Approche énergetique

I. Travail et puissance d'une force

1) Notations

On considère un point M, dans un référentiel $\mathcal{R}$, auquel on applique une force $\vec{F}$, et qui est animé d'une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$

On a un déplacement élémentaire:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$$

2) Puissance d'une force

On définit la puissance d'une force par:

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}(M)$$

> Φ Note:
> La puissance dépend donc du référentiel

La puissance est donc un scalaire. La méthode énergétique transforme donc des relations vectorielles en relations scalaires. On perd de l'information.

- Si $\mathcal{P} > 0$, la force est dîte motrice, elle travaille dans le sens de la vitesse
- Si $\mathcal{P} < 0$, la force est dîte résistante, elle s'oppose au mouvement

3) Travail élémentaire

On sait que la puissance est une énergie appliquée pendant un certain temps:

$$\mathcal{P} = \frac{\text{énérgie}}{\text{temps}}$$

$$\text{travail} = \text{grandeur énergétique}$$

> ⚠ Warn:
> Le travail dépend du chemin suivi.

On pose le travail élémentaire (infinitésimal):

$$\delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi que le travail intégral:

$$W = \mathcal{P}\Delta t$$

On utilise pas les même variables selon les situations:

Pour une variable quelconque G:

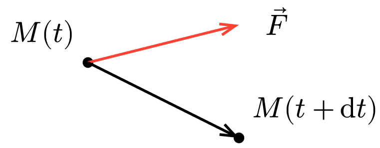
	Dépendante du chemin suivi	Indépendante du chemin suivi
Intégrale	G	ΔG
Différentielle	δG	$\mathrm{d}G$
Exemple	Travail W	E_c

On a:

$$\delta W = \vec{f} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \mathrm{d}t$$

$$\delta W = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Cela correspond au travail observé pendant un petit déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:



4) Travail au cours d'un déplacement

Pour obtenir le travail complet, on fait la somme de ces petits travaux:

$$W_{1\to 2}\left(\vec{F}\right) = \int_{\text{etat 1}}^{\text{etat 2}} \delta W\left(\vec{F}\right) = \int_{\text{etat 1}}^{\text{etat 2}} \mathcal{P}\left(\vec{F}\right) \mathrm{d}t = \int_{\text{etat 1}}^{\text{etat 2}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

II. Théorème de l'énergie cinétique

1) Énergie cinétique

On s'est intéressé aux grandeurs mécaniques associées aux actions mécaniques. Pour faire le lien avec les causes des mouvements, on va définir l'énergie cinétique.

$$E_{c/\mathcal{R}}(M) = \frac{1}{2}mv^2_{/\mathcal{R}}(M) = \frac{1}{2}m\vec{v}_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}}$$

L'énergie cinétique dépend du point où on se place.
Dès lors que l'on connait la vitesse en des point M_1 et M_2, on peut calculer l'énergie cinétique en ces points.

On ne sait pas ce qu'il s'est passé entre les points M_1 et M_2.

L'énergie cinétique est donc une grandeur indépendante du chemin suivi.

On a:

$$\mathrm{d}E_c(M) = m\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$$

$$\Delta E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1) = \frac{1}{2}mv^2(M_2) - \frac{1}{2}mv^2(M_1)$$

Φ Note:

Rigueur mathématique:

- Le d signigie différentielle totale exacte
- Le δ signifie forme différentielle

On peut passer d'une forme différentielle à la différentielle totale exacte si les fonctions dérivées respectent certaines conditions.

2) Théorème de l'énergie cinétique

Θ Théorème:

La variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent.

$$\mathrm{d}E_c = \sum_i \delta W\left(\vec{f}_i\right) \quad \text{(i)}$$

$$\Delta E_c = \sum_i W\left(\vec{f}_i\right) \quad \text{(ii)}$$

Pour passer de la forme (i) à la forme (ii), on fait un calcul d'intégral.

a) Démonstration

On a, pour la forme (i):

$$\mathrm{d}E_c = m\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$$

D'après le principe fondamental, la quantité de mouvement est égal à la somme des forces:

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \sum_i \vec{f}_i$$

D'où:

$$m\,\mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \left(\sum_i \vec{f}_i\right)\mathrm{d}t$$

