

# Régimes Transitoires

1. Régime continu ou variable - Régime transitoire ou permanent ..... 1
2. Régime transitoire d'un circuit R,C du 1<sup>er</sup> ordre - Charge et décharge d'un condensateur ..... 2
3. Régime transitoire d'un circuit R, L du premier ordre - Établissement et rupture du courant dans une bobine ..... 10

## I. Régime continu ou variable - Régime transitoire ou permanent

### 1) Régime continu ou variable

Dans un régime continu, les différentes grandeurs du circuit sont constantes au cours du temps.

À l'inverse, dans un régime variable, les différentes grandeurs du circuit peuvent varier au cours du temps.

### 2) Régime transitoire ou permanent

△ Warn:

Régime transitoire  $\neq$  Régime permanent/stationnaire

Dans un régime permanent/stationnaire, les **caractéristiques** des grandeurs sont constantes.

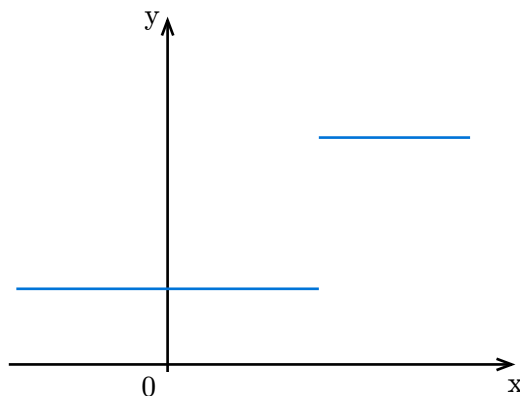
Par exemple, un signal électrique sinusoïde (ou carré, ou triangle, ou sawtooth...) dans un circuit électrique peut-être considéré comme un régime stationnaire/permanent si ses caractéristiques (amplitude, fréquence, phase) sont constantes au cours du temps.

Dans un régime transitoire, le circuit finira par « disparaître ». Quelque chose devra tendre vers 0 (Ex: un condensateur se décharge).

### 3) Limitation dans ce chapitre

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux régimes continus comme régimes stationnaires.

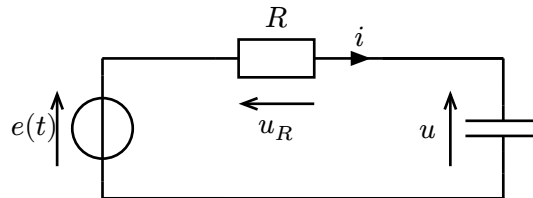
C'est à dire aux cas où un régime continu passera vers un autre régime continu, avec un échelon de tension/intensité.



## II. Régime transitoire d'un circuit R,C du 1<sup>er</sup> ordre - Charge et décharge d'un condensateur

### 1) Équation différentielle

Le circuit R,C de premier ordre correspond simplement à prendre un condensateur, une résistance et un générateur et à les mettre en série:



On a: (loi des mailles, loi des nœuds, caractéristique d'un condensateur et d'une résistance):

- Caractéristique d'une résistance:

$$u_R = Ri$$

- Caractéristique d'un condensateur:

$$i = C \frac{du}{dt}$$

- Loi des mailles:

$$e = u_R + u \Leftrightarrow e = Ri + u$$

En substituant  $i$ :

$$e = RC \frac{du}{dt} + u$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{e}{RC} \quad \text{Eq. 1}$$

On pose un échelon de tension:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

On cherche  $u(t)$  pour  $t > 0$ .

### 2) Résolution

On a une équadiff du 1er ordre à coefficients constants et un 2nd membre non nul.

$$u(t) = u_H(t) + u_p(T)$$

Avec  $u_H$  la solution de l'équadiff homogène associée et  $u_p$  une solution particulière cherchée de la même forme que  $e(t)$  (qui ici est constante).

