Existence et unicité de mesures de Gibbs pour des dynamiques hyperboliques.

Stage de L3 encadré par Christophe Dupont à l'IRMAR (Rennes).

Dorian Guillet, étudiant au Magistère de Grenoble.

Juin 2024.

Table des matières

I.

Introduction

L'objectif de ce rapport de stage est de présenter une construction de mesure de Gibbs sur des espaces de Bernoulli et la manière dont on peut encoder la dynamique d'une application hyperbolique dans un espace de Bernoulli Σ_n, avec le décalage σ.

Définition (Mesure de Gibbs)**.** Soit μ une mesure de probabilité σ-invariante sur Σ_n. On dit μ est une mesure de Gibbs pour un potentiel $\phi\colon \Sigma_n \longrightarrow \mathbf{R}$ s'il existe $P \in \mathbf{R}$ et $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \Sigma_n$ et $m \in \mathbf{N}$ on ait

$$c_1 \leq \frac{\mu\{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in [\![0, m-1]\!], x_i = y_i\}}{\exp\left(-Pm + \sum_{k=0}^{m-1} \phi(\sigma^k x)\right)} \leq c_2.$$

Dans une première partie on se concentre sur la construction d'une mesure de Gibbs ergodique μ sur l'espace métrique Σ_n, afin de montrer le théorème principal, dont la preuve initiale se trouve dans [Bow75].

Théorème ([Bow75])**.** *Soit ϕ une fonction de potentiel hölderienne. Alors il existe une unique mesure de Gibbs pour cette fonction ϕ.*

Pour ce faire, on se ramène au cas où la fonction de potentiel ϕ ne dépend plus des coordonnées négatives. Ensuite, on considère l'opérateur de transfert $\mathcal{L}$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall x \in \Sigma_n^+, \;\; \mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}x} f(y) e^{\phi(y)},$$

où Σ_n^+ est l'ensemble des suites à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et indéxées sur $\mathbf{N}$.

Le théorème suivant établit que cet opérateur admet une mesure propre et une fonction propre.

Théorème (Ruelle-Perron-Frobenius)**.** *Soit ϕ un potentiel et $\mathcal{L}$ l'opérateur de transfert. Alors il existe $\lambda > 0, \nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ et $h \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), h > 0$ tels que :*

1. *ν vérifie $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$,*
2. *h vérifie $\mathcal{L}h = \lambda h$ et $\nu(h) = 1$,*
3. *et pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, $\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{\lambda^m}\mathcal{L}^m g - \nu(g)h \right\| = 0$.*

Pour prouver ce théorème, on utilisera le théorème de Schauder-Tychonoff afin de construire la mesure propre μ et la fonction propre h comme des points fixes de certains opérateurs, pour cela nous devrons d'abord établir la compacité de Σ_n et d'un certain ensemble de fonctions notamment grâce au théorème d'Ascoli. Puis pour établir la limite nous aurons besoin de la densité des fonctions en escaliers dans $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ et des propriétés de l'opérateur de transfert.

Grâce à cette mesure propre ν et cette fonction propre h, on peut construire $\mu = h \cdot \nu$. Cette dernière mesure sur Σ_n^+ est alors σ-invariante, ce qui se montre grâce aux propriétés algébriques de l'opérateur de transfert et permettra de construire une forme linéaire G sur Σ_n qui s'identifiera grâce au théorème de Riesz en une mesure $\tilde{\mu}$ sur Σ_n, qui sera la mesure de Gibbs pour le potentiel höldérien ϕ. Une fois $\tilde{\mu}$ construite, on montrera qu'elle est ergodique (et même mélangeante), ce qui permettra d'établir l'unicité.

Dans la partie suivante, l'objectif est de montrer que si $f\colon \mathbf{T}^n \longrightarrow \mathbf{T}^n$ est hyperbolique (ou dans un cadre plus large, un difféomorphisme Axiome A sur une variété riemannienne, dont on donnera un exemple sur $\mathbf{C}^2$ grâce à [FS92 ; BS91]), on peut coder sa dynamique dans un espace de Bernoulli grâce aux théorèmes suivants, le premier assurant l'existence d'un recouvrement particulier dit partition de Markov et le second donnant le codage associé à un tel recouvrement.

Les preuves, davantage exigeantes, des ces théorèmes s'inspirent de [Bow75], puis de [BP03], [KH95], et se basent sur le lemme de pistage et sur l'existence de variétés stables et instables permettant de munir l'espace d'un produit local.

Théorème ([Bow75])**.** *Soit $f\colon \mathbf{T}^n \longrightarrow \mathbf{T}^n$ un automorphisme hyperbolique. Alors il existe une partition de Markov pour f de diamètre arbitrairement petit.*

La construction d'une telle partition passe d'abord par la construction d'un codage plus élémentaire à partir d'un recouvrement de $\mathbf{T}^n$ par des boules, qui vérifie certaines propriétés similaires à celle des partitions de Markov, mais dont les pièces s'intersectent sur des parties trop grandes, générant un défaut d'injectivité du codage. Pour y remédier, on modifie le recouvrement précédent en un dernier recouvrement donc les pièces ne se chevauchent plus, donnant ainsi une partition de Markov.

Théorème ([BP03])**.** *Soit $\mathcal{R} = (R_i)_{1\leq i\leq m}$ une partition de Markov et (Σ_A, σ) l'espace de Bernoulli associé à la matrice d'incidence A de la partition $\mathcal{R}$. Alors,*

1. *pour $\omega \in \Sigma_A$, l'intersection $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}} f^{-i}(R_{\omega_i})$ est un singleton et on note $\pi(\omega)$ cet unique élément,*
2. *l'application $\pi\colon \Sigma_A \longrightarrow \mathbf{T}^n$ est continue, surjective et $f\circ\pi = \pi\circ\sigma$,*
3. *si $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A)$ est ergodique de support Σ_A, alors*

$$\mu\left\{\omega \in \Sigma_A \mid \operatorname{Card}\pi^{-1}(\pi(\omega)) > 1\right\} = 0.$$

De cette manière, on peut considérer que π est injective quitte à retirer un ensemble de mesure nulle pour certaines mesures (en particulier la mesure de Gibbs). La dynamique de f sur le tore peut alors être codée par un sous-décalage de Σ_m, permettant ainsi une étude plus simple de cette dynamique, et notamment de munir ces systèmes de mesures de probabilités. En effet, si μ est la mesure de Gibbs sur Σ_A alors la mesure $\pi_*\mu$ vérifie des propriétés sur le tore semblable à celle vérifiée sur Σ_A.

Finalement, on montre un exemple de construction d'un tel codage sur le tore $\mathbf{T}^2$ à deux dimensions, pour l'automorphisme du tore associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pour laquelle on peut construire une partition de Markov composée de trois morceaux, et dont la méthode de construction reprend celle utilisée dans [Nij17].

II.

Topologie du décalage de Bernoulli

II.1 Définition de l'espace métrique Σ_n

Définition II.1.1. Soit $n \in \mathbf{N}$. L'ensemble des suites bi-infinies à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ est noté $\Sigma_n = \prod_{\mathbf{Z}} [\![1, n]\!]$. Chaque $[\![1, n]\!]$ est muni de la topologie discrète, et on munit alors Σ_n de la distance produit d donnée par

$$\forall x, y \in \Sigma_n, \quad d(x, y) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} 2^{-|i|} \mathbf{1}_{x_i \neq y_i} < +\infty.$$

On notera $B_d(x, r)$ la boule centrée en $x \in \Sigma_n$ et de rayon $r \geq 0$ pour d.

Proposition II.1.1. *L'espace métrique (Σ_n, d) est compact.*

Preuve. Chacun des $[\![1, n]\!]$ est compact pour sa topologie. En tant que produit Σ_n est donc également compact, grâce au théorème de Tychonoff. $\square$

Proposition II.1.2. *Pour $x, y \in \Sigma_n$ distincts, notons $N = \min\{i \in \mathbf{N} \mid x_i \neq y_i$ ou $x_{-i} \neq y_{-i}\}$. Alors $d_\beta(x, y) = \beta^N$ et $d_\beta(x, x) = 0$ définit une distance sur Σ_n et est équivalente à la distance d, et ce pour tout $\beta \in]0, 1[$.*

Preuve. Soit $\beta \in]0, 1[$. Alors d_β est distance car d_β est clairement symétrique, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ pour tout $x, y \in \Sigma_n$ et d_β vérifie l'inégalité triangulaire.

De plus, d_β est équivalente à d. En effet pour $r > 0$, montrons qu'il existe $r_1, r_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \Sigma_n$ on ait

$$B_\beta(x, r_1) \subseteq B_d(x, r) \subseteq B_\beta(x, r_2).$$

Soit $y \in \Sigma_n$. Supposons que $y \in B_d(x, r)$, alors $d(x, y) < r$, en particulier

$$\forall i \in \mathbf{Z}, \quad 2^{-|i|} \mathbf{1}_{x_i \neq y_i} \leq r$$

Soit $i \in \mathbf{Z}$, si $2^{-|i|} > r$, alors nécessairement $x_i = y_i$ et $|i| < -\frac{r}{\log 2}$, alors en posant $r_2 = \beta^{-\frac{r}{\log 2}}$ on a $y \in B_\beta(x, r_2)$, ce qui prouve une des deux inclusions.

Supposons désormais que $x \in B_\beta(x, r)$, c'est-à-dire $d_\beta(x, y) < r$, donc x et y coïncident sur les $m_r = \frac{r}{\log \beta}$ premières coordonnées. Ainsi,

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} 2^{-|i|} \mathbf{1}_{x_i \neq y_i} \leq 2 \sum_{i \geq m_r + 1} 2^i = 2^{1 - m_r} = r_1.$$

et finalement, $y \in B_d(x, r_1)$. Donc les distances sont équivalentes et les topologies associées à ces distances sont les mêmes. $\square$

On notera donc dans la suite, $B_\beta(x, r)$ les boules de centre $x \in \Sigma_n$ et de rayon $r > 0$ pour la distance d_β, et $B(x, r) = B_{\frac{1}{2}}(x, r)$. On peut alors noter que si $y \in B_\beta(x, r)$, si on note $m_r = \frac{r}{\log \beta}$, alors x et y coïncident sur les coordonnées entre $-m_r$ et m_r :

$$\forall i \in [\![-m_r, m_r]\!], \quad x_i = y_i.$$

II.2 Propriétés topologiques de Σ_n

Définition II.2.1. Soit $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$. La fonction de variation d'ordre k est donné par :

$$\mathrm{var}_k(\phi) = \sup \left\{ |\phi(x) - \phi(y)| : \forall i \in [\![-k, k]\!], x_i = y_i \right\}.$$

Proposition II.2.1. *Soit $\beta \in]0,1[$. Soit $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$, si pour tout $k \in \mathbf{N}$ on $\mathrm{var}_k(\phi) \leq b\alpha^k$ pour certaines constantes $b > 0$ et $\alpha \in]0,1[$, alors il existe $\beta \in]0,1[$ tel que ϕ soit hölderienne pour d_β.*

Définition II.2.2. On notera $\mathcal{H}(\Sigma_n)$ l'ensemble des fonctions $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ pour lesquels il existe $\alpha \in]0,1[$ et $b > 0$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{var}_k(\phi) \leq b\alpha^k.$$

Proposition II.2.2. *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, soit $T_m = \{x \in \Sigma_n \mid \forall |i| > m, x_i = 1\}$ et $T = \bigcup_{m \geq 0} T_m$. L'ensemble T est dense dans Σ_n et est dénombrable. Ainsi, Σ_n est séparable.*

Preuve. Soit O un ouvert non vide et $x \in O$, alors il existe $r = 2^{-m+1} > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq O$. Si on prend $y \in \Sigma_n$ tel que si $i \in [\![-m, m]\!]$ alors $y_i = x_i$ et sinon $y_i = 1$, alors $y \in T_m$ et $y \in B(x,r)$, donc $O \cap T \neq \emptyset$. Ainsi T est dense dans Σ_n.

Pour tout $m \in \mathbf{N}$, l'ensemble T_m contient exactement n^{2m+1} élements, *ie.* T_m est fini. Donc par union dénombrable, T est dénombrable. □

Proposition II.2.3. *Soit O un ouvert de Σ_n. Pour tout $x \in O$, on note $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subseteq O$. Alors il existe $\mathcal{R} \subseteq \Sigma_n$ dénombrable tel que*

$$O = \bigsqcup_{x \in \mathcal{R}} B(x, r_x),$$

où $\bigsqcup$ dénote l'union disjointe.

Preuve. Soit O un ouvert de Σ_n, alors $O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x)$. Cette union n'est pas disjointe et indicée sur un ensemble fini. On introduit alors la relation :

$$\forall x, y \in O, x \sim y \iff B(x, r_x) \cap B(y, r_y) \neq \emptyset.$$

Cette relation est clairement une relation d'équivalence. De plus on a pour $x, y \in O$,

$$x \sim y \iff B(x, r_x) \subseteq B(y, r_y) \text{ ou } B(y, r_y) \subseteq B(x, r_x).$$

En effet, supposons que $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) \neq \emptyset$, alors soit z dans l'intersection, on note $m_x = -\frac{r_x}{\log 2}$ et $m_y = -\frac{r_y}{\log 2}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m_y \leq m_x$. On a alors

$$\begin{cases} \forall i \in [\![-m_x, m_x]\!], x_i = z_i, \\ \forall i \in [\![-m_y, m_y]\!], y_i = z_i. \end{cases}$$

Alors, pour tout $i \in [\![-m_y, m_y]\!], x_i = y_i$ et donc $B(x, r_x) \subseteq B(y, r_y)$. Ainsi, il existe un système de représentant $\mathcal{R} \subseteq O$ pour la relation $\sim$ tel que

$$O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{R}} B(x, r_x).$$

Il reste à montrer que $\mathcal{R}$ est au plus dénombrable. Pour tout $x \in \mathcal{R}$, il existe $h(x) \in T$ tel que $h(x) \in B(x, r_x)$. L'application $h \colon \mathcal{R} \longrightarrow T$ ainsi définie est donc injective et T est dénombrable, ainsi $\mathcal{R}$ est dénombrable. □

Définition II.2.3. L'application de décalage (*shift* en anglais) σ sur Σ_n est donnée par

$$(\sigma x)_i = x_{i+1}$$

pour tout $x \in \Sigma_n$ et $i \in \mathbf{Z}$. Cette application est alors un homéomorphisme de Σ_n.