Ainsi, on substitue $m\,\mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$:

$$\mathrm{d}E_c = \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \left(\sum_i \vec{f}_i\right)\mathrm{d}t$$

On rentre le $\mathrm{d}t$ dans la vitesse:

$$\mathrm{d}E_c = \sum_i \vec{f}_i\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{\mathrm{d}E_c = \sum_i \delta W\left(\vec{f}_i\right)}$$

3) Utilisation du théorème de l'énergie cinétique - Interêt

On fera une utilisation similaire au principe fondamental au théorème de l'énergie cinétique.

Soit:

- On connait les forces, et on trouve les variations sur l'énergie cinétique.
  Comme on travail surtout avec des systèmes à masse fixe, le théorème de l'énergie cinétique nous donne en réalité l'évolution du module de la vitesse.

> ✓ Tip:
> Si on a juste besoin de la vitesse scalaire (pour montrer qu'un mouvement est uniform ou accéléré, par exemple), ce sera beaucoup plus rapide de passer directement par le théorème de l'énergie cinétique, que d'appliquer le principe fondamental et d'obtenir les équations horaires.

Soit:

- Entre deux points, on connait la variation de l'énergie cinétique. Si on connait le travail de toutes les forces sauf une, on peut appliquer le TEC pour trouver la valeur de son travail (et non la véritable force).

> Φ Note:
> Dans un système à un degré de liberté, le théorème de l'énergie cinétique ne perd aucune information.

4) Exemples

a)

> Le curling est un sport où le but consiste à placer des pierres, taillées dans le granit et polies selon des normes internationales, le plus près possible de la maison, une cible circulaire dessinée sur la glace. On s'intéresse ici au lancer d'une pierre assimilée à un point matériel M de masse $m = 20$ kg glissant suivant un axe noté Ox vers la maison modélisée par un point M_0. Initialement M est en O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. On note $D = OM_0 = 25$ cm. On admet l'existence d'une force de frottement constante $\overrightarrow{F} = -F_0\overrightarrow{u_x}$ avec $F_0 = 3{,}0$ N s'exerçant de la glace sur la pierre pendant la glissade jusqu'à son arrêt et l'absence de force de frottement fluide.
>
> 1. Donner les expressions et les valeurs des énergies cinétiques initiale Ec_i et finale Ec_f en admettant que le lancer est gagnant autrement dit que la pierre s'arrête à la maison.
> 2. Calculer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.
> 3. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la valeur de la vitesse initiale pour que le lancer soit effectivement gagnant.

1.

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E_{c_f} = 0$$

2.

On définit notre système: le point M. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On fait le bilan des forces:

- Le poids $m\vec{g}$
- Réaction normale $\overrightarrow{R_N}$
- Force de frottement $-F_0\overrightarrow{u_x}$

On a que le poids est orthogonal au mouvement, et que $\overrightarrow{R_N}$ est orthogonal au mouvement

On calcul le travail:

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\\ &= -F_0\overrightarrow{u_x}\cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

$$\delta W = -F_0\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}W &= -\int_0^{M_0} F_o\,\mathrm{d}x\\ &= -F_0 OM_0\\ &= -F_0 D\end{aligned}$$

3.

On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$\Delta EC = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Delta EC = W(m\vec{g}) + W\left(\overrightarrow{R_N}\right) + W\left(\vec{F}\right)$$

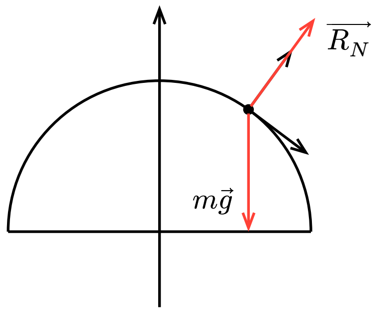
$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -F_0 D$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2F_0 D}{m}} \approx 0.27\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

b)

Après l'avoir construit, un esquimau s'installe au sommet de son igloo qu'on modélisera par une demi-sphère de rayon a. Un rafale de vent le déstabilise : il se met à glisser du sommet à partir d'une vitesse initiale nulle.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement à partir du principe fondamental de la dynamique puis à l'aide d'un raisonnement énergétique.
2. Déterminer l'expression de la réaction de l'igloo.
3. Montrer que l'esquimau décolle de son igloo pour un angle dont on précisera l'expression et la valeur.