Ici, les solutions de l'équadiff homogène associée sont ( $U \in \mathbb{R}$ ):

$$u_H(t) = U e^{\frac{-t}{RC}}$$

On cherche  $u_p$  sous la forme d'une constante:

$$u_p(t) = V$$

Donc:

$$\frac{du_p}{dt} = 0$$

Donc d'après Eq. 1:

$$0 + \frac{u_p}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$u_p(t) = E$$

D'où l'ensemble des solutions pour  $u$ :

$$u(t) = E + Ue^{-\frac{t}{RC}}$$

On cherche maintenant la tension initiale  $U$ , c'est à dire les conditions initiales du circuit:

$$u(0) = U_0$$

On utilise la continuité de la tension aux bornes de  $C$ . On sait que l'énergie stockée dans  $C$  est  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2$ .

Or  $C$  est une constante et l'énergie est continue, donc  $u(t)$  est continue.

On va faire l'hypothèse que  $C$  est déchargé au début. On a donc:  $u(0^-) = 0$ .

Par continuité de  $u$  aux bornes de  $C$ ,  $u(0^+) = u(0^-) = 0$ .

Or on a:  $u(0^+) = E + U = 0$

D'où:  $U = -E$

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

### 3) Interprétation de la solution

---

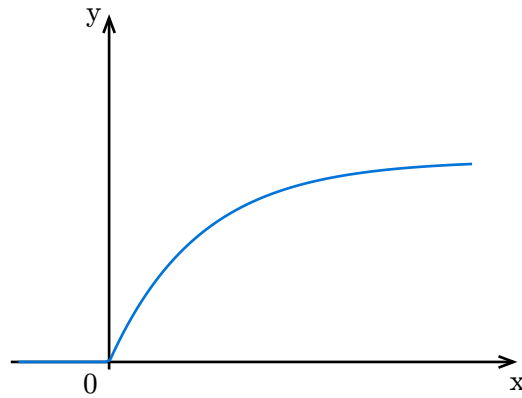
$$u(t) = u_p(t) + u_H(t)$$

Avec  $u_p(t) = E$  et  $u_H(t) = -Ee^{-\frac{t}{RC}}$

On voit que  $u_p$  va rester constant, ce qui traduit un régime permanent, ici continu.

On voit que  $u_H$  va tendre vers zéro, ce qui traduit un régime transitoire.

Notre signal a donc une forme:



On pourra donc considérer:

- Un régime permanent au début
- Un régime transitoire de « transition »
- Un régime permanent jusqu'en  $+\infty$

Comme notre exponentielle ne touche techniquement jamais le bout de la courbe, il faut déterminer à partir de quand on considère que on est passé en régime permanent.

#### 4) Intensité du courant

---

On a:

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

On dérive:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -E \left( -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right) \\ &= \frac{E}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

On substitue dans:

$$i = C \frac{du}{dt}$$

D'où:

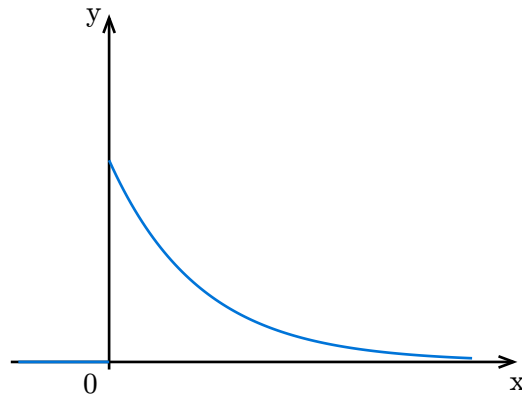
$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Remarques:

1. L'homogénéité est vérifiée
2. On sait que l'intensité est nulle jusqu'à  $t = 0$  (par  $i = C \frac{du}{dt}$ ). On a une discontinuité en  $t = 0$ , l'intensité saute jusqu'à  $\frac{E}{R}$ , puis décroît avec une exponentielle inverse.