Définition II.2.4. Soit $x \in \Sigma_n$. On définit les cyclindres de centre x et de rayon $m \in \mathbf{N}$ par

$$C(x, m) = \{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in [\![0, m-1]\!], x_i = y_i\}.$$

de cette manière on peut les relier aux boules pour la distance d_β aux cyclindres :

$$C(x, 2m+1) = \sigma^{-m}(B_\beta(\sigma^m x, \beta^m)).$$

III.

Mesures de Gibbs sur Σ_n

III.1 Unicité de la mesure de Gibbs

Théorème III.1.1 ([Bow75]). *Soit $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$, alors il existe une unique mesure $\mu_\phi = \mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_n)$ tel qu'il existe $P(\phi) = P \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2 > 0$ vérifiant*

$$\frac{\mu(C(x,m))}{\exp(-Pm + S_m\phi(x))} \in [c_1, c_2]$$

pour tout $x \in \Sigma_n$ et $m \in \mathbf{N}$, où $S_m\phi(x) = \sum_{k=0}^{m-1}(\phi(\sigma^k x))$

Dans les sections suivantes, on construira une mesure de Gibbs mélangeante notamment grâce au théorème de Ruelle. C'est l'ergodicité de cette mesure qui entrainera l'unicité de la mesure de Gibbs.

Définition III.1.1. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n)$. On dit que

— μ est ergodique (par rapport à σ) si pour tout borélien $E \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$ tels que $\sigma^{-1}E = E$, on a

$$\mu(E) = 0 \text{ ou } \mu(E^c) = 0,$$

— μ est mélangeante (par rapport à σ) si pour tout borélien $E, F \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$, on a

$$\mu(E \cap \sigma^{-n}F) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(E)\mu(F).$$

Remarque. On a l'implication "mélangeante" $\implies$ "ergodique".

Lemme III.1.2. *Soit $f\colon \Sigma_n \longrightarrow \mathbf{R}$ intégrable par rapport à une mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_n)$ ergodique. Supposons que $f \circ \sigma = f$ μ-presque partout. Alors f est constante μ-presque partout.*

Preuve. Pour montrer ce lemme on considére les ensembles $E_c = f^{-1}(\{c\})$ pour tout $c \in \mathbf{R}$. Comme $f \circ \sigma = f$ μ-p.p., on a $\sigma^{-1}E_c = E_c$, et donc par ergodicité de μ,

$$\mu(E_c) = 0 \text{ ou } \mu(E_c) = 1.$$

Il est donc clair qu'il existe au plus un $c \in \mathbf{R}$ tel que $f = c$ pour μ-presque tout $x \in \Sigma_n$. □

Proposition III.1.3. *Supposons qu'il existe une mesure de Gibbs μ ergodique pour $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$. Alors cette mesure est l'unique mesure de Gibbs associé à ϕ.*

Preuve. Soit $\mu, \mu' \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ deux mesures de Gibbs avec μ ergodique, $c_1, c_1', c_2, c_2' > 0$ et $P, P' \in \mathbf{R}$ des constantes telles que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et $x \in \Sigma_n$ on ait

$$\begin{cases} c_1 & \leq \frac{\mu(C(x,m))}{\exp(-Pm + S_m\phi(x))} & \leq c_2 \\ c_1' & \leq \frac{\mu'(C(x,m))}{\exp(-P'm + S_m\phi(x))} & \leq c_2' \end{cases}$$

D'abord, montrons que $P = P'$. Soit $m \in \mathbf{N}$ et $T_m = \{x \in \Sigma_n \mid x_i = 1 \text{ si } i \notin [\![0, m-1]\!]\}$, de telle sorte que $\Sigma_n = \bigsqcup_{x \in T_m} C(x, m)$, et T_m est fini. On a alors

$$c_1' e^{-P'm} \sum_{x \in T_m} e^{S_m \phi(x)} \leq \sum_{x \in T_m} \mu'(C(x,m)) = 1 = \sum_{x \in T_m} \mu'(C(x,m)) \leq c_2' e^{-P'm} \sum_{x \in T_m} e^{S_m \phi(x)},$$

et donc

$$P - \frac{1}{m} \log c_2' \leq \frac{1}{m} \log \sum_{x \in T_m} e^{S_m \phi(x)} \leq P - \frac{1}{m} \log c_1'.$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve donc $P' = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{x \in T_m} e^{S_m \phi(x)}$. Grâce au même raisonnement, on en conclut que $P = P'$ car ils sont tout deux égaux à la même limite.

Grâce aux estimations sur μ et μ' sur les cylindres, on a alors pour tout $x \in \Sigma_n$ et $m \in \mathbf{N}$,

$$\mu'(C(x,m)) \leq \frac{c_2'}{c_1} \mu(C(x,m)).$$

Comme μ et μ' sont invariantes par σ, on peut étendre le résultat sur les ensembles de la forme $\{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in [\![-m, m]\!], x_i = y_i\}$ pour tout $x \in \Sigma_n$ et $m \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire sur une base de la topologie de Σ_n. De plus, comme tout ouvert de Σ_n est une union disjointe dénombrable de ces éléments d'après la proposition II.2.3, on peut alors étendre cette inégalité aux ouverts de Σ_n. Par régularité extérieure par rapport aux ouverts, d'après la proposition V.2.4, on a pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$,

$$\mu'(B) = \inf \left\{ \mu'(O) \mid O \text{ ouvert }, B \subseteq O \right\}.$$

De là, on a pour tout ouvert $B \subseteq O$,

$$\mu'(B) \leq \mu'(O) \leq \frac{c_2'}{c_1} \mu(O),$$

et donc $\mu'(B) \leq \frac{c_2'}{c_1} \inf\{\mu(O) \mid O \text{ ouvert }, B \subseteq O\} = \frac{c_2'}{c_1} \mu(B)$. Donc pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$ on a $\mu'(B) \leq \frac{c_2'}{c_1} \mu(B)$, ainsi μ' est absolument continue par rapport à μ. D'après le théorème de Radon-Nikodym, μ' admet une densité f par rapport à μ. En appliquant σ, on obtient

$$\mu' = \sigma_* \mu' = (f \circ \sigma^{-1}) \cdot \sigma_* \mu = (f \circ \sigma^{-1}) \cdot \mu.$$

Par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym, $f = f \circ \sigma^{-1}$ μ-presque partout. Or comme μ est ergodique par hypothèse, alors il existe une constante $c \in \mathbf{R}$ tel que $f = c$ μ-presque partout. Finalement,

$$1 = \mu'(\Sigma_n) = \int_{\Sigma_n} c \, d\mu = c.$$

Donc $\mu = \mu'$, ce qui prouve l'unicité. □

III.2 Réduction de Σ_n à Σ_n^+

Pour prouver l'existence de telles mesures, on commence par montrer que peu importe la fonction de potentiel ϕ dans $\mathcal{H}(\Sigma_n)$, on peut commencer par trouver une fonction de potentiel $\psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$ ne dépendant que des coordonnées positives ayant la même mesure de Gibbs que ϕ.

Définition III.2.1. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$. On dit que ϕ et ψ sont équivalentes et on note $\phi \sim \psi$ dès lors qu'il existe $u \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ vérifiant :

$$\phi = \psi - u + u \circ \sigma.$$

Le prochain lemme justifie l'introduction de cette relation :

Lemme III.2.1. *Soit $\phi \sim \psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$. Dans ce cas, $\mu_\phi = \mu_\psi$ et $P(\phi) = P(\psi)$.*

Preuve. Soit $u \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ tel que $\phi - \psi = u \circ \sigma - u$. Alors

$$\begin{aligned} |S_m\phi(x) - S_m\psi(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{m-1}(\phi-\psi)(\sigma^k x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{m-1}(u(\sigma^{k+1}x) - u(\sigma^k x))\right| \\ &= |u(\sigma^m x) - u(x)| \leq 2\|u\| \end{aligned}$$

Ainsi pour $m \in \mathbf{N}$ et $x \in \Sigma_n$, on a

$$c_1 e^{-2\|u\|} \leq \frac{\mu_\phi(C(x,m))}{e^{-P(\phi)m + S_m\phi(x) + 2\|u\|}} \leq \frac{\mu_\phi(C(x,m))}{e^{-P(\phi)m + S_m\psi(x)}} \leq \frac{\mu_\phi(C(x,m))}{e^{-P(\phi)m + S_m\phi(x) - 2\|u\|}} \leq c_2 e^{2\|u\|}$$

Donc μ_ϕ et $P(\phi)$ conviennent aussi pour ψ. $\square$

Remarque. Soit $\phi \overset{u}{\sim} \psi \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$. Si $\sum_k u \circ \sigma^k$ converge, alors

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi - \psi) \circ \sigma^k$$

Cette remarque permet de mieux comprendre la forme de la fonction u dans un cadre favorable, et de donner l'intuition de ce qu'elle pourrait être pour donner une fonction équivalente à ϕ dépendant uniquement des coordonnées positives.

Preuve de la remarque précédente. La convergence de $\sum_{k\geq 0}(u - u\circ\sigma)\circ\sigma^k = \sum_k (\phi-\psi)\circ\sigma^k$ est assuré par celle de $\sum_k u \circ \sigma^k$. Ainsi par téléscopage, $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(u - u\circ\sigma)(\sigma^k x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\phi-\psi)(\sigma^k x)$. $\square$

Avant le prochain lemme on introduit la fonction $r\colon \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_n$ définie par

$$\forall i \in \mathbf{Z}, \forall x \in \Sigma_n, (r(x))_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \geq 0, \\ 1 & \text{si } i < 0. \end{cases} = 111\ldots x_{|\geq 0}$$

De sorte que si $x, y \in \Sigma_n$ ont les mêmes coordonnées positives (*ie.* $\forall i \geq 0, x_i = y_i$), alors $r(x) = r(y)$.

De plus, lorsqu'on compose r avec σ, on garde l'indépendance vis-à-vis des coordonnées négatives : si $x = \cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2x_3\cdots \in \Sigma_n$, alors on a :

$$\begin{aligned} x &= \cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\cdots \\ \sigma x &= \cdots\cdot x_{-1}x_0x_1x_2x_3\cdots \\ r(\sigma x) &= \cdots\cdots\cdot 111x_1x_2x_3\cdots \\ r(x) &= \cdots\cdots\cdot 111x_0x_1x_2\cdots \\ \sigma r(x) &= \cdots\cdots 11x_0x_1x_2x_3\cdots \end{aligned}$$

Donc $\sigma \circ r$ et $r \circ \sigma$ diffèrent seulement à la coordonnées -1 et ne dépendent que des coordonnées positives de x.

Lemme III.2.2. *Soit $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$, et*

$$\psi := \phi \circ r + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi \circ \sigma^k \right) \circ (\sigma \circ r - r \circ \sigma).$$

Alors,

1. *$\psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$ et ne dépend que des coordonnées positives,*
2. *Si on note $u = \sum_{k \geq 0} \phi \circ \sigma^k - \phi \circ (\sigma^k r)$, alors $u \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$,*
3. *De plus, $\phi \overset{u}{\sim} \psi$.*

Preuve. Soit $b \in \mathbf{R}$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que $var_k \phi \leq b\alpha^k$. Pour $k \geq 0$, $\sigma^k x$ et $\sigma^k r(x)$ coïncident de $-k$ à $+\infty$ donc $\left|\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k r(x))\right| \leq b\alpha^k$ et ainsi comme $|\alpha| < 1$, la série converge normalement pour tout $x \in \Sigma_n$. Donc u est bien définie et est continue.

Ensuite vérifions que $\psi = \phi - u + u \circ \sigma$. Pour $N \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
&\phi(x) - \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k r(x))\Big) + \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi(\sigma^{k+1} x) - \phi(\sigma^k r(\sigma x))\Big) \\
&= \phi(r(x)) - \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\phi(\sigma^{k+1} x) - \phi(\sigma^{k+1} r(x))\Big) + \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi(\sigma^{k+1} x) - \phi(\sigma^k r(\sigma x))\Big) \\
&= \phi(r(x)) + \underbrace{\phi(\sigma^{N+1} x) - \phi(\sigma^N r(\sigma x))}_{\leq b\alpha^N} + \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\phi(\sigma^{k+1} r(x)) - \phi(\sigma^k r(\sigma x))\Big) \\
&\longrightarrow \psi(x) \\
&\longrightarrow \phi(x) - u(x) + u(\sigma x)
\end{aligned}$$

lorsque $N \to \infty$. Ainsi $\psi = \phi - u + u \circ \sigma$ *ie.* $\phi \overset{u}{\sim} \psi$.

Soit $x \in \Sigma_n$ et $y \in C(x, m)$. Soit $k \in \mathbf{N}$, distinguons plusieurs cas :

— Comme $\sigma^k x$ et $\sigma^k r(x)$ coïncident jusqu'à la k-ième coordonnée,

$$\left|\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k r(x)) - (\phi(\sigma^k y) - \phi(\sigma^k r(y)))\right| \leq 2b\alpha^k$$

— Si $k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, on peut faire mieux :

$$\begin{aligned}
&\left|\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k y) + \phi(\sigma^k r(x)) - \phi(\sigma^k r(y))\right| \\
&\leq \underbrace{\left|\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k y)\right|}_{\leq var_{m-k}\phi \leq b\alpha^{m-k}} + \underbrace{\left|\phi(\sigma^k r(x)) - \phi(\sigma^k r(y))\right|}_{\leq b\alpha^{m-k}} \\
&\leq 2b\alpha^{m-k}
\end{aligned}$$

car $\sigma^k x$ et $\sigma^k y$ coïncident sur $[-m-k, m-k]$

Donc en sommant chacun des termes,

$$|u(x) - u(y)| \leq 2b \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \alpha^{m-k} + \sum_{k > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \alpha^k \right) \leq 4b \sum_{k > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \alpha^k = \frac{4b}{1-\alpha} \alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$$
$$\leq \frac{4b\alpha}{1-\alpha} (\sqrt{\alpha})^m$$

Ainsi $u \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$ et donc $\psi \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$ également. □

Remarque. On remarque que la construction de ψ dépend entièrement de la fonction r, ce qui signifie qu'il existe d'autres fonctions $\psi_r \in \mathcal{H}(\Sigma_n)$ ne dépendant que des coordonnées positives et équivalentes à ϕ.

