ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÁO CÁO GIỮA KỲ CHỦ ĐỀ 2
Chuỗi Markov và ứng dụng

Nhóm 9

Môn: Phương pháp toán cho Trí tuệ nhân tạo

Thành viên:
21120511 - Lê Nguyễn
21120355 - Nguyễn Anh Tú
21120312 - Phan Nguyên Phương
21120143 - Vũ Minh Thư

Thành phố Hồ Chí Minh - 2023

Mục lục

Danh sách hình vẽ

Phân công công việc

STT	Người phụ trách	Mô tả nội dung công việc	Đánh giá
1	Lê Nguyễn	Làm chương 0, chương 1 và phần 2.1	Hoàn thành tốt
2	Nguyễn Anh Tú	Làm slide, phần 2.3	Hoàn thành tốt
3	Phan Nguyên Phương	Chứng minh phần trị riêng và hội tụ của ma trận và làm phần 2.2, 2.4	Hoàn thành tốt
4	Vũ Minh Thư	Làm phần ứng dụng ở chương 3	Hoàn thành tốt

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên, xin cảm ơn trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, ĐHQG - HCM đã tổ chức môn học phương pháp toán cho Trí tuệ Nhân Tạo này, cũng như tạo điều kiện về cơ sở vật chất và sắp xếp các giảng viên chất lượng cho chúng em.

Tiếp theo, xin chân thành cảm ơn thầy Lê Phúc Lữ và thầy Trần Hà Sơn - hai giảng viên đã trực tiếp giảng dạy bộ môn cho chúng em. Nhờ sự giảng dạy tận tình, cung cấp đầy đủ kiến thức cũng như giải đáp nhiệt tình, chi tiết tất cả các thắc mắc của chúng em. Sự hỗ trợ của hai thầy đã giúp chúng em hoàn thiện bài báo cáo hơn.

Cuối cùng, nhưng không thể thiếu đó là chúng em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến tất cả tác giả của những tài liệu mà chúng em tham khảo. Nhờ những bài giảng, bài nghiên cứu đó mà chúng em mới có đủ tư liệu, kiến thức để hoàn thành bài báo cáo này.

Xin trân trọng cảm ơn!

Chương 0

Kiến thức cơ bản

0.1 Tập hợp

- Khi biểu diễn một tập hợp A bất kì, ta sẽ viết như này:

$$A = \{x \mid \text{điều kiện E}\}$$

khi đó, ta hiểu là tập hợp A có các phần tử là x thoả điều kiện E.

- **Giao** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$ là:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ và } (x \in B)\}$$

- **Hợp** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$ là:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{ hoặc } (x \in B)\}$$

- **Bù** của một tập hợp A, kí hiệu A^c là:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

- Hai tập hợp A và B **xung khắc** với nhau nếu:

$$A \cap B = \emptyset$$

- Một bộ thứ tự gồm 2 phần tử a và b được kí hiệu là (a, b) và một bộ thứ tự (a, b) bằng bộ thứ tự (c, d) khi và chỉ khi $(a = c)$ và $(b = d)$. Ngoài ra $(a, b) \neq (b, a)$.

- **Tích** của hai tập hợp A và B là một tập hợp gồm các bộ thứ tự các phần tử của A và B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- Ta gọi một tập hợp S là **đếm được** nếu S là một tập hợp có hữu hạn phần tử hoặc ta có thể đánh số thứ tự, tức là $(0, 1, 2, ...)$ hoặc $(1, 2, ...)$ hoặc tuỳ, cho từng phần tử của S (ta còn gọi là vô hạn đếm được).

- Xét một bộ các tập hợp $A_1, A_2, ...$ Ta nói nó là một **phân hoạch** của một tập hợp S bất kỳ nếu nó thoả mãn hai điều kiện sau:

  (a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$, nghĩa là *xung khắc đôi một* với nhau.

  (b) $S = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.

0.2 Xác suất

Định nghĩa 1. Tập hợp các kết quả của một phép thử ngẫu nhiên được gọi là **không gian mẫu**, kí hiệu là Ω.

Ví dụ. Tung 1 xúc sắc thì không gian mẫu sẽ là $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nhưng nếu tung 2 xúc sắc thì không gian mẫu sẽ là $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Các phần tử của Ω được kí hiệu là ω.
- Gọi $\mathcal{P}(\Omega)$ là tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của Ω (còn được gọi là *tập luỹ thừa* của Ω).
- Ta có thể xem một biến cố như là một tập hợp con của Ω nhưng liệu mọi tập hợp con của Ω đều là biến cố hay không ?

Định nghĩa 2. Một tập hợp con của $\mathcal{P}(\Omega)$, kí hiệu là $\mathcal{F}$, được gọi là **sigma đại số** nếu nó thoả mãn 3 điều kiện sau đây:

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) Nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $A^c \in \mathcal{F}$.

(c) Nếu $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

- Các phần tử của $\mathcal{F}$ được gọi là **biến cố**. Ngoài ra ta cũng có thể gọi $\mathcal{F}$ là **không gian biến cố**.
- Nếu Ω là một tập hợp đếm được thì $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, còn ngược lại $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
- Ngoài ra ta có thể thấy, nếu $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ thì:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Định nghĩa 3. Một hàm số $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ được gọi là **độ đo xác suất** nếu nó thoả mãn các điều kiện dưới đây:

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(c) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathcal{F}$.

(b) Nếu $A_1, A_2, ...$ là các biến cố *xung khắc đôi một*, nghĩa là $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$, thì:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

- Ba điều kiện của định nghĩa trên còn được gọi là **tiên đề Kolmogorov**.
- Từ định nghĩa trên, ta cũng có các tính chất sau đây:

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \text{và} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- Bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được gọi là **không gian xác suất** gồm không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả kết quả của một phép thử mà ta xét, sigma đại số $\mathcal{F}$ gồm các biến cố mà ta quan tâm đến và cuối cùng là độ đo xác suất $\mathbb{P}$ để ta biết được khả năng mà biến cố ta xét có thể xảy ra.

