

# Calcul différentiel et intégral dans l'espace

*Marc-André Désautels*

*2018-11-08*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
À propos de ce document . . . . .	7
Remerciements . . . . .	7
License . . . . .	7
 <b>I Les séries de Taylor</b>	 <b>9</b>
<b>1 Les séries de Taylor</b>	<b>11</b>
1.1 Les polynômes de Taylor et de MacLaurin . . . . .	11
1.1.1 Les polynômes de MacLaurin . . . . .	11
1.1.2 Les polynômes de Taylor . . . . .	13
1.1.3 Le reste de Taylor-Lagrange . . . . .	14
1.2 Les séries de Taylor . . . . .	17
1.2.1 L'obtention de séries de Taylor à partir de séries connues. . . . .	22
1.3 Applications . . . . .	27
1.4 GeoGebra . . . . .	33
1.5 Pages supplémentaires . . . . .	34
 <b>II Les équations différentielles</b>	 <b>39</b>
<b>2 Les équations différentielles ordinaires</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction . . . . .	41
2.2 Les équations différentielles à variables séparables . . . . .	42
2.3 Les équations différentielles linéaires . . . . .	47
2.3.1 Problèmes de mélange . . . . .	50
2.3.2 Inverser la dérivée . . . . .	52
2.4 Les équations différentielles à coefficients constants d'ordre 2 . . . . .	53
2.4.1 Quelques rappels concernant les nombres complexes . . . . .	53
2.4.2 Les équations différentielles homogènes à coefficients constants d'ordre 2 . . . . .	54
2.4.3 Les équations différentielles non homogènes à coefficients constants d'ordre 2 . . . . .	60
2.5 Applications des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants . . . . .	64
2.6 GeoGebra . . . . .	65
2.7 Pages supplémentaires . . . . .	66
 <b>III Les coordonnées polaires</b>	 <b>71</b>
<b>3 Les coordonnées polaires</b>	<b>73</b>
3.1 Introduction . . . . .	73
3.2 Le graphique d'une équation polaire $r = f(\theta)$ . . . . .	75

3.3	Tangente à une courbe polaire . . . . .	78
3.4	Aire d'une région . . . . .	80
3.5	Longueur d'une courbe . . . . .	84
3.6	GeoGebra . . . . .	86
3.7	Pages supplémentaires . . . . .	87
<b>IV</b>	<b>Les fonctions de plusieurs variables</b>	<b>93</b>
<b>4</b>	<b>Les fonctions de plusieurs variables</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Définitions . . . . .	95
4.3	Graphique . . . . .	96
4.4	Comment étudier les graphiques de fonctions de deux variables . . . . .	96
4.4.1	Les coupes transversales . . . . .	102
4.4.2	Les courbes de niveaux . . . . .	104
4.5	Domaine . . . . .	107
4.6	Limites . . . . .	109
4.6.1	La méthode des chemins . . . . .	110
4.6.2	La méthode des gendarmes . . . . .	111
4.6.3	Exercices divers de limites . . . . .	113
4.7	La continuité . . . . .	113
4.8	Geogebra . . . . .	113
4.9	Pages supplémentaires . . . . .	114
<b>5</b>	<b>La dérivation de fonctions de plusieurs variables</b>	<b>119</b>
5.1	Introduction . . . . .	119
5.2	Les dérivées partielles . . . . .	119
5.2.1	Les dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	123
5.3	Applications des dérivées partielles . . . . .	125
5.4	Le plan tangent . . . . .	125
5.4.1	L'équation cartésienne d'un plan . . . . .	125
5.5	Les fonctions différentiables . . . . .	128
5.5.1	Les différentielles . . . . .	128
5.5.2	Le calcul d'incertitude . . . . .	128
5.6	La règle de dérivation en chaîne et la dérivation implicite . . . . .	131
5.6.1	Les dérivées de surfaces implicites . . . . .	136
5.7	La dérivée directionnelle . . . . .	138
5.8	Le vecteur gradient . . . . .	140
5.8.1	Le gradient des fonctions de plus de deux variables . . . . .	142
5.9	GeoGebra . . . . .	144
5.10	Pages supplémentaires . . . . .	145
<b>6</b>	<b>L'optimisation</b>	<b>151</b>
6.1	Introduction . . . . .	151
6.2	L'approximation quadratique . . . . .	151
6.3	Les points critiques et leur nature . . . . .	151
6.4	La droite de régression . . . . .	156
6.4.1	Le quartet d'Anscombe . . . . .	160
6.4.2	DatasauRus . . . . .	161
6.4.3	D'autres types de régression . . . . .	161
6.5	La distance minimale . . . . .	163
6.6	L'optimisation avec contraintes . . . . .	163
6.7	Les multiplicateurs de Lagrange . . . . .	169

6.8	Pages supplémentaires . . . . .	171
<b>V</b>	<b>L'intégration de fonctions de plusieurs variables</b>	<b>177</b>
<b>7</b>	<b>L'intégration de fonctions de deux variables</b>	<b>179</b>
7.1	Introduction . . . . .	179
7.2	Les intégrales doubles . . . . .	179
7.2.1	L'intégrale simple (rappel) . . . . .	179
7.2.2	L'intégrale double sur un rectangle . . . . .	180
7.2.3	Les intégrales itérées . . . . .	181
7.2.4	Les intégrales doubles sur une région quelconque . . . . .	184
7.2.5	Changer l'ordre d'intégration . . . . .	188
7.2.6	Les propriétés de l'intégrale double . . . . .	190
7.3	Les intégrales doubles en coordonnées polaires . . . . .	191
7.4	Le changement de coordonnées pour les intégrales doubles . . . . .	196
7.4.1	Le produit vectoriel . . . . .	197
7.4.2	Le changement de coordonnées . . . . .	197
<b>8</b>	<b>L'intégration de fonctions de trois variables</b>	<b>201</b>
8.1	Introduction . . . . .	201
8.2	Intégrales triples en coordonnées cartésiennes . . . . .	201
8.3	Intégrales triples en coordonnées cylindriques . . . . .	204
8.4	Intégrales triples en coordonnées sphériques . . . . .	207
8.5	Le changement de coordonnées pour les intégrales triples . . . . .	209
<b>9</b>	<b>Applications des intégrales doubles et triples</b>	<b>211</b>
9.1	Les masses et les centres de masse . . . . .	211
9.2	La force gravitationnelle . . . . .	211
9.3	La force électrique . . . . .	211



# Introduction

## À propos de ce document

### Remerciements

Ce document est généré par l'excellente extension [bookdown](#) de [Yihui Xie](#).

### License

Ce document est mis à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International](#).



FIGURE 1 – Licence Creative Commons





Première partie

Les séries de Taylor



# Chapitre 1

## Les séries de Taylor

Vous trouverez à la section 1.4 une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser les polynômes de Taylor et de Maclaurin d'une fonction de votre choix. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 1.1 Les polynômes de Taylor et de MacLaurin

De tous les types de fonctions, les fonctions polynomiales sont celles qui se dérivent et s'intègrent le plus facilement. De plus, si leur degré est inférieur ou égal à 5, des formules permettent de trouver facilement leurs zéros. Pour ces raisons, l'écriture d'une fonction  $f(x)$  sous la forme d'un polynôme de degré  $n$ ,  $P_n(x)$ , nous permet de l'étudier aisément. Cependant, en écrivant une fonction sous la forme d'un polynôme, nous obtenons une approximation.

L'approche de Taylor et de MacLaurin est couramment utilisée pour transformer une fonction en polynôme.

#### 1.1.1 Les polynômes de MacLaurin

Pour savoir de quelle manière exprimer une fonction  $f(x)$  sous la forme d'un polynôme, nous étudierons un cas particulier des polynômes de Taylor, soit les polynômes de MacLaurin.

**Définition 1.1** (Polynôme de Maclaurin). Soit  $f(x)$  une fonction dérivable au moins  $n$  fois. Le **polynôme de MacLaurin** de degré  $n$ ,  $P_n(x)$ , de la fonction  $f(x)$  est un polynôme satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} f(0) &= P_n(0) \\ \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=0} &= \left. \frac{d^k P_n}{dx^k} \right|_{x=0}, \quad \text{pour } k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les deux conditions suivantes permettent de construire le polynôme de MacLaurin pour une fonction  $f(x)$  quelconque. Nous savons qu'un polynôme de degré  $n$  s'écrit de la façon suivante :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Pour trouver les coefficients  $a_k$ , nous devons obtenir les dérivées successives de  $P_n(x)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\
P_n^{(1)}(x) &= 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} \\
P_n^{(2)}(x) &= 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)a_nx^{n-2} \\
P_n^{(3)}(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \dots + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

et ainsi de suite.

Par définition, nous savons que  $f(0) = P_n(0)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
f(0) &= P_n(0) \\
f(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + \dots + a_{n-1}(0)^{n-1} + a_n(0)^n \\
f(0) &= a_0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

De même, nous savons que  $f^{(1)}(0) = P_n^{(1)}(0)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= P_n^{(1)}(0) \\
f^{(1)}(0) &= 1a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}(0)^{n-2} + na_n(0)^{n-1} \\
f^{(1)}(0) &= 1a_1 \\
\frac{f^{(1)}(0)}{1} &= a_1
\end{aligned} \tag{1.4}$$

De la même façon, nous savons que  $f^{(2)}(0) = P_n^{(2)}(0)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(0) &= P_n^{(2)}(0) \\
f^{(2)}(0) &= 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(0) + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1}(0)^{n-3} + n(n-1)a_n(0)^{n-2} \\
f^{(2)}(0) &= 2 \cdot 1a_2 \\
\frac{f^{(2)}(0)}{2 \cdot 1} &= a_2
\end{aligned} \tag{1.5}$$

D'une manière générale, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} f^{(k)}(0) \\
&= \frac{f^{(k)}(0)}{k!}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

*Remarque* (Factorielle). La factorielle d'un nombre entier  $k$  positif, notée  $k!$ , est égale à :

$$k! = k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Et par définition  $0! = 1$ .

Nous obtenons donc une équation pour déterminer le polynôme de MacLaurin d'une fonction.

**Définition 1.2** (Polynôme de MacLaurin). Soit  $f(x)$  une fonction dérivable au moins  $n$  fois en  $x = 0$ . Le **polynôme de MacLaurin** de degré  $n$ ,  $P_n(x)$ , est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

**Exemple 1.1.** Trouvez les polynômes de MacLaurin de degrés 1, 2 et 3 de  $f(x) = e^x$ .

**Exemple 1.2.** Trouvez les polynômes de MacLaurin de degrés 1, 2 et 3 de  $f(x) = \sin(x)$ .

### 1.1.2 Les polynômes de Taylor

Les polynômes de Maclaurin utilisent l'évaluation des dérivées successives de la fonction  $f(x)$  en  $x = 0$ . Il est par contre possible de généraliser ces polynômes en évaluant les dérivées successives de la fonction  $f(x)$  en  $x = a$ , avec  $a \in \text{dom}f$ . C'est ce que nous appelons les polynômes de Taylor.

**Définition 1.3** (Polynôme de Taylor). Soit  $f(x)$  une fonction dérivable au moins  $n$  fois en  $x = a$ . Le **polynôme de Taylor** de degré  $n$ ,  $P_n(x)$ , est donné par :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

**Exemple 1.3.** Trouvez le polynôme de Taylor de  $f(x) = \ln(x)$  de degré 4 autour de  $x = 1$ .

### 1.1.3 Le reste de Taylor-Lagrange

Les polynômes de Taylor sont des approximations d'une fonction, ce qui signifie qu'une erreur est commise. Le théorème suivant nous permet de quantifier l'erreur commise, c'est-à-dire  $f(x) - P_n(x)$ .

**Théorème 1.1** (Le reste de Taylor-Lagrange). Soit  $f(x)$  une fonction dérivable au moins  $n+1$  fois sur l'intervalle  $I = [a, x]$  (si  $x > a$ ) ou  $I = [x, a]$  (si  $x < a$ ). L'erreur commise  $E_n(x)$  par l'approximation de  $f(x)$  par  $P_n(x)$  est donnée par :

$$|f(x) - P_n(x)| = |E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)} \right|$$

avec  $\xi(x) \in I$ .

*Démonstration.* La démonstration est plus avancée que le niveau de ce livre. □

Comme la valeur  $\xi(x)$  est rarement connue, nous utiliserons plutôt une borne sur l'erreur :

$$\begin{aligned} |E_n(x)| &= |f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \\ |f(x) - P_n(x)| &\leq \left| \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right|, \end{aligned}$$

où  $M = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$ .

**Exemple 1.4.** Déterminez  $|E_n(x)|$  lorsque vous utilisez le polynôme de MacLaurin de degré 3 de  $f(x) = e^x$  sur l'intervalle  $[0, 2]$ . **Astuce** : supposez que  $e < 3$ .

**Exemple 1.5.** Lorsque nous demandons à la calculatrice d'évaluer le nombre  $e$ , elle nous le donne avec une précision de  $10^{-8}$ , c'est-à-dire que l'erreur est inférieure à  $10^{-8}$ . Quel devrait être le degré du polynôme de MacLaurin pour  $f(x) = e^x$  nécessaire pour obtenir cette précision ? **Astuce** : supposez que  $e < 3$ .

**Exemple 1.6.** Répondez aux questions suivantes :

- a) Approximez  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  par un polynôme de Taylor de degré 2 en  $a = 8$ .
- b) Estimez l'erreur faite lorsque  $7 \leq x \leq 9$ .

**Exemple 1.7.** Quelle est l'erreur maximale possible si on utilise l'approximation  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$  lorsque  $-0,3 \leq x \leq 0,3$ ? Utilisez l'approximation pour estimer  $\sin(12^\circ)$  avec six (6) décimales exactes.



## 1.2 Les séries de Taylor

Nous avons vu que l'approximation d'une fonction par un polynôme est meilleure lorsque le degré de ce polynôme est élevé. Dans cette section, nous verrons que lorsque le degré du polynôme tend vers l'infini, nous obtenons une série de Taylor.

**Définition 1.4** (Série de Taylor). Soit  $f(x)$  une fonction infiniment dérivable en  $x = a$ . La série de Taylor de  $f(x)$  autour de  $x = a$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots\end{aligned}$$

Dans le cas où  $a = 0$ , nous parlons également de série de MacLaurin.

**Exemple 1.8.** Déterminez la série de MacLaurin de  $f(x) = e^x$ .

**Exemple 1.9.** Déterminez la série de MacLaurin de  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Exemple 1.10.** Déterminez la série de MacLaurin de  $f(x) = \ln(1+x)$ .

**Exemple 1.11.** Déterminez la série de MacLaurin de  $f(x) = (1+x)^k$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

Ces exemples nous amènent à nous demander si une fonction  $f(x)$  est égale à sa série de Taylor, et si c'est le cas, pour quelles valeurs de  $x$ . Nous savons que :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(x) + E_n(x)) \quad \text{En prenant la limite de chaque côté} \\ f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(x)) + \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(x)) \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, pour que  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ , il faut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$ . Ce qui signifie que l'erreur tend vers zéro lorsque le degré du polynôme de Taylor tend vers l'infini.

De plus, il faut que la série converge, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

nous donne une valeur finie. Puisque la limite dépend de  $x$ , il faudra trouver les valeurs de  $x$  qui font que la série converge. Ces valeurs forment l'**intervalle de convergence** de la série.

**Théorème 1.2.** Soit  $f(x)$  une fonction infiniment dérivable en  $x = a$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$ , alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

si  $x$  est dans l'intervalle de convergence.

**Théorème 1.3** (Le critère généralisé de d'Alembert). Soit une série de la forme  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  et soit  $L =$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|.$$

- Si  $L < 1$ , alors la série converge.
- Si  $L > 1$ , alors la série diverge.
- Si  $L = 1$ , alors on ne peut rien conclure.

**Exemple 1.12.** Déterminez l'intervalle de convergence de la série de MacLaurin de  $f(x) = e^x$ .

**Exemple 1.13.** Déterminez l'intervalle de convergence de la série de MacLaurin de  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Exemple 1.14.** Déterminez l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ .

**Exemple 1.15.** Déterminez l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ .

**Exemple 1.16.** La fonction de Bessel d'ordre 0,  $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$  est solution de l'équation différentielle suivante  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$  qui est utile lorsque nous étudions les modes de vibrations d'une

membrane circulaire. Pour plus d'informations, [Wikipedia : Vibrations of a circular membrane](#). Trouvez l'intervalle de convergence de  $J_0(x)$ .

### 1.2.1 L'obtention de séries de Taylor à partir de séries connues.

Il est souvent plus simple de trouver une série de Taylor, à partir d'une série de Taylor déjà connue. La proposition 1.1 contient la liste des séries de Taylor usuelles.

**Proposition 1.1** (Une liste des séries de Taylor des fonctions usuelles). *Voici une liste des séries de Taylor des fonctions usuelles.*

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$ , pour tout  $x \in ]-1, 1]$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ , pour tout  $x \in ]-1, 1[$
- $(a+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!} x^k$ , où  $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in ]-1, 1]$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $\text{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ , pour tout  $x \in [-1, 1]$

Pour obtenir des séries de Taylor, les opérations suivantes sont possibles :

- Changement de variables
- Addition et soustraction de séries de Taylor

- Multiplication de séries de Taylor
- Division de séries de Taylor
- Dérivation de séries de Taylor
- Intégration de séries de Taylor

### 1.2.1.1 Changement de variables

**Exemple 1.17.** Trouvez la série de Taylor de  $f(x) = e^{-x^2}$ .

### 1.2.1.2 Addition et soustraction

**Exemple 1.18.** Trouvez la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$  en trouvant au préalable la série de MacLaurin de  $e^x - 1 - x$ .

**Exemple 1.19.** Montrez que  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ .

### 1.2.1.3 Multiplication

**Exemple 1.20.** Trouvez les trois premiers termes de la série de Maclaurin de  $e^x \sin(x)$ .



#### 1.2.1.4 Division

**Exemple 1.21.** Trouvez les trois premiers termes de la série de Maclaurin de  $\tan(x)$ .

### 1.2.1.5 Dérivation

**Exemple 1.22.** Trouvez la série de Maclaurin de  $\frac{1}{1+x}$  en dérivant la série de Maclaurin de  $\ln(1+x)$ .

### 1.2.1.6 Intégration

**Exemple 1.23.** Trouvez la série de Maclaurin de  $\text{Arctan}(x)$  en intégrant la série de MacLaurin de  $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ .

## 1.3 Applications

**Exemple 1.24.** À partir de la deuxième loi de Newton, nous pouvons montrer que l'angle  $\theta$  que fait un pendule par rapport à la verticale en fonction du temps, suit l'équation différentielle  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$  où  $g$  est la constante gravitationnelle et  $l$  la longueur du pendule. Malheureusement, il n'existe pas de solutions exactes pour cette équation différentielle. Par contre, il existe une méthode de résolution pour les équations différentielle de la forme  $\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$ . Écrivez l'équation du pendule sous la forme résoluble.

**Exemple 1.25.** Soit un disque uniformément chargé de rayon  $R$ . Le potentiel électrique ressenti au point  $P$  situé à une distance  $d$  sur une droite perpendiculaire au disque et passant par son centre est donné par  $V = 2\pi k_e \sigma (\sqrt{d^2 + R^2} - d)$ . La constante  $k_e$  représente la perméabilité du vide et la constante  $\sigma$  la charge surfacique. Montrez que si  $d$  est très grand par rapport à  $R$  alors le potentiel électrique est  $V \approx \frac{\pi k_e \sigma R^2}{d}$ .

**Exemple 1.26.** Soit deux charges équivalentes  $Q$  et  $-Q$  se trouvant à une distance  $r$  l'une de l'autre.

Le champ électrique  $E$  ressenti au point  $P$ , qui est à une distance  $R$  de la charge  $Q$  et de  $R + r$  de la charge  $-Q$ , est donné par  $E = \frac{Q}{R^2} - \frac{Q}{(R+r)^2}$ . Montrez que lorsque  $R$  est grand, le champ électrique est approximativement proportionnel à  $\frac{1}{R^3}$ .

**Exemple 1.27.** Soit un corps de masse  $m$  situé à une distance  $h$  de la surface de la Terre. La force gravitationnelle  $F$  agissant sur ce corps est donnée par  $F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$  où  $g$  est l'accélération gravitationnelle et  $R$  le rayon de la terre. Montrez que lorsque  $h$  est petit par rapport à  $R$ , la formule précédente devient  $F \approx mg$ .

**Exemple 1.28.** Les équations de Bessel sont données par  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Utilisez les séries de puissances pour trouver la solution de l'équation différentielle précédente lorsque  $n = 0$ .

**Exemple 1.29.** Soit  $f(x) = x \cos(2x)$ . Trouvez  $f^{(99)}(0)$  et  $f^{(100)}(0)$ .

**Exemple 1.30.** Soit  $f(x) = x^2 e^{-x}$ . Trouvez  $f^{(100)}(0)$ .

**Exemple 1.31.** Soit  $g(x) = x \ln(1 + (2x)^2)$ . Trouvez  $g^{(51)}(0)$ .



## 1.4 GeoGebra

## 1.5 Pages supplémentaires

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.









Deuxième partie

Les équations différentielles





## Chapitre 2

# Les équations différentielles ordinaires

Vous trouverez à la section 2.6 une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 2.1 Introduction

Les équations différentielles sont à la base de la modélisation de divers phénomènes physiques, statistiques, chimiques, biologiques ou économiques, par exemple. Nous n'étudierons pas en détail comment obtenir ces équations différentielles mais nous verrons comment résoudre trois types d'équations différentielles différents.

Nous étudierons les types suivants :

- Les équations différentielles à variables séparables
- Les équations différentielles linéaires
- Les équations différentielles à coefficients constants d'ordre 2

**Définition 2.1** (Équation différentielle ordinaire). Une **équation différentielle ordinaire** est une équation de la forme :

$$F(t, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

où  $y$  est une fonction inconnue de  $t$  et les  $y^{(k)}$  sont les dérivées  $k$ -ièmes de  $y$ .

**Exemple 2.1.** Voici quelques exemples d'équations différentielles :

- $\frac{dy}{dt} = 2ty$
- $(y^{(5)})^3 + 8ty^{(1)} + 12y = 1$
- $y'' + by' + ky = \sin(\omega x)$

**Définition 2.2** (L'ordre d'une équation différentielle). L'**ordre** d'une équation différentielle est l'entier représentant l'ordre de la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation différentielle.

**Exemple 2.2.** Voici quelques exemples d'ordre de diverses équations différentielles :

- $\frac{dy}{dt} = 2ty$ , ordre de 1
- $(y^{(5)})^3 + 8ty^{(1)} + 12y = 1$ , ordre de 5
- $y'' + by' + ky = \sin(\omega x)$ , ordre de 2

**Définition 2.3** (Solution d'une équation différentielle). Une fonction (ou une équation) est une **solution d'une équation différentielle** si, en la remplaçant ainsi que ses dérivées dans l'équation différentielle, l'égalité est vérifiée.

**Exemple 2.3.** Vérifiez que  $y(x) = e^{2x}$  est une solution de l'équation différentielle  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ .

**Définition 2.4** (Solution générale ou famille de solutions d'une équation différentielle). La **solution générale** ou **famille de solutions** d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les fonctions qui sont des solutions de l'équation différentielle.

**Exemple 2.4.** Montrez que  $y(t) = t^2 + C$  où  $C \in \mathbb{R}$  est la solution générale de l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = 2t$ .

**Définition 2.5** (Condition initiale et solution particulière d'une équation différentielle). Une **condition initiale** d'une équation différentielle est un point  $(x_0, y_0)$  par lequel passe la solution, où  $x_0$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Une solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale est appelée **solution particulière** de l'équation différentielle.

*Remarque.* Lorsque qu'une équation différentielle est d'ordre  $n$ , nous aurons besoin de  $n$  conditions initiales pour trouver la solution particulière.

## 2.2 Les équations différentielles à variables séparables

**Définition 2.6** (Équation différentielle à variables séparables). Une **équation différentielle à variables séparables** est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme  $M(y)dy = N(x)dx$ .

Pour trouver la solution d'une équation différentielle à variables séparables, il faut :

- Mettre l'équation sous la forme différentielle, c'est-à-dire placer les différentielles au **numérateur**.
- Séparer les variables en se basant sur les différentielles.
- Intégrer de chaque côté de l'égalité, c'est-à-dire  $\int M(y)dy = \int N(x)dx$

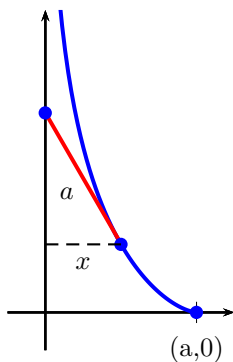
**Exemple 2.5.** Résolvez l'équation différentielle suivante :  $\cos(y)\frac{dy}{dt} = t^2$ .

