

PREFAȚĂ

*Pars virtutis disciplina canstat, pars exercitativa, et discas
oportet et quod didicisti agendo confirmes
(O parte a virtuții constă în învățatură, alta să întărești
prin practică ceea ce ai învățat)*

Seneca

În anul 1687 apare lucrarea monumentală a lui Isaac Newton (1642 - 1727) intitulată "*Philosophiae naturalia principia mathematica*" (Principiile matematice ale filozofiei naturale). În această lucrare, Newton a reușit să facă o sinteză completă a mecanicii clasice. Acestei sinteze i-a adăugat legea atracției universale. Prin aceasta a creat premisele succeselor pe care Mecanica urma să le aibă în secolele următoare.

De regulă, o ramură a științei ia naștere prin acumulare treptată de date. Datele experimentale, ipotezele confirmate, legile, se adună timp îndelungat, îmbogățind continuu cunoștințele. Multe din întrebările ce stau la baza unui capitol datează din timpuri imemorabile, iar răspunsurile se conturează pe neobservate, treptat, marcate de contribuțiile unor personalități de seamă. Știința este în general, un edificiu a cărui construcție a început din antichitate. În fiecare etapă de dezvoltare Mecanica s-a îmbogățit mereu cu noi cunoștințe teoretice, care, fie s-au adăugat la cele vechi, fie s-au perfecționat cunoștințele anterioare.

Mecanica stă la baza tuturor disciplinelor tehnice, constituind un fundament pentru dezvoltarea altor științe ale naturii. Volumul de față este un curs universitar și se adresează studenților și cadrelor didactice de la facultățile care au în programă disciplina de mecanică. Materialul cuprinde capitolele de Statică și Cinematică, fiecare din acestea încheindu-se cu un număr semnificativ de aplicații menite să contribuie la o mai bună înțelegere a noțiunilor teoretice. Sunt prezentate și unele aplicații care necesită calcule mai pretențioase, încurajând cititorul să găsească și alte metode de rezolvare. Părțile teoretice și aplicative sunt însoțite de figuri sugestive. Cartea aceasta nu poate oferi o metodă universală perfectă de a rezolva o problemă de mecanică, dar poate că și câțiva pași mărunți spre un asemenea ideal inaccesibil poate ajuta la dezvoltarea priceperii de a rezolva o problemă practică.

A rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieșire dintr-o dificultate, o cale de a feri un obstacol, de a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil. A găsi soluția

unei probleme este o performanță specifică inteligenței, iar inteligența este apanajul distinctiv al speciei umane; se poate spune că, dintre toate îndeletnicirile omenești, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică.

Scopul principal al acestei cărți este ca cititorul să ajungă la un nivel de judecăți care să-i permită să îmbine cunoștințele teoretice, astfel încât să poată rezolva eficient aplicațiile tehnice.

Lucrarea de față se dorește un stimulent pentru viitorii ingineri și profesori, atât în aprofundarea acestei pasionante științe, cât și în abordarea altor discipline conexe. Voi fi recunoscător tuturor acelor care vor comunica observațiile și sugestiile lor de care voi ține seama ulterior.

AUTORUL

CUPRINS

0. INTRODUCERE	12
0.1. Obiectul mecanicii	12
0.2. Corp și punct material	12
0.3. Forța	13
0.4. Diviziunile mecanicii	13
0.5. Principiile fundamentale ale Mecanicii.....	14
CAPITOLUL 1. STATICA	15
1. PROBLEMELE STATICII. PRINCIPIILE STATICII	15
2. STATICA PUNCTULUI MATERIAL	16
2.1. Noțiuni introductive	16
2.2. Reducerea și echilibrul sistemelor de forțe concurente	16
2.3. Echilibrul punctului material	19
2.3.1. Echilibrul punctului material liber	20
2.3.2. Echilibrul punctului material supus la legături	21
2.3.3. Legături ideale ale punctului material.....	22
2.3.4. Legăturile cu frecare ale punctului material	27
3. STATICA SOLIDULUI RIGID	33
3.1. Caracterul de vector alunecător al forței ce acționează un rigid	33
3.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct	34
3.2.1. Proprietățile momentului forței în raport cu un punct.....	34
3.3. Momentul unei forțe în raport cu o axă	35
3.3.1. Proprietățile momentului unei forțe în raport cu o axă	36
3.4. Cupluri de forțe	38
3.4.1. Proprietățile cuplurilor de forțe.....	38
3.4.2. Cupluri echivalente	39
3.5. Reducerea unei forțe în raport cu un punct	43
3.6. Reducerea unui sistem de forțe în raport cu un punct.....	44
3.7. Variația elementelor tursorului cu punctul de reducere	45
3.8. Axa centrală a unui sistem de forțe oarecare	47
3.9. Cazurile posibile de reducere ale unui sistem de forțe oarecare	48
3.10. Teorema lui Varignon pentru sisteme de forțe care se reduc la o rezultantă unică	49
3.11. Reducerea unor sisteme particulare de forțe aplicate unui rigid.....	51
3.11.1. Reducerea unor sisteme de forțe concurente.....	51
3.11.2. Reducerea sistemelor de forțe coplanare prin metoda analitică	52

3.11.3. Metoda grafică de reducere a forțelor coplanare. Poligonul forțelor și poligonul funicular.	54
3.11.4. Reducerea sistemelor de forțe paralele	58
3.11.5. Reducerea a două forțe paralele	62
3.12. Centre de greutate	67
3.12.1. Proprietăți referitoare la centrele de greutate	70
3.12.2. Centrele de greutate ale unor corpuri omogene uzuale	72
3.12.3. Teoremele lui Pappus-Guldin	82
3.13. Echilibrul corpului rigid	84
3.14. Echilibrul rigidului supus la legături fără frecare	85
3.14.1. Reazemul simplu	85
3.14.2. Articulația	88
3.14.3. Încastrarea	90
3.14.4. Legătura prin fir	92
3.15. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare	93
3.15.1. Generalități	93
3.15.2. Frecare de alunecare	93
3.15.3. Frecarea de rostogolire	97
3.15.4. Frecarea de pivotare	99
3.15.5. Frecarea în articulația plană	102
3.15.6 Frecarea firelor	104
4. ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE	106
4.1. Echilibrul sistemelor de puncte materiale	106
4.2. Echilibrul sistemelor de corpuri rigide	108
4.3. Grinzi cu zăbrele	115
4.3.1 Sisteme articulate, generalități	115
4.3.2. Metoda izolării nodurilor	117
4.3.3 Metoda secțiunilor (Ritter)	119
4.3.4. Metoda grafică Maxwell-Cremona	120
5. ECHILIBRUL FIRELOR	122
5.1. Definiții. Ipoteze de calcul.	122
5.2. Echilibrul firului supus la forțe concentrate la extremități	122
5.3. Echilibrul firului supus la forțe distribuite	123
5.4. Echilibrul firului omogen greu	125
5.5. Firul omogen greu foarte întins	129
6. APLICAȚII TEHNICE ALE STATICII	131
6.1. Pârghia	132
6.2. Scripetele simplu	134
6.3. Trolul	135

6.4. Sisteme de scripeti	136
6.5. Surubul	138
CAPITOLUL 2. CINEMATICA	143
7.1 Cinematica punctului material	143
7.2. Elementele cinematice ale mișcării punctului material.....	143
7.2.1. Legea de mișcare.....	143
7.2.2. Traectoria punctului material.....	144
7.2.3. Viteza punctului material.....	145
7.2.4. Accelerația punctului material	146
7.2.5. Hodograful vitezei	147
7.2.6. Invarianții mișcării în raport cu schimbarea reperului	148
7.2.7. Viteza și accelerația unghiulară	148
7.2.8. Viteza și accelerația areolară.....	149
7.3. Studiul mișcării punctului în diferite sisteme de coordonate.....	150
7.3.1. Sistemul de coordonate carteziene.....	150
7.3.2. Sistemul de coordonate polare	152
7.3.3. Sistemul de coordonate cilindrice	155
7.3.4. Sistemul de coordonate sferice	158
7.3.5. Sistemul de coordonate intrinseci (naturale, Frenet)	161
7.4. Cinematica vibrațiilor	165
7.4.1. Generalități.....	165
7.4.2. Vibrația armonică.....	166
7.4.3. Reprezentarea vectorială a vibrațiilor armonice	168
7.4.4. Reprezentarea prin numere complexe a vibrațiilor armonice ..	169
7.4.5. Compunerea vibrațiilor armonice coliniare de aceeași pulsație	170
7.4.6. Compuneri de vibrații coliniare cu pulsații diferite. Fenomenul de bătăi	171
7.4.7. Compunerea vibrațiilor rectilinii armonice ortogonale.....	174
7.4.8. Vibrația amortizată.....	177
7.5. Mișcări particulare ale punctului material	180
7.5.1. Mișcarea rectilinie.....	180
7.5.2. Mișcarea rectilinie uniformă	181
7.5.3. Mișcarea rectiline uniform variată	182
7.5.4. Mișcarea circulară	184
7.5.5. Mișcarea elicoidală	187
7.5.6. Mișcarea punctului material pe o cicloidă	188
7.6. Probleme	190
8. CINEMATICA CORPULUI RIGID	208

8.1. Elementele generale ale mișcării corpului rigid.....	208
8.1.1 Problemele cinematicii corpului rigid.....	208
8.1.2. Legile de mișcare	209
8.1.3 Derivata absolută și relativă a unei funcții vectoriale de timp...211	
8.1.4. Distribuția de viteze și accelerații în mișcarea corpului rigid..213	
8.1.5 Proprietăți generale ale distribuției de viteze.....	214
8.1.6 Proprietățile generale ale distribuției de accelerații.....	218
8.2. Mișcarea generală a corpului rigid.....	219
8.2.1. Studiul vitezelor	220
8.2.2. Axoidele mișcării generale a rigidului	222
8.2.3 Studiul accelerațiilor	223
8.3. Mișcarea de translație a corpului rigid.....	224
8.3.1. Legea de mișcare.....	224
8.3.2. Distribuția de viteze	225
8.3.3. Distribuția de accelerații	226
8.4. Mișcarea de rotație cu axa fixă a corpului rigid.....	227
8.4.1. Legea de mișcare.....	227
8.4.2. Distribuția de viteze	228
8.4.3. Distribuția de accelerații	229
8.5 Mișcare de rototranslație a rigidului.	232
8.5.1 Legea de mișcare.....	233
8.5.2. Distribuția de viteze	233
8.5.3 Distribuția de accelerații	234
8.5.4. Mișcarea de șurub	236
8.6 Mișcarea plan paralelă (plană) a corpului rigid	237
8.6.1 Legea de mișcare.....	237
8.6.2. Distribuția de viteze	239
8.6.3 Metode pentru determinarea distribuției de viteze în mișcarea plan paralelă	242
8.6.4. Distribuția de accelerații	250
8.6.5. Metode pentru determinarea distribuției de accelerații.....	252
8.6.6. Cercurile lui Bresse.....	261
8.7. Mișcarea rigidului cu un punct fix	263
8.7.1. Legile de mișcare	264
8.7.2. Distribuția de viteze în mișcarea rigidului cu punct fix	266
8.7.3. Distribuția de accelerații în mișcarea rigidului cu punct fix	270
8.8. Probleme	275
9. CINEMATICA MIȘCĂRII COMPUSE.....	296
9.1. Mișcarea relativă a punctului material	296

9.1.1. Generalități.....	296
9.1.2. Compunerea vitezelor în mișcarea relativă.....	298
9.1.3. Compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă.....	299
9.2. Compunerea a două mișcări ale corpului rigid	302
9.2.1. Generalități.....	302
9.2.2. Distribuția de viteze	303
9.2.3 Distribuția de accelerații	304
9.3. Compunerea a n mișcări instantanee ale corpului rigid	304
9.3.1. Distribuția de viteze	305
9.3.2 Distribuția de accelerații	307
9.3.3. Cazuri particulare de compuneri de mișcări	311
9.4. Probleme	317
10. APLICAȚII TEHNICE ALE CINEMATICII	335
10.1 Mecanismul bielă-manivelă	335
10.2 Cama	337
10.3 Transmisii prin curele.	338
10.4 Transmisii prin roți cu fricțiune	340
10.5 Transmisii prin roți dințate.....	342
10.5.1. Transmisii prin roți dințate cu axe paralele.....	342
10.5.2 Transmisii prin roți dințate cu axe concurente.....	344
11. ELEMENTE FUNDAMENTALE ALE DINAMICII	345
BIBLIOGRAFIE	365

0. INTRODUCERE

0.1. Obiectul mecanicii

Mecanica este o ramură a științelor naturii care studiază mișcarea mecanică și interacțiunile dintre puncte și corpuri materiale.

Mecanica clasică (newtoniană, teoretică) studiază mișcarea punctului material, a rigidului, a sistemelor de puncte și corpuri materiale, având viteze mici în raport cu viteza luminii ($c=300\,000\text{ km/s}$).

Prin mișcare mecanică se înțelege schimbarea în timp și în spațiu a poziției unui corp material față de un sistem de referință. Dacă un corp material nu-și schimbă poziția față de un reper, el se află în repaus față de acesta.

Materia este o categorie filozofică ce semnifică realitatea obiectivă, independentă de conștiința omului reflectată prin senzații în propria conștiință. Materia este într-o continuă mișcare, ce se desfășoară în timp și spațiu. Timpul caracterizează durata și succesiunea fenomenelor. El este considerat universal și absolut independent. Spațiul real se consideră spațiul euclidian tridimensional E_3 . Spațiul este considerat infinit, continuu, omogen și izotrop.

Rezultatele mecanicii clasice coincid cu cele constatate experimental, fapt ce justifică utilizarea acestor noțiuni simplificate pentru reprezentarea realităților obiective.

0.2. Corp și punct material

O parte anumită de substanță ale cărei elemente sunt legate prin anumite interacțiuni reciproce constituie un corp sau un sistem material. Pentru studiul mișcării corpului se folosesc modele idealizate care aduc simplificări importante. Astfel punctul material este un corp material ce poate fi considerat fără dimensiuni, mișcarea lui de rotație în jurul axelor proprii nu este esențială și poate fi omisă. Punctul material se deosebește pe punctul geometric, deoarece are concentrată în el o anumită cantitate de materie.

Un sistem de puncte materiale este format din mai multe puncte care interacționează. Aceste sisteme pot avea un număr finit sau infinit de puncte.

Sistemele de puncte materiale sunt continue dacă în vecinătatea fiecărui punct se află o infinitate de puncte ale sistemului, iar două puncte arbitrare din sistem, întotdeauna pot fi unite printr-o linie continuă, care conține numai puncte ale sistemului. Dacă una din condiții nu este verificată, sistemul este discontinuu. Un sistem continuu de puncte materiale la care distanțele dintre punctele sistemului rămân invariabile se numește corp rigid.

0.3. Forța

Forța este măsura interacțiunii dintre corpuri, caracterizând transmiterea mișcării de la un corp la altul. Ea are caracter de mărime vectorială, fiind determinată de punctul de aplicație, direcție, sens și mărime (intensitate).

Forța depinde de punctul asupra căruia acționează, deci trebuie considerat un vector legat. În cazul corpurilor rigide se va arăta că punctul de aplicație poate aluneca pe suportul forței, ceea ce înseamnă că forța devine un vector alunecător.

Forțele pot fi măsurate static și dinamic. Metoda statică de măsurare se bazează pe echilibrarea forței de măsurat cu o altă forță cunoscută în prealabil (de exemplu cu dinamometru). Metoda dinamică se bazează pe legea fundamentală a mecanicii $m\vec{a} = \vec{F}$, care permite determinarea forței, dacă este cunoscută masa m a corpului și accelerația \vec{a} în mișcarea lui liberă de translație față de un sistem de referință inerțial.

După modul cum acționează, forțele pot fi clasificate în forțe distribuite spațial (greutatea, forțe electromagnetice) și forțe distribuite superficial (forțelor de apăsare în domeniile de contact ale corpurilor, forțele de frecare). În cazul când suprafețele pe care acționează forțele au dimensiuni mici în comparație cu alte mărimi din problemă, se pot considera forțe distribuite liniar sau forțe concentrate (ce acționează într-un punct).

Forțele mai pot fi clasificate și în exterioare și interioare unui sistem. Forțele interioare reprezintă interacțiunile dintre diferitele părți ale aceluiași sistem. Forțele exterioare reprezintă acțiunile asupra unui sistem material, a corpurilor materiale, altele decât cele care fac parte din sistemul material considerat. După un alt criteriu, forțele pot fi clasificate în forțe direct aplicate și forțe de legătură sau reacțiuni. Forțele direct aplicate sunt în general cunoscute dinainte. Exemple de astfel de forțe sunt greutatea, forța elastică, forțele electromagnetice. Forțele de legătură se datorează existenței unor legături care împiedică anumite deplasări ale corpurilor materiale. Reacțiunile nu sunt cunoscute dinainte. Ele depind de felul legăturii, precum și de forțele direct aplicate corpului. Reacțiunea normală și forța de frecare de aderentă sunt reacțiuni.

Un sistem de forțe este format din mai multe forțe ce acționează simultan asupra corpului. Sistemele de forțe sune echivalente dacă produc același efect asupra corpului dat. Se presupune că un sistem de forțe este echivalent cu zero, dacă nu are nici un efect asupra corpului.

0.4. Diviziunile mecanicii

După natura problemelor care se studiază, mecanica se împarte din punct de vedere didactic în trei părți: statica, cinematica și dinamica.

Statica este partea mecanicii care se ocupă cu studiul sistemelor de forțe echivalente și al condițiilor de echilibru. În această parte a mecanicii nu se ține seama de timp.

Cinematica este partea mecanicii care studiază mișcarea corpurilor fără a ține seama de forțe. Ea face studiul geometric al mișcării.

Dinamica este partea mecanicii care studiază mișcarea corpurilor, ținând seama de forțele care acționează asupra lor. Dinamica este partea cea mai generală a mecanicii. Statica este un caz particular al dinamicii.

0.5. Principiile fundamentale ale Mecanicii

Mecanica se bazează pe un număr de legi sau principii fundamentale (postulate, axiome) care nu pot fi dovedite complet pe cale experimentală sau teoretică. Aceste principii ale Mecanicii (clasice, teoretice) sunt următoarele: a) Principiul inerției: un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atât timp cât nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare.

b) Principiul acțiunii forței: accelerația unui corp este proporțională cu forța aplicată și este îndreptată după direcția după care acționează forța ($\vec{F} = m\vec{a}$, ecuația fundamentală a Dinamicii).

c) Principiul acțiunii și reacțiunii: la orice acțiune corespunde totdeauna o reacțiune egală și contrară.

d) Principiul independenței acțiunii forțelor: efectul produs de o forță asupra unui corp, este independent de efectul celorlalte forțe ce acționează simultan asupra acelui corp.

e) Regula paralelogramului (propoziție): dacă asupra unui punct material acționează simultan două forțe având direcții diferite, efectul este același ca și când asupra punctului ar acționa o forță unică denumită rezultantă și care are ca mărime, direcție și sens diagonala paralelogramului având drept laturi forțele considerate.

CAPITOLUL 1. STATICA

1. PROBLEMELE STATICII. PRINCIPIILE STATICII

În cadrul staticii se rezolvă următoarele două probleme:

a) Reducerea sistemelor de forțe, adică determinarea sistemului de forțe cel mai simplu, echivalent cu un sistem de forțe dat.

b) Echilibrul sistemelor de forțe. Se determină condițiile pentru ca un sistem de forțe să fie în echilibru.

