

# Existence et unicité des mesures de Gibbs.

Dorian

29 décembre 2024

## 1 Introduction

**Définition 1** (Mesure de Gibbs). Soit  $\mu$  une mesure de probabilité  $\sigma$ -invariante sur  $\Sigma_n$ . On dit  $\mu$  est une mesure de Gibbs pour un potentiel  $\phi: \Sigma_n \rightarrow \mathbf{R}$  s'il existe  $P \in \mathbf{R}$  et  $c_1, c_2 > 0$  tels que pour tout  $x \in \Sigma_n$  et  $m \in \mathbf{N}$  on ait

$$c_1 \leq \frac{\mu\{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, x_i = y_i\}}{\exp(-Pm + \sum_{k=0}^{m-1} \phi(\sigma^k x))} \leq c_2.$$

L'objectif est de démontrer le théorème suivant, dû à R. Bowen.

**Théoreme 2.** *Soit  $\phi$  une fonction de potentiel hölderienne. Alors il existe une unique mesure de Gibbs pour cette fonction  $\phi$ .*

Pour ce faire, on se ramène au cas où la fonction de potentiel  $\phi$  ne dépend plus des coordonnées négatives. Ensuite, on considère l'opérateur de transfert  $\mathcal{L}$  défini par

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall x \in \Sigma_n^+, \quad \mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}x} f(y)e^{\phi(y)},$$

où  $\Sigma_n^+$  est l'ensemble des suites à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et indexées sur  $\mathbf{N}$ .

Le théorème suivant établit que cet opérateur admet une mesure propre et une fonction propre.

**Théoreme 3** (Ruelle-Perron-Frobenius). *Soit  $\phi$  un potentiel et  $\mathcal{L}$  l'opérateur de transfert. Alors il existe  $\lambda > 0, \nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  et  $h \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), h > 0$  tels que :*

1.  $\nu$  vérifie  $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$ ,
2.  $h$  vérifie  $\mathcal{L}h = \lambda h$  et  $\nu(h) = 1$ ,
3. et pour toute fonction  $g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m g - \nu(g)h \right\| = 0$ .

Pour prouver ce théorème, on utilisera le théorème de Schauder-Tychonoff afin de construire la mesure propre  $\mu$  et la fonction propre  $h$  comme des points fixes de certains opérateurs, pour cela nous devons d'abord établir la compacité de  $\Sigma_n$  et d'un certain ensemble de fonctions notamment grâce au théorème d'Ascoli. Puis pour établir la limite nous aurons besoin de la densité des fonctions en escaliers dans  $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  et des propriétés de l'opérateur de transfert.

Grâce à cette mesure propre  $\nu$  et cette fonction propre  $h$ , on peut construire  $\mu = h \cdot \nu$ . Cette dernière mesure sur  $\Sigma_n^+$  est alors  $\sigma$ -invariante, ce qui se montre grâce aux propriétés algébriques de l'opérateur de transfert et permettra de construire une forme linéaire  $G$  sur  $\Sigma_n$  qui s'identifiera grâce au théorème de Riesz en une mesure  $\tilde{\mu}$  sur  $\Sigma_n$ , qui sera la mesure de Gibbs pour le potentiel höldérien  $\phi$ . Une fois  $\tilde{\mu}$  construite, on montrera qu'elle est ergodique (et même mélangeante), ce qui permettra d'établir l'unicité.

## 2 Topologie de $\Sigma_n$

### 2.1 Définition de l'espace métrique $\Sigma_n$

**Définition 4.** Soit  $n \in \mathbf{N}$ . L'ensemble des suites bi-infinies à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est noté  $\Sigma_n = \prod_{\mathbf{Z}} \llbracket 1, n \rrbracket$ . Chaque  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est muni de la topologie discrète, et on munit alors  $\Sigma_n$  de la distance produit  $d$  donnée par

$$\forall x, y \in \Sigma_n, \quad d(x, y) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} 2^{-|i|} \mathbf{1}_{x_i \neq y_i} < +\infty.$$

On notera  $B_d(x, r)$  la boule centrée en  $x \in \Sigma_n$  et de rayon  $r \geq 0$  pour  $d$ .

**Proposition 5.** *L'espace métrique  $(\Sigma_n, d)$  est compact.*

*Preuve.* Chacun des  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est compact pour sa topologie. En tant que produit  $\Sigma_n$  est donc également compact, grâce au théorème de Tychonoff.  $\square$

**Proposition 6.** *Pour  $x, y \in \Sigma_n$  distincts, notons  $N = \min \{i \in \mathbf{N} \mid x_i \neq y_i \text{ ou } x_{-i} \neq y_{-i}\}$ . Alors  $d_\beta(x, y) = \beta^N$  et  $d_\beta(x, x) = 0$  définit une distance sur  $\Sigma_n$  et est équivalente à la distance  $d$ , et ce pour tout  $\beta \in ]0, 1[$ .*

*Preuve.* Soit  $\beta \in ]0, 1[$ . Alors  $d_\beta$  est distance car  $d_\beta$  est clairement symétrique,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  pour tout  $x, y \in \Sigma_n$  et  $d_\beta$  vérifie l'inégalité triangulaire.

De plus,  $d_\beta$  est équivalente à  $d$ . En effet pour  $r > 0$ , montrons qu'il existe  $r_1, r_2 > 0$  tel que pour tout  $x \in \Sigma_n$  on ait

$$B_\beta(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \subseteq B_\beta(x, r_2).$$

Soit  $y \in \Sigma_n$ . Supposons que  $y \in B_d(x, r)$ , alors  $d(x, y) < r$ , en particulier

$$\forall i \in \mathbf{Z}, \quad 2^{-|i|} \mathbf{1}_{x_i \neq y_i} \leq r$$

Soit  $i \in \mathbf{Z}$ , si  $2^{-|i|} > r$ , alors nécessairement  $x_i = y_i$  et  $|i| < -\frac{r}{\log 2}$ , alors en posant  $r_2 = \beta^{-\frac{r}{\log 2}}$  on a  $y \in B_\beta(x, r_2)$ , ce qui prouve une des deux inclusions.

Supposons désormais que  $x \in B_\beta(x, r)$ , c'est-à-dire  $d_\beta(x, y) < r$ , donc  $x$  et  $y$  coïncident sur les  $m_r = \frac{r}{\log \beta}$  premières coordonnées. Ainsi,

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} 2^{-|i|} \mathbf{1}_{x_i \neq y_i} \leq 2 \sum_{i \geq m_r + 1} 2^i = 2^{1-m_r} = r_1.$$

et finalement,  $y \in B_d(x, r_1)$ . Donc les distances sont équivalentes et les topologies associées à ces distances sont les mêmes.  $\square$

On notera donc dans la suite,  $B_\beta(x, r)$  les boules de centre  $x \in \Sigma_n$  et de rayon  $r > 0$  pour la distance  $d_\beta$ , et  $B(x, r) = B_{\frac{1}{2}}(x, r)$ . On peut alors noter que si  $y \in B_\beta(x, r)$ , si on note  $m_r = \frac{r}{\log \beta}$ , alors  $x$  et  $y$  coïncident sur les coordonnées entre  $-m_r$  et  $m_r$  :

$$\forall i \in \llbracket -m_r, m_r \rrbracket, \quad x_i = y_i.$$

## 2.2 Propriétés topologiques de $\Sigma_n$

**Définition 7.** Soit  $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ . La fonction de variation d'ordre  $k$  est donné par :

$$\text{var}_k(\phi) = \sup \{ |\phi(x) - \phi(y)| : \forall i \in \llbracket -k, k \rrbracket, x_i = y_i \}.$$

**Proposition 8.** Soit  $\beta \in ]0, 1[$ . Soit  $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ , si pour tout  $k \in \mathbf{N}$  on  $\text{var}_k(\phi) \leq b\alpha^k$  pour certaines constantes  $b > 0$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors il existe  $\beta \in ]0, 1[$  tel que  $\phi$  soit hölderienne pour  $d_\beta$ .