*Remarque.* Lorsque vous trouvez la solution d'une équation différentielle, il n'est pas toujours possible d'obtenir une équation explicite (c'est-à-dire une équation où la variable dépendante est isolée).

**Exemple 2.6.** Trouvez la solution de l'équation différentielle  $x + yy' = 0$  passant par le point  $(3, 0)$ .

**Exemple 2.7** (Modèle de Hill-Keller). Le modèle de Hill-Keller permet de modéliser la course d'un coureur pour de courtes distances, par exemple le 100 m ou le 200 m. Si  $F$  est une constante qui correspond à la force du coureur et  $\tau$  est une constante représentant les forces de frottement du coureur, l'équation du modèle est donnée par :  $\frac{dv}{dt} = F - \frac{v}{\tau}$ . Trouvez la vitesse d'un coureur en fonction du temps si au temps initial la vitesse du coureur est nulle.

**Exemple 2.8** (La tractrice). Vous avez une laisse rigide de longueur  $a$ . Vous vous trouvez au point  $(0,0)$  et votre chien se trouve au point  $(a,0)$ . Vous vous dirigez dans la direction de l'axe des  $y$  positifs. L'équation différentielle qui permet de trouver le parcours de votre chien est  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ . Trouvez la solution de l'équation différentielle précédente.



**Exemple 2.9.** Trouvez les trajectoires orthogonales de la famille  $x = ky^2$ .

**Exemple 2.10.** Trouvez les trajectoires orthogonales de la famille  $y = ke^x$ .

**Exemple 2.11.** Soit un parachutiste qui tombe sous l'effet de la gravité avec une résistance de l'air proportionnelle à sa vitesse. L'équation différentielle de cette situation est :  $\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$  où  $m$ ,  $g$  et  $k$  sont des constantes positives. Trouvez la solution de l'équation différentielle précédente.

**Exemple 2.12.** La loi de refroidissement de Newton dit que le taux de variation de la température  $T$  d'un objet est proportionnel à la différence entre la température de cet objet et la température ambiante (notée  $T_A$ ). Trouvez l'équation différentielle décrivant le phénomène et trouvez  $T$  en fonction du temps.

## 2.3 Les équations différentielles linéaires

**Définition 2.7** (Équation différentielle linéaire). Une **équation différentielle linéaire** est de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$$

où  $P(t)$  et  $Q(t)$  sont des fonctions qui ne doivent dépendre que de la variable indépendante.

**Exemple 2.13.** Voici quelques exemples d'équations différentielles linéaires :

- $y' + t^2y = t^3$
- $x^3y' - x^4y = 1$  (Après division par  $x^2$ )
- $y' = y$

Pour être en mesure de résoudre ce type d'équations différentielles, nous devrons tout d'abord utiliser une astuce.

Posons  $\mu(t)$  une fonction inconnue. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mu y] &= \mu \frac{dy}{dt} + y \frac{d\mu}{dt} \\ &= \mu(Q(t) - P(t)y) + y \frac{d\mu}{dt} && \text{car EDO linéaire} \\ &= \mu Q(t) - \mu P(t)y + y \frac{d\mu}{dt} \\ &= \mu Q(t) + y \underbrace{\left( \frac{d\mu}{dt} - \mu P(t) \right)}_{\text{posons égal à 0}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\mu y] &= \mu Q(t) \\ \mu y &= \int \mu Q(t) dt \\ y &= \frac{1}{\mu} \int \mu Q(t) dt\end{aligned}$$

Pour pouvoir résoudre l'intégrale précédente, nous avons besoin de connaître  $\mu$  et nous savons que :

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dt} - \mu P(t) &= 0 \\ \frac{d\mu}{dt} &= \mu P(t) \\ \int \frac{1}{\mu} d\mu &= \int P(t) dt \\ \ln |\mu| &= \int P(t) dt \\ \mu &= e^{\int P(t) dt}\end{aligned}$$

Pour résoudre une équation différentielle linéaire, il faut donc :

1. Trouver  $\mu$  :  $\mu = e^{\int P(t) dt}$
2. Trouver  $y$  :  $y = \frac{1}{\mu} \int \mu Q(t) dt$

**Exemple 2.14.** Trouvez la solution générale de  $y' + 3\frac{y}{t} = 1$ .

**Exemple 2.15.** Trouvez la solution générale de  $x^2 y' + xy = 1$  où  $x > 0$  et  $y(1) = 2$ .



**Exemple 2.16.** Trouvez la solution générale de  $ty' + 2y = t^2 - t + 1$ .

**Exemple 2.17.** Trouvez la solution générale de  $\cos(x)y' + \sin(x)y = 2\cos(x)^3 \sin(x) - 1$ .

**Exemple 2.18.** Résolvez l'équation différentielle du parachutiste, comme vu à l'exemple 2.11, en utilisant les équations différentielles linéaires. L'équation différentielle est donnée par :  $\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$ .

### 2.3.1 Problèmes de mélange

Dans des problèmes de mélange, nous cherchons  $Q(t)$  qui représente la quantité d'une substance en fonction du temps. L'équation différentielle de base de ce genre de problèmes est :

$$\text{Taux de variation de } Q(t) = \text{Taux d'entrée de } Q(t) - \text{Taux de sortie de } Q(t)$$

**Exemple 2.19.** Une cuve contient 10 L d'eau salée dans laquelle 2 kg de sel sont dissout. De l'eau salée contenant 1 kg de sel par litre entre dans la cuve à un débit constant de 3 L/min, et l'eau mélangée est vidée à un taux de 4 L/min. Trouvez la quantité de sel en fonction du temps  $Q(t)$ .

**Exemple 2.20.** Une cuve contient 40 L d'eau pure. De la saumure avec 3 kg de sel par litre entre dans la cuve à un débit constant de 2 L/min, et la mixture mélangée s'écoule à un débit constant de 3 L/min.

- a) Trouvez la quantité de sel en fonction du temps  $Q(t)$ .
- b) Quelle est la quantité de sel lorsqu'il reste 20 L dans la cuve?

### 2.3.2 Inverser la dérivée

Pour obtenir une équation différentielle linéaire, il faut parfois étudier l'inverse de votre dérivée.

Plutôt que d'étudier  $\frac{dy}{dx}$ , nous pouvons étudier  $\frac{dx}{dy}$ .

**Exemple 2.21.** Trouvez la solution de l'équation différentielle  $(e^y - 2xy)\frac{dy}{dx} = y^2$ .

**Exemple 2.22.** Trouvez les familles de courbes orthogonales à  $y^2 = ce^x + x + 1$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

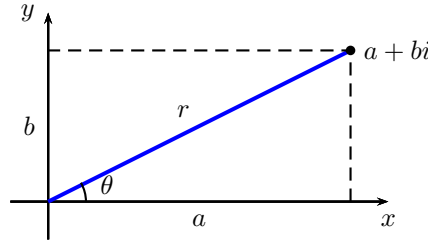


FIGURE 2.1 – Représentation d'un nombre complexe

## 2.4 Les équations différentielles à coefficients constants d'ordre 2

### 2.4.1 Quelques rappels concernant les nombres complexes

**Définition 2.8** (Nombre complexe). Un nombre complexe  $z$  s'écrit sous la forme  $z = a + bi$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$  et tel que  $i^2 = -1$ .

Nous disons que  $a$  est la partie réelle de  $z$  et  $b$  est la partie imaginaire de  $z$ .

L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ .

Nous pouvons également écrire  $z$  sous une forme dite polaire qui est  $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , où  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ .

La figure 2.1 permet de représenter un nombre complexe de façon géométrique.

**Théorème 2.1** (L'identité d'Euler). Soit le nombre complexe écrit sous la forme  $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ . Alors ce nombre peut s'écrire de la manière suivante :  $z = re^{i\theta}$ .

*Démonstration.* La démonstration est laissée à l'étudiante ou l'étudiant. **Astuce** : Il faut utiliser les séries de MacLaurin de  $e^x$ ,  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$ .  $\square$

**Corollaire 2.1.** Nous avons :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons le théorème 2.1. Nous avons :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= \cos(\theta) - i \sin(\theta)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Si nous additionnons les équations (2.1) et (2.2) :

$$\begin{aligned}e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) + \cos(\theta) - i \sin(\theta) \\ &= 2 \cos(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\end{aligned}$$

Si nous faisons la différence entre les équations (2.1) et (2.2) :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - (\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= 2i\sin(\theta) \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

□

## 2.4.2 Les équations différentielles homogènes à coefficients constants d'ordre 2

**Définition 2.9** (Équation différentielle homogène à coefficients constants d'ordre 2). Une **équation différentielle homogène à coefficients constants d'ordre 2** est une équation différentielle de la forme :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (2.3)$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ .

Le terme *homogène* indique que le membre de droite de l'équation (2.3) est nul. Nous traiterons le cas à la section 2.4.3.

Avant de résoudre ce type d'équations différentielles, la prochaine proposition sera cruciale.

**Proposition 2.1.** Si  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  sont deux solutions de l'équation (2.3), alors  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , est aussi une solution de l'équation (2.3).

*Démonstration.* Nous avons que :

$$\begin{aligned} a y_1'' + b y_1' + c y_1 &= 0 \\ a y_2'' + b y_2' + c y_2 &= 0 \end{aligned}$$

car  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions de (2.3). Nous avons que :

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' \\ y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a y'' + b y' + c y &= a(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + b(C_1 y_1' + C_2 y_2') + c(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 \underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + C_2 \underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Une combinaison linéaire de solutions est aussi une solution.

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (2.3) en supposant que la solution est de la forme  $y = e^{rx}$ , où  $r$  est une constante qu'il nous reste à déterminer.

Pour résoudre une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants, il faut toujours poser la solution  $y = e^{rx}$ .

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}y &= e^{rx} \\ y' &= re^{rx} \\ y'' &= r^2 e^{rx}\end{aligned}$$

Nous substituons ces résultats dans l'équation (2.3) :

$$\begin{aligned}a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy &= 0 \\ ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \\ ar^2 + br + c &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

L'équation (2.4) se nomme polynôme caractéristique de l'équation (2.3). Déterminer les valeurs de  $r$  revient à trouver les racines du polynôme caractéristique et donc :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nous devons étudier trois cas distincts qui dépendent du discriminant  $b^2 - 4ac$ .

#### 2.4.2.1 Cas 1 : $b^2 - 4ac > 0$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique fournit deux valeurs de  $r$  **réelles**, que nous notons  $r_1$  et  $r_2$ . Nous avons donc  $y_1(x) = e^{r_1 x}$  qui est une solution de (2.3) et également  $y_2 = e^{r_2 x}$ . Par la proposition 2.1, nous obtenons la solution générale :

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 2.23.** Résolvez l'équation différentielle  $y'' + y' - 6y = 0$  avec comme conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .

### 2.4.2.2 Cas 2 : $b^2 - 4ac < 0$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique fournit deux valeurs de  $r$  **complexes**. Posons  $\gamma = -\frac{b}{2a}$  et  $\omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$  ce qui implique que  $r_1 = \gamma + \omega i$  et  $r_2 = \gamma - \omega i$ . Nous avons donc deux solutions à l'équation (2.3), soit  $y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\gamma + \omega i)x}$  et  $y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\gamma - \omega i)x}$ .

Puisque les solutions précédentes sont complexes, nous allons utiliser la proposition 2.1 et le corollaire 2.1 pour créer deux nouvelles solutions réelles :

$$\begin{aligned}
 y_3(x) &= \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} \\
 &= \frac{e^{(\gamma + \omega i)x} + e^{(\gamma - \omega i)x}}{2} \\
 &= e^{\gamma x} \left( \frac{e^{\omega i x} + e^{-\omega i x}}{2} \right) \\
 &= e^{\gamma x} \cos(\omega x) \\
 y_4(x) &= \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2i} \\
 &= \frac{e^{(\gamma + \omega i)x} - e^{(\gamma - \omega i)x}}{2i} \\
 &= e^{\gamma x} \left( \frac{e^{\omega i x} - e^{-\omega i x}}{2i} \right) \\
 &= e^{\gamma x} \sin(\omega x)
 \end{aligned}$$



D'où la solution générale de l'équation (2.3) est :

$$y(x) = e^{\gamma x} (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))$$

**Exemple 2.24.** Trouvez la solution de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 10y = 0$  ayant comme conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 3$ .

### 2.4.2.3 Cas 3 : $b^2 - 4ac = 0$

Dans ce cas, nous n'obtenons qu'une seule valeur de  $r = -\frac{b}{2a}$ . Puisque nous n'avons qu'une seule solution, nous devons en trouver une autre pour être en mesure de construire une combinaison linéaire. Nous allons démontrer que  $y_2(x) = xe^{rx}$  est aussi une solution de l'équation différentielle (2.3).

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} y_2 &= xe^{rx} \\ y_2' &= e^{rx} + rxe^{rx} \\ y_2'' &= re^{rx} + re^{rx} + r^2xe^{rx} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 \\ a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + c(xe^{rx}) &= 0 \\ e^{rx}(2ar + ar^2x + b + brx + cx) &= 0 \\ e^{rx}(\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0}x + \underbrace{(2ar + b)}_{=0}) &= 0 \end{aligned}$$

□

La solution générale est donc de la forme :

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

**Exemple 2.25.** Trouvez la solution de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 0$ .

**Exemple 2.26.** Trouvez les solutions des équations différentielles suivantes :

- a)  $y'' - 9y' + 20y = 0$
- b)  $2y'' - 4y' + 8y = 0$
- c)  $y'' + 6y' + 9 = 0$



### 2.4.3 Les équations différentielles non homogènes à coefficients constants d'ordre 2

**Définition 2.10** (Équation différentielle non homogène à coefficients constants d'ordre 2). Une **équation différentielle non homogène à coefficients constants d'ordre 2** est une équation différentielle de la forme :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = F(x) \quad (2.5)$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ . De plus  $F(x)$  est une fonction qui ne dépend que de la variable indépendante.

Pour résoudre ce type d'équations différentielles, nous aurons besoin du théorème suivant :

**Théorème 2.2.** Soit une équation différentielle de la forme :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = F(x)$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p$$

où  $y_1$  et  $y_2$  sont les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2.5), c'est-à-dire :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

et  $y_p$  est une solution particulière de l'équation non homogène.

*Démonstration.* La démonstration est laissée à l'étudiante ou à l'étudiant. □

Nous verrons deux méthodes pour trouver  $y_p$ .

#### 2.4.3.1 La méthode des coefficients indéterminés

Cette méthode consiste à étudier la nature de la fonction  $F(x)$  et à supposer que  $y_p$  est de même nature. La table 2.1 montre la forme de la solution particulière  $y_p$  selon la nature de  $F(x)$ .

TABLE 2.1 : Les diverses formes de coefficients indéterminés.

Forme de $F(x)$	Forme de $y_p$
Polynôme de degré $n$	$y_p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
$F(x)$ possède un $\sin(\omega x)$ et/ou un $\cos(\omega x)$	$y_p = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
$F(x)$ possède une exponentielle $e^{\alpha x}$	$y_p = A e^{\alpha x}$

**Exemple 2.27.** Trouvez la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + y' - 6y = 3x^2$ .

**Exemple 2.28.** Trouvez la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + y' - 6y = e^{4x} + \cos(3x)$ .

**Exemple 2.29.** Trouvez la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + 10y = \cos(2t)$  avec les conditions initiales  $y(0) = -\frac{1}{2}$  et  $y'(0) = 4$ .

### 2.4.3.2 La méthode de variation des paramètres (ou méthode de Lagrange)

La méthode de variation des paramètres est souvent plus longue à utiliser que la méthode des coefficients indéterminés, par contre, elle est valide pour tous les types de fonctions  $F(x)$ .

Nous débutons en trouvant les solutions  $y_1$  et  $y_2$  de l'équation différentielle homogène associée à l'équation :

$$ay'' + by' + cy = F(x)$$

Supposons que la solution est de la forme :

$$y(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \mu_2(x)y_2(x)$$

Afin d'alléger la notation, nous omettrons la dépendance en  $x$ . Nous cherchons donc  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Avant de substituer dans l'équation différentielle, nous allons trouver les dérivées successives de  $y$ .

$$y' = \mu_1 y_1' + \mu_1' y_1 + \mu_2 y_2' + \mu_2' y_2$$

Nous allons maintenant faire la supposition que  $\mu'_1 y_1 + \mu'_2 y_2 = 0$  et donc :

$$y' = \mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2$$

Trouvons maintenant la dérivée seconde :

$$y' = \mu'_1 y'_1 + \mu_1 y''_1 + \mu'_2 y'_2 + \mu_2 y''_2$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= F(x) \\ a(\mu'_1 y'_1 + \mu_1 y''_1 + \mu'_2 y'_2 + \mu_2 y''_2) + b(\mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2) + c(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= F(x) \\ \mu_1 \underbrace{(ay''_1 + by'_1 + cy_1)}_{=0} + \mu_2 \underbrace{(ay''_2 + by'_2 + cy_2)}_{=0} + \mu'_1 y'_1 + \mu'_2 y'_2 &= F(x) \\ \mu'_1 y'_1 + \mu'_2 y'_2 &= F(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour déterminer  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , nous avons les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu'_1 y_1 + \mu'_2 y_2 &= 0 \\ \mu'_1 y'_1 + \mu'_2 y'_2 &= F(x) \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser la méthode de Cramer pour résoudre ce système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 F(x)}{W(y_1, y_2)} \\ \mu'_2 &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & F(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 F(x)}{W(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

**Définition 2.11** (Wronskien). Nous appelons le **Wronskien** de deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$ , le résultat suivant :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

*Remarque.* Le **Wronskien** n'est jamais égal à zéro lorsque nous résolvons une équation différentielle car  $y_1$  et  $y_2$  sont choisies pour être linéairement indépendantes.

Nous pouvons maintenant trouver nos deux fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\int \frac{y_2(x)F(x)}{W(y_1, y_2)} dx \\ \mu_2 &= \int \frac{y_1(x)F(x)}{W(y_1, y_2)} dx \end{aligned}$$

**Exemple 2.30.** Trouvez la solution particulière de l'équation différentielle  $y'' + y = \csc(x)$ .

**Exemple 2.31.** Trouvez les solutions des équations différentielles suivantes en utilisant les deux méthodes :

- Méthode des coefficients indéterminés
- Méthode de variation des paramètres

- a.  $y'' - 2y' + y = 2x$
- b.  $y'' - y' - 6y = e^{-x}$

## 2.5 Applications des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

Nous discuterons en particulier de l'oscillateur harmonique forcé.

**Exemple 2.32** (Oscillateur harmonique forcé). Soit un ressort de constante  $k$  auquel nous attachons une masse  $M$ . Si le frottement est proportionnel à la vitesse de la masse et que celle-ci subit une force périodique, nous pouvons décrire le mouvement avec l'équation suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M} x = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t)$$

Nous pouvons réécrire l'équation précédente en introduisant les variables  $b = \frac{c}{2M}$  et  $a = \sqrt{\frac{k}{M}}$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + a^2 x = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t)$$

Ce changement nous simplifiera le travail.

- a. Trouvez la solution homogène de l'équation différentielle.



- b. Supposez que  $b = 0$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement. Trouvez la solution particulière dans le cas où  $a \neq \omega$ . (Vous étudiez dans ce cas la situation des **battements**). Pour en savoir plus sur le phénomène de [battements](#).
- c. Supposez que  $b = 0$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement. Trouvez la solution particulière dans le cas où  $a = \omega$ . (Vous étudiez dans ce cas la situation de **résonnance**) Pour voir en action le phénomène de résonnance, [Tacoma Narrows Bridge](#) .

## 2.6 GeoGebra

## 2.7 Pages supplémentaires

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.









## Troisième partie

# Les coordonnées polaires





## Chapitre 3

# Les coordonnées polaires

Vous trouverez à la section 3.6 une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser des courbes en coordonnées polaires. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 3.1 Introduction

Les coordonnées polaires sont un autre système pour décrire un point  $P$  de  $\mathbb{R}^2$ . Les coordonnées cartésiennes associent à chaque point  $P$  un couple  $(x, y)$ . Les coordonnées polaires consistent à décrire ce point  $P$  avec le couple  $(r, \theta)$ , où  $r$  est la longueur du segment de droite reliant l'origine au point  $P$  et  $\theta$  est l'angle entre ce segment de droite et l'axe des  $x$  positifs. La figure 3.1 représente ce type de coordonnées.

Il est primordial de pouvoir convertir les coordonnées cartésiennes à des coordonnées polaires et vice-versa.

**Proposition 3.1** (Coordonnées cartésiennes à coordonnées polaires). *Soit un point  $P$  en coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . La conversion en coordonnées polaires est :*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

**Proposition 3.2** (Coordonnées polaires à coordonnées cartésiennes). *Soit un point  $P$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . La conversion en coordonnées cartésiennes est :*

$$x = r \cos(\theta)$$
$$y = r \sin(\theta)$$

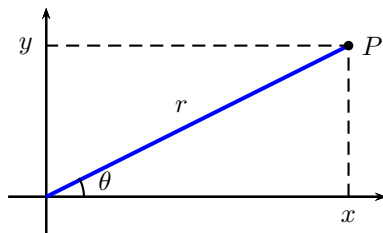


FIGURE 3.1 – Coordonnées polaires d'un point  $P$

*Remarque.* Voici quelques remarques :

1. L'origine, c'est-à-dire le point  $(0, 0)$  en coordonnées cartésiennes, que l'on appelle pôle, peut s'écrire  $(0, \theta)$ , et ce, pour toutes les valeurs de  $\theta$  possibles. Ceci signifie qu'il n'existe pas de bijection<sup>1</sup> entre les coordonnées cartésiennes et polaires. Par contre, si on enlève l'origine, il en existe une.
2. Lorsque l'on fixe  $\theta = \theta_0$ , l'ensemble formé par  $(r, \theta_0)$  est une demi-droite. En acceptant que  $r$  soit négatif, on obtient alors que  $(r, \theta_0)$  forme une droite.
3. Si  $r > 0$ , alors  $(-r, \theta_0) = (r, \theta_0 + \pi)$ .

**Exemple 3.1.** Écrivez les points suivants en coordonnées polaires :

- a.  $P_1 = (1, 1)$
- b.  $P_2 = (-\sqrt{3}, 1)$
- c.  $P_3 = (0, -2)$

**Exemple 3.2.** Écrivez les points suivants en coordonnées cartésiennes :

- a.  $(2, \pi/3)$
- b.  $(3, 3\pi/4)$

---

1. Une bijection est une fonction  $f$  allant d'un ensemble  $A$  à un ensemble  $B$ , telle que pour tous les éléments de  $B$ , on associe une seule valeur de  $A$ .

**Exemple 3.3.** Écrivez l'équation de la perle de Sluze en coordonnées polaires, si  $y^2 = x(8 - x)$ .

### 3.2 Le graphique d'une équation polaire $r = f(\theta)$

Étudions maintenant comment représenter graphiquement des équations polaires de la forme  $r = f(\theta)$ . Nous généraliserons le tout pour des équations implicites de la forme  $F(r, \theta) = 0$ .

**Exemple 3.4.** Dessinez la courbe  $r = K$  où  $K$  est une constante et  $K > 0$ .

**Exemple 3.5.** Dessinez la courbe  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Pour être en mesure de dessiner des relations en coordonnées polaires, nous aurons besoin d'une grille polaire.

**Définition 3.1** (Grille polaire). Une grille polaire est une grille où nous traçons les courbes telles que  $r$  est constant, c'est-à-dire des cercles centrés en  $(0, 0)$  et telles que  $\theta$  est constante, c'est-à-dire les droites passant par l'origine et faisant un angle  $\theta$  avec l'axe des  $x$ .

Nous représentons habituellement les cercles de rayons 1 à 5 et les droites d'angles  $\frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ),  $\frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ) et  $\frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ ).

Une grille polaire est représentée à la figure 3.2.