În soluționarea problemelor staticii se folosesc următoarele principii:

a) Principiul acțiunii și reacțiunii.

Se consideră două puncte materiale izolate A_i și A_j . Interacțiunea acestor puncte materiale cu alte corpuri se poate neglija. Principiul acțiunii și reacțiunii afirmă că dacă acțiunea exercitată de particula A_j asupra particulei A_i se reprezintă prin forța \vec{F}_{ij} și dacă \vec{F}_{ji} este forța exercitată de A_i asupra lui A_j , atunci \vec{F}_{ij} și \vec{F}_{ji} au ca suport dreapta A_iA_j și are loc relația $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (fig. 1.1).

b) principiul paralelogramului.

Dacă un punct material A se află în prezența unui mediu material format din punctele materiale B și C , atunci forța \vec{F} cu care acționează acest mediu material asupra lui A , este egală cu suma vectorială a forțelor \vec{F}_1 și \vec{F}_2 care acționează asupra

punctului material A în aceeași stare, dacă el ar fi numai în prezența lui B sau numai în prezența lui C , $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (fig. 1.2).

c) Principiul corpului rigid.

Două forțe \vec{F}_1 și \vec{F}_2 având modulele egale, sensuri contrare ($\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$), același suport A_1A_2 , aplicate unui corp rigid în punctele A_1 și A_2 , alcătuiesc un sistem de forțe în

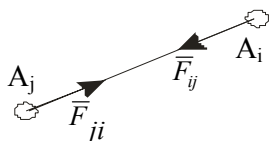


fig. 1.1

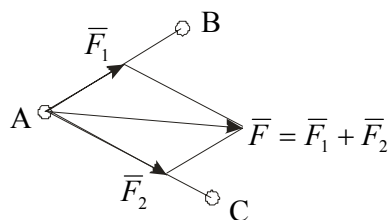


fig. 1.2

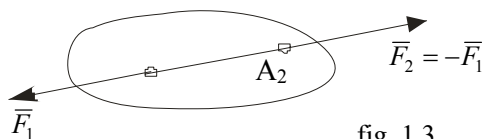


fig. 1.3.

echilibru (fig. 1.3).

16 CAPITOLUL 1. STATICA

d) Principiul forțelor de legătură. Legăturile la care este supus un corp material pot fi înlocuite cu forțe sau sisteme de forțe numite de legătură (reacțiuni), care să producă același efect asupra corpului ca și legăturile înlocuite. Acest principiu permite studiul corpurilor materiale supuse la legături. Asupra unui astfel de corp acționează două categorii de forțe: forțe direct (efectiv) aplicate și forțe de legătură care sunt în general necunoscute.

e) Principiul solidificării (rigidizării). Dacă un sistem deformabil de corpuri rigide, liber sau supus unor legături exterioare, se află în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe direct aplicate, el rămâne în echilibru sub acțiunea acestor forțe și în cazul când ar deveni rigid (nedeformabil), păstrându-și legăturile exterioare inițiale.

2. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

2.1. Noțiuni introductive

În statica punctului material se utilizează o serie de noțiuni, dintre care cele mai importante vor fi definite în cele ce urmează.

Punctul material liber este punctul material care poate ocupa orice poziție în spațiu. Punctul material supus la legături este punctul material căruia i se pune o restricție geometrică (să rămână pe o suprafață sau pe o curbă).

Legătura este bilaterală dacă restricția geometrică nu permite punctului să părăsească legătura (de exemplu o bilă într-un tub de același diametru). Legătura este unilaterală dacă restricția geometrică împiedică deplasarea numai într-un singur sens (de exemplu o bilă pe o suprafață plană).

Prin definiție, numărul gradelor de libertate reprezintă numărul parametrilor scalari independenți, necesari pentru a determina la un moment dat poziția unui punct material sau a unui rigid. Poziția unui punct material în spațiu este determinată cu ajutorul a trei parametri scalari independenți (de exemplu în sistemul cartezian prin coordonatele x, y, z). Punctul material liber în spațiu are trei grade de libertate. Poziția unui punct material pe o suprafață este determinată de doi parametri scalari independenți (de exemplu, dacă suprafața este în planul Oxy , poziția este definită prin coordonatele x și y). Rezultă ca un punct material pe o suprafață are două grade de libertate. Un punct material obligat să rămână pe o curbă, are un singur grad de libertate, deoarece se poate mișca numai în lungul curbei. Introducerea restricțiilor geometrice, adică a legăturilor, reduce numărul gradelor de libertate.

2.2. Reducerea și echilibrul sistemelor de forțe concurente

Forțele concurente sunt forțe care acționează asupra unui punct material și au același punct de aplicație, sau sunt forțe care acționează asupra unui corp rigid și au

suporturile concurente. Fiind date forțele concurente $\vec{F}_i (i=\overline{1,n})$ (fig.2.1) ne propunem să găsim cel mai simplu sistem de forțe care să fie echivalent cu sistemul inițial (reducerea forțelor concurente). Prin aplicarea regulii poligonului, rezultă că sistemul de forțe concurente este echivalent cu o rezultantă unică. Grafic, această rezultantă se determină considerând vectori echipolenți cu forțele date și se construiește poligonul $OA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ numit poligonul forțelor ($\overline{A_{i-1}A_i}$ echipolent cu forța $\vec{F}_i, i=\overline{2,n}$). Rezultanta este vectorul care închide poligonul forțelor:

$$(\vec{R} = \overline{OA_n}) : \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.1)$$

Modulul rezultantei se calculează cu formula:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \cos(\vec{F}_i, \vec{F}_j)} \quad (2.2)$$

Pentru determinarea direcției lui \vec{R} (unghiul dintre rezultanta \vec{R} și o direcție de versor \vec{u}), înmulțim relația (2.1) cu \vec{u} . Rezultă:

$$\cos(\vec{R}, \vec{u}) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n F_i \cos(\vec{F}_i, \vec{u}) \quad (2.3)$$

Analitic, dacă forțele \vec{F}_i sunt date cu ajutorul proiecțiilor lor pe axele unui sistem de axe cartezian, atunci:

$$\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k} \quad (2.4)$$

Proiecțiile X, Y, Z , ale rezultantei pe aceleași axe ($\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$), se obțin din:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n (X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}) = (\sum_{i=1}^n X_i) \vec{i} + (\sum_{i=1}^n Y_i) \vec{j} + (\sum_{i=1}^n Z_i) \vec{k} \quad (2.5)$$

adică:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2.6)$$

Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2.7)$$

iar unghiurile formate de rezultantă cu axele, sunt date de formulele:

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{X}{R}; \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{Y}{R}; \cos(\vec{R}, \vec{k}) = \frac{Z}{R} \quad (2.8)$$

Condiția de echilibru a unui sistem de forțe concurente este:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (2.9)$$

18 CAPITOLUL 1. STATICA

Aceasta înseamnă că poligonul forțelor se închide ($A_n \equiv 0$). Analitic, condiția de echilibru duce la ecuațiile scalare:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \quad (2.10)$$

În particular (pentru $n=2$) două forțe concurente (fig. 2.2), conform regulii paralelogramului, se reduc la:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad (2.11)$$

relație din care deducem:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2.12)$$

Notând $\alpha_1 = \angle(\bar{R}, \bar{F}_1)$, $\alpha_2 = \angle(\bar{R}, \bar{F}_2)$ și aplicând teoreme sinusurilor într-o jumătate a paralelogramului, se obțin relațiile:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin \alpha} \quad (2.13)$$

de unde se pot calcula și unghiurile α_1 și α_2 ce determină direcția rezultantei.

Echilibrul se realizează dacă $\bar{R} = 0$ sau $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$. În acest caz, paralelogramul degenerază, obținându-se situația din fig. 2.3. Astfel, două forțe egale și opuse, aplicate în același punct, formează un sistem de forțe în echilibru.

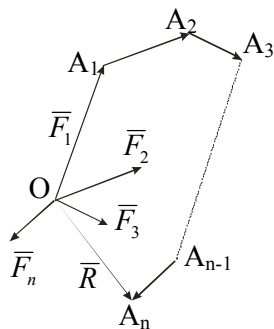


fig. 2.1

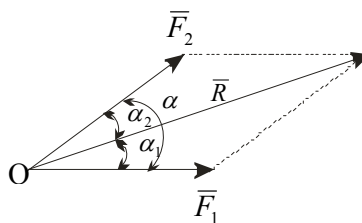


Fig. 2.2

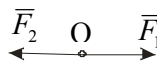


fig. 2.3

Pentru $n=3$, cele trei forțe fiind în spațiu, din regula poligonului forțelor se deduce regula paralelipipedului forțelor. Rezultanta unui sistem de trei forțe concurente este diagonala paralelipipedului construit cu ajutorul celor trei forțe date (fig. 2.4).

Mărimea rezultantei se poate calcula cu relația (2.2) și va fi:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + 2F_1F_2 \cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2) + 2F_1F_3 \cos(\bar{F}_1, \bar{F}_3) + 2F_2F_3 \cos(\bar{F}_2, \bar{F}_3)}$$

iar direcția rezultantei poate fi dată, de exemplu, prin unghiul dintre \vec{R} și \vec{F}_1 , ce se obține din relația (2.3): $\cos(\vec{R}, \vec{F}_1) = \frac{1}{R} [F_1 + F_2 \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2) + F_3 \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_3)]$.

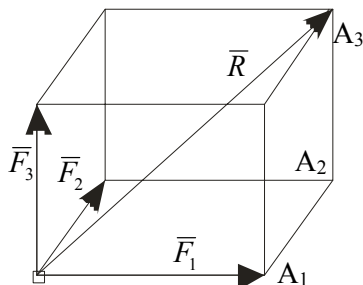


fig. 2.4

Echilibrul celor trei forțe concurențe are loc pentru $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$, deci cele trei forțe trebuie să fie coplanare și, deoarece $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$, se deduce că rezultanta a două dintre ele trebuie să fie egală și de sens opus celei de a treia (fig.2.5). Relația (2.13) devine:

$$\frac{F_1}{\sin(\vec{R}, \vec{F}_2)} = \frac{F_2}{\sin(\vec{R}, \vec{F}_1)} = \frac{F_3}{\sin(\vec{F}_1, \vec{F}_2)}.$$

Ținând seama că $\angle(\vec{R}, \vec{F}_1) = \pi - \angle(\vec{F}_3, \vec{F}_1)$, $\angle(\vec{R}, \vec{F}_2) = \pi - \angle(\vec{F}_2, \vec{F}_3)$, ultima relație se mai scrie:

$$\frac{F_1}{\sin(\vec{F}_2, \vec{F}_3)} = \frac{F_2}{\sin(\vec{F}_3, \vec{F}_1)} = \frac{F_3}{\sin(\vec{F}_1, \vec{F}_2)} \quad (2.14)$$

Aceasta este relația lui Stevin

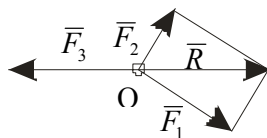


fig. 2.5

Aplicatie: Pentru sistemul de forțe concurențe, coplanare din figura 2.6 în care $F_1 = F_5 = F$, $F_2 = F_3 = 2\sqrt{3}F$, $F_4 = \sqrt{2}F$ cu $F = \text{const.} > 0$, obținem:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = (3 - \sqrt{3})F, \quad Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = \\ &= (3 + \sqrt{3})F, \quad \vec{R} = (3 - \sqrt{3})F\vec{i} + (3 + \sqrt{3})F\vec{j} \Rightarrow R = 2\sqrt{6}F, \\ \cos(\vec{R}, \vec{j}) &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

2.3. Echilibrul punctului material

Un punct material este în echilibru dacă sistemul de forțe ce acționează asupra lui este în echilibru (sau echivalent cu 0). Forțele ce acționează asupra unui

20 CAPITOLUL 1. STATICA

punct material au același punct de aplicație, deci sistemul de forțe ce acționează asupra punctului material este concurent și, conform cu relația (2.9), condiția de echilibru este :

$$\bar{R} = 0 \quad (2.15)$$

unde \bar{R} este rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra punctului material. Relația (2.15) reprezintă și condiția de echilibru a unui corp rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe cu suporturile concurente

Punctul material poate fi liber sau supus la legături.

Un punct material este liber când poate ocupa orice poziție din spațiu, sau când deplasările lui în orice direcție nu sunt împiedicate de prezența altor corpuri. În acest caz, parametrii geometrice

care-i determină poziția nu sunt supuși unor restricții geometrice.

Un punct material este supus la legături când nu poate ocupa orice poziție în spațiu. Deplasările lui în anumite direcții sunt împiedicate de prezența unor corpuri. Parametrii geometrice care-i determină poziția sunt supuși unor restricții geometrice.

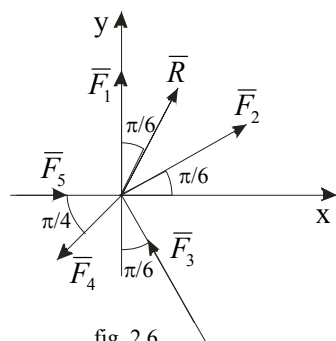


fig. 2.6

2.3.1. Echilibrul punctului material liber

Asupra unui punct material liber acționează numai forțe direct aplicate. Condiția de echilibru (2.15) conduce la:

$$\bar{R} = \bar{R}_d = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (2.16)$$

unde $\bar{F}_i = X_i \bar{i} + Y_i \bar{j} + Z_i \bar{k}, i = \overline{1, n}$ sunt forțele direct aplicate.

Ecuția vectorială (2.16) este echivalentă cu trei ecuații scalare:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = 0; Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0; Z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \quad (2.17)$$

Cum poziția unui punct material în spațiu, este determinată de trei parametrii, rezultă că numărul ecuațiilor de echilibru este egal cu numărul necunoscutelor și deci, se poate determina în general o poziție de echilibru bine definită.

Aplicație: Barele A_1B_1 și A_2B_2 au mijloacele O_1 și respectiv O_2 , iar O_1O_2 este perpendiculară pe fiecare bară. Cunoscând că un punct oarecare M este atras de fiecare element al celor două bare cu forțe proporționale cu lungimea elementului și cu distanța de la element la punctul M (fig. 2.7), factorul de proporționalitate fiind același, să se determine poziția de echilibru a punctului M . Barele au lungimile $2l_1$ și respectiv $2l_2$, iar $O_1O_2=a$.

Rezolvare: Din motive de simetrie, punctul M se va afla în echilibru pe O_1O_2 . Notăm $x = O_1M$. Elementele dy și dy' acționează asupra punctului M cu forțele elementare $d\vec{F}_1$, respectiv $d\vec{F}_2$. Alegând axele ca în figură, se pot scrie:

$$d\vec{F}_1 = -k\sqrt{x^2 + y^2} \frac{x\vec{i} - y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy =$$

$$= -k(x\vec{i} - y\vec{j})dy;$$

$$d\vec{F}_2 = k\sqrt{(a-x)^2 + y'^2} \frac{(a-x)\vec{i} + y'\vec{j}}{\sqrt{(a-x)^2 + y'^2}} dy' =$$

$$= k[(a-x)\vec{i} + y'\vec{j}]dy'$$

Prin integrare, rezultantele fiecărui sistem de forțe sunt:

$$\vec{R}_1 = \int_{l_1}^{l_2} d\vec{F}_1 = -2kx l_1 \vec{i},$$

$$\vec{R}_2 = \int_{l_1}^{l_2} d\vec{F}_2 = -2k(a-x) l_2 \vec{i}.$$

Din condiția de echilibru $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$, se obține :

$$x = \frac{l_2 a}{l_1 + l_2}.$$

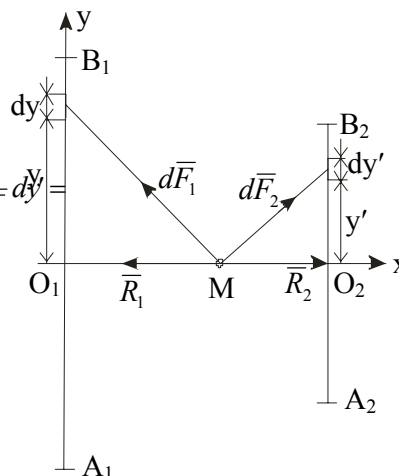


fig. 2.7

2.3.2. Echilibrul punctului material supus la legături

Un punct material supus la legături este un punct supus la restricții geometrice și ca urmare are un număr mai redus de grade de libertate decât un punct liber. Axioma legăturilor postulează că orice legătură poate fi suprimată și înlocuită cu elemente mecanice (forțe, momente) corespunzătoare. Ca urmare, corpul este considerat liber și în consecință echilibrul său se studiază cu ecuațiile stabilite pentru corpul liber.

Asupra punctului material vor acționa două tipuri de forțe, și anume: forțe direct aplicate și forțe de legătură. Din cunoașterea legăturii, forțele de legătură nu sunt complet determinate, deci se vor introduce noi necunoscute pentru determinarea forțelor de legătură. Prin urmare, în ecuațiile de echilibru ale punctului material vor

22 CAPITOLUL 1. STATICA

intervenii două categorii de necunoscute: unele care determină poziția de echilibru a punctului și altele care caracterizează forțele de legătură.

Notând $\bar{R}_d = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ rezultanta forțelor direct aplicate și cu \bar{R}_l rezultanta

forțelor de legătură, condiția vectorială de echilibru va fi:

$$\bar{R}_d + \bar{R}_l = 0 \quad (2.18)$$

Acestei ecuații i se adaugă și ecuațiile legăturilor.

Necunoscutele problemei sunt poziția de echilibru și forțele de legătură.

Legăturile la care poate fi supus un punct material se consideră în mecanica teoretică, ca fiind nedeformabile. Acestea sunt:

- a) suprafețe (punct material obligat să rămână pe o suprafață)
- curbe (punct material obligat să rămână pe o curbă)
- fir (punct material fixat de un fir)

După natura fizică, legăturile pot fi clasificate în:

- a) legături ideale (lucii, fără frecare)
- b) legături neideale (aspre, cu frecare)

2.3.3. Legături ideale ale punctului material

A) Forța de legătură în cazul unui punct material situat pe o suprafață ideală

Se consideră un punct material M rezemat pe suprafața (S) și acționat de rezultanta forțelor direct aplicate \bar{R}_d și reacțiunea \bar{R}_l (egale și opuse) (fig.2.8). Rezultanta forțelor direct aplicate \bar{R}_d poate fi descompusă în componenta normală \bar{R}_n (după normala M_n) și în componenta tangențială \bar{R}_t (după dreapta Δ care rezultă din intersecția planului (P) tangent la suprafața (S) în M, cu planul determinat de normala M_n și rezultanta \bar{R}_d)

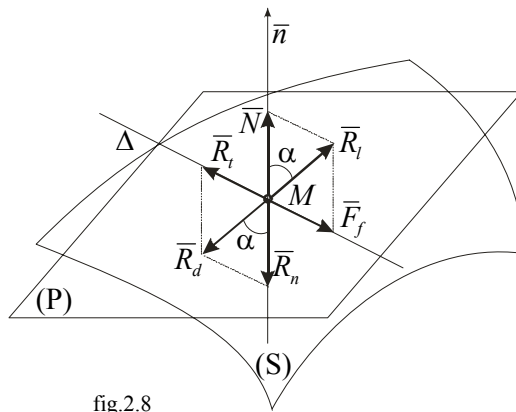


fig.2.8

Analog rezultanta \bar{R}_l se descompune după aceleași direcții în reacțiunea normală \bar{N} și în forța de frecare de alunecare \bar{F}_f . Forța \bar{R}_n caută să îndepărteze

punctul M de pe suprafața (S) și efectul ei este anulat de reacțiunea normală \bar{N} , deci aceste două forțe sunt egale și de sens contrar. Forța \bar{R}_l caută să deplaseze punctul M pe suprafața (S). Cum legătura este fără frecare (lucie, ideală), forța de frecare \bar{F}_f nu poate să apară. Rezultă că pentru echilibrul punctului material supus la legături lucii este necesar ca $\bar{R}_l = 0$ și deci $\bar{R}_l = \bar{N}$.

