FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 14: Regra da Cadeia

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

2024

Objetivos

- Entender o conceito para diferenciar funções compostas;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

A Regra da Cadeia

Como será a derivada de uma função composta?

Exemplo: Seja $f(x) = x^3$ e $g(x) = 2x$. Como calcular a derivada da função composta $(f \circ g)'(x)$?

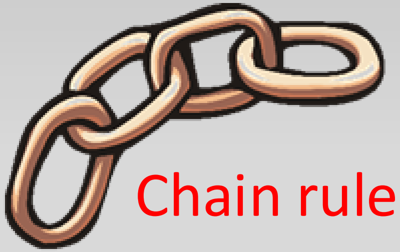
Será que podemos simplesmente usar a Regra da Potência e escrever

$$(f \circ g)'(x) = \left((2x)^3\right)' = 3(2x)^2 = 12x^2?$$

$$\boxed{\text{Mas } (f \circ g)(x) = (2x)^3 = 8x^3\text{. Logo: } (f \circ g)'(x) = 24x^2 \neq 12x^2}$$

A Regra da Cadeia

Se g for diferenciável em x e f for diferenciável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é diferenciável em x e F' é dada pelo produto



Chain rule

$$\boxed{F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)}$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis, então:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

A demonstração da regra da cadeia está nos últimos slides!

A Regra da Cadeia

Um caso particular – A Regra da Potência combinada com a Regra da Cadeia – Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for diferenciável:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\left((2x)^3\right)' = 3(2x)^2(2x)' = 24x^2$$

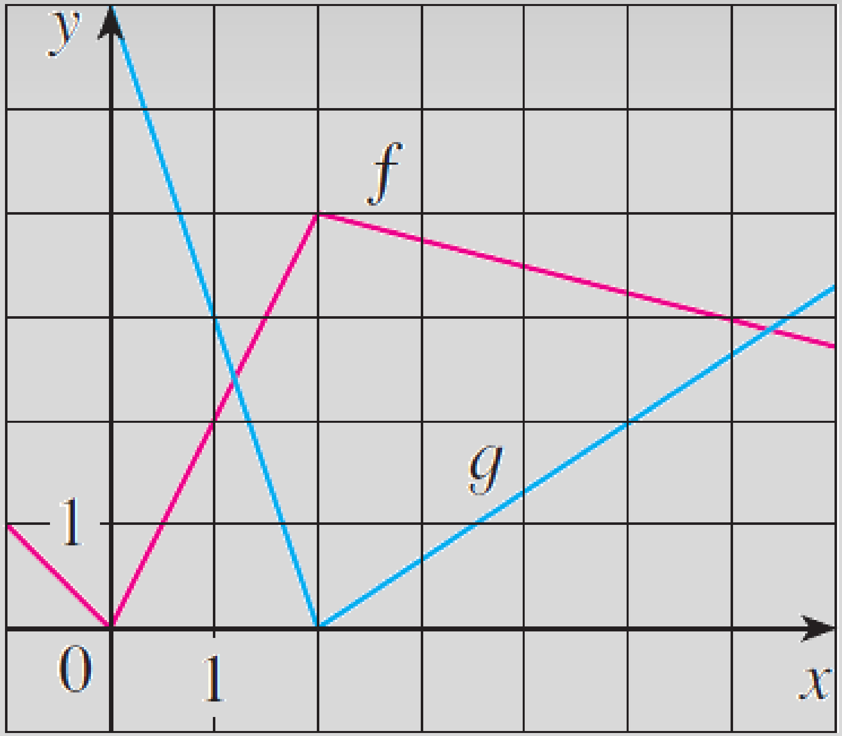
Alternativamente:

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}g(x)$$

Exercícios

Ex01: Se $F(x) = f\big(g(x)\big)$, onde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ e $g'(5) = 6$, encontre $F'(5)$.

Ex02: Se f e g forem as funções cujos gráficos estão mostrados, sejam $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$

Exercícios – usando Python

1. Considere a função composta $f\big(g(x)\big)$, onde:

- $f(u) = u^2 + 3u$
- $u = g(x) = 2x + 1$

Encontre a derivada de $f\big(g(x)\big)$.
Implemente sua solução no Python.

```
import sympy as sp

# Definindo as variáveis
x = sp.symbols('x')

# Definindo a função g(x)
g_x = 2 * x + 1

# Definindo a função f(u) onde u = g(x)
u = sp.symbols('u')
f_u = u**2 + 3 * u

# Substituindo u por g(x) em f(u)
f_g_x = f_u.subs(u, g_x)

# Calculando a derivada de f(g(x)) em relação a x
derivada = sp.diff(f_g_x, x)

# Exibindo a função composta e sua derivada
print(f"f(g(x)) = {f_g_x}")
print(f"Derivada de f(g(x)) em relação a x = {derivada}")
```

Exercícios – usando Python

2. Você é um desenvolvedor de software trabalhando em uma aplicação que simula o desempenho de um sistema de resfriamento para servidores em um data center.