**!! Caution:**

**DISCONTINUITÉ DE L'INTENSITÉ POUR C**



## 5) Cas de la décharge de $C$

---

On reprend le même circuit Fig. 2.

En  $t = 0$ ,  $C$  est chargé sous une tension  $E$ . Donc:

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{pour } t < 0 \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

En  $t < 0$ ,  $u(t) = E$

$$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow i = C \frac{du}{dt} = 0$$

$$Ri = 0 \Rightarrow e(t) = u(t)$$

Pour  $t > 0$ :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{e(t)}{RC} = 0$$

Ici, on a pas de 2nd membre. On a donc:

$$u(t) = u_H(t) = Ue^{-\frac{t}{RC}}$$

On doit déterminer la valeur de  $U$ , la constante d'intégration.

De même, on utilise la continuité de  $u$  aux bornes de  $C$ :

$$u(0^+) = u(0^-) = E$$

par l'expression de la solution:

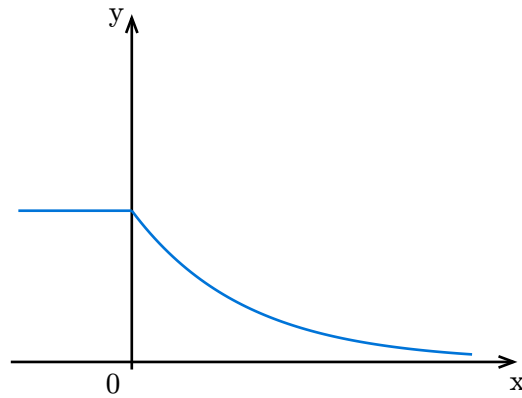
$$u(0^+) = U$$

Donc  $U = E$

On a donc:

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

On peut tracer  $u$ :



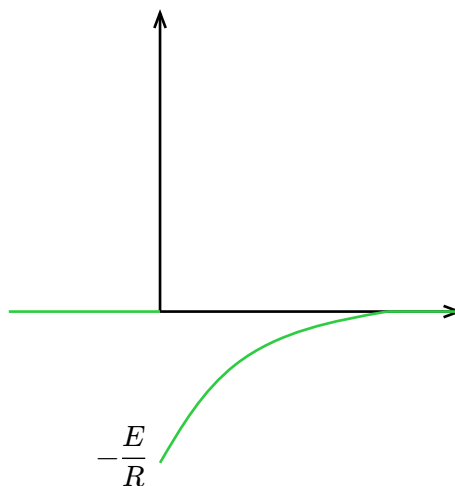
Et pour l'intensité:

$$i = C \frac{du}{dt} = CE \left( -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

D'où:

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

(On a la même chose, mais avec un signe moins devant)



On a toujours discontinuité de  $i$ .

## 6) Temps caractéristique $\tau$

Par homogénéité, l'exposant d'une exponentielle est toujours sans dimension. Ainsi, dans  $e^{-\frac{t}{RC}}$ ,  $-\frac{t}{RC}$  est une grandeur sans dimension. Donc  $[RC] = [T]$ .

On nomme donc  $\tau$  le temps caractéristique, défini par:

$$\tau = RC$$

En reprenant l'équation:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{e(t)}{RC}$$

On a:

$$\left[ \frac{du}{dt} \right] = \frac{[U]}{[T]}$$

$$\left[ \frac{u}{RC} \right] = \frac{[U]}{[T]}$$

Donc  $[RC] = [T]$ , donc:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{e(t)}{\tau}$$

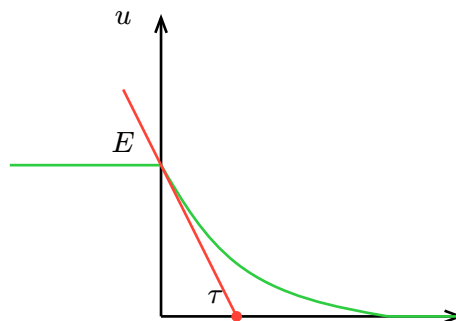
Pour résumer:

- Charge d'un condensateur:
  - $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
  - $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Décharge d'un condensateur:
  - $u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$
  - $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Obtention de la valeur de  $\tau$  expérimentalement:

On peut faire le même raisonnement pour chaque formule, mais on utilisera la décharge d'un condensateur.