În concluzie, rezultanta forțelor direct aplicate \bar{R}_d trebuie să fie dirijată după normala la suprafață în punctul respectiv, iar reacțiunea (forța de legătură) este o forță \bar{N} dirijată după normala la suprafață în punctul respectiv. Ecuația de echilibru (2.18) devine:

$$\bar{R} + \bar{N} = 0 \quad (2.19)$$

sau proiectată pe axe:

$$R_x + N_x = 0, R_y + N_y = 0, R_z + N_z = 0 \quad (2.20)$$

În cazul când se cunoaște ecuația analitică a suprafeței: $f(x, y, z) = 0$, parametrii directori ai normalei la suprafață sunt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, prin urmare

$$\bar{N} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \right) = \lambda \text{grad}(f) = \lambda \nabla f, \lambda \in \mathbf{R},$$

astfel că ecuațiile (2.20) împreună cu ecuația suprafeței, se scriu:

$$R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0; R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0; R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0; f(x, y, z) = 0 \quad (2.21)$$

Sistemul (2.21) este de patru ecuații cu patru necunoscute: coordonatele x, y, z , ale poziției de echilibru și parametrul real λ care definește reacțiunea normală \bar{N} . Prin urmare, problema este static determinată. Prin eliminarea lui λ , sistemul (2.21) se mai scrie:

$$f(x, y, z) = 0, \frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (2.22)$$

și are ca necunoscute coordonatele x, y, z .

Ecuațiile (2.21) sau (2.22) reprezintă condițiile analitice de echilibru ale punctului material pe o suprafață ideală.

Aplicație: Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct material greu pe suprafața lucie a elipsoidului de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Rezolvare: (Fig.2.9)

$\bar{R}_d = \bar{G} = +G\bar{k}$. Din ecuația

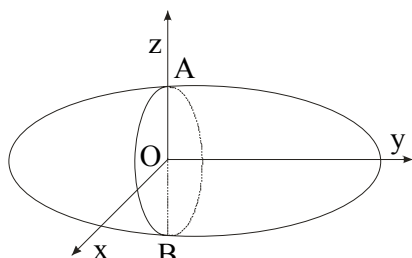


fig.2.9

suprafeței elipsoidului:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

deducem:

$$\bar{R}_l = \bar{N} = \lambda \left(\frac{2x}{a^2} \bar{i} + \frac{2y}{b^2} \bar{j} + \frac{2z}{c^2} \bar{k} \right),$$

iar din (2.22) se deduc condițiile de echilibru date de:

$$\frac{0}{\frac{2x}{a^2}} = \frac{0}{\frac{2y}{b^2}} = \frac{-G}{\frac{2z}{c^2}}. \text{ Rezultă } x = y = 0, z =$$

$\pm c$ și deci pozițiile de echilibru sunt punctele A(0,0,c) și B(0,0,-c).

B) Forța de legătură în cazul unui punct material situat pe o curbă ideală

În cazul unui punct material sprijinit pe curba (C) (fig.2.10) raționând în mod analog paragrafului anterior, apar forțele \bar{R}_d și \bar{R}_l care în cazul echilibrului sunt egale și opuse. Rezultanta \bar{R}_d a forțelor direct aplicate, se descompune în componenta tangențială \bar{R}_t dirijată după tangenta la curbă în M și în componenta normală \bar{R}_n dirijată după dreapta n ce rezultă din intersecția planului (π), normal la curba (C) în M cu planul determinat de tangenta în M la curbă și forța \bar{R}_d . Reacțiunea \bar{R}_l se descompune după aceleași direcții în reacțiunea normală \bar{N} și forța de frecare \bar{F}_f .

Ca și în cazul punctului material rezemat pe o suprafață, forța normală \bar{R}_n , caută să îndepărteze punctul M de pe curbă și este anihilată de reacțiunea normală \bar{N} . Deci, pentru echilibru aceste două forțe \bar{R}_n și \bar{N} , trebuie să fie egale și de sens opus. În cazul unei curbe lucii, adică a unor legături lucii (fără frecare, ideale), forța de frecare \bar{F}_f nu poate să apară și în consecință, pentru echilibru este necesar ca $\bar{R}_t = 0$.

Pentru ca un punct material sub acțiunea unui sistem de forțe să rămână în echilibru pe o curbă fără frecare este necesar ca rezultanta forțelor exterioare \bar{R}_d să fie cuprinsă în planul normal la curbă în punctul respectiv, iar reacțiunea este o forță \bar{N} situată în același plan normal.

Ecuția de echilibru se scrie:

$$\bar{R}_d + \bar{N} = 0 \quad (2.23)$$

Această ecuație vectorială este echivalentă cu trei ecuații scalare. Pe de altă parte, punctul material aflat pe o curbă are un singur grad de libertate, deci o singură necunoscută pentru determinarea poziției de echilibru. Deoarece forța de legătură se

poate descompune după două axe din planul normal, rezultă că ea va introduce încă două necunoscute.

În consecință, problema echilibrului punctului pe o curbă este static determinată, ecuațiile de echilibru fiind suficiente pentru determinarea necunoscutelor problemei.

În cazul când curba este cunoscută prin ecuațiile analitice:

$$f_1(x,y,z) = 0, \quad f_2(x,y,z) = 0 \quad (2.24)$$

forța de legătură \bar{N} este normală la curbă și deci poate fi descompusă după direcțiile ∇f_1 și ∇f_2 în planul normal al curbei. Într-adevăr curba (C) aparținând ambelor suprafețe, normalele la fiecare

din suprafețele date de vectorii ∇f_1 și ∇f_2 , vor fi normale și ale curbei (C). Astfel rezultă:

$$\bar{N} = \lambda_1 \text{grad}(f_1) + \lambda_2 \text{grad}(f_2) \quad (2.25)$$

și deci ecuația (2.23) de echilibru, devine:

$$\bar{R}_d + \lambda_1 \text{grad}(f_1) + \lambda_2 \text{grad}(f_2) = 0 \quad (2.26)$$

Prin proiecții se obține sistemul:

$$R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,$$

$$R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0,$$

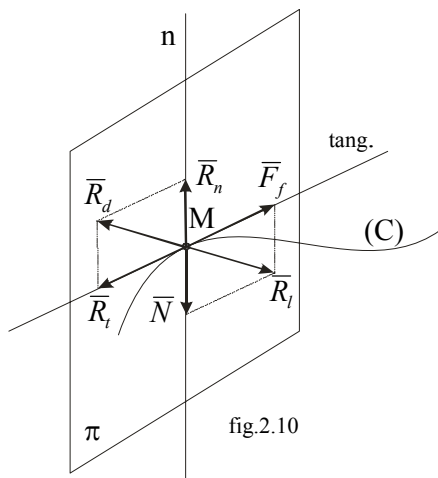
$$R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

$$f_1(x,y,z) = 0, \quad f_2(x,y,z) = 0 \quad (2.27)$$

Acest sistem de cinci ecuații poate fi rezolvat în raport cu cele cinci necunoscute $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$.

Dacă interesează numai pozițiile de echilibru, trebuie să se elimine parametrii λ_1 și λ_2 din (2.27).

Împreună cu ecuațiile (2.24) ale curbei, se obține sistemul din care se deduce poziția de echilibru dată de coordonatele x,y,z :



$$\begin{vmatrix} R_x & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ R_y & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ R_z & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad f_1(x,y,z) = 0, \quad f_2(x,y,z) = 0 \quad (2.28)$$

C) Legătura prin fir

Punctul material M este legat de un alt punct O printr-un fir (fig.2.11) care se consideră perfect flexibil și inextensibil. Asupra punctului M acționează un sistem de forțe direct aplicate având rezultanta \bar{R}_d .

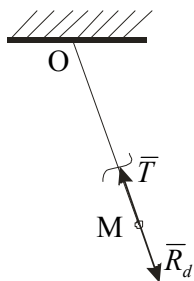


fig 2.11

Deoarece punctul M poate să se deplaseze pe o suprafață sferică, raționamentul făcut anterior este valabil și pentru acest caz. În această situație, forța de legătură este situată tot pe normala la suprafață care coincide cu direcția firului.

Legătura fiind unilaterală, pentru realizarea echilibrului, rezultanta \bar{R}_d trebuie să aibă sensul astfel încât să țină punctul pe legătură. Forța de legătură fiind de sens opus, va fi direcționată cu sensul de la punct spre fir. În cazul legăturii prin fir, forța de legătură se numește tensiune în fir și este direcționată de-a lungul firului având sensul de la punct spre fir.

Dacă firul se înlocuiește cu o tijă rigidă, legătura va fi bilaterală. Forța de legătură pentru această situație este un efort de bară, are direcția barei și poate avea ambele sensuri.

Observatii: În general punctele materiale pot fi supuse simultan la mai multe legături. În acest caz, axioma legăturilor se aplică succesiv, eliminând legăturile și introducând forțele de legătură corespunzătoare. Dar orice legătură la care este supus punctul nu poate să fie decât din categoriile studiate anterior, pentru care caracteristicile forțelor de legătură s-au determinat.

Etapele concrete de rezolvare a problemelor de echilibru pentru punctul material sunt în general: introducerea forțelor direct aplicate, stabilirea parametrilor ce determină poziția de echilibru și numărului gradelor de libertate, introducerea forțelor de legătură, alegerea sistemului de axe de coordonate, scrierea ecuațiilor de proiecții pe aceste axe, rezolvarea sistemului obținut și interpretarea rezultatelor obținute.

Aplicatie: Un punct material M de greutate G, poate aluneca fără frecare pe un cerc (situat într-un plan vertical) de rază R, fiind respins de punctul A, capătul inferior al diametrului vertical, cu o forță \bar{F} invers proporțională cu pătratul distanței

dintre cele două puncte (coeficientul de proporționalitate fiind $k < 8R^2G$). Să se determine pozițiile de echilibru ale punctului pe cerc și reacțiunea cercului (fig.2.12).

Rezolvare: parametrul care definește poziția de echilibru este unghiul $\theta = \angle AOM$. În triunghiul AOM, $AM = 2R \sin \frac{\theta}{2}$ și deci $F = \frac{k}{\left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}$. Ecuația

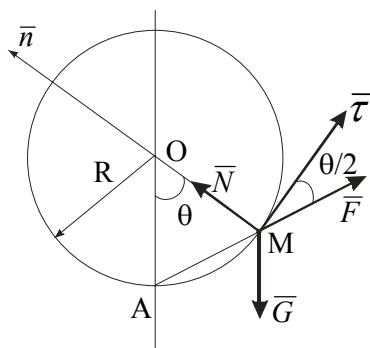


fig 2.12

vectorială de echilibru:

$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F} = 0$ proiectată pe tangenta și normala în M la cerc, conduce la ecuațiile scalare:

$$\frac{k}{\left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} \cos \frac{\theta}{2} - G \sin \theta = 0,$$

$$N - G \cos \theta - \frac{k}{\left(2R \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

Din prima ecuație se obțin:

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0 \quad (\theta_1 = \pi) \text{ sau } \frac{k}{4R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} - 2G \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

$$(\theta_2 = 2 \arcsin \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{k}{R^2 G}}, \quad \theta_3 = 2\pi - 2 \arcsin \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{k}{R^2 G}}).$$

Aceste trei posibilități de echilibru le corespund trei valori pentru reacțiunea N: $N_1 = N(\theta_1) = \frac{k}{4R^2} - G$; $N_2 = N(\theta_2) = G$; $N_3 = N(\theta_3) = G$. Pozițiile de echilibru date de θ_2 și θ_3 sunt simetrice față de verticala AO.

2.3.4. Legăturile cu frecare ale punctului material

În paragrafele precedente am presupus că legăturile sunt ideale și pentru o valoare oricât de mică a componentei tangențiale \vec{R}_t a forțelor direct aplicate, se produce deplasarea corpului material pe care l-am reprezentat printr-un punct material. În realitate se constată că atât timp cât \vec{R}_t nu depășește o anumită valoare, se păstrează echilibrul. Prin urmare, din partea legăturii, pe lângă reacțiunea normală \vec{N}

28 CAPITOLUL 1. STATICA

va acționa și o forță situată în planul tangent numită forță de frecare (\vec{F}_f). Această forță nu este preexistentă și apare numai atunci când există tendința de deplasare sau

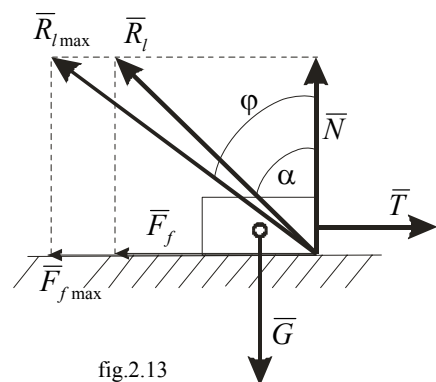


fig.2.13

mișcare relativă a punctului material și legătură. Apariția forțelor de frecare se poate explica prin neregularitățile și asperitățile pe care le prezintă suprafețele corpurilor de contact. Aceste asperități se întrepătrund și opun o rezistență tendinței de deplasare. Corpul prezentat în fig.2.13 va fi în echilibru dacă $0 \leq T \leq T_{\max}$ și va aluneca dacă $T > T_{\max}$. forța de legătură va avea două componente:

$$\vec{R}_l = \vec{N} + \vec{F}_f \quad (2.29)$$

și va forma un unghi α cu direcția normalei la legătură.

Pentru cazul echilibrului, forța de frecare satisface inegalitatea:

$$0 \leq F_f \leq F_{f \max} \quad (2.30).$$

Valoarea maximă a forței de frecare numită de aderență, când poziția de echilibru se numește la limită, se consideră

$$F_{f \max} = \mu N \quad (2.31)$$

unde N este valoarea reacțiunii normale, iar μ este un coeficient adimensional, numit coeficient de frecare sau aderență care depinde de natura și de starea suprafețelor în contact și se determină experimental.

Pentru echilibrul la limită, rezultanta forțelor de legătură

$$\vec{R}_{l \max} = \vec{N} + \vec{F}_{f \max} \quad (2.32)$$

va forma unghiul φ ($\tan \varphi = \mu$), numit unghi de frecare.

Pentru cazul când corpul se deplasează (cu viteza constantă \vec{v}), forța de frecare numită de alunecare, se consideră de forma:

$$\vec{F}_f = -\mu N \frac{\vec{v}}{v} \quad (2.33)$$

Coeficientul de frecare de alunecare poate fi considerat numai în anumite domenii de valori ai vitezei și reacțiunii normale. În realitate $\mu = \mu(v, N)$ și această dependență se manifestă în mod deosebit pentru viteze de alunecare și presiuni mari. Coeficientul de alunecare de frecare depinde și de alți factori cum sunt: lubrefiantul ce se folosește, temperatura din domeniul de contact, timpul cât au stat corpurile în contact etc.

Dintre experiențele făcute asupra forțelor de frecare de alunecare se remarcă cele făcute de Coulomb, care au condus la legile frecării uscate:

1) mărimea forței de frecare de alunecare maximă este direct proporțională cu mărimea reacțiunii normale.

2) mărimea forței de frecare de alunecare depinde de natura și starea corpurilor aflate în contact.

3) mărimea forței de frecare de alunecare nu depinde de viteza relativă de deplasare a celor două corpuri în contact și nici de mărimea suprafețelor în contact.

În problemele de echilibru cu frecare ale punctului material, spre deosebire de punctul material supus la legături ideale, nu va exista o singură poziție de echilibru sau un număr finit de poziții de echilibru ale punctului pe legătură. Dacă legătura este cu frecare, în jurul ei va exista o infinitate de poziții de echilibru cuprinse într-un domeniu de legătură. De aceea condițiile de echilibru în cazul legăturilor cu frecare ale punctului material se exprimă prin inegalități. Considerând un punct material supus la legătura pe o suprafață aspră (S) (fig.2.8), într-o poziție de echilibru a punctului, rezultanta \bar{R}_d a forțelor direct aplicate și rezultanta \bar{R}_l a forțelor de legătură sunt forțe de mărimi egale cu același suport și sensuri opuse. Descompunând rezultanta forțelor de legătură în componentele \bar{N} și \bar{F}_f se poate determina unghiul α dintre rezultanta forțelor de legătură și normala la suprafață:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_f}{N} \quad (2.34)$$

În cazul poziției de echilibru la limită a punctului material pe suprafață, forțele de frecare are valoare maximă și rezultă valoarea maximă α_{\max} pentru acest unghi:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{F_{f \max}}{N} = \mu \quad (2.35)$$

Notând $\varphi = \arctg \mu$ (unghi de frecare), condiția de echilibru se scrie $\alpha \leq \varphi$. Aspectul geometric al problemei echilibrului punctului material cu frecare rezultă din următoarele observații: considerăm punctul rezemat pe o suprafață și schimbând direcția forței în planul tangent, rezultantele \bar{R}_l și respectiv \bar{R}_d vor descrie în acest caz un con, numit con de frecare, care are vârful un punct considerat, axa de simetrie este normala M_n la suprafață și unghiul la vârf 2φ (fig.2.14). Punctul material se găsește în echilibru când reacțiunea \bar{R}_l se află în interiorul conului sau la limită pe generatoarele acestui con. În cazul punctului material rezemat cu frecare pe o curbă, deoarece în planul normal se pot duce o infinitate de conuri de frecare (ca în cazul rezemării pe o suprafață), generatoarele extreme vor descrie axa de simetrie tangentă la curbă în punctul respectiv și unghiul la vârf $2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Punctul material se află în echilibru când \bar{R}_l se găsește în afara conurilor complementare de frecare, sau la limită pe generatoarele acestora.

Studiul analitic se face exprimând unghiul dintre \bar{R}_d și versorul normalei \bar{n} în punctul considerat: $\cos \alpha = \frac{\bar{R}_d \bar{n}}{R_d n}$. Din condiția de echilibru $\alpha \leq \varphi$, rezultă că:

$|\cos \alpha| \geq \cos \varphi$. Dar $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$. Rezultă condiția de echilibru:

$\frac{|\bar{R} \bar{n}|}{R n} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ care conduce la inegalitatea:

$$\frac{\left| R_x \frac{\partial f}{\partial x} + R_y \frac{\partial f}{\partial y} + R_z \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (2.37)$$

la care se adaugă și ecuația suprafeței $f(x, y, z) = 0$.

