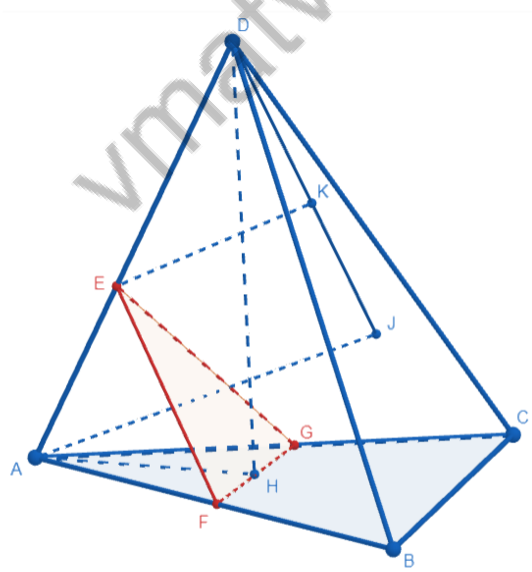
Пример №1. В правильной пирамиде *DABC* с вершиной *D* и треугольным основанием *ABC* сторона основания равна 27, а высота равна 9. На ребрах *AB*, *AC* и *AD* отмечены соответственно точки F, G и *E* такие, что $AF = AG = AD, AE = 12$.

а) Докажите, что плоскости *FGE* и *DBC* параллельны.

б) Найдите объем пирамиды *EDBC*.

Решение:

а) Пусть DH – высота пирамиды. Так как высота правильной пирамиды проецируется в точку пересечения высот (медиан, биссектрис) ее основания, то AH – высота, медиана, биссектриса ΔABC. Так как центром описанной около треугольника окружности является точка, в которой пересекаются все серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам треугольника, то



$$AH = R_{\text{опис.ок.}}$$

$$AH = \frac{AB}{2\sin\angle ACB} = \frac{27}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 9\sqrt{3}.$$

По теореме Пифагора из п/у ΔADH:

$$AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{243 + 81} = 18,$$

следовательно $DE = 6, AF = AG = AD = 18$.

Заметим соотношения:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{2}{1}, \qquad \frac{AE}{AD} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

$$\angle EAF = \angle DAB,$$

следовательно, $\Delta AEF \sim \Delta ADB \Rightarrow EF || DB$.

Из того, что $AF = AG = 18$ и $AB = AC = 27$ следует, что $GC = FB = 9$.

Из соотношений

$$\frac{AG}{AC} = \frac{2}{1}, \qquad \frac{AE}{AD} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{AE}{AD},$$

$$\angle EAG = \angle DAC,$$

следовательно, $\Delta AEG \sim \Delta ADC \Rightarrow EG || DC$.

Имеем:

$$\left.\begin{matrix} EF || DB \text{ и } EG || DC \\ EF \cap EG \text{ и } DB \cap DC \\ EF \text{ и } EG \subset FGE \\ DB \text{ и } DC \subset DBC \end{matrix}\right| \Rightarrow FGE || DBC$$ (признак параллельности плоскостей).

ч.т.д.

б) $V_{DABC} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60° = \frac{2187\sqrt{3}}{4}$

По теореме косинуса в ΔDBC:

$$\cos \angle BDC = \frac{DC^2 + DB^2 - BC^2}{2 \cdot DC \cdot DB} = -\frac{1}{8}.$$

По основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin \angle BDC = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}.$$

$$S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DC \cdot \sin \angle BDC = \frac{243\sqrt{7}}{4}$$

Пусть $AJ = \rho(A; DBC)$ (расстояние от точки до плоскости), т.е. $AJ \perp DBC$,

$$AJ = \frac{3V_{DABC}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{27\sqrt{21}}{7}.$$

На прямую DJ из точки E проведем прямую $EK \,||\, AJ$.

Имеем:

$$\left.\begin{matrix} EK \,||\, AJ \\ AJ \perp DBC \end{matrix}\right| \Rightarrow EK \perp DBC \Rightarrow EK = \rho(E; DBC),$$

т.е. EK – высота пирамиды $EDBC$.

Из подобия ΔDEK и ΔDAJ следует

$$\frac{DE}{AD} = \frac{EK}{AJ},$$

$$EK = \frac{DE \cdot AJ}{AD} = \frac{9\sqrt{21}}{7}.$$

Найдем объем пирамиды $EDBC$

$$V_{EDBC} = \frac{1}{3} \cdot EK \cdot S_{\Delta DBC} = \frac{729\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{729\sqrt{3}}{4}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Задача 1. В основании пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит прямоугольник со сторонами $AB = 12$ и $BC = 8$. Боковые ребра SA, SB и SD

равны $16\sqrt{2}$, $4\sqrt{41}$ и 24 соответственно. Точка O – точка пересечения диагоналей основания. Найдите угол между плоскостью ASD и прямой SO.

Задача 2. Два шара касаются друг друга внутренним образом. Радиус меньшего шара, расположенного внутри большего, в 2 раза меньше радиуса второго шара. Плоскость γ перпендикулярна прямой, проходящей через центры этих шаров. Расстояние от плоскости γ до центра меньшего шара равно 2, а площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 12. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью γ.

2. Метод дополнительных построений.

Данный метод заключается в том, что исходный чертеж к задаче дополняется новыми вспомогательными элементами, упрощающими ее решение. Метод дополнительных построений применяется в том случае, когда по чертежу, построенному по данным, взятым из условия задачи, сложно или невозможно найти искомые величины.

