Bài thực hành lần 3

Môn: Phương pháp toán cho Trí tuệ nhân tạo

Họ và tên: Lê Nguyễn - MSSV: 21120511

Ngày 22 tháng 4 năm 2023

Mục lục

1.1 Bài 1

(a) Xét vector N là số bóng bán dẫn qua các năm và vector X là các năm.

- Đặt $g : \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^{13}$ và $f : \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^{13}$ sao cho:

$$g(x) \coloneqq g([x_1, x_2, ..., x_{13}]) = [\log_{10}(x_1), \log_{10}(x_2), ..., \log_{10}(x_{13})]$$
$$f(x) \coloneqq g([x_1, x_2, ..., x_{13}]) = [x_1 - 1970, x_2 - 1970, ..., x_{13} - 1970]$$

- Khi đó ta có ma trận A với các cột (gọi 1_v là vector có các phần tử đều là 1) là:

$$A = \begin{bmatrix} 1_v & f(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 12 \\ 1 & 15 \\ 1 & 19 \\ 1 & 23 \\ 1 & 27 \\ 1 & 29 \\ 1 & 30 \\ 1 & 32 \\ 1 & 33 \end{bmatrix}$$

- Và vector b sẽ là:

$$b = g(N) = \begin{bmatrix} 3.35218252 \\ 3.39794001 \\ 3.69897 \\ 4.462398 \\ 5.07918125 \\ 5.43933269 \\ 6.07188201 \\ 6.49136169 \\ 6.87506126 \\ 7.38021124 \\ 7.62324929 \\ 8.34242268 \\ 8.61278386 \end{bmatrix}$$

- Ta có:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 235 \\ 235 & 5927 \end{pmatrix}$$

- Ta có thể $A^T A$ là một ma trận vuông và $\det(A^T A) = 13 \cdot 5927 - 235 \cdot 235 = 21826 \neq 0$ nên $A^T A$ là ma trận khả nghịch. Vì vậy ta áp dụng công thức:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 3.12559263 \\ 0.15401818 \end{pmatrix}$$

- Vậy mô hình cần tìm là:

$$\log_{10}(N) \approx 3.12559263 + 0.15401818(t - 1970)$$

(b) Dựa vào mô hình ở câu a ta có:

$$N \approx 10^{3.12559263+0.15401818(t-1970)}$$

- Thay $t = 2015$ vào phương trình trên, ta có:

$$N \approx 10^{3.12559263+0.15401818(2015-1970)} \approx 11387001556.131742$$

- Tức là số bóng bán dẫn ở năm 2015 là khoảng 11 tỷ 387 triệu bóng. Con số này lớn hơn rất nhiều so với $4 \cdot 10^9$, tức là 4 tỷ bóng.

1.2 Bài 2

Ta thấy ma trận A và B đều là ma trận đối xứng nên có thể chéo hoá trực giao được.

(a) Xét ma trận $\lambda I - A$ với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Dùng gauss để tìm định thức của $\lambda I - A$, ta có:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\lambda-1\neq 0]{R_3+\frac{2}{\lambda-1}R_1} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + \dfrac{-4}{\lambda - 1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\lambda+1\neq 0]{R_3-\frac{2}{\lambda+1}R_2} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda^3 - 9\lambda}{\lambda^2 - 1} \end{pmatrix}$$

- Tiếp theo ta tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)\left(\frac{\lambda^3 - 9\lambda}{\lambda^2 - 1}\right) = \lambda^3 - 9\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

- Xét λ_1, ta tìm vector riêng $v^T = (x, y, z)$ tương ứng, ta có:

$$(\lambda_1 I - A)v = 0_v \text{ (ta kí hiệu vector 0 là } 0_v)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Tiếp theo giải hệ phương trình để tìm x, y, z:

$$\begin{cases} -x - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vậy cơ sở trực chuẩn ứng với λ_1 là:

$$\left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Tiếp theo xét $\lambda_2 = 3$, ta có:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\dfrac{\alpha}{2} \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vậy cơ sở trực chuẩn ứng với λ_2 là:

$$\left\{ \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Tiếp theo xét $\lambda_3 = -3$, ta có:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4x - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-\alpha}{2} \\ y = \alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vậy cơ sở trực chuẩn ứng với λ_3 là:

$$\left\{ \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Vậy ma trận P cần tìm là:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- Khi đó ma trận chéo D sẽ là:

$$D = P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Xét ma trận $\lambda I - B$ với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\lambda I - B = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