Dacă în problemă se cer și componentele rezultantei forțelor de legătură pentru pozițiile de echilibru la limită ale punctului pe suprafață, se aplică ecuația vectorială de echilibru la limită:

$$\bar{R}_d + \bar{N} + \bar{F}_{f \max} = 0 \quad (2.38)$$

Notând proiecțiile pe axe ale forței maxime de frecare prin X, Y, Z, care sunt necunoscute, ținând seama de ecuația suprafeței, de expresia reacțiunii normale, iar pe de altă parte impunând condițiile ca forța de frecare maximă să fie perpendiculară pe normala la suprafață și să aibă valoarea maximă, condițiile scalare de echilibru la limită devin:

$$\begin{aligned} R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + X &= 0, & R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + Y &= 0, \\ R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + Z &= 0, \\ f(x, y, z) &= 0, \\ X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} &= 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= \mu^2 \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sistemul de ecuații (2.39) are 6 ecuații cu 7 necunoscute, deci este simplu nedeterminat.

În cazul punctului material supus la legătura pe o curbă aspră, în mod analog se determina unghiul β dintre \bar{R}_l și tangenta la curbă (fig.2.15);

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N}{F_f} \quad (2.40)$$

Pentru echilibru la limită, acest unghi are valoarea minimă β_{\min} :

$$\operatorname{tg} \beta_{\min} = \frac{N}{F_{f \max}} = \frac{1}{\mu} = \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad (2.41)$$

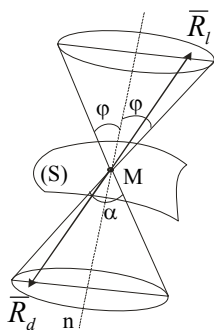


fig.2.14

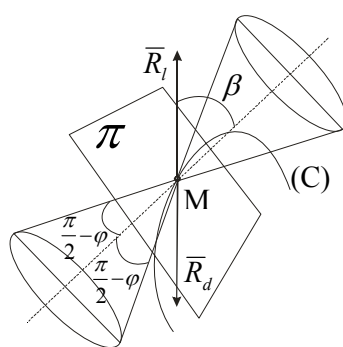


fig.2.15

De aici rezultă că pentru un punct material supus la legătură pe o curbă aspră, condiția de echilibru se exprimă prin

$$\beta \geq \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right). \text{ Ca și punctul}$$

supus la legătură pe suprafața aspră, echilibrul punctului pe curbă se poate aprecia geometric cu ajutorul conului de frecare. În acest caz, conul de frecare are axă

de simetrie tangenta la curbă, iar unghiul la vârf este $2\beta_{\min} = \pi - 2\varphi$. Pentru echilibrul punctului material pe curbă, este necesar ca rezultanta forțelor direct aplicate să fie situată în exteriorul conului de frecare, iar pentru echilibrul la limită să fie situată după o generatoare a conului de frecare. Ecuațiile curbei se pot exprima sub formă parametrică astfel:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (2.42)$$

Un vector tangent la curbă are expresia:

$$\bar{u} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} \quad (2.43)$$

Cosinusul unghiului dintre \bar{R}_d și \bar{u} este dat de

$$\cos \beta = \frac{\bar{R}_d \bar{u}}{R_d u} \quad (2.44)$$

Ținând seama că pentru echilibru este necesar ca $\beta \geq \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$, rezultă

$$|\cos \beta| \leq \sin \varphi. \text{ Dar } \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\mu}{1 + \mu^2}, \text{ deci condiția de echilibru devine}$$

$$\frac{\left| R_x \frac{df}{dx} + R_y \frac{df}{dy} + R_z \frac{df}{dz} \right|}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \sqrt{\left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \left(\frac{df}{dy} \right)^2 + \left(\frac{df}{dz} \right)^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (2.45)$$

Aplicații: 1) Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct material de greutate G pe paraboloidul de revoluție $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 2z = 0$. Coeficientul de frecare de alunecare este μ .

Rezolvare:

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -G, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2. \quad \text{Relația (2.37)}$$

devine: $\frac{|-2G|}{G \sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{a^4} + 4}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 \leq a^4 \mu^2.$ Cum

$$x^2 + y^2 = 2a^2 z, \text{ se deduce condiția de echilibru } z \leq \frac{1}{2} a^2 \mu^2.$$

2) Un inel M de greutate G se află pe un cerc situat într-un plan

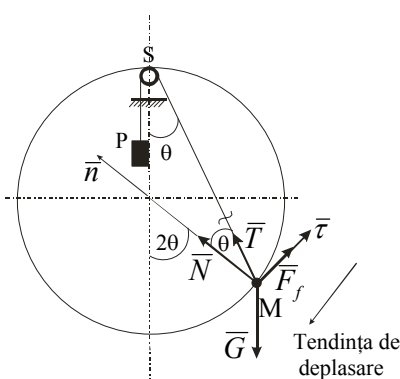


fig.2.16

vertical și este legat de un fir trecut peste un scripete S , situat la capătul superior al diametrului vertical al cercului, la celălalt capăt al firului aflându-se greutatea P , coeficientul de frecare dintre inel și cerc este μ . Să se determine greutatea P pentru echilibru în poziția din figura 2.16, dată de unghiul θ format de verticală cu SM .

Rezolvare: notând cu \bar{N} reacțiunea cercului, cu \bar{T} tensiunea în fir și \bar{F}_f forța de frecare, condiția vectorială de echilibru $\bar{G} + \bar{N} + \bar{T} + \bar{F}_{f \max} = 0$, proiectată pe tangentă și pe normala în M la cerc, pentru

tendința de mișcare din figură, conduce la ecuațiile scalare:

$$T \sin \varphi + F_{f \max} - G \sin 2\theta = 0, \quad N + T \cos \varphi - G \sin 2\theta = 0,$$

$$F_{f \max} = \mu N.$$

$$\text{Deducem } P_{\max} = T_{\max} = G \frac{\sin 2\theta - \mu \cos 2\theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta}.$$

$$\text{Pentru tendința de mișcare inversă, se obține: } P_{\min} = G \frac{\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta}$$

astfel că

$$G \frac{\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \leq P \leq G \frac{\sin 2\theta - \mu \cos 2\theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta}.$$

3. STATICA SOLIDULUI RIGID

În acest capitol se studiază mărimi, operații și teoreme referitoare la forțele ce acționează asupra unui rigid. Rezultatele care se vor obține se pot aplica pentru orice vector alunecător în general.

3.1. Caracterul de vector alunecător al forței ce acționează un rigid

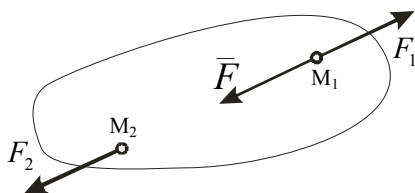


fig.3.1

Deoarece obiectul acestui capitol este corpul rigid, rezultă că un sistem de forțe dat, ce acționează asupra unui corp rigid, i se poate adăuga sau suprima un sistem de două forțe egale, de sens contrar și cu același suport, care este un sistem echivalent cu zero. Noul sistem obținut va fi echivalent cu primul.

Fie forța \vec{F} care acționează asupra unui corp rigid în punctul M_1 . Pe suportul forței se mai consideră un punct M_2 . În punctele M_1 și M_2 se aplică un sistem de forțe echivalent cu zero format din forța $\vec{F}_1 = -\vec{F}$, care acționează în M_1 și forța $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \vec{F}$ ce acționează în M_2 . Ținând seama de faptul că forțele \vec{F} și $\vec{F}_1 = -\vec{F}$ din M_1 sunt echivalente cu zero, rezultă că $\vec{F}_2 = \vec{F}$ din M_2 este echivalentă cu sistemul de forțe inițial, adică cu forța \vec{F} din M_1 (fig.3.1). Rezultă deci că forțele ce acționează asupra unui corp rigid pot fi reprezentate prin vectori alunecători.

3.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct

Pentru a determina efectul unei forțe care acționează asupra unui rigid, se introduce noțiunea de moment al forței. Noțiunea de moment este necesară și pentru a defini o forță care acționează asupra unui rigid, deoarece acesta fiind un vector alunecător nu poate fi definit doar prin proiecțiile ei. Momentul în raport cu punctul O al forței \vec{F} aplicate în A este prin definiție:

$$M_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} \quad (3.1)$$

De obicei în O se consideră originea sistemului de axe și deci se poate scrie:

$$M_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.1')$$

Momentul unei forțe în raport cu un punct exprimă capacitatea forței de a roti un rigid în jurul unei drepte care trece prin punct și este perpendiculară pe planul determinat de suportul forței și punctul respectiv.

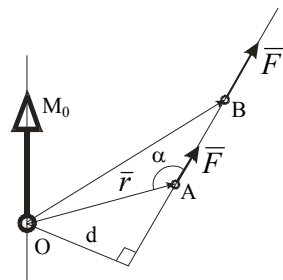


fig.3.2

Ținând seama de proprietățile produsului vectorial, momentul M_0 este un vector aplicat în O, perpendicular pe planul definit de vectorii \vec{r} și \vec{F} și al cărui sens se determină cu regula burghiului drept (sensul de înaintare al burghiului drept așezat în O pe suportul lui \vec{M}_0 , care se rotește la fel cu vectorul \vec{r} dacă acesta s-ar roti sub acțiunea forței \vec{F}) (fig.3.2). Modulul acestui vector este:

$$|\vec{M}_0(\vec{F})| = rF \sin \alpha = dF \quad (3.2)$$

Deci valoarea momentului unei forțe în raport cu un punct este egală cu produsul dintre modulul forței și brațul forței d (distanța de la punct la suportul forței). Din aceste relații se deduce că momentul unei forțe în raport cu un punct este nul când suportul forței trece prin acel punct. Momentul forței în raport cu un punct este un vector legat.

Proiecțiile vectorului $\vec{M}_0(\vec{F})$ se calculează în funcție de coordonatele x,y,z, ale punctului A și de proiecțiile forței pe axe sistemului de referință:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k} \quad (3.3)$$

3.2.1. Proprietățile momentului forței în raport cu un punct

a) Presupunem forța deplasată pe suportul ei având punctul de aplicație în B

(fig.3.2). Momentul ei în raport cu O va fi $\overline{OB} \times \overline{F}$. Dar $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, iar \overline{AB} și \overline{F} sunt coliniari, deci $\overline{OB} \times \overline{F} = \overline{OA} \times \overline{F}$. În concluzie, momentul unei forțe în raport cu un punct nu depinde de caracterul de vector alunecător al forței.

b) Calculând momentul forței \overline{F} în raport cu O_1 : $M_{O_1}(\overline{F}) = \overline{O_1A} \times \overline{F}$ și ținând seama că $\overline{O_1A} = \overline{OA} + \overline{O_1O}$ și $\overline{OA} \times \overline{F} = \overline{M}_O(\overline{F})$ se obține (fig.3.3):

$$\overline{M}_{O_1} = \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{F} \quad (3.4)$$

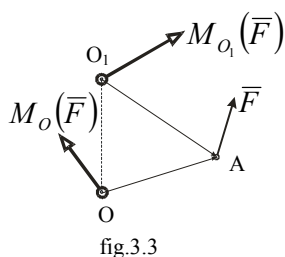


fig.3.3

c) Momentul unei forțe în raport cu un punct este nul când $\overline{F} = 0$ sau când $d = 0$ (suportul forței trece prin punctul față de care se calculează momentul).

d) Momentul unei forțe în raport cu un punct nu se modifică dacă punctul în raport cu care se calculează momentul se deplasează pe o paralelă la suportul forței. Acest lucru rezultă din relația (3.4), unde ultimul termen din al doilea membru este

nul, deoarece vectorii $\overline{OO_1}$ și \overline{F} sunt paraleli.

3.3. Momentul unei forțe în raport cu o axă

Momentul unei forțe în raport cu o axă Δ este proiecția pe axă a momentului forței în raport cu un punct oarecare de pe axă.

Dacă se consideră un punct O de pe axa Δ , momentul forței \overline{F} în raport cu acest punct este dat de relația (3.1), iar proiecția acestui moment pe axa Δ de versor \overline{u} va fi (fig.3.4):

$$M_{\Delta} = \overline{M}_O \cdot \overline{u} \quad (3.5)$$

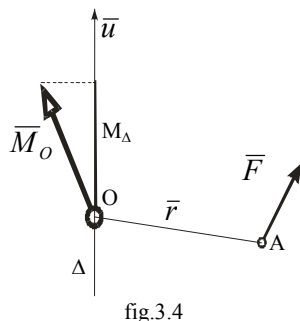


fig.3.4

Aceasta este expresia matematică a momentului față de axa Δ , care, ținând cont de relația (3.1) se scrie:

$$M_{\Delta} = \overline{u} \cdot (\overline{r} \times \overline{F}) \quad (3.6)$$

Se observă că momentul unei forțe în raport cu o axă este o mărime scalară.

Dacă versorul \overline{u} este dat analitic prin $\overline{u} = \cos \alpha \cdot \overline{i} + \cos \beta \cdot \overline{j} + \cos \gamma \cdot \overline{k}$, atunci momentul față de o axă se scrie sub forma:

$$M_{\Delta} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

3.3.1. Proprietățile momentului unei forțe în raport cu o axă

a) Momentul unei forțe în raport cu o axă nu depinde de punctul ales pe axă.

Momentul forței \vec{F} în raport cu un punct O al axei (fig.3.5), la schimbarea punctului din o în O₁, se modifică după legea: $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{OO_1} \times \vec{F}$.

Dacă se înmulțește această relație scalar cu versorul \vec{u} al axei, rezultă:

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (\vec{OO_1} \times \vec{F})$$

Deoarece produsul mixt $\vec{u} \cdot (\vec{OO_1} \times \vec{F})$ este nul, \vec{u} și $\vec{OO_1}$ fiind coliniari, rezultă: $M_{O_1} \cdot u = M_O \cdot u = M_{\Delta}$.

Deci momentul unei forțe în raport cu o axă nu depinde de poziția punctului ales pe axă.

b) Deplasând forța pe suportul ei, momentul forței în raport cu o axă nu se modifică.

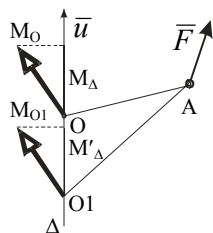


fig.3.5

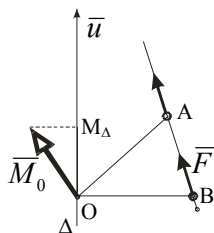


fig.3.6

Într-adevăr, momentul forței în raport cu punctul O este același indiferent dacă punctul de aplicație este în A sau B (fig.3.6). Deci și proiecția pe axa Δ va fi aceeași.

c) momentul unei forțe în raport cu o axă este nul când forța și axa sunt

coplanare.

Conform formulei (3.6), momentul M_{Δ} este nul când cei trei vectori \vec{u} , \vec{r} și \vec{F} sunt coplanari. Este suficient însă ca vectorii \vec{u} și \vec{F} să fie coplanari, căci atunci și \vec{r} va fi în același plan.

d) Momentul unei forțe în raport cu o axă poate fi definit și în modul prezentat în cele ce urmează. Forța \vec{F} se descompune în două componente \vec{F}_1 coliniară cu axa și \vec{F}_2 perpendiculară pe axă (conținută în planul perpendicular pe axă ce trece prin A)(fig.3.7).

Momentul în raport cu axa Δ, este:

$$M_{\Delta} = \vec{u}(\overline{OA} \times \vec{F}) = \vec{u}[\overline{OA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)] = \vec{u}(\overline{OA} \times \vec{F}_2) = \vec{u} \cdot \vec{M}_O(\vec{F}_2)$$

Deoarece $\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{M}_O(\vec{F}_2) \cdot \vec{u}$, se obține: $M_{\Delta} = \pm dF_2$, adică momentul unei forțe în raport cu o axă este valoarea scalară a momentului proiecției acestei forțe pe un plan perpendicular pe axă, față de punctul în care axa intersectează planul.

Aplicatie: Se consideră paralelipipedul OABCDEFGH de laturi $OA = 3a$, $OC = 4a$, $OE = 12a$, care este acționat de forțele $F_1 = 26F$, $F_2 = 10F$, $F_3 = 4F$ dirijate ca în figura 3.8. Să se calculeze momentele față de punctul O al fiecărei forțe și $M_{BD}(\vec{F}_1)$.

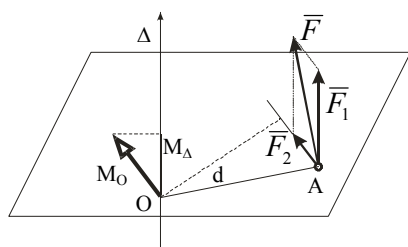


fig.3.7

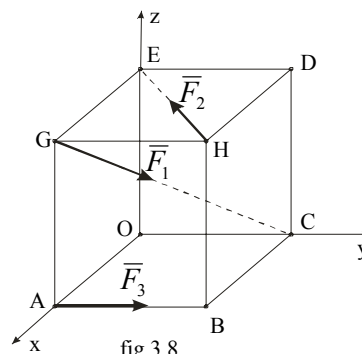


fig.3.8

Rezolvare: Pentru a aplica formula (3.1') vom calcula analitic fiecare forță:

$$\vec{F}_1 = F_1 \frac{\overline{GC}}{GC} = \frac{F_1}{GC} (\overline{GA} + \overline{AO} + \overline{OC}) = -6F\vec{i} + 8F\vec{j} - 24F\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \frac{\overline{HE}}{HE} = \frac{F_2}{HE} (\overline{HD} + \overline{DE}) = -6F\vec{i} - 8F\vec{j}, \quad \vec{F}_3 = F_3\vec{j} = 4F\vec{j}$$

Prin urmare

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \overline{OG} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3a & 0 & 12a \\ -6F & 8F & -24F \end{vmatrix} = -96aF\vec{i} + 24aF\vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \overline{OH} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 12a \\ -6F & -8F & 0 \end{vmatrix} = 96aF\vec{i} - 72aF\vec{j}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_3) = \overline{OA} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3a & 0 & 0 \\ 0 & 4F & 0 \end{vmatrix} = 12aF\vec{k}.$$

$$M_{BD}(\bar{F}_1) = \bar{M}_B(\bar{F}_1) \frac{\overline{BD}}{BD} = \frac{1}{BD} (\overline{BC} \times \bar{F}_1) \overline{BD} = \frac{1}{\sqrt{153a}} \begin{vmatrix} -3a & 0 & 0 \\ -6F & 8F & -24F \\ -3a & 0 & 12a \end{vmatrix} = -\frac{96a}{\sqrt{17}} F$$

3.4. Cupluri de forțe

Se numește cuplu de forțe, un sistem format din două forțe situate pe două suporturi paralele, egale ca mărime și de sensuri opuse (fig.3.9).

Se observă că în acest caz, rezultanta sistemului de forțe va fi nulă:

$$\bar{R} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0 \quad (3.8)$$

Totuși efectul unui cuplu de forțe asupra corpului nu este nul, ceea ce arată că pentru caracterizarea unui sistem de forțe nu este suficient să se considere numai rezultanta.