К дополнительным построениям можно отнести построение вспомогательных отрезков и плоскостей, достраивание одного тела до другого, построение вспомогательного тела внутри или снаружи исходного и т.д. Также упростить решение стереометрической задачи можно с помощью построения вспомогательных планиметрических чертежей.

Сложность данного метода состоит в том, что не всегда с первого раза удается понять какое необходимо сделать дополнительное построение, чтобы облегчить процесс решения задачи.

Пример №2. В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B, а на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что прямая BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а угол AB_1C_1 равен 90°.

а) Докажите, что прямая AC_1 пересекает ось цилиндра.

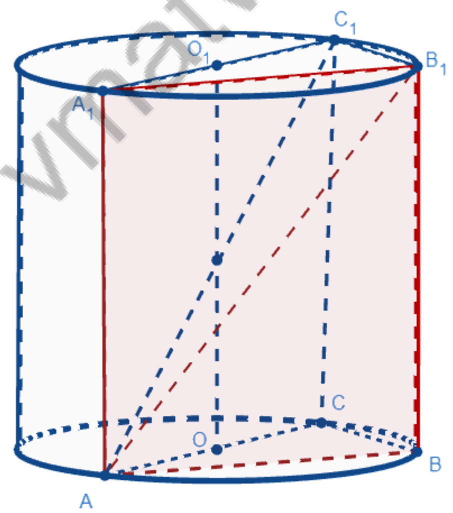
б) Найдите угол между прямыми AC_1 и BB_1, если $AB = 20$, $BB_1 = 31$, $B_1C_1 = 15$.

Решение:

а) Проведем образующие AA_1 и CC_1, откуда следует, что

$$\left.\begin{array}{c} AA_1 = CC_1 \\ AA_1 || CC_1 \end{array}\right| \Rightarrow AA_1CC_1 \text{ – параллелограмм}$$

$$\Rightarrow A_1C_1 = AC,\ A_1C_1 || AC.$$



Через пересекающиеся прямые BB_1 и AB_1 построим плоскость AA_1BB_1

$$\left.\begin{array}{c} \angle AB_1C = 90^\circ \Rightarrow C_1B_1 \perp AB_1 \\ BB_1 \perp \text{ плоскости основания} \Rightarrow BB_1 \perp C_1B_1 \\ AB_1 \cap BB_1 \\ AB_1 \text{ и } BB_1 \subset AA_1BB_1 \end{array}\right| \Rightarrow C_1B_1 \perp AA_1BB_1$$

(по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), следовательно, прямая C_1B_1 перпендикулярна любой прямой плоскости AA_1BB_1, а значит $C_1B_1 \perp A_1B_1$, т.е. $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

Имеем:

$\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ \Rightarrow A_1C_1$ – диаметр окружности основания $\Rightarrow AC$ – диаметр.

Пусть O_1 и O – центры верхнего и нижнего основания соответственно, тогда

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \text{т. } O_1 \in A_1C_1 \\ A_1C_1 \subset A\,A_1CC_1 \end{array}\right| \Rightarrow \text{т. } O_1 \in A\,A_1CC_1 \\ \left.\begin{array}{c} \text{т.} O \in AC \\ AC \subset A\,A_1CC_1 \end{array}\right| \Rightarrow \text{т.} O \in A\,A_1CC_1 \end{array}\right| \Rightarrow OO_1 \subset A\,A_1CC_1.$$

Имеем:

$$\left.\begin{array}{c} OO_1 \subset A\,A_1CC_1 \\ AC_1 \subset A\,A_1CC_1 \\ AC_1 \nparallel OO_1 \end{array}\right| \Rightarrow AC_1 \cap OO_1$$

ч.т.д.

б) CC_1 и BB_1 – образующие цилиндра, следовательно, $CC_1 = BB_1$ и $CC_1 || BB_1$, тогда BB_1CC_1 – параллелограмм $\Rightarrow B_1C_1 = BC = 15$.

По теореме Пифагора из п/у ΔACB:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{400 + 225} = 25.$$

По определению угла между скрещивающимися прямыми получаем, что $\angle(AC_1; BB_1) = \angle(AC_1; CC_1) = \angle AC_1C$.

Найдем $\angle AC_1C$.

По определению тангенса в п/у ΔAC_1C:

$$tg\angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1},$$

$$tg\angle AC_1C = \frac{25}{31},$$

$$\angle AC_1C = arctg\frac{25}{31}.$$

Ответ: $arctg\frac{25}{31}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Задача 3. В пирамиде *ABCD* с треугольным основанием *ABC* все углы при вершине *A* прямые. Боковые ребра пирамиды равны 7, 5, $\sqrt{7}$. Найдите диаметр шара, описанного около этой пирамиды, и его объем.

Задача 4. В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки *A*, *B* и *C* так, что *AC* – диаметр, $AB = 30$, $BC = 40$. Образующая CC_1 равна 42.

а) Докажите, что $\angle ACB$ меньше, чем угол между прямыми AC_1 и *BC*.

б) Найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ACC_1.

3. Координатный метод.

Координатный метод заключается в том, что при решении стереометрической задачи вводится система координат, в которую помещается тело и затем определяются координаты точек, с помощью которых далее можно будет составить уравнения прямых или плоскостей и найти требуемую в условиях задачи величину. Данный метод требует знания большого количества формул, но содержит в себе минимум построений и максимум вычислений.