**Définition 9.** On notera  $\mathcal{H}(\Sigma_n)$  l'ensemble des fonctions  $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$  pour lesquels il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $b > 0$  vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \text{var}_k(\phi) \leq b\alpha^k.$$

**Proposition 10.** Pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , soit  $T_m = \{x \in \Sigma_n \mid \forall i \mid |i| > m, x_i = 1\}$  et  $T = \bigcup_{m \geq 0} T_m$ . L'ensemble  $T$  est dense dans  $\Sigma_n$  et est dénombrable. Ainsi,  $\Sigma_n$  est séparable.

*Preuve.* Soit  $O$  un ouvert non vide et  $x \in O$ , alors il existe  $r = 2^{-m+1} > 0$  tel que  $B(x, r) \subseteq O$ . Si on prend  $y \in \Sigma_n$  tel que si  $i \in \llbracket -m, m \rrbracket$  alors  $y_i = x_i$  et sinon  $y_i = 1$ , alors  $y \in T_m$  et  $y \in B(x, r)$ , donc  $O \cap T \neq \emptyset$ . Ainsi  $T$  est dense dans  $\Sigma_n$ .

Pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $T_m$  contient exactement  $n^{2m+1}$  éléments, ie.  $T_m$  est fini. Donc par union dénombrable,  $T$  est dénombrable.  $\square$

**Proposition 11.** Soit  $O$  un ouvert de  $\Sigma_n$ . Pour tout  $x \in O$ , on note  $r_x > 0$  tel que  $B(x, r_x) \subseteq O$ . Alors il existe  $\mathcal{R} \subseteq \Sigma_n$  dénombrable tel que

$$O = \bigsqcup_{x \in \mathcal{R}} B(x, r_x),$$

où  $\bigsqcup$  dénote l'union disjointe.

*Preuve.* Soit  $O$  un ouvert de  $\Sigma_n$ , alors  $O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x)$ . Cette union n'est pas disjointe et indic e sur un ensemble fini. On introduit alors la relation :

$$\forall x, y \in O, x \sim y \iff B(x, r_x) \cap B(y, r_y) \neq \emptyset.$$

Cette relation est clairement une relation d'équivalence. De plus on a pour  $x, y \in O$ ,

$$x \sim y \iff B(x, r_x) \subseteq B(y, r_y) \text{ ou } B(y, r_y) \subseteq B(x, r_x).$$

En effet, supposons que  $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) \neq \emptyset$ , alors soit  $z$  dans l'intersection, on note  $m_x = -\frac{r_x}{\log 2}$  et  $m_y = -\frac{r_y}{\log 2}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $m_y \leq m_x$ . On a alors

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket -m_x, m_x \rrbracket, x_i = z_i, \\ \forall i \in \llbracket -m_y, m_y \rrbracket, y_i = z_i. \end{cases}$$

Alors, pour tout  $i \in \llbracket -m_y, m_y \rrbracket, x_i = y_i$  et donc  $B(x, r_x) \subseteq B(y, r_y)$ . Ainsi, il existe un système de représentant  $\mathcal{R} \subseteq O$  pour la relation  $\sim$  tel que

$$O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{R}} B(x, r_x).$$

Il reste à montrer que  $\mathcal{R}$  est au plus dénombrable. Pour tout  $x \in \mathcal{R}$ , il existe  $h(x) \in T$  tel que  $h(x) \in B(x, r_x)$ . L'application  $h: \mathcal{R} \rightarrow T$  ainsi définie est donc injective et  $T$  est dénombrable, ainsi  $\mathcal{R}$  est dénombrable.  $\square$

**Définition 12.** L'application de décalage (*shift* en anglais)  $\sigma$  sur  $\Sigma_n$  est donnée par

$$(\sigma x)_i = x_{i+1}$$

pour tout  $x \in \Sigma_n$  et  $i \in \mathbf{Z}$ . Cette application est alors un homéomorphisme de  $\Sigma_n$ .

**Définition 13.** Soit  $x \in \Sigma_n$ . On définit les cylindres de centre  $x$  et de rayon  $m \in \mathbf{N}$  par

$$C(x, m) = \{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, x_i = y_i\}.$$

de cette manière on peut les relier aux boules pour la distance  $d_\beta$  aux cylindres :

$$C(x, 2m+1) = \sigma^{-m}(B_\beta(\sigma^m x, \beta^m)).$$

### 3 Unicité de la mesure de Gibbs

Dans cette section, on montre la partie concernant l'unicité du théorème suivant.

**Théoreme 14.** Soit  $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$ , alors il existe une unique mesure  $\mu_\phi = \mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_n)$  tel qu'il existe  $P(\phi) = P \in \mathbf{R}$ ,  $c_1, c_2 > 0$  vérifiant

$$\frac{\mu(C(x, m))}{\exp(-Pm + S_m \phi(x))} \in [c_1, c_2]$$

pour tout  $x \in \Sigma_n$  et  $m \in \mathbf{N}$ , où  $S_m \phi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (\phi(\sigma^k x))$

Dans les sections suivantes, on construira une mesure de Gibbs mélangeante notamment grâce au théorème de Ruelle. C'est l'ergodicité de cette mesure qui entraînera l'unicité de la mesure de Gibbs.

**Définition 15.** Soit  $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n)$ . On dit que  $\mu$  est ergodique (par rapport à  $\sigma$ ) si pour tout borélien  $E \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$  tels que  $\sigma^{-1}E = E$ , on a

$$\mu(E) = 0 \text{ ou } \mu(E^c) = 0,$$

**Définition 16.** Soit  $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n)$ . On dit que  $\mu$  est mélangeante (par rapport à  $\sigma$ ) si pour tout borélien  $E, F \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$ , on a

$$\mu(E \cap \sigma^{-n}F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(E)\mu(F).$$

*Remarque.* On a l'implication "mélangeante"  $\implies$  "ergodique".

**Lemme 17.** Soit  $f: \Sigma_n \rightarrow \mathbf{R}$  intégrable par rapport à une mesure  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_n)$  ergodique. Supposons que  $f \circ \sigma = f$   $\mu$ -presque partout. Alors  $f$  est constante  $\mu$ -presque partout.