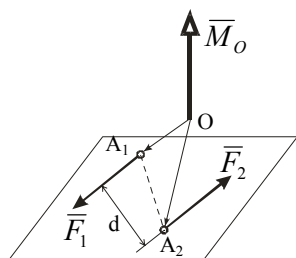


fig.3.9

3.4.1. Proprietățile cuplurilor de forțe

Proiecția unui cuplu de forțe pe orice axă este nulă. Această proprietate se demonstrează considerând o axă Δ de versor \bar{u} și proiectând relația vectorială (3.8) pe aceasta:

$$\bar{F}_1 \bar{u} + \bar{F}_2 \bar{u} = 0 \quad (3.9)$$

Această relație se mai poate scrie:

$$pr_{\bar{u}} \bar{F}_1 + pr_{\bar{u}} \bar{F}_2 = 0 \quad (3.10)$$

Fie un punct oarecare O (fig.3.9). Notând cu \bar{M}_O suma momentelor forțelor în raport cu punctul O, se va obține:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) \quad (3.11)$$

sau, ținând cont că $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$:

$$\bar{M}_O = \overline{OA_1} \times \bar{F}_1 + \overline{OA_2} \times \bar{F}_2 = (\overline{OA_1} - \overline{OA_2}) \times \bar{F}_1 = \overline{A_2A_1} \times \bar{F}_1 \quad (3.12)$$

Se observă că suma momentelor forțelor cuplului nu depinde de poziția punctului în raport cu care se calculează, deci momentul unui cuplu este un vector

liber. Astfel că în locul notației \overline{M}_O pentru momentul cuplului se poate considera simplu \overline{M} .

Prin definiție, suma momentelor forțelor unui cuplu în raport cu un punct este momentul cuplului.

Dacă momentul cuplului nu depinde de poziția punctului în raport cu care se calculează, acest punct poate fi luat chiar A_1 respectiv A_2 . De exemplu presupunând că O coincide cu A_1 va rezulta:

$$\overline{M} = M_{A_1}(\overline{F}_1) + M_{A_1}(\overline{F}_2) \quad (3.13)$$

Dar primul termen al sumei (3.13) este nul și deci obținem:

$$\overline{M} = M_{A_1}(\overline{F}_2) \quad (3.14)$$

Astfel momentul unui cuplu este momentul uneia dintre forțele cuplului în raport cu punctul de aplicație al celeilalte forțe. Această proprietate reduce calculul momentului unui cuplu la acela al momentului unei forțe.

d) Conform relației (3.14) ce exprimă proprietatea anterioară, mărimea momentului unui cuplu este chiar mărimea momentului uneia din forțe în raport cu punctul de aplicație al celeilalte. Astfel, mărimea momentului cuplului va fi dată de relația (3.2), unde brațul forței este chiar distanța dintre suporturile celor două forțe ale cuplului și poartă denumirea de braț cuplului.

Este important de observat că momentul cuplului poate fi nul numai dacă brațul d al cuplului este nul, ceea ce se întâmplă dacă forțele au același suport.

Ținând seama de proprietățile enunțate mai sus, un cuplu de forțe se caracterizează prin momentul său.

3.4.2. Cupluri echivalente

Două cupluri se numesc echivalente dacă produc asupra unui rigid același efect, adică au același moment. Deoarece momentul unui cuplu este un vector liber, rezultă că două cupluri echivalente acționează în același plan sau în plane paralele.

În cele ce urmează se vor prezenta modalități de obținere a unor cupluri echivalente în același plan, în plane paralele sau în plane concurente.

a) vom studia pentru început studiul cuplurilor echivalente în același plan. Considerăm cuplul $(\overline{F}, -\overline{F} = \overline{F}')$ al cărui braț este d_1 (fig.3.10), iar A și B punctele de aplicație ale acestor forțe, arbitrar alese pe suporturile respective. Se unesc punctele A și B apoi prin aceste puncte se duc două drepte paralele cu o direcție arbitrar aleasă. Se descompun forțele \overline{F} și \overline{F}' după cele două drepte care trec prin A și B , obținându-se componentele \overline{P}' și \overline{Q}' . Din considerente geometrice simple se vede că $\overline{P}' = -\overline{P}$ și $\overline{Q}' = -\overline{Q}$. Forțele \overline{Q} și $\overline{Q}' = -\overline{Q}$, acționând pe același suport (care trece prin A și B) își anulează reciproc efectul. În consecință rămân forțele

\vec{P} (aplicată în A) și $\vec{P}' = -\vec{P}$ (aplicată în B), care formează un nou cuplu care îl înlocuiește pe cel inițial. Înmulțind vectorial relația $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$, cu vectorul \vec{AB} , se obține $\vec{AB} \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{P} + \vec{AB} \times \vec{Q}$.

Cum ultimul produs vectorial este nul (vectori coliniari), rezultă $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{P})$ sau în modul: $Fd_1 = Pd_2$. prin urmare, cele două cupluri având același moment (ca modul și sens) sunt echivalente. În continuare, forțele \vec{P} și \vec{P}' pot fi mutate de-a lungul suporturilor lor în C și D, arbitrar alese. Deci dacă în plan se înlocuiește un cuplu cu unul echivalent, este necesar și suficient ca noul cuplu să aibă același moment (alegându-se brațul d_2 , rezultă mărimea P a fiecărei forțe sau alegând mărimea forței, rezultă mărimea brațului).

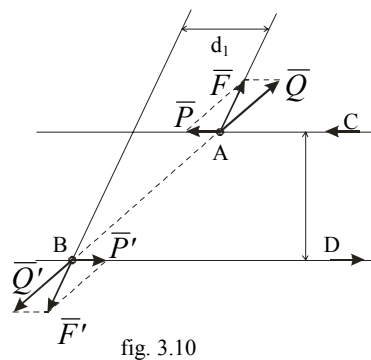


fig. 3.10

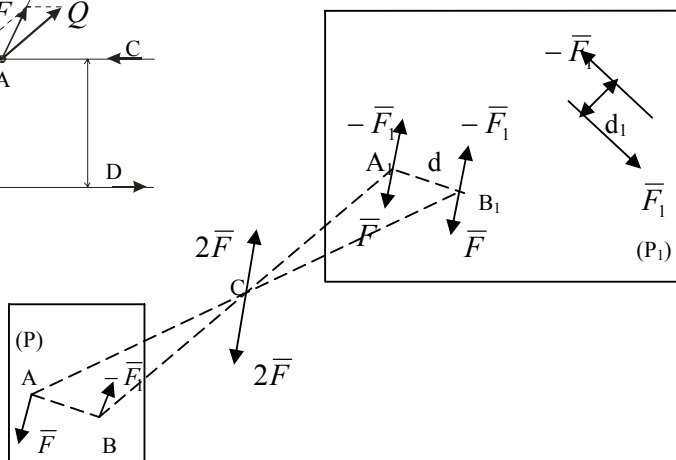


fig. 3.11

b) Vom studia problema cuplurilor echivalente în plane paralele. Se consideră (fig. 3.11) un cuplu în planul P alcătuit din forțele \vec{F} și $-\vec{F}$ cu brațul $AB = d$. Pentru a muta acest cuplu în planul P_1 care este paralel cu P, se construiește în planul P_1 segmentul A_1B_1 paralel și egal cu AB. În punctele A_1 și B_1 se introduce câte o forță \vec{F} și $-\vec{F}$ astfel ca efectul cuplului inițial să nu se modifice. Se unesc punctele A cu B_1 și A_1 cu B. Se poate demonstra cu ușurință că segmentele obținute se intersectează în mijlocul lor C. Forțele \vec{F} din A și B_1 se înlocuiesc cu rezultanta lor ($2\vec{F}$) aplicată în C. Forțele $-\vec{F}$ din A_1 și B se înlocuiesc cu rezultanta lor ($-2\vec{F}$) aplicată în C. Cele două forțe aplicate în punctul C fiind egale și direct opuse, efectul lor se anulează. Rămâne deci cuplul $(\vec{F}, -\vec{F})$ din planul P_1 cu brațul A_1B_1 . se deduce că

$\overline{BA} \times \overline{F} = \overline{B_1A_1} \times \overline{F}$ deoarece vectorii sunt echipolenți. Prin urmare, cele două cupluri din planele paralele P și P₁ având același moment, sunt echivalente. În continuare, așa cum s-a arătat anterior, se poate înlocui cuplul $(\overline{F}, -\overline{F})$ din planul P₁ cu altul echivalent $(\overline{F}_1, -\overline{F}_1)$ din același plan, astfel ca momentul cuplului să rămână nemodificat. În acest fel se transformă cuplul dat $(\overline{F}, -\overline{F})$ din planul P în cuplul echivalent $(\overline{F}_1, -\overline{F}_1)$ din planul P₁.

În concluzie, un cuplu de forțe poate fi înlocuit prin altul echivalent care acționează în același plan sau într-un plan paralel, adică un cuplu care are același moment.

Dacă un rigid este acționat simultan de mai multe cupluri, se pune problema determinării acțiunii lor, operație numită compunerea sau reducerea cuplurilor.

c) Reducerea cuplurilor coplanare și în plane paralele. Se consideră cuplurile de forțe $(\overline{F}_k, -\overline{F}_k)$, $k = \overline{1, n}$. Aceste cupluri pot fi înlocuite cu altele echivalente $(\overline{F}'_k, -\overline{F}'_k)$, $k = \overline{1, n}$, aplicate în aceleași două puncte oarecare A și B, unde AB=d, cu condiția să aibă aceleași momente, adică $\overline{M}_k = \overline{A_kB_k} \times \overline{F}_k = \overline{AB} \times \overline{F}'_k$, $k = \overline{1, n}$ sau în modul $F_k d_k = F'_k d$, $k = \overline{1, n}$.

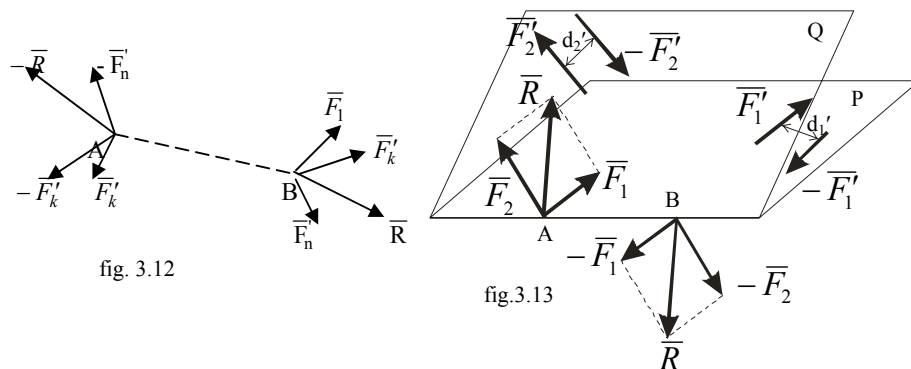
În consecință în punctele A și B sunt aplicate forțe concurente care au rezultantele $-\overline{R}$ și respectiv \overline{R} (fig.3.12). Acestea formează un nou cuplu de moment

$$\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{R}, \text{ adică } \overline{AB} \times \overline{R} = \overline{AB} \times \overline{F}'_1 + \dots + \overline{AB} \times \overline{F}'_n \text{ sau:}$$

$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n$ sau încă $M_1 + M_2 + \dots + M_n$, deoarece toți vectorii sunt coliniari și suma devine algebrică.

În concluzie, dacă se reduc mai multe cupluri coplanare sau din plane paralele, se obține tot un cuplu situat în același plan, al cărui moment are mărimea egală cu suma algebrică a cuplurilor componente.

d) Reducerea cuplurilor situate în plane concurente. Se consideră cuplurile de



42 CAPITOLUL 1. STATICA

forțe $(\vec{F}_1', -\vec{F}_1')$ din planul P și $(\vec{F}_2', -\vec{F}_2')$ din planul Q (fig.3.13).

Conform proprietăților de echivalență se pot muta punctele de aplicație ale forțelor în punctul A, respectiv B, aflate pe dreapta de intersecție a planelor P și Q.

Dar în punctul A se poate scrie:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (3.15)$$

Relație care înmulțită vectorial cu \vec{BA} , va da

$$\vec{BA} \times \vec{R} = \vec{BA} \times \vec{F}_1 + \vec{BA} \times \vec{F}_2 \quad (3.16)$$

Primul membru reprezintă momentul forței rezultante, iar în termenii din membrul doi apar momentele forțelor \vec{F}_1 și respectiv \vec{F}_2 adică:

$$\vec{M}_B(\vec{R}) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) + \vec{M}_B(\vec{F}_2) \quad (3.17)$$

Se observă că acestea sunt chiar momentele corespunzătoare ale cuplurilor, ceea ce se scrie:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad (3.17')$$

Prin urmare se obține un cuplu rezultat care are momentul egal cu suma momentelor date.

e) În cazul general de reducere a cuplurilor, se poate trage concluzia că mai multe cupluri se pot compune dând naștere unui cuplu rezultat, al cărui moment este rezultanta momentelor cuplurilor date. Considerând cuplurile cu momentele \vec{M}_i , $i = \overline{1, n}$, cuplul rezultat va avea momentul:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n \quad (3.18)$$

Dacă se alege ca punct de referință originea O, conform definiției momentului unei forțe se va găsi:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{2n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (3.19)$$

unde se observă că apar momentele celor 2n forțe ale cuplurilor.

Sunt posibile următoarele cazuri:

a) $\vec{M} = 0$ care corespunde echilibrului

b) $\vec{M} \neq 0$ care corespunde unui cuplu rezultat cu momentul \vec{M}

În concluzie, trebuie arătat că în locul cuplurilor se pot considera momentele lor, ceea ce simplifică mult rezolvarea problemelor.

Aplicație: Asupra paralelipipedului OABCDEHG din fig.3.14, având muchiile $OA = a$, $OC = 2a$, $OE = 3a$, acționează trei cupluri. Să se determine mărimea și direcția momentului cuplului rezultat. Se dau:

$$F_1 = 2F; F_2 = \sqrt{10}F; F_3 = 2\sqrt{5}F.$$

Rezolvare: Expresiile analitice ale forțelor sunt:

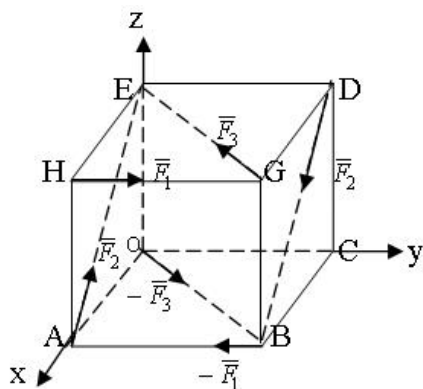


fig. 3.14

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{j} = 2F\vec{j},$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \frac{\vec{AE}}{AE} = -F\vec{i} + 3F\vec{k},$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \frac{\vec{GE}}{GE} = -2F\vec{i} - 6F\vec{j}.$$

Momentele cuplului sunt:

$$\vec{M}_1 = \vec{AH} \times \vec{F}_1 = -6aF\vec{i},$$

$$\vec{M}_2 = \vec{BA} \times \vec{F}_2 = -6aF\vec{i} - 2aF\vec{k},$$

$$\vec{M}_3 = \vec{OE} \times \vec{F}_3 = 18aF\vec{i} - 6aF\vec{j}$$

Cuplul rezultat obținut prin compunerea celor trei cupluri, are

momentul:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 6aF\vec{i} - 6aF\vec{j} - 2aF\vec{k}, \text{ iar modulul } M = 2\sqrt{19}aF.$$

Direcția este dată de următorii cosinusi directori:

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{19}}, \cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{19}}, \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{19}}.$$

3.5. Reducerea unei forțe în raport cu un punct

A aduce o forță \vec{F} aplicată în punctul A în raport cu un alt punct O, înseamnă a găsi elemente mecanice (forțe și cupluri) care depind de O și care să fie echivalente cu forța dată. Pentru aceasta se adaugă

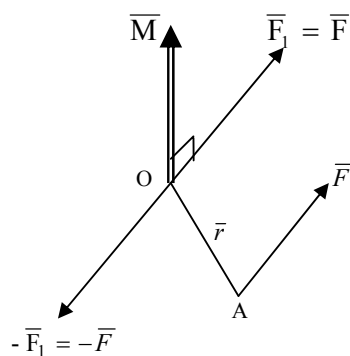


fig. 3.15

sistemului format din forța \vec{F} aplicată în A un sistem echivalent cu zero format din două forțe aplicate în O, \vec{F}_1 și $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, prima având același modul, aceeași direcție și același sens cu forța aplicată în A ($\vec{F} = \vec{F}_1$) (fig. 3.15). Forța \vec{F} aplicată în A și forța $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ aplicată în O formează un cuplu caracterizat prin momentul său $\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F}$, care este un vector liber, dar depinde de punctul O față de care se face reducerea. Se ajunge astfel la concluzia că o

forță aplicată în A este echivalentă cu aceeași forță aplicată în punctul față de care se face reducerea și un cuplu de forțe al cărui vector moment este egal cu momentul

forței date în raport cu punctul față de care se face reducerea. Aceste două elemente mecanice, forța \vec{F} reprezentată printr-un vector alunecător și un cuplu de forțe reprezentat prin vectorul liber \vec{M}_O formează elementele tursorului de reducere în raport cu punctul O al forței \vec{F} aplicată în A, notat cu $\tau_O(\vec{F}, \vec{M}_O)$. Cele două elemente ale tursorului \vec{F} și \vec{M}_O sunt perpendiculare. Pentru rezolvarea problemei inverse, presupunem cunoscut tursorul de reducere în punctul O format din forța \vec{F} și cuplul de moment \vec{M}_O perpendiculare (fig.3.16).trebuie să determinăm suportul forței \vec{F} de la care a provenit tursorul dat.

Pentru simplificare, se consideră vectorul \vec{OA}_O perpendicular pe suportul forței. Dar momentul forței \vec{F} în raport cu punctul O dat de $\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F}$, conform proprietăților momentului, se mai poate scrie:

$$\vec{M}_O = \vec{OA}_O \times \vec{F} \quad (3.20)$$

Prin înmulțire vectorială cu \vec{F} , relația (3.20) devine: $\vec{F} \times \vec{M}_O = F^2 \vec{OA}_O - (\vec{F} \cdot \vec{OA}_O) \times \vec{F}$. Al doilea termen al membrului drept este nul, deoarece vectorul \vec{OA}_O este perpendicular pe forța \vec{F} . Prin urmare, se obține

$$\vec{OA} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} \quad (3.21)$$

Dar $\vec{r} = \vec{OA} + \vec{A_OA}$, astfel ecuația vectorială a suportului forței \vec{F} va fi:

$$\vec{r} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}}{F^2} + \lambda \vec{F} \quad (3.22)$$

unde λ este un parametru variabil.

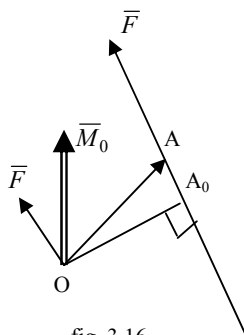


fig. 3.16

3.6. Reducerea unui sistem de forțe în raport cu un punct

Fiind dat sistemul de forțe $\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}$ aplicate în punctele $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$ (fig.3.17), se reduce fiecare forță a sistemului în raport cu punctul $O(0,0,0)$. Se obțin n forțe concurente echivalente cu o rezultantă $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \bar{i} + \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \bar{j} + \left(\sum_{i=1}^n Z_i \right) \bar{k} \quad (3.23)$$

și n cupluri cu momentele $\bar{M}_i = \overline{OA_i} \times \bar{F}_i$, $i = \overline{1, n}$ echivalente cu un cuplu rezultat având momentul $\bar{M}_O = M_{Ox} \bar{i} + M_{Oy} \bar{j} + M_{Oz} \bar{k}$:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\overline{OA_i} \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} \quad (3.24)$$

Prin urmare, un sistem de forțe se reduce într-un punct la un sistem format din rezultanta forțelor și un cuplu rezultat, având momentul egal cu suma momentelor forțelor în raport cu punctul considerat.