On définit notre système, le point matériel M. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On fait un bilan des forces:

- Le poids $m\vec{g}$
- On se place sur de la glace, on considère que les frottements sont nuls. Donc on considère une réaction normale $\overrightarrow{R_N}$

On établit l'équation différentielle du mouvement:

1. Première méthode, par principe fondamental:
   - $$m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{R_N}$$
   - On va projeter.
   - On peut soit projeter dans les coordonées polaires,
     soit projeter sur les axes $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$
   - Projeter sur les coordonées polaires permet de dégager $\overrightarrow{R_N}$, dont on ne connait pas la norme.
     - On projette sur $\vec{u_\theta}$:

   $$\vec{a} = \vec{u_r}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \vec{u_\theta}\left(2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r\right)$$

   Ici, r est constant, donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, donc:

   $$\vec{a} = -\vec{u_r}r\dot{\theta}^2 + \vec{u_\theta}\ddot{\theta}r$$

   $$mr\ddot{\theta} = 0 + mg\sin\theta$$

   $$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\sin\theta = 0}$$

2. Deuxième méthode, on passe par l'énergie. Le passage par l'énergie est pertinent: il n'y a qu'un seul paramètre de position, θ, et l'inconnue $\overrightarrow{R_N}$ ne travaille pas.

   On applique le théorème de l'énergie cinétique:

   $$\mathrm{d}E_c = \sum_i \delta W\left(\vec{f_i}\right)$$

   On intègre:

   $$\Delta E_c = \sum_i W\left(\vec{f_I}\right)$$

   De plus, $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ On se place en coordonées polaires: $r = a$, r est constant donc $\dot{r} = 0$ D'où:

   $$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

   $$E_c = \frac{1}{2}m\left(a\dot{\theta}\right)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$\overrightarrow{R_N} \perp$ au déplacement, donc:

$$\delta W\left(\overrightarrow{R_N}\right) = 0 = W\left(\overrightarrow{R_N}\right)$$

$$\delta W(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$$\begin{aligned} \delta W(m\vec{g}) &= mga \,\mathrm{d}\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= mga \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Ainsi:

$$m\vec{g} = -mg\cos\theta \vec{u_r} + mg\sin\theta \vec{u_\theta}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \underbrace{\mathrm{d}a\vec{u_r}}_{=0} + a\,\mathrm{d}\theta \vec{u_\theta}$$

$$m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = mga \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m a^2 2\ddot{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_c &= m a^2 \ddot{\theta} \,\mathrm{d}\theta \\ &= mga \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta$$

D'où:

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{a}\sin\theta = 0}$$

On peut alternativement passer par la forme intégrale:

$$\begin{aligned} E_c(t) - E_c(0) &= W(m\vec{g} + W\left(\overrightarrow{R_N}\right) \\ &= \int_0^t mga \sin\theta \underbrace{\dot{\theta}}_{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\theta(0)}^{\theta(t)=\theta} mga \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= mga[-\cos\theta]_0^\theta \\ &= -mga\cos\theta + mga \\ &= mga(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

On a aussi:

$$E_c(t) - E_c(0) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m a^2 \underbrace{\dot{\theta}^2(0)}_{=0}$$

Donc:

$$\frac{1}{2}a^2\dot{\theta}^2 = mga(1-\cos\theta)$$

On dérive:

$$\frac{1}{2}ma^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mga\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}\left(a\ddot{\theta} - g\sin\theta\right) = 0$$

Pour avoir un mouvement, il faut que $\dot{\theta} \neq 0$, donc:

$$\boxed{a\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0}$$

Question 2: On sait que la réaction est dans l'axe $\vec{u_r}$, mais on ne connait pas sa norme. Une méthode énergétique est proscrite, cette force ne travaillant pas.