III.3 Théorème de Perron-Frobenius de Ruelle

Définition III.3.1. Soit $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+) = \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \cap \mathcal{H}(\Sigma_n)$. On appelle opérateur de transfert ou opérateur de Ruelle l'application $\mathcal{L}_\phi \colon \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \longrightarrow \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall x \in \Sigma_n, \mathcal{L}_\phi f(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} f(y).$$

Remarque. A noter que le passage aux fonctions définies sur $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ rend σ non injective, et donc $\mathcal{L}$ a toujours n termes dans la somme qui le définit. C'est grâce à cette restriction que l'opérateur de transfert $\mathcal{L}$ devient intéressant.

Pour la suite on fixe $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$ et des constantes $b > 0, \alpha \in]0,1[$ vérifiant $\operatorname{var}_k \phi \leq b\alpha^k$, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Théorème III.3.1 (Théorème de Perron-Frobenius de Ruelle)**.** *Soit $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi$. Alors il existe $\lambda > 0, \nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ et $h \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), h > 0$ tels que :*

1. *ν vérifie $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$,*
2. *h vérifie $\mathcal{L}h = \lambda h$ et $\nu(h) = 1$,*
3. *et pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, on a*

$$\left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m g - \nu(g) h \right\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin de quelques lemmes.

Proposition III.3.2. *Il existe $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ tel que $\mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu$.*

Preuve. Comme $\mathcal{L}1(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} > 0$ pour tout $x \in \Sigma_n$, on a nécessairement $\mathcal{L}^*\mu(1) > 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$. On peut alors poser $G(\mu) = \frac{1}{\mathcal{L}^*\mu(1)} \mathcal{L}^*\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$, ce qui donne une application $G \colon \mathcal{M}(\Sigma_n^+) \longrightarrow \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$, (on peut se permettre $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)^* = \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ grâce au théorème de Riesz). Ainsi définie, G est continue de $\mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ dans lui-même. Or $\mathcal{M}(\Sigma_n^+)$ est un compact convexe. Par le théorème de Schauder-Tychonoff, on en déduit que G admet un point fixe $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$. On pose alors $\lambda = \mathcal{L}^*\nu(1)$ et on a la relation voulue : $\mathcal{L}\nu = \lambda\nu$. □

Pour la suite on notera pour tout $m \in \mathbf{N}$, les constantes

$$B_m = \exp\left(\sum_{k\geq m+1} 2b\alpha^k\right) \quad \text{et} \quad K = \lambda B_0 e^{\|\phi\|}.$$

On cherche à construire h comme un point fixe vérifiant (2), pour ce faire on considère l'ensemble $\Lambda \subseteq \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), f \in \Lambda \iff \begin{cases} f \geq 0, \\ \nu(f) = 1, \\ \forall m \in \mathbf{N}, \forall x \in \Sigma_n, x' \in C(x,m), f(x) \leq B_m f(x'). \end{cases}$$

On remarque que $1 \in \Lambda$, ce qui assure que $\Lambda \neq \emptyset$.

Lemme III.3.3. *L'ensemble Λ est compact. De plus si $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, alors* $\inf \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f \geq K^{-1}$.

Preuve. Pour ce faire on va utiliser le théorème d'Ascoli. Dans un premier temps, on va montrer que $\Lambda(x) \subseteq [0, K]$. Soit $f \in \Lambda$ et $x \in \Sigma_n^+$. Remarquons que pour $z \in \Sigma_n^+$ et $x_0 \in [\![1, n]\!]$ arbitraire, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} f(y) &\geq \lambda^{-1} e^{-\|\phi\|} f(x_0 x) \\ &\geq \lambda^{-1} e^{-\|\phi\|} B_0^{-1} f(z) = \frac{1}{K} f(z). \end{aligned}$$

Donc comme $1 = \nu(f) = \nu(\frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f) \geq \frac{1}{K} f(z)$, on en déduit que $\|f\| \leq K$. De plus, comme $\nu(f) = 1$, il existe $z \in \Sigma_n^+$ tel que $f(z) \geq 1$. En appliquant l'inégalité précédente à un tel z, on obtient $\inf \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f \geq \frac{1}{K}$

Soit $f \in \Lambda$ et $x, x' \in \Sigma_n^+$ tels que $x' \in C(x,m)$ pour un certain $m \in \mathbf{N}$, alors $f(x) \leq B_m f(x')$ et $f(x') \leq B_m f(x)$. Donc

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leq (B_m - 1)\|f\| \leq (B_m - 1)K \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi comme la majoration est indépendante de f, Λ est équicontinue. $\square$

Proposition III.3.4. *Il existe $h \in \Lambda$ tel que $h > 0$ et vérifie (2) (ie. $\nu(h) = 1$ et $\mathcal{L}h = \lambda h$).*

Preuve. On pose $F \colon \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \longrightarrow \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), F(f) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f.$$

On vérifie que Λ est stable par F. Soit $f \in \Lambda$, il est clair que $\frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f$ est positif car f l'est. Aussi, $\nu(\frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}^*\nu(f) = \nu(f) = 1$. Enfin, pour $x, x' \in \Sigma_n^+$ tels que $x' \in C(x,m)$ pour un certain $m \in \mathbf{N}$, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$$e^{\phi(jx)} f(jx) \leq e^{\phi(jx') + b\alpha^{m+1}} B_{m+1} f(jx') \leq B_m e^{\phi(jx')} f(jx').$$

En sommant tous ces termes, on obtient l'inégalité voulue : $\mathcal{L}f(x) \leq B_m \mathcal{L}f(x')$. Par ailleurs, F est continue car $ne^{\|\phi\|}$-lipschitizienne : pour tout $f, g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ et $x \in \Sigma_n^+$, on a

$$|\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}g(x)| \leq \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} \|f - g\| \leq ne^{\|\phi\|}\|f - g\|,$$

et donc $\|\mathcal{L}f - \mathcal{L}g\| \leq ne^{\|\phi\|}\|f-g\|$.

En appliquant le théorème de Schauder-Tychonoff à F sur Λ, on obtient un point fixe $h \in \Lambda$ qui vérifie alors $\nu(h) = 1$ et $\mathcal{L}h = \lambda h$. De plus, par le lemme précédent, $0 < K^{-1} \leq \inf \lambda^{-1}\mathcal{L}h = \inf h$, d'où $h > 0$. □

Lemme III.3.5. *Il existe $\eta \in]0,1[$ tel que pour toute fonction $f \in \Lambda$, il existe $f' \in \Lambda$ vérifiant*

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f = \eta h + (1-\eta)f'.$$

De plus, $\eta \leq \min\left(\frac{u_1}{u_2}\frac{1-\alpha}{4\|h\|K}, \frac{1}{K\|h\|}\right)$.

Preuve. Soit $\eta \in]0,1[$ comme ci-dessus. Soit $f \in \Lambda$ et on pose la fonction $g = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f - \eta h$. Alors si $\eta \leq \min\left(\frac{u_1}{u_2}\frac{1-\alpha}{4\|h\|K}, \frac{1}{K\|h\|}\right)$, on a $\frac{1}{1-\eta}g \in \Lambda$. En effet, l'intégrale de g vaut $\nu(g) = \nu(\lambda^{-1}\mathcal{L}f) - \eta\nu(h) = 1-\eta$, car f et h sont dans Λ.

Aussi $g \geq 0$ dès lors que $\eta\|h\| \leq \frac{1}{K}$ car

$$g = \lambda^{-1}\mathcal{L}f - \eta h \geq \inf \lambda^{-1}\mathcal{L}f - \eta\|h\| \geq 0,$$

d'après le lemme III.3.3.

Finalement, pour que $\frac{1}{1-\eta}g \in \Lambda$ on doit avoir $g(x) \leq B_m g(x')$ pour $x \in \Sigma_n^+$ et $x' \in C(x,m)$ pour $m \geq 0$, ce qui équivaut à :

$$\eta(B_m h(x') - h(x)) \leq B_m \lambda^{-1}\mathcal{L}f(x') - \lambda^{-1}\mathcal{L}f(x).$$

Or, $\mathcal{L}f(x) \leq B_{m+1}e^{b\alpha^{m+1}}\mathcal{L}f(x')$ (comme vu dans la preuve du lemme III.3.3). Une condition suffisante est

$$\eta(B_m - B_m^{-1})\|h\| \leq (B_m - B_{m+1}e^{b\alpha^{m+1}})K^{-1},$$

car,

$$\begin{cases} \eta(B_m h(x') - h(x)) \leq \eta(B_m h(x') - B_m^{-1}h(x')) \leq \eta(B_m - B_m^{-1})\|h\|, \\ \\ (B_m - B_{m+1}e^{b\alpha^{m+1}})K^{-1} \leq (B_m - B_{m+1}e^{b\alpha^{m+1}})\lambda^{-1}\mathcal{L}f(x') \leq \lambda^{-1}(B_m\mathcal{L}f(x') - \mathcal{L}f(x)). \end{cases}$$

On rappelle que pour tout compact $K \subseteq \mathbf{R}^2$ et tout $x, y \in K$, on a $u_1(x-y) \leq e^x - e^y \leq u_2(x-y)$, ce qu'on applique ici avec le compact $K = [-L, L]^2$ de sorte que $\pm \log B_m, \log B_m e^{b\alpha^m}$ soient dans $[-L, L]$.

Ainsi il suffit de vérifier

$$\eta u_2\|h\|(\log B_m - \log B_m^{-1}) \leq K^{-1}u_1(\log B_m - \log B_{m+1} - b\alpha^{m+1}),$$

qui est équivalent à

$$\eta\|h\|u_2\left(\frac{4b\alpha^{m+1}}{1-\alpha}\right) \leq K^{-1}u_1 b\alpha^{m+1},$$

ou encore

$$\eta \leq \frac{u_1}{u_2}\frac{1-\alpha}{4\|h\|K},$$

afin d'avoir $\frac{1}{\eta-1}g \in \Lambda$. □

Le lemme suivant est le cas particulier du théorème III.3.1 pour les fonctions dans Λ, pour lesquelles en plus de la limite on a une convergence exponentielle.

Lemme III.3.6. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $f \in \Lambda$, on a $\|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n f - h\| \leq (\|h\|+K)(1-\eta)^n = A\beta^n$ avec $0 < \beta < 1$ et $A > 0$.*

Preuve. Remarquons qu'en itérant le lemme précédent,

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1}\mathcal{L}f &= \eta h + (1-\eta)f_1' = (1-(1-\eta)^1)h + (1-\eta)f_1', \\
\lambda^{-2}\mathcal{L}^2 f &= \lambda^{-1}\mathcal{L}((1-(1-\eta))h + (1-\eta)f_1') = (1-(1-\eta))h + \lambda^{-1}(1-\eta)\mathcal{L}f_1' \\
&= (1-(1-\eta)+\eta(1-\eta))h + (1-\eta)^2 f_2' \\
&= (1-(1-\eta)^2)h + (1-\eta)^2 f_2',
\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence et grâce au lemme précédent, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $f \in \Lambda$,

$$\frac{1}{\lambda^n}\mathcal{L}^n f = (1-(1-\eta)^n)h + (1-\eta)^n f_n,$$

où $f_n \in \Lambda$. Comme $\|f_n\| \leq K$, on obtient

$$\left\| \frac{1}{\lambda^n}\mathcal{L}^n f - h \right\| = (1-\eta)^n \|h + f_n\| \leq (1-\eta)^n (K + \|h\|).$$

□

Avant d'étendre le résultat à toutes les fonctions de $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, on l'étend d'abord à un sous-ensemble dense constitué des fonctions "en escaliers". On pose alors

$$\mathcal{C}_r = \left\{ f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+) \mid \mathrm{var}_r(f) = 0 \right\} \text{ et } \mathcal{C} = \bigcup_{r \geq 0} \mathcal{C}_r.$$

On établira la densité de $\mathcal{C}$ dans un prochain lemme.

Lemme III.3.7. *Soit $F \in \Lambda$ et $f \in \mathcal{C}_r$ tels que $fF \neq 0$ et $f \geq 0$. Alors, $\frac{1}{\nu(fF)\lambda}\mathcal{L}^r(fF) \in \Lambda$.*

Preuve. La positivité de $g = \lambda^{-r}\mathcal{L}^r(fF)$ découle de la positivité de f et de F. Ensuite, soit $x, x' \in \Sigma_n^+$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $x' \in C(x, m)$. Remarquons d'abord que, grâce à une récurrence, on a

$$\mathcal{L}^r(fF)(x) = \sum_{j_1,\dots,j_r \in [\![1,n]\!]} \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x)) \right) f(j_1 \dots j_r x) F(j_1 \dots j_r x).$$

Soit $j_1, \dots, j_r \in [\![1,n]\!]$, alors comme $f \in \mathcal{C}_r$ on a $f(j_1 \dots j_r x) = f(j_1 \dots j_r x')$.
Aussi, $F(j_1 \dots j_r x) \leq B_{m+r} F(j_1 \dots j_r x')$ car les deux suites coïncident sur les $m + r$ premières coordonnées. Enfin,

$$\begin{aligned}
B_{m+r} \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x)) \right) &\leq B_{m+r} \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \left(\mathrm{var}_{m+r-k}(\phi) + \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x')) \right) \right) \\
&\leq \left(B_{m+r} \exp\left(\sum_{k=m+1}^{m+r} b\alpha^k \right) \right) \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x')) \right) \\
&\leq B_m \exp\left(\sum_{k=0}^{r-1} \phi(\sigma^k(j_1 \dots j_r x')) \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, chacun des termes de $\mathcal{L}^r(fF)(x)$ est majoré par B_m fois le terme correspondant dans $\mathcal{L}^r(fF)(x')$, d'où $\mathcal{L}^r(fF)(x) \leq B_m \mathcal{L}^r(fF)(x')$.

