TP 4MMAOD : Équation de Bellman

De Bollivier Enea
Duc Melchior

28 mars 2017

1 Equation de Bellman

Pour obtenir l'équation de Bellman correspondant à notre problème il faut, dans un premier temps, justifier qu'un arbre binaire de recherche optimal est composé de sous arbres optimaux. En effet si on peut améliorer un sous-arbre, on peut diminuer son poids. En réinsérant cet arbre dans l'arbre initial on obtient un arbre de poids plus faible, l'arbre initial n'était donc pas optimal. Ainsi les sous arbre d'un arbre optimal sont optimaux.

On note :

— $T_{i,j}$: ABR optimal pour les éléments e_{i+1},...,e_j
— p_i : Probabilité de rechercher l'élément e_i
— $r_{i,j}$: racine de l'ABR T_i, j
— $c_{i,j}$: coût (nombre moyen de comparaisons) de l'ABR T_i, j
— $w_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j} p_k$

Si e_k la racine de T_i, j, $T_{i,k-1}$ son sous arbre gauche et $T_{k,j}$ son sous arbre droit on a :

$$c_{i,j} = (c_{i,k-1} + w_{i,k-1}) + p_k + (c_{k,j} + w_{k,j})$$

En effet les sous arbres droit et gauche sont placés un étage plus bas, il faut ajouter pour chaque arbre la somme ($w_{i,k-1}$ et $w_{k,j}$) des fréquences de leurs éléments.

$$c_{i,j} = (w_{i,k-1} + p_k + w_{k,j}) + c_{i,k-1} + c_{k,j}$$

D'où l'équation de Bellman :

$$c_{i,j} = w_{i,j} + c_{i,k-1} + c_{k,j}$$

Il faut donc choisir l'élément e_k qui minimise cette égalité.

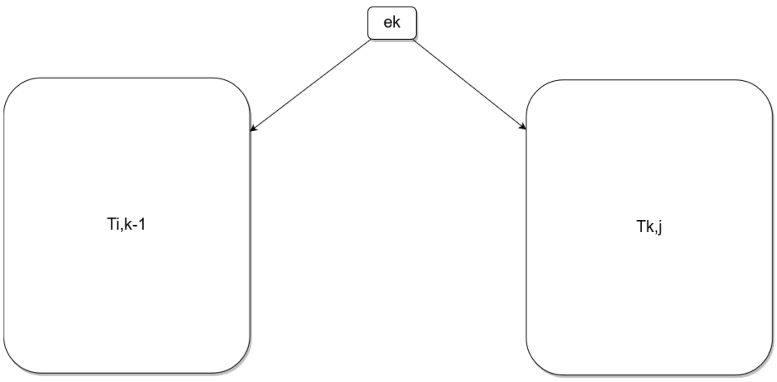

Schéma explicatif de l'arbre T_i, j