Định nghĩa 4. Xét một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Cho $A, B \in \mathcal{F}$ và $\mathbb{P}(B) > 0$, khi đó **xác suất có điều kiện** của A biết B, kí hiệu là $\mathbb{P}(A \mid B)$, là:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Nếu ta xét $A_1, A_2, ...$ là một phân hoạch của Ω thì với mọi $B \in \mathcal{F}$, ta có:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B)\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

- Công thức phía trên còn được gọi là **công thức xác suất đầy đủ**.
- Ngoài ra nếu ta biến đổi 1 tí, ta sẽ có được:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Công thức phía trên là một trường hợp đặc biệt của **Định lý Bayes**.
- Kết hợp với công thức xác suất đầy đủ và một phân hoạch $A_1, A_2, ...$, ta có dạng tổng quát của định lý Bayes.

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

Định nghĩa 5. Hai biến cố được nói là **độc lập** nếu:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Định nghĩa 6. Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất. Một **biến ngẫu nhiên rời rạc** X là một hàm số đi từ Ω đến một tập hợp S đếm được, hay nói cách khác:

$$X : \Omega \to S$$

- Khi ta xét đến biến ngẫu nhiên, ta cũng phải xem xét *miền giá trị* của nó, theo như định nghĩa là S và $S = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Ta xem miền giá trị của X như là một không gian mẫu mới. Do đó ta ta sẽ đi kèm với một độ đo xác suất trên không gian mẫu này, kí hiệu là $\mathbb{P}_S$ và được định nghĩa như sau:

$$\mathbb{P}_S(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\})$$

- Ngoài ra nếu xét trên một tập hợp con A của S, ta vẫn có thể áp dụng lại định nghĩa trên:

$$\mathbb{P}_S(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

- Ngoài ra ta có thể viết $\mathbb{P}(X = x_i)$ thay cho $\mathbb{P}_S(X = x_i)$.
- Nếu có một chuỗi biến ngẫu nhiên $X_0, X_1, X_2, ...$ ta có thể viết thành $(X_n)_{n\geq 0}$.
- Xét một biến ngẫu nhiên X có miền giá trị $S = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Khi đó **phân phối xác suất** của X sẽ cho biết xác suất xảy ra của các giá trị mà X có thể có.
- Thông thường ta có thể biểu diễn phân phối xác suất của X, gọi là π, thành một vector dòng có dạng như sau (đặt $\pi_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ với $x_i \in S$):

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \end{bmatrix}$$

- Hoặc ta có thể biểu diễn phân phối xác suất của X thành một hàm số, nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì ta gọi hàm số đó là **hàm khối xác suất**.
- Ngoài ra nếu ta viết $\pi(x_i)$ thì ta có thể hiểu theo hai nghĩa, nếu π là một hàm khối xác suất thì $\pi(x_i)$ là giá trị của hàm đó tại x_i, còn nếu π là một vector thì $\pi(x_i) = \pi_i$.

Định nghĩa 7. Hàm **khối xác suất** hay viết tắt là **pmf** của một biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Định nghĩa 8. Hàm **khối xác suất đồng thời** của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y được định nghĩa là:

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x \text{ và } Y = y)$$

Ngoài ta có thể viết $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ thay cho $\mathbb{P}(X = x \text{ và } Y = y)$.

Chương 1

Chuỗi Markov là gì ?

1.1 Mở đầu

Định nghĩa 9. Một **quá trình ngẫu nhiên** là một chuỗi biến ngẫu nhiên $(X_t)_{t\geq 0}$ trên một không gian mẫu Ω, được đánh số bởi thời gian t và các biến ngẫu nhiên có giá trị nằm trong một tập hợp S, gọi là **không gian trạng thái**.

Ví dụ. Xét X_n là vị trí của một con cua tại thời điểm $t = n$ (di chuyển ngang, xem như di chuyển trên trục x). Con cua có xác suất 0.67 để di chuyển sang trái, có xác suất 0.33 để di chuyển sang phải, tại thời điểm đầu tiên, con cua đứng yên nên $X_0 = 0$, tại thời điểm tiếp theo, con cua sẽ di chuyển sang trái nên $X_1 = -1$, nhưng thời điểm tiếp theo nữa, con cua lại di chuyển sang phải nên $X_2 = 0$, và cứ ngẫu nhiên như thế.

- Trong phạm vi này, ta chỉ xét quá trình ngẫu nhiên **thời gian rời rạc**, nghĩa là t có giá trị từ $0, 1, 2, ...$ hay nói cách khác, $t \in E$ với $E \subseteq \mathbb{N}$.
- Để một quá trình ngẫu nhiên trở thành một chuỗi Markov (ta chỉ xét chuỗi Markov thời gian rời rạc), ta cần thoả 3 điều kiện dưới đây:
  - Là quá trình ngẫu nhiên thời gian rời rạc.
  - Không gian trạng thái S là một tập hợp đếm được (ta sẽ tập trung xét S là hữu hạn) và X_i là biến ngẫu nhiên rời rạc.
  - Có **tính chất Markov**.
- Ta có thể hiểu tính chất Markov đơn giản như sau "Xác suất của trạng thái tiếp theo của quá trình ngẫu nhiên chỉ phụ thuộc vào hiện tại mà không phụ thuộc vào quá khứ".

1.2 Định nghĩa

Định nghĩa 10. Một quá trình ngẫu nhiên thoả mãn **Tính chất Markov** nếu:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s \mid X_n = x_n)$$

với mọi $n \geq 0$ và với mọi $s, x_0, x_1, ..., x_n \in S$. Và ta gọi quá trình ngẫu nhiên trên là một **Chuỗi Markov**.