Finalement, il reste à vérifier que $\nu(fF) > 0$. Pour ce faire, si $x, z \in \Sigma_n^+$ alors,

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{L}(\mathcal{L}^r(fF))(x) = \lambda^{-1} \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} \mathcal{L}^r(fF)(y) \geq \lambda^{-1} e^{-\|\phi\|} B_0^{-1} \mathcal{L}^r(fF)(z) = K^{-1}\mathcal{L}^r(fF)(z).$$

Or comme $fF \neq 0$, il existe $z \in \Sigma_n^+$ tel que $(fF)(z) > 0$, donc $\mathcal{L}^r(fF)(\sigma^r z) > 0$. Ainsi,

$$\nu(fF) = \frac{1}{\lambda^r}\nu(\lambda^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{L}^r(fF))) \geq \frac{1}{K\lambda^r}\mathcal{L}^r(fF)(\sigma^r z) > 0.$$

Et enfin, on a bien $\nu(\nu(fF)^{-1}\lambda^{-r}\mathcal{L}^r(fF)) = 1$, ce qui conclut ce lemme. □

Lemme III.3.8. *Soit $f \in \mathcal{C}_r$, $F \in \Lambda$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors,*

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+r}}\mathcal{L}^{n+r}(fF) - \nu(fF)h \right\| \leq A\nu(|fF|)\beta^n.$$

Remarque. La fonction $F \in \Lambda$ n'a aucune utilité dans la preuve du théorème III.3.1 (pour le montrer on prendra $F = 1$), elle sert plus tard pour montrer que $h \cdot \nu$ est la mesure de Gibbs du théorème III.1.1.

Preuve. Décomposons f en sa partie positive f^+ et sa partie négative f^- toute deux positives et vérifiant $f = f^+ - f^-$. Si $f^\pm F \neq 0$, alors grâce aux lemmes III.3.7 et III.3.6, on a

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+r}}\mathcal{L}^{n+r}(f^\pm F) - \nu(f^\pm F)h \right\| = \nu(f^\pm F) \left\| \frac{1}{\lambda^{n+r}\nu(f^\pm F)}\mathcal{L}^{n+r}(f^\pm F) - h \right\| \leq A\nu(f^\pm F)\beta^n.$$

Dans le cas où $f^\pm F = 0$ l'inégalité est triviale. Ainsi,

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+r}}\mathcal{L}^{n+r}(fF) - \nu(fF)h \right\| \leq A(\nu(f^+F) + \nu(f^-F))\beta^n = A\nu(|fF|)\beta^n.$$

□

Lemme III.3.9. *L'ensemble $\mathcal{C} = \bigcup_{r\geq 0}\mathcal{C}_r$ vérifie la propriété suivante :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall \varepsilon > 0, \exists g_1, g_2 \in \mathcal{C}, \|g_1 - g_2\| \leq \varepsilon \text{ et } g_1 \leq f \leq g_2,$$

et donc $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in \Sigma_n^+$ et $x' \in C(x, r)$ on ait $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$, car f est continue sur le compact Σ_n^+ donc uniformément continue par le théorème de Heine. On pose alors pour $x \in \Sigma_n^+$,

$$\begin{cases} g_1(x) = \inf\limits_{z \in \Sigma_n^+} f(x_1 \cdots x_r z), \\ g_2(x) = \sup\limits_{z \in \Sigma_n^+} f(x_1 \cdots x_r z), \end{cases}$$

de sorte que $g_1 \leq f \leq g_2$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}$. De plus, si on note $z, z' \in \Sigma_n^+$ tel que $g_1(x) = f(x_1 \cdots x_r z)$ et $g_2(x) = f(x_1 \cdots x_r z')$, alors

$$|g_1(x) - g_2(x)| \leq \left| f(x_1 \cdots x_r z) - f(x_1 \cdots x_r z') \right| \leq \varepsilon.$$

□

Enfin, on arrive au dernier lemme permettant d'établir le (3) du théorème III.3.1, pour lequel il ne reste plus que la limite sans la convergence exponentielle.

Proposition III.3.10. *Soit $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, alors*

$$\left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m f - \nu(f) h \right\| \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbf{N}$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_r$ comme dans le précédent lemme. On applique le lemme III.3.8 avec $F = 1$, ce qui donne pour m assez grand,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m g_i - \nu(f) h \right\| &\leq \left\| \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_i - \nu(g_i) h \right\| + |\nu(g_i) - \nu(f)| \, \|h\| \\ &\leq \varepsilon(1 + \|h\|). \end{aligned}$$

De plus, on a $\lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_1 \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m f \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_2$ et donc pour m assez grand,

$$-\varepsilon(1 + \|h\|) \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_1 - \nu(f) h \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m f - \nu(f) h \leq \lambda^{-m} \mathcal{L}^m g_2 - \nu(f) h \leq \varepsilon(1 + \|h\|).$$

Finalement, on a bien $\lim_{m \to \infty} \|\lambda^{-m} \mathcal{L}^m f - \nu(f) h\| = 0$, pour tout $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$. □

Remarque. La densité de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, à savoir

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+), \forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbf{N}, \exists f_r \in \mathcal{C}_r, \|f - f_r\| \leq \varepsilon,$$

ne suffit pas pour conclure. En effet, si on a un telle fonction $f_r \in \mathcal{C}_r$ pour un certain $r \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m f - \nu(f) h \right\| &\leq \frac{1}{\lambda^m} \|\mathcal{L}^m f - \mathcal{L}^m f_r\| + \left\| \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{L}^m f_r - \nu(f_r) h \right\| + |\nu(f_r) - \nu(f)| \, \|h\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^m} \|\mathcal{L}^m f - \mathcal{L}^m f_r\| + A\nu(|f_r|)\beta^{m-r} + \varepsilon \|h\| . \end{aligned}$$

Or, on n'arrive pas à majorer le premier terme, notamment car on ne possède aucune estimation de λ.

III.4 Construction d'une mesure de Gibbs

Soit λ, ν et h comme dans le théorème 3.1. On pose $\mu = h \cdot \nu \in \mathcal{M}(\Sigma_n^+)$.

Lemme III.4.1. *La mesure de probabilité $\mu = h \cdot \nu$ est invariante par σ :*

$$\sigma_* \mu = \mu.$$

Preuve. Soit $f, g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, on remarque que $(\mathcal{L} f) g = \mathcal{L}(f \cdot (g \circ \sigma))$. En effet, pour $x \in \Sigma_n$, on a

$$\begin{aligned} ((\mathcal{L} f) g)(x) &= \sum_{y \in \sigma^{-1} x} e^{\phi(y)} f(y) g(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1} x} e^{\phi(y)} f(y) g(\sigma y) \\ &= \mathcal{L}(f \cdot (g \circ \sigma))(x). \end{aligned}$$

Donc pour $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$,

$$\begin{aligned} \mu(f) = \nu(h \cdot f) &= \nu(\lambda^{-1} (\mathcal{L} h) \cdot f) = \lambda^{-1} \nu \left(\mathcal{L}(h \cdot (f \circ \sigma)) \right) \\ &= \lambda^{-1} \mathcal{L}^* \nu(h \cdot (f \circ \sigma)) = \nu(h \cdot (f \circ \sigma)) = \mu(f \circ \sigma). \end{aligned}$$

□

A chaque fonction $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$, on associe une nouvelle fonction $[f] \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ définie par :

$$\forall x \in \Sigma_n^+, [f](x) = \min \{f(y) \mid y \in \Sigma_n, \forall i \geq 0, x_i = y_i\}.$$

De cette façon, on retire la dépendance de f par rapport à ses coordonnées négatives. Par ailleurs, si $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, alors $[f] = f$.

Lemme III.4.2. *Pour tout $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$, la suite $(\mu([f \circ \sigma^m]))_{m \geq 0}$ admet une limite, que l'on note $G(f)$. De plus G vérifie $G(1) = 1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$, $f \geq 0$, on a $G(f) \geq 0$.*

Par ailleurs,

$$G(f \circ \sigma) = G(f).$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$, on va montrer que $(\mu([f \circ \sigma^n]))$ est une suite de Cauchy. Soit $m, k \in \mathbf{N}$, alors pour tout $x \in \Sigma_n^+$, il existe $y, y' \in \Sigma_n$ tel que

$$[f \circ \sigma^m](\sigma^k x) = f(\sigma^m(\cdots y_{-2} y_{-1} x_k x_{k+1} \cdots)) = f(\cdots y_{-1} x_k \cdots x_{m+k} x_{m+k+1} \cdots),$$
$$[f \circ \sigma^{m+k}](x) = f(\sigma^{m+k}(\cdots y'_{-2} y'_{-1} x_0 x_1 \cdots)) = f(\cdots y'_{-1} x_0 \cdots x_{m+k} x_{m+k+1} \cdots).$$

Ainsi,

$$\left\| [f \circ \sigma^m] \circ \sigma^k - [f \circ \sigma^{m+k}] \right\| \leq \text{var}_k(f),$$

et donc,

$$\left| \mu([f \circ \sigma^m]) - \mu([f \circ \sigma^{m+k}]) \right| = \left| \mu\left([f \circ \sigma^m] \circ \sigma^k - [f \circ \sigma^{m+k}] \right) \right| \leq \text{var}_k(f) \longrightarrow 0,$$

lorsque $k \to \infty$, car f est continue. On a alors prouvé que $(\mu([f \circ \sigma^m]))_m$ est une suite de Cauchy, ce qui assure sa convergence vers un réel $G(f)$.

Comme $1 \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$ on a $1 \circ \sigma^m = 1$, d'où

$$\mu([1 \circ \sigma^m]) = \mu(1) = 1.$$

Enfin, si $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n)$ est positive, alors $[f] \geq 0$ et donc pour tout $m \in \mathbf{N}, [f \circ \sigma^m] \geq 0$, d'où $G(f) \geq 0$. □

Grâce au lemme précédent, on a construit une forme linéaire G et par l'identification rendue possible par le théorème de Riesz, on peut considérer la mesure $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_n)$ associée à G.

Théorème III.4.3. *La mesure $\tilde{\mu}$ est une mesure de Gibbs pour $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_n^+)$.*

Pour prouver ce résultat, nous allons avoir besoin d'un lemme supplémentaire. Pour ce faire, on défini la constante a donnée par :

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \text{var}_k(\phi) < \infty.$$

Lemme III.4.4. *Soit $x, y \in \Sigma_n$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $y \in C(x, m)$. Alors,*

$$|S_m \phi(x) - S_m \phi(y)| \leq a.$$

Preuve. Pour $y \in \Sigma_n$, on définit $y' \in \Sigma_n$ par

$$y'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i < 0, \\ y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $k \geq 0$, on a alors $\phi(\sigma^k y) = \phi(\sigma^k y')$ car $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |S_m\phi(x) - S_m\phi(y)| = \left|S_m\phi(x) - S_m\phi(y')\right| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left|\phi(\sigma^k x) - \phi(\sigma^k y')\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{var}_{m-1-k}(\phi) \leq a. \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème III.4.3. Soit $E = C(x, m) = \{y \in \Sigma_n \mid \forall i \in [\![0, m-1]\!], x_i = y_i\}$, et on veut montrer que

$$c_1 e^{-Pm+S_m\phi(x)} \leq \tilde{\mu}(E) \leq c_2 e^{-Pm+S_m\phi(x)},$$

pour certaines constantes $c_1, c_2 > 0$ et $P \in \mathbf{R}$.