*Preuve.* Pour montrer ce lemme on considère les ensembles  $E_c = f^{-1}(\{c\})$  pour tout  $c \in \mathbf{R}$ . Comme  $f \circ \sigma = f$   $\mu$ -p.p., on a  $\sigma^{-1}E_c = E_c$ , et donc par ergodicité de  $\mu$ ,

$$\mu(E_c) = 0 \text{ ou } \mu(E_c) = 1.$$

Il est donc clair qu'il existe au plus un  $c \in \mathbf{R}$  tel que  $f = c$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \Sigma_n$ .  $\square$

**Proposition 18.** *Supposons qu'il existe une mesure de Gibbs  $\mu$  ergodique pour  $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ . Alors cette mesure est l'unique mesure de Gibbs associé à  $\phi$ .*

*Preuve.* Soit  $\mu, \mu' \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  deux mesures de Gibbs avec  $\mu$  ergodique,  $c_1, c'_1, c_2, c'_2 > 0$  et  $P, P' \in \mathbf{R}$  des constantes telles que pour tout  $m \in \mathbf{N}$  et  $x \in \Sigma_n$  on ait

$$\begin{cases} c_1 & \leq \frac{\mu(C(x, m))}{\exp(-Pm + S_m\phi(x))} & \leq c_2 \\ c'_1 & \leq \frac{\mu'(C(x, m))}{\exp(-P'm + S_m\phi(x))} & \leq c'_2 \end{cases}$$

D'abord, montrons que  $P = P'$ . Soit  $m \in \mathbf{N}$  et  $T_m = \{x \in \Sigma_n \mid x_i = 1 \text{ si } i \notin \llbracket 0, m-1 \rrbracket\}$ , de telle sorte que  $\Sigma_n = \bigsqcup_{x \in T_m} C(x, m)$ , et  $T_m$  est fini. On a alors

$$c'_1 e^{-P'm} \sum_{x \in T_m} e^{S_m\phi(x)} \leq \sum_{x \in T_m} \mu'(C(x, m)) = 1 = \sum_{x \in T_m} \mu(C(x, m)) \leq c_2 e^{-Pm} \sum_{x \in T_m} e^{S_m\phi(x)},$$

et donc

$$P - \frac{1}{m} \log c'_2 \leq \frac{1}{m} \log \sum_{x \in T_m} e^{S_m\phi(x)} \leq P - \frac{1}{m} \log c'_1.$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve donc  $P' = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{x \in T_m} e^{S_m\phi(x)}$ . Grâce au même raisonnement, on en conclut que  $P = P'$  car ils sont tout deux égaux à la même limite.

Grâce aux estimations sur  $\mu$  et  $\mu'$  sur les cylindres, on a alors pour tout  $x \in \Sigma_n$  et  $m \in \mathbf{N}$ ,

$$\mu'(C(x, m)) \leq \frac{c'_2}{c_1} \mu(C(x, m)).$$

Comme  $\mu$  et  $\mu'$  sont invariantes par  $\sigma$ , on peut étendre le résultat sur les ensembles de la forme  $\{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in \llbracket -m, m \rrbracket, x_i = y_i\}$  pour tout  $x \in \Sigma_n$  et  $m \in \mathbf{N}$ , c'est-à-dire sur une base de la topologie de  $\Sigma_n$ . De plus, comme tout ouvert de  $\Sigma_n$  est une union disjointe dénombrable de ces éléments d'après la proposition 11, on peut alors étendre cette inégalité aux ouverts de  $\Sigma_n$ . Par régularité extérieure par rapport aux ouverts, on a pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$ ,

$$\mu'(B) = \inf \{ \mu'(O) \mid O \text{ ouvert}, B \subseteq O \}.$$

De là, on a pour tout ouvert  $B \subseteq O$ ,

$$\mu'(B) \leq \mu'(O) \leq \frac{c'_2}{c_1} \mu(O),$$

et donc  $\mu'(B) \leq \frac{c'_2}{c_1} \inf \{ \mu(O) \mid O \text{ ouvert}, B \subseteq O \} = \frac{c'_2}{c_1} \mu(B)$ . Donc pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$  on a  $\mu'(B) \leq \frac{c'_2}{c_1} \mu(B)$ , ainsi  $\mu'$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ . D'après le théorème de Radon-Nikodym,  $\mu'$  admet une densité  $f$  par rapport à  $\mu$ . En appliquant  $\sigma$ , on obtient

$$\mu' = \sigma_* \mu' = (f \circ \sigma^{-1}) \cdot \sigma_* \mu = (f \circ \sigma^{-1}) \cdot \mu.$$

Par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym,  $f = f \circ \sigma^{-1}$   $\mu$ -presque partout. Or comme  $\mu$  est ergodique par hypothèse, alors il existe une constante  $c \in \mathbf{R}$  tel que  $f = c$   $\mu$ -presque partout. Finalement,

$$1 = \mu'(\Sigma_n) = \int_{\Sigma_n} c d\mu = c.$$

Donc  $\mu = \mu'$ , ce qui prouve l'unicité.  $\square$

## 4 Réduction de $\Sigma_n$ à $\Sigma_n^+$

Pour prouver l'existence de telles mesures, on commence par montrer que peu importe la fonction de potentiel  $\phi$  dans  $\mathcal{H}(\Sigma_n)$ , on peut commencer par trouver une fonction de potentiel  $\psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$  ne dépendant que des coordonnées positives ayant la même mesure de Gibbs que  $\phi$ .

**Définition 19.** Soit  $\phi, \psi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ . On dit que  $\phi$  et  $\psi$  sont équivalentes et on note  $\phi \sim \psi$  dès lors qu'il existe  $u \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$  vérifiant :

$$\phi = \psi - u + u \circ \sigma.$$

Le prochain lemme justifie l'introduction de cette relation :

**Lemme 20.** Soit  $\phi \sim \psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$ . Dans ce cas,  $\mu_\phi = \mu_\psi$  et  $P(\phi) = P(\psi)$ .

*Preuve.* Soit  $u \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$  tel que  $\phi - \psi = u \circ \sigma - u$ . Alors

$$\begin{aligned} |S_m \phi(x) - S_m \psi(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{m-1} (\phi - \psi)(\sigma^k x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} (u(\sigma^{k+1} x) - u(\sigma^k x)) \right| \\ &= |u(\sigma^m x) - u(x)| \leq 2\|u\| \end{aligned}$$

Ainsi pour  $m \in \mathbf{N}$  et  $x \in \Sigma_n$ , on a

$$c_1 e^{-2\|u\|} \leq \frac{\mu_\phi(C(x, m))}{e^{-P(\phi)m + S_m \phi(x) + 2\|u\|}} \leq \frac{\mu_\phi(C(x, m))}{e^{-P(\phi)m + S_m \psi(x)}} \leq \frac{\mu_\phi(C(x, m))}{e^{-P(\phi)m + S_m \phi(x) - 2\|u\|}} \leq c_2 e^{2\|u\|}$$

Donc  $\mu_\phi$  et  $P(\phi)$  conviennent aussi pour  $\psi$ .  $\square$

*Remarque.* Soit  $\phi \sim \psi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ . Si  $\sum_k u \circ \sigma^k$  converge, alors

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi - \psi) \circ \sigma^k$$

Cette remarque permet de mieux comprendre la forme de la fonction  $u$  dans un cadre favorable, et de donner l'intuition de ce qu'elle pourrait être pour donner une fonction équivalente à  $\phi$  dépendant uniquement des coordonnées positives.

*Preuve de la remarque précédente.* La convergence de  $\sum_{k \geq 0} (u - u \circ \sigma) \circ \sigma^k = \sum_k (\phi - \psi) \circ \sigma^k$  est assuré par celle de  $\sum_k u \circ \sigma^k$ . Ainsi par télescopage,  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (u - u \circ \sigma)(\sigma^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi - \psi)(\sigma^k x)$ .  $\square$

Avant le prochain lemme on introduit la fonction  $r: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$  définie par

$$\forall i \in \mathbf{Z}, \forall x \in \Sigma_n, (r(x))_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \geq 0, \\ 1 & \text{si } i < 0. \end{cases} = 111 \dots x_{| \geq 0}$$

De sorte que si  $x, y \in \Sigma_n$  ont les mêmes coordonnées positives (ie.  $\forall i \geq 0, x_i = y_i$ ), alors  $r(x) = r(y)$ .

