

# Induction: Lois, circuit fixe et champ magnétique variable, circuit mobile et champ magnétique stationnaire

1. Phénomène d'induction .....	1
2. Induction de Lorenz - Circuit mobile et champ magnétique stationnaire .....	3
3. Induction de Neumann - Circuit fixe et champ magnétique variable .....	8

## I. Phénomène d'induction

### 1) Mise en évidence expérimentale

#### a) Expérience de Faraday

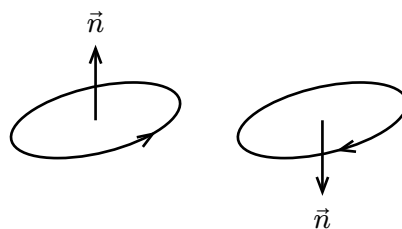
On prend deux bobines de cuivre adjacentes mais qui ne se touchent pas. On alimente une des bobines avec un courant électrique. Si on déplace une des deux bobines, on observe un courant électrique dans l'autre bobine: le courant est transmis « sans fil ».

#### b) Expérience avec un aimant

On observe le même résultat avec un aimant et une bobine électrique. On peut induire un courant dans une bobine en mettant un aimant en mouvement.

### 2) Flux d'un champ magnétique

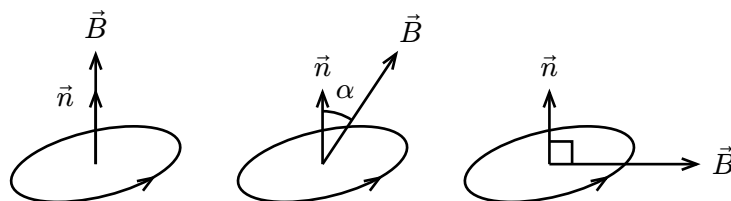
On décide d'un sens pour orienter le contour. Le sens du vecteur normal  $\vec{n}$  dépend du sens pris pour orienter ce contour:



Si on a pris le « mauvais » sens par-rapport au sens du champ magnétique, il faudra rajouter des — un peu partout.

On définit le **flux** du champ magnétique par:

$$\phi = \vec{B} \cdot S\vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{S} \text{ en } \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{Wb (weber)}$$



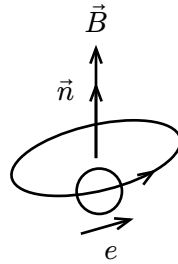
### 3) Loi de Faraday

#### ⊖ THÉORÈME:

Le courant induit dans le circuit est égal à celui produit par un générateur fictif de force électromotrice  $e$  appelée force électromotrice induite dont l'expression est:

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Ainsi, pour obtenir un courant induit, le flux doit **nécessairement être variable**.



#### ⚠ Warn:

Ici, le générateur fictif doit être en convention générateur (après tout, on génère un courant dans le fil).

### 4) Limites de la loi de Faraday

- Il faut qu'on puisse définir un flux à chaque instant. Si, par exemple, à un moment le circuit s'ouvre, on ne peut plus définir de surface, donc on ne peut plus définir de flux. Pourtant, on observera quand même un phénomène d'induction (on peut le montrer avec les équations de Maxwell: 2<sup>ème</sup> année)
- Il faut que les lignes de champ magnétique soient coupées par le flux conducteur. Dans l'autre cas, on doit introduire la notion de flux « coupé », ce qui nécessite à nouveau les équations de Maxwell.

### 5) Loi empirique ou loi de modulation de Lenz

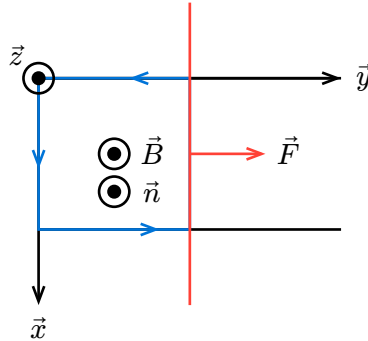
#### ⊖ THÉORÈME:

Les phénomènes d'induction s'opposent aux effets qui les cause.

La loi de Lenz est pratique pour expliquer avec les mains « qu'est-ce qui va se passer ».

## II. Induction de Lorenz - Circuit mobile et champ magnétique stationnaire

### 1) Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique - Cas de la translation - Rails de Laplace générateur



La force de Laplace est ici paramétrée par  $B$  et  $S$ . Ici, le champ magnétique  $B$  est constant, mais la surface de la spire rectangulaire (formée par la boucle de courant) est variable.