Pour tout $z \in \Sigma_n^+$, il existe un unique $y' = x_0 x_1 \cdots x_{m-1} z_0 z_1 \cdots \in \Sigma_n^+$ tel que $\sigma^m y' = z$ et $y'_i = x_i$ pour $0 \leq i \leq m-1$. Ainsi,

$$\mathcal{L}^m(h\mathbf{1}_E)(z) = \sum_{\sigma^m y = z} e^{S_m\phi(y)} h(y) \mathbf{1}_E(y) \leq e^{S_m\phi(y')} h(y') \leq e^{S_m\phi(x)} e^a \left\|h\right\|,$$

et donc, comme $\mathbf{1}_E \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, on a $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$, d'où

$$\tilde{\mu}(E) = \nu(h\mathbf{1}_E) = \lambda^{-m}\nu(\mathcal{L}^m(h\mathbf{1}_E)) \leq \lambda^{-m} e^{S_m\phi(x)} \left\|h\right\| e^a.$$

On peut alors poser $c_2 = e^a \left\|h\right\| > 0$. Pour l'autre inégalité, remarquons que pour $z \in \Sigma_n^+$, il existe au moins un $y' = x_0 x_1 \cdots 1 z_0 z_1 \cdots \in \Sigma_n^+$ tel que $\sigma^{m+1} y' = z$ et $x_i = y'_i$ pour $i \in [\![0, m-1]\!]$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{m+1}(h\mathbf{1}_E)(z) &= \sum_{\sigma^{m+1} y = z} e^{S_m\phi(y) + \phi(\sigma^m y)} h(y) \mathbf{1}_E(y) \\ &\geq e^{S_m\phi(y') - \|\phi\|} h(y') \\ &\geq (\inf h) e^{-\|\phi\| - a} e^{S_m\phi(x)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\mu}(E) = \nu(h\mathbf{1}_E) = \lambda^{-(m+1)}\nu(\mathcal{L}^{m+1}(h\mathbf{1}_E)) \geq \lambda^{-m} e^{S_m\phi(x)} \underbrace{(\lambda(\inf h) e^{-\|\phi\| - a})}_{c_2}.$$

On a les inégalités souhaitées avec $P = \log\lambda$, ce qui montre que $\tilde{\mu}$ est bien une mesure de Gibbs. □

Proposition III.4.5. *La mesure $\tilde{\mu}$ est mélangeante par rapport à σ : pour tout boréliens $E, F \in \mathcal{B}(\Sigma_n)$ on a*

$$\tilde{\mu}(E \cap \sigma^{-m} F) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{\mu}(E)\tilde{\mu}(F).$$

Preuve. Soit $x \in \Sigma_n$, et $f \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$. On prouve par récurrence que

$$\mathcal{L}^m f(x) = \sum_{\sigma^m y = x} e^{S_m \phi(y)} f(y).$$

Ainsi, si $g \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$, on a

$$((\mathcal{L}^m f) \cdot g)(x) = \sum_{\sigma^m y = x} e^{S_m \phi(y)} f(y) g(\sigma^m y) = \mathcal{L}^m (f \cdot (g \circ \sigma^m)).$$

Pour prouver que $\tilde{\mu}$ est mélangeante, il suffit de le montrer pour E, F dans la base de la topologie de Σ_n. Soit alors $a, b \in \Sigma_n$ et $E = \{y \in \Sigma_n \mid y_i = a_i, r \leq i \leq s\}$ et $F = \{y \in \Sigma_n \mid y_i = b_i, r \leq i \leq s\}$. Comme $\tilde{\mu}$ est invariante par σ, on peut supposer $r, u \geq 0$, de telle sorte que $\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F \in \mathcal{C}(\Sigma_n^+)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(E \cap \sigma^{-m} F) &= \tilde{\mu}(\mathbf{1}_E \mathbf{1}_{\sigma^{-m} F}) = \tilde{\mu}(\mathbf{1}_E (\mathbf{1}_F \circ \sigma^m)) \\
&= \nu(h \mathbf{1}_E (\mathbf{1}_F \circ \sigma^m)) \\
&= \lambda^{-m} \mathcal{L}^{*m} \nu(h \mathbf{1}_E (\mathbf{1}_F \circ \sigma^m)) \\
&= \nu(\lambda^{-m} \mathcal{L}^m (h \mathbf{1}_E) \mathbf{1}_F).
\end{aligned}$$

De là, on obtient grâce au lemme III.3.8 et au fait que $\mathbf{1}_E \in \mathcal{C}_s$

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mu}(E \cap \sigma^{-m} F) - \tilde{\mu}(E)\tilde{\mu}(F)\right| &= \left|\mu(E \cap \sigma^{-m} F) - \nu(h \mathbf{1}_E)\nu(h \mathbf{1}_F)\right| \\
&= \left|\nu\left[(\lambda^{-m} \mathcal{L}^m (h \mathbf{1}_E) - \nu(h \mathbf{1}_E) h) \mathbf{1}_F\right]\right| \\
&\leq \left\|\lambda^{-m} \mathcal{L}^m (h \mathbf{1}_E) - \nu(h \mathbf{1}_E) h\right\| \nu(F) \\
&\leq A \nu(h \mathbf{1}_E) \nu(F) \beta^{m-s} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

lorsque $m \to \infty$, ce qui permet de conclure. $\square$

Finalement, on a construit une mesure de Gibbs mélangeante donc ergodique. En vertu de la proposition III.1.3, cette mesure est l'unique mesure de Gibbs pour cette fonction de potentiel ϕ.

III.5 Généralisation au sous-décalage de type fini

Considérons une matrice A de taille $n \times n$ dont chacun des coefficients est soit 1 soit 0. On dira qu'une telle matrice est une *matrice d'incidence*. On peut la voir comme la matrice associée à un graphe orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ dès lors que $\mathcal{S} = [\![1, n]\!]$ et

$$A_{i,j} = 1 \iff (i, j) \in \mathcal{A}.$$

Ainsi, l'ensemble Σ_A des suites de sommets valide pour ce graphe est inclus dans Σ_n, plus précisement

$$\Sigma_A = \left\{x \in \Sigma_n \mid \forall i \in \mathbf{Z}, A_{x_i, x_{i+1}} = 1\right\}.$$

Dans la suite on supposera de plus que pour tout entier k compris entre 1 et n, il existe toujours $x \in \Sigma_A$ tel que $x_0 = k$.

Définition III.5.1. On appelle sous-décalage de type fini (de Σ_n) le couple (Σ_A, σ_A) tel que pour tout $x \in \Sigma_A$ on ait

$$\forall i \in \mathbf{Z}, (\sigma_A x)_i = x_{i+1},$$

pour une matrice d'incidence A.

Dans ce nouveau cadre, le théorème d'existence des mesures de Gibbs est encore valide sous une hypothèse supplémentaire :

Théorème III.5.1 (Existence des mesures de Gibbs)**.** *Supposons qu'il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que tout les coefficients de A^M soit strictement positifs, et $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_A)$.*

Alors il existe une unique mesure $\mu = \mu_\phi \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A)$ et des constantes $c_1, c_2 > 0$ et $P = P(\phi) \in \mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \Sigma_A, \forall m \in \mathbf{N}, \ \frac{\mu(C_A(x, m))}{\exp(-Pm + S_m\phi(x))} \in [c_1, c_2],$$

où $C_A(x, m) = C(x, m) \cap \Sigma_A$.

Remarque. La preuve dans ce cadre reprend les mêmes idées que dans le cas où $A = (1)_{1\leq i,j\leq n}$, l'essentiel à adapter étant de prendre des puissances de $\mathcal{L}$ multiples de M (où M vérifie $A^M > 0$) pour avoir des chemins valides entre toutes les paires de points du graphe A. On peut retrouver la preuve du cas plus général dans [Bow75].

IV.

DYNAMIQUE HYPERBOLIQUE

IV.1 Automorphismes hyperboliques du tore

Soit f un endomorphisme linéaire bijectif de $E = \mathbf{R}^n$. On pose $\mathrm{Sp}_- f = \{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f \mid |\lambda| < 1\}$ et $\mathrm{Sp}_+ = \{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f \mid |\lambda| > 1\}$. On peut maintenant définir le sous-espace stable E_s et le sous-espace instable E_u de f par

$$\begin{cases} E_s &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_- f} E_\lambda(f), \\ E_u &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_+ f} E_\lambda(f), \end{cases}$$

On dira qu'une norme $\|\cdot\|$ est adaptée à f si pour tout $v_s \in E_s$ et $v_u \in E_u$ on a

$$\|v_s + v_u\| = \max\{\|v_s\|, \|v_u\|\}.$$

On introduit maintenant les endomorphismes linéaires du tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. Pour ce faire, dans toute la suite on notera $p\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{T}^n$ la projection de $\mathbf{R}^N$ sur le tore. De plus, si $\|\cdot\|$ est une norme sur R^n, on définit la distance quotient d sur le tore donnée par

$$\forall x, y \in \mathbf{T}^n, d(x,y) = \inf\{\|u - v\| \mid u, v \in \mathbf{R}^n, p(u) = x, p(v) = y\}.$$

Proposition IV.1.1. *Soit M une matrice de taille $n \times n$ et $f = f_M$ l'endomorphisme associé à M. Si M est à coefficients entiers, alors f se factorise en un endomorphisme du tore $\mathbf{T}^n$.*

Preuve. Si M est à coefficients entiers, si on considère $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Z}^n$ alors $M(x+y) = Mx + My \in Mx + \mathbf{Z}^n$, et donc $M(x+y) \equiv Mx$ dans $\mathbf{T}^n$. Ainsi f se factorise sur le tore en $\tilde{f}(x) = Mx \pmod 1$, de sorte que $p \circ f = \tilde{f} \circ p$. □

Proposition IV.1.2. *Soit $M \in M_n(\mathbf{Z})$. Alors M est inversible dans $M_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si* $\det M = \pm 1$.

Définition IV.1.1. Soit M une matrice à coefficients entiers. On dit qu'une matrice inversible M est hyperbolique si elle possède n valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) de module différent de 1 *ie.* $\mathrm{Sp}\, f \cap \mathbf{S}^1 = \emptyset$ et que $E = E_s \oplus E_u$.

On dit qu'un automorphisme $f = f_M$ du tore $\mathbf{T}^n$ est hyperbolique si la matrice M est hyperbolique et de déterminant ± 1.

Remarque. D'un point de vue géométrique, un automorphisme hyperbolique dilate l'espace E_u et contracte E_s.

Désormais, dans toute la suite on notera f un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbf{T}^n$ associé à la matrice M et $\|\cdot\|$ une norme adaptée à la décomposition de cette matrice en somme de sous-espaces stable et instable.

IV.2 Dynamique symbolique

Définition IV.2.1. Soit (x_i) une suite de points du tore.

— On dit que (x_i) est une η-pseudo-orbite si

$$\forall i \in \mathbf{Z}, d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \eta.$$

— On dit que (x_i) est ε-pistée par l'orbite du point $x \in \mathbf{T}^n$ si

$$\forall i \in \mathbf{Z}, d(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon.$$

Lemme IV.2.1 (Lemme de pistage)**.** *Pour $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que si (x_i) est une η-pseudo-orbite, alors il existe un unique point $x \in \mathbf{T}^n$ tel que (x_i) est ε-pistée par l'orbite de x.*

On peut trouver une preuve de ce lemme dans [Bow75]

Définition IV.2.2. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbf{T}^n$.La variété stable locale de f en x, notée $W^s_\varepsilon(x)$, est définie par

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbf{T}^n \mid \forall n \geq 0, d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\},$$

et la variété instable locale de f en x, notée $W^u_\varepsilon(x)$, donnée par

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbf{T}^n \mid \forall n \leq 0, d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\}.$$

Remarque. La variété stable de f en un point x donne l'ensemble des points du tore qui ont le même "futur" que x pour la dynamique donnée par f, et la variété instable de f donne les points qui ont le même "passé" que x pour f. On peut alors remarquer que pour que deux points aient le même futur, il est nécessaire que ces deux points soient dans le même sous-espace affine dirigé par E_s. Pour que deux points aient le même passé, il faut qu'ils soient sur le même sous-espace affine dirigé par E_u.

Proposition IV.2.2. *Soit $\varepsilon > 0$ et deux points x, y du tore et $u, v \in \mathbf{R}^n$ tels que $p(u) = x, p(v) = y$. Alors $W^s_\varepsilon(x) = p(B(u,\varepsilon) \cap (u + E_s))$ et $W^u_\varepsilon(x) = p(B(u,\varepsilon) \cap (u + E_u))$.*

Proposition IV.2.3. *Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in \mathbf{T}^n$. Alors*

1. *$f(W^s_\varepsilon(x)) \subseteq W^s_\varepsilon(f(x))$ et $f(W^u_\varepsilon(x)) \supseteq W^u_\varepsilon(f(x))$,*
2. *si $d(x,y) \leq \varepsilon$, alors $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ est un singleton, et on note $[x,y]$ son unique élément,*
3. *l'application $(x,y) \mapsto [x,y]$ est continue et on l'appelle produit local.*

Preuve. Soit $y \in W^s_\varepsilon(x)$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geq 0, d(f^n(f(x)), f^n(f(y))) \leq \varepsilon$, d'où $f(y) \in W^s_\varepsilon(f(x))$. De même pour l'inclusion pour les variétés instables, ce qui prouve le premier point.

Supposons que $d(x,y) \leq \varepsilon$, on considère alors $u, v \in \mathbf{R}^n$ comme dans la proposition précédente et vérifiant $\|u - v\| \leq \varepsilon$. Alors $\{w\} = (u+E_s) \cap (v+E_u)$ est un singleton, car $E_s \oplus E_u = \mathbf{R}^n$ et donc $E_s \cap E_u = \{0\}$. De plus $w \in B(u,\varepsilon) \cap B(v,\varepsilon) \neq \emptyset$ car $u - w \in E_s$ et $v - w \in E_u$

$$\|u - w\| \leq \max\{\|u - w\|, \|v - w\|\} = \|u - w + w - v\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $p(w) \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ et c'est le seul élément dans cette intersection.

Pour la continuité du produit local, remarquons pour que $[x,y] \in B(z,\delta)$ alors $x \in B(z,r)$ et $y \in B(z,r)$ où $r = \min\{\varepsilon, \delta\}$, et $d(x,y) \leq \varepsilon$. □

Définition IV.2.3. Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{T}^n$. On dit que $\mathcal{R}$ est un rectangle dès lors que

$$\forall x, y \in \mathcal{R}, \ \ [x, y] \in \mathcal{R}.$$

On dira que $\mathcal{R}$ est un rectangle propre si c'est un rectangle et que $\mathcal{R} = \overline{\mathring{\mathcal{R}}}$.

De plus, quand $\mathcal{R}$ est un rectangle, on notera

$$W^s_{\mathcal{R}}(x) = W^s_\varepsilon(x) \cap \mathcal{R} \quad \text{et} \quad W^u_{\mathcal{R}}(x) = W^u_\varepsilon(x) \cap \mathcal{R}.$$

Proposition IV.2.4. *Soit R un rectangle de $\mathbf{T}^n$. Alors en identifiant par rapport aux sous-espaces stables et instables, on peut décomposer le bord de R sous la forme $\partial R = \partial^s R \cup \partial^u R$, avec $\partial^s R = \{x \in R \mid W^s_\varepsilon(x) \cap \operatorname{Int} R = \emptyset\}$ et $\partial^u R = \{x \in R \mid W^u_\varepsilon(x) \cap \operatorname{Int} R = \emptyset\}$.*

On peut enfin introduire la notion de partition de Markov, qui permet de coder la dynamique de f dans un espace de Bernoulli.