De plus, lorsqu'on compose  $r$  avec  $\sigma$ , on garde l'indépendance vis-à-vis des coordonnées négatives : si  $x = \dots x_{-2}x_{-1}\mathbf{x_0}x_1x_2x_3 \dots \in \Sigma_n$ , alors on a :

$$\begin{aligned} x &= \dots x_{-2}x_{-1}\mathbf{x_0}x_1x_2 \dots \\ \sigma x &= \dots x_{-1}x_0\mathbf{x_1}x_2x_3 \dots \\ r(\sigma x) &= \dots 111\mathbf{x_1}x_2x_3 \dots \\ r(x) &= \dots 111\mathbf{x_0}x_1x_2 \dots \\ \sigma r(x) &= \dots 11x_0\mathbf{x_1}x_2x_3 \dots \end{aligned}$$

Donc  $\sigma \circ r$  et  $r \circ \sigma$  diffèrent seulement à la coordonnées -1 et ne dépendent que des coordonnées positives de  $x$ .

**Lemme 21.** Soit  $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$ , et

$$\psi := \phi \circ r + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \phi \circ \sigma^k \right) \circ (\sigma \circ r - r \circ \sigma).$$

Alors,

1.  $\psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$  et ne dépend que des coordonnées positives,
2. Si on note  $u = \sum_{k \geq 0} \phi \circ \sigma^k - \phi \circ (\sigma^k r)$ , alors  $u \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ ,
3. De plus,  $\phi \stackrel{u}{\sim} \psi$ .

*Preuve.* Soit  $b \in \mathbf{R}$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  tels que  $\text{var}_k \phi \leq b\alpha^k$ . Pour  $k \geq 0$ ,  $\sigma^k x$  et  $\sigma^k r(x)$  coïncident de  $-k$  à  $+\infty$  donc  $|\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k r(x))| \leq b\alpha^k$  et ainsi comme  $|\alpha| < 1$ , la série converge normalement pour tout  $x \in \Sigma_n$ . Donc  $u$  est bien définie et est continue.

Ensuite vérifions que  $\psi = \phi - u + u \circ \sigma$ . Pour  $N \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} & \phi(x) - \sum_{k=0}^N \left( \phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k r(x)) \right) + \sum_{k=0}^N \left( \phi(\sigma^{k+1} x) - \phi(\sigma^k r(\sigma x)) \right) \\ &= \phi(r(x)) - \sum_{k=0}^{N-1} \left( \phi(\sigma^{k+1} x) - \phi(\sigma^{k+1} r(x)) \right) + \sum_{k=0}^N \left( \phi(\sigma^{k+1} x) - \phi(\sigma^k r(\sigma x)) \right) \\ &= \phi(r(x)) + \underbrace{\phi(\sigma^{N+1} x) - \phi(\sigma^N r(\sigma x))}_{\leq b\alpha^N} + \sum_{k=0}^{N-1} \left( \phi(\sigma^{k+1} r(x)) - \phi(\sigma^k r(\sigma x)) \right) \\ &\longrightarrow \psi(x) \\ &\longrightarrow \phi(x) - u(x) + u(\sigma x) \end{aligned}$$

lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Ainsi  $\psi = \phi - u + u \circ \sigma$  ie.  $\phi \stackrel{u}{\sim} \psi$ .

Soit  $x \in \Sigma_n$  et  $y \in C(x, m)$ . Soit  $k \in \mathbf{N}$ , distinguons plusieurs cas :



— Comme  $\sigma^k x$  et  $\sigma^k r(x)$  coïncident jusqu'à la  $k$ -ième coordonnée,

$$\left| \phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k r(x)) - (\phi(\sigma^k y) - \phi(\sigma^k r(y))) \right| \leq 2b\alpha^k$$

— Si  $k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ , on peut faire mieux :

$$\begin{aligned} & \left| \phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k y) + \phi(\sigma^k r(x)) - \phi(\sigma^k r(y)) \right| \\ & \leq \underbrace{\left| \phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k y) \right|}_{\leq \text{var}_{m-k} \phi \leq b\alpha^{m-k}} + \underbrace{\left| \phi(\sigma^k r(x)) - \phi(\sigma^k r(y)) \right|}_{\leq b\alpha^{m-k}} \\ & \leq 2b\alpha^{m-k} \end{aligned}$$

car  $\sigma^k x$  et  $\sigma^k y$  coïncident sur  $[-m-k, m-k]$

Donc en sommant chacun des termes,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| & \leq 2b \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \alpha^{m-k} + \sum_{k > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \alpha^k \right) \leq 4b \sum_{k > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \alpha^k = \frac{4b}{1-\alpha} \alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \\ & \leq \frac{4b\alpha}{1-\alpha} (\sqrt{\alpha})^m \end{aligned}$$

Ainsi  $u \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$  et donc  $\psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$  également.  $\square$

*Remarque.* On remarque que la construction de  $\psi$  dépend entièrement de la fonction  $r$ , ce qui signifie qu'il existe d'autres fonctions  $\psi_r \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$  ne dépendant que des coordonnées positives et équivalentes à  $\phi$ .

## 5 Théorème de Perron-Frobenius de Ruelle

**Définition 22.** Soit  $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+) = \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \cap \mathcal{H}(\Sigma_n)$ . On appelle opérateur de transfert ou opérateur de Ruelle l'application  $\mathcal{L}_\phi: \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall x \in \Sigma_n, \mathcal{L}_\phi f(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} f(y).$$

*Remarque.* A noter que le passage aux fonctions définies sur  $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  rend  $\sigma$  non injective, et donc  $\mathcal{L}$  a toujours  $n$  termes dans la somme qui le définit. C'est grâce à cette restriction que l'opérateur de transfert  $\mathcal{L}$  devient intéressant.

Pour la suite on fixe  $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$  et des constantes  $b > 0, \alpha \in ]0, 1[$  vérifiant  $\text{var}_k \phi \leq b\alpha^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 23** (Théorème de Perron-Frobenius de Ruelle). *Soit  $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$  et  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi$ . Alors il existe  $\lambda > 0, \nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  et  $h \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), h > 0$  tels que :*

1.  $\nu$  vérifie  $\mathcal{L}^* \nu = \lambda \nu$ ,
2.  $h$  vérifie  $\mathcal{L} h = \lambda h$  et  $\nu(h) = 1$ ,

3. et pour toute fonction  $g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , on a

$$\left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m g - \nu(g)h \right\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin de quelques lemmes.

**Proposition 24.** *Il existe  $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  tel que  $\mathcal{L}^* \nu = \lambda \nu$ .*

*Preuve.* Comme  $\mathcal{L}1(x) = \sum_{\sigma y=x} e^{\phi(y)} > 0$  pour tout  $x \in \Sigma_n$ , on a nécessairement  $\mathcal{L}^* \mu(1) > 0$  pour tout  $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ . On peut alors poser  $G(\mu) = \frac{1}{\mathcal{L}^* \mu(1)} \mathcal{L}^* \mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ , ce qui donne une application  $G: \mathcal{M}(\Sigma_n^+) \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ , (on peut se permettre  $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)^* = \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  grâce au théorème de Riesz). Ainsi définie,  $G$  est continue de  $\mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  dans lui-même. Or  $\mathcal{M}(\Sigma_n^+)$  est un compact convexe. Par le théorème de Schauder-Tychonoff, on en déduit que  $G$  admet un point fixe  $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ . On pose alors  $\lambda = \mathcal{L}^* \nu(1)$  et on a la relation voulue :  $\mathcal{L} \nu = \lambda \nu$ .  $\square$

Pour la suite on notera pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , les constantes

$$B_m = \exp \left( \sum_{k \geq m+1} 2b\alpha^k \right) \quad \text{et} \quad K = \lambda B_0 e^{\|\phi\|}.$$

On cherche à construire  $h$  comme un point fixe vérifiant (2), pour ce faire on considère l'ensemble  $\Lambda \subseteq \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), f \in \Lambda \iff \begin{cases} f \geq 0, \\ \nu(f) = 1, \\ \forall m \in \mathbf{N}, \forall x \in \Sigma_n, x' \in C(x, m), f(x) \leq B_m f(x'). \end{cases}$$

On remarque que  $1 \in \Lambda$ , ce qui assure que  $\Lambda \neq \emptyset$ .

