

# Phénomènes d'interférences

1. Superposition de deux ondes ..... 1
2. Somme de deux sinusoides de même fréquence ..... 1
3. Interférences lumineuses par le dispositif des trous d'Young ..... 4

## I. Superposition de deux ondes

Dans ce chapitre, on se limitera à l'interférences à deux ondes.

### 1) Observation expérimentales

Les amplitudes de différentes ondes s'ajoutent en chaque point.

Les ondes restent « distinctes », il n'y a pas d'interactions entre les ondes.

### 2) Phénomène d'interférence

**Interférence:** L'ajout des ondes en un même point.

**Zone d'interférence:** Zone où l'interférence entre deux ondes arrive. Dans la majorité de l'espace, l'une des deux ondes contribue 0, donc on ne voit aucune interférence.

### 3) Généralisation

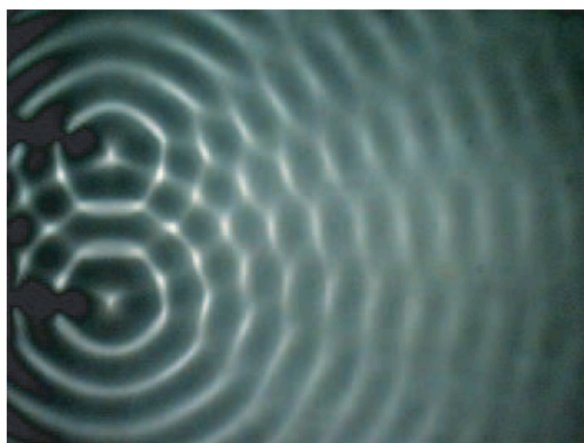


Fig. 1. – Interférences de deux ondes à la surface de l'eau

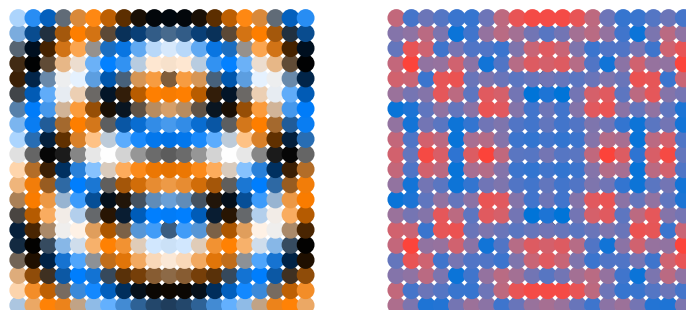


Fig. 2. – On visualise en rouge les interférences destructives et en bleu les interférences constructives

## II. Somme de deux sinusoides de même fréquence

On sait qu'on peut toujours se ramener à une somme (possiblement infinie) d'onde harmoniques avec la transformée de Fourier.

On va donc simplifier le problème et se limiter à la superposition de deux ondes sinusoïdales.

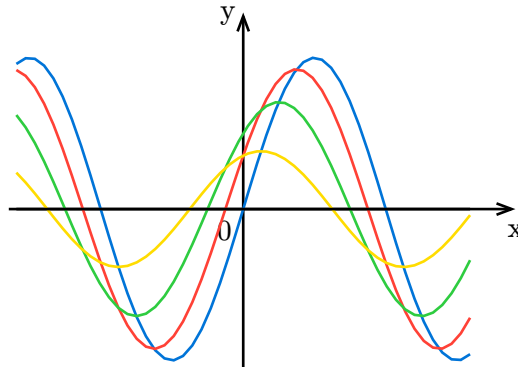
On peut alors (cf. le chapitre précédent) définir le signal par une simple fonction dépendant du temps.