Définition IV.2.4. Une partition de Markov de $\mathbf{T}^n$ est un recouvrement fini $\mathcal{R} = (R_i)$ de $\mathbf{T}^n$ par des rectangles propres vérifiant :

1. pour tout $i \neq j$, on a $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$,
2. si $x \in \mathring{R}_i$ et $f(x) \in \mathring{R}_j$, alors

$$\begin{cases} f(W^s_{R_i}(x)) \subseteq W^s_{R_j}(f(x)), \\ f(W^u_{R_i}(x)) \supseteq W^u_{R_j}(f(x)). \end{cases}$$

De plus, la matrice d'incidence A (dont les coefficients sont dans $\{0, 1\}$) associé à la partition de Markov $\mathcal{R}$ est donnée par

$$A_{i,j} = 1 \iff f(\mathring{R}_i) \cap \mathring{R}_j \neq \emptyset.$$

Théorème IV.2.5. *Soit $\mathcal{R} = (R_i)_{1 \le i \le m}$ une partition de Markov et (Σ_A, σ) l'espace de Bernoulli associé à la matrice d'incidence A de la partition $\mathcal{R}$. Alors,*

1. *pour $\omega \in \Sigma_A$, l'intersection $\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} f^{-i}(R_{\omega_i})$ est un singleton et on note $\pi(\omega)$ cet unique élément,*
2. *l'application $\pi \colon \Sigma_A \longrightarrow \mathbf{T}^n$ est continue, surjective et $f \circ \pi = \pi \circ \sigma$,*
3. *si $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A)$ est ergodique de support Σ_A, alors*

$$\mu \left\{ \omega \in \Sigma_A \mid \operatorname{Card} \pi^{-1}(\pi(\omega)) > 1 \right\} = 0.$$

De cette manière, on peut considérer que π est injective quitte à retirer un ensemble de mesure nulle pour certaines mesures (en particulier la mesure de Gibbs de la section précédente). La dynamique de f sur le tore peut alors être codée par un sous-décalage de Σ_m, permettant ainsi une étude plus simple de cette dynamique, et notamment de munir ces systèmes de mesures de probabilités. En effet si μ est la mesure de Gibbs sur Σ_A, alors la mesure $\pi_*\mu$ vérifie des propriétés sur le tore semblable à celle vérifiée sur Σ_A.

Preuve du théorème IV.2.5. Soit $\omega \in \Sigma_A$. Posons $K_n(\omega) = \bigcap_{i=-n}^{n} f^{-i}(R_{\omega_i})$ qui est un compact non vide pour tout $n \geq 1$. De plus la suite $(K_n(\omega))_{n\geq 1}$ est décroissante. Ainsi, en tant qu'intersection décroissante de compact non vide,

$$K = \bigcap_{i\in\mathbf{Z}} f^{-i}(R_{\omega_i}) = \bigcap_{i\geq 1} K_i(\omega)$$

est un compact non vide de $\mathbf{T}^n$. Reste à vérifier que K contient au plus un élément. Supposons par l'absurde que $x, y \in K$, alors pour tout $i \in \mathbf{Z}$ on a, en supposant que les rectangles de la partition de Markov sont de diamètre au plus ε,

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon,$$

donc les deux points ont des orbites que se ε-pistent, et par le lemme de pistage il ne peut y en avoir qu'un. D'où $x = y$, et finalement K est un singleton et $\pi(\omega)$ est son unique élément.

Ensuite, π vérifie la relation de semi-conjugaison car

$$K(\sigma\omega) = \bigcap_{i\in\mathbf{Z}} f^{-i}(R_{\omega_{i+1}}) = f(\bigcap_{i\in\mathbf{Z}} f^{-i}(R_{\omega_i})) = f(K(\omega)),$$

et donc $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$.

Concernant la surjectivité de π, soit $x \in \mathbf{T}^n$. On pose alors $\omega \in \Sigma_A$ de sorte que $f^i(x) \in R_{\omega_i}$, ce qui est possible car $\mathcal{R}$ est un recouvrement de $\mathbf{T}^n$ et un tel ω est bien dans Σ_A par construction de Σ_A. Ainsi $x \in \bigcap_{i\in\mathbf{Z}} f^{-i}(R_{\omega_i}) = \{\pi(\omega)\}$.

Pour la continuité de π, si on considère une boule B centrée en x et de rayon $r > 0$, alors, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\operatorname{diam}\left(\bigcap_{-N\leq i\leq N} f^{-i}(R_{\omega_i})\right) \leq r.$$

Ce dernier ensemble est bien un ouvert de Σ_A donc un voisinage de ω et $\pi(K_N(\omega)) \subseteq B$.

Il reste encore le point (3) à démontrer. Soit μ une mesure de probabilité σ-invariante, ergodique et de support Σ_A. Alors $\nu = \pi_*\mu$ la mesure image de μ par π est aussi ergodique, f-invariante et de support $\mathbf{T}^n$. Si on note $Z = \{x \in \mathbf{T}^n \mid \operatorname{Card} \pi^{-1}(x) > 1\}$, alors le point (3) est équivalent à $\nu(Z) = 0$. Nécessairement, $Z \subseteq \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} f^i(\partial\mathcal{R})$, il suffit donc de montrer que ce dernier est de mesure nulle pour ν. On note $\partial\mathcal{R} = \partial^u\mathcal{R} \cup \partial^s\mathcal{R}$, où $\partial^s\mathcal{R} = \bigcup_{R\in\mathcal{R}} \partial^s R$ et de même pour $\partial^u\mathcal{R}$. Or par la propriété (2) des partitions de Markov, $f(\partial^s\mathcal{R}) \subseteq \partial^s\mathcal{R}$, et donc la suite $(f^i(\partial^s\mathcal{R}))_i$ est décroissante, d'où par continuité décroissante et invariance de ν par rapport à f :

$$\nu\left(\bigcap_{i\geq 0} f^i(\partial^s\mathcal{R})\right) = \lim_{i\to\infty} \nu\left(f^i(\partial^s\mathcal{R})\right) = \nu(\partial^s\mathcal{R}).$$

Or l'ensemble $F = \bigcap_{i\geq 0} f^i(\partial^s\mathcal{R})$ vérifie $f^{-1}(F) = F$, donc par ergodicité de ν, il est ou bien de mesure nulle ou égale à 1, cette dernière possibilité est exclue car ν est de support $\mathbf{T}^n$ et F est strictement inclus dans le tore. Donc $\nu(F) = 0$, c'est-à-dire que $\nu(\partial^s\mathcal{R}) = 0$. On fait de même pour $\partial^u\mathcal{R}$ et on en conclut que $0 = \nu(\partial\mathcal{R}) \geq \nu(Z)$. Finalement, on a bien $\nu(Z) = 0$. $\square$

IV.3 Existence des partitions de Markov

L'objectif de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant donnant l'existence de partition de Markov pour f un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbf{T}^n$.

Théorème IV.3.1. *Soit f un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbf{T}^n$, et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une partition de Markov pour f dont ses rectangles sont de diamètre au plus ε.*

Considèrons $\eta > 0$ et $(x_i)_{i \leq I}$ une suite η-dense dans $\mathbf{T}^n$ (*ie.* tout point de $\mathbf{T}^n$ est à distance au plus η d'un point x_i). On fixera plus tard des contraintes sur η pour faire en sorte que les rectangles de la partition de Markov soient de diamètre inférieur à ε. Soit A une matrice à coefficients dans $\{0,1\}$ définie par

$$\forall i, j \leq I, \quad A_{i,j} = 1 \iff f(x_i) \in B(x_j, \eta(1 + \|M\|)),$$

et (Σ_A, σ) le sous-décalage associé à la matrice d'incidence A.

Proposition IV.3.2. *Il existe une application $\theta \colon \Sigma_A \longrightarrow \mathbf{T}^n$ vérifiant :*

1. *θ est surjective et continue,*
2. *on a la relation de semi-conjugaison : $\theta \circ \sigma = f \circ \theta$,*
3. *pour tout $\omega \in \Sigma_A$ et pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on a $d(f^i(\theta(\omega)), x_{\omega_i}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$,*

Preuve. Soit $\omega \in \Sigma_A$, alors la suite (x_{ω_i}) est une η'-pseudo-orbite où $\eta' = \eta(1 + \|M\|)$ car pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$d(f(x_{\omega_i}), x_{\omega_{i+1}}) \leq \eta(1 + \|M\|).$$

Donc il existe un $\eta > 0$ tel qu'il existe un point $\theta(\omega) \in \mathbf{T}^n$ dont l'orbite $\frac{\varepsilon}{2}$-piste la suite x_{ω_i}, par le lemme de pistage, et ainsi le point (3) est vérifié par construction de θ.

L'application θ ainsi définie est continue, pour le montrer on procède de la même manière que dans la preuve du théorème IV.2.5.

Elle est de plus surjective car si $x \in \mathbf{T}^n$, on prend ω tel que $f^i(x) \in B(x_{\omega_i}, \eta)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Une telle suite ω appartient bien à Σ_A car

$$\begin{aligned} d(f(x_{\omega_i}), x_{\omega_{i+1}}) &\leq d(f(x_{\omega_i}), f(f^i(x))) + d(f^{i+1}(x), x_{\omega_{i+1}}) \\ &\leq \|M\| \, d(x_{\omega_i}, f^i(x)) + d(x_{\omega_{i+1}}, f^{i+1}(x)) \\ &\leq \eta(1 + \|M\|) = \eta'. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure le premier point de cette proposition.

Finalement, si $x = \theta(\omega)$ alors par la construction précédente, on remarque que $\theta(\sigma\omega) = f(x)$, et donc on a bien la relation de semi-conjugaison : $\theta \circ \sigma = f \circ \theta$. □

Soit $\mathcal{U}_i = \{\omega \in \Sigma_A \mid \omega_0 = i\}$. On pose alors $T_i = \theta(\mathcal{U}_i)$ de sorte que $\mathcal{T} = (T_i)_{i \leq I}$ soit un recouvrement fini de $\mathbf{T}^n$ par des fermés (car θ est continue et $\mathcal{U}_i$ fermé). Cette étape fournie alors un codage intermédiaire de la dynamique de f.

Proposition IV.3.3. *Pour tout i, T_i est un rectangle de diamètre inférieur à ε.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons avoir besoin d'introduire une structure de produit local sur Σ_A qui respecte le produit local sur $\mathbf{T}^n$ et le codage θ.

Soit $\omega, \omega' \in \Sigma_A$ tels que $\omega_0 = \omega'_0$, alors on définit le produit local $[\omega, \omega']$ par

$$\forall i \in \mathbf{Z}, \quad [\omega, \omega']_i = \begin{cases} \omega_i & \text{si } i \geq 0, \\ \omega_i & \text{si } i \leq 0. \end{cases}$$

Lemme IV.3.4. *Soit $\omega, \omega' \in T_i$. Alors $[\theta(\omega), \theta(\omega')] = \theta([\omega, \omega'])$.*

Preuve. On note $x = \theta(\omega), y = \theta(\omega')$ et $z = \theta([\omega, \omega'])$. Pour montrer ce résultat, il s'agit de montrer d'abord que $z \in W^s_\varepsilon(x)$ puis de manière identique que $z \in W^u_\varepsilon(y)$. Soit $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} d(f^i(z), f^i(x)) &= d(f^i(\theta([\omega, \omega'])), f^i(\theta(\omega))) \\ &\leq d(f^i(\theta([\omega, \omega'])), x_{\omega_i}) + d(x_{\omega_i}, f^i(\theta(\omega))) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} .$$

D'où, $z \in W^s_\varepsilon(x)$ et donc $z = [x, y]$. □

Preuve de la proposition IV.3.3. D'abord, on montre que T_i est un rectangle. Soit $x, y \in T_i$, alors il existe $\omega, \omega' \in \mathcal{U}_i$ tels que $x = \theta(\omega)$ et $y = \theta(\omega')$ Alors par le lemme précédent,

$$[x, y] = [\theta(\omega), \theta(\omega')] = \theta([\omega, \omega']) \in \theta(\mathcal{U}_i) = T_i.$$

Donc T_i est un rectangle.

De plus comme $x \in T_i$ et $\omega_0 = i$, alors grâce au point (3) de la proposition précédente

$$x = \theta(\omega) \in B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

et de même pour y, donc par l'inégalité triangulaire, $d(x, y) \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que le diamètre de T_i est majoré par ε. □

Ce recouvrement, bien qu'il ne soit pas encore une partition de Markov, vérifie une propriété semblable à la seconde condition des partitions de Markov.

Lemme IV.3.5. *Soit $\omega \in \Sigma_A$. On note $i = \omega_0, j = \omega_1$ et $x = \theta(\omega)$. Alors,*

$$\begin{cases} f(W^s_{T_i}(x)) \subseteq W^s_{T_j}(f(x)), \\ f(W^u_{T_i}(x)) \supseteq W^u_{T_j}(f(x)). \end{cases}$$

Preuve. On prouve ici seulement la première inclusion, la seconde se traitant de la même manière.