**Lemme 25.** *L'ensemble  $\Lambda$  est compact. De plus si  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , alors  $\inf \frac{1}{\lambda} \mathcal{L} f \geq K^{-1}$ .*

*Preuve.* Pour ce faire on va utiliser le théorème d'Ascoli. Dans un premier temps, on va montrer que  $\Lambda(x) \subseteq [0, K]$ . Soit  $f \in \Lambda$  et  $x \in \Sigma_n^+$ . Remarquons que pour  $z \in \Sigma_n^+$  et  $x_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  arbitraire, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \mathcal{L} f(x) &= \sum_{\sigma y=x} e^{\phi(y)} f(y) \geq \lambda^{-1} e^{-\|\phi\|} f(x_0 x) \\ &\geq \lambda^{-1} e^{-\|\phi\|} B_0^{-1} f(z) = \frac{1}{K} f(z). \end{aligned}$$

Donc comme  $1 = \nu(f) = \nu(\frac{1}{\lambda} \mathcal{L} f) \geq \frac{1}{K} f(z)$ , on en déduit que  $\|f\| \leq K$ . De plus, comme  $\nu(f) = 1$ , il existe  $z \in \Sigma_n^+$  tel que  $f(z) \geq 1$ . En appliquant l'inégalité précédente à un tel  $z$ , on obtient  $\inf \frac{1}{\lambda} \mathcal{L} f \geq \frac{1}{K}$

Soit  $f \in \Lambda$  et  $x, x' \in \Sigma_n^+$  tels que  $x' \in C(x, m)$  pour un certain  $m \in \mathbf{N}$ , alors  $f(x) \leq B_m f(x')$  et  $f(x') \leq B_m f(x)$ . Donc

$$|f(x) - f(x')| \leq (B_m - 1) \|f\| \leq (B_m - 1) K \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi comme la majoration est indépendante de  $f$ ,  $\Lambda$  est équicontinue.  $\square$

**Proposition 26.** *Il existe  $h \in \Lambda$  tel que  $h > 0$  et vérifie (2) (ie.  $\nu(h) = 1$  et  $\mathcal{L}h = \lambda h$ ).*

*Preuve.* On pose  $F: \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), F(f) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f.$$

On vérifie que  $\Lambda$  est stable par  $F$ . Soit  $f \in \Lambda$ , il est clair que  $\frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f$  est positif car  $f$  l'est. Aussi,  $\nu(\frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}^* \nu(f) = \nu(f) = 1$ . Enfin, pour  $x, x' \in \Sigma_n^+$  tels que  $x' \in C(x, m)$  pour un certain  $m \in \mathbf{N}$ , on a pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$e^{\phi(jx)} f(jx) \leq e^{\phi(jx') + b\alpha^{m+1}} B_{m+1} f(jx') \leq B_m e^{\phi(jx')} f(jx').$$

En sommant tous ces termes, on obtient l'inégalité voulue :  $\mathcal{L}f(x) \leq B_m \mathcal{L}f(x')$ . Par ailleurs,  $F$  est continue car  $ne^{\|\phi\|}$ -lipschitzienne : pour tout  $f, g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  et  $x \in \Sigma_n^+$ , on a

$$|\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}g(x)| \leq \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} \|f - g\| \leq ne^{\|\phi\|} \|f - g\|,$$

et donc  $\|\mathcal{L}f - \mathcal{L}g\| \leq ne^{\|\phi\|} \|f - g\|$ .

En appliquant le théorème de Schauder-Tychonoff à  $F$  sur  $\Lambda$ , on obtient un point fixe  $h \in \Lambda$  qui vérifie alors  $\nu(h) = 1$  et  $\mathcal{L}h = \lambda h$ . De plus, par le lemme précédent,  $0 < K^{-1} \leq \inf \lambda^{-1} \mathcal{L}h = \inf h$ , d'où  $h > 0$ .  $\square$

**Lemme 27.** *Il existe  $\eta \in ]0, 1[$  tel que pour toute fonction  $f \in \Lambda$ , il existe  $f' \in \Lambda$  vérifiant*

$$\frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f = \eta h + (1 - \eta) f'.$$

*De plus,  $\eta \leq \min(\frac{u_1}{u_2} \frac{1-\alpha}{4\|h\|K}, \frac{1}{K\|h\|})$ .*

*Preuve.* Soit  $\eta \in ]0, 1[$  comme ci-dessus. Soit  $f \in \Lambda$  et on pose la fonction  $g = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f - \eta h$ . Alors si  $\eta \leq \min(\frac{u_1}{u_2} \frac{1-\alpha}{4\|h\|K}, \frac{1}{K\|h\|})$ , on a  $\frac{1}{1-\eta} g \in \Lambda$ . En effet, l'intégrale de  $g$  vaut  $\nu(g) = \nu(\lambda^{-1} \mathcal{L}f) - \eta \nu(h) = 1 - \eta$ , car  $f$  et  $h$  sont dans  $\Lambda$ .

Aussi  $g \geq 0$  dès lors que  $\eta \|h\| \leq \frac{1}{K}$  car

$$g = \lambda^{-1} \mathcal{L}f - \eta h \geq \inf \lambda^{-1} \mathcal{L}f - \eta \|h\| \geq 0,$$

d'après le lemme 25.

Finalement, pour que  $\frac{1}{1-\eta} g \in \Lambda$  on doit avoir  $g(x) \leq B_m g(x')$  pour  $x \in \Sigma_n^+$  et  $x' \in C(x, m)$  pour  $m \geq 0$ , ce qui équivaut à :

$$\eta(B_m h(x') - h(x)) \leq B_m \lambda^{-1} \mathcal{L}f(x') - \lambda^{-1} \mathcal{L}f(x).$$

Or,  $\mathcal{L}f(x) \leq B_{m+1} e^{b\alpha^{m+1}} \mathcal{L}f(x')$  (comme vu dans la preuve du lemme 25). Une condition suffisante est

$$\eta(B_m - B_m^{-1}) \|h\| \leq (B_m - B_{m+1} e^{b\alpha^{m+1}}) K^{-1},$$

car,

$$\begin{cases} \eta(B_m h(x') - h(x)) \leq \eta(B_m h(x') - B_m^{-1} h(x')) \leq \eta(B_m - B_m^{-1}) \|h\|, \\ (B_m - B_{m+1} e^{b\alpha^{m+1}}) K^{-1} \leq (B_m - B_{m+1} e^{b\alpha^{m+1}}) \lambda^{-1} \mathcal{L}f(x') \leq \lambda^{-1} (B_m \mathcal{L}f(x') - \mathcal{L}f(x)). \end{cases}$$

On rappelle que pour tout compact  $K \subseteq \mathbf{R}^2$  et tout  $x, y \in K$ , on a  $u_1(x-y) \leq e^x - e^y \leq u_2(x-y)$ , ce qu'on applique ici avec le compact  $K = [-L, L]^2$  de sorte que  $\pm \log B_m, \log B_m e^{b\alpha^m}$  soient dans  $[-L, L]$ .