- Xét $\lambda_1 = 2$, ta có:

$$f(\lambda_1) = f(2) = \det(2I - A) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ (do có 2 dòng giống nhau)}$$

- Do đó $\lambda_1 = 2$ là một nghiệm của phương trình đặc trưng.
- Xét $\lambda \neq 2$, ta dùng gauss để tìm định thức của $\lambda I - A$:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{1}{\lambda - 2} R_1} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 0 & (\lambda^2 - 4\lambda + 3)/(\lambda - 2) & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{1}{(\lambda^2 - 4\lambda + 3)/(\lambda - 2)} R_2} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 0 & (\lambda^2 - 4\lambda + 3)/(\lambda - 2) & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)}{(\lambda^2 - 4\lambda + 3)} \end{pmatrix}$$

- Nghiệm của phương trình đặc trưng sẽ là:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 2)\left(\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 3}{\lambda - 2}\right)\left(\frac{(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)}{(\lambda^2 - 4\lambda + 3)}\right) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2 - \sqrt{2} \\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

- Xét λ_1, ta có:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vậy cơ sở trực chuẩn ứng với λ_1 là:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Xét λ_2, ta có:

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \sqrt{2}\alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vậy cơ sở trực chuẩn ứng với λ_2 là:

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Xét λ_2, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\sqrt{2}\alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vậy cơ sở trực chuẩn ứng với λ_3 là:

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Vậy ma trận P cần tìm là:

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- Khi đó ma trận chéo D là:

$$D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1.3 Bài 3

(b) Ta thấy số dòng nhiều hơn cột nên ta có thể áp dụng giải thuật SVD. Đặt $B' = B^T B$, ta có:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Xét ma trận $\lambda I - B'$ với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\lambda I - B' = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 5 \end{pmatrix}$$

- Nghiệm của phương trình đặc trưng sẽ là:

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - B') = (\lambda - 2)(\lambda - 5) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

- Xét $\lambda_1 = 6$, ta có:

$$(\lambda_1 I - B')v = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} v = 0_v \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha v_1 \quad (\text{với } \alpha \in \mathbb{R}).$$

- Xét $\lambda_2 = 1$, ta có:

$$(\lambda_2 I - B')v = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} v = 0_v \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha v_2 \quad (\text{với } \alpha \in \mathbb{R}).$$

- Ta thấy v_1, v_2 chưa tạo nên một cơ sở trực chuẩn, do đó ta chuẩn hoá v_1, v_2 lại thành v'_1, v'_2:

$$v'_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{và} \quad v'_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} v_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- Do đó ta có các cặp trị riêng với vector riêng tương ứng là:

$$(\lambda_1, v'_1) \quad \text{và} \quad (\lambda_2, v'_2)$$

- Tiếp theo ta tìm được $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{6}$ và $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$.
- Cuối cùng ta tìm các vector u_1, u_2:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} B v'_1 = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

$$\text{và } u_2 = \frac{1}{\sigma_2} B v'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- May mắn thay, các vector u_1, u_2 đã được chuẩn hoá nên do đó ta tìm thêm u_3 sao cho $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$. Khi đó:

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

- Vậy ma trận U, V và Σ cần tìm là:

$$U = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ và } \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ta có, ma trận $m \times n$ A với $m < n$. Do đó ta sẽ tìm U, V và Σ thông qua A^T với:

$$A^T = V\Sigma^T U^T$$

- Đặt $A^T = A'$, $V = U'$, $U = V'$ và $\Sigma^T = \Sigma'$, ta có:

$$A' = U'\Sigma'(V')^T$$

- Áp dụng giải thuật SVD vào A'. Ta đặt $A'' = (A')^T A'$, ta có:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Xét ma trận $\lambda I - A''$ với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\lambda I - A'' = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

- Vậy phương trình đặc trưng có 2 nghiệm là: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
- Xét λ_1 (hoặc λ_2) ta có:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v' = 0_v \Rightarrow v' = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha v_1' + \beta v_2' \quad (\text{với } \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

- Vậy tương ứng ta có các cặp trị riêng và vector riêng là:

$$(\lambda_1, v_1') \quad \text{và} \quad (\lambda_2, v_2')$$

- Khi đó $\sigma_1' = \sigma_2' = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$.