On peut mesurer l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses directement:



On a l'asymptote pour  $t \rightarrow +\infty$ :

$$u = 0$$

La tangente à l'origine est:

$$y = u'(0)t + u(0)$$

$$u'(t) = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Donc:

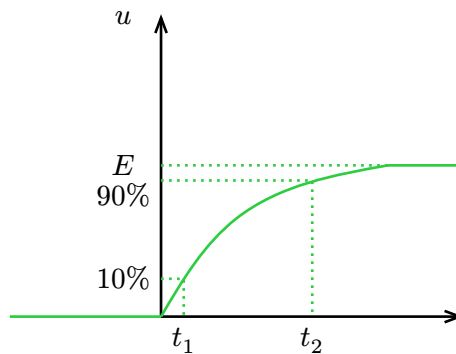
$$y = -\frac{E}{\tau}t + E$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -\frac{E}{\tau}t + E &= 0 \\
 \Leftrightarrow -\frac{E}{\tau}t &= -E \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau}t &= 1 \\
 \Leftrightarrow t &= \tau
 \end{aligned}$$

Donc l'intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses est une bonne estimation expérimentale de  $\tau$ .

Autre methode: temps de montée/descente.



On pose:  $\Delta T = t_2 - t_1$

**Note:**

En décharge, on partira de 90% et on ira à 10%

**Note:**

Dans une situation où on part d'une tension arbitraire  $E_1$  vers une autre tension  $E_2$ , on devra partir d'une interpolation linéaire (10% et 90%) des deux.

On a:

$$u(t_1) = \frac{E}{10} = E \left( 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right)$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{t_1}{\tau}} &= \frac{9}{10} \\
 t_1 &= -\tau \ln \left( \frac{9}{10} \right)
 \end{aligned}$$

Et:

$$u(t_2) = \frac{9}{10}E = E \left( 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} \right)$$



$$e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \frac{1}{10}$$

$$t_2 = -\tau \ln \frac{1}{10}$$

On a donc:

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \tau \ln 10 + \tau \ln \frac{9}{10}$$

$$\Delta T = 2\tau \ln 3 \approx 2.2\tau \approx 2\tau$$

## 7) Aspects énergétique

On a:

$$e(t) = u + Ri = u + RC \frac{du}{dt}$$

$$ei = ui + Ri^2$$

On substitue le  $i$ :

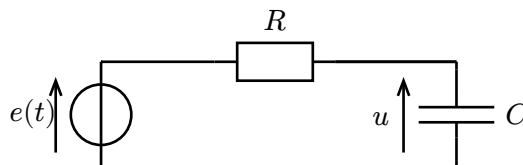
$$ei = Cu \frac{du}{dt} + Ri^2$$

$$ei = \frac{d}{dt} \frac{Cu^2}{2} + Ri^2$$

On va interpréter  $ei$  comme la puissance fournie par le générateur (notre source idéale de tension est en convention générateur).

La résistance est en convention récepteur, donc  $Ri^2$  est la puissance dissipée par effet joule.

## 8) Réponse à un signal carré



Lorsque le temps caractéristique  $\tau$  du système résistance-condensateur commence à approcher le temps caractéristique du circuit ( $\frac{1}{f}$ ), on ne peut plus se placer dans l'ARQS: on observe la charge et la décharge du condensateur sur notre signal.