D'après la loi de Lenz, la force de Laplace s'oppose aux causes donc elle va ici s'opposer à la force  $\vec{F}$  et freiner la barre, et on obtiendra une génération de courant électrique dans le circuit.

La force  $\vec{F}$  déplace la tige. On considère  $y$  la position horizontale de la barre. La surface de la spire rectangulaire  $S$  vaut  $ay$  avec  $a$  la largeur des rails.

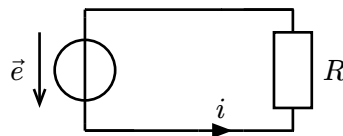
On calcule le flux magnétique:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bay$$

Par le loi de Faraday:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bay) = -Ba\dot{y}$$

On considère le circuit créé, avec  $e$  le générateur fictif et  $R$  la résistance totale du circuit:



Par loi des mailles:

$$e - Ri = 0 \Leftrightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{-Ba\dot{y}}{R}$$

On étudie le système de la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On fait un bilan des actions mécaniques:

- Poids  $m\vec{g}$
- Réaction des rails  $\vec{R} = R\vec{u}_z$  perpendiculaire aux rails
- La force  $\vec{F}$  appliquée sur la barre (inconnue)
- La force de Laplace  $\vec{F}_L$

On a:

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

On intègre sur la longueur de la barre:

$$\overrightarrow{F_L} = iaB\vec{u}_y$$

On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = m\vec{g} = \vec{R} + \vec{F} + \overrightarrow{F_L}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F + F_L \\ &= F + iaB \\ &= F - \frac{Bav}{R}aB \end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 a^2 v}{Rm} = \frac{F}{m}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre:

$$v(t) = v_H(t) + v_P(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{RF}{a^2 B^2}$$

On trouve  $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$

On considère une vitesse initiale nulle:

$$v(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{RF}{a^2 B^2}$$

Donc:

$$v(t) = \frac{RF}{a^2 B^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Dans la limite, on a donc:

$$v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{RF}{a^2 B^2}$$

On calcule la tension générée:

$$e = -Bav = Ri \Leftrightarrow Bav + Ri = 0$$

On fait un bilan énergétique:

✓ Tip:

On multiplie la tension par l'intensité pour obtenir l'énergie du circuit électrique et la force par la vitesse pour obtenir l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} & \begin{cases} Bav + Ri = 0 \\ m \frac{dv}{dt} = F + iaB \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} Bavi + Ri^2 = 0 \\ mv \frac{dv}{dt} = iaBv + Fv \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} Bavi + Ri^2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = iaBv + Fv \end{cases} \end{aligned}$$

On substitue  $iaBv$  par  $-Ri^2$ :

$$Fv = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) + Ri^2$$

Φ Note:

On a  $Fv$  la puissance de la force  $F$ , et  $Ri^2$  la puissance du circuit électrique.

## 2) Freinage par induction

La force de Laplace  $\vec{F}_L$  est proportionnelle à la vitesse:

$$\vec{F}_L = -\frac{a^2 B^2}{R} \vec{v} = -\lambda \vec{v}$$

La force de Laplace va causer un freinage de type frottement fluide proportionnel à la vitesse sur le rail.

On peut donc l'utiliser pour freiner des matériaux magnétiques.

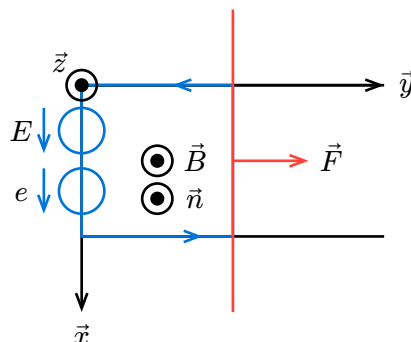
L'énergie de ce freinage n'est pas perdue: il engendre un courant électrique dans le circuit (c'est ce qu'on a vu plus haut dans un cas spécifique) appelé courant de Foucault.

Les pertes par effet joule causent un échauffement du matériau (utilisé dans les plaques à induction par exemple).

On peut utiliser un matériau feuilleté (conducteur, isolant, conducteur, isolant, etc..) pour limiter les courants de Foucaults.

## 3) Conversion de puissance électrique en puissance mécanique - Cas de la translation - Rails de Laplace récepteurs

On reprend presque le même circuit. On rajoute juste une force électrique qui alimente le circuit.