Ainsi il suffit de vérifier

$$\eta u_2 \|h\| (\log B_m - \log B_m^{-1}) \leq K^{-1} u_1 (\log B_m - \log B_{m+1} - b\alpha^{m+1}),$$

qui est équivalent à

$$\eta \|h\| u_2 \left( \frac{4b\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \right) \leq K^{-1} u_1 b\alpha^{m+1},$$

ou encore

$$\eta \leq \frac{u_1}{u_2} \frac{1-\alpha}{4\|h\|K},$$

afin d'avoir  $\frac{1}{\eta-1}g \in \Lambda$ . □

Le lemme suivant est le cas particulier du théorème 23 pour les fonctions dans  $\Lambda$ , pour lesquelles en plus de la limite on a une convergence exponentielle.

**Lemme 28.** *Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $f \in \Lambda$ , on a  $\|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n f - h\| \leq (\|h\| + K)(1-\eta)^n = A\beta^n$  avec  $0 < \beta < 1$  et  $A > 0$ .*

*Preuve.* Remarquons qu'en itérant le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\mathcal{L}f &= \eta h + (1-\eta)f'_1 = (1-(1-\eta)^1)h + (1-\eta)f'_1, \\ \lambda^{-2}\mathcal{L}^2 f &= \lambda^{-1}\mathcal{L}((1-(1-\eta))h + (1-\eta)f'_1) = (1-(1-\eta))h + \lambda^{-1}(1-\eta)\mathcal{L}f'_1 \\ &= (1-(1-\eta) + \eta(1-\eta))h + (1-\eta)^2 f'_2 \\ &= (1-(1-\eta)^2)h + (1-\eta)^2 f'_2, \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence et grâce au lemme précédent, on a pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $f \in \Lambda$ ,

$$\frac{1}{\lambda^n}\mathcal{L}^n f = (1-(1-\eta)^n)h + (1-\eta)^n f_n,$$

où  $f_n \in \Lambda$ . Comme  $\|f_n\| \leq K$ , on obtient

$$\left\| \frac{1}{\lambda^n}\mathcal{L}^n f - h \right\| = (1-\eta)^n \|h + f_n\| \leq (1-\eta)^n (K + \|h\|).$$

□

Avant d'étendre le résultat à toutes les fonctions de  $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , on l'étend d'abord à un sous-ensemble dense constitué des fonctions "en escaliers". On pose alors

$$\mathcal{C}_r = \{f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \mid \text{var}_r(f) = 0\} \text{ et } \mathcal{C} = \bigcup_{r \geq 0} \mathcal{C}_r.$$

On établira la densité de  $\mathcal{C}$  dans un prochain lemme.

**Lemme 29.** *Soit  $F \in \Lambda$  et  $f \in \mathcal{C}_r$  tels que  $fF \neq 0$  et  $f \geq 0$ . Alors,  $\frac{1}{\nu(fF)\lambda}\mathcal{L}^r(fF) \in \Lambda$ .*

*Preuve.* La positivité de  $g = \lambda^{-r} \mathcal{L}^r(fF)$  découle de la positivité de  $f$  et de  $F$ . Ensuite, soit  $x, x' \in \Sigma_n^+$  et  $m \in \mathbf{N}$  tels que  $x' \in C(x, m)$ . Remarquons d'abord que, grâce à une récurrence, on a

$$\mathcal{L}^r(fF)(x) = \sum_{j_1, \dots, j_r \in \llbracket 1, n \rrbracket} \exp \left( \sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x)) \right) f(j_1 \dots j_r x) F(j_1 \dots j_r x).$$

Soit  $j_1, \dots, j_r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors comme  $f \in \mathcal{C}_r$  on a  $f(j_1 \dots j_r x) = f(j_1 \dots j_r x')$ .

Aussi,  $F(j_1 \dots j_r x) \leq B_{m+r} F(j_1 \dots j_r x')$  car les deux suites coïncident sur les  $m+r$  premières coordonnées. Enfin,

$$\begin{aligned} B_{m+r} \exp \left( \sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x)) \right) &\leq B_{m+r} \exp \left( \sum_{k=0}^{r-1} \left( \text{var}_{m+r-k}(\phi) + \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x')) \right) \right) \\ &\leq \left( B_{m+r} \exp \left( \sum_{k=m+1}^{m+r} b\alpha^k \right) \right) \exp \left( \sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x')) \right) \\ &\leq B_m \exp \left( \sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x')) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, chacun des termes de  $\mathcal{L}^r(fF)(x)$  est majoré par  $B_m$  fois le terme correspondant dans  $\mathcal{L}^r(fF)(x')$ , d'où  $\mathcal{L}^r(fF)(x) \leq B_m \mathcal{L}^r(fF)(x')$ .

Finalement, il reste à vérifier que  $\nu(fF) > 0$ . Pour ce faire, si  $x, z \in \Sigma_n^+$  alors,

$$\frac{1}{\lambda} \mathcal{L}(\mathcal{L}^r(fF))(x) = \lambda^{-1} \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} \mathcal{L}^r(fF)(y) \geq \lambda^{-1} e^{-\|\phi\|} B_0^{-1} \mathcal{L}^r(fF)(z) = K^{-1} \mathcal{L}^r(fF)(z).$$

Or comme  $fF \neq 0$ , il existe  $z \in \Sigma_n^+$  tel que  $(fF)(z) > 0$ , donc  $\mathcal{L}^r(fF)(\sigma^r z) > 0$ . Ainsi,

$$\nu(fF) = \frac{1}{\lambda^r} \nu(\lambda^{-1} \mathcal{L}(\mathcal{L}^r(fF))) \geq \frac{1}{K\lambda^r} \mathcal{L}^r(fF)(\sigma^r z) > 0.$$

Et enfin, on a bien  $\nu(\nu(fF)^{-1} \lambda^{-r} \mathcal{L}^r(fF)) = 1$ , ce qui conclut ce lemme.  $\square$

**Lemme 30.** Soit  $f \in \mathcal{C}_r$ ,  $F \in \Lambda$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Alors,

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+r}} \mathcal{L}^{n+r}(fF) - \nu(fF)h \right\| \leq A\nu(|fF|)\beta^n.$$

*Remarque.* La fonction  $F \in \Lambda$  n'a aucune utilité dans la preuve du théorème 23 (pour le montrer on prendra  $F = 1$ ), elle sert plus tard pour montrer que  $h \cdot \nu$  est la mesure de Gibbs du théorème 14.