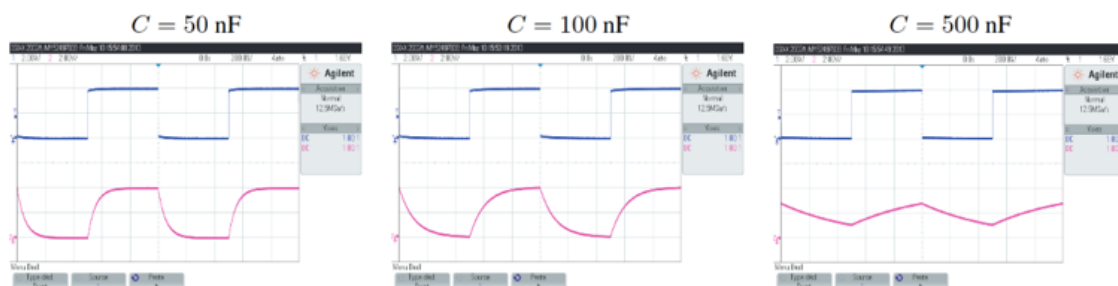


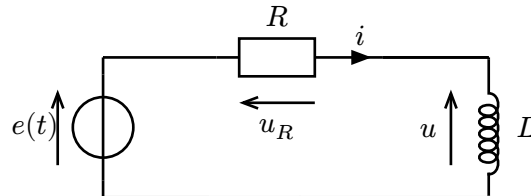
Fig. 10. – Charge et décharge d'un condensateur avec un signal crénau

## 9) Mesure de l'intensité

On peut se place aux bornes de la résistance et mesurer la tension pour obtenir l'intensité ( $\times$  une constante).

Problème de manipulation: la masse de l'oscilloscope nous fait ignorer le condensateur si on mesure la résistance. Il faut intervertir les bornes du GBF.

### III. Régime transitoire d'un circuit $R, L$ du premier ordre - Établissement et rupture du courant dans une bobine



On a:

$$\begin{aligned}e(t) &= u + u_R \\&= L \frac{di}{dt} + u_R \\&= L \frac{di}{dt} + Ri \\&\Leftrightarrow \frac{e(t)}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i \\&\Leftrightarrow \frac{1}{\tau} \left( \frac{e(t)}{R} \right) = \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau}\end{aligned}$$

D'où:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Établissement:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E \text{ (constante)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On pose:

$$i(t) = i_H(t) + i_e(t)$$

Avec:

$$i_H(t) = I e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Et:

$$i_P(t) = \frac{E}{R}$$

Donc

$$i(t) = I e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

Comme l'énergie est une quantité continue, et que

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Avec  $L$  une constante, alors  $i$  est une quantité continue. On a:

$$i(0^+) = i(0^-)$$

On a  $i$  en  $0^-$  qui est avant le basculement de  $e$  de 0 à  $E$ , donc on peut se placer dans un régime permanent avec  $i$  une constante. On a:

$$\frac{di}{dt}(0^-) = 0$$

$$\frac{i(0^-)}{\tau} = \frac{0}{R\tau} \Rightarrow i(0^-) = 0$$

Et par continuité de  $i$ :

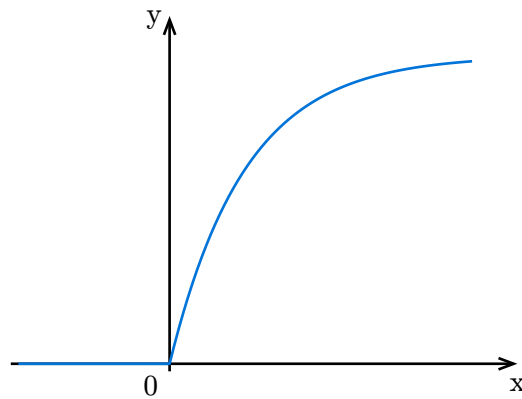
$$i(0^+) = 0$$

On a donc:

$$i(0^+) = 0 = I + \frac{E}{R}$$

$$\Leftrightarrow I = -\frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



On pose l'équation de la bobine:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