**Exemple 3.6.** Dessinez  $r = 1 = \sin(2\theta)$ .

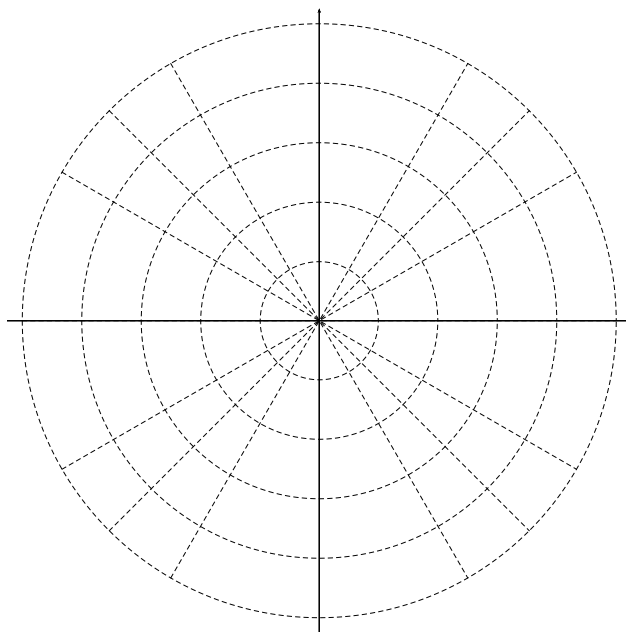
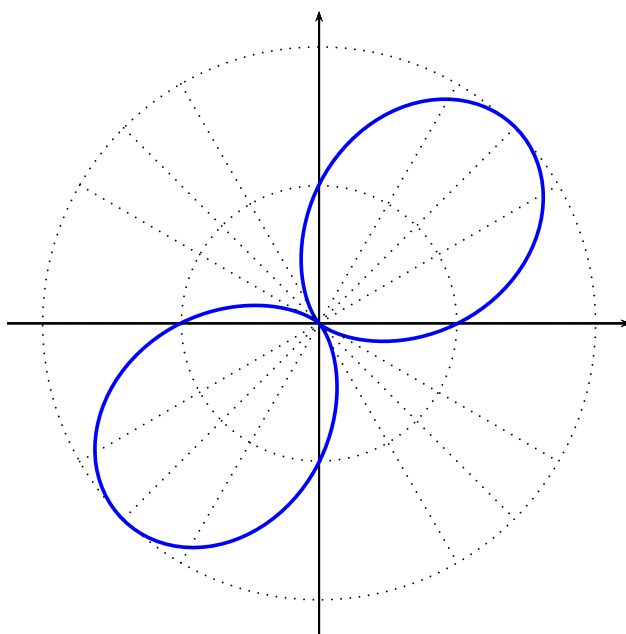
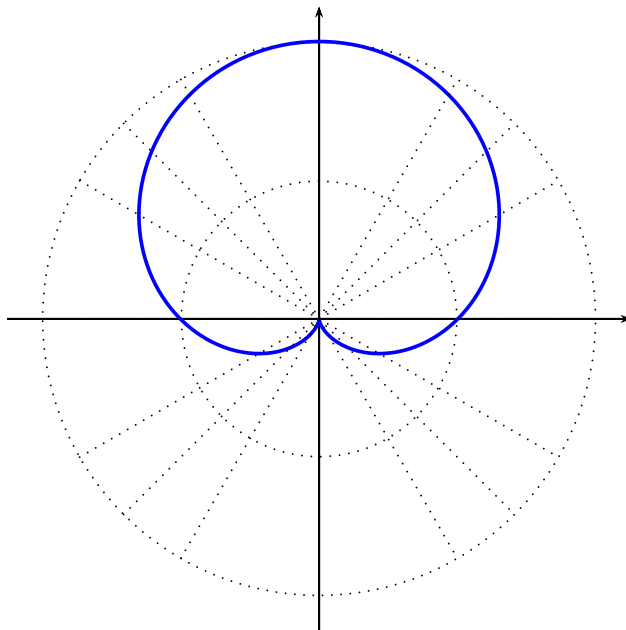


FIGURE 3.2 – Grille polaire



**Exemple 3.7.** Dessinez  $r = 1 - \sin(\theta)$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ .



### 3.3 Tangente à une courbe polaire

Nous voulons maintenant déterminer les tangentes à des courbes polaires. Nous savons que  $x = r \cos(\theta)$  et que  $y = r \sin(\theta)$ . Si  $r = f(\theta)$  alors nous avons que  $x = x(\theta)$  et  $y = y(\theta)$ , c'est-à-dire que  $x$  et  $y$  sont des fonctions de  $\theta$ .

**Théorème 3.1** (Tangentes à une courbe polaire). *Soit  $x$  et  $y$  deux fonctions de  $\theta$ . Si  $r = f(\theta)$ , nous avons :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)}{f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta)}$$

*Démonstration.* Trouvons  $\frac{dx}{d\theta}$  et  $\frac{dy}{d\theta}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} [f(\theta) \cos(\theta)] \\ &= f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} [f(\theta) \sin(\theta)] \\ &= f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)}{f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta)} \end{aligned}$$

□

Nous avons maintenant une formule pour déterminer la pente de la droite tangente.

**Exemple 3.8.** Trouvez l'équation de la droite tangente en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  de  $r = 1 + \sin(2\theta)$ .

**Exemple 3.9.** Soit l'équation  $r = 2 \cos(\theta)$ .

- a. Trouvez la dérivée  $\frac{dy}{dx}$ .
- b. Évaluez  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$ .
- c. Évaluez  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$ .

**Exemple 3.10.** Trouvez la dérivée de la rose de Ghandi,  $r = \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$ .

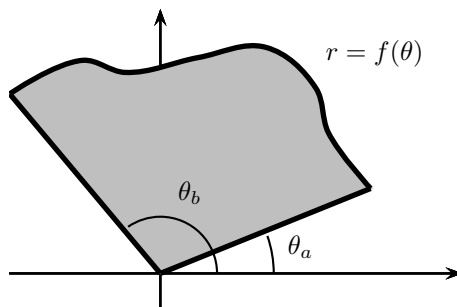


FIGURE 3.3 – Aire d'une courbe polaire

### 3.4 Aire d'une région

Nous voulons maintenant trouver une formule afin de calculer l'aire d'une région formée par une courbe définie par  $r = f(\theta)$  avec  $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$ .

Rappelons que l'aire  $A$  d'un secteur de cercle de rayon  $r$  est donnée par  $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ .

La figure 3.3 représente la surface que nous désirons trouver.

Divisons l'intervalle  $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$  en  $N$  partitions de longueur  $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$  pour  $i = 1, \dots, N$ . L'ensemble

$$\{\theta_0 = \theta_a, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \theta_N = \theta_b\}$$

est appelée partition de  $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$ . L'aire de chacun de ces secteurs peut être approchée par :

$$A_i \approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta_i, \quad \text{où } \theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$$

La figure 3.4 représente une partition.

Nous voulons trouver l'aire totale, c'est-à-dire la somme des surfaces des  $N$  secteurs :

$$A \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta_i$$



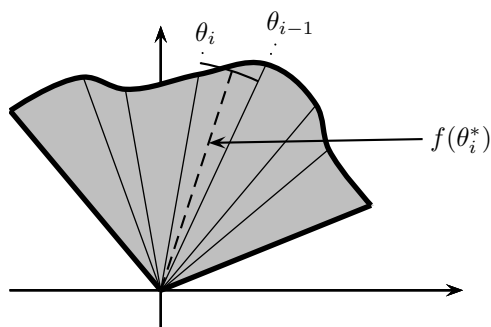


FIGURE 3.4 – Aire d'une courbe polaire : séparation en secteurs

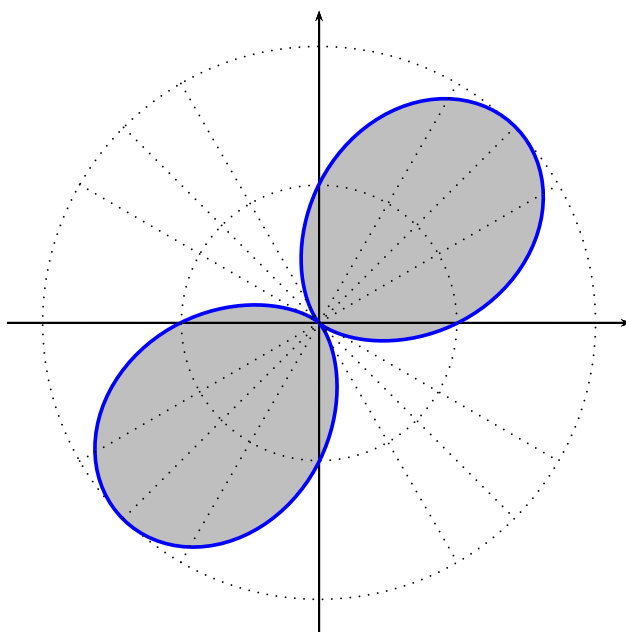
Nous remarquons que cette somme est une somme de Riemann. Ainsi, en prenant la limite lorsque  $N$  tend vers l'infini, nous obtenons :

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta \theta_i = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

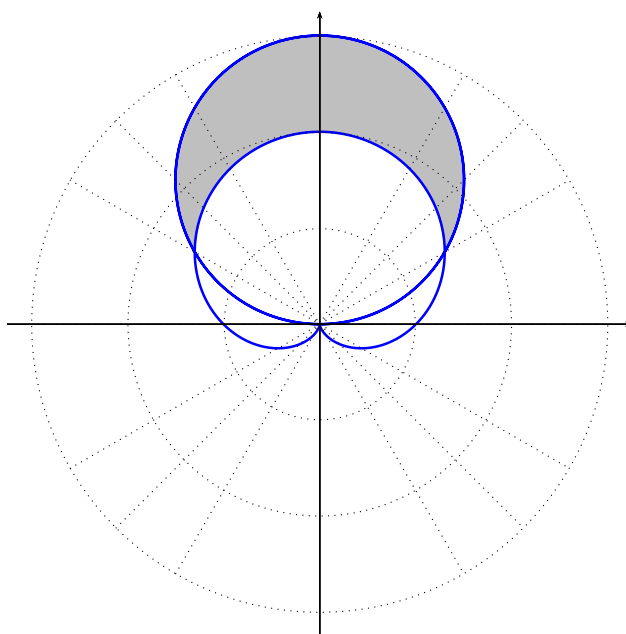
D'où, l'aire est donnée par :

$$A = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

**Exemple 3.11.** Calculez l'aire de la région formée par  $r = 1 + \sin(2\theta)$ .



**Exemple 3.12.** Calculez l'aire située au-dessus du cercle  $r = 3 \sin(\theta)$  et en dessous de la cardioïde  $r = 1 + \sin(\theta)$ .



**Exemple 3.13.** Calculez l'aire d'une seule feuille de  $r = 1 + \sin(\theta)$  avec  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ .

**Exemple 3.14.** Calculez l'aire du quadrifolium  $r = \cos(2\theta)$  si un seul pétale se trouve dans l'intervalle  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ .

### 3.5 Longueur d'une courbe

**Théorème 3.2** (Longueur d'une courbe en coordonnées polaires). *La longueur d'une courbe en coordonnées polaires définie par  $r = f(\theta)$  où  $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$  est donnée par :*

$$L = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$$

*Démonstration.* La démonstration suivante escamote plusieurs utilisations des sommes de Riemann pour simplifier.

Nous savons que :

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{(dx)^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \\ &= \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} d\theta\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} d\theta\right)^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \end{aligned}$$

Nous savons par le théorème 3.1 ce que sont  $\frac{dx}{d\theta}$  et  $\frac{dy}{d\theta}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta)\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta)\right)^2} d\theta \\ &= \dots \\ &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \end{aligned}$$

□

Voici quelques exemple de longueurs d'arc.

**Exemple 3.15.** Calculez la longueur d'arc de  $r = e^{2\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Exemple 3.16.** Calculez la longueur d'arc de  $r = 2 - 2 \cos(\theta)$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Exemple 3.17.** Calculez la longueur d'arc de  $r = ae^{-b\theta}$  avec  $\theta \in [0, \infty[$  et  $b > 0$ .

**Exemple 3.18.** Calculez la longueur d'arc de  $r = a(1 - \sin(\theta))$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

## 3.6 GeoGebra

## 3.7 Pages supplémentaires

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.













## Quatrième partie

# Les fonctions de plusieurs variables



## Chapitre 4

# Les fonctions de plusieurs variables

Vous trouverez à la section 4.8 une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser des coupes transversales et des courbes de niveaux. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 4.1 Introduction

Jusqu'à présent dans vos cours de calcul différentiel et intégral, nous n'avons étudié que les fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire des fonctions de la forme  $y = f(x)$ . Nous avons appris à dessiner ces fonctions, à les dériver, à les intégrer, etc. Par contre, il est utile d'étudier les fonctions de plus d'une variable car la plupart des phénomènes étudiés dépendent de plus d'un paramètre.

Dans ce chapitre, nous reprendrons les différents thèmes étudiés sur les fonctions d'une seule variable, pour les généraliser sur les fonctions de plusieurs variables.

### 4.2 Définitions

Débutons en rappelant le concept de fonction et en le généralisant aux fonctions de deux variables ou plus.

**Définition 4.1** (Fonction). Soit un ensemble  $A$  et un ensemble  $B$ . Une fonction  $f$  est une application qui pour chaque élément  $x \in A$  lui associe un seul élément  $y \in B$ . On note cette fonction

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

- L'ensemble  $A$  se nomme **domaine** de  $f$ , noté  $\text{dom}(f)$ .
- L'ensemble  $B$  est le **codomaine** de la fonction  $f$ , noté  $\text{codom}(f)$ .

**Définition 4.2** (Image d'une fonction). L'image d'une fonction est l'ensemble de tous les éléments du codomaine qui sont obtenus par la fonction  $f$ . Nous notons l'image  $\text{ima}(f)$ . En langage mathématique, l'image s'écrit comme suit :

$$\text{ima}(f) := \{y \mid y = f(x), \forall x \in \text{dom}(f)\}$$

Il est à remarquer que  $\text{ima}(f) \subseteq \text{codom}(f)$ .

La distinction entre l'image et le codomaine est représentée à la figure 4.1. Le codomaine est l'ensemble  $B$  tandis que l'image est l'ensemble de tous les éléments de  $B$  qui sont reliés à un ou plusieurs éléments de  $A$  par la fonction (ici l'image est la région ombragée).

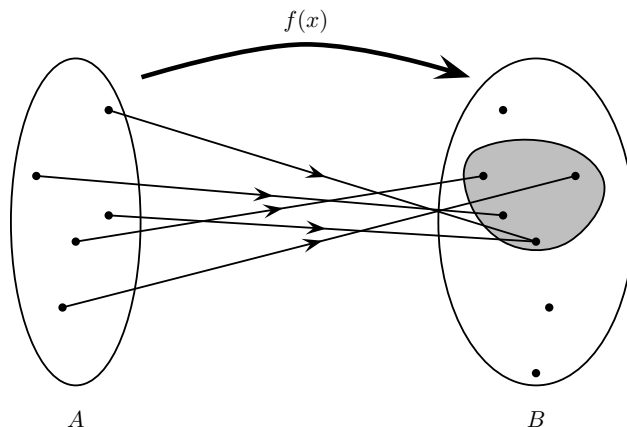


FIGURE 4.1 – Graphique sagittal représentant une fonction.

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié les fonctions ayant comme domaine un sous-ensemble de la droite des réels. Dans ce cours, nous étudierons des fonctions ayant comme domaine un sous-ensemble  $\mathbb{R}^n$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . En langage mathématique, ces fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow z = f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

où  $x_1, \dots, x_n$  sont  $n$  variables indépendantes.

### 4.3 Graphique

Lorsque nous avons une fonction  $y = f(x)$ , son graphe correspond à une courbe dans le plan cartésien, c'est-à-dire dans  $\mathbb{R}^2$ . Pour parvenir à dessiner cette courbe, on fait correspondre une valeur de  $y$  pour chaque valeur de  $x$ .

Lorsque nous sommes en présence d'une fonction de deux variables  $z = f(x, y)$ , le graphique de cette fonction est une surface dans l'espace de trois dimensions,  $\mathbb{R}^3$ .

Par contre, lorsque notre fonction possède plus de deux variables, il devient difficile, voire impossible de la représenter graphiquement. Il faudrait utiliser des espaces de plus de trois dimensions.

*Remarque.* Dans le cadre de ce cours, nous nous en tiendrons à des fonctions de une, deux ou trois variables.

La figure 4.2 montre de quelle façon nous pouvons représenter le point  $(a, b, f(a, b))$  dans l'espace à trois dimensions.

Nous allons maintenant présenter plusieurs fonctions accompagnées de leur graphique.

Les figures suivantes représentent des fonctions usuelles que nous rencontrerons régulièrement dans le cours.

### 4.4 Comment étudier les graphiques de fonctions de deux variables

Comme vous avez pu voir dans les figures précédentes de la section 4.3, les surfaces en trois dimensions peuvent être complexes et difficiles à dessiner à la main. Pour tenter de nous aider à représenter graphiquement ces fonctions, nous allons introduire deux nouveaux outils : les coupes transversales et les courbes de niveaux.



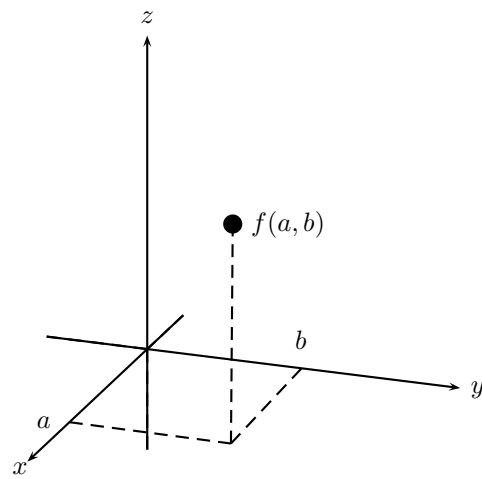
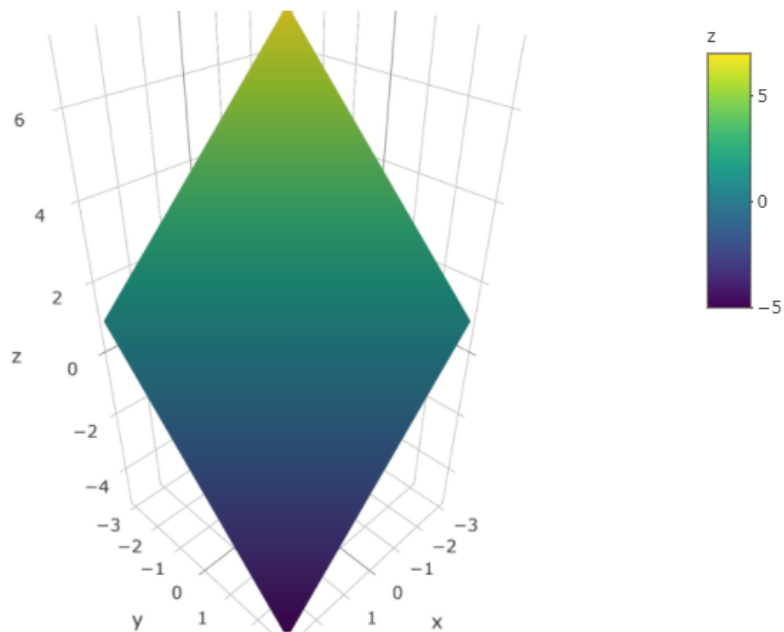
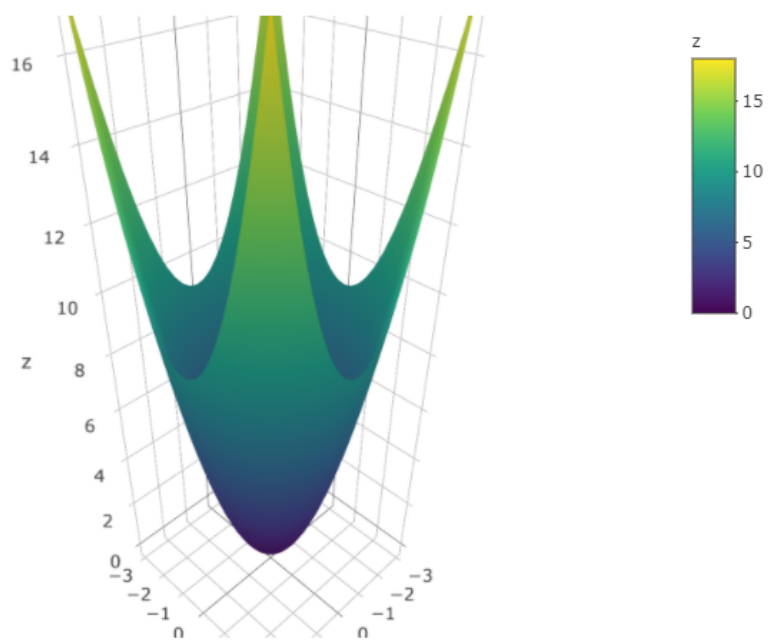
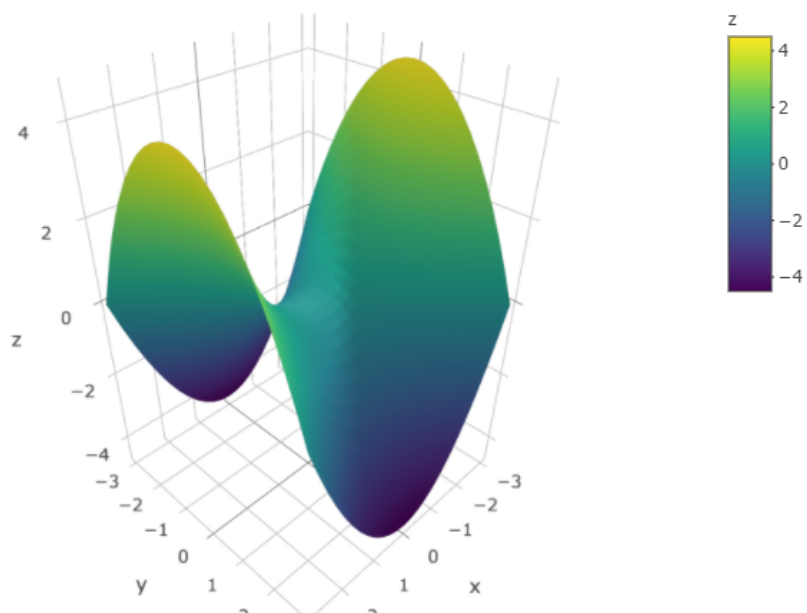
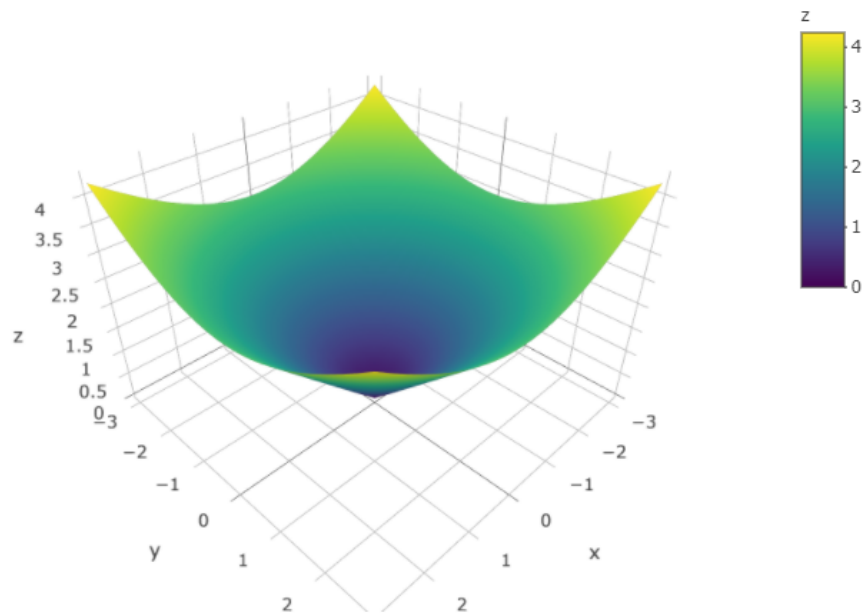
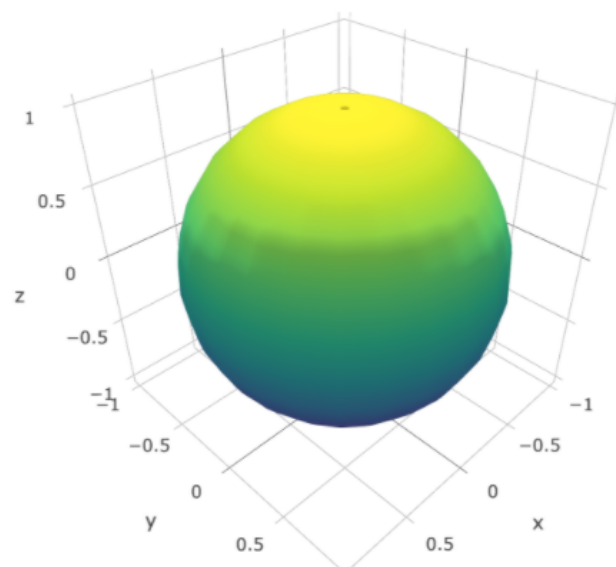


FIGURE 4.2 – Représentation en trois dimensions d'un point.