*Preuve.* Décomposons  $f$  en sa partie positive  $f^+$  et sa partie négative  $f^-$  toutes deux positives et vérifiant  $f = f^+ - f^-$ . Si  $f^\pm F \neq 0$ , alors grâce aux lemmes ?? et ??, on a

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+r}} \mathcal{L}^{n+r}(f^\pm F) - \nu(f^\pm F)h \right\| = \nu(f^\pm F) \left\| \frac{1}{\lambda^{n+r} \nu(f^\pm F)} \mathcal{L}^{n+r}(f^\pm F) - h \right\| \leq A\nu(f^\pm F)\beta^n.$$

Dans le cas où  $f^\pm F = 0$  l'inégalité est triviale. Ainsi,

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+r}} \mathcal{L}^{n+r}(fF) - \nu(fF)h \right\| \leq A(\nu(f^+ F) + \nu(f^- F))\beta^n = A\nu(|fF|)\beta^n.$$

$\square$

**Lemme 31.** *L'ensemble  $\mathcal{C} = \bigcup_{r \geq 0} \mathcal{C}_r$  vérifie la propriété suivante :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall \varepsilon > 0, \exists g_1, g_2 \in \mathcal{C}, \|g_1 - g_2\| \leq \varepsilon \text{ et } g_1 \leq f \leq g_2,$$

*et donc  $\mathcal{C}$  est dense dans  $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ .*

*Preuve.* Soit  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $r \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $x \in \Sigma_n^+$  et  $x' \in C(x, r)$  on ait  $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ , car  $f$  est continue sur le compact  $\Sigma_n^+$  donc uniformément continue par le théorème de Heine. On pose alors pour  $x \in \Sigma_n^+$ ,

$$\begin{cases} g_1(x) = \inf_{z \in \Sigma_n^+} f(x_1 \cdots x_r z), \\ g_2(x) = \sup_{z \in \Sigma_n^+} f(x_1 \cdots x_r z), \end{cases}$$

de sorte que  $g_1 \leq f \leq g_2$  et  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}$ . De plus, si on note  $z, z' \in \Sigma_n^+$  tel que  $g_1(x) = f(x_1 \cdots x_r z)$  et  $g_2(x) = f(x_1 \cdots x_r z')$ , alors

$$|g_1(x) - g_2(x)| \leq |f(x_1 \cdots x_r z) - f(x_1 \cdots x_r z')| \leq \varepsilon.$$

□

Enfin, on arrive au dernier lemme permettant d'établir le (3) du théorème 23, pour lequel il ne reste plus que la limite sans la convergence exponentielle.

**Proposition 32.** *Soit  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , alors*

$$\left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m f - \nu(f)h \right\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $r \in \mathbf{N}$  et  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_r$  comme dans le précédent lemme. On applique le lemme ?? avec  $F = 1$ , ce qui donne pour  $m$  assez grand,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m g_i - \nu(f)h \right\| &\leq \left\| \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_i - \nu(g_i)h \right\| + |\nu(g_i) - \nu(f)| \|h\| \\ &\leq \varepsilon(1 + \|h\|). \end{aligned}$$

De plus, on a  $\lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_1 \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m f \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_2$  et donc pour  $m$  assez grand,

$$-\varepsilon(1 + \|h\|) \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_1 - \nu(f)h \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m f - \nu(f)h \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_2 - \nu(f)h \leq \varepsilon(1 + \|h\|).$$

Finalement, on a bien  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\lambda^{-m} \mathcal{L}^m f - \nu(f)h\| = 0$ , pour tout  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ . □

*Remarque.* La densité de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , à savoir

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbf{N}, \exists f_r \in \mathcal{C}_r, \|f - f_r\| \leq \varepsilon,$$

ne suffit pas pour conclure. En effet, si on a une telle fonction  $f_r \in \mathcal{C}_r$  pour un certain  $r \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m f - \nu(f)h \right\| &\leq \frac{1}{\lambda^m} \|\mathcal{L}^m f - \mathcal{L}^m f_r\| + \left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m f_r - \nu(f_r)h \right\| + |\nu(f_r) - \nu(f)| \|h\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^m} \|\mathcal{L}^m f - \mathcal{L}^m f_r\| + A\nu(|f_r|)\beta^{m-r} + \varepsilon \|h\|. \end{aligned}$$

Or, on n'arrive pas à majorer le premier terme, notamment car on ne possède aucune estimation de  $\lambda$ .

## 6 Construction d'une mesure de Gibbs

Soit  $\lambda, \nu$  et  $h$  comme dans le théorème 3.1. On pose  $\mu = h \cdot \nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ .

**Lemme 33.** *La mesure de probabilité  $\mu = h \cdot \nu$  est invariante par  $\sigma$  :*

$$\sigma_*\mu = \mu.$$

*Preuve.* Soit  $f, g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , on remarque que  $(\mathcal{L}f)g = \mathcal{L}(f \cdot (g \circ \sigma))$ . En effet, pour  $x \in \Sigma_n$ , on a

$$\begin{aligned} ((\mathcal{L}f)g)(x) &= \sum_{y \in \sigma^{-1}x} e^{\phi(y)} f(y) g(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}x} e^{\phi(y)} f(y) g(\sigma y) \\ &= \mathcal{L}(f \cdot (g \circ \sigma))(x). \end{aligned}$$

Donc pour  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ ,

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \nu(h \cdot f) = \nu(\lambda^{-1}(\mathcal{L}h) \cdot f) = \lambda^{-1}\nu(\mathcal{L}(h \cdot (f \circ \sigma))) \\ &= \lambda^{-1}\mathcal{L}^*\nu(h \cdot (f \circ \sigma)) = \nu(h \cdot (f \circ \sigma)) = \mu(f \circ \sigma). \end{aligned}$$

□

A chaque fonction  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ , on associe une nouvelle fonction  $[f] \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  définie par :

$$\forall x \in \Sigma_n^+, [f](x) = \min \{ f(y) \mid y \in \Sigma_n, \forall i \geq 0, x_i = y_i \}.$$

De cette façon, on retire la dépendance de  $f$  par rapport à ses coordonnées négatives. Par ailleurs, si  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , alors  $[f] = f$ .

**Lemme 34.** *Pour tout  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ , la suite  $(\mu([f \circ \sigma^m]))_{m \geq 0}$  admet une limite, que l'on note  $G(f)$ . De plus  $G$  vérifie  $G(1) = 1$  et pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ ,  $f \geq 0$ , on a  $G(f) \geq 0$ .*

*Par ailleurs,*

$$G(f \circ \sigma) = G(f).$$

*Preuve.* Soit  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ , on va montrer que  $(\mu([f \circ \sigma^m]))$  est une suite de Cauchy. Soit  $m, k \in \mathbf{N}$ , alors pour tout  $x \in \Sigma_n^+$ , il existe  $y, y' \in \Sigma_n$  tel que

$$\begin{aligned} [f \circ \sigma^m](\sigma^k x) &= f(\sigma^m(\cdots y_{-2} y_{-1} \mathbf{x}_k x_{k+1} \cdots)) = f(\cdots y_{-1} x_k \cdots \mathbf{x}_{m+k} x_{m+k+1} \cdots), \\ [f \circ \sigma^{m+k}](x) &= f(\sigma^{m+k}(\cdots y'_{-2} y'_{-1} \mathbf{x}_0 x_1 \cdots)) = f(\cdots y'_{-1} x_0 \cdots \mathbf{x}_{m+k} x_{m+k+1} \cdots). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\| [f \circ \sigma^m] \circ \sigma^k - [f \circ \sigma^{m+k}] \right\| \leq \text{var}_k(f),$$

et donc,

$$\left| \mu([f \circ \sigma^m]) - \mu([f \circ \sigma^{m+k}]) \right| = \left| \mu \left( [f \circ \sigma^m] \circ \sigma^k - [f \circ \sigma^{m+k}] \right) \right| \leq \text{var}_k(f) \longrightarrow 0,$$

lorsque  $k \rightarrow \infty$ , car  $f$  est continue. On a alors prouvé que  $(\mu([f \circ \sigma^m]))_m$  est une suite de Cauchy, ce qui assure sa convergence vers un réel  $G(f)$ .