On projette le principe fondamental sur $\vec{u_r}$:

$$m\left(\underbrace{\ddot{a}}_{=0} - a\dot{\theta}^2\right) = R_N - mg\cos\theta$$

$$-ma\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta$$

$$R_N = mg\cos\theta - ma\dot{\theta}^2$$

Lorsqu'on a traduit le théorème de l'énergie cinétique de manière intégrale, on récupère:

$$ma\dot{\theta}^2 = 2mg(1-\cos\theta)$$

On le réinjecte:

$$\begin{aligned} R_N &= mg\cos\theta + (-2mg + 2mg\cos\theta) \\ &= 3mg\cos\theta - 2mg \\ &= mg(3\cos\theta - 2) \end{aligned}$$

Question 3: On a décollage lorsqu'il n'y a plus de réaction du support:

$$R_N = 0$$

On a $mg \neq 0$, donc on veut:

$$3\cos\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48°$$

Après décollage, il y a un mouvement de chute libre uniforme.

III. Energie potentielle et forces conservatives

1) Définition

Une force $\vec{f}$ est conservative (ou dérive d'un potententiel) si le travail effectué par $\vec{f}$ est indépendant du chemin suivi.

C'est à dire que:

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = -\,\mathrm{d}E_p$$

2) Interprétation physique

On suppose que $\vec{f}$ est conservative. On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$\mathrm{d}E_c = \delta W\left(\vec{f}\right) = -\,\mathrm{d}E_p$$

$$\mathrm{d}E_c = -\,\mathrm{d}E_p \Leftrightarrow \mathrm{d}\left(E_c + E_p\right) = 0$$

Donc:

$$E_c + E_p = \text{constante}$$

L'énergie totale d'un système est conservée.

On appelle énergie mécanique la somme des énergies cinétiques et de potentiel.

$$E_m = E_c + E_p$$

Dans le cas général, il y aura des forces non conservatives. On pourra utiliser l'énergie potentielle avec les forces conservatives, mais pour les forces non conservatives, on sera constraint d'utiliser $W\left(\vec{f}\right)$ et $\delta W\left(\vec{f}\right)$

On a:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_c &= \sum_i \delta W\left(\vec{f}_i\right) \\ &= \sum_{i,c} \delta W\left(\vec{f}_{i,c}\right) + \sum_{i,\mathrm{nc}} \delta W\left(\vec{f}_{i,\mathrm{nc}}\right) \\ &= -\,\mathrm{d}E_p + \sum_{i,\mathrm{nc}} \delta W\left(\vec{f}_{i,\mathrm{nc}}\right)\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{d}E_m \neq 0$ dans la majorité des cas.

3) Notion de gradient

Un gradient est une fonction scalaire f de l'espace. Par exemple:

$$f(x,y,z) = \ldots, f(r,\theta,z) = \ldots, f(r,\theta,\varphi) = \ldots$$

On définit $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ par:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}f$$

On va se placer dans différents systèmes de coordonées:

a) Cartésiens

Avec $f(x,y,z)$:

$$\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x f(M) \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y f(M) \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}_z f(M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x f \cdot \mathrm{d}x + \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y f \cdot \mathrm{d}y + \overrightarrow{\mathrm{grad}}_z f \cdot \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Donc, par identification (on peut identifier car on est dans une base orthonormée):

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

b) Cylindriques

Avec $f(r, \theta, z)$

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathrm{d}r + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} \mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathrm{d}z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)_r \vec{u_r} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)_\theta \vec{u_\theta} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)_z \vec{u_z}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + \mathrm{d}z\vec{u_z}$$

On identifie:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u_z}$$

c) Sphériques

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)_r \vec{u_r} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)_\theta \vec{u_\theta} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\right)_\varphi \overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi} + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta}$$

D'où:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u_\theta}$$

4) Énergie potentielle et gradient

Proposition:
Si $\vec{f}$ est une force conservative, on peut l'écrire sous la forme $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$

Preuve:
Si $\vec{f}$ est une force conservative, alors par définition:

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = -\,\mathrm{d}E_p$$

Par le définition du gradient:

$$\mathrm{d}E_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

On peut reporter $\mathrm{d}E_p$:

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Or, par la définition du travail, on a aussi:

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Donc, par identification:

$$\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p}$$

5) Exemple de forces conservatives

✓ Tip:
Pour montrer qu'une force est conservative, on montrera que le travail δW a la forme $-\,\mathrm{d}(\ldots)$ ou $-\overrightarrow{\text{grad}}(\ldots)$, avec d l'opérateur différentiel et $\overrightarrow{\text{grad}}$ le gradient.

a) Poids $m\vec{g}$

On oriente l'axe $\vec{u_z}$ vers le haut.