FIGURE 4.3 – Plan :  $z = 1 - x - y$

FIGURE 4.4 – Paraboloïde :  $z = x^2 + y^2$ FIGURE 4.5 – Hyperboloïde :  $z = (x^2 - y^2)/2$

FIGURE 4.6 – Cône :  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ FIGURE 4.7 – Sphère :  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

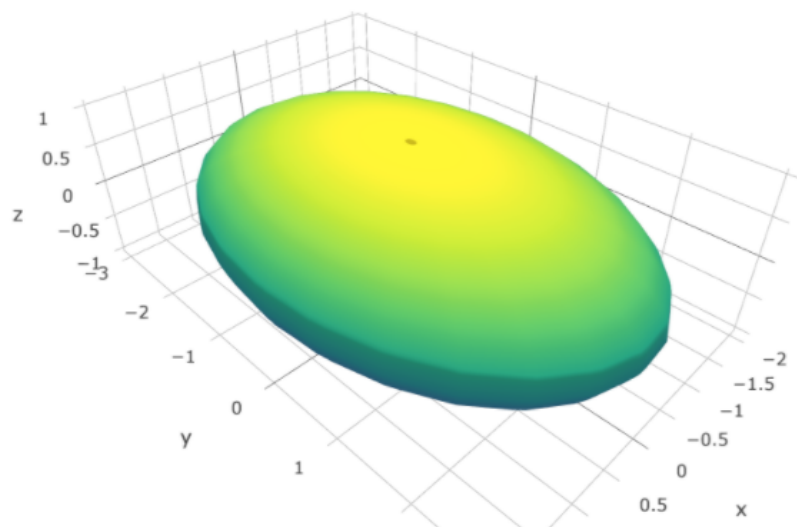


FIGURE 4.8 – Ellipse :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

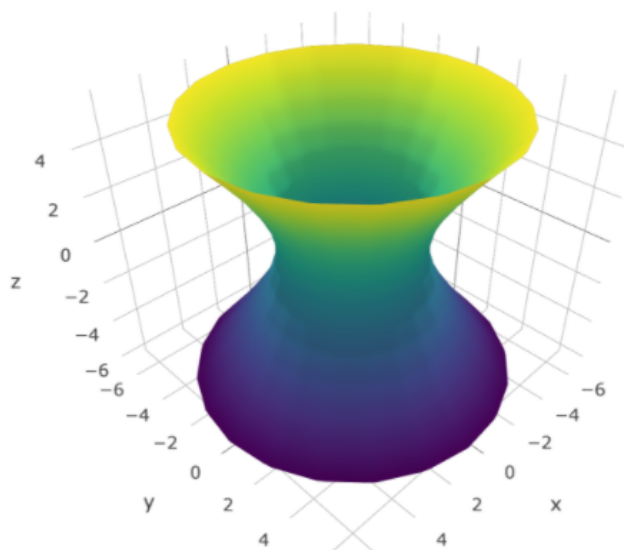


FIGURE 4.9 – Hyperboloïde à une nappe :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

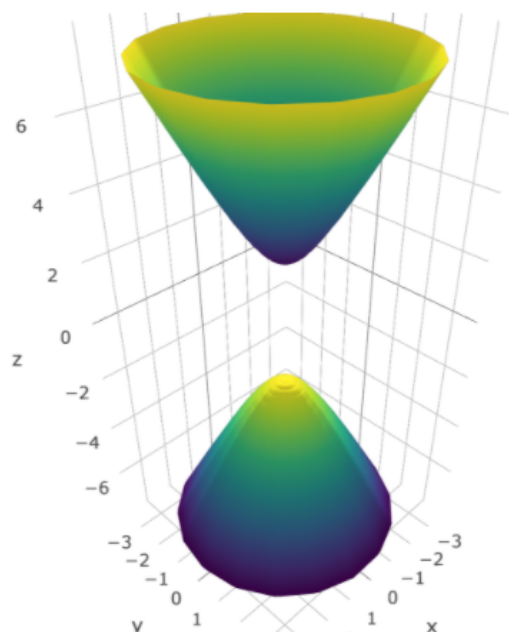


FIGURE 4.10 – Hyperboloïde à deux nappes :  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

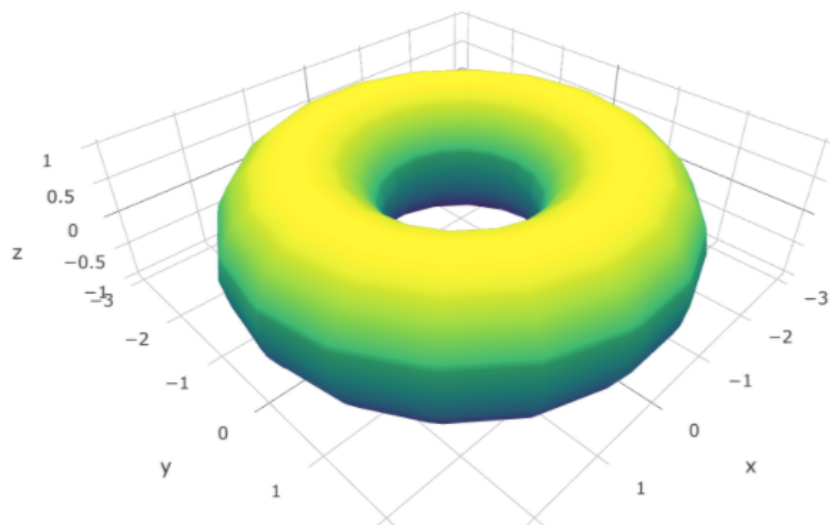
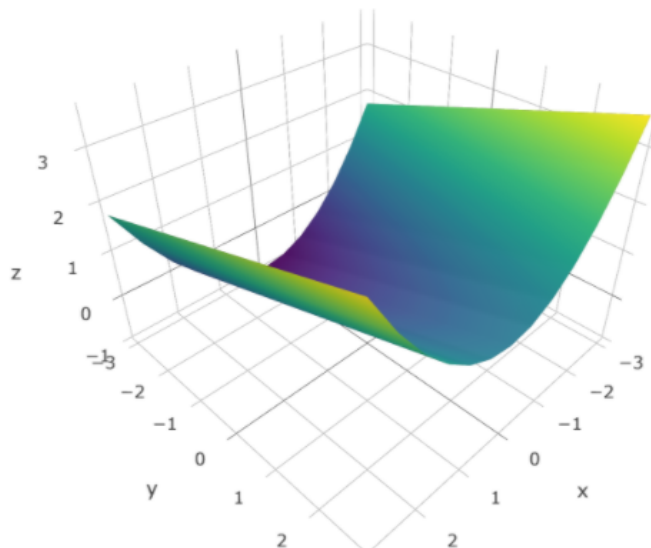


FIGURE 4.11 – Tore :  $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$

FIGURE 4.12 – Graphique de  $f(x, y) = x^2 + y$ 

*Remarque.* Lorsque vous vous trouvez dans la version en ligne de ce document et que vous placez le curseur de votre souris sur les figures précédentes, vous devriez apercevoir des lignes et des courbes noires, centrées sur votre curseur. Ces lignes et courbes correspondent aux coupes transversales et aux courbes de niveaux.

#### 4.4.1 Les coupes transversales

L'idée des coupes transversales est de fixer la valeur de l'une des deux variables indépendantes. À ce moment, nous observons la fonction dans le plan où est fixé la variable. Si nous fixons  $x = k$  où  $k \in \mathbb{R}$ , nous coupons la surface avec le plan  $x = k$ . Nous étudions donc une courbe dans le plan  $x = k$  et cette courbe se trouve dans un espace à deux dimensions.

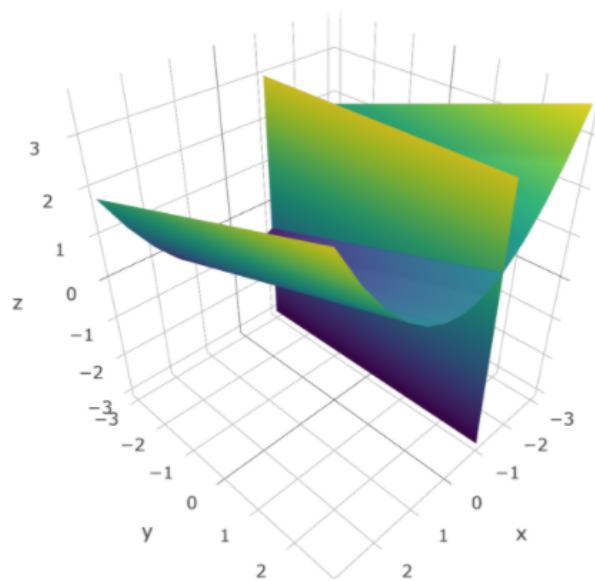
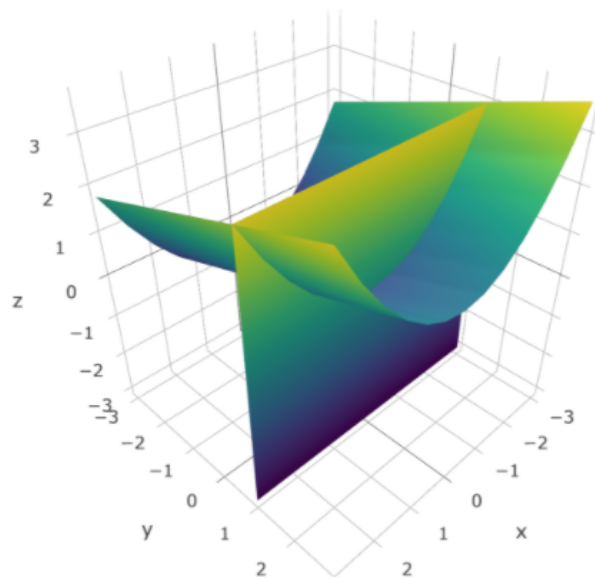
Pour bien visualiser les coupes transversales, nous vous invitons à utiliser l'application [GeoGebra](#) de la section [4.8](#).

**Exemple 4.1.** Dessinez les coupes transversales de la fonction  $z = f(x, y) = x^2 + y$ .

La figure [4.12](#) représente la fonction  $f(x, y)$ .

Déterminons tout d'abord les familles de courbes obtenues lorsque nous fixons la valeur de la variable  $x$ . Posons  $x = k$  où  $k$  est une constante. Ainsi  $f(k, y) = z = k^2 + y$ . Donc dans le plan  $x = k$ , l'allure de la fonction est une droite d'équation  $z = y + k^2$ , comme on peut le voir à la figure [4.13](#).

Déterminons maintenant les familles de courbes obtenues lorsque nous fixons la valeur de la variable  $y$ . Posons  $y = k$  où  $k$  est une constante. Ainsi  $f(x, k) = z = x^2 + k$ . Donc dans le plan  $y = k$ , l'allure de la fonction est une parabole d'équation  $z = x^2 + k$ , comme on peut le voir à la figure [4.14](#).

FIGURE 4.13 – Graphique de  $f(x, y) = x^2 + y$  et du plan  $x = -1$ FIGURE 4.14 – Graphique de  $f(x, y) = x^2 + y$  et du plan  $y = 1$

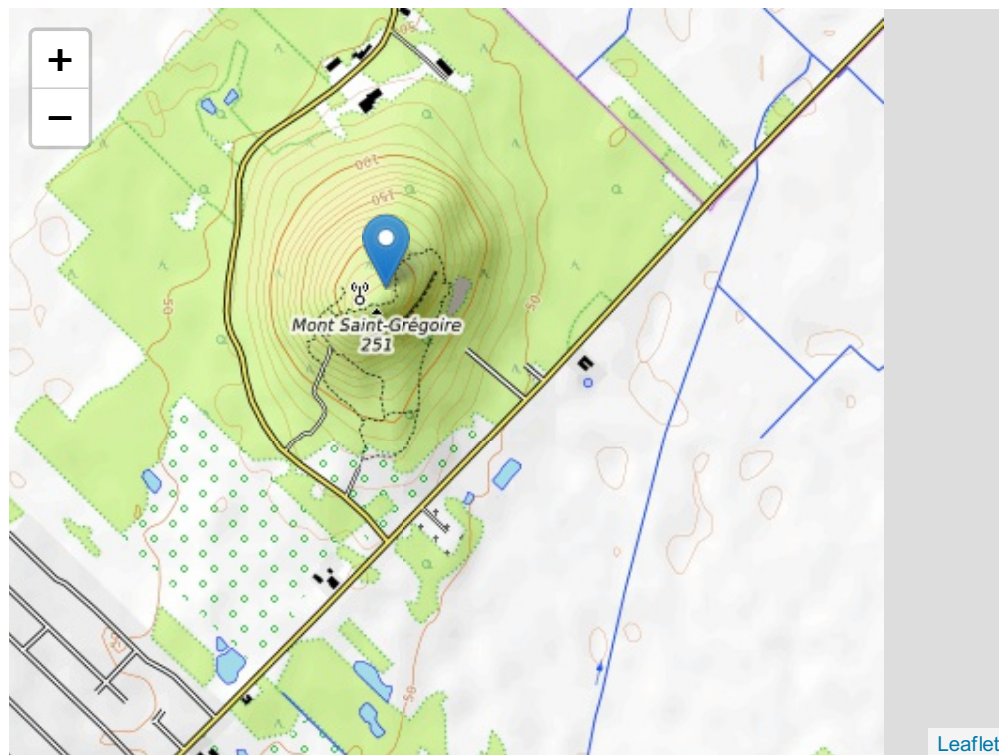


FIGURE 4.15 – Carte topographique du Mont Saint-Grégoire

#### 4.4.2 Les courbes de niveaux

**Définition 4.3** (Courbes de niveaux). Soit une fonction définie par  $z = f(x, y)$  et  $k \in \mathbb{R}$ . La courbe de niveau  $k$  correspond à l'ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $f(x, y) = k$ .

*Remarque.* Les courbes de niveaux correspondent donc à une coupe transversale de la fonction lorsque nous fixons la variable dépendante.

La fonction est constante le long de ses courbes de niveaux.

Les applications les plus répandues des courbes de niveaux sont dans les cartes topographiques. Une carte topographique est une carte à échelle réduite représentant le relief déterminé par altimétrie et les aménagements humains d'une région géographique de manière précise et détaillée sur un plan horizontal. La figure 4.15 représente une carte topographique du Mont Saint-Grégoire. Dans la version en ligne de ce document, vous pouvez vous déplacer dans la carte et aller voir le relief topographique ailleurs sur la planète.

Un autre exemple de carte topographique peut être obtenu en utilisant des données topographiques du volcan **Maunga Whau** situé dans la région d'Auckland. Les données sont distribuées sur une grille de 10 mètres par 10 mètres. La figure 4.16 représente le volcan en trois dimensions.

Nous pouvons représenter les courbes de niveaux de ce volcan comme à la figure 4.17.

Faisons maintenant quelques exemples.

**Exemple 4.2.** Déterminez la nature des courbes de niveaux du paraboloïde  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Dessinez quelques courbes de niveaux.



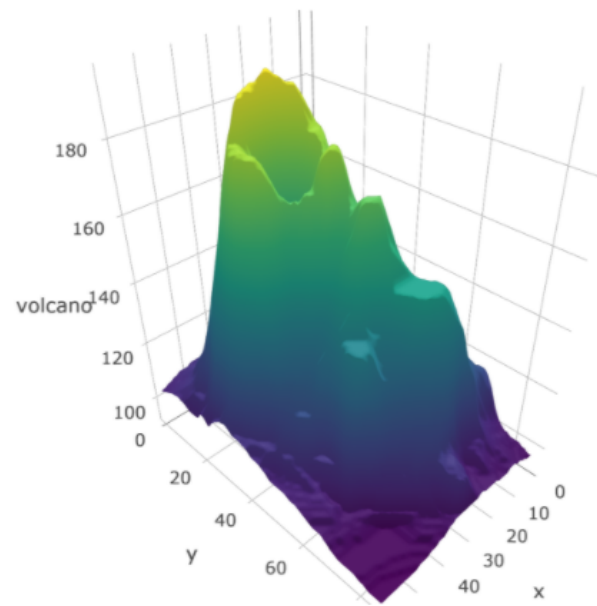


FIGURE 4.16 – Représentation du volcan Maunga Whau

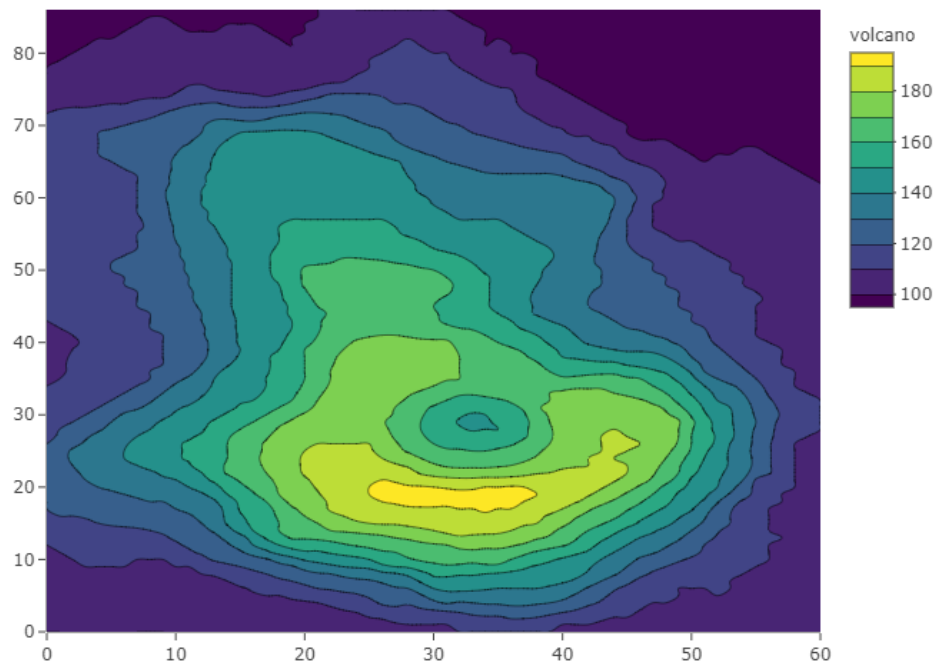


FIGURE 4.17 – Courbes de niveaux du volcan Maunga Whau

**Exemple 4.3.** Trouvez les courbes de niveaux de la fonction  $f(x, y) = x^2 - y$ .

**Exemple 4.4.** Trouvez les courbes de niveaux de la fonction  $f(x, y) = ye^{-|x|}$ .

**Exemple 4.5.** Trouvez les courbes de niveaux de la fonction  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ .

**Exemple 4.6.** Trouvez les courbes de niveaux de la fonction  $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$ .

## 4.5 Domaine

**Définition 4.4** (Domaine d'une fonction). Le domaine d'une fonction réelle  $f(x_1, \dots, x_n)$  (ou domaine de définition d'une fonction), noté  $\text{dom} f$ , est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui contient toutes les valeurs de  $x_i$  avec  $i = 1, \dots, n$ , pour lesquelles la règle de correspondance de  $f(x_1, \dots, x_n)$  est définie.

Pour déterminer le domaine d'une fonction réelle  $f(x_1, \dots, x_n)$ , il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. Vérifier si  $f(x_1, \dots, x_n)$  est définie dans un contexte, afin de voir si celui-ci restreint les valeurs des variables indépendantes.
2. Enlever les valeurs des variables indépendantes qui annulent le dénominateur.
3. L'argument des racines paires doit être plus grand ou égal à zéro, c'est-à-dire  $\geq 0$ .
4. L'argument des logarithmes doit être **strictement** plus grand que zéro, c'est-à-dire  $> 0$ .
5. Les fonctions trigonométriques usuelles ont souvent des dénominateurs, par exemple  $\tan$ ,  $\cot$ ,  $\csc$  et  $\sec$ . De plus, les fonctions trigonométriques inverses ont souvent des domaines restreints.

Voici quelques exemples.

**Exemple 4.7.** Déterminez le domaine des fonctions suivantes :

- a.  $f(x, y) = x^2 + y^2$
- b.  $f(x, y) = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$

- c.  $f(x, y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x - y}$
- d.  $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$
- e.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- f.  $f(x, y) = \sqrt{x(1 - |y|)}$
- g.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$
- h.  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

## 4.6 Limites

Nous allons débiter en rappelant la définition de la limite d'une fonction à une variable.

**Définition 4.5** (Limite d'une fonction à une variable). Soit une fonction  $f(x)$ . Nous disons que  $L$  est la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta$  tel que si  $|x - a| < \delta$  alors  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Nous notons alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

WIP

**Proposition 4.1** (Les propriétés des limites). Soit  $f(x, y)$  et  $g(x, y)$  deux fonctions de deux variables.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \pm g(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \pm \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \cdot g(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)} \quad \text{si } g(x, y) \neq 0 \text{ près de } (a, b) \end{aligned}$$

**Exemple 4.8.** Trouvez la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + y)$$

**Exemple 4.9.** Trouvez la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Nous avons pu lever l'indétermination de l'exemple 4.9 en utilisant une limite vue dans un cours de calcul intégral. Malheureusement, il sera habituellement plus difficile de lever des indéterminations. En particulier, il n'existe pas d'analogue à la règle de L'Hospital pour des fonctions de deux variables ou plus.

Nous verrons par contre deux techniques pour être en mesure de calculer des limites de fonctions de deux variables ou plus : la méthode des chemins et la méthode du gendarme.

### 4.6.1 La méthode des chemins

Cette méthode est une généralisation du principe de la limite à droite et de la limite à gauche. Lorsque nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

cela signifie que la valeur de  $x$  s'approche de  $a$ . La variable  $x$  peut s'approcher de  $a$  de deux façons différentes, par la droite ou par la gauche. Dans le cas de la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

cela signifie que nous devons nous approcher du point  $(a, b)$ . Par contre, il existe plus de deux façons de se rendre au point  $(a, b)$ . Il en existe en fait une infinité ! La figure 4.18 présente une représentation d'une limite pour une fonction d'une seule variable dans la figure de gauche. Dans la figure de droite, nous montrons trois chemins possibles, parmi l'infinité de chemins possibles.

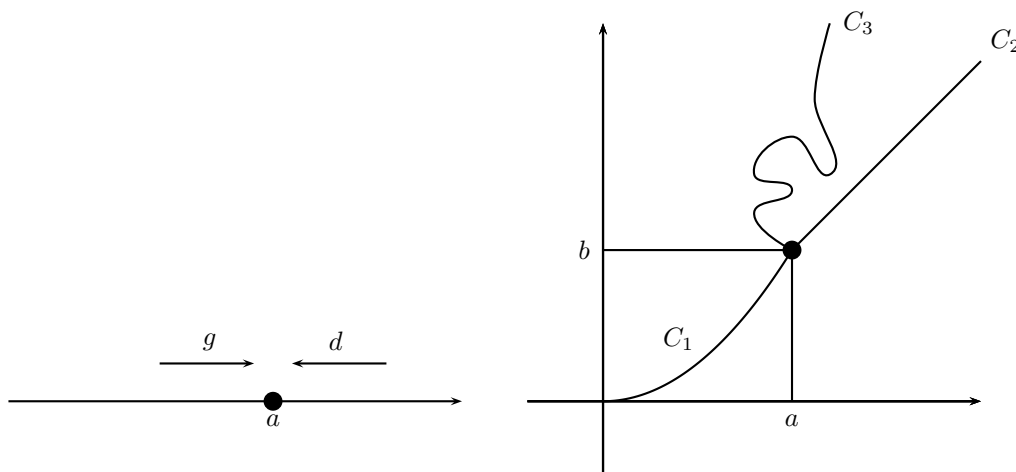


FIGURE 4.18 – Représentation d’une limite en deux dimensions et d’une autre en trois dimensions.

**Exemple 4.10.** Déterminez, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

En général, nous désirons trouver la limite en  $(0, 0)$  et nous allons tester les chemins suivants :

- $x = 0$
- $y = 0$
- $y = x$
- $y = kx$  où  $k$  est une constante
- $y = kx^2$  où  $k$  est une constante

*Remarque.* La méthode des chemins ne permet que de démontrer qu’une limite **n’existe pas**.

**Exemple 4.11.** Déterminez, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

**Exemple 4.12.** Déterminez, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

**Exemple 4.13.** Déterminez, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{y}$$

### 4.6.2 La méthode des gendarmes

Puisque la méthode des chemins ne nous permet pas de démontrer qu’une limite existe, nous allons introduire la méthode des gendarmes, qui elle permet de démontrer qu’une limite existe. Nous débutons pas utiliser la méthode des chemins pour calculer la limite :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

Si tous les chemins nous donnent une limite égale à  $L$ , nous pouvons présumer que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

Nous voulons maintenant trouver une fonction  $M(x,y)$  telle que :

$$0 \leq |f(x,y) - L| \leq M(x,y)$$

et telle que la limite suivante est vérifiée :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} M(x,y) = 0$$

Nous nous retrouvons donc dans la situation suivante :

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x,y) - L| && \leq M(x,y) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x,y) - L| && \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} M(x,y) \\ 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x,y) - L| && \leq 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

Pour utiliser la méthode des gendarmes, nous utiliserons à plusieurs reprises l'inégalité suivante.