Định nghĩa 11. Một chuỗi Markov được nói là **đồng nhất** nếu:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$$

với mọi $x, y \in S$ và với mọi $n \geq 0$.

- Từ đây trở về sau, ta sẽ chỉ dùng đến chuỗi Markov đồng nhất.
- Ngoài ra ta sẽ kí hiệu P_{xy} cho xác suất có điều kiện $P(X_1 = y \mid X_0 = x)\ \forall x, y \in S$ và gọi là **xác suất chuyển tiếp 1-bước**.
- Và cuối cùng điều quan trọng nhất đối với một chuỗi Markov có không gian trạng thái hữu hạn hay $S = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, đó là **phân phối ban đầu**, đặt là π_0 và đặt $\pi_0(x_i) = \mathbb{P}(X_0 = x_i)$ với $x_i \in S$. Lúc này ta có:

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} \pi_0(x_0) & \pi_0(x_1) & ...\pi_0(x_n) \end{bmatrix}$$

- Tương tự với mỗi biến ngẫu nhiên X_i ta sẽ kí hiệu π_i là phân phối của nó.
- Do $S = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ là một tập hợp hữu hạn nên thông thường ta đưa về dạng ma trận gồm các xác suất chuyển tiếp 1-bước mà chuỗi Markov có thể có, kí hiệu là $\mathbf{P}$ và gọi ma trận đó là **ma trận chuyển tiếp** hay **ma trận Markov**, ta có:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{x_0x_0} & P_{x_0x_1} & ... & P_{x_0x_n} \\ P_{x_1x_0} & P_{x_1x_1} & ... & P_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{x_nx_0} & P_{x_nx_1} & ... & P_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 12. Một ma trận vuông được gọi là **ma trận ngẫu nhiên** nếu thoả mãn 2 điều kiện sau:

(a) Tổng các phần tử của mỗi dòng đều là 1.

(b) Mọi phần tử đều không âm.

Ta có thể thấy ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$ luôn luôn là một ma trận ngẫu nhiên.

Định lý 1. Cho một chuỗi Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ với một không gian trạng thái S hữu hạn. Đặt thời gian i là thời điểm hiện tại, khi đó thời điểm quá khứ và tương lai của chuỗi Markov độc lập lẫn nhau. Nghĩa là, với mọi $n > i$ và với mọi $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n \in S$, ta có:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, ..., X_n = x_n \mid X_i = x_i) \\ =&\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., x_{i-1} = x_{i-1} \mid X_i = x_i)\mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1}, ..., X_n = x_n \mid X_i = x_i) \end{aligned}$$

Chứng minh.

- Đặt $F = (X_0 = x_0, ..., X_{i-1} = x_{i-1})$, $E = (X_{i+1} = x_{i+1}, ..., X_n = x_n)$ và $G = (X_i = x_i)$, ta có:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cap F \mid G) &= \frac{\mathbb{P}(E \cap F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E \cap F \cap G)}{\mathbb{P}(F \cap G)} \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \\ &= \mathbb{P}(E \mid F \cap G)\mathbb{P}(F \mid G) \\ &= \mathbb{P}(E \mid G)\mathbb{P}(F \mid G) \quad \text{(áp dụng tính chất của chuỗi Markov)}\end{aligned}$$

- Vậy:

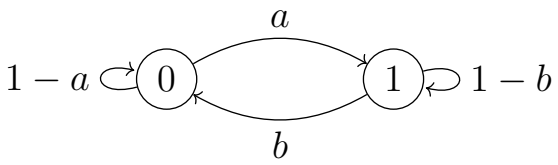
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, ..., X_n = x_n \mid X_i = x_i) \\ =&\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., x_{i-1} = x_{i-1} \mid X_i = x_i)\mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1}, ..., X_n = x_n \mid X_i = x_i)\end{aligned}$$

□

- Ngoài ra để có thể hình dung tốt hơn Chuỗi Markov, ta có thể biểu diễn nó thành một đồ thị.
- Xét ví dụ một chuỗi Markov chỉ có 2 trạng thái, hay nói cách khác S chỉ có 2 phần tử. Xét $S = \{0, 1\}$, ta có $P_{01} = a$ và $P_{10} = b$. Khi đó ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$ sẽ là:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

- Đồ thị biểu diễn cho chuỗi Markov là một đồ thị $G = (V, E)$ (với $V = S$) *có hướng* và *có trọng số* với các trọng số chính là các xác suất chuyển tiếp từ trạng thái này sang trạng thái khác hay từ đỉnh này sang đỉnh khác.



Hình 1.1: Đồ thị G biểu diễn của chuỗi Markov 2 trạng thái

Chương 2

Tính toán chuỗi Markov

2.1 Luỹ thừa ma trận

- Xét một chuỗi Markov có $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và một phân phối ban đầu π_0.
- Để tính toán được π_1, áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$\begin{aligned}\pi_1(x_i) &= \mathbb{P}(X_1 = x_i) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_0 = x_j)\mathbb{P}(X_1 = x_i \mid X_0 = x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \pi_0(x_j) P_{x_j x_i}\end{aligned}$$

- Ta có thể thấy $\pi_1(x_i)$ chính là tích vô hướng giữa vector dòng π_0 và cột thứ i của ma trận $\mathbf{P}$. Vậy ta có:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix}\pi_1(x_1) & \pi_1(x_2) & \cdots & \pi_1(x_n)\end{bmatrix} = \pi_0\mathbf{P}$$

- Tiếp theo để tính được $\pi_2(x_i)$ ta tiếp tục áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$\begin{aligned}\pi_2(x_i) &= \mathbb{P}(X_2 = x_i) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = x_j)\mathbb{P}(X_2 = x_i \mid X_1 = x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \pi_1(x_j)\mathbb{P}(X_1 = x_i \mid X_0 = x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \pi_1(x_j) P_{x_j x_i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \pi_0(x_k) P_{x_k x_j} \right) P_{x_j x_i} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \pi_0(x_k) \left(\sum_{j=0}^{n} P_{x_k x_j} P_{x_j x_i} \right)\end{aligned}$$