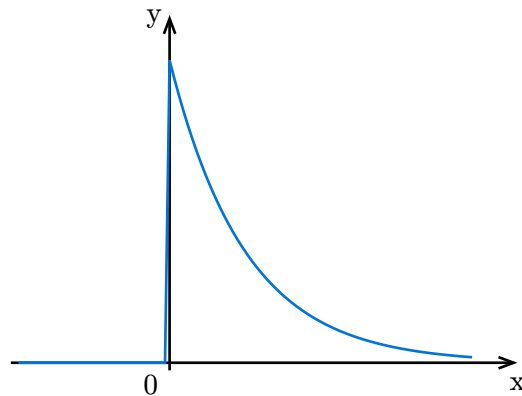
$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R}E \frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

D'où:

$$u = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

On a donc une discontinuité de  $u$  en 0.



Le plus dur sera de déterminer les conditions initiales.

On va faire l'inverse: on va faire basculer  $e$  de  $E$  vers 0:

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Par loi des mailles:

$$E = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}$$

**On fait l'hypothèse que le régime permanent a été atteint et que ce régime permanent est un régime continu.**

Cela implique que  $\frac{di}{dt} = 0$

On a donc:

- Pour  $t < 0$ ,  $E = Ri(t) \Leftrightarrow i(t) = \frac{E}{R}$
- $i(0^-) = \frac{E}{R}$

Par continuité de  $i$  dans  $L$ :

- $i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$
- condition initiale

On obtient donc l'équa-diff:

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{e(t \text{ (avec } t > 0))}{R\tau} = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$

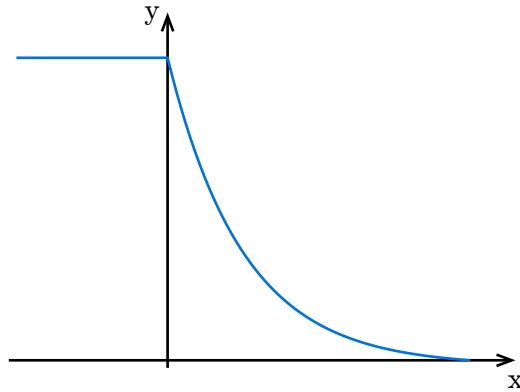
On résout l'équation homogène:

$$i(t) = i_H(t) = Ie^{-\frac{t}{\tau}}$$

On a  $i(0) = I = \frac{E}{R}$ , donc

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

D'où:

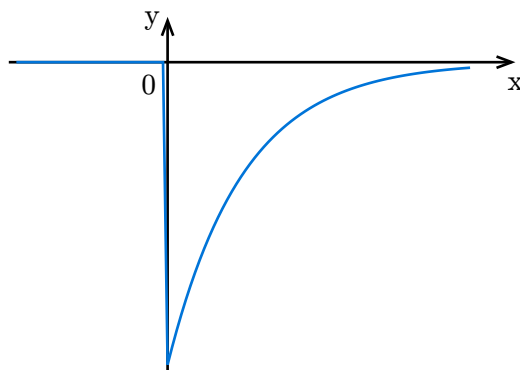


Pour la tension:

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} \\ &= L \frac{E}{R} \left( -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

D'où:

$$u = -E e^{-\frac{t}{\tau}}$$



On peut poser le temps caractéristique  $\tau = \frac{L}{R}$

## 1) Aspect énergétique

---

On a

$$e = Ri + L(di)(dt)$$

$$ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

$$ei = Ri^2 + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\text{énergie stockée}}$$

On a:

- $ei$  la puissance fournie par le générateur
- $Ri^2$  la puissance reçue par  $R$  et dissipée par effet Joule
- $\frac{1}{2}Li^2$  la puissance « stockée » dans  $L$ 
  - Si  $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) < 0$ , alors  $L$  est génératrice (la bobine se « décharge »)
  - Si  $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) > 0$ , alors  $L$  est réceptrice (la bobine se « charge »)