**Proposition 4.2.** Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| &\leq 1 \\ \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| &\leq 1 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous avons :

$$\begin{aligned} x^2 &\leq x^2 + y^2 \\ \frac{x^2}{x^2 + y^2} &\leq 1 \end{aligned}$$

L'autre inégalité se démontre de la même manière. □

**Exemple 4.14.** Trouvez la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

**Exemple 4.15.** Trouvez la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$$



### 4.6.3 Exercices divers de limites

**Exemple 4.16.** Trouvez, si possible, les limites suivantes :

- a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (xy + y^2)$
- b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2}$
- c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$
- d.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy)}{1 - x - \cos(y)}$
- e.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$
- f.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$
- g.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$

## 4.7 La continuité

La notion de continuité pour les fonctions de plusieurs variables est similaire à celle des fonctions d'une seule variable.

**Définition 4.6** (Continuité pour les fonctions de deux variables). Soit une fonction  $f(x, y)$  et un point  $(a, b) \in \text{dom} f$ . Nous disons que  $f(x, y)$  est continue au point  $(a, b)$  si :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Cette définition se généralise facilement aux fonctions de trois variables ou plus.

**Exemple 4.17.** Déterminez si la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue en  $(0, 0)$ .

**Exemple 4.18.** Comment la fonction  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x^3 y^3}{x^2 + y^2}$  définie pour tous les  $(x, y) \neq (0, 0)$  peut-elle être définie à l'origine pour qu'elle soit continue partout sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exemple 4.19.** Comment la fonction  $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$  définie pour tous les  $x \neq y$  peut-elle être définie à l'origine pour qu'elle soit continue partout sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exemple 4.20.** Déterminez si la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

est continue en  $(0, 0)$ .

## 4.8 Geogebra

## 4.9 Pages supplémentaires

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.









## Chapitre 5

# La dérivation de fonctions de plusieurs variables

Vous trouverez à la section 5.9 une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser des dérivées partielles et des dérivées directionnelles de fonctions. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 5.1 Introduction

Nous sommes maintenant prêts à aborder la notion de dérivée pour les fonctions de deux variables ou plus.

### 5.2 Les dérivées partielles

Nous allons débiter en rappelant la définition de la dérivée d'une fonction d'une seule variable.

**Définition 5.1** (Dérivée d'une fonction d'une seule variable). Soit  $f(x)$  une fonction. La dérivée de la fonction  $f(x)$ , notée  $f'(x)$  ou  $\frac{df}{dx}$  est donnée par :

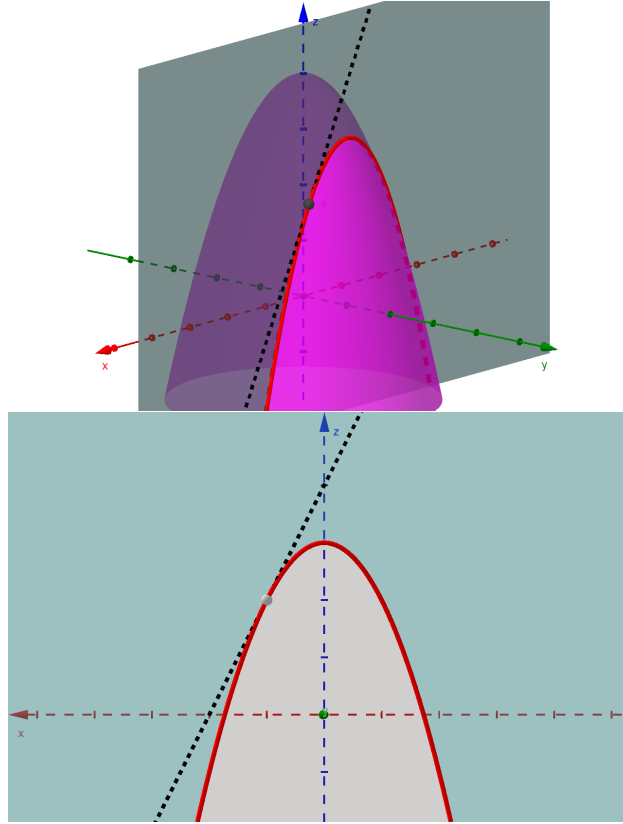
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nous savons que la dérivée d'une fonction correspond, entre autres, à la pente de la droite tangente. Dans le cas d'une fonction de plus d'une variable, la notion de pente de droite tangente en un point n'existe pas à priori. Nous devons donc définir une nouvelle définition de dérivée.

Nous allons débiter par introduire la notion de dérivée pour les fonctions de deux variables. La généralisation pour les fonctions de plus de deux variables se fait facilement.

Soit une fonction  $z = f(x, y)$ . Pour étudier les deux (une par variable indépendante) dérivées partielles de cette fonction, nous allons les variations de cette fonction.

Supposons que nous nous trouvons dans un plan où la variable  $y$  est constante. Ceci signifie que seule la variable  $x$  varie, c'est-à-dire que nous partons du point  $(x, y)$  jusqu'au point  $(x + \Delta x, y)$ . Puisque nous avons deux points, nous pouvons déterminer le taux de variation de la fonction  $f(x, y)$  par rapport à la variable  $x$ . Ce taux est donné par :

FIGURE 5.1 – Représentation géométrique de la dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$ 

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Lorsque nous prenons la limite de ce taux de variation lorsque  $\Delta x$  tend vers 0, nous obtenons la dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$ . Mathématiquement, nous écrivons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

D'une manière similaire, nous pouvons définir la dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $y$  :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Géométriquement, la dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$  correspond à la pente de la droite tangente à la courbe engendrée par l'intersection du plan  $y = k$  où  $k$  est une constante et la surface  $z = f(x, y)$ .

La figure 5.1 représente dans l'image de gauche la surface  $z = f(x, y)$  coupée par le plan  $y = k$  où  $k$  est une constante. Nous apercevons l'intersection de la surface et du plan, représentée par une courbe parabolique. La ligne pointillée représente la droite tangente à la surface dans le plan  $y = k$ . La figure de droite représente la fonction parabolique dans le plan  $y = k$  ainsi que la droite tangente.

C'est la même correspondance pour  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , il suffit d'étudier la courbe dans le plan  $x = k$  où  $k$  est une constante.



Lorsque nous trouvons la dérivée partielle d'une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  par rapport à la variable indépendante  $x_i$ , nous supposons toutes les autres variables indépendantes  $x_j$  où  $j \neq i$  sont des constantes.

**Proposition 5.1** (Notation pour dérivées partielles). *Soit une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . La dérivée partielle de  $f$  par rapport à la variable  $x_i$  peut être notée par :*

$$\begin{aligned} &— f_{x_i} \\ &— \frac{f_i}{\partial f} \\ &— \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &— D_i f \end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction ne possède que deux variable, c'est-à-dire une fonction  $f(x, y)$ , nous pouvons noter la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$  par :

$$\begin{aligned} &— f_x \\ &— \frac{\partial f}{\partial x} \\ &— D_x f \end{aligned}$$

**Exemple 5.1.** Trouvez les dérivées partielles de  $f(x, y) = x \cos(x + y^2)$ .

**Exemple 5.2.** Trouvez les dérivées partielles de  $f(x, y) = x^2 \sin(y)$ .

**Exemple 5.3.** Trouvez les dérivées partielles de  $f(x, y) = x^3y^2 + x^4y + y^4$ .

**Exemple 5.4.** Trouvez les dérivées partielles de  $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$ .

**Exemple 5.5.** Soit une fonction  $f$  différentiable et d'une seule variable. Montrez que  $f\left(\frac{x}{y}\right)$  satisfait l'équation :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

### 5.2.1 Les dérivées d'ordres supérieurs

Nous allons maintenant définir les dérivées d'ordres supérieurs. Voici les dérivées partielles secondes d'une fonction  $f(x, y)$ .

**Définition 5.2** (Les dérivées partielles du second ordre). Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = f_{xx}(x, y) = f_{11}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right] = f_{yy}(x, y) = f_{22}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right] = f_{yx}(x, y) = f_{21}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = f_{xy}(x, y) = f_{12}(x, y)\end{aligned}$$

**Exemple 5.6.** Trouvez toutes les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction  $f(x, y) = x^2y + 3y^2$ .

**Exemple 5.7.** Trouvez toutes les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction  $f(x, y) = x^3y^4$ .

*Remarque.* Remarquez que dans les deux exemples précédents, les dérivées partielles mixtes sont égales, c'est-à-dire que  $f_{xy} = f_{yx}$ .

**Théorème 5.1** (Le théorème de Clairaut). *Soit une fonction  $f(x, y)$  définie sur un disque  $D$  qui contient le point  $(a, b)$ . Si  $f_{xy}$  et  $f_{yx}$  sont continues sur  $D$ , alors :*

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

*Démonstration.* La démonstration est laissée à l'étudiante ou l'étudiant. □

## 5.3 Applications des dérivées partielles

Voici quelques applications des dérivées partielles.

**Exemple 5.8** (L'équation de Laplace). L'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses applications de physique théorique. Pour en savoir plus, [Wikipédia : Équation de Laplace](#).

Montrez que les fonctions  $f(x, y) = e^{kx} \cos(ky)$  et  $g(x, y) = e^{kx} \sin(ky)$  où  $k$  est une constante, sont des solutions de l'équation de Laplace donnée par :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

**Exemple 5.9** (L'équation d'onde). L'équation d'onde est une équation qui décrit la propagation d'une onde. Pour en savoir plus, [Wikipédia : Équation d'onde](#).

Soit  $f(u)$  et  $g(u)$  deux fonctions dérivables deux fois. Montrez que  $\omega = f(x - ct) + g(x + ct)$  où  $c$  est une constante, est une solution de l'équation d'onde donnée par :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

**Exemple 5.10** (L'équation de la chaleur). L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Pour en savoir plus, [Wikipédia : Équation de la chaleur](#).

Montrez que la fonction  $u(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$  est une solution de l'équation de la chaleur donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

## 5.4 Le plan tangent

Nous désirons trouver l'équation du plan tangent à une surface donnée par la fonction  $z = f(x, y)$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  où  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Pour ce faire, nous allons débiter en rappelant comment trouver l'équation cartésienne d'un plan.

### 5.4.1 L'équation cartésienne d'un plan

**Définition 5.3** (Le vecteur normal à un plan). Soit un plan  $\pi$ . Un vecteur normal au plan, noté  $\vec{n}$ , est un vecteur tel que tous les vecteurs se trouvant sur le plan sont perpendiculaires à  $\vec{n}$ .

Nous allons maintenant utiliser le vecteur normal au plan pour définir l'équation normale du plan de l'espace. Soit un plan  $\pi$  et un vecteur  $\vec{n} = [a, b, c]$  normal à ce plan. Soit aussi un point  $P(x_0, y_0, z_0)$  connu faisant partie du plan et un point  $Q(x, y, z)$  un point quelconque du plan. La figure 5.2 représente un plan ainsi que l'un de ses vecteurs normal avec un point  $P$  connu.

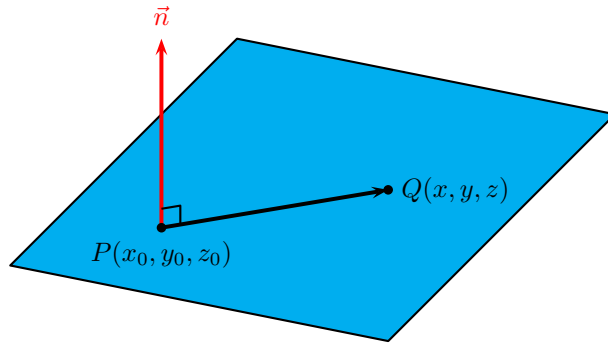


FIGURE 5.2 – Représentation d'un plan avec un de ses vecteur normal.

Puisque le vecteur normal  $\vec{n}$  est perpendiculaire à tous les vecteurs se trouvant sur le plan, il est en particulier perpendiculaire au vecteur  $\vec{PQ}$ . Si nous définissons le vecteur  $\vec{p} = \vec{OP}$  et le vecteur  $\vec{x} = \vec{OQ}$ , nous avons que :

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad \text{car } \vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{p})$$

Nous avons donc :

**Définition 5.4** (L'équation cartésienne d'un plan). Soit un plan  $\pi$ . Soit un vecteur normal à ce plan  $\vec{n} = [a, b, c]$  et un point de ce plan  $P(x_0, y_0, z_0)$  connu. L'équation normale du plan est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \\ [a, b, c] \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant prêts à trouver l'équation du plan tangent à une surface. Pour simplifier la démonstration, nous allons modifier l'équation cartésienne d'un plan.

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ c(z - z_0) &= -a(x - x_0) - b(y - y_0) \\ z - z_0 &= \frac{-a}{c}(x - x_0) + \frac{-b}{c}(y - y_0) \\ &= A(x - x_0) + B(y - y_0) \end{aligned}$$

en posant  $A = -\frac{a}{c}$  et  $B = -\frac{b}{c}$ .

Pour trouver les constantes  $A$  et  $B$ , nous allons nous placer dans les plans  $y = y_0$  et  $x = x_0$ . Tout d'abord, plaçons-nous dans le plan  $y = y_0$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} z - z_0 &= A(x - x_0) + B(y_0 - y_0) \\ z - z_0 &= A(x - x_0) \\ z &= Ax + (z_0 - Ax_0) \end{aligned}$$

L'équation précédente correspond à celle de la droite tangente à la courbe définie par  $z = f(x, y_0)$ . La pente de cette droite correspond à la dérivée partielle de la fonction  $f$  par rapport à  $x$ , évaluée en  $(x_0, y_0)$ , c'est-à-dire  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$ .

D'une manière similaire, nous montrons que  $B = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$ .

L'équation du plan tangent est donc donnée par :

$$z = z_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0)$$

**Exemple 5.11.** Trouvez l'équation du plan tangent à la surface  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  au point  $(1, 1)$ .

**Exemple 5.12.** Trouvez l'équation du plan tangent à la surface  $f(x, y) = \sin(xy)$  au point  $(\frac{\pi}{3}, -1)$ .

**Exemple 5.13.** Trouvez le plan tangent horizontal à la surface  $f(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$

**Exemple 5.14.** Trouvez l'équation du plan tangent à la surface  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$  au point  $(1, 1)$ .

*Remarque.* Le plan tangent est l'analogue du polynôme de Taylor de degré 1 pour les fonctions de deux variables.

## 5.5 Les fonctions différentiables

### 5.5.1 Les différentielles

### 5.5.2 Le calcul d'incertitude

**Définition 5.5** (L'erreur absolue et l'erreur relative). Soit  $a$  une donnée que nous mesurons. Nous notons  $\Delta a$  l'erreur absolue de la mesure  $a$ , c'est-à-dire l'incertitude associée à la prise de mesure de  $a$ . Nous notons



$\frac{\Delta a}{a}$  l'erreur relative de  $a$ .

Nous allons maintenant retrouver certaines règles de calcul d'incertitude à l'aide de la différentielle totale d'une fonction.

Soit une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une donnée dépendant de  $n$  mesures notées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . D'après les notions de différentielle, nous avons :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer une valeur maximale pour  $df$  :

$$|df| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |dx_1| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| |dx_n|$$

En notant les incertitudes  $\Delta x = |dx|$  pour toutes les mesures, nous obtenons la relation suivante en prenant la valeur maximale de l'incertitude :

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n$$

#### 5.5.2.1 L'addition ou la soustraction de deux mesures.

Soit  $f(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 \\ &= \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \end{aligned}$$

Ceci implique que lors de l'addition ou de la soustraction de deux mesures, les erreurs absolues sont additionnées.

#### 5.5.2.2 Le produit d'une mesure par une constante

Soit  $f(x_1) = kx_1$  où  $k$  est une constante. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 \\ &= |k| \Delta x_1 \end{aligned}$$

Ceci implique que lors du produit d'une mesure par une constante, l'erreur absolue de la mesure est multipliée par la valeur absolue de la constante.

### 5.5.2.3 Le produit de deux mesures

Soit  $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 \\ &= |x_2| \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2 \\ \frac{\Delta f}{f} &= \frac{|x_2|}{x_1 \cdot x_2} \Delta x_1 + \frac{|x_1|}{x_1 \cdot x_2} \Delta x_2 \\ &= \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}\end{aligned}$$

Ceci implique que lors du produit de deux mesures, les erreurs relatives sont additionnées.

### 5.5.2.4 Le quotient de deux mesures

Soit  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 \\ &= \left| \frac{1}{x_2} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{-x_1}{x_2^2} \right| \Delta x_2 \\ \frac{\Delta f}{f} &= \left| \frac{1}{x_2} \frac{x_2}{x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{-x_1}{x_2^2} \frac{x_2}{x_1} \right| \Delta x_2 \\ &= \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}\end{aligned}$$

Ceci implique que lors du quotient de deux mesures, les erreurs relatives sont additionnées.

### 5.5.2.5 La puissance d'une mesure

Soit  $f(x_1) = x_1^n$  où  $n \in \mathbb{R}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 \\ &= |n x_1^{n-1}| \Delta x_1 \\ \frac{\Delta f}{f} &= \left| \frac{n x_1^{n-1}}{x_1^n} \right| \Delta x_1 \\ &= |n| \frac{\Delta x_1}{x_1}\end{aligned}$$

Ceci implique que lors du calcul de la puissance d'une mesure, nous multiplions l'erreur relative par la valeur absolue de la puissance  $n$ .

**Exemple 5.15.** Pour mesurer le volume d'un cylindre, nous mesurons sa hauteur et son rayon. Nous obtenons  $h = 15 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$  et  $r = 5 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$ . Trouvez l'erreur absolue et l'erreur relative sur le volume du cylindre.

**Exemple 5.16.** La période d'oscillation  $T$  d'un pendule simple dépend de la longueur du pendule  $l$ ,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . En mesurant la période du pendule et sa longueur (deux mesures), nous pouvons obtenir la valeur de la constante gravitationnelle  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ . Trouvez l'erreur absolue et l'erreur relative sur la mesure de  $g$ , en fonction des incertitudes sur  $T$  et  $l$ .

## 5.6 La règle de dérivation en chaîne et la dérivation implicite

Nous savons que si  $y = f(x)$  et  $x = x(t)$ , alors la dérivée de la composition des fonctions  $f \circ x$  est :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

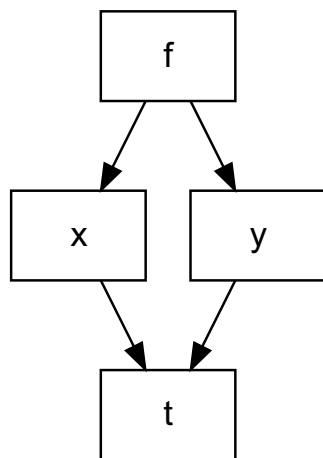
C'est ce que nous nommons la **règle de dérivation en chaîne**. Nous voulons maintenant introduire une règle similaire pour les fonctions de plusieurs variables. Débutons par étudier la règle pour les fonctions de deux variables. La généralisation pour les fonctions de trois variables ou plus se fait de façon similaire.

**Théorème 5.2** (La règle de dérivation en chaîne pour les fonctions de deux variables). *Soit une fonction différentiable  $z = f(x, y)$  et soit  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$ . Nous avons alors :*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

*Remarque.* La dérivée  $\frac{dz}{dt}$  est une dérivée habituelle et non partielle. En effet, la fonction  $z = f(x, y)$  ne dépend que d'une seule variable,  $t$ . Lorsqu'une fonction dépend d'une seule variable, nous utilisons  $d$  et lorsqu'elle dépend de deux variables ou plus, nous utilisons  $\partial$ .

La manière la plus simple de trouver une dérivée à l'aide du théorème 5.2, est de construire un schéma de dérivation. Si nous dessinons le schéma de dérivation de la fonction du théorème 5.2, nous obtenons l'image suivante.



Pour dériver à la chaîne à l'aide de la figure précédente, nous partons du haut de l'*arbre* et nous parcourons toutes les *branches* qui se rendent jusqu'à la variable par rapport à laquelle nous dérivons, en multipliant les dérivées. Nous additionnons toutes les *branches* pour obtenir la dérivée.

**Exemple 5.17.** Trouvez  $\frac{dz}{dt}$  si  $z = e^{xy^2}$ ,  $x = t \cos(t)$  et  $y = t \sin(t)$ .

**Exemple 5.18.** Trouvez  $\frac{dz}{dt}$  si  $z = \sin(x^2y)$ ,  $x = 2t^2$  et  $y = 2 + \frac{1}{t}$ .

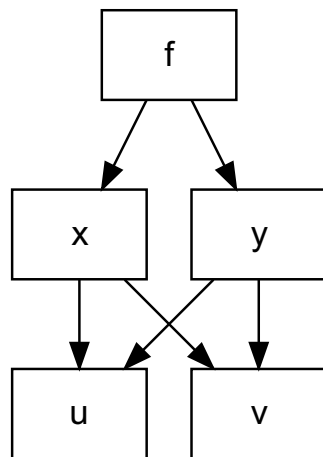
**Exemple 5.19.** Trouvez la dérivée de  $y = (\sin(x))^x$  de deux manières différentes.

Nous voulons maintenant savoir ce qui se produit lorsque nous avons une fonction  $z = f(x, y)$  différentiable,  $x = x(u, v)$  et  $y = y(u, v)$ .

**Théorème 5.3.** *Soit une fonction  $z = f(x, y)$  différentiable,  $x = x(u, v)$  et  $y = y(u, v)$ . Nous avons :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous ne ferons pas la preuve exacte mais nous allons dessiner le schéma de dérivation.  $\square$



Remarquons que si nous suivons toutes les *branches* de l'*arbre* en multipliant les dérivées et en additionnant les branches, nous obtenons le résultat du théorème. “

**Exemple 5.20.** Déterminez  $\frac{\partial z}{\partial u}$  et  $\frac{\partial z}{\partial v}$  si  $z = x^2 + y^2$ ,  $x = uv$  et  $y = \frac{u}{v}$ .

**Exemple 5.21.** Déterminez  $\frac{\partial z}{\partial u}$  et  $\frac{\partial z}{\partial v}$  si  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = e^{uv}$  et  $y = 1 + u^2 \cos(v)$ .

### 5.6.1 Les dérivées de surfaces implicites

Certaines surfaces sont définies de façon implicites et il est parfois plus simple de les dériver implicitement plutôt que de tenter de les dériver de façon explicite. De plus, certaines surfaces ne peuvent pas être exprimées de façon explicite.

Pour dériver de façon implicite, il faut garder en mémoire que si la fonction possède  $n$  variables, alors une des  $n$  variables dépend des  $n - 1$  autres.

**Exemple 5.22.** Trouvez  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$  si  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , où  $R$  est une constante.

**Exemple 5.23.** Utilisez les dérivées trouvées à l'exemple ??exm :deriv-implicite-sphere) pour trouver l'équation du plan tangent à la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  au point  $(1,1,1)$ .



**Exemple 5.24.** Trouvez l'équation du plan tangent à la surface  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  au point  $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ .

**Exemple 5.25.** Utilisez le changement de variables  $r = x+ct$ ,  $s = x-ct$  et  $w(r, s) = u(x, t)$  pour transformer l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

## 5.7 La dérivée directionnelle

Nous avons jusqu'à maintenant étudié les dérivées partielles d'une fonction par rapport aux variables  $x$  et  $y$ . Celles-ci correspondent respectivement au taux de variation de la fonction dans la direction de l'axe des  $x$  et de l'axe des  $y$ . Nous aimerions maintenant trouver le taux de variation dans une autre direction. Nous utiliserons pour ce faire la dérivée directionnelle.

**Définition 5.6** (La dérivée directionnelle). Soit une fonction  $z = f(x, y)$  une fonction différentiable et  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ , un vecteur unitaire (c'est-à-dire un vecteur dont la norme est égale à 1). Nous disons que la dérivée de  $f$  dans la direction  $\vec{u}$ , notée  $D_{\vec{u}}f$ , est donnée par :

$$D_{\vec{u}}f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu_1, y + hu_2) - f(x, y)}{h}$$

si cette limite existe.

Pour visualiser la dérivée directionnelle, nous vous invitons à utiliser l'application GeoGebra de la section 5.9. Celle-ci vous permet de changer la direction du vecteur unitaire et le point auquel vous visualisez la dérivée directionnelle.

*Remarque.* Nous remarquons que si  $\vec{u} = [1, 0] = \vec{i}$ , nous obtenons la dérivée partielle par rapport à  $x$ . D'une manière similaire, si  $\vec{u} = [0, 1] = \vec{j}$ , nous obtenons la dérivée partielle par rapport à  $y$ .

L'utilisation de la définition 5.6 pour calculer des dérivées directionnelles n'est pas appropriée pour la plupart des problèmes. Le théorème suivant nous permettra de calculer la dérivée directionnelles plus simplement.