Comme  $1 \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$  et pour tout  $m \in \mathbf{N}$  on a  $1 \circ \sigma^m = 1$ , d'où

$$\mu([1 \circ \sigma^m]) = \mu(1) = 1.$$

Enfin, si  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$  est positive, alors  $[f] \geq 0$  et donc pour tout  $m \in \mathbf{N}$ ,  $[f \circ \sigma^m] \geq 0$ , d'où  $G(f) \geq 0$ .  $\square$

Grâce au lemme précédent, on a construit une forme linéaire  $G$  et par l'identification rendue possible par le théorème de Riesz, on peut considérer la mesure  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_n)$  associée à  $G$ .

**Théoreme 35.** *La mesure  $\tilde{\mu}$  est une mesure de Gibbs pour  $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$ .*

Pour prouver ce résultat, nous allons avoir besoin d'un lemme supplémentaire. Pour ce faire, on définit la constante  $a$  donnée par :

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \text{var}_k(\phi) < \infty.$$

**Lemme 36.** *Soit  $x, y \in \Sigma_n$  et  $m \in \mathbf{N}$  tels que  $y \in C(x, m)$ . Alors,*

$$|S_m \phi(x) - S_m \phi(y)| \leq a.$$

*Preuve.* Pour  $y \in \Sigma_n$ , on définit  $y' \in \Sigma_n$  par

$$y'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i < 0, \\ y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $k \geq 0$ , on a alors  $\phi(\sigma^k y) = \phi(\sigma^k y')$  car  $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |S_m \phi(x) - S_m \phi(y)| &= |S_m \phi(x) - S_m \phi(y')| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k y')| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \text{var}_{m-1-k}(\phi) \leq a. \end{aligned}$$

$\square$

*Preuve du théorème 35.* Soit  $E = C(x, m) = \{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, x_i = y_i\}$ , et on veut montrer que

$$c_1 e^{-Pm + S_m \phi(x)} \leq \tilde{\mu}(E) \leq c_2 e^{-Pm + S_m \phi(x)},$$

pour certaines constantes  $c_1, c_2 > 0$  et  $P \in \mathbf{R}$ .

Pour tout  $z \in \Sigma_n^+$ , il existe un unique  $y' = x_0 x_1 \cdots x_{m-1} z_0 z_1 \cdots \in \Sigma_n^+$  tel que  $\sigma^m y' = z$  et  $y'_i = x_i$  pour  $0 \leq i \leq m-1$ . Ainsi,

$$\mathcal{L}^m(h \mathbf{1}_E)(z) = \sum_{\sigma^m y = z} e^{S_m \phi(y)} h(y) \mathbf{1}_E(y) \leq e^{S_m \phi(y')} h(y') \leq e^{S_m \phi(x)} e^a \|h\|,$$

et donc, comme  $\mathbf{1}_E \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , on a  $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$ , d'où

$$\tilde{\mu}(E) = \nu(h \mathbf{1}_E) = \lambda^{-m} \nu(\mathcal{L}^m(h \mathbf{1}_E)) \leq \lambda^{-m} e^{S_m \phi(x)} \|h\| e^a.$$



On peut alors poser  $c_2 = e^a \|h\| > 0$ . Pour l'autre inégalité, remarquons que pour  $z \in \Sigma_n^+$ , il existe au moins un  $y' = x_0 x_1 \cdots 1 z_0 z_1 \cdots \in \Sigma_n^+$  tel que  $\sigma^{m+1} y' = z$  et  $x_i = y'_i$  pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{m+1}(h\mathbf{1}_E)(z) &= \sum_{\sigma^{m+1}y=z} e^{S_m\phi(y)+\phi(\sigma^m y)} h(y) \mathbf{1}_E(y) \\ &\geq e^{S_m\phi(y')-\|\phi\|} h(y') \\ &\geq (\inf h) e^{-\|\phi\|-a} e^{S_m\phi(x)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\mu}(E) = \nu(h\mathbf{1}_E) = \lambda^{-(m+1)} \nu(\mathcal{L}^{m+1}(h\mathbf{1}_E)) \geq \lambda^{-m} e^{S_m\phi(x)} \underbrace{(\lambda(\inf h) e^{-\|\phi\|-a})}_{c_2}.$$

On a les inégalités souhaitées avec  $P = \log \lambda$ , ce qui montre que  $\tilde{\mu}$  est bien une mesure de Gibbs.  $\square$

**Proposition 37.** *La mesure  $\tilde{\mu}$  est mélangeante par rapport à  $\sigma$  : pour tout boréliens  $E, F \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$  on a*

$$\tilde{\mu}(E \cap \sigma^{-m} F) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(E) \tilde{\mu}(F).$$

*Preuve.* Soit  $x \in \Sigma_n$ , et  $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ . On prouve par récurrence que

$$\mathcal{L}^m f(x) = \sum_{\sigma^m y=x} e^{S_m\phi(y)} f(y).$$

Ainsi, si  $g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ , on a

$$((\mathcal{L}^m f) \cdot g)(x) = \sum_{\sigma^m y=x} e^{S_m\phi(y)} f(y) g(\sigma^m y) = \mathcal{L}^m(f \cdot (g \circ \sigma^m)).$$

Pour prouver que  $\tilde{\mu}$  est mélangeante, il suffit de le montrer pour  $E, F$  dans la base de la topologie de  $\Sigma_n$ . Soit alors  $a, b \in \Sigma_n$  et  $E = \{y \in \Sigma_n \mid y_i = a_i, r \leq i \leq s\}$  et  $F = \{y \in \Sigma_n \mid y_i = b_i, r \leq i \leq s\}$ . Comme  $\tilde{\mu}$  est invariante par  $\sigma$ , on peut supposer  $r, u \geq 0$ , de telle sorte que  $\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(E \cap \sigma^{-m} F) &= \tilde{\mu}(\mathbf{1}_E \mathbf{1}_{\sigma^{-m} F}) = \tilde{\mu}(\mathbf{1}_E (\mathbf{1}_F \circ \sigma^m)) \\ &= \nu(h\mathbf{1}_E (\mathbf{1}_F \circ \sigma^m)) \\ &= \lambda^{-m} \mathcal{L}^{*m} \nu(h\mathbf{1}_E (\mathbf{1}_F \circ \sigma^m)) \\ &= \nu(\lambda^{-m} \mathcal{L}^m(h\mathbf{1}_E) \mathbf{1}_F). \end{aligned}$$

De là, on obtient grâce au lemme ?? et au fait que  $\mathbf{1}_E \in \mathcal{C}_s$

$$\begin{aligned} |\tilde{\mu}(E \cap \sigma^{-m} F) - \tilde{\mu}(E) \tilde{\mu}(F)| &= |\mu(E \cap \sigma^{-m} F) - \nu(h\mathbf{1}_E) \nu(h\mathbf{1}_F)| \\ &= |\nu[(\lambda^{-m} \mathcal{L}^m(h\mathbf{1}_E) - \nu(h\mathbf{1}_E) h) \mathbf{1}_F]| \\ &\leq \|\lambda^{-m} \mathcal{L}^m(h\mathbf{1}_E) - \nu(h\mathbf{1}_E) h\| \nu(F) \\ &\leq A \nu(h\mathbf{1}_E) \nu(F) \beta^{m-s} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

lorsque  $m \rightarrow \infty$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Finalement, on a construit une mesure de Gibbs mélangeante donc ergodique. En vertu de la proposition 18, cette mesure est l'unique mesure de Gibbs pour cette fonction de potentiel  $\phi$ .