## 1) Simulation mathématique

---

On pose deux sinus:  $s_1(t) = S_1 \sin(2\pi ft)$  et  $s_2(t) = S_2 \sin(2\pi ft + \varphi)$

Selon la valeur du déphasage  $\varphi$  entre les deux signaux, les interférences seront plus ou moins constructives ou destructives:



## 2) Formule d'interférences

---

On a donc:  $s_1(t) = S_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_2(t) = S_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

Et:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\ s(t) &= S_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + S_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= S_1 \sin(\omega t) \cos(\varphi_1) + S_1 \cos(\omega t) \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\omega t) \cos(\varphi_2) + S_2 \cos(\omega t) \sin(\varphi_2) \\ &= (S_1 \cos(\varphi_1) + S_2 \cos(\varphi_2)) \sin(\omega t) + (S_1 \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\varphi_2)) \cos(\omega t) \\ &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Avec  $A = S_1 \cos(\varphi_1) + S_2 \cos(\varphi_2)$  et  $B = S_1 \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\varphi_2)$

On va transformer  $s(t)$  en la forme  $X \sin(\omega t + \varphi)$

$$s(t) = X \sin(\omega t + \varphi) = X \sin(\omega t) \cos(\varphi) + X \cos(\omega t) \sin(\varphi)$$

Par identification:

$$\begin{cases} A = X \cos(\varphi) \\ B = X \sin(\varphi) \end{cases}$$

D'où:

$$A^2 + B^2 = X^2 \cos^2(\varphi) + X^2 \sin^2(\varphi) = X^2$$

Donc  $X = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\begin{aligned}
X^2 &= (S_1 \cos(\varphi_1) + S_2 \cos(\varphi_2))^2 + (S_1 \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\varphi_2))^2 \\
&= S_1^2 \cos^2(\varphi_1) + 2S_1 S_2 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + S_2^2 \cos^2(\varphi_2) \\
&\quad + S_1^2 \sin^2(\varphi_1) + 2S_1 S_2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + S_2^2 \sin^2(\varphi_2) \\
&= S_1^2 (\cos^2(\varphi_1) + \sin^2(\varphi_1)) + S_2^2 (\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)) + 2S_1 S_2 (\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)) \\
&= S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned}$$

On trouve la **formule d'interférence**:

$$X^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{Eq. 1}$$

Démonstration alternative par les complexes et la représentation dans le plan de Fresnel.

### 3) Extrema d'amplitude

Le seul paramètre variable est le déphasage  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  entre les deux ondes.

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 1 \\
S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 &\leq X^2(t) \leq S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \\
(S_1 - S_2)^2 &\leq X^2(t) \leq (S_1 + S_2)^2
\end{aligned}$$

Donc  $X_{\max} = |S_1 + S_2| = S_1 + S_2$  et  $X_{\min} = |S_1 - S_2|$

### 4) Cas où les signaux ont la même amplitude

Si  $S = S_1 = S_2$ , on a l'amplitude  $X$ :

$$X^2 = S^2 + S^2 + 2S^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2S^2(1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Et on a  $X_{\max} = 2S$  et  $X_{\min} = 0$

### 5) Interférences constructives ou destructives

On parle d'interférences constructives quand l'amplitude obtenue est maximale:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi) &= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \\
\Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 &\equiv 0[2\pi] \\
\Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 &= m \times 2\pi, m \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Pour pouvoir parler de « déphasage » avec des ondes un peu plus funky, on reformule le déphasage avec  $\lambda$  la longueur d'onde et  $d_1, d_2$  le déphasage en longueur:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{2\pi d_1}{\lambda} \\
\varphi_2 &= \frac{2\pi d_2}{\lambda}
\end{aligned}$$

Par exemple, on peut dire que des vagues ont une longueur d'onde (distance crête à crête) de 2 m, et qu'une vague est en retard sur une autre de 1 m (ce qui correspond à un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ )

On a donc:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = m2\pi \Leftrightarrow \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = m$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'interférence entre deux ondes soit constructive est:

$$d_1 - d_2 = m\lambda$$

✓ Tip:

Autrement dit, si deux ondes sont déphasées d'un nombre entier de longueur d'onde, elles sont en interférence constructive.