În urma reducerii se obține sistemul format din cele două elemente \bar{R} și \bar{M}_O care formează torsorul de reducere al sistemului de forțe în raport cu punctul O, unghiul dintre elementele torsorului de reducere în general este diferit de $\frac{\pi}{2}$.

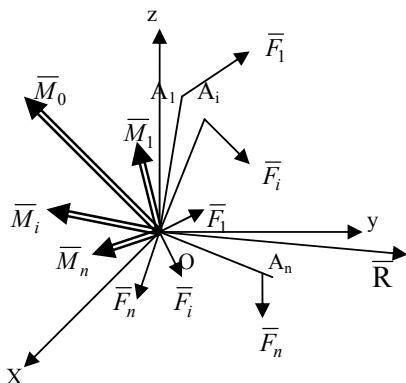


fig. 3.17

Un caz particular deosebit apare dacă într-un punct O prin reducere, cele două componente sunt nule, adică $\bar{R} = 0$ și $\bar{M}_O = 0$.

Din punct de vedere fizic, aceasta înseamnă că torsorul are efect nul. Se spune că un astfel de sistem de forțe este în echilibru sau că este echivalent cu 0.

3.7. Variația elementelor torsorului cu punctul de reducere

Am văzut că sistemul de forțe se reduce într-un punct O la torsorul $\tau_O(\bar{R}, \bar{M}_O)$. Dacă același torsor se reduce în punctul O_1 , se va obține un alt torsor $\tau_{O_1}(\bar{R}_1, \bar{M}_{O_1})$.

Deoarece același sistem de forțe s-a redus în punctul O respectiv O_1 , între elementele torsorului de reducere din cele două puncte se pot stabili relații de legătură.

Vom folosi proprietățile de reducere stabilite anterior, mutând elementele tursorului de reducere din punctul O în punctul O_1 (fig.3.18).

Conform celor arătate la reducerea unei forțe într-un punct, momentul \overline{M}'_O este chiar momentul forței \overline{R} în raport cu punctul O_1 , adică:

$$\overline{M}'_O = \overline{O_1O} \times \overline{R} = -\overline{OO_1} \times \overline{R} \quad (3.25)$$

Întrucât \overline{M}_O este momentul unui cuplu, el se transpune direct, astfel că

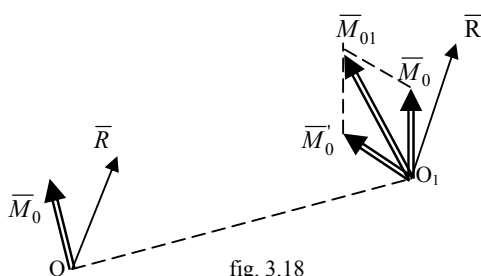


fig. 3.18

momentul rezultat în punctul O_1 va fi: $\overline{M}_{O1} = \overline{M}_O + \overline{M}'_O$, sau ținând seama de (3.2):

$$\overline{M}_{O1} = \overline{M}_O - \overline{OO_1} \times \overline{R} \quad (3.26)$$

Prin urmare, elementele tursorului de reducere la schimbarea punctului de reducere se modifică astfel:

$$\overline{R}_1 = \overline{R} \quad (3.27)$$

$$\overline{M}_{O1} = \overline{M}_O - \overline{OO_1} \times \overline{R} \quad (3.28)$$

Pentru a putea interpreta ușor legile de variație ale elementelor tursorului de reducere, se vor evidenția invarianții sistemului de forțe. Prin invarianți se înțeleg acele mărimi care nu se modifică atunci când variază punctul de reducere.

După cum se observă în relația (3.27), un prim invariant al sistemului de forțe este rezultanta \overline{R} care, în orice punct s-ar face reducerea, este aceeași.

Pentru obținerea celui de-al doilea invariant, se înmulțește scalar relația (3.28) cu vectorul \overline{R} . Se obține:

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_{O1} = \overline{R} \cdot \overline{M}_O - \overline{R} \cdot (\overline{OO_1} \times \overline{R}) \quad (3.29)$$

unde se observă că produsul mixt este nul.

Ținând seama de invariantul (3.27), relația (3.29) se va putea scrie:

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_{O1} = \overline{R} \cdot \overline{M}_O \quad (3.30)$$

ceea ce arată că $\overline{R} \cdot \overline{M}_O$ este un nou invariant.

Prin urmare, al doilea invariant al sistemului de forțe este produsul scalar $\overline{R} \cdot \overline{M}_O$ dintre elementele tursorului de reducere într-un punct.

Notând prin M_R proiecția momentului \overline{M}_O pe direcția rezultantei \overline{R} , adică $\overline{M}_R = pr_{\overline{R}} \overline{M}_O$, cel de-al doilea invariant se mai poate scrie: $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = \overline{R} \cdot \overline{M}_R$.

Se constată că mărimea

$$\bar{M}_R = \frac{XM_{Ox} + YM_{Oy} + ZM_{Oz}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \quad (3.31)$$

este tot un invariant al sistemului de forțe, deoarece este câtul primilor doi invarianti.

Presupunând că într-un anumit punct A momentul rezultat este colinar cu rezultanta, conform proprietății de invarianță (3.31), rezultă că mărimea momentului trebuie să fie chiar M_R . Ca urmare, momentul rezultat într-un astfel de punct va fi:

$$\bar{M}_R = M_R \frac{\bar{R}}{R}, \text{ sau introducând expresia (3.31):}$$

$$\bar{M}_R = \left(\frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R^2} \right) \bar{R} \quad (3.32)$$

Deoarece momentul \bar{M}_O nu poate avea mărimea mai mică decât M_R , rezultă că cea mai mică valoare a momentului este M_R . Momentul corespunzător M_R dat de relația (3.32) poartă numele de moment minimal, iar torsorul de reducere (\bar{R}, M_R) , cuprinzând momentul minimal M_R , torsor minimal.

Este ușor de observat că dacă s-a găsit un punct în care torsorul de reducere este minimal, atunci orice alt punct de pe suportul rezultantei se bucură de aceeași proprietate.

3.8. Axa centrală a unui sistem de forțe oarecare

Forma cea mai simplă la care poate fi redus un sistem de forțe este momentul minimal. Locul geometric al punctelor din spațiu unde prin reducerea unui sistem de forțe se obține un torsor minimal se numește axă centrală.

Fie \bar{R} și \bar{M}_O elementele obținute prin reducerea sistemului de forțe $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ în raport cu O (fig.3.19). Dacă P este unul dintre punctele locului geometric căutat, făcând reducerea sistemului de forțe în raport cu P, se obține torsorul de reducere $\tau_P(\bar{R}, \bar{M}_P)$.

Elementele acestui torsor au expresiile:

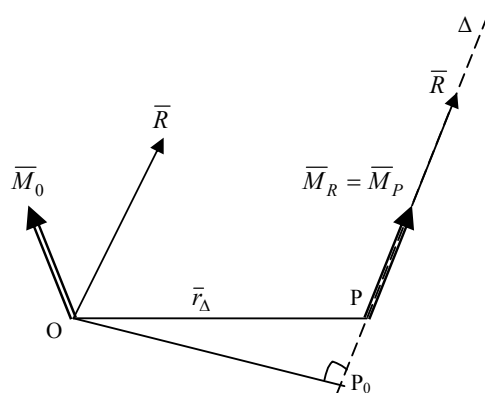


fig. 3.19

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad \bar{M}_p = \bar{M}_O + \overline{PO} \times \bar{R} \quad (3.33)$$

Și cum cei doi vectori sunt coliniar, se poate pune $\bar{M}_p = \lambda_1 \bar{R}$ cu λ_1 arbitrar.

Cu notația $\bar{r}_\Delta = \overline{OP}$, cea de-a doua relație (3.33) devine:

$$\begin{aligned} \bar{M}_p &= \bar{M}_O - \bar{r}_\Delta \times \bar{R} \text{ sau} \\ \lambda_1 \bar{R} &= \bar{M}_O - \bar{r}_\Delta \times \bar{R} \end{aligned} \quad (3.33')$$

Înmulțind la stânga vectorial cu \bar{R} ultima expresie, se obține

$$\begin{aligned} \bar{R} \times \bar{M}_O - \bar{R} \times (\bar{r}_\Delta \times \bar{R}) &= 0 \\ \bar{R} \times \bar{M}_O - \bar{r}_\Delta R^2 + (\bar{R} \cdot \bar{r}_\Delta) \bar{R} &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ecuția (3.34) reprezintă ecuația vectorială a unei drepte paralele cu suportul rezultantei care trece prin punctul P_O , având față de O vectorul de poziție $\overline{OP}_O = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{R^2}$. În orice punct de pe această axă, torsorul de reducere al sistemului

fiind minim, valoare momentului este egală cu proiecția sa pe suportul rezultantei.

Dreapta Δ obținută pe această cale, reprezintă axa centrală a sistemului de forțe dat. Ecuțiile analitice ale axei centrale în raport cu un sistem cartezian $Oxyz$, se obțin proiectând relația (3.33') pe cele trei axe: $\lambda_1 X = \bar{M}_{Ox} - (yZ - zY)$, $\lambda_1 Y = \bar{M}_{Oy} - (zX - xZ)$, $\lambda_1 Z = \bar{M}_{Oz} - (xY - yX)$ sau prin eliminarea parametru-

lui λ_1 :

$$\frac{\bar{M}_{Ox} - (yZ - zY)}{X} = \frac{\bar{M}_{Oy} - (zX - xZ)}{Y} = \frac{\bar{M}_{Oz} - (xY - yX)}{Z} \quad (3.35)$$

Dreapta astfel obținută prin intersecția a două plane, trece prin punctul $P_O(x_O, z_O, y_O)$, de coordonate:

$$x_O = \frac{Y\bar{M}_{Oz} - Z\bar{M}_{Oy}}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad y_O = \frac{Z\bar{M}_{Ox} - X\bar{M}_{Oz}}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad z_O = \frac{X\bar{M}_{Oy} - Y\bar{M}_{Ox}}{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3.36)$$

Axa centrală este definită dacă $\bar{R} \neq 0$, adică $X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$.

3.9. Cazurile posibile de reducere ale unui sistem de forțe oarecare

Pe baza teoriei invarianților sistemului de forțe, se pot separa cazurile de reducere în funcție de rezultatul reducerii. Astfel precizarea cazurilor de reducere se face cu ajutorul celor doi invarianți, presupunând cunoscute elementele torsorului de reducere în punctul O .

Cazul 1: $\bar{R} \cdot \bar{M} \neq 0$, implică $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ și unghiul dintre \bar{R} și \bar{M} diferit de $\frac{\pi}{2}$. Din relația (3.31) se deduce $\bar{M}_r \neq 0$, deci momentul minimal \bar{M}_R diferit de zero. În consecință, sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal $\tau_{\min}(\bar{R}, \bar{M}_R)$ situat pe axa centrală care este bine determinată.

Cazul 2: $\bar{R} \cdot \bar{M} = 0$, dar $\bar{R} \neq 0$. Conform relației (3.31), momentul minimal este nul și deci torsorul minimal este format numai din rezultanta \bar{R} . Astfel, sistemul de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală. Acest caz apare fie dacă $\bar{M}_O = 0$, ceea ce arată că punctul inițial O se află pe axa centrală, fie dacă unghiul dintre elementele tursorului din punctul O este egal cu $\frac{\pi}{2}$ și atunci punctul O nu se află pe axa centrală.

Cazul 3: $\bar{R} = 0$, $\bar{M} \neq 0$, ceea ce implică $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$. Sistemul de forțe se reduce la un cuplu de moment \bar{M}_O .

Cazul 4: $\bar{R} = 0$, $\bar{M} = 0$. Torsorul de reducere în punctul O al sistemului de forțe este nul, deci în acest caz sistemul de forțe este în echilibru.

Orice sistem de forțe trebuie să se încadreze în unul dintre aceste patru cazuri de reducere.

3.10. Teorema lui Varignon pentru sisteme de forțe care se reduc la o rezultantă unică

În cazul că sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică (cazul 2), se poate stabili o relație de legătură între momentul resultant \bar{M}_O și momentul rezultantei \bar{R} . Astfel, dacă se notează cu \bar{r}_A vectorul de poziție al unui punct P de pe axa centrală, în raport cu punctul O, relația (3.33') în care $\lambda_1 \bar{R} = \bar{M}_P = \bar{M}_R$, devine:

$$\bar{M}_R = \bar{M}_O - \bar{r}_A \times \bar{R} \quad (3.37)$$

În particular, dacă sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică, deci $\bar{M}_R = 0$, din relația (3.37) rezultă:

$$\bar{M}_O = \bar{r}_A \times \bar{R} \quad (3.38)$$

Ecuția (3.38) exprimă matematic teorema lui Varignon care afirmă că, momentul resultant al unui sistem de forțe care se reduce la o rezultantă unică, este egal cu momentul rezultantei sistemului de forțe, ambele momente calculându-se în raport cu același punct. Teorema lui Varignon este valabilă și în raport cu o axă

50 CAPITOLUL 1. STATICA

oarecare trecând prin punctul O nu numai în raport cu un punct. Acest lucru se obține înmulțind scalar ecuația (3.38) cu versorul \bar{u} al direcției arbitrare (δ) rezultând egalitatea dintre momentul resultant al sistemului de forțe (\bar{F}_i) în raport cu axa(δ) și momentul rezultantei în raport cu aceeași axă. Prin urmare: $\bar{u} \cdot \bar{M}_O = \bar{u}(\bar{r} \times \bar{R})$ sau:

$$\bar{M}_\delta(\bar{F}_i) = \bar{M}_\delta(\bar{R}) \quad (3.39)$$

Aplicație: Asupra piramidei ABCD din fig.3.20 acționează forțele de mărimi $F_1 = \sqrt{17}F$, $F_2 = 2\sqrt{33}F$, $F_3 = 10F$ și momentul de mărime $M = \sqrt{5}aF$. Se dau:

OA = a, OB = 2a, OC = 3a, OD = 4a, AP = PD. Să se determine: a) torsorul de reducere în punctul O, b) cazul de reducere, c) momentul minimal, d) ecuația axei centrale, e) torsorul de reducere în punctul A.

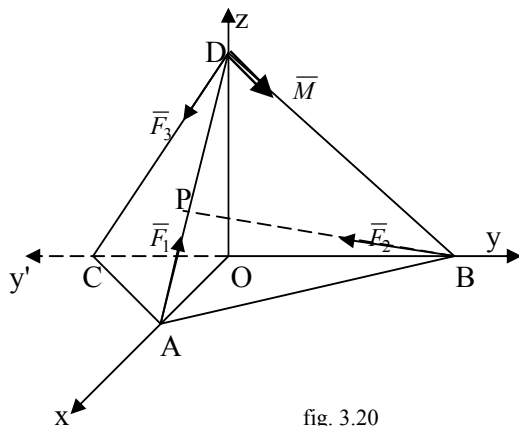


fig. 3.20

Rezolvare: Calculăm analitic fiecare forță:

$$\bar{F}_1 = F_1 \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} = -4F\bar{i} + 4F\bar{k},$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= F_2 \frac{\overline{BP}}{\overline{BP}} = \frac{F_2}{\overline{BP}} (\overline{BO} + \overline{OP}) = \\ &= 2F\bar{i} - 8F\bar{j} + 8F\bar{k}, \end{aligned}$$

$$\bar{F}_3 = F_3 \frac{\overline{DC}}{\overline{DC}} = -6F\bar{j} - 8F\bar{k},$$

$$\bar{M} = M \frac{\overline{DB}}{\overline{DB}} = aF\bar{j} - 2aF\bar{k}.$$

a) rezultanta sistemului de forțe este

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 14F\bar{j} + 4F\bar{k}$$

iar momentul resultant în raport cu O este:

$$\bar{M}_O = \overline{OD} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_3) + \overline{OB} \times \bar{F}_2 + \bar{M} = 40aF\bar{i} - 3aF\bar{j} - 6aF\bar{k}$$

b) deoarece $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 58aF^2 \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal (cazul 1)

$$c) R^2 = 213F^2, \bar{R} \cdot \bar{M}_O = 58aF^2,$$

$$M_R = \frac{58}{\sqrt{213}}aF, \bar{M}_R = \frac{58}{213}aF(\bar{i} - 14\bar{j} + 4\bar{k}).$$

d) ecuația axei centrale în acest caz se scrie:

$$14x + 17y + 56z = 166a, 4x - 56y - 197z = -557a.$$

e) torsorul de reducere în A este format din rezultanta \bar{R} de la a) și $\bar{M}_A = \bar{M}_O - \bar{OA} \times \bar{R} = 40aF\bar{i} - 7aF\bar{j} - 20aF\bar{k}$.

3.11. Reducerea unor sisteme particulare de forțe aplicate unui rigid

3.11.1. Reducerea unor sisteme de forțe concurente

Se consideră sistemul de forțe $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$, aplicate unui solid rigid în punctele A_1, \dots, A_n , suportii tuturor forțelor fiind concurenți în punctul A (fig.3.21). în punctul O, sistemul de forțe concurenta are elementele:

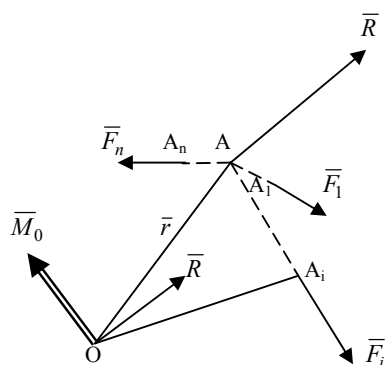


fig. 3.21

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (3.40)$$

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \quad (3.41)$$

Dar toate forțele sunt concurente în A, și cu notația $\bar{r} = \bar{OA}$ rezultă:

$$\bar{r}_i = \bar{r} + \bar{AA}_i \quad (3.42)$$

Ținând seama de relația (3.42), momentul în O devine:

$$\begin{aligned} \bar{M}_O &= \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n [(\bar{r} + \bar{AA}_i) \times \bar{F}_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{r} \times \bar{F}_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{AA}_i \times \bar{F}_i) = \bar{r} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{r} \times \bar{R} \end{aligned}$$

deoarece \bar{AA}_i și \bar{F}_i sunt coliniari. Rezultă deci:

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{R} \quad (3.43)$$

Pentru un sistem de forțe concurente s-a regăsit relația (3.38) adică teorema lui Varignon. Deoarece elementele torsorului în raport cu punctul O sunt perpendiculare, din (3.43) obținem:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0 \quad (3.44)$$

și deci sunt posibile următoarele cazuri de reducere:

Cazul 1: $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ și sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică al cărei suport trece prin A ($\bar{M}_A = 0$).

Cazul 2: $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$ și sistemul de forțe se află în echilibru.

3.11.2. Reducerea sistemelor de forțe coplanare prin metoda analitică

Se consideră un sistem de forțe $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ cuprinse în planul (P) și aplicate respectiv în punctele A_1, \dots, A_n (fig.3.22) și un punct oarecare O din plan în care se face reducerea.

