Bài tập điểm cộng ngày 17/4/2023
Môn: Phương pháp Toán cho AI

Họ và tên: Lê Nguyễn - MSSV: 21120511

Ngày 20 tháng 4 năm 2023

Mục lục

1 Câu 1 **2**

2 Câu 2 **6**

1 Câu 1

(a) **Chứng minh E$[X]$ và Var$[X]$ của phân phối nhị thức**

- Ta có: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
- Ta có:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}k \\
&= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}p^{k-1}(1-p)^{(n-k)} \\
&= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{((n-1)-(k-1))} \\
&= np(p-(1-p))^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

- Xét E$[X^2]$, ta có:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}k^2 \\
&= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}k \\
&= np\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}p^i(1-p)^{m-i}(i+1) \quad (\text{đặt } i=k-1 \text{ và } m=n-1). \\
&= np\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}p^i(1-p)^{m-i}i+\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}p^i(1-p)^{m-i}\right) \\
&= np(mp+1) \\
&= np(np-p+1) \\
&= (np)^2-np^2+np
\end{aligned}$$

- Ta có:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2 \\
&= \mathrm{E}[X^2]-(np)^2 \\
&= (np)^2-np^2+np-(np)^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

(b) **Chứng minh E$[X]$ và Var$[X]$ của phân phối hình học**

- Ta có: $P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$.
- Ta có:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k-1}kp \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}k \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty} (-(1-p)^{k})' \\
&= p\left(-\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k}\right)' \\
&= p\left(\frac{-1}{p}\right)' \\
&= p\left(\frac{1}{p^2}\right) \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

- Xét $\mathrm{E}[X^2]$, ta có:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k-1}k^2 p \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}k^2 \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}(k^2+k-k) \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}((k+1)k-k) \\
&= p\left[\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}(k+1)k - \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}k\right] \\
&= p\left[\sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)^{k+1}\right)'' - \frac{1}{p^2}\right] \\
&= p\left[\left((1-p)\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k}\right)'' - \frac{1}{p^2}\right] \\
&= p\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)'' - \frac{1}{p^2}\right] \\
&= p\left(\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2}\right) \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

- Ta có:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

(c) **Chứng minh E[X] và Var[X] của phân phối Poisson**

- Ta có:

$$
P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}
$$

- Ta có:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} \quad (\text{đặt } i = k-1) \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \quad (\text{khai triển taylor của } e^x) \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

- Xét $\mathrm{E}[X^2]$, ta có:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\frac{\lambda^{i}}{i!} \quad (\text{đặt } i = k-1) \\
&= \lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\lambda^{i}}{i!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!}\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

- Ta có:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X^2] &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

2 Câu 2

- Ta có:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

(a) Ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX+b,Y) &= \mathrm{E}[(aX+b)Y] - \mathrm{E}[aX+b]\mathrm{E}[Y] \\ &= \mathrm{E}[aXY+bY] - (a\mathrm{E}[X]+b)\mathrm{E}[Y] \\ &= a\mathrm{E}[XY] + b\mathrm{E}[Y] - a\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] - b\mathrm{E}[Y] \\ &= a(\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]) \\ &= a\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

(b) Ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y,Z) &= \mathrm{E}[(X+Y)Z] - \mathrm{E}[X+Y]\mathrm{E}[Z] \\ &= \mathrm{E}[XZ] + \mathrm{E}[YZ] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Z] - \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Z] \\ &= (\mathrm{E}[XZ] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Z]) + (\mathrm{E}[YZ] - \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Z]) \\ &= \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)\end{aligned}$$

(c) Ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X+Y] &= \mathrm{E}[(X+Y)^2] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\ &= \mathrm{E}[X^2+2XY+Y^2] - (\mathrm{E}[X]^2 + 2\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[Y]^2) \\ &= (\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2) + (\mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[Y]^2) + 2(\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]) \\ &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$