**Бакалавры ФИИТ — 4 семестр**
**Вычислительная математика**

## Тема 3. Решение нелинейных алгебраических уравнений

Реализуйте решение методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона скалярного нелинейного алгебраического уравнения и системы нелинейных алгебраических уравнений.

1. Выполните задание из методического пособия [1].

2. Решите следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}
\cos(x_1x_2) - e^{-3x_3} + x_4{x_5}^2 - x_6 - \sinh(2x_8)\,x_9 + 2x_{10} = -2.0004339741653854440,\\
\sin(x_1x_2) + x_3x_9x_7 - e^{-x_{10}+x_6} + 3{x_5}^2 - x_6(x_8+1) = -10.886272036407019994,\\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} = 3.1361904761904761904,\\
2\cos(-x_9+x_4) + \dfrac{x_5}{x_3+x_1} - \sin\left({x_2}^2\right) + \cos^2(x_7x_{10}) - x_8 = 0.1707472705022304757,\\
\sin(x_5) + 2x_8(x_3+x_1) - e^{-x_7(-x_{10}+x_6)} + 2\cos(x_2) - \dfrac{1}{x_4-x_9} = 0.3685896273101277862,\\
e^{x_1-x_4-x_9} + \dfrac{x_5^2}{x_8} + \dfrac{1}{2}\cos(3x_{10}x_2) - x_6x_3 = -2.0491086016771875115,\\
{x_2}^3x_7 - \sin\left(\dfrac{x_{10}}{x_5} + x_8\right) + (x_1-x_6)\cos(x_4) + x_3 = 0.7380430076202798014,\\
x_5(x_1-2x_6)^2 - 2\sin(-x_9+x_3) + 1.5x_4 - e^{x_2x_7+x_{10}} = -3.5668321989693809040,\\
\dfrac{7}{x_6} + e^{x_5+x_4} - 2x_2x_8x_{10}x_7 + 3x_9 - 3x_1 = 8.4394734508383257499,\\
x_{10}x_1 + x_9x_2 - x_8x_3 + \sin(x_4+x_5+x_6)\,x_7 = 0.7823809523809523809 6.
\end{cases}$$

Начальное приближение: $x^{(0)} = (0.5, 0.5, 1.5, -1.0, -0.5, 1.5, 0.5, -0.5, 1.5, -1.5)^{\mathrm{T}}$.

a) Решите методом Ньютона. Посчитайте количество итераций и арифметических операций, затрачиваемых на решение линейных систем. Засеките время расчёта.

b) Решите модифицированным методом Ньютона с матрицей Якоби, посчитанной в начальной точке (используйте $LU$-разложение для решения СЛАУ!). Посчитайте количество итераций и арифметических операций, затрачиваемых на решение линейных систем (просто поставьте счётчики внутри $LU$-разложения, считать затраты на матрицу Якоби не надо). Засеките время расчёта.

c) Реализуйте возможность перехода к модифицированному методу Ньютона не сразу. Задайте параметр $k$ начальных пересчётов матрицы. Например, при $k = 1$ будет так же, как в пункте b). Поэксперементируйте, найдите оптимальное с точки зрения времени счёта количество итераций полным методом. Подумайте, можно ли как-то автоматизировать переход на модифицированный метод Ньютона.

d) Реализуйте «циклический» вариант, при котором матрица Якоби пересчитывается не каждый раз, а каждые $m$ итераций; посмотрите, как меняется общее число итераций и затраты.

e) Объедините все реализации в одну с параметрами $m$ и $k$. Например, $m = 1$, $k = \infty$ будет давать полный метод Ньютона, как в пункте a), а $m = \infty$, $k = 1$ — модифицированный метод b).

f) Возьмите $x_5^{(0)} = -0.2$. Посмотрите на результаты работы методов (обратите дополнительное внимание на случай из пункта c) при $k < 7$, $k = 7$ и $k > 7$).

Обязательно проверяйте полученные решения. Сравните результаты между собой: всегда ли метод сходится к одному и тому же решению? Может ли метод зацикливаться?

### Литература:

1. Иванов А. П. Практикум по численным методам. Метод Ньютона. Методические указания — СПб: СПбГУ, 2016.

2. Калиткин Н. Н. Численные методы. 1978 г. 512 с.

3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: Учебник для вузов — М.: Высш. шк., 2002.