- Ta có thể thấy $\pi_2(x_j)$ chính là tích vô hướng giữa vector dòng π_0 và cột thứ i của ma trận $\mathbf{P}^2$. Vậy ta có:

$$\pi_2 = \begin{bmatrix}\pi_2(x_1) & \pi_2(x_2) & ... & \pi_2(x_n)\end{bmatrix} = \pi_0\mathbf{P}^2$$

- Ta gọi $\mathbb{P}(X_2 = y \mid X_0 = x)$ là *xác suất chuyển tiếp 2-bước*. Tương tự với $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x)$ ta gọi là *xác suất chuyển tiếp n-bước*.
- Dựa vào xác suất chuyển tiếp 2-bước và 1-bước, ta có thể doán được:

$$\pi_n = \pi_0 \mathbf{P}^n \tag{2.1}$$

Chứng minh. Ta sẽ dùng quy nạp để chứng minh. Đầu tiên ta đã chứng minh được phương trình (2.1) đúng với $n = 1$ và $n = 2$, giả sử $n = k$ đúng, nghĩa là:

$$\pi_k = \pi_0 \mathbf{P}^k$$

Xét $n = k + 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(x_i) &= \mathbb{P}(X_{k+1} = x_i) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_j)\mathbb{P}(X_{k+1} = x_i \mid X_k = x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_j)\mathbb{P}(X_1 = x_i \mid X_0 = x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \pi_k(x_j) P_{x_j x_i}
\end{aligned}$$

Ta có thể thấy $\pi_{k+1}(x_i)$ là tích vô hướng giữa vector dòng π_k và cột thứ i của ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$, do đó:

$$\pi_{k+1} = \pi_k \mathbf{P} = \pi_0 \mathbf{P}^k \mathbf{P} = \pi_0 \mathbf{P}^{k+1}$$

Vậy theo quy nạp, phương trình (2.1) đúng với mọi $n \geq 1$. □

Định nghĩa 13. Cho $(X_n)_{n\geq 0}$ là một chuỗi Markov với ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$. Với mọi $n \geq 1$, ta gọi ma trận $\mathbf{P}^n$ là **ma trận chuyển tiếp n-bước**. Các phần tử của ma trận $\mathbf{P}^n$ được gọi là **xác suất chuyển tiếp n-bước**. Với mọi $x, y \in S$ ta kí hiệu xác suất chuyển tiếp n bước từ x tới y là P^n_{xy}.

- Để dễ dàng hơn trong việc tính toán ma trận $\mathbf{P}^n$ ta có thể dùng phương pháp chéo hoá.
- Dùng tính chất của luỹ thừa, ta có:

$$\pi_{n+m} = \pi_0 \mathbf{P}^{n+m} = \pi_0 \mathbf{P}^n \mathbf{P}^m$$

- Ngoài ra ta có:

$$\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) = P^n_{xy} \Rightarrow \mathbb{P}(X_{m+n} = y \mid X_m = x) = P^n_{xy}$$

2.2 Trị riêng của ma trận markov

Các trị riêng của ma trận Markov có một số tính chất đặc biệt, các tính chất này giúp chúng ta có thể giải thích các tính chất của chuỗi Markov bằng ngôn ngữ của đại số tuyến tính một cách trực quan và dễ dàng hơn.

Định lý 2. Ma trận markov luôn có ít nhất một trị riêng bằng 1.

Chứng minh.

- Với ma trận Markov $\mathbf{P}$ có kích thước $n \times n$, xét phương trình:

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{2.2}$$
$$(\mathbf{P} - I)\mathbf{x} = 0. \tag{2.3}$$

- Với b_{ij} là phẩn tử hàng i cột j của $\mathbf{P} - I$, $k \leq n$, ta có:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{j=1}^{n} P_{kj} - 1 = 1 - 1 = 0. \tag{2.4}$$

- Suy ra, với $\mathbf{u}_i$ là các vector cột của $(\mathbf{P} - \lambda I)$, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i = 0. \tag{2.5}$$

- Suy ra các các vector cột của $(\mathbf{P} - \lambda I)$ phụ thuộc tuyến tính, từ đó suy ra $r(\mathbf{P}) < n$, hay phương trình (2.2) luôn có nghiệm.
- Vậy, vì $\lambda = 1$ thoả $\mathbf{P}\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$ nên 1 là trị riêng của $\mathbf{P}$.

□

Định lý 3. Các trị riêng của ma trận Markov luôn bé hơn hoặc bằng 1.

Chứng minh. Chúng ta có thể chứng minh như sau:

- Với ma trận Markov $\mathbf{P}$ có kích thước $n \times n$, λ là 1 trị riêng của $\mathbf{P}$, ta có:

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.6}$$

- Xét hàng thứ k của cả 2 vế, ta có:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{kj}x_j = \lambda x_k \tag{2.7}$$

- Đặt phần tử x_m thoả:

$$|x_m| = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) \tag{2.8}$$

- Lúc này, ta có:

$$|\lambda x_m| = \left|\sum_{j=1}^{n} P_{mj}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |P_{mj}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |P_{mj}x_m| = |x_m| \sum_{j=1}^{n} |P_{mj}| = |x_m|.1 \tag{2.9}$$

- Suy ra $\lambda \leq 1$

□

2.3 Ví dụ tiêu biểu

Bài toán. Theo khảo sát của sinh viên đối với ba quán cafe A, B, C, ta biết rằng ban đầu, hai quán A, B chưa mở nên 100% khách đều đến C và:

- Trong những sinh viên đến quán A, sẽ có 20% người tiếp tục đến A, có 60% người sang B và có 20% người sang C.
- Trong những sinh viên đến quán B, sẽ có 40% người tiếp tục đến B, có 10% người sang A và có 50% người sang C.
- Trong những sinh viên đến quán C, sẽ có 10% người tiếp tục đến C, có 70% người sang A và có 20% người sang B.