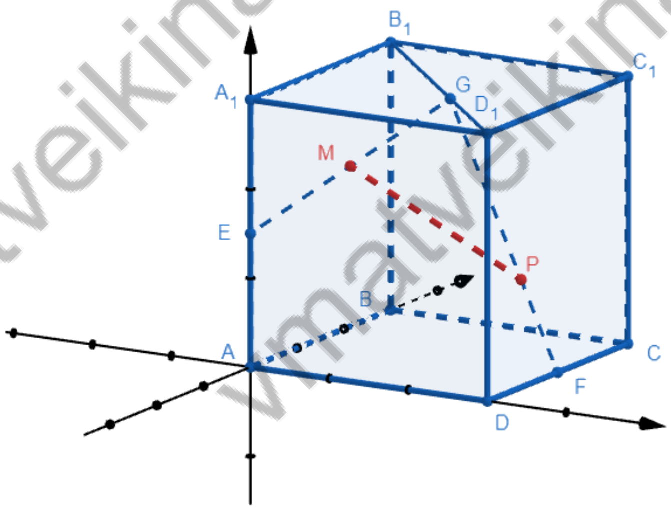
В большинстве стереометрических задач наиболее удобной для использования является декартова (прямоугольная) система координат.

При использовании данного метода важным является как можно более рационально расположить тело относительно системы координат, так как от этого будет зависеть уровень сложности дальнейшего решения. Например, куб чаще всего в декартовой системе координат удобнее располагать так, чтобы три его ребра находились на координатных осях.

Пример №3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра 3 точки E и F – середины ребер AA_1 и CD соответственно. Точка G расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1G = 2GD_1$. Точка M – середина отрезка EG, точка P расположена на отрезке GF так, что $GP = 2PF$. Найдите расстояние между точками M и P.

Решение:

Введем декартову систему координат. За начало координат примем вершину A, оси направим вдоль выходящих из этой точки ребер, т.е. ребра AD, AB и AA_1 расположим на осях Ox, Oy и Oz соответственно.



Тогда можем найди координаты точке: $E\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$, $F\left(3;\frac{3}{2};0\right)$, $E\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$, $B_1(0;3;3)$, $D_1(3;0;3)$. Для нахождения координат точки G используем формулы координат точки, делящей отрезок B_1D_1 в отношении 2:1

$$G\left(\frac{0+2\cdot 3}{1+2};\frac{3+2\cdot 0}{1+2};\frac{3+2\cdot 3}{1+2}\right) = (2;1;3).$$

Аналогично получим координаты точки P, делящей отрезок GF в отношении 2:1

$$P\left(\frac{2+2\cdot 3}{1+2};\frac{1+2\cdot\frac{3}{2}}{1+2};\frac{3+2\cdot 0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};1\right).$$

По формуле координат середины отрезка найдем координаты точки M, которая по условию является серединой отрезкой EG

$$M\left(\frac{0+2}{2};\frac{0+1}{2};\frac{\frac{3}{2}+3}{2}\right)=\left(1;\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right).$$

По формуле расстояния между точками, заданными своими координатами, найдем расстояние между точками P и M

$$PM=\sqrt{\left(1-\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{9}{4}-1\right)^2}=\frac{5\sqrt{29}}{12}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{12}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Задача 5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра равны 6, а сторона основания равна 4. Найдите высоту пирамиды SD.

Задача 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра 9 точка E – середина ребра AB. Точка F лежит на ребре AD так, что $AF=3DF$. Точка M расположена на диагонали A_1C_1 так, что $A_1M=2MC_1$. Точка G – середина отрезка EF. Найдите расстояние между точками M и G.

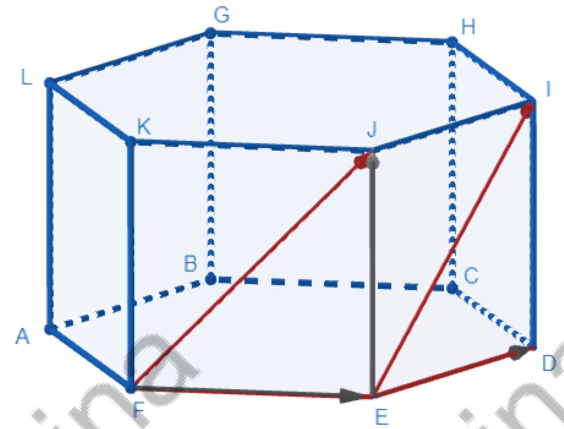
4. Векторный метод.

Векторный метод заключается в том, что условие стереометрической задачи переводится на язык векторов (записывается в векторной форме). Затем, чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо провести некоторое количество алгебраических операций над векторами и перевести полученный в векторной форме результат обратно на «язык» задачи.

Данный метод требует знания теории о векторах и умения проводить операции над ними. Например, задачи, в которых ставится вопрос взаимного расположения прямых и плоскостей, можно легко решить в векторной форме с помощью условия коллинеарности и компланарности векторов. А задачи, в которых требуется найти какое-либо расстояние, угол, площадь или объем можно решить векторным методом с помощью свойств скалярного произведения векторов и условий их перпендикулярности.

Пример №4. В правильной шестиугольной призме *ABCDEFGHIJKL*, боковыми гранями которой являются квадраты, сторона основания равна 6. Найдите угол между скрещивающимися прямыми *FJ* и *EI*.