**Théorème 5.4.** Soit une fonction  $z = f(x, y)$  différentiable au point  $(x_0, y_0)$  et soit  $\vec{u} = [u_1, u_2]$  un vecteur unitaire. Nous avons :

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

*Démonstration.* Posons  $g(h) = f(x + u_1h, y + u_2h)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu_1, y + hu_2) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= g'(0) \quad \text{par définition de } g' \end{aligned} \tag{5.1}$$

Posons maintenant  $x = x_0 + u_1h$  et  $y = y_0 + u_2h$ . D'où  $g(h) = f(x, y)$ . Par la règle de dérivation en chaîne, nous avons  $g'(h) = f_x u_1 + f_y u_2$ . Si nous évaluons cette expression en  $h = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} g'(0) &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \\ &= D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue par l'équation (5.1). □

**Exemple 5.26.** Déterminez le taux de variation de  $f(x, y) = \cos(xy) + y^2$  dans la direction du vecteur  $\vec{u} = [1, 1]$ .

**Exemple 5.27.** Trouvez la dérivée directionnelle de  $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$  en  $(0, 1)$  dans les directions suivantes :

- a.  $\vec{u} = [1, 2]$
- b.  $\vec{u} = [-2, 1]$
- c.  $\vec{u} = [1, 1]$

## 5.8 Le vecteur gradient

Nous allons maintenant définir une fonction vectorielle très utile, le vecteur gradient.

**Définition 5.7** (Le vecteur gradient). Soit  $z = f(x, y)$  une fonction différentiable. Le gradient de  $f$ , noté  $\nabla f$ , est donné par :

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

Nous notons le gradient de  $f$  des façons suivantes :  $\nabla f$ ,  $\text{grad } f$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ .

Le gradient d'une fonction est un vecteur.

**Exemple 5.28.** Trouvez le gradient de la fonction  $f(x, y) = x^2 + 3xy^5 - 4y^4$ .

**Exemple 5.29.** Trouvez le gradient des fonctions suivantes :

- a.  $f(x, y) = x^2 - y^2$
- b.  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

Le vecteur gradient est très utile car celui-ci possède plusieurs caractéristiques intéressantes.

**Théorème 5.5.** Soit  $f(x, y)$  une fonction différentiable et  $\vec{u}$  un vecteur unitaire. Nous avons alors :

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

*Démonstration.* Nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot \vec{u} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] \cdot [u_1, u_2] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 \\ &= D_{\vec{u}}f \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue par le théorème 5.4. □

**Théorème 5.6.** Le vecteur gradient d'une fonction  $f$  pointe dans la direction d'accroissement maximal de celle-ci. De plus, le taux de variation dans cette direction est donné par la norme du gradient.

*Démonstration.* Soit un vecteur unitaire  $\vec{u}$ . La dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction de  $\vec{u}$  est donnée par  $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$ . Nous voulons trouver  $\vec{u}$  tel que cette dérivée est maximale. Nous savons que :

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot \vec{u} &= \|\nabla f\| \cdot \|\vec{u}\| \cos(\theta) \\ &= \|\nabla f\| \cos(\theta) \quad \text{car } \vec{u} \text{ est unitaire} \end{aligned}$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\nabla f$  et  $\vec{u}$ . Le membre de droite est maximal si  $\cos(\theta) = 1$ , c'est-à-dire lorsque  $\theta = 0$ . D'où la direction maximale est celle donnée par le vecteur gradient.

De plus, dans cette direction, la dérivée directionnelle est  $D_{\vec{u}}f = \|\nabla f\|$ . □

**Exemple 5.30.** Soit la fonction  $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$ . Déterminez la direction dans laquelle se trouve l'accroissement maximal au point  $(1, 1)$  et le taux de variation maximal.

**Exemple 5.31.** Soit la fonction  $f(x, y) = (x + y^2)e^{-x}$ . Déterminez la direction dans laquelle se trouve l'accroissement maximal au point  $(1, 1)$  et le taux de variation maximal.

La dernière propriété que nous verrons concernant le vecteur gradient met en relation celui-ci avec les courbes de niveau d'une fonction.

**Théorème 5.7.** *Le vecteur gradient d'une fonction est perpendiculaire aux courbes de niveaux de cette fonction.*

*Démonstration.* Soit un point  $(x_0, y_0)$  du domaine de la fonction  $f$ . Soit  $\vec{u}$  un vecteur unitaire pointant dans la direction de la courbe de niveau passant par le point  $(x_0, y_0)$ . La figure 5.3 représente cette situation.

À ce moment, nous avons  $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = 0$ , car la fonction ne varie pas le long d'une courbe de niveau. Nous pouvons également écrire  $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = 0 = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos(\theta)$ , où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur gradient et  $\vec{u}$ . Puisque  $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$  n'est pas obligatoirement nul, nous avons que :

$$\cos(\theta) = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveaux. □

### 5.8.1 Le gradient des fonctions de plus de deux variables

Les notions de dérivée directionnelle et de gradient se généralisent pour les fonctions de plus de deux variables. Ainsi, si  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , nous avons que :

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

Cette généralisation nous permet de simplifier la résolution de certains problèmes.

**Exemple 5.32.** Trouvez l'équation du plan tangent à la surface définie par  $xyz = 1$  en  $x = 1$  et  $y = 1$ .

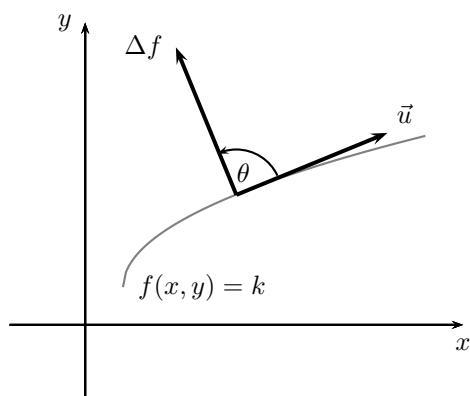


FIGURE 5.3 – Représentation d'une courbe de niveau et du gradient.

**Exemple 5.33.** Trouvez l'équation du plan tangent à la surface définie par  $x^2 + y - z^3 = 1$  en  $x = 1$  et  $y = 1$ .

## 5.9 GeoGebra



## 5.10 Pages supplémentaires

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.











# Chapitre 6

## L'optimisation

Vous trouverez à la section une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser des coupes transversales et des courbes de niveaux. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 6.1 Introduction

La théorie de l'optimisation des fonctions de plusieurs variables est très vaste. Nous introduirons ce sujet sans aller trop en profondeur. Faire de l'optimisation consiste à déterminer les maximums et les minimums d'une fonction.

### 6.2 L'approximation quadratique

Nous voulons approcher une fonction  $f(x, y)$  autour d'un point  $(x_0, y_0)$  par un paraboloïde. Ceci correspond à l'analogie de l'approximation d'une fonction par un polynôme de Taylor de degré 2. Nous pouvons montrer que le paraboloïde recherché est donné par :

$$\begin{aligned} Q(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ & + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] \end{aligned} \quad (6.1)$$

Nous utiliserons l'équation (6.1) pour démontrer la nature des points critiques d'une fonction de deux variables.

### 6.3 Les points critiques et leur nature

**Définition 6.1.** Soit une fonction  $f : D_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous disons que le point  $(x_0, y_0)$  est un point de maximum **local** si pour tous les points  $(x, y)$  dans le voisinage de  $(x_0, y_0)$ , nous avons que :

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

De manière similaire, le point  $(x_0, y_0)$  est un point de minimum **local** si pour tous les points  $(x, y)$  dans le voisinage de  $(x_0, y_0)$ , nous avons que :

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Le **maximum absolu** de  $f$  est la valeur maximale de  $f$  sur  $D$  et le **minimum absolu** de  $f$  est la valeur minimale de  $f$  sur  $D$ .

**Théorème 6.1.** *Soit une fonction  $z = f(x, y)$  différentiable autour du point  $(x_0, y_0)$ . Si le point  $(x_0, y_0)$  est un maximum ou minimum local de  $f$ , alors :*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$$

*Démonstration.* Nous savons que si une fonction d'une seule variable possède un minimum ou un maximum en  $x_0$ , alors la dérivée évaluée en ce point est nulle.

Maintenant, supposons que  $(x_0, y_0)$  est un point de maximum (la démonstration pour le cas d'un minimum est similaire). Si nous fixons  $x = x_0$ , nous avons une fonction d'une seule variable  $g(y) = f(x_0, y)$ . Cette fonction possède un maximum lorsque  $y = y_0$ . Nous avons donc que  $g'(y_0) = 0$ . Mais  $g'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ .

D'une manière similaire, nous avons que  $f_x(x_0, y_0) = 0$ . D'où  $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$ .  $\square$

*Remarque.* Il est important de remarquer que le théorème 6.1 n'est pas un **si et seulement si**. C'est-à-dire que si  $(x_0, y_0)$  est un maximum (ou un minimum), alors le gradient en ce point est nul.

L'inverse n'est pas nécessairement vrai, c'est-à-dire que si le gradient en un point est nul, il est possible que le point ne soit ni un maximum, ni un minimum.

Pour spécifier la nature d'un point critique, nous aurons besoin d'un test supplémentaire.

**Théorème 6.2.** *Soit une fonction  $z = f(x, y)$  possédant un point critique en  $(x_0, y_0)$ . Soit le scalaire :*

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

*Nous pouvons rencontrer les quatres situations suivantes :*

- Si  $D > 0$  et  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un point de maximum
- Si  $D > 0$  et  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un point de minimum
- Si  $D < 0$  alors  $(x_0, y_0)$  est un point de selle
- Si  $D = 0$  alors nous ne pouvons rien conclure

*Démonstration.* Pour simplifier la résolution, nous allons poser  $A = f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = f_{xy}(x_0, y_0)$  et  $C = f_{yy}(x_0, y_0)$ . Nous allons utiliser l'approximation quadratique trouvée à l'équation (6.1), pour trouver une expression pour  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  si  $(x, y)$  est près de  $(x_0, y_0)$ .

Par l'équation (6.1) et puisque  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ , car  $(x_0, y_0)$  est un point critique, nous avons :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{A}{2}(x - x_0)^2 + B(x - x_0)(y - y_0) + \frac{C}{2}(y - y_0)^2$$

Ainsi, le signe de  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  sera le même que celui du membre de droite de l'expression précédente. Nous allons diviser le membre de droite par  $\frac{1}{2}(y - y_0)^2$ . Cette division ne changera pas le signe. Par la suite

posons  $w = \frac{x - x_0}{y - y_0}$ .

Nous obtenons une nouvelle expression, que nous noterons  $E$  :

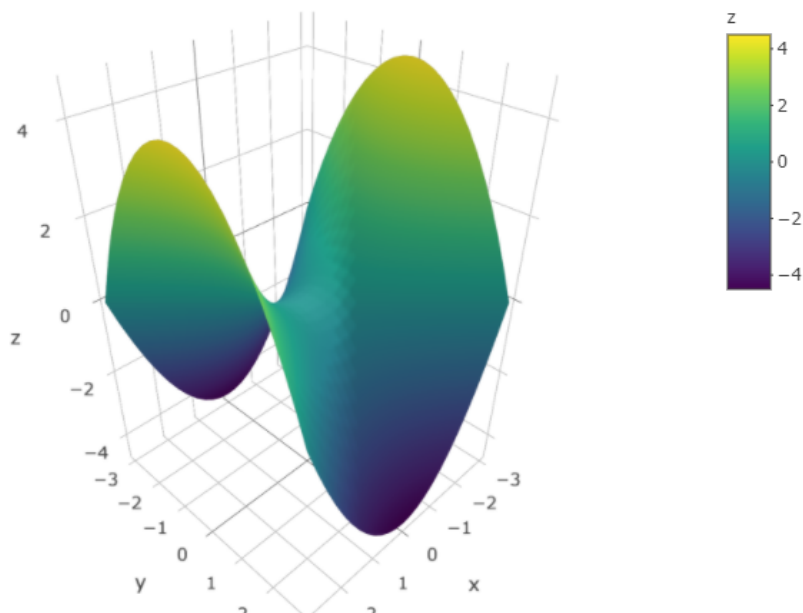
$$E = Aw^2 + 2Bw + C$$

L'expression  $E$  est un polynôme de degré 2 par rapport à  $w$ . Étudions maintenant le signe de  $E$ .

Nous avons que  $E = 0$  si :

$$\frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$



FIGURE 6.1 – Hyperboloïde :  $z = (x^2 - y^2)/2$ 

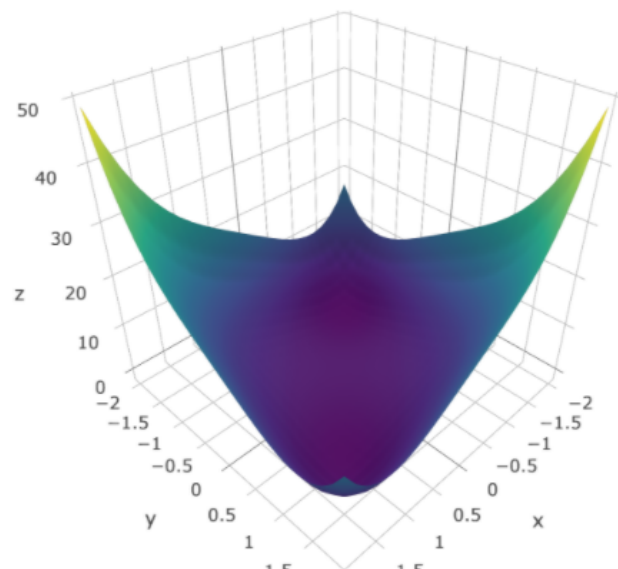
Si  $B^2 - AC < 0$  ou  $D = AC - B^2 > 0$  alors  $E$  ne possède pas de zéros. Ceci implique que  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  ne change pas de signe. Ainsi  $f(x, y)$  est toujours plus grand ou plus petit que  $f(x_0, y_0)$ , pour tout  $(x, y)$  près de  $(x_0, y_0)$ . C'est la définition d'un maximum ou d'un minimum.

Pour déterminer si nous sommes en présence d'un maximum ou d'un minimum, nous allons étudier le signe de  $A$ . Si  $A < 0$ , nous avons une concavité vers le bas, donc un maximum. Si  $A > 0$ , nous avons une concavité vers le haut, donc un minimum.

Si  $B^2 - AC > 0$  ou  $D = AC - B^2 < 0$ , nous avons deux racines et donc  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  change de signe. C'est ce que nous appelons un point de selle.  $\square$

Nous pouvons voir un point de selle en observant la figure 6.1. Le point situé à l'origine est un point de selle. Dans une direction, la concavité de la fonction est vers le haut et elle est vers le bas dans l'autre direction.

**Exemple 6.1.** Déterminez tous les points critiques de la fonction  $f(x, y) = x^2 - y^2$  et donnez leur nature.

FIGURE 6.2 – Graphique de  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ 

**Exemple 6.2.** Déterminez tous les points critiques de la fonction  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$  et donnez leur nature.

**Exemple 6.3.** Déterminez tous les points critiques de la fonction  $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$  et donnez leur nature.

**Exemple 6.4.** Déterminez tous les points critiques de la fonction  $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ .

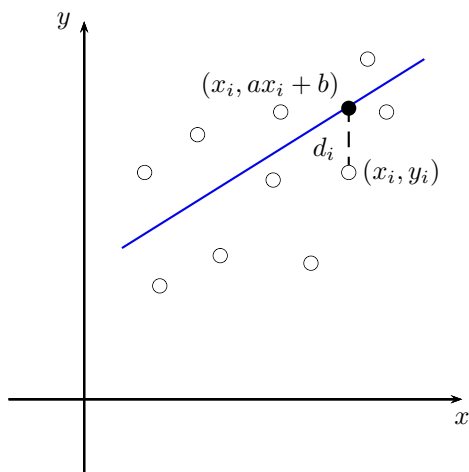


FIGURE 6.3 – Nuage de points et droite de régression

## 6.4 La droite de régression

Supposons que nous ayons amassé  $n$  couples de données  $(x_i, y_i)$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Nous voulons déterminer l'équation de la droite qui minimise la somme des carrés des distances verticales entre les points et cette droite. En d'autres mots, nous voulons trouver l'équation de la droite *la plus proche* du nuage de points. Cette situation est représentée à la figure 6.3.

Nous allons supposer que l'équation est de la forme  $y = ax + b$  avec  $a$  et  $b$  que nous devons déterminer en minimisant la somme des carrés des distances verticales. Nous savons :

$$d_i^2 = (y - y_i)^2 = (ax_i + b - y_i)^2$$

Nous voulons minimiser la somme de toutes ces distances, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 f(a, b) &= \sum_{i=1}^n d_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2
 \end{aligned}$$

Nous désirons trouver  $a$  et  $b$  tels qu'ils minimisent la fonction  $f(a, b)$ . Nous désirons en fait trouver les points critiques de  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0 \quad (6.3)$$

En utilisant l'équation (6.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) &= 0 \\
 \sum_{i=1}^n 2ax_i + \sum_{i=1}^n 2b - \sum_{i=1}^n 2y_i &= 0 \\
 b \sum_{i=1}^n 1 &= \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \\
 bn &= \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \\
 b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Nous devons maintenant remplacer l'équation (6.4) dans l'équation (6.2).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i) &= 0 \\
a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 0 \\
a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 0 \\
an \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - a \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 0 \\
a \left( n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) \\
a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}
\end{aligned}$$

En résumé, nous avons :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\
b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 6.2, nous pourrions démontrer que ces valeurs de  $a$  et  $b$  minimisent la fonction  $f$ .

**Exemple 6.5.** Utilisez les données suivantes pour trouver la droite de régression associée au nuage de points de la figure 6.4.

x	y
10	8.04
8	6.95
13	7.58
9	8.81
11	8.33
14	9.96
6	7.24
4	4.26
12	10.84
7	4.82
5	5.68

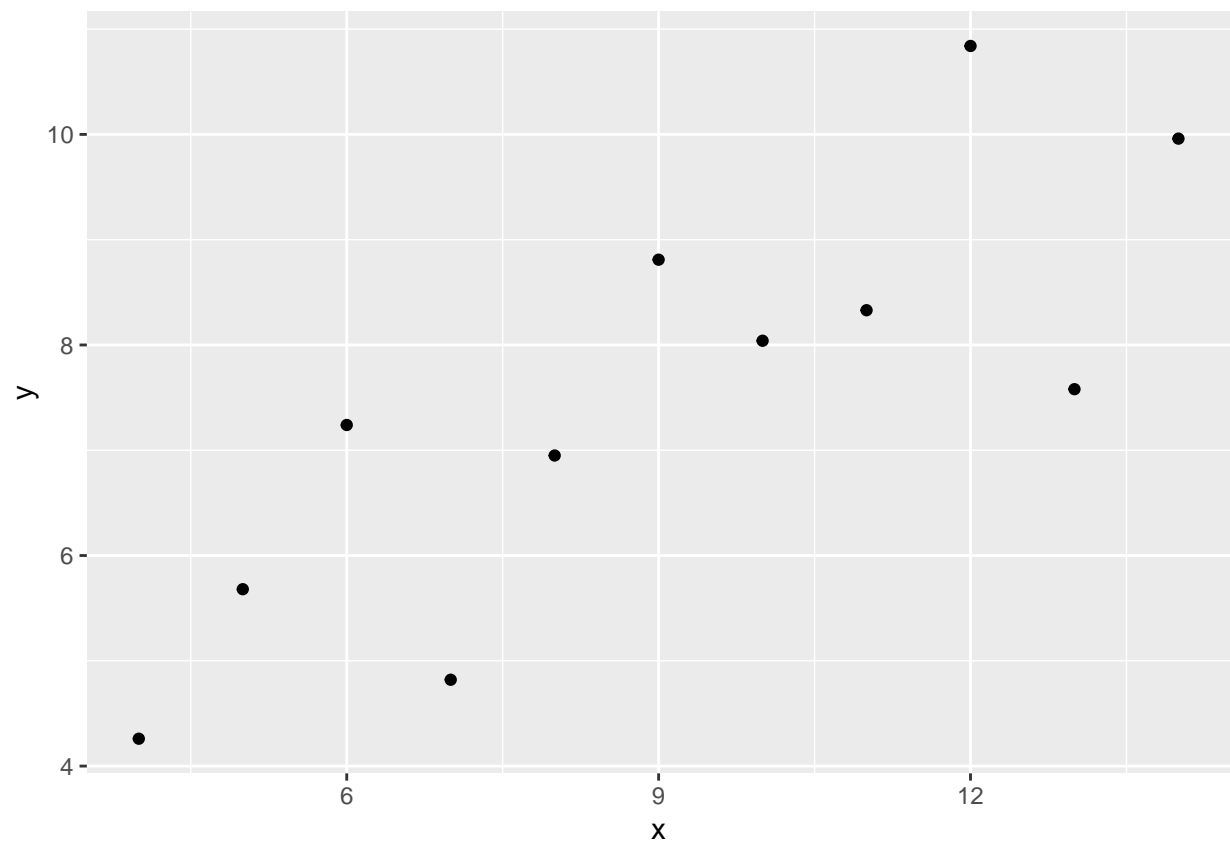


FIGURE 6.4 – Le nuage de points.

TABLE 6.1 – Le quartet d'Anscombe

x1	x2	x3	x4	y1	y2	y3	y4
10	10	10	8	8.04	9.14	7.46	6.58
8	8	8	8	6.95	8.14	6.77	5.76
13	13	13	8	7.58	8.74	12.74	7.71
9	9	9	8	8.81	8.77	7.11	8.84
11	11	11	8	8.33	9.26	7.81	8.47
14	14	14	8	9.96	8.10	8.84	7.04
6	6	6	8	7.24	6.13	6.08	5.25
4	4	4	19	4.26	3.10	5.39	12.50
12	12	12	8	10.84	9.13	8.15	5.56
7	7	7	8	4.82	7.26	6.42	7.91
5	5	5	8	5.68	4.74	5.73	6.89

### 6.4.1 Le quartet d'Anscombe

Le quartet d'Anscombe est constitué de quatre ensembles de données qui ont les mêmes propriétés statistiques simples mais qui sont en réalité très différents, ce qui se voit facilement lorsqu'on les représente sous forme de graphiques. Ils ont été construits en 1973 par le statisticien Francis Anscombe dans le but de démontrer l'importance de tracer des graphiques avant d'analyser des données, car cela permet notamment d'estimer l'incidence des données aberrantes sur les différentes indices statistiques que l'on pourrait calculer.

Dans la table 6.1, les observations  $x_i$  sont reliées aux observations  $y_i$ .

Avant d'afficher les ensembles de données, nous allons calculer quelques mesures sur chacun de ces ensembles, à savoir, la moyenne des  $x$ , la moyenne des  $y$ , la variance des  $x$ , la variance des  $y$  et le coefficient de corrélation.



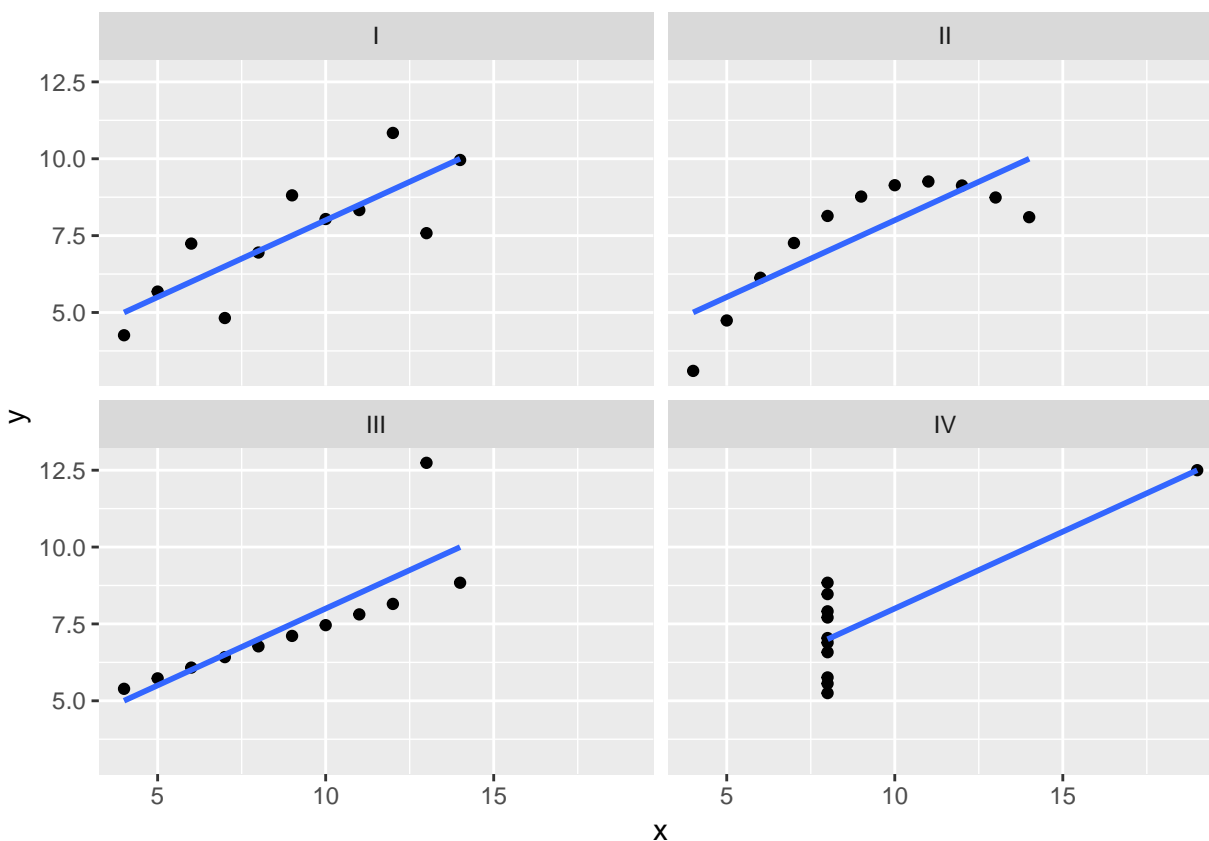


FIGURE 6.5 – Les nuages de points et les droites de régression pour le quartet d’Anscombe.

ensemble	moyenne des $x$	variance des $x$	moyenne des $y$	variance des $y$	coeff. de corrélation
I	9	11	7.500909	4.127269	0.8164205
II	9	11	7.500909	4.127629	0.8162365
III	9	11	7.500000	4.122620	0.8162867
IV	9	11	7.500909	4.123249	0.8165214

Comme nous pouvons le remarquer, les quatre ensembles de données possèdent les mêmes mesures. Par contre, lorsque nous affichons ensuite les quatre ensembles de données, nous remarquons que ces ensembles sont très différents.