(a) Hãy tìm xem tỉ lệ phần trăm người đến quán A, B, C sau 3 tuần.

(b) Hãy tìm xem tỉ lệ sinh viên đến quán B ở tuần thứ 5 biết rằng tuần thứ 2 ở quán C và tuần thứ 3 ở quán A.

(c) Hãy tìm xem tỉ lệ sinh viên đến quán B ở tuần thứ 2 và đến quán A ở tuần thứ 4 biết rằng đến quán B ở tuần thứ 3.

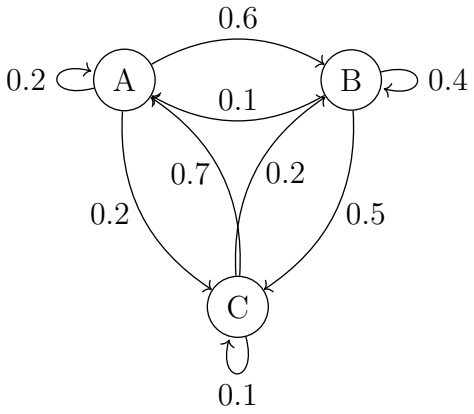
Giải: Thời gian chúng ta xét sẽ là tuần. Tiếp theo ta có không gian trạng thái $S = \{A, B, C\}$. Đặt X_t là biến ngẫu nhiên đại diện cho quán cafe mà sinh viên đến ở tuần thứ t và có phân phối ban đầu π_0 là

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_0 = A) & \mathbb{P}(X_0 = B) & \mathbb{P}(X_0 = C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dựa theo đề bài ta có ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$ là:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AB} & P_{AC} \\ P_{BA} & P_{BB} & P_{BC} \\ P_{CA} & P_{CB} & P_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Ta biểu diễn chuỗi Markov trên thành đồ thị như dưới đây:



Hình 2.1: Đồ thị G biểu diễn của chuỗi Markov của bài toán

Tính toán luỹ thừa 2 và 3 của ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$, ta được:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.4 & 0.36 \\ 0.41 & 0.32 & 0.27 \\ 0.23 & 0.52 & 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0.34 & 0.376 & 0.284 \\ 0.303 & 0.428 & 0.269 \\ 0.273 & 0.396 & 0.331 \end{bmatrix}$$

(a) Ta có tỉ lệ sinh viên đến quán A, B, C ở tuần thứ 3 chính là π_3, do đó:

$$\pi_3 = \pi_0 \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0.273 & 0.396 & 0.331 \end{bmatrix}$$

(b) Tỉ lệ sinh viên đến quán B ở tuần thứ 5 biết rằng tuần thứ 2 ở quán C và tuần thứ 3 ở quán A chính là:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_5 = B \mid X_2 = C, X_3 = A) &= \mathbb{P}(X_5 = B \mid X_3 = A) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = B \mid X_0 = A) \\ &= P^2_{AB} = 0.4 \end{aligned}$$

(c) Tỉ lệ sinh viên đến quán B ở tuần thứ 2 và đến quán A ở tuần thứ 4 biết rằng đến quán B ở tuần thứ 3 chính là:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = B, X_4 = A \mid X_3 = B) &= \mathbb{P}(X_4 = A \mid X_3 = B)\mathbb{P}(X_2 = B \mid X_3 = B) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = A \mid X_0 = B)\frac{\mathbb{P}(X_3 = B \mid X_2 = B)\mathbb{P}(X_2 = B)}{\mathbb{P}(X_3 = B)} \\ &= P_{BA}P_{BB}\frac{\mathbb{P}(X_2 = B)}{\mathbb{P}(X_3 = B)} \\ &= P_{BA}P_{BB}\frac{\pi_2(B)}{\pi_3(B)} \\ &= 0.1 \cdot 0.4 \cdot \frac{0.52}{0.396} \\ &\approx 0.052525 \end{aligned}$$

Bài toán. Một khảo sát được thực hiện trên 100 người dùng điện thoại. Ban đầu có 60 người dùng điện thoại sử dụng hệ điều hành Android, 40 người dùng điện thoại sử dụng hệ điều hành IOS. Sau mỗi quý, sẽ có 12 người chuyển từ Android sang IOS, 4 người chuyển từ IOS sang Android. Hãy tìm xem sau 50 quý thì tỉ lệ người dùng ở hai hệ điều hành sẽ như nào, ngoài ra sau 100 quý hay 200 quý hay 500 quý thì có thay đổi gì không ?

Giải: Thời gian chúng ta xét sẽ là quý. Tiếp theo ta có không gian trạng thái $S = \{A, I\}$ với A viết tắt cho Android và I cho IOS. Đặt X_t là biến ngẫu nhiên cho hệ điều hành mà người dùng sử dụng ở quý thứ t và có phân phối ban đầu π_0 là:

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_0 = A) & \mathbb{P}(X_0 = I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Dựa theo đề bài ta có ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$ là:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AI} \\ P_{IA} & P_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Khi đó tỉ lệ người dùng sau 50 quý hay nói cách khác là phân phối tại $t = 50$ là:

$$\pi_{50} = \pi_0 \mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

Tiếp theo tỉ lệ người dùng sau 100 quý sẽ là:

$$\pi_{100} = \pi_0 \mathbf{P}^{100} = \begin{bmatrix} 0.33333333 & 0.66666667 \end{bmatrix}$$

Tỉ lệ người dùng sau 200 quý sẽ là:

$$\pi_{200} = \pi_0 \mathbf{P}^{200} = \begin{bmatrix} 0.33333333 & 0.66666667 \end{bmatrix}$$