On veut montrer que le poids est une force conservative. Pour cela, on veut montrer qu'il dépend d'une énergie potentielle.

$$\delta W = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Le poids est totalement vertical, donc:

$$\delta W = -mg\,\mathrm{d}z$$

m et g sont constants, donc on peut les passer dans la différentielle:

$$\delta W = -\,\mathrm{d}(mgz)$$

On l'identifie à une énergie potentielle (c'est homogène tkt):

$$\delta W = -\,\mathrm{d}E_p$$

Et on a donc l'expression de l'énergie potentielle:

$$E_p = mgz + C$$

b) Force éléctro-statique $\vec{f} = q\vec{E}$

...avec q la charge électrique et $\vec{E}$ le champ électrique.

> Φ Note:
> En première année, on ne s'inquiète pas de la forme du champ électrostatique: il est toujours donné.

> Parachutage:
> Le champ électrique $\vec{E}$ est de la forme:
> $$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} V$$
> Avec V le potentiel électrique.

On a donc:

$$\vec{f} = q\vec{E} = q\left(-\overrightarrow{\mathrm{grad}} V\right)$$

La charge est une constante, donc on peut la passer dans le gradient:

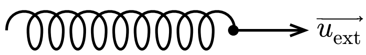
$$\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(qV)$$

Donc $\vec{f}$ est une force conservative et l'énergie potentielle électro-statique est:

$$E_p = qV + C$$

c) Force du rappel d'un ressort $\vec{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_{\mathrm{ext}}}$

On se place sur l'axe horizontal $\overrightarrow{u_x}$:



On prend l'origine des x à la position à vide du ressort, avec: $x = l - l_0$

On a donc:

$$\vec{F} = -kx\overrightarrow{u_x}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= -kx\overrightarrow{u_x} \cdot \left(\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}\right) \\ &= -kx\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Le k est constant, mais on ne peut pas juste sauvagement rentrer le x dans la différentielle. On fait un coup de trafalgar:

$$\delta W = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

D'où l'énergie potentielle:

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
&= \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C
\end{aligned}
$$

d) Forces newtoniennes

On appelle force newtonienne une force $\vec{f}$ qui est:

- Centrale, c'est à dire toujours dirigée vers l'origine O (on utilisera donc les coordonnées sphériques)
- Inversement proportionnelle au carré de la distance:

$$\vec{f} = \frac{K}{r^2}\vec{u_r}$$

  Avec K une constante (dans le cadre du mouvement, mais elle peut changer entre les objets).

La gravitation ($K = -Gm_1m_2$) et l'électromagnétisme quand les charges sont de signe différents ($K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1q_2$ négatif) sont des forces newtoniennes.

On pose le travail:

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\
&= \frac{K}{r^2}\vec{u_r} \cdot (\mathrm{d}r\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u_\theta}) \\
&= \frac{K}{r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= -\,\mathrm{d}\left(\frac{K}{r}\right)
\end{aligned}
$$

Donc:

$$E_p = \frac{K}{r} + C$$

> ⚠ Warn:
> En général, la constante est nulle (car l'énergie potentielle est nulle à l'infini), mais ce n'est pas tojours le cas dans certains problèmes qui traitent d'objets de longueur infinies.

6) Exemple de force non conservative, la force de frottement fluide

On pose la force de frottement fluide proportionel à la vitesse $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, et on calcule le travail:

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\
&= -\lambda\vec{v} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t \quad (\text{rappel: } \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}\,\mathrm{d}t) \\
&= -\lambda v^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

On a une dépendance temporelle claire: on ne pourra jamais l'exprimer sous la forme d'une énergie potentielle (qui ne dépend que de l'espace)

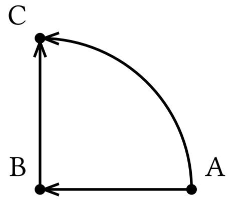
La force de frottement fluide est donc non conservative.

