Théorie des types : introduction et utilisation en Lean.

Dorian Guillet

19 mars 2025

Table des matières

1 Théorie des Types

1.1 Introduction

La théorie des types se veut être une alternative à la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF). Or les fondations de cette dernière s'appuient sur le système déductif de la logique du premier ordre, et la théorie des ensembles est formulée à l'intérieur de ce système, donc cette théorie est formée de deux couches : la logique du premier ordre, puis la théorie des ensembles, formée de ses axiomes. On a donc deux objets fondamentaux dans cette approche : les propositions (qui se basent sur la logique du premier ordre) et les ensembles de ZF.

Pour éviter cette construction en deux couches, la théorie des types possède son propre système déductif, par conséquent une fois les jugements et les règles du système déductif définies, il est prêt à être utilisé sans axiomes supplémentaires. Ainsi, cette théorie ne possède qu'un objet fondamental : les **types**.

Ayant uniquement des types, pour pouvoir formuler des théorèmes on a besoin de l'équivalent des propositions qui sont ici des types particulier, dont la construction suit des règles qui seront précisées après. Dans cette théorie, prouver un théorème est donc équivalent à construire un objet qui serait un élément du type correspondant au théorème (ici l'objet en question est une preuve).

On peut aussi voir les types d'un point de vue plus proche de la théorie des ensembles, en interprétant le fait qu'un élément a soit de type A comme l'affirmation $a \in A$. Cependant ici l'affirmation $a \in A$ est une proposition alors que dire "a est de type A" (que l'on notera dorénavant $a : A$) est un jugement. En effet, dans la théorie des types un élément possède toujours un type (uniquement) déterminé.

Le système déductif de cette théorie est composé de deux jugements principaux :

1. **Jugement de typage** $a : A$, qui affirme que a est de type A.
2. **Jugement d'égalité** $a \equiv b : A$, qui affirme que a et b sont égaux par définition dans le type A.

A noter que le symbole "$\equiv$" est différent de "$=$". En effet, si $a, b : A$, alors on a le type $a =_A b$ qui correspond à une égalité que l'on peut prouver, c'est l'égalité propositionnelle. Pour l'égalité "par définition" du système déductif, la prouver ou la supposer n'a pas réellement de sens étant donné qu'elle est vrai par définition (ou par construction).

Cette distinction entre proposition et jugement est fondamentalle. Un jugement est une affirmation dans le système déductif de la théorie, qui est donc considéré comme vrai et n'est pas à prouver, alors qu'un proposition est un type, pouvant être non vide et se situe donc dans la théorie elle-même.

1.2 Construction de types

Univers. Un univers est un type composé de type, ce n'est pas le type de tout les types, car cela ferait apparaître un paradoxe de la même nature que lorsque l'on considère l'ensemble $\{x; x \in x\}$ en théorie des ensembles.

Fonctions. Etant donné deux types $A, B : \mathcal{U}$, construit le type $A \to B$ qui correspond au type des fonctions de A dans B. Si $f : A \to B$ et $a : A$, alors on peut appliquer f à a ce qui permet d'obtenir un élément de type B, on le note $f(a)$ ou aussi $f\ a$: c'est la valeur de f en a.

Pour construire un élément f de type $A \to B$, appelé fonctions, on utilise les λ-abstraction et le formalisme du λ-calcul. On peut alors obtenir une fonction de la manière suivante :

$$f :\equiv \lambda(x : A).\Phi\ : A \to B,$$

où Φ est un expression de type B qui peut faire intervenir $x : A$. Cette fonction est ici définie comme la fonction que à x associe Φ, on peut alors appliquer f à $x : A$, et il serait alors naturel d'avoir la relation

$$f\ a \equiv (\lambda(x : A).\Phi)\ a \equiv \Phi[a/x],$$

où $\Phi[a/x]$ est Φ où toutes les occurences de x sont remplacées par a. Cette relation est en fait une règle du système déductif, souvent appelée règle β.

2 Formalisation du théorème de Bowen en Lean

3 Topologie des espaces ultramétriques

Pour montrer l'unicité dans le théorème de Bowen, on a besoin d'un résultat de topologie de certains espaces, appelés espaces ultramétriques, qui sont des espaces métriques où l'inégalité triangulaire habituelle est remplacée par une inégalité dite ultramétrique :

$$\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq \max\left(d(x, y), d(y, z)\right).$$

Cette inégalité donne de nombreux résultats topologiques très différents des espaces métriques, notamment sur les triangles et les boules.

Le théorème permettant de prouver l'unicité du théorème de Bowen est le suivant, et nous allons en donner une preuve dans cette section, puis une formalisation possible en Lean.

Théorème 3.1. *Soit (E, d) un espace ultramétrique et $\mathcal{O}$ un ouvert de E, alors il existe une partie $R \subseteq \mathcal{O}$ et une application $r : R \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ tels que*

$$\mathcal{O} = \bigsqcup_{x \in R} B(x, r(x)).$$

De plus, si E est séparable alors on peut imposer que R soit au plus dénombrable.

Dans la suite on fixe (E, d) un espace ultramétrique Commençons par quelques lemmes décrivant les relations entres les boules dans ces espaces.