### Приложение. Матрица Якоби системы

$J_{11} = -\sin(x_1x_2)x_2,\ J_{12} = -\sin(x_1x_2)\,x_1,\ J_{13} = 3\mathrm{e}^{-3x_3},\ J_{14} = {x_5}^2,\ J_{15} = 2x_4x_5,\ J_{16} = -1,\ J_{17} = 0,\ J_{18} = -2\cosh(2x_8)\,x_9,\ J_{19} = -\sinh(2x_8),\ J_{1,10} = 2,$

$J_{21} = \cos(x_1x_2)\,x_2,\ J_{22} = \cos(x_1x_2)\,x_1,\ J_{23} = x_9x_7,\ J_{24} = 0,\ J_{25} = 6x_5,\ J_{26} = -\mathrm{e}^{-x_{10}+x_6} - x_8 - 1,\ J_{27} = x_3x_9,\ J_{28} = -x_6,\ J_{29} = x_3x_7,\ J_{2,10} = \mathrm{e}^{-x_{10}+x_6},$

$J_{31} = 1,\ J_{32} = -1,\ J_{33} = 1,\ J_{34} = -1,\ J_{35} = 1,\ J_{36} = -1,\ J_{37} = 1,\ J_{38} = -1,\ J_{39} = 1,\ J_{3,10} = -1,$

$J_{41} = -\frac{x_5}{(x_3+x_1)^2},\ J_{42} = -2\cos({x_2}^2)\,x_2,\ J_{43} = -\frac{x_5}{(x_3+x_1)^2},\ J_{44} = -2\sin(-x_9+x_4),\ J_{45} = (x_3+x_1)^{-1},\ J_{46} = 0,\ J_{47} = -2\cos(x_7x_{10})\sin(x_7x_{10})\,x_{10},\ J_{48} = -1,\ J_{49} = 2\sin(-x_9+x_4),\ J_{4,10} = -2\cos(x_7x_{10})\sin(x_7x_{10})\,x_7,$

$J_{51} = 2x_8,\ J_{52} = -2\sin(x_2),\ J_{53} = 2x_8,\ J_{54} = (-x_9+x_4)^{-2},\ J_{55} = \cos(x_5),\ J_{56} = x_7\mathrm{e}^{-x_7(-x_{10}+x_6)},\ J_{57} = -(x_{10}-x_6)\,\mathrm{e}^{-x_7(-x_{10}+x_6)},\ J_{58} = 2x_3+2x_1,\ J_{59} = -(-x_9+x_4)^{-2},\ J_{5,10} = -x_7\mathrm{e}^{-x_7(-x_{10}+x_6)},$

$J_{61} = \mathrm{e}^{x_1 - x_4 - x_9}$, $J_{62} = -3/2 \sin(3x_{10}x_2)\, x_{10}$, $J_{63} = -x_6$, $J_{64} = -\mathrm{e}^{x_1 - x_4 - x_9}$, $J_{65} = 2\frac{x_5}{x_8}$, $J_{66} = -x_3$, $J_{67} = 0$, $J_{68} = -\frac{{x_5}^2}{{x_8}^2}$, $J_{69} = -\mathrm{e}^{x_1 - x_4 - x_9}$, $J_{6,10} = -3/2 \sin(3x_{10}x_2)\, x_2$,

$J_{71} = \cos(x_4)$, $J_{72} = 3{x_2}^2 x_7$, $J_{73} = 1$, $J_{74} = -(x_1 - x_6)\sin(x_4)$, $J_{75} = \cos\left(\frac{x_{10}}{x_5} + x_8\right) x_{10}{x_5}^{-2}$, $J_{76} = -\cos(x_4)$, $J_{77} = {x_2}^3$, $J_{78} = -\cos\left(\frac{x_{10}}{x_5} + x_8\right)$, $J_{79} = 0$, $J_{7,10} = -\cos\left(\frac{x_{10}}{x_5} + x_8\right) {x_5}^{-1}$,

$J_{81} = 2x_5(x_1 - 2x_6)$, $J_{82} = -x_7\mathrm{e}^{x_2x_7 + x_{10}}$, $J_{83} = -2\cos(-x_9 + x_3)$, $J_{84} = 1.5$, $J_{85} = (x_1 - 2x_6)^2$, $J_{86} = -4x_5(x_1 - 2x_6)$, $J_{87} = -x_2\mathrm{e}^{x_2x_7 + x_{10}}$, $J_{88} = 0$, $J_{89} = 2\cos(-x_9 + x_3)$, $J_{8,10} = -\mathrm{e}^{x_2x_7 + x_{10}}$,

$J_{91} = -3$, $J_{92} = -2x_8x_{10}x_7$, $J_{93} = 0$, $J_{94} = \mathrm{e}^{x_5 + x_4}$, $J_{95} = \mathrm{e}^{x_5 + x_4}$, $J_{96} = -7{x_6}^{-2}$, $J_{97} = -2x_2x_8x_{10}$, $J_{98} = -2x_2x_{10}x_7$, $J_{99} = 3$, $J_{9,10} = -2x_2x_8x_7$,

$J_{10,1} = x_{10}$, $J_{10,2} = x_9$, $J_{10,3} = -x_8$, $J_{10,4} = \cos(x_4 + x_5 + x_6)\, x_7$, $J_{10,5} = \cos(x_4 + x_5 + x_6)\, x_7$, $J_{10,6} = \cos(x_4 + x_5 + x_6)\, x_7$, $J_{10,7} = \sin(x_4 + x_5 + x_6)$, $J_{10,8} = -x_3$, $J_{10,9} = x_2$, $J_{10,10} = x_1$.