7) Application

On pose trois points A, B, et C.

On pose un champ de force $\vec{F} = c^2 r^2 \vec{u_\theta}$ avec c constant

On veut observer le travail effectué par un point se déplaçant au point C:
- En passant par le point B, puis par le point C en ligne droite
- En allant au point C avec un arc de cercle de rayon R



On calcule le travail avec:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ n'aura pas la même expression selon le chemin suivi.
- Si on suit le chemin en arc de cercle, on aura:

  $$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = R\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta}$$

  D'où:

  $$\begin{aligned}\delta W &= \left(r^2 c^2 \vec{u_\theta}\right) \cdot \left(R\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta}\right)\\ &= Rr^2c^2\,\mathrm{d}\theta\\ &= R^3c^2\,\mathrm{d}\theta \text{ car on suit le cercle}\end{aligned}$$

  On intègre:

  $$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^2R^3\,\mathrm{d}\theta = c^2R^3\frac{\pi}{2}$$
- Si on suit le chemin en ligne droite: on separe le chemin en deux:

  $$W = W_{AB} + W_{BC}$$

  Pour le chemin AB:

  $$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\,\mathrm{d}r\vec{u_r}$$

  $$\delta W_{AB} = -r^2c^2\vec{u_\theta} \cdot \mathrm{d}r\vec{u_r} = 0$$

  $$W_{AB} = 0$$

  De même pour le chemin BC:

  $$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u_r}$$

  $$\delta W_{BC} = 0$$

  $$W_{BC} = 0$$

Donc la force $\vec{F}$ est évidemment non conservative.

Si on change le champ force à $\vec{F} = r^2 c^2 \vec{u_r}$, on a, pour tout chemin:

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \, \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= r^2 c^2 \vec{u_r} \cdot (\mathrm{d}r \vec{u_r} + r \, \mathrm{d}\theta \vec{u_\theta}) \\ &= r^2 c^2 \, \mathrm{d}r \\ &= -\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{3} c^2 r^3\right) \end{aligned}$$

Donc la force est conservative.

IV. Énergie mécanique

1) Définition

On a $E_m = E_c + E_p$, avec E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle, définie par toutes les forces conservatives.

L'energie mécanique permet d'englober toute l'énergie conservative.

2) Conservation ou non conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique se conservera que si l'on est uniquement face à des forces conservatives, et elle ne sera modifiée que par les forces non conservatives.

3) Théorème de l'énergie mécanique

Θ THÉORÈME:
Le changement d'énergie mécanique est égal à la somme du travail des forces non conservatrices.

Preuve:
On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$\Delta E_c = \sum_i W\left(\vec{f_i}\right) = \sum_{i_c} W\left(\overrightarrow{f_{i_c}}\right) + \sum_{i_{\mathrm{nc}}} W\left(\overrightarrow{f_{i_{\mathrm{nc}}}}\right)$$

Or, $\sum_{i_c} W\left(\overrightarrow{f_{i_c}}\right) = -\Delta E_p$, donc:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + \sum_{i_{\mathrm{nc}}} W\left(\overrightarrow{f_{i_{\mathrm{nc}}}}\right)$$

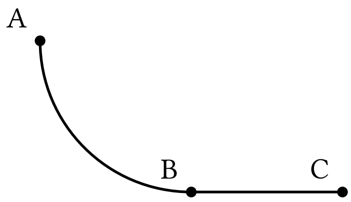
$$\Delta E_c + \Delta E_p = \sum_{i_{\mathrm{nc}}} W\left(\overrightarrow{f_{i_{\mathrm{nc}}}}\right)$$

$$\Delta E_m = \sum_{i_{\mathrm{nc}}} W\left(\overrightarrow{f_{i_{\mathrm{nc}}}}\right)$$

4) Utilisation de la conservation de l'énergie mécanique

Un enfant descend sur sa luge une piste enneigée constituée d'un quart de cercle de rayon $R = 20$ m entre A et B puis d'une partie horizontale tangente au cercle en B de longueur R entre B et C. On considère que l'intensité du champ de pesanteur vaut $g = 9{,}8$ m.s^{-2} et que la piste est suffisamment gelée pour considérer qu'il n'y a pas de frottement.