Fără a restrânge generalitatea problemei, se alege un sistem de axe Oxyz cu axele Ox și Oy situate în planul (P), iar axa Oz perpendiculară pe acesta. În raport cu punctul O, sistemul de forțe se reduce la un torsor având elementele \bar{R} și \bar{M}_O date de relațiile:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (3.45)$$

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \quad (3.46)$$

dar fiecare forță \bar{F}_i este conținută în planul (P), deci rezultanta lor, vectorul \bar{R} este de asemenea conținut în (P). Pe de altă parte, fiecare din momentele $\bar{M}_i = \bar{r}_i \times \bar{F}_i$, sunt perpendiculare pe planul (P), deci și momentul resultant \bar{M}_O este perpendicular pe acest plan.

Deci, în cazul sistemelor de forțe coplanare, are loc totdeauna relația:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0 \quad (3.47)$$

Cu alte cuvinte, al doilea invariant al reducerii este nul și deci în acest caz nu există torsor minimal.

Spre deosebire de cazul general, aici sunt posibile numai trei cazuri de reducere:

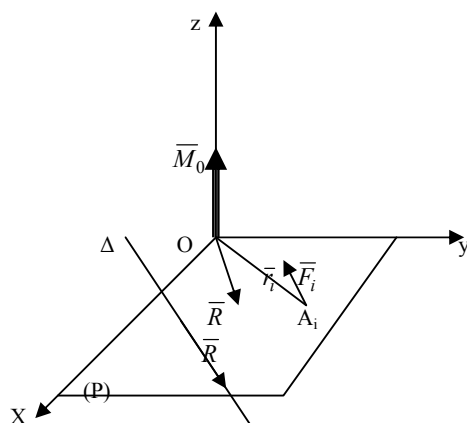


fig. 3.22

Cazul 1: $\bar{R} \neq 0$ și sistemul se reduce la o rezultantă unică situată pe axa centrală. Condiția (3.47) este îndeplinită deoarece vectorii \bar{R} și \bar{M}_0 sunt perpendiculari, dar se poate ca \bar{M}_0 să fie zero, ceea ce corespunde alegerii punctului 0 pe axa centrală. Dacă $\bar{M}_0 \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică, punctul 0 de reducere nu se găsește pe axa centrală.

Cazul 2: $\bar{R} = 0, \bar{M}_0 \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la un cuplu rezultat de moment \bar{M}_0 .

Cazul 3: $\bar{R} = 0, \bar{M}_0 = 0$, sistemul de forțe plane este în echilibru.

Pentru determinarea efectivă a elementelor reducerii unui sistem de forțe concurente, este comod să se folosească metoda analitică. Astfel, presupunând cunoscute forțele $\bar{F}_i = X_i \bar{i} + Y_i \bar{j}$ și punctele de aplicație $A_i (x_i, y_i)$, obținem:

$$\bar{R} = X \bar{i} + Y \bar{j} = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \bar{i} + \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \bar{j}; \quad X = \sum_{i=1}^n X_i, Y = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (3.48)$$

$$\bar{M}_0 = M_{0z} \bar{k} = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) \bar{k}. \quad (3.49)$$

În ceea ce privește momentul rezultat, trebuie observat că acesta se poate calcula mai simplu folosind legătura dintre momentul unei forțe în raport cu o axă și momentul în raport cu un punct. Într-adevăr, forțele fiind în planul (P), momentele lor față de axa Oz perpendiculară pe planul (P) vor fi egale cu mărimile algebrice ale momentelor lor în raport cu punctul O. Dacă brațul forței de mărime F_i se notează prin d_i , atunci proiecția pe axa Oz a momentului rezultat va fi:

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^n \pm d_i F_i \quad (3.50)$$

unde se consideră unul din semnele \pm în funcție de sensul de rotație al fiecărei forțe față de sensul pozitiv de rotație ales. De fapt în expresia (3.50) se calculează suma algebrică a mărimilor momentelor forțelor în raport cu punctul O.

Cele trei cazuri de reducere analitic, sunt:

Cazul 1: $X^2 + Y^2 \neq 0$. Sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică situată pe axa centrală. Ecuația axei centrale (3.35), în acest caz devine:

$$xY - yX = M_{Oz} \quad (3.51)$$

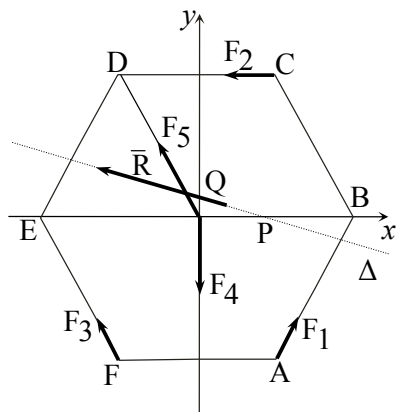


fig. 3.23

54 CAPITOLUL 1. STATICA

unde x, y sunt coordonatele unui punct de pe axa centrală.

Cazul 2: $X=0, Y=0, M_{Oz} \neq 0$. Sistemul de forțe se reduce la un cuplu resultant.

Cazul 3: $X=0, Y=0, M_{Oz}=0$. Sistemul de forțe coplanare este în echilibru.

Aplicatie: Se consideră hexagonul plan, regulat ABCDEH de latura a și sistemul de forțe dispus ca în fig. 3.23. mărimile forțelor sunt $F_i = 2\sqrt{3}iF, i=1,5$. Se cer:

Să se reducă sistemul de forțe în O și să se stabilească cazul de reducere. Să se scrie ecuația analitică a axei centrale. Să se reprezinte grafic axa centrală.

Rezolvare: a) Din (3.48), se obțin:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^5 X_i = \sqrt{3}F - 4\sqrt{3}F - 3\sqrt{3}F - 5\sqrt{3}F = \\ &= -11\sqrt{3}F \end{aligned}$$

$$Y = \sum_{i=1}^5 Y_i = 3F + 3F - 8\sqrt{3}F + 15F = (21 - 8\sqrt{3})F$$

Din (3.50) se obține:

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^5 \pm d_i F_i = 2\sqrt{3}F \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{2} + 4\sqrt{3}F \frac{\sqrt{3}}{2} a - 6\sqrt{3}F \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{2} = 3aF.$$

Deci: $\vec{R} = -11\sqrt{3}F\vec{i} + (21 - 8\sqrt{3})F\vec{j}, \vec{M}_0 = 3aF\vec{k}$ și sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică situată pe axa centrală, punctul O de reducere nu se află pe axa centrală.

Ecuația axei centrale (3.51) se scrie: $(21 - 8\sqrt{3})x + 11\sqrt{3}y = 3a$.

Pentru $x=0$, rezultă $y = \frac{\sqrt{3}}{11}a$, axa Δ trece prin punctul $Q(0, \frac{\sqrt{3}}{11}a)$, iar pentru $y=0$, rezultă $x = \frac{21 + 8\sqrt{3}}{83}a$ și axa trece prin punctul $P(\frac{21 + 8\sqrt{3}}{83}a, 0)$ (fig.3.23).

3.11.3. Metoda grafică de reducere a forțelor coplanare. Poligonul forțelor și poligonul funicular.

Un sistem de forțe coplanare, poate fi redus și prin metoda grafică, pentru care vom considera, fără a micșora generalitatea trei forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (fig. 3.24,a). Fie un punct oarecare A_0 în planul forțelor (fig.3.24,b). Construim vectorii echipolenți

$\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}$ cu $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}$. Poligonul $A_0A_1A_2A_3$ este poligonul forțelor. Alegem un punct oarecare O numit pol. Se construiesc razele polare $0, 1, 2, 3$, prin unirea lui O cu vârfurile A_0, A_1, A_2, A_3 ale poligonului forțelor.

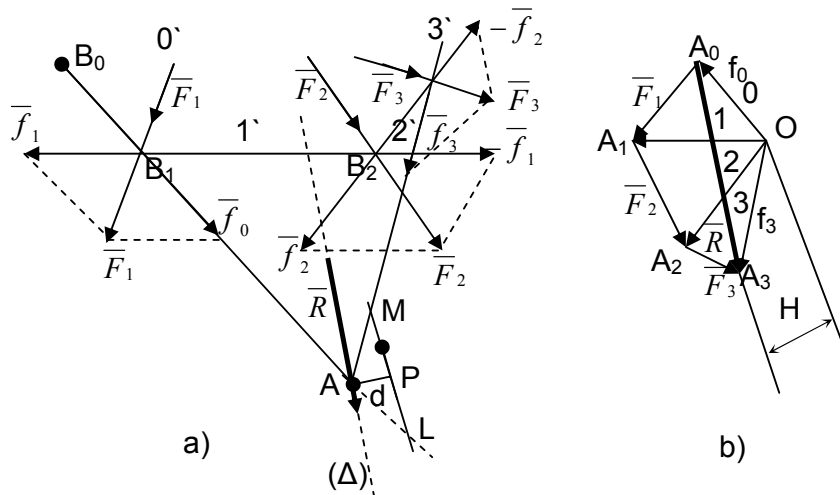


Fig. 3.24

Fie un punct oarecare B_0 prin care se construiește latura O' paralelă cu raza polară O până în punctul B_1 de intersecție a lui O' cu suportul $\overline{F_1}$. Prin punctul B_1 se construiește latura $1'$ paralelă cu raza polară 1 până în punctul B_2 de intersecție a lui $1'$ cu suportul forței $\overline{F_2}$. Analog prin punctul B_2 se duce latura $2'$ paralelă cu raza polară 2 până în B_3 de intersecție a lui $2'$ cu suportul forței $\overline{F_3}$. Prin B_3 se duce latura $3'$ paralelă cu raza 3 pe care se consideră un punct oarecare B_4 . Poligonul $B_0B_1B_2B_3B_4$ se numește poligon funicular. Prima și ultima latură a poligonului funicular adică $0'$ și $3'$ se intersectează într-un punct A . Poligonul funicular are deci laturile $O', 1', 2', 3'$.

Forța $\overline{F_1}$ o translatăm astfel ca punctul ei de aplicație să fie în B_1 și o descompunem după laturile $0'$ și $1'$, componentele ei fiind $\overline{f_0}$ și $\overline{f_1}$. Pe de altă parte forța $\overline{F_1}$ se descompune în poligonul forțelor după razele polare 0 și 1 , ceea ce înseamnă că $\overline{F_1} = \overline{A_0O} + \overline{OA_1}$. Dar descompunerea forțelor lui $\overline{F_1}$ după razele polare 0 și 1 din poligonul forțelor și după laturile $0'$ și $1'$ din poligonul funicular, este unică, astfel că și componentele trebuie să fie aceleași. Urmează că $\overline{A_0O} = \overline{f_0}$ și $\overline{OA_1} = \overline{f_1}$.

Analog, forța \overline{F}_2 se descompune și ea în punctul B_2 al poligonului funicular după direcțiile $1'$ și $2'$, iar poligonul forțelor după razele polare 1 și 2. În poligonul forțelor, pe baza descompunerii se poate scrie $\overline{F}_2 = \overline{A_1O} + \overline{OA_2}$, unde $\overline{OA_1} = \overline{f_1}$ după cum am arătat anterior. Urmează că \overline{F}_2 are în B_2 componentele $-\overline{f_2} = \overline{A_1O}$ după direcția laturii $1'$ și $\overline{f_2} = \overline{OA_2}$ după direcția laturii $2'$.

Forța \overline{F}_3 se descompune după aceleași procedeu în punctul B_3 al poligonului funicular după direcțiile $2'$ și $3'$, iar în poligonul forțelor, după razele polare 2 și 3. Deoarece $\overline{F}_3 = \overline{A_2O} + \overline{OA_3}$, componentele forței \overline{F}_3 din punctul B_3 vor fi $-\overline{f_2} = \overline{A_2O}$ și $\overline{f_3} = \overline{OA_3}$.

Se observă că $\overline{f_1}, -\overline{f_1}, \overline{f_2}, -\overline{f_2}$ situate pe laturile intermediare $1'$ și $2'$ ale poligonului funicular se echilibrează. Singurele forțe rămase $\overline{f_0}$ din prima latură a poligonului funicular și $\overline{f_3}$ de pe ultima latură, adică $0'$ și $3'$, se compun în punctul A de intersecție al suporturilor lor și vor da rezultanta $\overline{R} = \overline{f_0} + \overline{f_3}$. Aceasta se verifică ușor și în poligonul forțelor, unde se observă că $\overline{R} = \overline{A_0O} + \overline{OA_3}$.

Conform celor demonstrate, în punctul A, sistemul de forțe dat se reduce la o forță rezultantă \overline{R} . Deci punctul A aparține axei centrale.

În concluzie, cu ajutorul construcției poligonului forțelor și a poligonului funicular, se determină un punct A al axei centrale. Evident punctele O, A_0 și B_0 , fiind alese arbitrar, construcția nu este unică. Dar indiferent de alegerea punctelor se determină întotdeauna un punct al axei centrale.

Presupunând că poligonul forțelor nu se închide ($A_0 \neq A_3$), sistemul de forțe coplanare se reduce la o rezultantă unică. Am arătat că punctul A de intersecție al primei și ultimei laturi din poligonul funicular se află pe axa centrală. Dacă prin acest punct se duce o paralelă la rezultanta $\overline{R} = \overline{A_0A_3}$ se obține axa centrală (Δ) (fig.3.24,a). Construcția grafică prezentată, permite și determinarea momentului rezultat al sistemului de forțe în raport cu un punct oarecare P, situat la distanța d față de axa centrală (fig.3.24,a). Deoarece sistemul de forțe coplanare se reduce la o rezultantă unică pe axa centrală, pentru determinarea momentului rezultat al sistemului de forțe în raport cu punctul P se aplică teorema lui Varignon.

$$M_1 + M_2 + M_3 = R \cdot d \quad (3.52)$$

Prin punctul P se duce o paralelă la axa centrală care intersectează laturile extreme ale poligonului funicular $0'$ și $3'$ în punctele L, respectiv M.

Triunghiurile ALM și OA_0A_3 sunt asemenea și deci rezultă:

$$\frac{LM}{d} = \frac{R}{H}, R \cdot d = LM \cdot H, \quad (3.53)$$

în care H este distanța de la polul O la segmentul A_0A_3 (fig. 3.24,b) numită distanță polară, și deci:

$$M_1 + M_2 + M_3 = LM \cdot H \quad (3.54)$$

Prin urmare, momentul rezultat al unui sistem de forțe coplanare în raport cu un punct oarecare din planul lor se calculează cu produsul dintre distanța polară și lungimea segmentului determinat pe laturile extreme ale poligonului funicular de o paralelă la axa centrală dusă prin acel punct.

Cu ajutorul celor două poligoane se pot regăsi și cazurile posibile de reducere a unui sistem de forțe coplanare.

Astfel în fig. 3.24 este prezentat cazul 1 de reducere, când sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă unică situată pe axa centrală (Δ). Pentru acest caz, atât poligonul forțelor, cât și poligonul funicular sunt deschise.

Pentru cazul 2 de reducere, când sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu, cele două poligoane sunt prezentate în fig. 3.25.

În acest caz, poligonul forțelor este închis, deci $\bar{R} = 0$, iar laturile extreme ale poligonului funicular $0'$ și $3'$ sunt paralele (și distincte). Sistemul celor trei forțe coplanare este echivalent cu forțele \bar{f}_0, \bar{f}_3 egale în mărime (deoarece razele polare 0 și 3 coincid) având sensuri contrare și acționează pe suporturi paralele.

Deci sistemul este echivalent cu un cuplu al cărui moment se obține multiplicând modulul razei polare 0 (sau 3) cu distanța d , adică:

$$M = f_0 d \text{ [Nm]} \quad (3.55)$$

Cazul 3 de reducere al sistemului de forțe coplanare este arătat în fig. 3.26 în care poligonul forțelor se închide, deci razele polare 0 și 3 coincid, iar poligonul funicular are laturile extreme $0'$ și $3'$ suprapuse.

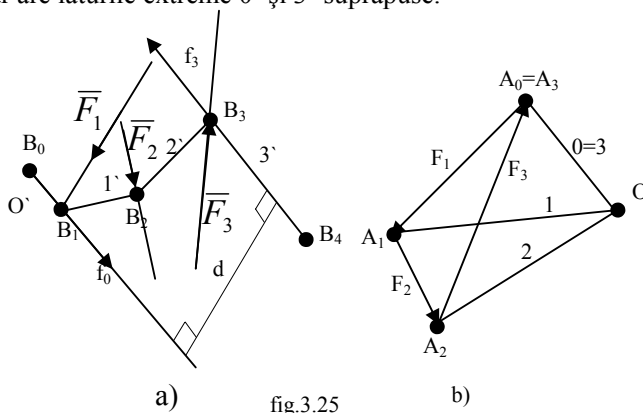


fig.3.25



3.11.4. Reducerea sistemelor de forțe paralele

$$\overline{F_i} = F_i \overline{u}, \quad (3.56)$$

Rezultanta sistemul este:

Rezultanta \vec{R} a sistemului de forțe paralele are suportul paralel cu direcția comună forțelor componente, iar mărimea se obține însumând algebric mărimea forțelor:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3.58)$$

Momentul resultant al sistemului de forțe în raport cu punctul 0 este:

$$\overline{M}_0 = \sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times F_i \overline{u} = \left(\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i \right) \times \overline{u} \quad (3.59)$$

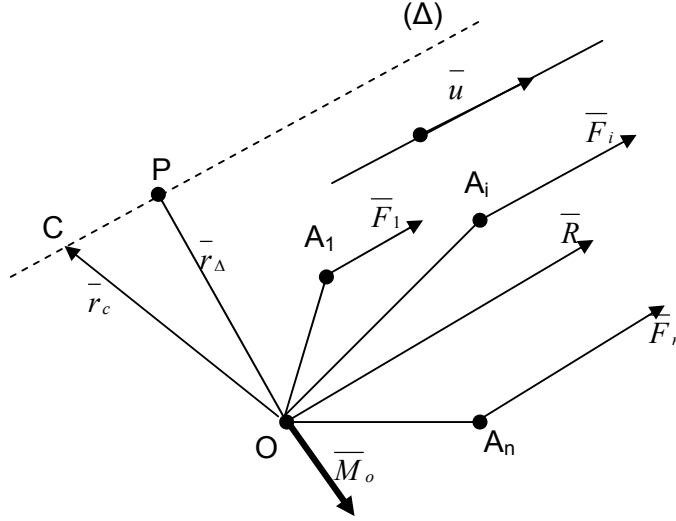


fig. 3.27

Urmează că:

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = R u \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i \right) \times \overline{u} \right] = 0 \quad (3.60)$$

(produs mixt de doi termeni coliniari).

Se deduce astfel din relația (3.60) că rezultanta \overline{R} și momentul resultant \overline{M}_0 sunt vectori perpendiculari, adică al doilea invariant al reducerii $\overline{R} \cdot \overline{M}_0$ este nul. În cazul forțelor paralele ca și în cazul forțelor coplanare, sunt posibile numai trei cazuri de reducere, după cum urmează:

Cazul 1: dacă $\overline{R} \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică situată pe axa centrală. Dacă în plus $\overline{M}_0 = 0$, atunci punctul O se află pe axa centrală, iar dacă $\overline{M}_0 \neq 0$, punctul O nu se află pe axa centrală.

Cazul 2: dacă $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_0 \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la cuplul de moment \overline{M}_0 .

Cazul 3: dacă $\overline{R} = 0$ și $\overline{M}_0 = 0$, sistemul de forțe este în echilibru.