### 6.4.2 DatasauRus

Les données disponibles dans la librairie `datasauRus` nous montrent pourquoi la visualisation est importante. Les treize ensembles de données possèdent tous les mêmes statistiques descriptives et les mêmes droites de régression, mais leur aspect graphique est fort différent.

La table 6.2 montre les mesures pour les treize ensembles de données.

La figure 6.6 représente les 13 ensembles de données graphiquement avec leurs droites de régression.

### 6.4.3 D’autres types de régression

TODO... MAYBE

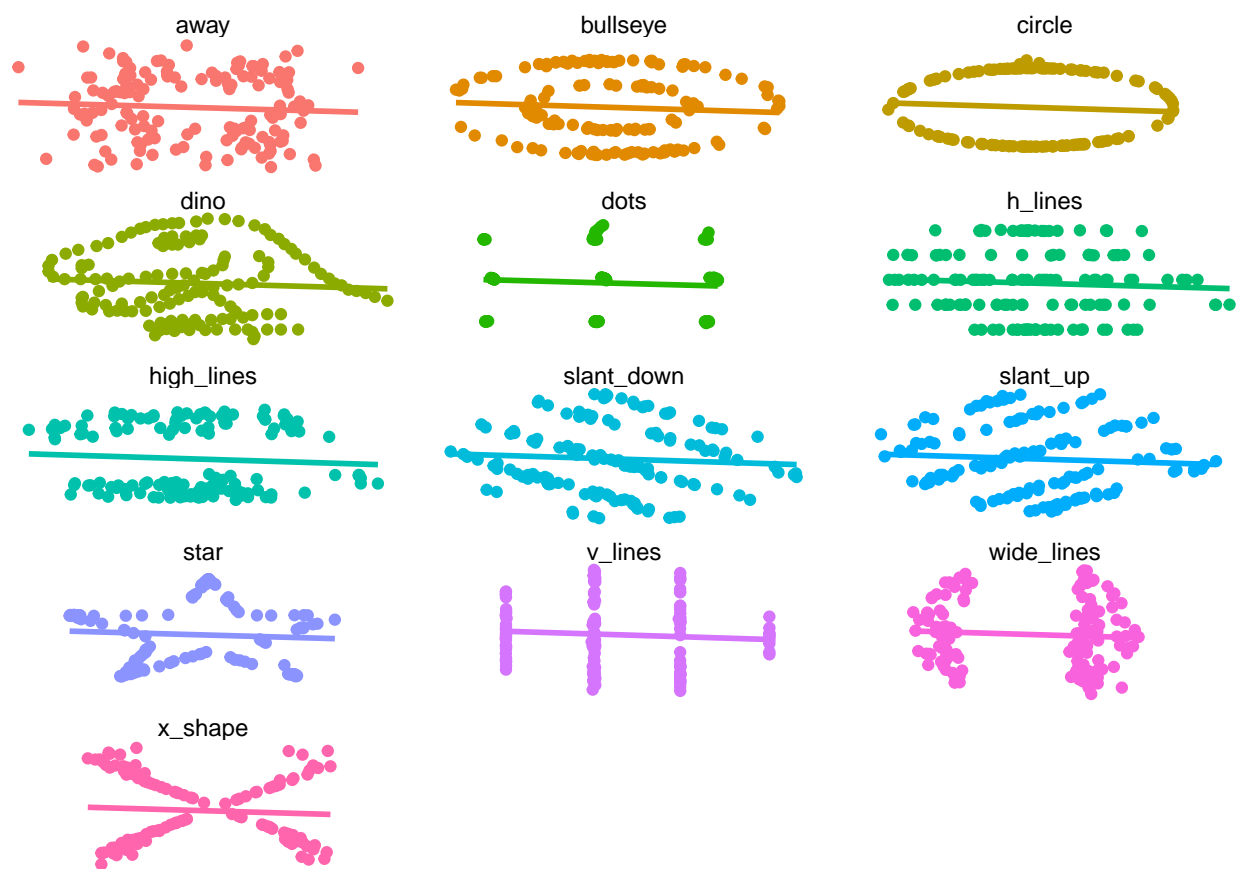
FIGURE 6.6 – Les 13 ensembles de données de `datasauRus`.

TABLE 6.2 – Les mesures de datasauRus

dataset	moyenne des $x$	variance des $x$	moyenne des $y$	variance des $y$	coeff. de corrélation
away	54.26610	281.2270	47.83472	725.7498	-0.0641284
bullseye	54.26873	281.2074	47.83082	725.5334	-0.0685864
circle	54.26732	280.8980	47.83772	725.2268	-0.0683434
dino	54.26327	281.0700	47.83225	725.5160	-0.0644719
dots	54.26030	281.1570	47.83983	725.2352	-0.0603414
h_lines	54.26144	281.0953	47.83025	725.7569	-0.0617148
high_lines	54.26881	281.1224	47.83545	725.7635	-0.0685042
slant_down	54.26785	281.1242	47.83590	725.5537	-0.0689797
slant_up	54.26588	281.1944	47.83150	725.6886	-0.0686092
star	54.26734	281.1980	47.83955	725.2397	-0.0629611
v_lines	54.26993	281.2315	47.83699	725.6388	-0.0694456
wide_lines	54.26692	281.2329	47.83160	725.6506	-0.0665752
x_shape	54.26015	281.2315	47.83972	725.2250	-0.0655833

## 6.5 La distance minimale

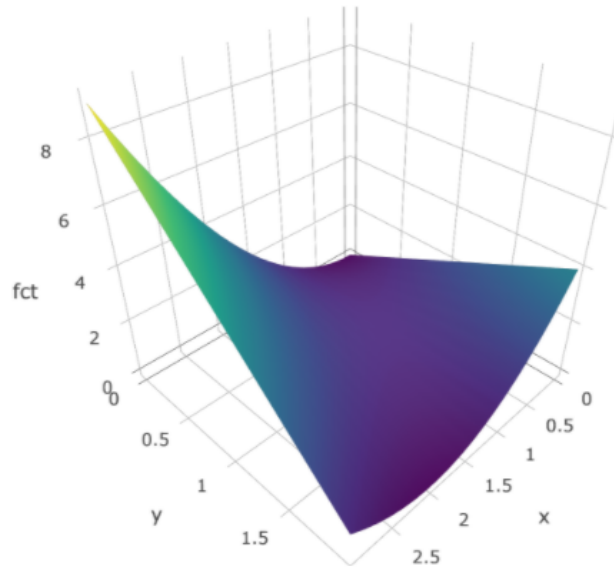
La distance entre deux objets mathématiques (points, droites, plans, ...) correspond en réalité à la plus petite distance entre ces objets. Pour trouver cette plus courte distance, nous utiliserons l'optimisation des fonctions de plusieurs variables.

*Remarque.* Habituellement, nous minimiserons le carré de la distance plutôt que la distance. Nous obtenons de cette façon le même résultat mais les calculs à faire seront plus simples.

**Exemple 6.6.** Trouvez la distance entre le point  $(1, 2, 3)$  et le plan  $x + y + z = 1$ .

## 6.6 L'optimisation avec contraintes

Jusqu'à maintenant, nous avons optimisé des fonctions sans contraintes, c'est-à-dire que nous optimisons la fonction sur tout son domaine. Par contre, nous devons parfois optimiser une fonction sur un ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

FIGURE 6.7 – La fonction  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ 

Le théorème des valeurs extrêmes pour les fonctions d'une seule variable stipule que si  $f$  est continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , alors  $f$  atteint un minimum absolu et un maximum absolu.

La situation est semblable pour les fonctions de deux variables.

**Définition 6.2** (Ensemble fermé). Un ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$  est un ensemble qui contient ses points frontières.

Par exemple, le disque  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  composé de tous les points à l'intérieur du cercle  $x^2 + y^2 = 1$  et de tous les points sur le cercle.

**Définition 6.3** (Ensemble borné). Un ensemble borné de  $\mathbb{R}^2$  est un ensemble contenu dans un certain disque. Il est donc d'étendue finie.

**Théorème 6.3** (Théorème des valeurs extrêmes pour les fonctions de deux variables). *Si  $f(x, y)$  est une fonction continue sur un ensemble borné et fermé  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $f$  atteint un maximum absolu  $f(x_1, y_1)$  et un minimum absolu  $f(x_2, y_2)$  en des points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  de  $D$ .*

Pour déterminer les valeurs extrêmes d'une fonction continue  $f(x, y)$  sur un ensemble borné fermé  $D$ , dont l'existence est garantie par le théorème 6.3, les étapes sont les suivantes :

1. Calculez les valeurs de  $f$  aux points critiques de  $f$  dans  $D$ ;
2. Calculez les valeurs extrêmes de  $f$  sur la frontière de  $D$ ;
3. La plus grande des valeurs des étapes 1 et 2 est la valeur maximale absolue, la plus petite de ces valeurs est la valeur minimale absolue.

**Exemple 6.7.** Trouvez les valeurs extrêmes absolues de la fonction  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$  sur le rectangle

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

**Exemple 6.8.** Trouvez les valeurs minimales et maximales de  $f(x, y) = 2xy$  sur le disque  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**Exemple 6.9.** Trouvez les valeurs extrêmes de  $f(x, y) = x^2ye^{-(x+y)}$  sur la région triangulaire donnée par  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  et  $x + y \leq 4$ .

**Exemple 6.10.** Si la somme de 3 nombres positifs est  $a$ , quelle est leur valeur si la somme de leurs carrés est minimale ?

**Exemple 6.11.** Déterminez le point sur le plan  $2x - 3y + z = 1$  le plus près de l'origine.

**Exemple 6.12.** Déterminez le point sur le plan  $ax + by + cz = d$  le plus près de l'origine.

**Exemple 6.13.** Une compagnie de téléphonie veut installer une nouvelle antenne de téléphonie cellulaire pour minimiser le caré des distances entre cette antennes et ses utilisateurs. Si les positions des  $n$  utilisateurs sont  $(x_i, y_i)$ , trouvez la position de l'antenne qui minimise le carré de la distance.

**Exemple 6.14.** Montrez que la boîte rectangulaire de volume maximum inscrite dans une sphère est un cube. Trouvez les dimensions de ce cube ainsi que son volume.

**Exemple 6.15.** Un canal d'irrigation à une forme trapézoïdale et une surface de  $50 \text{ m}^2$ . Si  $w$  est la longueur de sa base,  $h$  sa hauteur et  $\theta$  l'angle que font les côtés du canal, trouvez  $w$ ,  $d$  et  $\theta$  qui minimisent le périmètre.



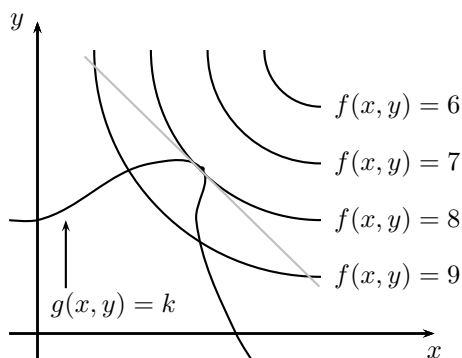


FIGURE 6.8 – Représentation géométrique de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

## 6.7 Les multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de maximiser ou de minimiser une fonction générale  $f(x, y, z)$  soumise à une contrainte de la forme  $g(x, y, z) = k$ .

Il est plus simple d'expliquer la méthode de Lagrange d'un point de vue géométrique pour des fonctions de deux variables. Nous commencerons donc par essayer de trouver les valeurs extrêmes d'une fonction  $f(x, y)$  soumise à une contrainte de la forme  $g(x, y) = k$ . Nous sommes donc à la recherche des valeurs extrêmes par lesquelles passerait la fonction  $f(x, y)$  lorsque le point  $(x, y)$  doit se trouver sur la courbe de niveau  $g(x, y) = k$ . La figure 6.8 montre cette courbe ainsi que plusieurs courbes de niveau de  $f(x, y)$ , c'est-à-dire  $f(x, y) = c$ .

Maximiser (ou minimiser)  $f(x, y)$  sous la contrainte  $g(x, y) = k$  revient à trouver la plus grande (petite) valeur de  $c$  telle que la courbe de niveau  $f(x, y) = c$  coupe  $g(x, y) = k$ . En observant la figure 6.8, il est clair que cela se produit lorsque ces courbes ont une tangente en commun. Donc, en un point  $(x_0, y_0)$  où les

courbes se touchent, elles ont la même droite normale. Les vecteurs gradients sont donc parallèles, ce qui s'écrit  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$  pour un certain scalaire  $\lambda$ .

Ce type d'argumentation s'applique également au problème de trouver les valeurs extrêmes de  $f(x, y, z)$  soumise à une contrainte  $g(x, y, z) = k$ .

La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut donc être décrite de la façon suivante. Pour déterminer les valeurs extrêmes (maximales ou minimales) de  $f(x, y, z)$  soumises à la contrainte  $g(x, y, z) = k$  :

1. Cherchez toutes les valeurs de  $x, y, z$  et  $\lambda$  telles que  $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$  et  $g(x, y, z) = k$ .
2. Calculez la valeur de  $f$  en tous les points  $(x, y, z)$  trouvés à l'étape 1. La plus grande de ces valeurs est le maximum de  $f$  ; la plus petite de ces valeurs est le minimum de  $f$ .

**Exemple 6.16.** Trouvez le minimum et le maximum de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  soumise à la contrainte  $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$ .

**Exemple 6.17.** Trouvez les dimensions du plus grand parallélépipède inscrit dans l'ellipsoïde  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ .

**Exemple 6.18.** Donnez le maximum et le minimum de  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x$  sur le domaine  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

## **6.8 Pages supplémentaires**

Des pages blanches supplémentaires pour ajouter, potentiellement, de nouveaux exemples et exercices.













## Cinquième partie

# L'intégration de fonctions de plusieurs variables



## Chapitre 7

# L'intégration de fonctions de deux variables

Vous trouverez à la section une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser des coupes transversales et des courbes de niveaux. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous verrons les intégrales multiples qui sont la généralisation des intégrales pour les fonctions de plusieurs variables. Nous étudierons également les changements de coordonnées afin de simplifier la résolution de ces intégrales.

### 7.2 Les intégrales doubles

#### 7.2.1 L'intégrale simple (rappel)

Nous allons débiter en revenant sur la définition de l'intégrale d'une fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Soit une partition de l'intervalle  $[a, b]$  :

$$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

Nous notons  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  la largeur d'un sous-intervalle et  $x_i^*$  une valeur dans l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ . Nous pouvons obtenir une approximation de l'aire algébrique sous la courbe, notée  $A_n$  :

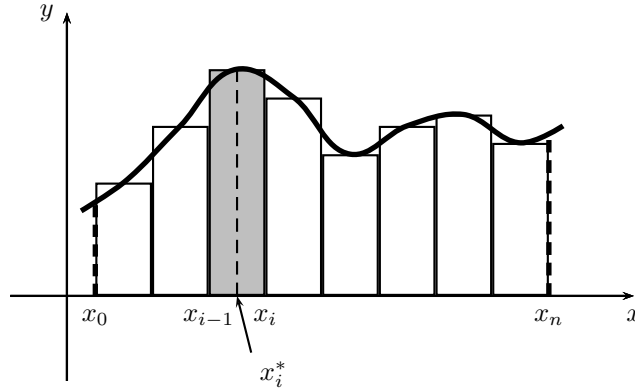
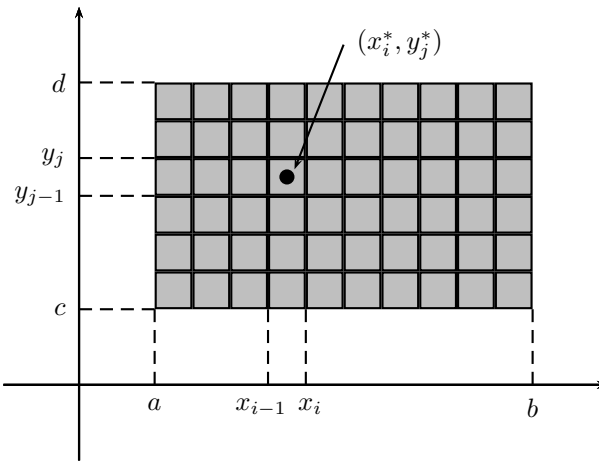
$$A_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

La figure 7.1 représente cette somme.

Si nous prenons la limite de  $A_n$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini, nous obtenons une somme de Riemann.

**Définition 7.1** (L'intégrale simple). L'intégrale simple d'une fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est donnée par :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

FIGURE 7.1 – Graphique représentant  $A_n$ FIGURE 7.2 – Partition de  $R$ .

*Remarque.* Nous disons que l'intégrale définie correspond à l'aire algébrique sous la courbe, ce qui ne représente pas toujours l'aire géométrique. En effet, si la fonction est négative, alors l'intégrale sera négative. D'où la différence entre l'aire algébrique et géométrique.

### 7.2.2 L'intégrale double sur un rectangle

D'une manière similaire, nous cherchons à déterminer le volume algébrique d'une fonction  $z = f(x, y)$  définie sur un rectangle

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ et } y \in [c, d]\} = [a, b] \times [c, d]$$

Pour ce faire, nous divisons  $R$  en petits rectangles, comme le montre la figure 7.2. C'est ce que nous appelons une partition de  $R$ .

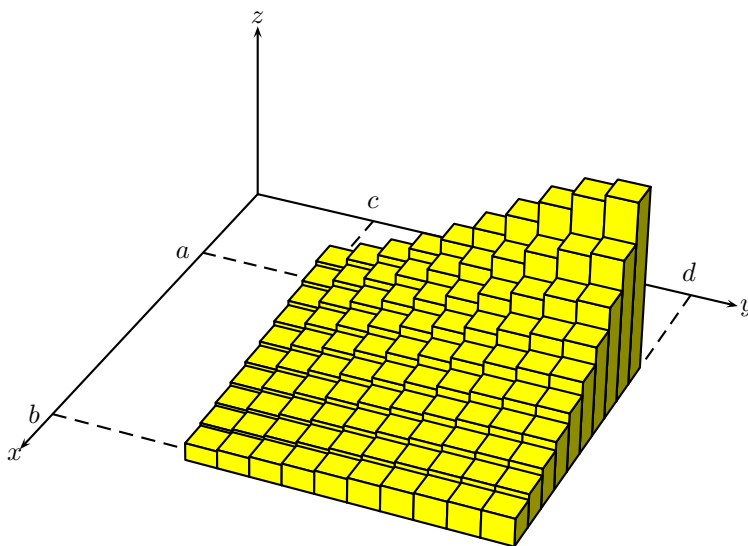
Nous notons par  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  et  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ . Nous notons également

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Ainsi un élément de volume au-dessus du rectangle  $R_{ij}$  est donné par

$$V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j$$

où  $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ . Cette expression pour  $V_{ij}$  provient du fait que le volume d'un prisme rectangulaire est donné par l'aire de la base  $\Delta x_i \Delta y_j$ , multipliée par la hauteur  $f(x_i^*, y_j^*)$ . Nous notons parfois  $\Delta x_i \Delta y_j$  par

FIGURE 7.3 – Visualisation de l'approximation de  $V$ .

$\Delta A_{ij}$ , un petit élément d'aire. En additionnant tous ces petits éléments de volume, nous obtenons une approximation du volume total

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j$$

La figure 7.3 représente une approximation du volume d'une fonction.

Lorsque  $m$  et  $n$  deviennent très grands, nous obtenons une meilleure approximation du volume

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

Nous remarquons que l'expression précédente est une double somme de Riemann.

**Définition 7.2.** L'intégrale double de la fonction  $f(x, y)$  sur le rectangle  $R$  est donnée par :

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

*Remarque.* Si la fonction  $f(x, y) \geq 0$  sur  $R$ , alors l'intégrale double correspond au volume géométrique entre la fonction  $f$  et le plan  $z = 0$ .

La définition 7.2 est difficilement utilisable, nous aurons donc besoin de faire nos intégrales différemment.

### 7.2.3 Les intégrales itérées

Nous voulons maintenant transformer des intégrales doubles en deux intégrales simples. Nous savons qu'un élément de volume correspond à un élément d'aire multiplié par une hauteur. Cependant, rien ne nous oblige à utiliser  $\Delta x_i \Delta y_j$  comme élément d'aire. Nous allons plutôt fixer la variable  $x$  et calculer l'aire de cette section de volume. Cette aire dépend de la valeur de  $x$ . Notons-la  $A(x)$ . Puisque  $x$  est fixe (une constante), nous avons que l'aire de la section est donnée par :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Pour déterminer le volume, il suffit d'additionner toutes les aires de section que l'on multiplie par un petit élément de hauteur  $dx$ . Ceci correspond à

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

Nous avons donc que :

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

D'une manière similaire, nous pouvons trouver que :

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

**Définition 7.3** (Intégrales doubles itérées). Nous avons :

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

et

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

**Exemple 7.1.** Trouvez l'intégrale de  $f(x, y) = x^2y$  sur le rectangle  $R = [0, 3] \times [1, 2]$ , en utilisant les deux intégrales de 7.3.

**Exemple 7.2.** Trouvez l'intégrale de  $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$  sur le rectangle  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , en utilisant les deux intégrales de 7.3.

**Théorème 7.1** (Fubini). *Si  $f$  est continue sur un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ , alors :*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

Au théorème 7.1, nous avons enlevé les crochets dans l'intégrale. Par définition :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

signifie que nous intégrons tout d'abord par rapport à  $y$  et par la suite par rapport à  $x$ .

Le théorème de Fubini signifie que si la fonction est continue (ce qui sera le cas pour les fonctions du cours), alors on peut changer l'ordre d'intégration sans changer le résultat.

**Exemple 7.3.** Trouvez le volume délimité par  $z = x\sqrt{x^2 + y}$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$  et  $z = 0$ .

**Exemple 7.4.** Trouvez l'intégrale de  $f(x, y) = xy$  sur le rectangle  $R = [1, 2] \times [0, 4]$ .

### 7.2.4 Les intégrales doubles sur une région quelconque

Comme vu à la section 5, nous savons comment intégrer sur un rectangle. Malheureusement, le domaine d'intégration n'est pas toujours un rectangle. La situation se présente régulièrement où le domaine est délimité par des courbes dans le plan. Supposons que le domaine d'intégration  $D$  est défini comme suit :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

Dans cette situation, lorsque nous fixons la variable  $x$  pour déterminer l'aire d'une section, les bornes d'intégration dépendent de la valeur  $x$ . Ainsi :

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

D'où

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Nous présentons à la figure 7.4 une représentation de ce domaine.