A temperatura interna dos servidores, T, varia ao longo do tempo de acordo com a potência dissipada pelos componentes eletrônicos, $P(t)$, que por sua vez depende da carga de trabalho, $\mathrm{W}(t)$, aplicada aos servidores.

As funções que modelam essas relações são:

- $P(t) = 5t^2 + 3t + 2$
- $T(P) = 2P^3 + 4P$

Sua tarefa é determinar como a temperatura interna dos servidores muda em relação ao tempo, $\frac{dT}{dt}$, para otimizar o sistema de resfriamento.

Lembre-se de que:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dP}\frac{dP}{dt}$$

Exercícios

Ex03: Use a Regra da Cadeia para derivar uma função exponencial com qualquer base $a > 0$.

Ex04: Calcule a derivada:

(a) $y = (x^3 + 5x)^4$	(b) $y = \ln(x^2 + e)$	(c) $a(x) = \ln^2(3x^2 + 1)$
(d) $k(x) = 3\log_5 e^{3x}$	(e) $y = -2e^{x^2+1}$	(f) $y = 4\ln e^{e^x}$
(g) $y = \sqrt{x^5 + e^{2x}}$	(h) $g(u) = \frac{e^u + e^{-2u^2}}{e^{-2u}}$	(i) $y = -e^{-\frac{1}{x^2}}$

Exercícios

Ex05: A reta normal à curva $y = e^{x^2} + \ln\frac{x}{2}$ no ponto $A = (a, b)$ tem equação $y = -\frac{x}{2e+1} + \frac{1}{2e+1} + e + \ln\frac{1}{2}$.

(a) Qual a inclinação da reta normal fornecida?

(b) Qual a inclinação da reta tangente à curva em A?

(c) Use o item (b) e determine as coordenadas de A.

+ Exemplos

(b) Represente as curvas no GeoGebra e verifique seu resultado.

A Regra da Cadeia

Demonstração

Se $y = f(x)$ e x varia de a para $a + \Delta x$, define-se o incremento de y como:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acordo com a definição de derivada, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

Quociente de diferenças

A Regra da Cadeia
Demonstração

- Seja $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada $f'(a)$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Rightarrow \Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$\varepsilon(\Delta x)$ é uma função contínua para todo Δx?

- Então: $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) - f'(a) =$

$$= f'(a) - f'(a) = 0$$

Existência do limite OK!

Se definirmos $\varepsilon(0) = 0$, então ε torna-se uma função contínua de Δx.

A Regra da Cadeia

Demonstração

- Assim, para uma função f diferenciável vale a expressão:

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \text{ onde } \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0 \\ \text{e } \varepsilon \text{ é uma função contínua de } \Delta x\end{array}}$$

- Regra da Cadeia: Suponha que $u = g(x)$ seja diferenciável em a e $y = f(u)$ seja diferenciável em $b = g(a)$. Se Δx for um incremento em x e Δu e Δy forem os incrementos correspondentes nas funções u e y, então:

A Regra da Cadeia
Demonstração

$$\Delta u = g'(a)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\Delta x,$$
onde $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = f'(b)\Delta u + \varepsilon_2 \Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\Delta u,$$
onde $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta u \to 0$

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\Delta x \;\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

A Regra da Cadeia

Demonstração

- Quando $\Delta x \to 0$, tem-se $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \to 0$. Desta forma, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1] =$$

$$= f'(b)g'(a) = f'\big(g(a)\big)g'(a)$$

Isso demonstra a Regra da Cadeia!

Exercícios Complementares

EX-C1: Calcule a derivada:

(a) $g(t) = \frac{1}{(t^4+1)^3}$	(b) $y = \sqrt{2x - e^x}$	(c) $F(x) = (x^4 + 3x^2)^5$
(d) $y = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) - e^{3x}$	(e) $y = \frac{e^u - e^{-u}}{e^{2u}}$	(f) $y = e^{-kx^2} + 3\ln 3$
(g) $y = (x^2 + 3^{2x})^3$	(h) $y = e^{k\sqrt{x}}$	(i) $y = 2^{x^2} + e^{-\frac{1}{x}}$

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

FIAP

Obrigado!