Soit $y \in W^s_{T_i}(x)$, donc déjà $f(y) \in W^s_\varepsilon(f(x))$. Il reste alors à montrer que $f(y) \in T_j$. Comme $y \in T_i$, il existe $\omega' \in \mathcal{U}_i$ tel que $\theta(\omega') = y$. Alors $f(y) = \theta([\omega, \omega'])$. En effet, $y = [x, y]$ car y est dans la variété stable de x, ainsi

$$f(y) = f([x, y]) = f(\theta[\omega, \omega']) = \theta(\sigma[\omega, \omega']) \in \theta(\mathcal{U}_j) = T_j,$$

car $\omega_1 = j$. Ce qui prouve l'inclusion $f(W^s_{T_i}(x)) \subseteq W^s_{T_j}(f(x))$. □

Lemme IV.3.6. *Soit $\omega \in \mathcal{U}_i$ et $x = \theta(\omega)$. Alors, $W^s_{T_i}(x) = \theta(\{\omega' \in \Sigma_A \mid \forall i \geq 0, \omega_i = \omega'_i\})$.*

Preuve. C'est le même argument que celui utilisé dans la preuve du lemme précédent. □

Ce qui empêche ce recouvrement d'être une partition de Markov, c'est le fait que les rectangles qui le composent peuvent s'intersecter. Pour remédier à ce problème, on note pour chaque point $x \in \mathbf{T}^n$,

$$\mathcal{T}(x) = \{T_i \in \mathcal{T} \mid x \in T_i\} \text{ et } \mathcal{T}^*(x) = \{T_k \in \mathcal{T} \mid \exists T_j \in \mathcal{T}(x), T_j \cap T_k \neq \emptyset\}.$$

De plus, pour des rectangles T_i, T_j qui s'intersectent, on découpe T_i en 4 morceaux donnés par :

$$\begin{aligned}
T(i,j,su) &= \left\{x \in T_i \mid W^s_{T_i}(x) \cap T_j \neq \emptyset, W^u_{T_i}(x) \cap T_j \neq \emptyset\right\} = T_i \cap T_j,\\
T(i,j,s0) &= \left\{x \in T_i \mid W^s_{T_i}(x) \cap T_j \neq \emptyset, W^u_{T_i}(x) \cap T_j = \emptyset\right\},\\
T(i,j,0u) &= \left\{x \in T_i \mid W^s_{T_i}(x) \cap T_j = \emptyset, W^u_{T_i}(x) \cap T_j \neq \emptyset\right\},\\
T(i,j,00) &= \left\{x \in T_i \mid W^s_{T_i}(x) \cap T_j = \emptyset, W^u_{T_i}(x) \cap T_j = \emptyset\right\}.
\end{aligned}$$

Lemme IV.3.7. *Si T_i et T_j s'intersectent, alors pour tout $q \in \{su, s0, 0u, 00\}$, $T(i,j,q)$ est un rectangle.*

Preuve. Soit $x, y \in T(i,j,q)$. Alors comme $W^s_{T_i}(x) = W^s_{T_i}([x,y])$ et $W^u_{T_i}(y) = W^u_{T_i}([x,y])$, on en déduit que $[x,y] \in T(i,j,q)$ *ie.* $T(i,j,q)$ est un rectangle. □

On a ainsi construit des nouveaux rectangles en nombre fini. Pour éviter les points proches des bords de ces rectangles, on définit Z^* par :

$$Z^* = \{x \in \mathbf{T}^n \mid W^s_\varepsilon(x) \cap \partial^s T_j = \emptyset, W^u_\varepsilon(x) \cap \partial^u T_j = \emptyset \text{ pour } T_j \in \mathcal{T}^*(x)\}.$$

qui est un ouvert dense de $\mathbf{T}^n$.

Pour chaque point $x \in \mathbf{T}^n$ on définit

$$R(x) = \bigcap \{\operatorname{Int} T(i,j,q) \mid x \in T_i, T_i \cap T_j \neq \emptyset, x \in T(i,j,q)\},$$

qui est alors un rectangle en tant qu'intersection de rectangles. De plus, les rectangles de la forme $T(i,j,q)$ sont en nombre fini donc on ne peut en faire qu'un nombre fini d'intersection. Notons alors $\mathcal{R} = \{\overline{R(x)} \mid x \in \mathbf{T}^n\} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ ces nouveaux rectangles.

Proposition IV.3.8. *Pour $x, y \in \mathbf{T}^n$, si $y \in R(x)$ alors $R(x) = R(y)$. Ainsi, les intérieurs des rectangles de $\mathcal{R}$ ne s'intersectent pas, et vérifie donc la propriété (1) des partitions de Markov.*

Preuve. Soit $y \in R(x)$. Alors $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$, en effet comme $y \in R(x)$ on a $\mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{T}(y)$ et si $x \notin T_i$, alors on a $R(x) \cap T_i = \emptyset$, ce qui donne l'inclusion réciproque : $\mathcal{T}(y) \subseteq \mathcal{T}(x)$.

Si $x \in T_i$ et $T_i \cap T_k \neq \emptyset$, alors il existe q tel que $x \in T(i,k,q)$. Or $y \in R(x) \subseteq T(i,k,q)$, donc finalement on a bien $R(x) = R(y)$.

Ainsi, si $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$, on considère z dans cette intersection, donc $R(x) = R(z) = R(y)$ par ce qui précède, ce qui donne la propriété (1) voulue. □

Il reste maintenant à vérifier que le recouvrement $\mathcal{R}$ vérifie la propriété (2) des partitions de Markov. Pour ce faire, on démontre d'abord un résultat intermédiaire, sur les points x tels que $W^u_\varepsilon(x)$ et $W^u_\varepsilon(f(x))$ ne rencontrent pas $\partial^u \mathcal{T} = \bigcup_{T_i \in \mathcal{T}} \partial^u T_i$

Lemme IV.3.9. *Soit $x, y \in \mathbf{T}^n$ tels que les variétés stables locales en $x, y, f(x)$ et $f(y)$ ne rencontrent $\partial^u \mathcal{T}$. Supposons de plus que $R(x) = R(y)$ et que $y \in W^s_\varepsilon(x)$. Alors $R(f(x)) = R(f(y))$.*

Preuve. Dans un premier temps, on montre que $\mathcal{T}(f(x)) = \mathcal{T}(f(y))$. Si $f(x) \in T_j$, considérons $\omega \in \Sigma_A$ tel que $\omega_0 = i$ et $\omega_1 = j$ et $f(x) = \theta(\sigma\omega)$. Alors $x \in T_i$, et donc $f(y) \in f(W^s_{T_i}(x)) \subseteq W^s_{T_j}(f(x)) \subseteq T_j$. Donc $\mathcal{T}(f(x)) \subseteq \mathcal{T}(f(y))$. Réciproquement, comme $W^s_{T_i}(x) = W^s_{T_i}(y)$, grâce au lemme IV.3.6, on a bien $\mathcal{T}(f(y)) \subseteq \mathcal{T}(f(x))$.

Ensuite, supposons que $f(x), f(y) \in T_j$ et qu'il existe T_k tel que $T_j \cap T_k \neq \emptyset$. On va montrer que $f(x)$ et $f(y)$ sont dans le même $T(j, k, q)$, ce qui permettra de conclure. Comme $f(y) \in W^s_\varepsilon(f(x))$, alors $W^s_{T_j}(f(y)) = W^s_{T_j}(f(x))$. Ainsi, si $f(x) \in T(j, k, q)$ pour $q \in \{su, s0\}$, alors $f(y) \in T(j, k, su) \cup T(j, k, s0)$, et de même lorsque $q \in \{0u, 00\}$.

On va désormais montrer l'implication suivante :

$$W^u_{T_j}(f(x)) \cap T_k \neq \emptyset \implies W^u_{T_j}(f(y)) \cap T_k \neq \emptyset.$$

Soit alors $f(z) \in W^u_{T_j}(f(y)) \cap T_k$. Notons $\omega \in \Sigma_A$ tel que $f(x) = \theta(\sigma\omega)$ avec $\omega_0 = s$ et $\omega_1 = j$. Alors par le lemme IV.3.5, on a

$$f(z) \in W^u_{T_j}(f(x)) \subseteq f(W^u_{T_s}(x)).$$

On peut alors prendre $z \in W^u_{T_s}(x)$. On note alors $\omega' \in \Sigma_A$ tel que $\theta(\sigma\omega') = f(z)$ avec $\omega'_0 = t$ et $\omega'_1 = k$. On a alors $T_s \in \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ et $T_t \cap T_s \neq \emptyset$. Comme $z \in T_t$, on a $z \in W^u_{T_s}(x) \cap T_t$. Or x, y sont dans le même $T(s, t, q)$ (qui est un rectangle), donc il existe $z' \in W^u_{T_s}(y) \cap T_t$. Ainsi,

$$z'' = [z, y] = [z, z'] \in \begin{cases} W^s_\varepsilon(z) \cap W^u_\varepsilon(y) & \text{par de définition du produit local,} \\ T_t & \text{car } z \text{ et } z' \text{ sont dans } T_t \text{ qui est un rectangle,} \\ T_s & \text{car } z \text{ et } z' \text{ sont dans } T_s \text{ qui est un rectangle.} \end{cases}$$

Donc $z'' \in W^s_{T_t}(z) \cap W^u_{T_s}(y)$. Or $f(z'') = [f(z), f(y)]$ qui est donc dans $W^s_\varepsilon(f(z)) \cap W^u_\varepsilon(f(y))$ par définition, mais aussi dans les rectangles T_j et T_k par hypothèse. On a ainsi construit un élément $f(z'') \in W^s_{T_j}(f(z)) \cap W^u_{T_k}(f(y)) \subseteq T_k \cap W^u_{T_j}(f(y))$ qui est donc non vide. On montre de la même manière l'implication réciproque, et finalement on en conclut que $R(f(x)) = R(f(y))$. □

Proposition IV.3.10. *Le recouvrement $\mathcal{R}$ vérifie la propriété (2) des partitions de Markov, à savoir : si $x \in \operatorname{Int} R_i$ et $f(x) \in \operatorname{Int} R_j$, alors*

$$f(W^s_{R_i}(x)) \subseteq W^s_{R_j}(f(x)) \ \ \text{et} \ \ f(W^u_{R_i}(x)) \supseteq W^u_{R_j}(f(x)).$$

Preuve. Soit $x \in \operatorname{Int} R_i \cap f^{-1}(\operatorname{Int} R_j)$, alors les variétés stables locales de x et $f(x)$ ne rencontrent pas $\partial^u \mathcal{T}$. Si $y \in W^s_{R_i}(x)$, alors il en va de même, on peut alors appliquer le lemme précédent : $R_j = \overline{R(f(x))} = \overline{R(f(y))}$. Ainsi, $f(y) \in R_j \cap W^s_\varepsilon(f(x)) = W^s_{R_j}(f(x))$. L'autre inclusion se traite de la même manière. □

Ce qui termine la preuve de ce théorème, c'est-à-dire que $\mathcal{R} = (R_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une partition de Markov dont le diamètre de chacun de ses rectangles est inférieur à ε.

On peut alors étendre le cadre d'utilisation de ce théorème à une certaine classe de difféomorphisme, c'est l'objet du paragraphe suivant.

IV.4 Généralisation aux difféomorphismes Axiome A

Désormais, on considère une variété riemannienne M et $f\colon M \longrightarrow M$ un difféomorphisme.

Définition IV.4.1. On dit qu'un ensemble $\Lambda \subseteq M$ est hyperbolique si $f(\Lambda) = \Lambda$ et qu'il existe pour tout $x \in \Lambda$ deux sous-espaces E_x^s, E_x^u de T_xM vérifiant :

1. $T_xM = E_x^s \oplus E_x^u$,
2. $df(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ et $df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$,
3. il existe des constantes $c > 0$ et $\lambda \in]0,1[$ telles que pour tout $i \in \mathbf{N}$ on ait
$$\forall v \in E_x^s,\ \left\|df^i(v)\right\| \leq c\lambda^i \left\|v\right\|, \forall v \in E_x^u,\ \left\|df^{-i}(v)\right\| \leq c\lambda^i \left\|v\right\|.$$
4. E_x^s et E_x^u varient continûment par rapport à x.

Définition IV.4.2. Un point $x \in M$ est non-errant si pour tout voisinage U de x on a
$$U \cap \bigcup_{i>0} f^i(U) \neq \emptyset.$$

On note alors $\Omega(f)$ l'ensemble de tout les points non-errants pour f. Remarquons que les points ayant une orbite périodiques sont clairement non-errants.

On peut enfin définir ce qu'est un difféomorphisme axiome A :

Définition IV.4.3. On dit que f est un difféomorphisme Axiome A si

1. $\Omega(f)$ est hyperbolique et compact,
2. l'ensemble des points d'orbite périodique est dense dans $\Omega(f)$.

En gardant les mêmes définitions de variété stables et instables locales dans ce cadre, on peut aussi définir ce qu'est une partition de Markov. Le théorème suivant, dû à R. Bowen, et dont la preuve garde la même structure et arguments que celle dans le cadre plus simple du tore $\mathbf{T}^n$, donne l'existence de partition de Markov pour ces difféomorphismes.

Théorème IV.4.1. *L'ensemble $\Omega(f)$ admet une partition de Markov de diamètre arbitrairement petit.*

Pour trouver un exemple de tels difféomorphismes, on peut considérer les difféomorphismes de $\mathbf{C}^2$ de la forme
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 & \longrightarrow & \mathbf{C}^2 \\ (z,w) & \longmapsto & (z^2 + c + aw, az) \end{array} \right. .$$
avec $a, c \in \mathbf{C}$, que l'on appelle applications de Hénon. Sous certaines conditions sur les constantes a et c, on peut montrer que f est un difféomorphisme Axiome A.

Pour ce faire, posons
$$K^{\pm} = \left\{p \in \mathbf{C}^2 \mid (f^{\pm n}(p))_n \text{ est bornée}\right\} \text{ et } K = K^+ \cap K^-,$$

On note l'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}$ défini comme étant l'ensemble des points $c \in \mathbf{C}$ tel que la suite $(z_n)_n$ est bornée, où $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Alors d'après le théorème 3.1 de [FS92] et le corollaire 6.14 de [BS91], à savoir

Théorème IV.4.2 ([FS92]). *Si $c \notin \mathcal{M}$, alors il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que f soit hyperbolique sur K qui est alors un ensemble de Cantor.*

Théorème IV.4.3 ([BS91]). *Si f est hyperbolique, alors f vérifie l'Axiome A.*

On aboutit à ce résultat, donnant un exemple de difféomorphisme Axiome A.