Решение:



Перейдя на векторный язык, получаем, что необходимо найти угол между векторами $\overrightarrow{FJ}$ и $\overrightarrow{EI}$.

По правилу сложения векторов разложим векторы $\overrightarrow{FJ}$ и $\overrightarrow{EI}$ по векторам $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EJ}$ и $\overrightarrow{ED}$:

$$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EJ},$$

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{ED}.$$

Так как призма правильная и боковыми гранями ее являются квадраты, то длина векторов $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EJ}$ и $\overrightarrow{ED}$ одинакова и равна 6. Так как $\overrightarrow{FJ}$ и $\overrightarrow{EI}$ – диагонали квадратов *FEJK* и *EDIL* соответственно, то

$$\left|\overrightarrow{FJ}\right| = 6\sqrt{2},$$

$$\left|\overrightarrow{EI}\right| = 6\sqrt{2}.$$

Так как в основании призмы лежит правильный шестиугольник, то угол между векторами $\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{ED}$ равен 60°.

Вектор $\overrightarrow{EJ}$ перпендикулярен основанию, следовательно, он перпендикулярен любому вектору, лежащему в основании, т.е. $\overrightarrow{EJ} \perp \overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{EJ} \perp \overrightarrow{ED}$.

По правилу скалярного произведения векторов получаем

$$\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{EI} = \left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EJ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{ED}\right) =$$

$$= \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{ED} =$$

$$= 0 + 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 6 \cdot 1 + 0 = 54.$$

Вычислим значение искомого угла:

$$\cos\left(\overrightarrow{FJ};\overset{\wedge}{}\overrightarrow{EI}\right) = \frac{\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{EI}}{\left|\overrightarrow{FJ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{EI}\right|} = \frac{54}{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{FJ};\overset{\wedge}{}\overrightarrow{EI}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\left(\overrightarrow{FJ};\overset{\wedge}{}\overrightarrow{EI}\right) = \arccos\frac{3}{4}.$$

Получаем, что угол между прямыми *FJ* и *EI* равен $\arccos\frac{3}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{4}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Задача 7. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDEFGH* боковые ребра равны 8, сторона основания $BC = 4$, диагональ основания $AC = 4\sqrt{10}$. Найдите угол между прямыми *AF* и *BG*.

Задача 8. В кубе *ABCDEFGH* сторона основания равна $16\sqrt{3}$. На диагоналях AH и HF взяты точки M и P так, что $AM = \frac{2}{3}AH$, $PH = 2PF$. Найдите длину отрезка *MP*.

5. Координатно-векторный метод.

Данный метод включает в себя содержание и координатного, и векторного методов одновременно. То есть при использовании координатно-векторного метода необходимо поместить тело в систему координат, задать необходимые векторы и определить их координаты, затем, используя известные формулы, вычислить величину, требуемую для решения задачи.

Координатно-векторный метод является универсальным методом решения стереометрических задач.

Пример №5. В основании правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6, боковое ребро равно

$2\sqrt{3}$. Точки K и L лежат соответственно на ребрах BC и C_1D_1 так, что $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ проходит через точки K и L и параллельна диагонали основания BD.

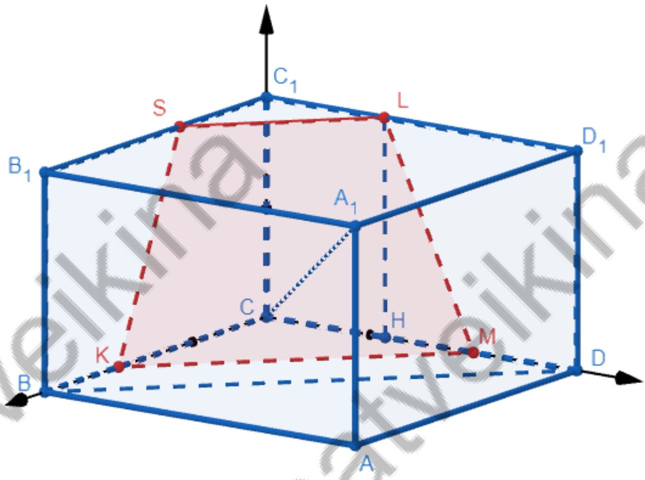
а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярная плоскости γ.

б) Найдите объем пирамиды, основанием которой является сечение параллелепипеда плоскостью γ, а вершиной – точка A_1.

Решение:

Перед тем как перейти к решению построим плоскость γ.

По свойству боковых ребер правильной четырехугольной призмы $BB_1||DD_1$ и $BB_1 = DD_1$, следовательно, BB_1DD_1 – параллелограмм, значит, $B_1D_1||BD$. Проведем $KM||BD$ и $SL||B_1D_1$. По признаку параллельности трех прямых $SL||KM$.



Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость KSLM.

$$\left.\begin{array}{r} KM||BD \\ KM\subset KSLM \end{array}\right| \Rightarrow BD||KSLM$$ (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Имеем:

$$\left.\begin{array}{r} BD||KSLM \\ \text{т.} K \in KSLM \\ \text{т.} L \in KSLM \end{array}\right| \Rightarrow KSLM \text{ – плоскость } \gamma.$$

а) Докажем, что прямая AC_1 перпендикулярная плоскости γ координатно-векторным методом.

Поместим призму в декартову систему координат так, чтобы вершина C являлась точкой начала координат, а оси направлялись вдоль выходящих из этой точки ребер, т.е. ребра BC, CD и CC_1 лежали на осях Ox, Oy и Oz соответственно.