Lemme 3.2. *Soit $x, y \in E$ et un réel $r > 0$, si $y \in B(x, r)$, alors $B(x, r) = B(y, r)$*

Démonstration. Supposons que $y \in B(x, r)$. Soit $z \in B(x, r)$, alors

$$d(y, z) \leq \max\left(d(y, x), d(x, z)\right) \leq \max\left(r, r\right) \leq r,$$

car $y, z \in B(x, r)$. Donc on a une inclusion : $B(x, r) \subseteq B(y, r)$.

Réciproquement comme $y \in B(x, r)$ on a $x \in B(y, r)$ par symétrie de la distance et donc avec le même raisonnement on a l'autre inclusion. Finalement, $B(x, r) = B(y, r)$. □

Lemme 3.3. *Soit $x, y \in E$ et deux réels $r, s > 0$, alors il y a trois possibilités :*

1. $B(x, r) \subseteq B(y, s)$,
2. $B(y, s) \subseteq B(x, r)$,
3. $B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$.

Démonstration. Supposons que $B(x, r) \cap B(y, s) \neq \emptyset$, alors soit $z \in B(x, r) \cap B(y, s)$. On peut alors écrire $B(x, r) = B(z, r)$ et $B(y, s) = B(z, s)$ grâce au lemme 3.2, et ainsi on a bien le résultat voulu en fonction de l'ordre de r et s. □

Lemme 3.4. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de point de E et $(r_i)_{i \in I}$ une famille de réels strictement positifs. De plus, supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $x \in B(x_i, r_i)$ pour tout $i \in I$ et que $R = \sup_{i \in I} r_i < \infty$. Alors*

$$\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) = B(x, R).$$

Démonstration. Commençons par réécrire chaque boule en changeant son centre grâce au lemme 3.2 et notons $R = \sup_{i \in I} r_i < \infty$, on a alors l'inclusion

$$\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) = \bigcup_{i \in I} B(z, r_i) \subseteq B(z, R).$$

Réciproquement si $y \in B(z, R)$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $d(y, z) \leq r_{i_0} \leq R$ et donc $y \in B(z, r_{i_0}) \subseteq \bigcup_{i \in I} B(z, r_i)$. Finalement, l'union de ces boules est encore une boule. □

On notera dans la suite $\mathcal{O} \subseteq E$ un ouvert et donc on a pour chaque $x \in \mathcal{O}$ un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subseteq \mathcal{O}$. On a alors

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x).$$

Remarque. On peut voir les $(r_x)_{x \in \mathcal{O}}$ comme une une application $r \colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$.

Definition 3.1. On note $B(\mathcal{O})$ l'ensemble des boules incluses dans $\mathcal{O}$, en particulier :

$$B(\mathcal{O}) := \{B(x, r) \mid x \in \mathcal{O} \wedge r > 0 \wedge B(x, r) \subseteq \mathcal{O}\} \subseteq \mathcal{P}(E).$$

Soit $\mathcal{U} \subseteq B(\mathcal{O})$, on définit une relation $\sim_{\mathcal{U}}$ (ou plus simplement $\sim$ s'il n'y a pas d'ambuiguité) sur $\mathcal{U}$ par :

$$\forall u, v \in \mathcal{U}, \quad u \sim_{\mathcal{U}} v \iff \exists w \in \mathcal{U}, u \cup v \subseteq w.$$

Proposition 3.5. *Pour tout $\mathcal{U} \subseteq B(\mathcal{O})$, la relation $\sim_{\mathcal{U}}$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Soit $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{U}$ trois boules.

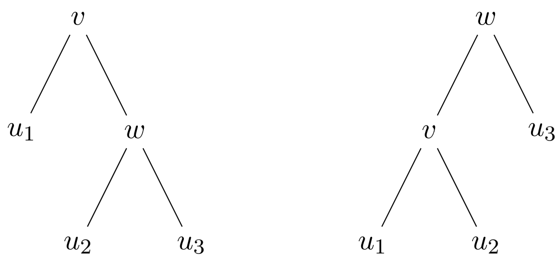
Pour la reflexivité, on considère $w = u_1 \in \mathcal{U}$ et on a bien $u_1 \sim u_1$.

Pour la symétrie, la définition de la relation est clairement symétrique.

Enfin pour la transitivité, on suppose que $u_1 \sim u_2$ et $u_2 \sim u_3$. On a alors $v, w \in \mathcal{U}$ tels que

$$u_1 \subseteq v, u_2 \subseteq v, u_2 \subseteq w \text{ et } u_3 \subseteq w.$$

Ainsi, $\emptyset \neq u_2 \subseteq v \cap w$, or v et w sont des boules d'un espace ultramétrique. On a alors deux cas :



— $v \subseteq w$ dans ce cas on a $u_1 \overset{v}{\sim} u_3$

— $w \subseteq v$ et alors on a $u_1 \overset{w}{\sim} u_3$

Donc $\sim_{\mathcal{U}}$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}$. $\square$

Soit $\mathcal{U} \subseteq B(\mathcal{O})$ et $u \in \mathcal{U}$. Dorénavant, on notera $\bar{u}$ la classe d'équivalence de u pour la relation $\sim$ sur $\mathcal{U}$.

Proposition 3.6. *Supposons que $\mathcal{O}$ est un ouvert borné de E. Soit $\mathcal{U} \subseteq B(\mathcal{O})$ et $B(x,r) \in \mathcal{U}$ avec $x \in \mathcal{O}$ et $r > 0$ alors il existe $R > 0$ tel que*

$$\bigcup_{v \in \bar{u}} v \subseteq B(x,R)$$