On parle d'interférences destructives si l'amplitude du signal obtenu est minimale (pour deux ondes de même fréquence et de même amplitude, on observe une annulation totale).

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = p2\pi + \pi, p \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{d_1 - d_2}{\lambda} = p + \frac{1}{2}$$

$$d_1 - d_2 = \lambda p + \frac{\lambda}{2}$$

Est une condition nécessaire est suffisante que deux ondes interfèrent de manière destructive.

### III. Interférences lumineuses par le dispositif des trous d'Young

#### 1) Dispositif des trous d'Young

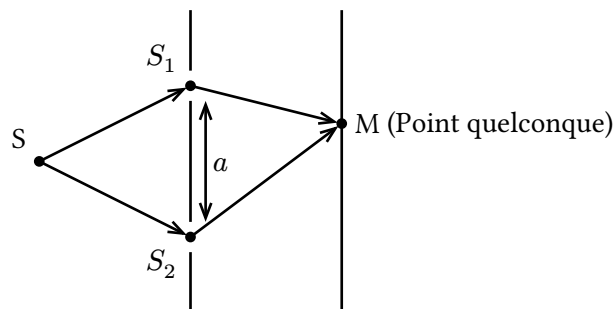


Fig. 4. – Trous d'Young

#### Dispositif des trous d'Young:

Deux trous sont faits à travers une lame. Une source lumineuse ponctuelle est placée sur la médiatrice des deux trous  $S_1$  et  $S_2$ . On observe la lumière atteignant  $M$ .

#### 2) Notion de chemin optique

Le chemin optique est décrit par le temps mis par la lumière pour parcourir une certaine distance.

On note  $(SM)$  le chemin optique pour aller du point  $S$  à  $M$ .

$$(SM) = c\tau$$

Avec  $\tau$  le temps mis pour aller de  $S$  à  $M$  dans le vide.

Si on se déplace dans un milieu d'indice  $n$ , on a:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow c = vn$$

$$(SM) = nv\tau = \int_{s(0)}^{s(\tau)} n \, ds$$

### 3) Lien entre déphasage et différence de chemin optique

On pose  $\varphi$  le déphasage entre les deux signaux  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}d_1 - \frac{2\pi}{\lambda}d_2 \\ &= kd_1 - kd_2 \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ &= k(d_1 - d_2) \\ &= \frac{\omega}{c}(d_1 - d_2) \text{ avec } \omega = kc \text{ le vecteur d'onde} \end{aligned}$$

On peut ensuite déterminer la distance avec le chemin optique:  $d_1 = (SS_1M)$  et  $d_2 = (SS_2M)$

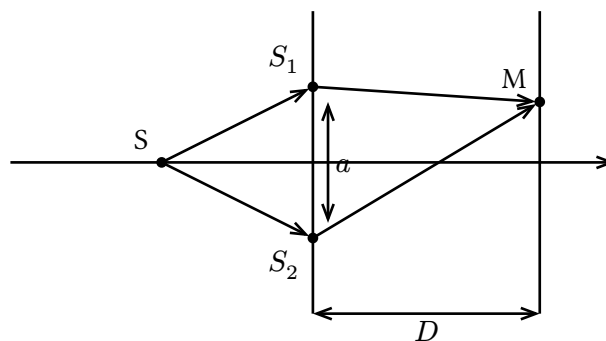
On pose en général  $\delta$  la différence de marche:

$$\delta = d_1 - d_2 = (SS_1M) - (SS_2M)$$

Ce qui nous permet d'obtenir le déphasage entre les deux signaux:

$$\varphi = \frac{\omega}{c}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

### 4) Calcul de la différence de marche pour le dispositif des trous d'Young à l'infini



Il faut que les trous soient très proches par rapport à la distance totale à parcourir.

On considère  $x$  la hauteur de point  $M$  sur l'écran.