Corollaire IV.4.4. *Supposons que $c \notin \mathcal{M}$, alors il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que l'application f donnée par $f(z, w) = (z^2 + c + aw, az)$ satisfait l'Axiome A.*

IV.5 Exemple d'un codage sur $\mathbf{T}^2$

Ce paragraphe est consacré à un exemple : celui d'une partition de Markov composée de trois rectangles pour un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbf{T}^2$ en deux dimensions. On considère alors la matrice

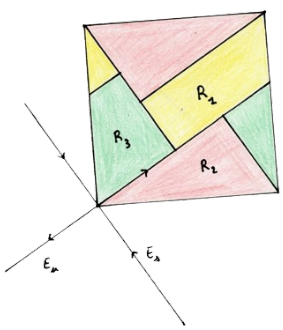
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

et f l'automorphisme du tore $\mathbf{T}^2$ associé. Le polynôme caractéristique associé à cette matrice est $\chi(X) = X^2 - 3X + 1$ et donc son spectre est

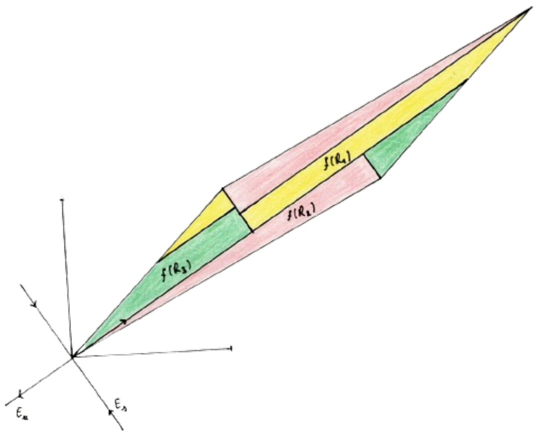
$$\operatorname{Sp} f = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\},$$

qui n'intersecte donc pas le cercle $\mathbf{S}^1$. Un vecteur propre de cette matrice associé à la valeur propre de module plus grand que 1 est $v_u = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}^\top$. Grâce au théorème spectral, on sait que les vecteurs propres pour la valeur propre de module plus petit que 1 sont orthogonaux à v_u, ainsi $v_s = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}^\top$ en est un. On note alors E_s (resp. E_u) l'espace propre associé à v_s (resp. v_u) qui est le sous-espace stable (resp. instable) associé à f, qui sont supplémentaires et donc f est hyperbolique.

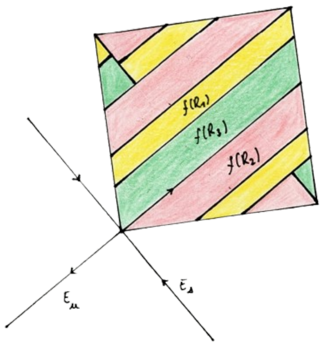
Pour construire une partition de Markov pour cet automorphisme, on commence par tracer le segment partant de l'origine dans la direction de v_u jusqu'à la droite d'équation $x = 1$. Ensuite, on trace le segment partant du point $(0, 1)$ dirigé par v_s jusqu'au segment précédent et on fait de même en partant du point $(1, 0)$. On prolonge alors le premier segment jusqu'à intersecter le second segment, comme ci-dessous (on identifie $\mathbf{T}^2$ au carré $[0, 1[^2$).



Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une partition de Markov et pour obtenir la matrice d'incidence associé, on calcule les images des rectangles de la partition :



Enfin, on projette sur le tore $\mathbf{T}^2$.



On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
&\mathring{R}_1 \cap f(\mathring{R}_1) \neq \emptyset, \quad && \mathring{R}_2 \cap f(\mathring{R}_1) \neq \emptyset, \quad && \mathring{R}_3 \cap f(\mathring{R}_1) \neq \emptyset,\\
&\mathring{R}_1 \cap f(\mathring{R}_2) = \emptyset, \quad && \mathring{R}_2 \cap f(\mathring{R}_2) \neq \emptyset, \quad && \mathring{R}_3 \cap f(\mathring{R}_2) \neq \emptyset,\\
&\mathring{R}_1 \cap f(\mathring{R}_3) \neq \emptyset, \quad && \mathring{R}_2 \cap f(\mathring{R}_3) = \emptyset, \quad && \mathring{R}_3 \cap f(\mathring{R}_3) \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement la matrice d'incidence :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme $A^2 > 0$ par le théorème III.1.1, pour tout potentiel $\phi \in \mathcal{H}(\Sigma_A)$ on a une unique mesure de Gibbs μ_ϕ. De plus, par le théorème IV.2.5, la dynamique de f est conjuguée à celle de (Σ_A, σ_A), et si on pose $\pi\colon \Sigma_A \longrightarrow \mathbf{T}^2$ comme dans le théorème IV.2.5, alors π est injective presque partout pour μ_ϕ, ce qui conclut la construction de cette partition de Markov.

V.

Appendice

Considérons un espace métrique (X, d) compact. On note $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne associée aux ouverts de X. Si $T\colon X \longrightarrow X$ est un homéomorphisme de (X, d), et μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$, on dira que T est un automorphisme dès lors que $T_*\mu = \mu$, où $T_*\mu$ est la mesure image de μ par T. On notera $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$ et $\mathcal{M}_T(X)$ le sous ensemble de $\mathcal{M}(X)$ constitué des mesures invariantes par T.

L'ensemble des fonctions continues de X à valeurs réelles, noté $\mathcal{C}(X)$, muni de la norme $\|f\| = \max_X |f| < \infty$ pour $f \in \mathcal{C}(X)$, est un espace de Banach.

V.1 Théorème de Riesz

On peut alors faire un lien entre $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{C}(X)^*$ l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{C}(X)$, grâce au théorème de représentation de Riesz :

Théorème V.1.1 (Riesz). *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$, on pose $\alpha_\mu \in \mathcal{C}(X)^*$ définie par*

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \alpha_\mu(f) = \int_X f d\mu.$$

Alors l'application $\mu \mapsto \alpha_\mu$ est une bijection entre $\mathcal{M}(X)$ et

$$\{\alpha \in \mathcal{C}(X)^* \mid \alpha(1) = 1, \alpha(f) \geq 0 \text{ si } f \geq 0\}.$$

Dans toute la suite on notera plus simplement μ à la place de α_μ.

Par ailleurs, le fait que X soit un espace métrique compact assure le fait que $\mathcal{C}(X)$ soit séparable, *ie.* il existe une partie dénombrable dense dans $\mathcal{C}(X)$. Soit alors $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues non nulles sur X dense dans $\mathcal{C}(X)$.

V.2 Topologie des espaces de probabilités

Proposition V.2.1. *Pour $\mu, \mu' \in \mathcal{M}(X)$, on pose*

$$d(\mu, \mu') = \sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{-n} \|f_n\|^{-1} \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f_n d\mu' \right|.$$

Alors l'application $d\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathbf{R}$ définit une distance.

De plus, si $(\mu_n)_n$ est une suite de probabilité et $\mu \in \mathcal{M}(X)$, alors on a

$$d(\mu_n, \mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \forall f \in \mathcal{C}(X), \mu_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(f).$$

Proposition V.2.2. *L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ est convexe et compact pour la distance définit précédemment.*

Preuve. On va montrer que $\mathcal{M}(X)$ vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit (μ_n) une suite de probabilité et (f_n) une suite de fonctions dense dans $\mathcal{C}(X)$. On montre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ des extractrices et $G(f_1), \cdots, G(f_k) \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad \mu_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)}(f_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(f_i).$$

En notant $\psi_k = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k$, on a toujours $\mu_{\psi_k(n)}(f_i) \longrightarrow G(f_i)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $i \leq k$. On note finalement $\psi(n) = \psi_n(n)$ et ainsi pour tout $i \in \mathbf{N}$, la suite $\mu_{\psi(n)}(f_i)$ converge vers $G(f_i)$ lorsque $n \to \infty$.

L'application $G\colon \{f_n \mid n \in \mathbf{N}\} \longrightarrow \mathbf{R}$ est uniformément continue, en effet soit $\varepsilon > 0$ et $f, g \in \{f_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ tels que $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Alors,

$$|G(f) - G(g)| \leq |G(f) - \mu_{\psi(n)}(f)| + |\mu_{\psi(n)}(f) - \mu_{\psi(n)}(g)| + |\mu_{\psi(n)}(g) - G(g)| \leq 3\varepsilon,$$

pour n assez grand. Donc G est uniformément continue à valeurs dans un espace complet, on peut alors la prolonger de manière unique en une application $\tilde{G}\colon \mathcal{C}(X)^* \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et vérifiant $\tilde{G}(1) = 1$ et pour toute fonction $f \geq 0, \tilde{G}(f) \geq 0$. Par le théorème de Riesz, il existe une unique probabilité μ telle que $\tilde{G} = \alpha_\mu$, de plus $\mu_n \longrightarrow \mu$, lorsque $n \to \infty$. Finalement, $\mathcal{M}(X)$ est compact. □

Proposition V.2.3. *L'ensemble $\mathcal{M}_T(X)$ est un fermé non vide de $\mathcal{M}(X)$.*

Preuve. L'application $G\colon \mu \in (X) \mapsto T_*\mu - \mu$ est continue car si $(\mu_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}(X)$ convergeant vers μ, alors par le théorème de transfert,

$$\int_X f\, dT_*\mu_n - \int_X f\, d\mu_n = \int_X (f \circ T - f)\, d\mu_n \longrightarrow \int_X f \circ T - f\, d\mu = \int_X f\, dT_*\mu - \int_X f\, d\mu,$$

lorsque $n \to \infty$ et pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$. Ainsi G est continue et donc $\mathcal{M}_T(X)$ est un fermé.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$, on considère $\mu_n = \frac{1}{n}(\sum_{i=0}^{n-1} (T^i)_*\mu)$ et une extractrice φ telle que $(\mu_{\varphi(n)})_n$ converge (possible car $\mathcal{M}(X)$ est compact) vers μ'. Alors $\mu' \in \mathcal{M}_T(X)$, car $T_*\mu_n - \mu_n = \frac{1}{n}(T_*^n\mu - \mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (car pour toute fonction f continue sur X, f est bornée). □

Proposition V.2.4. *Soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$ une mesure de probabilité borélienne. Alors μ est régulière :*

$$\begin{aligned}\forall E \in \mathcal{B}(X), \mu(E) &= \inf\{\mu(O) \mid O \textit{ ouvert}, E \subseteq O\} \\ &= \sup\{\mu(F) \mid F \textit{ fermé}, F \subseteq E\}.\end{aligned}$$

C'est à dire que pour tout borélien $E \in \mathcal{B}(X)$ et $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O contenant E et un fermé F inclus dans E tels que

$$\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(F) \leq \mu(E) \leq \mu(O) \leq \mu(E) + \varepsilon. \tag{*}$$

Preuve. Pour ce faire, on considère l'ensemble

$$\tau = \{E \in \mathcal{B}(X) \mid \forall \varepsilon > 0, \exists O \text{ ouvert}, \exists F \text{ fermé}, F \subseteq E \subseteq O \text{ et } (*)\},$$

et on montre qu'il s'agit d'une tribu, qui contient les fermés.

Soit $E \in \mathcal{B}(X)$, et $\varepsilon > 0$. On prend $F \subseteq E \subseteq O$ avec F fermé et O ouvert vérifiant $(*)$. Alors en posant $F' = O^c$ qui est fermé et $O' = F^c$ qui est ouvert de sorte que $F' \subseteq E^c \subseteq O'$ et on a toujours $(*)$. Donc $E^c \in \tau$.

Pour la stabilité par union dénombrable, on considère $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de boréliens et

$$E = \bigcup_{n\geq 1} E_n = \bigcup_{n\geq 1} \left(\bigcup_{k\leq n} E_k \right),$$

où la suite $(\bigcup_{k\leq n} E_k)_n$ est croissante, et donc $\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k\leq n} E_k) = \mu(E)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$0 \leq \mu(E) - \mu(\bigcup_{k\leq N} E_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour chacun des E_k pour $k \in [\![1, N]\!]$, il existe F_k un fermé inclus dans E_k et tel que $\mu(E_k) - \mu(F_k) \leq \frac{\varepsilon}{2N}$. Or, on a l'inclusion

$$\left(\bigcup_{k\leq N} E_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k\leq N} F_k \right) \subseteq \bigcup_{k\leq N} (E_k \setminus F_k),$$

et donc

$$\mu \left(\bigcup_{k\leq N} E_k \right) - \mu \left(\bigcup_{k\leq N} F_k \right) \leq \sum_{k\leq N} \mu(E_k) - \mu(F_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose alors $F = \bigcup_{k\leq N} F_k$ qui est un fermé inclus dans E et

$$0 \leq \mu(E) - \mu(F) = \mu(E) - \mu \left(\bigcup_{k\leq N} E_k \right) + \mu \left(\bigcup_{k\leq N} E_k \right) - \mu(F) \leq \varepsilon.$$

On procède de la même manière pour construire un ouvert O contenant E de tel sorte qu'on ait l'inégalité $(*)$. Ainsi $E \in \tau$, et finalement τ est une tribu.

Il reste enfin à montrer que τ contient les fermés. Soit F un fermé, alors en posant $O_n = \left\{ x \in X \mid d(x, F) < \frac{1}{n} \right\}$ qui est ouvert par continuité de d et car F est fermé. De plus, la suite $(O_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et $F = \bigcap_{n\geq 1} O_n$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \mu \left(\bigcap_{k\leq n} O_n \right) = \mu(F),$$

ce qui permet de conclure que $F \in \tau$.

Finalement, τ est une tribu qui contient les ouverts, donc $\tau = \mathcal{B}(X)$, et on a bien la propriété voulue. $\square$

Bibliographie

[Bow75] Rufus Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 1975. isbn : 9780387071879.

[BP03] Yves Benoist et Fédéric Paulin. *Systèmes dynamiques élémentaires*. 2003. url : https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~frederic.paulin/notescours/cours_sysdyn.pdf.

[BS91] Eric Bedford et John Smillie. « Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$: currents, equilibrium measure and hyperbolicity. » In : *Inventiones mathematicae* 103.1 (1991), p. 69-100. url : http://eudml.org/doc/143853.

[FS92] John Erik Fornæss et Nessim Sibony. « Complex Hénon mappings on $\mathbf{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains ». In : *Duke Math Journal* (1992).

[KH95] Anatole Katok et Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.

[Nij17] Nadia Nijimbere. *Markov partition and symbolic dynamics of hyperbolic toral automorphisms*. 2017. url : https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/15162/1/Nadia_Nijimbere__2017_WM.pdf.