1. Établir que les forces soit sont conservatives soit ne travaillent pas.
2. En déduire que l'énergie mécanique est constante.
3. En appliquant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse de l'enfant en B puis en C.



On réduit l'enfant à un point M de masse m, et on considère ce système. On se place dans le référentiel galiléen terrestre.

On fait un bilan des forces:

- Le poids $m\vec{g}$
- La réaction de la neige $\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$

On ignore le frottement solide ($\overrightarrow{R_T} = \vec{0}$), et la réaction normale ne travaille pas, donc la seul force travaillant est le poids, qui est une force conservatrice.

On applique le TEM:

$$\Delta E_m = W\left(\overrightarrow{R_N}\right) + W\left(\overrightarrow{R_T}\right) = 0$$

Donc l'énergie mécanique reste constante.

On calcule le différentiel d'énergie potentielle entre A et B:

$$\Delta E_{\mathrm{pp}}\left(\overrightarrow{AB}\right) = -mgR$$

Par conservation de l'énergie mécanique:

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = mgR = \frac{1}{2}mv^2$$

Donc:

$$v = \sqrt{2gR}$$

Et cette vitesse est la même en C.

V. Étude qualitative des mouvements et des équilibres

‼ Caution:
On supposera dans cette partie que l'énergie mécanique est constante.

1) Conséquence de la positivité de l'énergie cinétique

On sait l'énergie mécanique est définie par:

$$E_m = E_p + E_c \Leftrightarrow E_c = E_m - E_p$$

Or, l'énergie cinétique est toujours positive:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$$

Donc l'énergie mécanique est toujours plus grande que l'énergie potentielle.

$$E_m - E_p \geq 0$$

$$\boxed{E_m \geq E_p}$$

2) Nature du mouvement en fonction de l'énergie mécanique

Supposons que l'on a trouvé une expression $E_p(M)$ de l'énergie potentielle. Si on obtient une valeur E_m de l'énergie mécanique (par exemple, avec une position et une vitesse initiale), on sait que cette énergie va rester constante, et on sait que $E_m \geq E_p$ est toujours vérifié.

Cela permet de conclure que tout les points M tels que $E_p(M) > E_m$ sont *inatteignable.*

On parle de **mouvement lié** si les positions accessibles sont restreintes à une zone finie (pour un système modulé par x, le mouvement est lié si on a nécessairement $x_0 \leq x \leq x_1$).

On parle de **mouvement libre** sinon.

✓ Tip:
Si on trouve une énergie mécanique complètement invalide, on s'est probablement trompés.

3) Équilibre

On parle d'équilibre si $\vec{v} = 0$ et $\vec{a} = 0$.

Donc par PFD, la somme des forces est nulle.

⚠ Warn:
Si la somme des forces est nulle, l'équilibre n'est pas nécessairement atteint (vitesse initiale!)

✓ Tip:
Les questions d'équilibre auront généralement la forme « Existe-il une position d'équilibre? »

4) Détermination des positions d'équilibre

On peut prendre une approche énergétique: comme chacune des forces est conservative, on peut les écrire sous la forme

$$\vec{f_i} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_{p_i}\right)$$

Si on se place dans un système ne dépendant qu'un seul paramètre x, on a:

$$\begin{aligned}\vec{f_i} &= -\frac{\partial E_{p_i}}{\partial x}\overrightarrow{u_x} \\ &= -\frac{\mathrm{d}E_{p_i}}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

Donc x_0 est une position d'équilibre **potentielle** si,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}E_{p_i}}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0}$$

Φ Note:
Une position d'équilibre potentielle est un point où on sera à l'équilibre si la vitesse est nulle en ce point.

5) Stabilité des positions d'équilibre

Équilibre stable   Équilibre instable

On dit qu'un équilibre est **<u>stable</u>** si, quand on s'en écarte un peu, on y revient.

On a $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_p\right) = -\mathrm{d}\left(E_p\right)$.