Тогда можем найти координаты точек: $C(0;0;0)$, $A_1(6;6;2\sqrt{3})$ и $K(4;0;0)$.

Проведем $LH \perp CD$, по свойству ребер правильной четырехугольной призмы $CC_1 \perp CD$ и $C_1D_1 || CD$, следовательно, $LH = CC_1 = 2\sqrt{3}$.

$$\left.\begin{matrix} KM || BD \\ \dfrac{CK}{BC} = \dfrac{2}{3} \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{2}{3} \text{ (по теореме о пропорциональных отрезках),}$$

получаем, что $CM = 4$, т.о. можем найти координаты $M(0;4;0)$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{A_1C}(0-6;0-6;0-2\sqrt{3}) = \overrightarrow{A_1C}(-6;-6;-2\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{KM}(0-4;4-0;0-0) = \overrightarrow{KM}(-4;4;0),$$

$$\overrightarrow{LM}(0-0;4-2;0-2\sqrt{3}) = \overrightarrow{LM}(0;2;-2\sqrt{3}).$$

Найдем угол между векторами $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{KM}$:

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{KM}\right) = \frac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{KM}}{|\overrightarrow{A_1C}|\cdot|\overrightarrow{KM}|},$$

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{KM}\right) = \frac{-6\cdot(-4)+(-6)\cdot 4+(-2\sqrt{3})\cdot 0}{\sqrt{36+36+12}\cdot\sqrt{16+16+0}} = 0,$$

$$\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{KM}\right) = 90° \Rightarrow \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{KM}.$$

Найдем угол между векторами $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{LM}$:

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{LM}\right) = \frac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{LM}}{|\overrightarrow{A_1C}|\cdot|\overrightarrow{LM}|},$$

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{LM}\right) = \frac{-6\cdot 0+(-6)\cdot 2+(-2\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})}{\sqrt{36+36+12}\cdot\sqrt{0+4+12}} = 0,$$

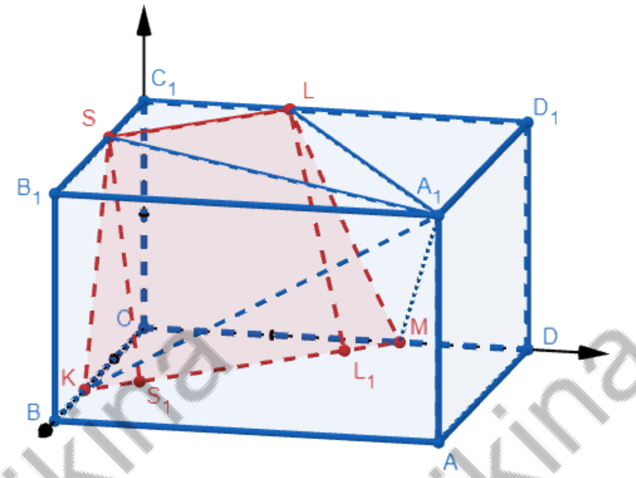
$$\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{LM}\right) = 90° \Rightarrow \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{LM}.$$

Получаем:

$$\left.\begin{array}{c} A_1C \perp KM \\ A_1C \perp LM \\ KM \cap LM = M \\ KM \text{ и } LM \subset \gamma \end{array}\right| \Rightarrow A_1C \perp \gamma$$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

ч.т.д.

б) $KSLM$ – трапеция. Найдем уравнение плоскости γ, общий вид которого $Ax + By + Cz + D = 0$.



Подставим координаты точек K, L и M в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} 4A + D = 0, \\ 2B + 2\sqrt{3}C + D = 0, \\ 4B + D = 0. \end{cases}$$

Пусть $D = -4$, тогда $A = 1$, $B = 1$ и $C = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Получаем:

$$(\gamma): x + y + \frac{\sqrt{3}}{3}z - 4 = 0,$$

$$(\gamma): 3x + 3y + \sqrt{3}z - 12 = 0.$$

Найдем расстояние от точки A_1 до плоскости γ:

$$h = \frac{|Ax_{A_1} + By_{A_1} + Cz_{A_1} + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$h = \frac{\left|1 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{3} - 4\right|}{\sqrt{1 + 1 + \frac{3}{9}}} = \frac{10\sqrt{21}}{7}.$$

Найдем длину векторов $\overrightarrow{SL}$ и $\overrightarrow{KM}$.

$$\left.\begin{array}{c} \overrightarrow{SL} \,||\, \overrightarrow{B_1D_1} \\ \dfrac{|\overrightarrow{C_1L}|}{|\overrightarrow{C_1D_1}|} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{C_1S}|}{|\overrightarrow{C_1B_1}|} = \frac{1}{3} \Rightarrow |\overrightarrow{C_1S}| = 2$$

Построим $SH_1 \perp BC$, по свойству ребер правильной четырехугольной призмы $CC_1 \perp BC$ и $B_1C_1 || BC$, следовательно, $SH_1 = CC_1 = 2\sqrt{3}$.

Получаем $S(2; 0; 2\sqrt{3})$, тогда $\overrightarrow{SL}(-2; 2; 0)$, $|\overrightarrow{SL}| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{16+16+0} = 4\sqrt{2}$.