Tỉ lệ người dùng sau 500 quý sẽ là:

$$\pi_{500} = \pi_0 \mathbf{P}^{500} = \begin{bmatrix} 0.33333333 & 0.66666667 \end{bmatrix}$$

Ta có thể thấy, kể từ 100 quý trở về sau, phân phối sẽ không thay đổi nữa. Điều này làm ta có thể nghĩ đến việc phân phối của chuỗi Markov có "giới hạn" và phân phối giới hạn đó được gọi là **phân phối bất động** (stationary distribution), kí hiệu là π:

$$\pi_n = \pi_0 \mathbf{P^n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

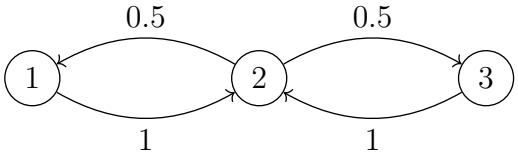
Trong trường hợp của bài toán này phân phối bất động chính là:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

2.4 Sự hội tụ của chuỗi Markov dưới góc nhìn ma trận.

Định nghĩa 14. Một chuỗi Markov được gọi là **chuỗi chính tắc** nếu tồn tại một số $n \geq 1$ sao cho các phần tử của $\mathbf{P}^n$ đều dương (lớn hơn 0).

Ví dụ. Xét chuỗi Markov sau:



Hình 2.2: Ví dụ chuỗi Markov

Dựa vào đồ thị ta có ma trận chuyển tiếp:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có thể thấy nếu luỹ thừa ma trận $\mathbf{P}$ với mũ chẵn thì ta không thể đi từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 và không thể đi từ trạng 1 sang trạng thái 3 nếu mũ chẵn. Do đó $\mathbf{P}^n$ luôn tồn tại giá trị 0 với mọi $n \geq 1$. Vậy chuỗi trên không là một chuỗi chính tắc.

Định lý 4. Nếu chuỗi markov là một chuỗi chính tắc và ma trận chuyển tiếp $\mathbf{P}$ chéo hoá được thì tồn tại phân phối bất động π. Đặt e là vector riêng ứng với trị riêng bằng 1 của ma trận $\mathbf{P}^T$, khi đó $\pi = e^T$.

Chứng minh. Vì chúng ta vẫn thường thao tác với không gian cột, nên bài chứng minh sẽ xét với ma trận chuyển vị từ hàng thành cột để dễ dàng hình dung hơn.

- Xét ma trận Markov $\mathbf{P}$ chéo hoá được thành $\mathbf{P} = UDU^{-1}$, ta có $\mathbf{P}^T$ cũng chéo hoá được, chứng minh như sau:

$$\mathbf{P}^T = (UDU^{-1})^T = (U^{-1})^T D^T U^T = (U^T)^{-1} D^T U^T \tag{2.10}$$

- Đặt $(U^{-1})^T = X$, đồng thời lại có $D^T = D$, từ đó ta được:

$$\mathbf{P}^T = (U^{-1})^T D^T U^T = XDX^{-1} \tag{2.11}$$

- Suy ra $\mathbf{P}^T$ chéo hoá được. Xét ma trận $\mathbf{P}^T$, X là ma trận có các cột là các vector riêng, cột đầu tiên là vector riêng ứng với $\lambda_1 = 1$, ta được:

$$\mathbf{P}^T = XDX^{-1} \tag{2.12}$$

- Với $\mathbf{x}_i$ là các cột của X, λ_i là các trị riêng tương ứng với $\mathbf{x}_i$, ta được

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

- Lúc này, $\mathbf{x}_i$ là các cột của X, phân phối ban đầu π_0 sẽ được biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của x_i như sau (vì P^T chéo hoá được nên ta sẽ có các vector x_i là cớ sở của không gian R^{nxn}):

$$\pi_0^T = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + ... + c_n\mathbf{x}_n \tag{2.14}$$

$$\pi_0^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & ... & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$\mathbf{c} = X^{-1}\pi_0^T \tag{2.16}$$

- Vector trạng thái sau thời gian $k+1$:

$$\pi_{k+1} = \pi_0\mathbf{P}^k \tag{2.17}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_{k+1}^T = (\mathbf{P}^T)^k\pi_0^T \tag{2.18}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_{k+1}^T = XD^kX^{-1}\pi_0^T \tag{2.19}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_{k+1}^T = XD^k\mathbf{c} \tag{2.20}$$

- Ta có:

$$XD^k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

- Sử dụng phương pháp nhân hai ma trận (ma trận này nhân với từng cột ma trận kia), ta được:

$$XD^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k\mathbf{x}_1 & \lambda_2^k\mathbf{x}_2 & \dots & \lambda_n^k\mathbf{x}_n \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

- Cùng với quy ước $\lambda_1 = 1$, ta suy ra:

$$\pi_{k+1}^T = XD^kC = \begin{bmatrix} \lambda_1^k\mathbf{x}_1 & \lambda_2^k\mathbf{x}_2 & \dots & \lambda_n^k\mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$$= c_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + ... + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n \tag{2.24}$$

- Như đã chứng minh ở mục 2.3, các trị riêng khác 1 và -1 đều có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1, chính vì thế khi k càng tăng đến số vô cùng lớn, thì π_{k+1}^T sẽ càng tiến gần về $c_1\mathbf{x}_1$. Và đây chính là lí do cho sự "hội tụ" của các phân phối.
- Vậy mới một ma trận Markov chéo hoá được, các phân phối sẽ hội tụ dần về phân phối bất động với phân phối bất động chính là vector riêng tương ứng với trị riêng bằng 1.