D'une manière similaire, si  $D$  est défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$$

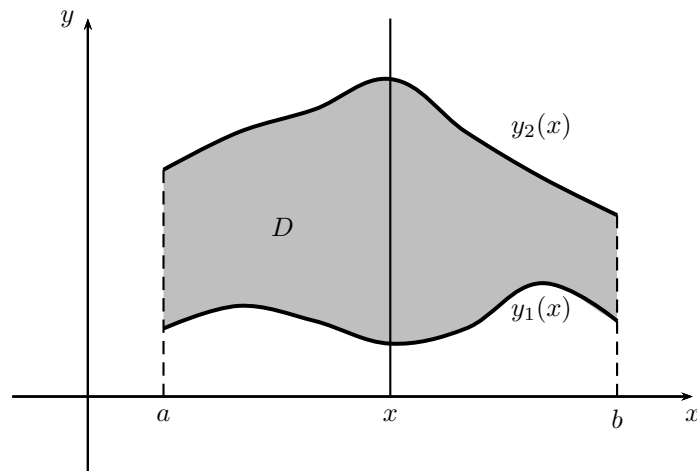
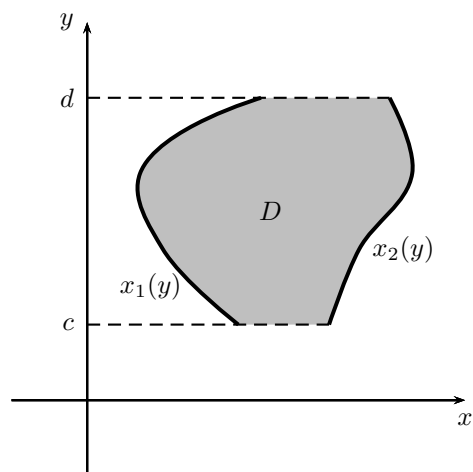
alors

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Nous présentons à la figure 7.5 une représentation de ce domaine.

**Exemple 7.5.** Calculez le volume du solide compris entre  $z = 0$  et  $z = 5 + 2xy$  au-dessus de la région délimitée par  $y = x$  et  $y = \sqrt{x}$ .



FIGURE 7.4 – Domaine d'intégration  $D$  lorsque les courbes sont des fonctions de  $x$ .FIGURE 7.5 – Domaine d'intégration  $D$  lorsque les courbes sont des fonctions de  $y$ .

**Exemple 7.6.** Trouvez  $\iint_D (2y - x^2) dA$  sur la région  $0 \leq x \leq 2$  et  $x^2 \leq y \leq 9 - x$ .

**Exemple 7.7.** Trouvez  $\iint_D (x^2 + y^2) dA$  sur la région triangulaire délimitée par les points  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  et  $(1,1)$ .

**Exemple 7.8.** Trouvez  $\iint_D (1 + x + y) dA$  sur la région délimitée par  $y = -x$ ,  $y = 2$  et  $x = y^2$ .

**Exemple 7.9.** Calculez le volume délimité par les plans  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ .

### 7.2.5 Changer l'ordre d'intégration

Il arrive parfois qu'une intégrale double ne se calcule pas lorsque nous tentons d'utiliser l'ordre d'intégration proposé. Pour tenter de calculer l'intégrale, nous allons changer l'ordre d'intégration.

Pour ce faire, voici les étapes :

1. Dessiner le domaine d'intégration.
2. Changer l'ordre d'intégration en se basant sur le dessin.
3. Calculer l'intégrale résultante.

**Exemple 7.10.** Calculez  $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$ .

**Exemple 7.11.** Calculez  $\int_0^1 \int_{e^y}^e \frac{x}{\ln(x)} dx dy$ .

**Exemple 7.12.** Calculez  $\int_0^e \int_0^{\ln(x)} y dy dx$ .

**Exemple 7.13.** Calculez  $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$ .

### 7.2.6 Les propriétés de l'intégrale double

Voici quelques propriétés de l'intégrale double.

**Théorème 7.2.** Soit  $f(x, y)$  et  $g(x, y)$  deux fonctions définies sur un domaine  $D$ . Nous avons alors :

1.  $\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA \pm \iint_D g(x, y) dA$
2.  $\iint_D kf(x, y) dA = k \iint_D f(x, y) dA$  où  $k$  est une constante
3. Si  $f(x, y) \geq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in D$ , alors  $\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$
4. Si  $D = D_1 \cup D_2$ , alors  $\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$
5.  $\iint_D 1 dA = \text{aire de } D$

*Démonstration.* Les propriétés sont énoncées sans démonstration. □

Ces propriétés sont très utiles, particulièrement la 4. Elle permet de scinder en plusieurs parties un domaine d'intégration.

**Exemple 7.14.** Soit une fonction  $f(x, y) \geq 0$ . Écrivez l'expression permettant de calculer le volume sous  $f(x, y)$  au dessus du triangle dont les sommets sont  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  et  $(-1, 3)$ .

**Exemple 7.15.** Trouvez  $\iint_D (2y + x) dA$  sur la région formée de l'union des régions 1 et 2. La région 1 est telle que  $0 \leq x \leq 2$  et  $0 \leq y \leq x^2 + 1$ . La région 2 est telle que  $2 \leq x \leq 7$  et  $0 \leq y \leq 7 - x$ .

### 7.3 Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Dans certains cas, il est difficile de calculer certaines intégrales en coordonnées cartésiennes et ce, pour différentes raisons. Parfois le domaine d'intégration est difficile à écrire en coordonnées cartésiennes. Par exemple, si le domaine d'intégration est celui présenté à la figure 7.6, il serait alors plus simple d'utiliser les coordonnées polaires.

Voyons comment nous pouvons effectuer le changement de coordonnées. Supposons tout d'abord que le domaine est un rectangle polaire, c'est-à-dire que :

$$D = \{(r, \theta) | a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

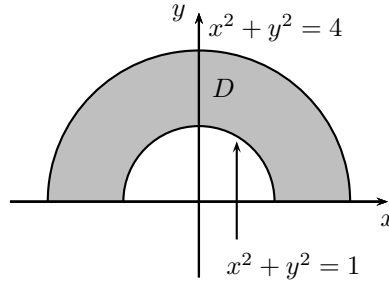


FIGURE 7.6 – Une région sur laquelle nous voulons intégrer qui se prête particulièrement bien aux coordonnées polaires.

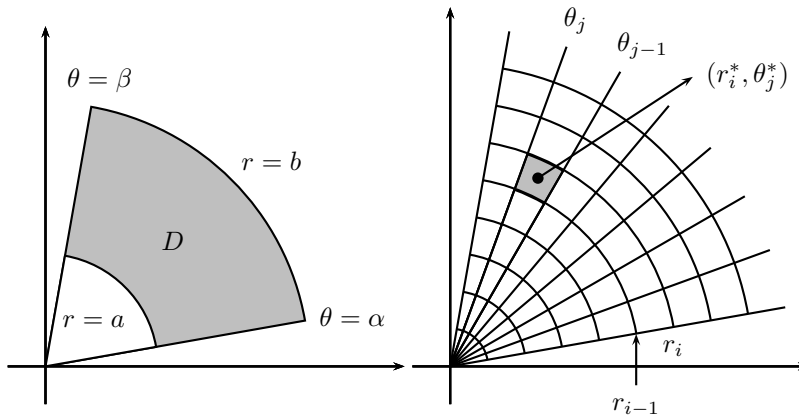


FIGURE 7.7 – Un rectangle polaire et une partition du rectangle polaire.

Divisons maintenant ce rectangle polaire en petits rectangles polaires. Posons

$$\begin{aligned} R_{i,j} &= \{(r, \theta) | r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}, \\ \Delta\theta_j &= \theta_j - \theta_{j-1}, \\ \Delta r_i &= r_i - r_{i-1}. \end{aligned}$$

La figure 7.7 représente un rectangle polaire ainsi qu'une partition possible de ce rectangle.

Le volume délimité par le rectangle polaire  $R_{ij}$  et la fonction  $f(x, y)$  est donné par :

$$\begin{aligned} V_{ij} &\approx f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{i,j} \\ &\approx f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_{i,j} \end{aligned}$$

où  $(r_i^*, \theta_j^*)$  est le point au centre de  $R_{i,j}$ . Il ne reste plus qu'à déterminer  $\Delta A_{i,j}$  qui correspond à l'aire de  $R_{i,j}$ . Nous savons que l'aire d'une section de disque de rayon  $R$  est donnée par :

$$A = \frac{1}{2} R^2 \varphi$$

où  $\varphi$  est l'angle au centre. Ainsi, nous pouvons trouver  $\Delta A_{i,j}$  en effectuant la différence de l'aire deux sections. D'où :

$$\Delta A_{i,j} = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta_j.$$



Nous allons manipuler l'expression précédente pour la simplifier.

$$\begin{aligned}
 \Delta A_{i,j} &= \frac{1}{2} r_i^2 \Delta \theta_j - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta \theta_j \\
 &= \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta \theta_j \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{(r_i + r_{i-1})}_{=r_i^*} \underbrace{(r_i - r_{i-1})}_{=\Delta r_i} \Delta \theta_j \\
 &= r_i^* \Delta r_i \Delta \theta_j.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$V_{i,j} \approx f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r_i \Delta \theta_j$$

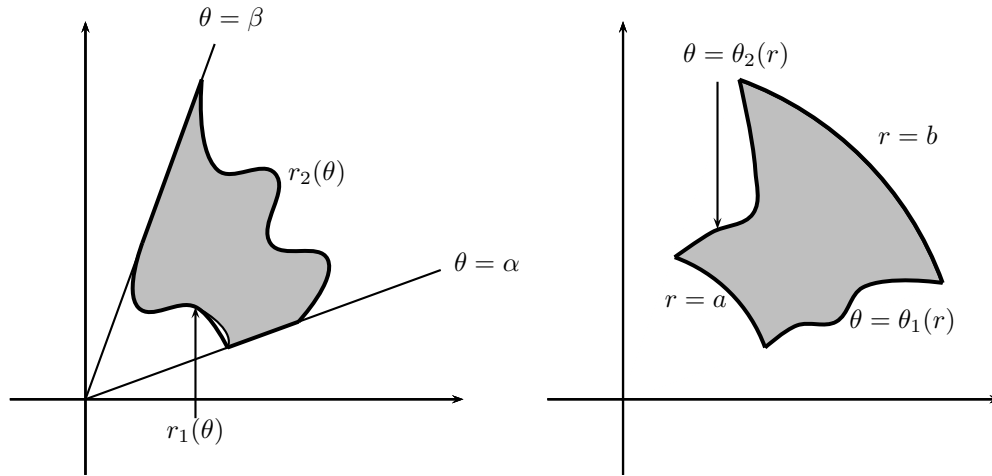
Posons  $g(r, \theta) = r f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Maintenant, trouvons une expression pour l'intégrale double.

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dA &:= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_{i,j} \\
 &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r_i \Delta \theta_j \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) dr d\theta \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta
 \end{aligned}$$

*Remarque.* Il est important de voir que  $dx dy = r dr d\theta$ . Ainsi, nous devons multiplier la fonction par  $r$  lorsque nous passons en coordonnées polaires.

**Exemple 7.16.** Trouvez  $\iint_D (x^2 + y^2) dA$  sur le disque de rayon 1 centré à l'origine.

**Exemple 7.17.** Trouvez  $\iint_D \frac{1}{e^{x^2+y^2}} dA$  sur le quart de disque de rayon 3 centré à l'origine.

FIGURE 7.8 – La variable  $r$  peut dépendre de  $\theta$  et vice-versa.

Nous avons montré le changement en coordonnées polaires lorsque le domaine est un rectangle polaire. Cependant, tout comme pour les coordonnées cartésiennes, il est possible de fixer une variable et de faire varier l'autre, ce qui entraîne que les bornes peuvent dépendre d'une variable. La figure 7.8 présente les deux possibilités, que la variable  $r$  dépende de  $\theta$  ou que la variable  $\theta$  dépende de  $r$ .

Dans le cas de la figure 7.8 de gauche, l'intégrale devient :

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Dans le cas de la figure 7.8 de droite, l'intégrale devient :

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

*Remarque.* Nous allons nous intéresser à un cas particulier. Soit  $f(x, y) = 1$ , alors l'intégrale double calcule maintenant la surface du domaine d'intégration. Si nous nous plaçons dans le premier cas où la variable  $r$  dépend de  $\theta$ , c'est-à-dire  $r_1(\theta) = 0$  et  $r_2(\theta) = r(\theta)$  pour  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{r(\theta)} r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{r(\theta)} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta \end{aligned}$$

L'équation précédente correspond au résultat obtenu au chapitre 3 pour le calcul de l'aire d'une région polaire.

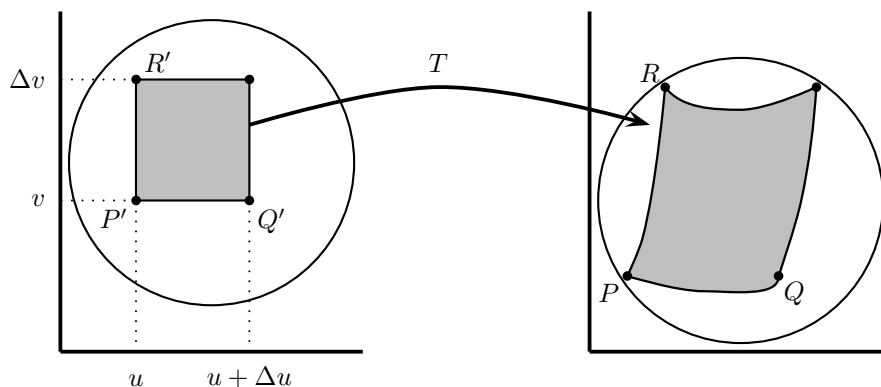
**Exemple 7.18.** Trouvez  $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$ .

**Exemple 7.19.** Trouvez  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dA$  sur la région bornée par  $y = \sqrt{3}x$ ,  $x = 3$  et  $y = 0$ .

**Exemple 7.20.** Déterminez l'aire de la région située entre  $r = 3 + 2 \sin(\theta)$  et  $r = 2$ .

## 7.4 Le changement de coordonnées pour les intégrales doubles

Il existe d'autres systèmes de coordonnées autres que les systèmes cartésiens et polaires. En réalité, il est souvent impossible de résoudre certaines intégrales en n'utilisant que ces deux systèmes. Par exemple, si nous voulons calculer  $\iint_D 1 dA$  sur le domaine  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ , il devient très difficile de faire cette intégrale en n'utilisant que les deux systèmes que nous connaissons. Heureusement, il existe une technique permettant de trouver le terme  $dA$  lorsque nous effectuons un changement de variables. Avant de débiter, nous ferons un bref rappel du produit vectoriel.

FIGURE 7.9 – La représentation de l'effet de la transformation  $T$  sur un rectangle dans le plan  $x$  et  $y$ .

### 7.4.1 Le produit vectoriel

Soit deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  non-colinéaires tels que  $\vec{u} = [u_1, u_2, 0]$  et  $\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$ . L'aire du parallélogramme engendré par ces vecteurs est donnée par :

$$\begin{aligned}
 A &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \\
 &= \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \right\| \\
 &= \left\| 0\vec{i} - 0\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right\| \\
 &= \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|
 \end{aligned}$$

L'aire du prallélogramme est donc donnée par la valeur absolue du déterminant des deux vecteurs.

### 7.4.2 Le changement de coordonnées

Nous voulons déterminer une expression dans un autre système de coordonnées (par exemple  $u$  et  $v$ ) pour  $\iint_D f(x, y) dA$ . Plus précisément, nous voulons trouver une expression pour  $dA$  en fonction de  $u$  et  $v$ . Pour ce faire, supposons qu'il existe une transformation bijective et dérivable  $T$  qui prend une région  $D'$  du plan  $uv$  et qui l'envoie sur  $D$  dans le plan  $xy$ . Ceci signifie que  $T$  prend un point  $(u, v) \in D'$  et l'envoie sur le point  $(x(u, v), y(u, v)) \in D$ . La figure 7.9 représente cette transformation.

Nous allons étudier le résultat de cette transformation sur un petit rectangle de dimension  $\Delta u \times \Delta v$  dans le plan  $uv$ . Notons par  $P = T(P')$ ,  $Q = T(Q')$  et  $R = T(R')$ . On sait qu'une petite variation  $\Delta x$  peut être obtenue par

$$\Delta x \approx \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v$$

De même, on a

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v$$

Ainsi, le vecteur  $\overrightarrow{PQ} = \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right]$ , car  $\Delta v = 0$  puisque les points  $P'$  et  $Q'$  ont la même composante  $v$ . De même, on a que le vecteur  $\overrightarrow{PR} = \left[ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right]$  pour des raisons similaires. Maintenant, l'élément

d'aire  $\Delta A$  formé par  $\Delta u$  et  $\Delta v$  s'exprime en terme d'aire de parallélogramme

$$\begin{aligned}
 \Delta A &\approx \left\| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right\| \\
 &\approx \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix} \right\| \\
 &\approx \left\| 0\vec{i} - 0\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} \vec{k} \right\| \\
 &\approx \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v - \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \right)^2} \\
 &\approx \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v.
 \end{aligned}$$

À la limite où  $\Delta u$  et  $\Delta v$  tendent vers 0, nous obtenons une expression pour  $dA$  :

$$dA = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| du dv$$

**Définition 7.4** (Jacobien). Soit une transformation dérivable  $T : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ . Nous appelons Jacobien le déterminant suivant :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

*Remarque.* Nous notons le Jacobien d'une transformation par  $J$ ,  $J_{u,v}$  ou  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ .

Nous pouvons donc écrire  $dA = |J| du dv$ , d'où :

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

**Exemple 7.21.** Démontrez qu'un élément d'aire en coordonnées polaires est  $r dr d\theta$ .

**Exemple 7.22.** Calculez  $\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dA$  où  $D$  est la région délimitée par le trapèze de sommets  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, -2)$  et  $(0, -1)$ .

**Exemple 7.23.** Calculez  $\iint_D (x^2 - xy + y^2) dA$  où  $D$  est l'ellipse donnée par  $x^2 - xy + y^2 = 2$  en utilisant la transformation :

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v \\y &= \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v\end{aligned}$$

**Exemple 7.24.** Calculez  $\iint_D e^{x+y} dA$  où  $D$  est  $|x| + |y| \leq a$ .





## Chapitre 8

# L'intégration de fonctions de trois variables

Vous trouverez à la section une application [GeoGebra](#) vous permettant de visualiser des coupes transversales et des courbes de niveaux. À noter que cette application n'est disponible que dans la version en ligne de ce document.

### 8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous verrons les intégrales triples qui sont la généralisation des intégrales pour les fonctions de plusieurs variables. Nous étudierons également les changements de coordonnées afin de simplifier la résolution de ces intégrales.

Les intégrales triples permettent de faciliter le calcul de volume et de poids de certains solides dont la densité varie. Le principe des intégrales triples est le même que celui vu au chapitre 7 pour les intégrales doubles. Nous n'entrerons pas dans les principes théoriques, nous allons plutôt nous concentrer sur des exemples.

*Remarque.* Le domaine d'intégration des intégrales triples est un volume et plutôt que d'avoir un élément d'aire  $dA$ , nous aurons un élément de volume noté  $dV$ .

### 8.2 Intégrales triples en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, l'élément de volume est  $dV = dx \, dy \, dz$ .

**Exemple 8.1.** Calculez l'intégrale triple suivante  $\int_1^2 \int_2^x \int_1^4 x \, dz \, dy \, dx$ .

**Exemple 8.2.** Calculez le volume du solide délimité par les plans  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = -2$  et  $z = 3 - x - y$ .

**Exemple 8.3.** Trouvez le volume de la région  $R$  située dans le premier octant et coincée entre les plans des axes, le plan  $x + 2y = 2$  et la surface  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

**Exemple 8.4.** Trouvez le volume situé entre le plan  $z = 0$  et  $z = e^{x+y}$  sur la région située entre le carré de côté 4 centré à l'origine et le carré de côté 2 centré à l'origine.

**Exemple 8.5.** Trouvez le volume de la région située entre  $z = 1 + x + y$  et le plan  $z = 0$  sur la région délimitée par  $y = -x$ ,  $x = \sqrt{y}$  et  $y = 2$ .

**Exemple 8.6.** Calculez le volume de la pyramide passant par les points  $(0, 0, 0)$ ,  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  et  $(0, 0, c)$ . Montrez que ce volume correspond au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur.

### 8.3 Intégrales triples en coordonnées cylindriques

Nous allons débiter en introduisant les coordonnées cylindriques.

**Définition 8.1** (Coordonnées cylindriques). Soit un point  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  en coordonnées cartésiennes. Nous pouvons représenter ce point en coordonnées cylindriques en effectuant les transformations suivantes :

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

avec les conditions suivantes :

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\infty \leq z \leq \infty$$

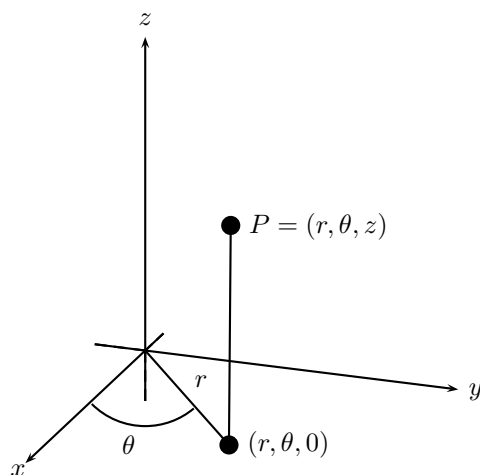
La figure 8.1 représente un point en coordonnées cylindriques.

*Remarque.* Les coordonnées cylindriques sont en fait des coordonnées polaires pour les variables  $x$  et  $y$  et nous conservons  $z$  en coordonnées cartésiennes. Nous pouvons remarquer que  $x^2 + y^2 = r^2$ .

De façon analogue à la démonstration faite à la section 7.3 pour les coordonnées polaires, nous pouvons montrer que

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz$$

**Exemple 8.7.** Calculez le volume d'un morceau fromage coupé dans un cylindre de 4 cm de hauteur, de 6 cm de rayon et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

FIGURE 8.1 – Un point  $P$  représenté en coordonnées cylindriques.

**Exemple 8.8.** Calculez le volume entre les paraboloides  $z = 4 - x^2 - y^2$  et  $z = x^2 + y^2$ .

**Exemple 8.9.** Trouvez le volume du solide délimité par l'intérieur de la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  et au-dessus

du parabolöide  $z = x^2 + y^2$ .

**Exemple 8.10.** Trouvez le volume de la demi-sphère de rayon  $a$  se situant à l'extérieur du cylindre  $r = \frac{a}{2}$ .

**Exemple 8.11.** Trouvez le volume du cône tronqué  $z = 9 - \sqrt{x^2 + y^2}$  avec  $0 \leq z \leq 4$ .

## 8.4 Intégrales triples en coordonnées sphériques

Nous allons débiter en introduisant les coordonnées sphériques.

**Définition 8.2** (Coordonnées sphériques). Soit un point  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  en coordonnées cartésiennes. Nous pouvons représenter ce point en coordonnées cylindriques en effectuant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\theta) \sin(\phi) \\y &= \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\z &= \rho \cos(\phi)\end{aligned}$$

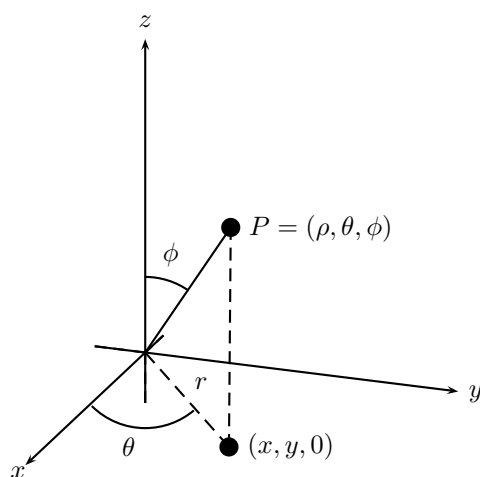
avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}0 &\leq \rho \leq \infty \\0 &\leq \theta \leq 2\pi \\0 &\leq \phi \leq \pi\end{aligned}$$

Nous avons que  $\rho$  représente la longueur du segment de droite reliant l'origine au point  $P$ ,  $\theta$  est l'angle que fait la projection du segment de droite sur le plan  $z = 0$  et  $\phi$  est l'angle que fait le segment de droite par rapport à l'axe des  $z$ .

La figure 8.2 représente un point en coordonnées cylindriques.

**Exemple 8.12.** Calculez le volume d'une sphère de rayon  $a$ .

FIGURE 8.2 – Un point  $P$  représenté en coordonnées sphériques.

**Exemple 8.13.** Calculez le volume à l'intérieur du cône  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  et de la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .



## 8.5 Le changement de coordonnées pour les intégrales triples

Le principe du Jacobien vu à la section 7.4 peut être généralisé pour les intégrales triples.

**Définition 8.3.** Soit une transformation dérivable :

$$T : (u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

Nous appelons Jacobien le déterminant :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

*Remarque.* Nous notons le Jacobien d'une transformation par  $J$ ,  $J_{u,v,w}$  ou  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ .

**Exemple 8.14.** Trouvez le volume de l'ellipsoïde  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .



## Chapitre 9

# Applications des intégrales doubles et triples

9.1 Les masses et les centres de masse

9.2 La force gravitationnelle

9.3 La force électrique