Найдем длину векторов $\overrightarrow{SK}$ и $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{SK}(4-2; 0-0; 0-2\sqrt{3}) = \overrightarrow{SK}(2; 0; -2\sqrt{3}) \Rightarrow |\overrightarrow{SK}| = \sqrt{4+0+12} = 4,$$

$$|\overrightarrow{LM}| = \sqrt{0+4+12} = 4.$$

Получаем, что $|\overrightarrow{SK}| = |\overrightarrow{LM}|$, следовательно, $KSLM$ – равнобедренная трапеция.

Опустим SS_1 и LL_1 – высоты р/б трапеции $KSLM$. Тогда SS_1LL_1 – прямоугольник, т.к. $SS_1 = LL_1$, $SS_1 || LL_1$, $SS_1 \perp KM$ и $LL_1 \perp KM$. Следовательно, $SL = S_1L_1 = 2\sqrt{2}$,

$$L_1M = \frac{KM - S_1L_1}{2} = \sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора из п/у ΔLL_1M:

$$LL_1 = \sqrt{LM^2 - L_1M^2} = \sqrt{14}.$$

Найдем объем пирамиды A_1KSLM:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{KSLM} \cdot h,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{SL + KM}{2} \cdot LL_1 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{10\sqrt{21}}{7},$$

$$V = 20\sqrt{3}.$$

Ответ: $20\sqrt{3}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Задача 9. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со стороной 18, боковое ребро равно 9. Точки E и F лежат соответственно на ребрах AB и B_1C_1 так, что $AE = B_1F = 6$. Плоскость β проходит через точки E и F параллельно ребру AC. Докажите, что прямая BM перпендикулярная плоскости β, где точка M середина A_1C_1.

Задача 10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 10, точки K и L лежат на ребрах DD_1 и BC соответственно, причем $KD:KD_1 = 1:4$, а точка L – середина ребра BC. Найдите угол между прямыми KL и CB_1.

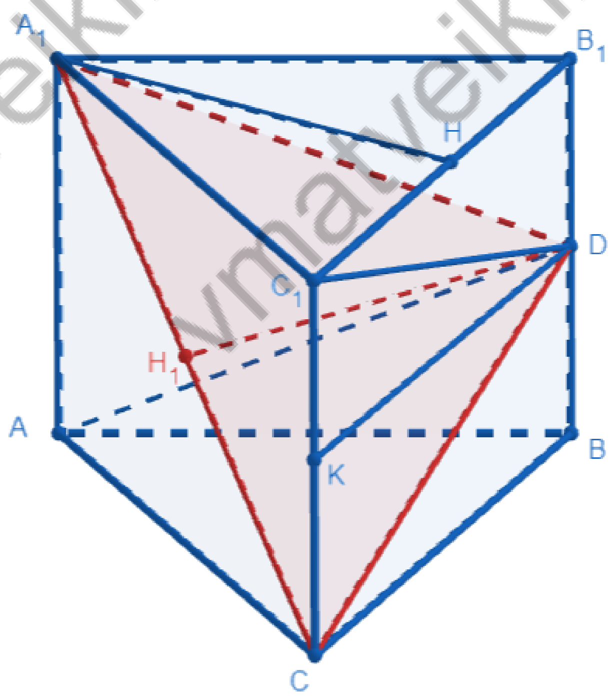
6. Метод объемов.

Данный метод заключается в том, что при решении задачи объем какого-либо тела записывается двумя способами, затем с помощью приравнивания полученных двух выражений находится искомая величина.

Метод объёмов можно использовать для вычисления расстояния от точки до плоскости, угла между прямой и плоскостью или между плоскостями, расстояние между прямыми.

Пример №6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 12, боковые ребра равны 16, точка D – середина ребра BB_1.Найдите расстояние от вершины A до плоскости CA_1D.

Решение:



1) Так как в основаниях правильной треугольной призмы лежат правильные треугольники, т.е. все их внутренние углы равны 60°, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60°,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}.$$

Так как основания призмы – равные треугольники, то $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1B_1C_1} = 36\sqrt{3}$.

По свойству боковых ребер правильной треугольной призмы $BB_1 \perp ABC$, следовательно, $BD \perp ABC$, тогда

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} \cdot BD \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 36\sqrt{3} = 96\sqrt{3}.$$

По свойству боковых ребер правильной треугольной призмы $BB_1 \perp A_1B_1C_1$, следовательно, $B_1D \perp A_1B_1C_1$, тогда

$$V_{DA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot B_1D \cdot S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 36\sqrt{3} = 96\sqrt{3}.$$

2) Проведем $A_1H \perp B_1C_1$.

По свойству боковых ребер $CC_1 \perp A_1B_1C_1$, следовательно, $CC_1 \perp A_1H$.

Имеем:

$$\left.\begin{array}{c} A_1H \perp B_1C_1 \\ CC_1 \perp A_1H \\ CC_1 \cap B_1C_1 \\ CC_1 \text{ и } B_1C_1 \subset BB_1C_1C \end{array}\right| \Rightarrow A_1H \perp BB_1C_1C$$

(признак перпендикулярности прямой и плоскости), следовательно, $A_1H \perp CC_1D$.

Проведем $DK \perp CC_1$.

По свойству боковых ребер $BB_1 || CC_1$.

$B_1C_1 \perp CC_1$ как смежные стороны прямоугольника.

$DK = B_1C_1 = 12$ как перпендикуляры между параллельными прямыми.

$$S_{\Delta CC_1D} = \frac{1}{2} \cdot DK \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$$

Так как $\Delta A_1B_1C_1$ правильный, то высота A_1H также является и медианой, т.е. $C_1H = \frac{1}{2} B_1C_1 = 6$.