- Tiếp theo ta cần tìm u'_1, u'_2:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma'_1} A' v'_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad u_2 = \frac{1}{\sigma'_2} A' v'_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- May mắn thay, u'_1 và u'_2 tạo nên một cơ sở trực chuẩn. Tiếp theo ta thêm u_3 sao cho u_3 cùng u'_1 và u'_2 tạo nên cơ sở trực chuẩn cho $\mathbb{R}^3$.

$$u_3 = u'_1 \times u'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vậy ma trận U', V' và Σ' cần tìm là:

$$U' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \Sigma' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cuối cùng ta tìm được các ma trận U, V và Σ là:

$$U = V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ V = U' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{và } \Sigma = (\Sigma')^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Bài 4

- Gọi n là số lượng TV mà cửa hàng bán trong một tuần. Mà mỗi chiếc TV lợi nhuận được 300 USD chưa trừ chi phí quảng cáo. Vì vậy lợi nhuận của cửa hàng sẽ là:
$$300n - \text{tổng chi phí quảng cáo.}$$
- Đặt x, y lần lượt là chi phí quảng cáo (chi phí quảng cáo không âm) trên báo chí và trên radio. Khi đó:
$$n = \frac{7x}{2+x} + \frac{4y}{5+y}.$$
- Đặt $f : [0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ là lợi nhuận cửa hàng đạt được trong một tuần, áp dụng lại công thức phía trên, ta có:
$$\begin{aligned} f(x,y) &= 300\left(\frac{7x}{2+x} + \frac{4y}{5+y}\right) - (x+y) \\ &= \frac{2100x}{2+x} + \frac{1200y}{5+y} - x - y \end{aligned}$$

(a) Ta có:
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{4200}{(2+x)^2} - 1 \\ \dfrac{6000}{(5+y)^2} - 1 \end{pmatrix}$$

- Tiếp theo ta tìm ma trận Hasse của f:
$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-8400}{(2+x)^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{-12000}{(5+y)^3} \end{pmatrix}$$
- Ta thấy:
$$\begin{aligned} D_1 &= \det\left(\left(\frac{-8400}{(2+x)^3}\right)\right) = \frac{-8400}{(2+x)^3} < 0 \\ D_2 &= \det(\nabla^2 f(x,y)) = \frac{-8400}{(2+x)^3}\frac{-12000}{(5+y)^3} > 0 \end{aligned}$$
- Do D_1, D_2 đan dấu nên suy ra $f(x,y)$ là hàm lõm.

(b) Ta thấy f là hàm lõm nên giá trị lớn nhất của f tại điểm (x_0, y_0) sao cho $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

- Xét $g(x) = \dfrac{4200}{(2+x)^2} - 1$ với $x \geq 0$, ta có:
$$\begin{aligned} & (2+x)^2 = 4200 \\ \Rightarrow \quad & x^2 + 4x + 4 = 4200 \end{aligned}$$

- Vậy $g(x)$ có nghiệm là $x_1 = -2 + 10\sqrt{42}$ và $x_2 = -2 - 10\sqrt{42}$ mà $x \geq 0$ nên ta lấy nghiệm x_1. Do đó x_0 cần tìm là x_1.

- Xét $h(y) = \dfrac{6000}{(5+y)^2}$ với $y \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} (5+y)^2 &= 6000 \\ \Rightarrow \quad y^2 + 10y + 25 &= 6000 \end{aligned}$$

- Vậy $h(y)$ có nghiệm là $y_1 = -5 + 20\sqrt{15}$ và $y_2 = -5 - 20\sqrt{15}$ mà $y \geq 0$ nên ta lấy nghiệm y_1. Do đó y_0 ta cần tìm là y_1.

- Kết luận, hàm f đạt giá trị lớn nhất tại $(x_0, y_0) = (-2 + 10\sqrt{42}, -5 + 20\sqrt{15})$.

- Chi phí cần bỏ ra để quảng cáo trên báo chí sẽ xấp xỉ 63 USD và trên radio sẽ xấp xỉ 73 USD để đạt lợi nhuận lợi nhất.