□

- Ở bài chứng minh trên, để tìm được phân phối bất động của 1 ma trận Markov cần phải tính các tham số c_i. Tuy nhiên, chúng ta có thể đơn giản hoá nó. Đầu tiên, tìm vector riêng ứng với trị riêng là 1 bằng cách giải phương trình tìm $\mathbf{x}$ thoả:

$$(\mathbf{P}^T - I)\mathbf{x} = 0 \tag{2.25}$$

- Tiếp theo đó, tìm tham số c thoả $c\mathbf{x}$ có tổng các phần tử bằng 1 vì $c\mathbf{x}^T$ là 1 phân phối. Vậy, ta được phân phối bất động là $c\mathbf{x}^T$.
  Ví dụ. Thực hành với bài toán thứ hai ở mục 2.3:
  - Ta có ma trận Markov $\mathbf{P}$:

$$\begin{bmatrix} 0.80 & 0.20 \\ 0.10 & 0.90 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

  - Và phân phối ban đầu π_0:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

  - Giải phương trình:

$$(\mathbf{P}^T - I)\mathbf{x} = 0 \tag{2.27}$$

  - Ta được nghiệm:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

  - Từ đó dễ dàng tìm được $c = \frac{1}{3}$. Suy ra phân phối bất động là

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

    .
  - Từ đó, chúng ta có thể dự đoán rằng, trong tương lai nếu không biến cố nào xảy ra gây ảnh hưởng đến ma trận chuyển tiếp, thì điện thoại IOS sẽ chiếm $\frac{2}{3}$ thị phần, còn Android chiếm $\frac{1}{3}$ thị phần.

Chương 3

Ứng dụng dự đoán từ tiếp theo

3.1 Đặt vấn đề

- Trong rất nhiều các công cụ tìm kiếm, cũng như các phần mềm cho ứng dụng tìm kiếm hiện nay, chúng ta có thể dễ dàng nhận ra được một chức năng rất phổ biến, đó chính là đưa ra những đề xuất về từ ngữ tiếp theo dựa vào những từ vừa được gõ. Từ đó chúng ta có bài toán làm thế nào để tìm ra đâu là những từ có xác suất xuất hiện tiếp theo cao nhất.
- Có rất nhiều những phương pháp có thể được áp dụng trong việc giải quyết bài toán trên một cách hiệu quả chẳng hạn như Deep Learning. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể giải quyết bài toán này (một cách đơn giản, song không tối ưu như DL) bằng chuỗi Markov.

3.2 Chuẩn bị và xử lí dữ liệu

- Đầu tiên, từ một tập dữ liệu (dataset) gồm những từ, câu đã được tìm kiếm (lấy từ database của công cụ tìm kiếm) hoặc từ những từ đã được gõ (lấy từ database của phần mềm bàn phím điện thoại như LabanKey), chúng ta sẽ loại bỏ các kí tự đặt biệt (dấu câu,..), sau đó phân tách từng câu ra thành cụm lần lượt có 1, 2 và 3 từ, sau đó xây dựng ma trận xác suất (sẽ được trình bày ở phần sau).
- Để dễ hình dung cách hoạt động của thuật toán, trong quy mô bài báo cáo này, chúng tôi xin được minh hoạt bằng 1 dataset lấy từ một vài câu comment trên Facebook như sau:

"Tin này là tin chuẩn chưa anh?"
"Này là tin chuẩn em ạ!"
"Đừng spam tin này nữa em nhé!"
"Tin này chưa chuẩn em nhé!"
"Anh sẽ chặn các bạn spam tin này."

- Phân tách thành các cụm 1 từ, ta được các cụm sau: 'tin', 'này', 'là', 'chuẩn', 'chưa', 'anh', 'em', 'ạ', 'đừng', 'spam', 'nữa', 'nhé', 'sẽ', 'chặn', 'các', 'bạn'.
- Phân tách thành các cụm 2 từ, ta được các cụm sau: 'tin này', 'này là', 'là tin', 'tin chuẩn', 'chuẩn chưa', 'chưa anh', 'chuẩn em', 'em ạ', 'đừng spam', 'spam tin', 'này nữa', 'nữa em', 'em nhé', 'này chưa', 'chưa chuẩn', 'anh sẽ', 'sẽ chặn', 'chặn các', 'các bạn', 'bạn spam'.

- Phân tách thành các cụm 3 từ, ta được các cụm sau: 'tin này là', 'này là tin', 'là tin chuẩn', 'tin chuẩn chưa', 'chuẩn chưa anh', 'tin chuẩn em', 'chuẩn em ạ', 'đừng spam tin', 'spam tin này', 'tin này nữa', 'này nữa em', 'nữa em nhé', 'tin này chưa', 'này chưa chuẩn', 'chưa chuẩn em', 'chuẩn em nhé', 'anh sẽ chặn', 'sẽ chặn các', 'chặn các bạn', 'các bạn spam', 'bạn spam tin'.

3.3 Xây dựng ma trận chuyển tiếp

- Từ những cụm từ chúng ta đã phân tách ở phần trên, chúng ta có thể xây dựng các ma trận chuyển trạng thái biểu diễn xác suất những từ sẽ xuất hiện tiếp theo dựa vào 1 hoặc 2 hoặc 3 từ trước đó.