По теоереме Пифагора из п/у ΔA_1C_1H:

$$A_1H = \sqrt{A_1C_1{}^2 - C_1H^2} = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}.$$

$$V_{A_1CC_1D} = \frac{1}{3} \cdot A_1H \cdot S_{\Delta CC_1D} = 192\sqrt{3}.$$

3) $V_{ABCA_1B_1C_1} = AA_1 \cdot S_{\Delta ABC} = 16 \cdot 36\sqrt{3} = 576\sqrt{3}.$

4) По теореме Пифагора

из п/у ΔAA_1C: $A_1C = \sqrt{AA_1{}^2 + AC^2} = 20,$

из п/у ΔA_1B_1D: $A_1D = \sqrt{A_1B_1{}^2 + B_1D^2} = 4\sqrt{13},$

из п/у ΔBCD: $CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=4\sqrt{13}$.

5) Так как $CD=A_1D$, то ΔA_1CD – равнобедренный.

Опустим высоту DH_1, которая также является медианой в р/б ΔA_1CD, следовательно, $CH_1=A_1H_1=\frac{1}{2}A_1C=10$.

По теореме Пифагора из п/у ΔCDH_1:

$$DH_1=\sqrt{CD^2-{CH_1}^2}=6\sqrt{3}.$$

$$S_{\Delta CA_1D}=\frac{1}{2}\cdot DH_1\cdot A_1C=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 20=60\sqrt{3}.$$

6) Выразим объем пирамиды AA_1CD двумя способами:

$$V_{AA_1CD}=V_{ABCA_1B_1C_1}-V_{DA_1B_1C_1}-V_{DABC}-V_{A_1CC_1D}=192\sqrt{3};$$

$$V_{AA_1CD}=\frac{1}{3}\cdot\rho(A;A_1CD)\cdot S_{\Delta A_1CD}.$$

Приравняем полученные выражения:

$$\frac{1}{3}\cdot\rho(A;CA_1D)\cdot S_{\Delta CA_1D}=192\sqrt{3}.$$

Из полученного уравнения выразим расстояние от вершины A до плоскости CA_1D

$$\rho(A;CA_1D)=\frac{192\sqrt{3}}{\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta CA_1D}},$$

$$\rho(A;CA_1D)=\frac{3\cdot 192\sqrt{3}}{60\sqrt{3}}=9{,}6.$$

Ответ: 9,6.

<u>Упражнения для самостоятельной работы</u>

<u>Задача 11.</u> В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, боковые ребра которой равны 22, сторона основания равна 6. Найдите расстояние от точки *B* до плоскости ACD_1.

<u>Задача 12.</u> В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* с вершиной *S* сторона основания равна 18, а высота равна $7\sqrt{2}$. На ребрах *AS*,

AB и *CD* отмечены соответственно точки *E*, *F*, и *G* такие, что $SE = \frac{4\sqrt{65}}{3}$, $BF = CG = 2DG$.

а) Докажите, что плоскости *EFG* и *SBC* параллельны.

б) Найти расстояние от точки *E* до плоскости *SBC*.

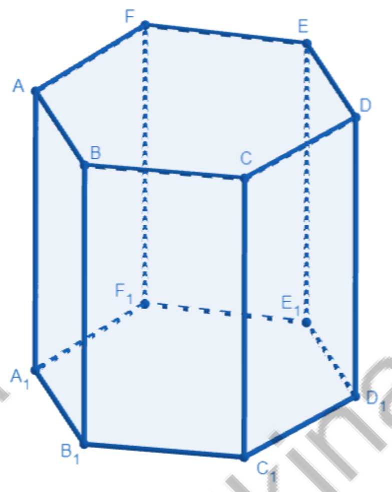
7. Метод опорных задач.

Данный метод заключается в применении уже известного решения других (более простых) задач.

Под опорными задачами понимают задачи, которые могут являться частью других, более сложных задач, также их можно использовать при решении множества других подобных задач. Большинство задач из школьных учебников можно считать опорными. Часто результат решения опорной задачи фиксирует какой-либо факт, который часто встречается при решении стереометрических задачах и используется как свойство, которое не требует доказательства. К опорным задачам относятся также задачи, в процессе решения которых выводится формула, не входящая в теоретический материал учебников.

Метод опорных задач позволяет свести вычисления искомой величины к использованию результата решения некоторого набора стандартных задач.

Пример №7 (опорная задача). Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани – прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани – равны прямоугольники.



Решение:

а) $BB_1 \perp A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (как ребро прямой призмы), следовательно, BB_1 перпендикулярна любой прямой плоскости $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, а значит $BB_1 \perp B_1C_1$, т.е. $\angle BB_1C_1 = 90°$.

BB_1C_1C – параллелограмм (по определению призмы), а так как в нем есть прямой угол $\angle BB_1C_1$, то BB_1C_1C – прямоугольник.

Аналогично доказывается, что другие боковые грани – прямоугольники.

ч.т.д.

б) Так как основаниями правильной призмы являются правильные многоугольники, то все ребра основания равны.

Все боковые ребра равны (как отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями).

Все боковые грани – прямоугольники (по доказанному в пункте а).

Из всего вышесказанного следует, что у правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

ч.т.д.

Упражнения для самостоятельной работы

Задача 13. Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Задача 14. Вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды, Докажите, что боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные двугранные углы.

Все методы, описанные выше, могут дополнять друг друга и совместно использоваться при решении какой-либо одной задачи.