On fait un DL d'ordre 2 au voisinnage de la position d'équilibre:

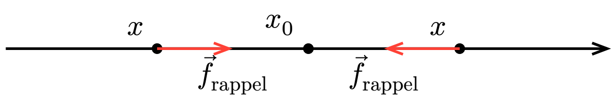
$$\begin{aligned}E_p(x) &= E_p(x_0) + \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^2\right) \\ &= E_p(x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^2\right)\end{aligned}$$

On dérive le DL:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x}(x_0)(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^1\right)$$

$$\vec{f} = -\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x-x_0)\overrightarrow{u_x}$$

Donc, si x se déplace un peu par-rapport à x_0:



Si on se déplace vers la gauche, $x - x_0 < 0$, donc la dérivée seconde doit être positive pour qu'on revienne vers x_0.

Si on se déplace vers la droite, $x - x_0 > 0$, donc la dérivée seconde doit être positive pour qu'on revienne vers x_0.

On est donc sur un équilibre **stable** si:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0}$$

6) Étude d'un équilibre *via* son énergie potentielle

Un point matériel M de masse m est mobile dans un plan et repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) avec $r = R$. Il est soumis à une énergie potentielle $Ep = E_0\theta - mgR\cos\theta$ en notant E_0 une constante et g l'accélération de pesanteur.

1. Donner la dimension de E_0.
2. Déterminer la condition pour qu'il y ait des positions d'équilibre. On exprimera cette condition en fonction de E_0, m, R et g.
3. Préciser la(es) position(s) d'équilibre.
4. Etudier leur stabilité.

1. E_0 a la dimension d'une énergie
2. Une position d'équilibre est obtenue si la somme des forces est nulle, or $\vec{f} = -\mathrm{d}(E_p)$, donc quand $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$, donc:

$$E_0 + mgR\sin\theta = 0$$

On a:

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$E_0 - mgR \leq \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} \leq E_0 + mgR$$

Donc $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}$ ne peut s'annuler que si $E_0 \leq mgR$

3. On cherche les points d'annulation en θ. On a:

$$\sin\theta = -\frac{E_0}{mgR}$$

$$\theta = \arcsin\left(-\frac{E_0}{mgR}\right)$$

$$\theta_1 = -\arcsin\left(\frac{E_0}{mgR}\right)$$

$$\theta_2 = \pi + \arcsin\left(\frac{E_0}{mgR}\right)$$

4. On calcule la dérivée seconde:

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = mgR\cos\theta$$

On a:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_1) &= mgR\cos\left(\arcsin\left(\frac{E_0}{mgR}\right)\right)\\ &= mgR\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{E_0}{mgR}\right)^2}_{<1}}\end{aligned}$$

Donc θ_1 est un équilibre stable. À l'inverse:

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_2) = -mgR\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{mgR}\right)^2}$$

Donc θ_2 est un équilibre instable.

VI. Oscillateurs harmoniques

1) Exemples d'oscillateurs harmonique

On a déjà obtenu des oscillateurs harmoniques en mécanique dans au moins trois situations:
- les ressorts (horizontaux et verticaux)
- les pendules

On regarde le cas où on se place au voisinnage d'une position d'équilibre stable.

On arrive à dire que la résultante des forces qui s'exercent est:

$$\vec{f} = -\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x-x_0)\overrightarrow{u_x}$$

$\vec{f}$ est la force qui s'exerce au voisinnage de la position d'équilibre, avec x_0 la position d'équilibre.

Comme cette position d'équilibre est stable, on a:

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$$

On fait un bilan des forces:
- On a une résultante des forces $\vec{f}$ dont on vient de donner l'expression

On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

On projette dans la direction $\overrightarrow{u_x}$:

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x-x_0)$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x-x_0) = 0$$

On pose $X = x - x_0$, avec $\ddot{X} = \ddot{x}$
On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique:

$$\ddot{X} + \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)X = 0$$

On résout alors l'équation d'un oscillateur harmonique:

$$X = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Avec:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\right)}$$

Une autre façon de procéder est de développer:

$$\ddot{x} + \frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\right)x = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0)x_0$$

Et de résoudre l'équation avec un second membre:

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_0$$