#### a) Par le calcul

Pour obtenir le déphasage entre les deux signaux, on cherche à calculer  $\delta$ , la différence de marche, avec:

$$\begin{aligned}\delta &= (SS_1M) - (SS_2M) \\ &+ (SS_1) + (S_1M) - (SS_2) - (S_2M)\end{aligned}$$

On est dans un milieu homogène et isotrope, et le point  $S$  est sur la médiatrice des points  $S_1$  et  $S_2$ , donc  $(SS_1) = (SS_2)$ , donc:

$$\begin{aligned}\delta &= (S_1M) - (S_2M) \\ &= n_{\text{air}}S_1M - n_{\text{air}}S_2M\end{aligned}$$

(On pourra en général omettre l'indice de l'air car  $\approx 1$ )

$$S_1M^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2$$

$$S_2M^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2$$

On fera l'hypothèse que l'écran où on observe les interférences est à l'infini, donc que  $D \gg a$  et  $D \gg x$  (ce qui nous permettra de développer le terme en  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$  qui nous embête bien)

**Φ Note:**

En pratique, on placera une lentille après le dispositif pour observer les interférences à l'infini.

$$\begin{aligned}S_1M &= \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + D^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= D \left(1 + \underbrace{\frac{x^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}}_{\rightarrow 0}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On fait un DL d'ordre 1 de la racine et on bazarde le petit  $a$ :

$$S_1M \approx D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} - \frac{ax}{2D^2}\right)$$

De même:

$$S_2M \approx D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{ax}{2D^2}\right)$$

On a donc:

$$\delta = D \left(-\frac{ax}{2D^2} - \frac{ax}{2D^2}\right) = -\frac{ax}{D}$$

De là, on calcule le déphasage:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$



Parachutage:

L'intensité lumineuse  $I$  est le carré de l'amplitude lumineuse  $S$ .

On utilise la formule d'interférence (Eq. 1) pour des signaux d'amplitude égale:

$$S^2 = 2S^2(1 + \cos \varphi)$$

$$I = I_0(1 + \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right) \\ &= I_0 \left( 1 + \cos \left( -2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right) \\ &= I_0 \left( 1 + \cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right) \end{aligned}$$

## 5) Notion d'interfrange

On appelle interfrange  $i$  la distance entre deux franges « blanche » (deux crêtes d'interférences constructives).

On mesure l'écart de déphasage entre deux crêtes:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \frac{x}{i} \text{ (par définition de l'interfrange)}$$

De là, on remonte les expressions pour trouver l'expression de l'interfrange:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\lambda} &= \frac{x}{i} \\ \frac{ax}{D\lambda} &= \frac{x}{i} \end{aligned}$$

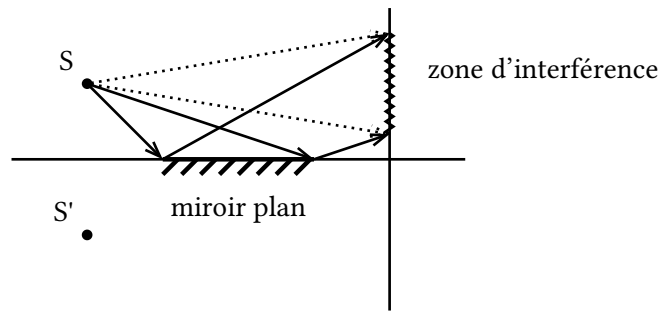
$$i = \frac{D\lambda}{a}$$

⇒ TODO:

Distance entre les interférences constructives et destructives (juste les multiples de  $i$  et les multiples de  $i$  plus  $\frac{i}{2}$ )

## 6) Autres dispositifs

### a) Miroir de Lloyd



### b) Miroir de Fresnel

On ajoute un deuxième miroir, on bloque les rayons qui sortent directement de la deuxième source virtuelle ( $S_2$ ) pour éviter d'avoir des interférences à trois sources.