Список литературы

1. Бикиева, А. Ф. Методы решения стереометрических задач / А. Ф. Бикиева // Обучение и воспитание: методика и практика. – 2016. – №25. – С. 32-38.
2. Готман, Э. Г. Стереометрические задачи и методы их решения. – М.: МЦНМО, 2006. – 160 с.: ил.
3. Стереометрия: сайт. – URL: https://my-stereometry.site/ (дата обращения: 23.08.2023).

Приложение 1

Аксиомы стереометрии

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки в этой плоскости.

Некоторые следствия из аксиом

1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.
3. Через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Параллельность в пространстве

1. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.
2. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна данной плоскости.
3. Если прямые, a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.
4. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.
5. Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.
7. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

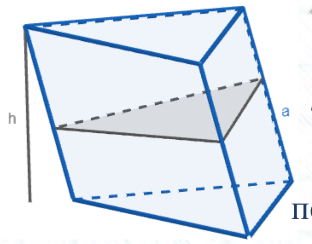
1. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.
2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.
3. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.
4. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.
5. Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
6. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Углы в пространстве

1. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.
2. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Приложение 2

Призма



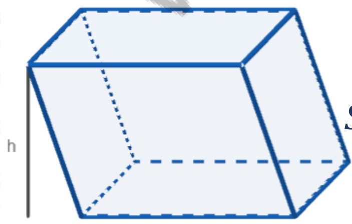
$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$

$S_{\text{б.п.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot \mathrm{a}$

$P_{\text{сеч.}}$ – периметр перпендикулярного сечения

$S_{\text{п.п.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$

Параллелепипед

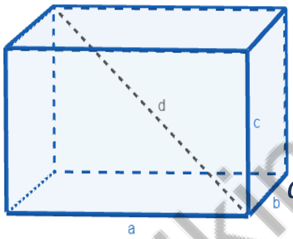


$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$

$S_{\text{б.п.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot \mathrm{a}$

$S_{\text{п.п.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$

Прямоугольный параллелепипед



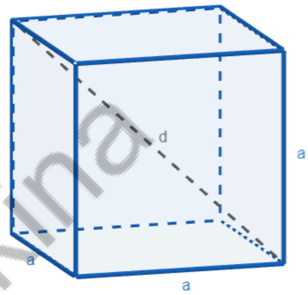
$V = \mathrm{a} \cdot b \cdot c$

$S_{\text{б.п.}} = 2c(\mathrm{a} + b)$

$d = \sqrt{\mathrm{a}^2 + b^2 + c^2}$

$S_{\text{п.п.}} = 2(\mathrm{a}b + \mathrm{a}c + bc)$

Куб



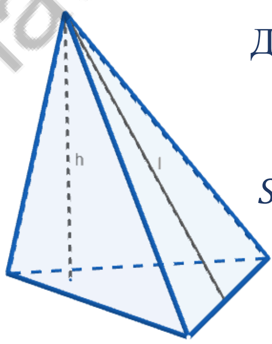
$V = \mathrm{a}^3$

$S_{\text{п.п.}} = 6\mathrm{a}^2$

$S_{\text{б.п.}} = 4\mathrm{a}^2$

$d = \mathrm{a}\sqrt{3}$

Пирамида



Для произвольной:

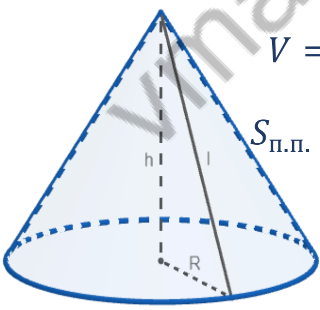
$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h$

$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$

l – апофема

Для правильной: $S_{\text{б.п.}} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l$

Конус



$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h$

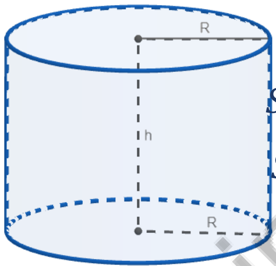
$S_{\text{п.п.}} = \pi R(R + l)$

$S_{\text{бок.}} = \pi R l$

$l = \sqrt{h^2 + R^2}$

$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$

Цилиндр



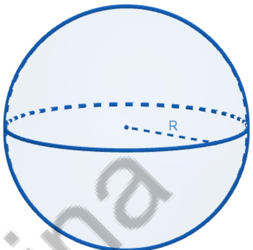
$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

$S_{\text{п.п.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$

$S_{\text{п.п.}} = 2\pi R(R + h)$

$S_{\text{бок.}} = 2\pi R h$

Шар



$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

$S_{\text{п.п.}} = 4\pi R^2$

Приложение 3

Некоторые формулы для координатного, векторного и координатно-векторного методов

1. Деление отрезка в заданном отношении

Если точка А делит отрезок A_1A_2 в отношении γ, то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \gamma x_2}{1 + \gamma};\ y = \frac{y_1 + \gamma y_2}{1 + \gamma};\ z = \frac{z_1 + \gamma z_2}{1 + \gamma}.$$

2. Координаты середины отрезка

Если точка А является серединой отрезка A_1A_2, то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3. Расстояние между точками

Если заданы точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$, то расстояние между ними можно вычислить по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4. Координаты вектора

Если заданы точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ можно найти по формулам:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

5. Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2} = (x; y; z)$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

6. Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right);$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

7. Формула для вычисления угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$