On a par loi des mailles l'équation électrique:

$$E + e - Ri = 0 \Leftrightarrow i = \frac{E + e}{R}$$

Équation mécanique. Sujet: barre dans le référentiel terrestre suppose galiléen. Bilan des actions mécaniques:

- Poids
- Réaction de la tige
- Force de Laplace  $\vec{F}_L$

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_L = iaB\vec{u}_y$$

On projette le PFD sur  $(O_y)$ :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_L$$

$$m \frac{dv}{dt} = iaB$$

$$m \frac{dv}{dt} = aB \frac{E - Bav}{R}$$

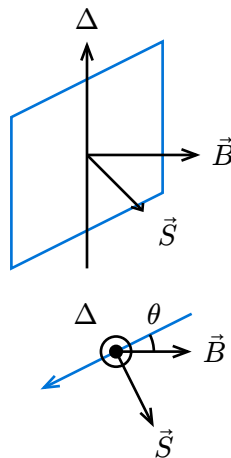
$$m \frac{dv}{dt} + \frac{a^2 B^2}{R} v = \frac{aBE}{R}$$

On résout l'équadiff:

$$v(t) = \left( \frac{\tau}{aB} \right) \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$$

#### 4) Conversion de puissance mécanique en puissance électrique - Cas de la rotation

On prend un cadre métallique orienté par-rapport à un champ électrique.



$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = BS \sin(\theta)$$

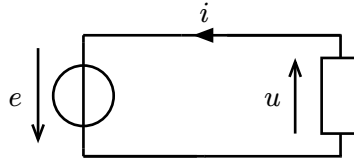
Le cadre va tourner, donc l'angle  $\theta$  va varier au cours du temps.

Si le cadre tourne à vitesse angulaire constante  $\omega$ , on a  $\theta = \omega t$  (module  $\theta_0$  un angle initial)

On a donc  $\phi = BS \sin(\omega t)$

$$\phi = BS$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -BS\omega \cos(\omega t)$$



Par loi des mailles:

$$e - Ri = 0$$

$$\Rightarrow e = -Bs\omega \cos(\omega t)$$

On calcule la force de laplace:

$$\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S}$$

$$\vec{F}_L = \mathcal{M}$$

Donc:

$$\vec{F}_L = -\frac{B^2 S^2 \omega}{R} \cos^2(\omega t) \vec{u}_\theta$$

On fait un bilan des actions mécaniques:

- Poids du cadre (de moment nul)
- Liaison pivot supposée parfaite (donc de moment nul)
- Moment résultant de la force de laplace
- Moment d'entraînement imposé pour faire tourner le cadre  $\Gamma_{\text{ext}}$

Par théorème du moment cinétique:

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = 0$$

$$\Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_L = 0$$

$$\Gamma_{\text{ext}} = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \cos^2(\omega t)$$

$$\langle \Gamma_{\text{ext}} \rangle = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{B^2 S^2 \omega}{2R}$$

On fait un bilan énergétique.

### III. Induction de Neumann - Circuit fixe et champ magnétique variable

#### 1) Phénomène d'auto-induction

Un courant électrique crée un champ magnétique  $\vec{B}$ . Ce champ magnétique fait apparaître un flux propre (car propre au circuit)  $\phi_P = \vec{B} \cdot \vec{S}$ .

Or le champ magnétique  $\vec{B}$  sera proportionnel à l'intensité parcourant le circuit, ce qui nous donne:

$$\phi_P = Li \text{ avec } L \text{ le coefficient d'inductance propre}$$

##### a) Exemple

Soit un solénoïde d'axe  $Ox$ , de longueur  $\ell$  comportant  $N$  spires et de section  $S$  parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Déterminer l'inductance propre du solénoïde.

Donner sa valeur si  $N = 1000$  spires,  $\ell = 20$  cm et une section circulaire de rayon  $R = 5,0$  cm.

Le champ magnétique créé par un solénoïde est donné par la relation  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_x$ .

On s'intéresse à une spire:

$$\phi_P = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_x \cdot S \vec{u}_x = \left( \mu_0 \frac{N}{\ell} S \right) I = LI$$

Pour l'entièreté du solénoïde:

$$\phi_{P,\text{alt}} = N\phi_P$$

Donc:

$$L_{\text{sol}} = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} \text{ avec } S = \pi R^2$$

##### b) Force électromotrice auto-induite

C'est une bobine:

$$e = -\frac{d\phi_P}{dt} = -\frac{d(LI(t))}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