- Ma trận trạng thái sẽ được định nghĩa như sau: phần tử hàng i cột j sẽ biểu diễn xác suất cho sự xuất hiện của trạng thái tiếp theo j tương ứng với trạng thái hiện tại i. Xác suất đó sẽ được tính bằng số lần xuất hiện của trạng j sau trạng thái i chia cho tổng số lần xuất hiện của các trạng thái. Ví dụ cho ma trận chuyển tiếp với các trạng thái hiện tại là 1 từ:

	tin	này	là	chuẩn	chưa	anh	em	ạ	đừng	spam	nữa	nhé	sẽ	chặn	các	bạn
tin	0	2/3	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
này	0	0	1/2	0	1/4	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0
là	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
chuẩn	0	0	0	0	1/3	0	2/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
chưa	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
anh	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
em	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	2/3	0	0	0	0
ạ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
đừng	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
spam	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
nữa	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
nhé	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
sẽ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
chặn	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
các	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
bạn	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

- Ví dụ cho ma trận chuyển tiếp với trạng thái hiện tại cụm 2 từ:

	tin	này	là	chuẩn	chưa	anh	em	ạ	đừng	spam	nữa	nhé	sẽ	chặn	các	bạn
tin này	0	0	1/3	0	1/3	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	0
này là	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
là tin	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
tin chuẩn	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
chuẩn chưa	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
chưa anh	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
chuẩn em	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
sẽ chặn	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
chặn các	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
các bạn	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
bạn spam	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Ví dụ cho ma trận chuyển tiếp với trạng thái hiện tại cụm 3 từ:

	tin	này	là	chuẩn	chưa	anh	em	ạ	đừng	spam	nữa	nhé	sẽ	chặn	các	bạn
tin này là	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
này là tin	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
là tin chuẩn	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
tin chuẩn chưa	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
sẽ chặn các	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
chặn các bạn	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
các bạn spam	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
bạn spam tin	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
spam tin này	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3.4 Tiến hành dự đoán từ tiếp theo

- Đầu tiên, với từ ngữ đầu tiên được nhập (từ bàn phím), ta có thể thành lập 1 vector phân phối các trạng thái hiện tại. Vì mới chỉ có 1 từ nên chúng ta sử dụng ma trận phân phối với các trạng thái hiện tại là 1 từ, ví dụ cụ thể như sau:
  - Với từ đầu tiên được nhập là "tin", thứ tự tương ứng với thứ tự các trạng thái trong ma trận chuyển tiếp ở trên, ta được vector phân phối:

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Từ đó, ta có thể xác định phân phối tiếp theo:

$$\pi_1 = \pi_0 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Vậy, ta có thể đề xuất những từ có xác suất cao nhất:
  - Từ "này" với xác suất $\frac{2}{3}$.
  - Từ "chuẩn" với xác suất $\frac{1}{3}$.

- Nếu người dùng đã viết được ít nhất 2 từ, để tăng độ chính xác khi đề xuất từ cũng như đảm bảo một phần yếu tố ngữ nghĩa của câu, ta sử dụng ma trận chuyển tiếp của trạng thái 2 từ và ma trận chuyển trạng thái 3 từ. Từ đó, ta có thể xây dựng thuật toán như sau:
  - Với những câu chỉ có một từ, sử dụng ma trận chuyển tiếp với trạng thái 1 từ.
  - Với những câu có nhiều hơn 2 từ, lần lượt xét 3 từ cuối của câu xem đã tồn tại thái là 3 từ đấy chưa, nếu có, sử dụng ma trận chuyển tiếp với trạng thái 3 từ, nếu chưa thì chuyển sang xét 2 từ cuối và ma trận chuyển tiếp với trạng thái 2 từ, và cứ như thế cho đến khi còn 1 từ.
  - Sau khi hoàn thành, tiếp tục cập nhật các trạng thái và xác suất mới vào dataset.
- Có thể minh hoạ với ví dụ sau:
  - Với cụm từ đã gõ "Anh cho em hỏi tin này là", ta sẽ xét 3 từ cuối là "tin này là", nhận thấy đây là 1 trạng thái trong ma trận chuyển tiếp, áp dụng mô hình ở trên, ta được phân phối cho từ tiếp theo:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Từ đó, ta đề xuất từ "tin" cho người dùng với xác suất bằng 1.
- Một ví dụ khác:
  - Với cụm từ đã gõ "Đây có phải tin chuẩn", ta sẽ xét 3 từ cuối là "phải tin chuẩn", nhận thấy đây không là 1 trạng thái trong ma trận chuyển tiếp, ta xét 2 từ cuối là "tin chuẩn", nhận thấy đây là một trạng thái của ma trận chuyển tiếp 2 từ, áp dụng mô hình ở trên, ta được phân phối cho từ tiếp theo:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Từ đó, ta đề xuất từ "tin" cho người dùng với xác suất bằng 0.5, hoặc từ "em" với xác suất bằng 0.5.

3.5 Code cơ bản cho mô hình

Giống như đồ thị, để tiết kiệm bộ nhớ thì thay vì sử dụng ma trận kề, các lập trình viên thường sử dụng lớp vector (trong C++). Tương tự với mô hình trên, chúng ta sẽ dùng các dictionary để lưu trữ cấc trạng thấi và tính toán các phân phối. Chi tiết code sẽ được gửi kèm theo bài báo cáo này.

Tài liệu tham khảo

[1] Eigenvalues of a stochastic matrix is always less than or equal to 1. https://yutsumura.com/eigenvalues-of-a-stochastic-matrix-is-always-less-than-or-equal-to-1/.

[2] George Casella and Roger L. Berger. *Statistical Inference*. Cengage Learning, 2nd edition, 2001.

[3] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, 3rd edition, 2001.

[4] Soogeun Lee, J Ko, Xi Tan, Isha Patel, Rajesh Balkrishnan, and J Chang. Markov chain modelling analysis of hiv/aids progression: A race-based forecast in the united states. *Indian journal of pharmaceutical sciences*, 76:107–15, 03 2014.

[5] Fariha Mahfuz. Markov chains and their applications. Master's thesis, University of Texas at Tyler, 2021.

[6] Ursula Porod. *Dynamics of Markov Chains for Undergraduates*. Self-publishing, 1st edition, 2021.

[7] Nicolas Privault. *Understanding Markov Chains*. Springer Singapore, 2nd edition, 2018.

[8] Gilbert Strang. 24. markov matrices; fourier series. https://www.youtube.com/watch?v=lGGDIGizcQ0&t=13s, 2005.

[9] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 5nd edition, 2016.