Pentru determinarea axei centrale pentru cazul 1, se folosește relația (3.60) și se ține seama că valoarea minimă a momentului este zero. Deci, în acest caz axa centrală este locul geometric al punctelor unde momentul este nul.

Fie P un punct curent pe axa centrală. În acest punct, momentul este:

$$\overline{M}_P = \overline{M}_0 - \overline{OP} \times \overline{R} = 0 \quad (3.61)$$

Notăm $\overline{OP} = \overline{r}_\Delta$ și ținând seama de formulele (3.57) și (3.59) se obține:

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i \right) \times \overline{u} - \overline{r}_\Delta \times \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{u} = 0 \text{ sau: } \left(\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i \right) \times \overline{u} - \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{r}_\Delta \times \overline{u} = 0$$

de unde:

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i \right) \times \overline{u} - \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{r}_\Delta \times \overline{u} = 0 \quad (3.62)$$

Produsul vectorial fiind nul, cei doi vectori sunt coliniari: $\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i - \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{r}_\Delta = \lambda_1 \overline{u}$

Urmează că vectorul de poziție al punctului P de pe axa centrală este:

$$\overline{r}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} - \lambda_1 \frac{\overline{u}}{\sum_{i=1}^n F_i}, \text{ care există, deoarece } R = \sum_{i=1}^n F_i \neq 0.$$

Cu notația $\lambda = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^n F_i}$, se obține:

$$\overline{r}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} - \lambda \overline{u} \quad (3.63)$$

Relația (3.63) reprezintă ecuația vectorială a unei drepte (Δ) paralelă cu \overline{u} .

Dacă se notează cu \overline{r} vectorul

$$\overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3.64)$$

ecuația axei centrale devine:

$$\overline{r}_\Delta = \overline{r}_c + \lambda \overline{u} \quad (3.65)$$

Când parametrul λ variază, punctul P descrie dreapta Δ care trece prin punctul C, și care are vectorul de poziție \vec{r}_c . Dacă și versorul \vec{u} variază, ecuația (3.65) reprezintă un fascicol de drepte concurente trecând prin punctul fix C, numit centrul forțelor paralele, definit prin relația (3.64).

Pentru determinarea axei centrale este suficient să se cunoască poziția centrului forțelor paralele. De aceea problema esențială este stabilirea poziției centrului forțelor paralele.

Dacă se proiectează relația (3.64) pe un sistem de axe Oxzy, rezultă coordonatele punctului C:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3.66)$$

și deci poziția centrului forțelor paralele nu depinde de direcția forțelor. Aceasta înseamnă că dacă se schimbă direcția tuturor forțelor cu același unghi, atunci și axa centrală trece tot prin C.

O altă proprietate a centrului forțelor paralele este că acesta rămâne același dacă mărimile tuturor forțelor se multiplică cu același număr k:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n k F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n k F_i} = \frac{k \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{k \sum_{i=1}^n F_i} = \vec{r}_c \quad (3.67)$$

În sfârșit, poziția centrului forțelor paralele nu depinde de originea sistemului de referință. Într-adevăr, dacă O' este noua origine și $\vec{O'O} = \vec{r}_0$ și deci:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i, \text{ atunci:}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i)}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\vec{r}_0 \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \vec{r}_0 + \vec{r}_c \quad (3.68)$$

adică vectorul de poziție al centrului forțelor paralele s-a modificat la fel ca pentru orice punct A_i, deci poziția lui C nu s-a schimbat față de punctele A₁, A₂, ..., A_n.

Dacă în particular punctele de aplicație ale forțelor se află într-un plan, acesta poate fi ales chiar planul Oxy. Conform formulelor (3.66), se deduce z_c=0, ceea ce înseamnă că centrul forțelor paralele este tot în planul Oxy. În concluzie, centrul unui sistem de forțe paralele, având punctele de aplicație într-un plan, va fi situat în același plan.

Un alt caz particular este acela când punctele de aplicație ale forțelor se află pe o dreaptă, de exemplu Ox. Din (3.66) rezultă y_c=0 și z_c=0, ceea ce înseamnă că

62 CAPITOLUL 1. STATICA

centrul forțelor paralele se află tot pe axa Ox. Un sistem de forțe paralele cu punctele de aplicație situate pe o dreaptă, va avea centrul tot pe acea dreaptă.

Pentru reducerea sistemelor de forțe paralele prin metoda analitică, se alege axa Oz paralelă cu suportul forțelor, deci $\vec{F}_i = F_i \vec{k}$. Rezultanta \vec{R} are proiecțiile:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3.69)$$

iar momentul resultant are proiecțiile:

$$M_x = \sum_{i=1}^n F_i y_i, \quad M_y = -\sum_{i=1}^n F_i x_i, \quad M_z = 0 \quad (3.70)$$

Cazurile posibile de reducere ale unui sistem de forțe paralele se transpun analitic astfel:

Cazul 1: dacă $Z \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică ce are ca suport o dreaptă paralelă cu suportul forțelor și trece prin centrul forțelor paralele.

Cazul 2: dacă $Z = 0$ și $M_x^2 + M_y^2 \neq 0$, sistemul forțelor paralele se reduce la un cuplu resultant.

Cazul 3: dacă $Z=0, M_x=0, M_y=0$, sistemul de forțe este în echilibru.

Expresiile de forma $\sum_{i=1}^n F_i x_i, \sum_{i=1}^n F_i y_i, \sum_{i=1}^n F_i z_i$ se numesc momente statice.

3.11.5. Reducerea a două forțe paralele

Pentru început considerăm cazul a două forțe paralele de același sens aplicate în A și B (fig.3.28). Fie \vec{R} rezultanta lor aplicată într-un punct C situat undeva pe dreapta AB. Cum $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ se duce ca \vec{R} este paralelă cu forțele date. Rezultanta \vec{R} are ca sens, sensul comun forțelor date și mărimea

$$R = F_1 + F_2 \quad (3.71)$$

Pentru determinarea punctului de aplicație C, se utilizează teorema lui Varignon în raport cu punctul C. Punctul C trebuie să se găsească între A și B, deoarece în caz contrar, atât momentul lui \vec{F}_1 , cât și cel al lui \vec{F}_2 ar avea același semn și deci suma lor nu ar putea fi nulă.

Mărimea momentului forței \vec{F}_1 este $F_1 \cdot CE$, mărimea momentului forței F_2 este $-F_2 \cdot DC$ și momentul rezultantei este nul (EC și DC sunt lungimile perpendicularelor din C pe \vec{F}_1 respectiv \vec{F}_2). Rezultă $F_1 \cdot EC - F_2 \cdot DC = 0$ sau:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{DC}{EC}$$

Din asemănarea triunghiurilor ACE și BCD, se obține:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} \quad (3.72)$$

Prin urmare, rezultanta a două forțe paralele și de același sens are ca mărime suma aritmetică a forțelor date, direcția și sensul comun acestor forțe și punctul de aplicație, un punct pe segmentul de dreaptă care unește punctele de aplicație ale forțelor date, astfel încât împarte acest segment în părți invers proporționale cu forțele date.

Ținând seama de relațiile (3.71) și (3.72) se deduce:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{EC} = \frac{R}{AB} \quad (3.73)$$

Presupunând că forțele $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ se rotesc cu un unghi oarecare α în jurul punctelor de aplicație A și B, se observă că rezultanta \overline{R} se rotește și ea cu același unghi α , păstrându-și mărimea și punctul său de aplicație C neschimbate.

În cele ce urmează considerăm cazul a două forțe paralele și de sensuri contrare (fig. 3.29) cu $F_1 > F_2$.

Ca și în cazul precedent, se deduce că rezultanta \overline{R} are direcția paralelă cu aceea a forțelor date, sensul celei mai mari și mărimea

$$R = F_1 - F_2 \quad (3.74)$$

Punctul C de aplicație al rezultantei se află de partea forței mai mari, deoarece în cazurile când C s-ar afla între A și B sau de partea forței mai mici, suma momentelor forțelor date nu poate fi nulă.

Aplicând teorema lui Varignon, rezultă $-F_1 \cdot EC + F_2 \cdot DC = 0$,

sau:
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{DC}{EC}$$

și deci:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} \quad (3.75)$$

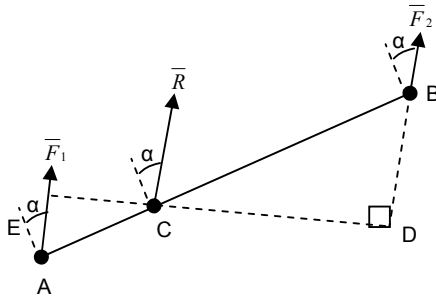


fig.3.28

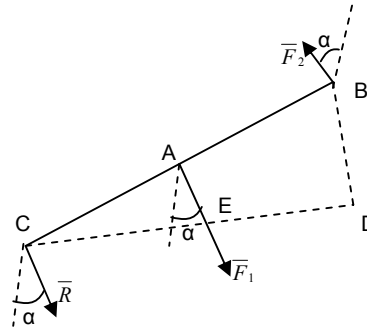


fig.3.29

În concluzie, rezultanta a două forțe paralele și de sensuri contrare are ca mărime suma algebrică a forțelor date, direcția comună, sensul forței celei mai mari și punctul de aplicație situat de partea forței celei mai mari astfel încât împarte segmentul în părți invers proporționale cu forțele date.

Din relația (3.74) și (3.75) deducem:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB} \quad (3.76)$$

relație identică cu (3.73).

Prin rotirea celor două forțe de sensuri contrare în jurul punctelor lor de aplicație cu un unghi oarecare α , rezultanta se rotește și ea (fig. 3.29) cu același unghi α , rezultanta se rotește și ea (fig. 3.29) cu același unghi α , păstrându-și neschimbată mărimea și punctul de aplicație C.

Aplicații: Se consideră un sistem de forțe distribuite perpendicular pe o placă plană (P) (fig. 3.30,a). Să se determine poziția centrului acestor forțe.

Rezolvare :

Presupunem placa (P) situată în planul Oxy și elementul de suprafață $dx dy$ notat în fig. 3.30,a) prin M. elementul de forță ce acționează în M este cunoscut: $\bar{q}(x,y) dx dy$. Torsorul de reducere în punctul O are elementele (D este domeniul delimitat de placa (P)):

$$\bar{R} = - \int_D q(x,y) dx dy \bar{k}, \quad \bar{M}_O = \int_D \bar{r} \times \bar{q}(x,y) dx dy$$

Momentul rezultat în raport cu punctul C este:

$$\begin{aligned}\bar{M}_c &= \int_D \bar{CM} \times \bar{q}(x, y) dx dy = 0 = \int_D (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{q}(x, y) dx dy = \int_D \bar{r} \times \bar{q}(x, y) dx dy - \\ &- \int_D \bar{r}_c \times \bar{q}(x, y) dx dy = \int_D \bar{r} \times \bar{q}(x, y) dx dy - \bar{r}_c \times \int_D \bar{q}(x, y) dx dy\end{aligned}$$

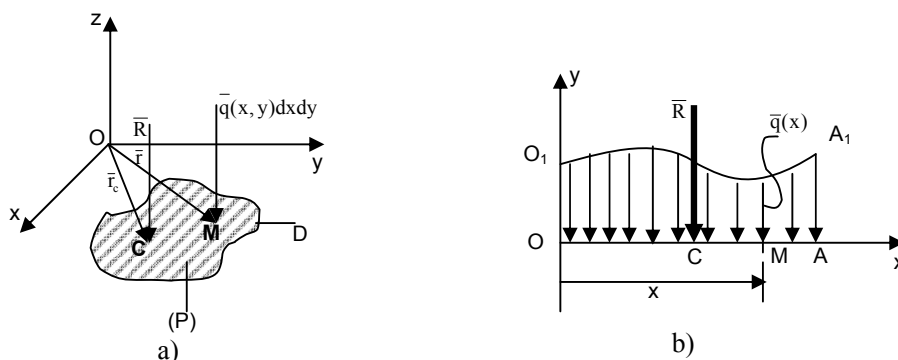


fig.3.30

Rezultă: $\bar{r}_c \times \int_D \bar{q}(x, y) dx dy = \int_D \bar{r} \times \bar{q}(x, y) dx dy$ și deci

$$x_c = \frac{\int_D x q(x, y) dx dy}{\int_D q(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\int_D y q(x, y) dx dy}{\int_D q(x, y) dx dy}$$

În particular, dacă forțele sunt coplanare, distribuite perpendicular pe un segment de dreaptă OA de lungime 1 (fig.3.30,b) poziția centrului forțelor paralele este dat de:

$$x_c = OC = \frac{\int_0^1 x q(x) dx}{\int_0^1 q(x) dx}$$

2) Asupra cadrului OABDE acționează forțele distribuite paralele cu axa Oz, ca în fig. 3.31. se dau: OA=AB=BD=DE=a, AB ∥ Oy, BC ∥ Oz, CD ∥ Ox. Să se determine poziția centrului acestor forțe paralele.

Rezolvare: Rezultantele forțelor distribuite ce acționează asupra barelor OA, AB și DE le notăm cu \bar{F}_1 , \bar{F}_2 respectiv \bar{F}_3 . mărimile algebrice ale acestor forțe paralele cu Oz sunt:

$F_1 = -\frac{1}{2}aq_1$; $F_2 = \frac{1}{2}aq_2$, $F_3 = aq_3$
 Centrele forțelor paralele sunt respectiv
 $C_1(\frac{a}{3}, 0, 0)$, $C_2(a, \frac{a}{3}, 0)$, $C_3(\frac{a}{2}, a, a)$.

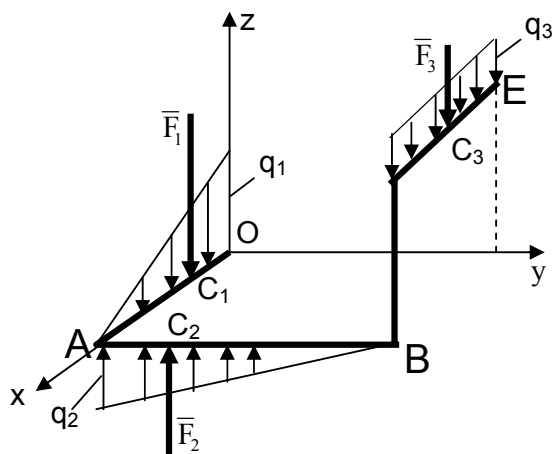


fig.3.31

Aplicând formulele (3.66) centrulorțelor paralele date are coordonatele:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{-\frac{1}{6}a^2q_1 - \frac{1}{4}a^2q_2 - \frac{1}{2}a^2q_3}{-\frac{1}{2}aq_1 + \frac{1}{2}aq_2 - aq_3} = \frac{3q_2 - 2q_1 - 6q_3}{6(q_2 - q_1 - 2q_3)}a; \\
 y_c &= \frac{-\frac{1}{2}a^2q_1 + \frac{1}{6}a^2q_2 - a^2q_3}{-\frac{1}{2}aq_1 + \frac{1}{2}aq_2 - aq_3} = \frac{q_2 - 3q_1 - 6q_3}{3(q_2 - q_1 - 2q_3)}a; \\
 z_c &= \frac{-a^2q_3}{-\frac{1}{2}aq_1 + \frac{1}{2}aq_2 - aq_3} = \frac{2q_3}{q_1 - q_2 + 2q_3}a
 \end{aligned}$$

3.12. Centre de greutate

Se consideră un sistem finit de puncte materiale A_1, A_2, \dots, A_n cu masele m_1, m_2, \dots, m_n . asupra fiecărui punct va acționa o forță numită greutate, care reprezintă rezultanta dintre forța de acțiune a Pământului și forța centrifugă datorată rotației acestuia. Greutățile punctelor se pot scrie sub forma $\bar{G}_i = m_i \bar{g}$, unde \bar{g} este vectorul accelerației gravitaționale care caracterizează intensitatea câmpului gravitațional terestru.

Într-un domeniu de dimensiuni neglijabile în comparație cu cele ale Pământului, câmpul gravitațional poate fi considerat omogen, iar vectorul \bar{g} constant.

Pentru un corp de dimensiuni neglijabile în comparație cu Pământul, greutatea punctelor materiale care formează sistemul constituie un sistem de forțe paralele cu rezultantă nenulă:

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{g} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \bar{g} \neq 0$$

Centrul sistemului de forțe paralele format din greutatea \bar{G}_i ale punctelor din care se compune corpul, se numește centrul de greutate al corpului. Înlocuind în formulele (3.64) F_i cu G_i , se obține vectorul de poziție al centrului de greutate:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \quad (3.77)$$

Într-un câmp gravitațional omogen: $G_i = m_i g$, cu $g = \text{constant}$ și deci (3.77) devine:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.78)$$

Punctul definit prin formula (3.78) se numește centrul maselor și într-un câmp gravitațional omogen coincide cu centrul de greutate al corpului.

Noțiunea de centru al maselor, este mai generală decât cea a centrului de greutate, fiindcă are sens și pentru corpuri care nu sunt situate la suprafața Pământului.

Față de un sistem de axe Oxyz, poziția centrului de masă al punctelor $P_i(x_i, y_i, z_i)$ de mase m_i va fi dată de coordonatele:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.79)$$

Expresiile $\sum_{i=1}^n m_i x_i, \sum_{i=1}^n m_i y_i, \sum_{i=1}^n m_i z_i$ se numesc momente statice ale

sistemului de puncte față de planele Oyz, respectiv Oxz, Oxy iar expresia $\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i$

este momentul static al sistemului față de punctul O. Aceste mărimi dau posibilitatea de a caracteriza modul de distribuire a masei unui sistem de puncte materiale. Din relațiile (3.78) și (3.79) se deduc:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i = M \bar{r}_c, \sum_{i=1}^n m_i x_i = M x_c, \sum_{i=1}^n m_i y_i = M y_c, \sum_{i=1}^n m_i z_i = M z_c \quad (3.80)$$

care reprezintă teorema momentelor statice, adică momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct este egal cu masa sistemului înmulțită cu vectorul de poziție al centrului de greutate în raport cu acel punct, respectiv momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan de referință este egal cu masa sistemului înmulțită cu distanța de la centrul sau de greutate la acel plan.

Corpurile rigide sunt continue, nedeformabile, adică orice punct al corpului are masă, iar distanțele dintre puncte rămân nemodificate, indiferent de efortul la care este supus corpul. Pentru a stabili o legătură cu rezultatele obținute în cazul sistemelor de n puncte materiale, se consideră corpul divizat în volume elementare ΔV_i care au masa Δm_i . vectorul de poziție al centrului de greutate, conform formulei (3.78) este:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i} \quad (3.81)$$

Trecând la limită, când $\Delta m_i \rightarrow 0$ și $n \rightarrow \infty$, atunci sumele din expresia (3.81) devin integrale definite pe domeniul ocupat de corp. Acest domeniu se notează cu (D) în cazul general, iar în cazul barelor, plăcilor și al volumelor, respectiv cu (l), (s) și (v). Astfel se obțin:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm}, x_c = \frac{\int_{(D)} x dm}{\int_{(D)} dm}, y_c = \frac{\int_{(D)} y dm}{\int_{(D)} dm}, z_c = \frac{\int_{(D)} z dm}{\int_{(D)} dm} \quad (3.82)$$

În relațiile (3.82), \bar{r}, x, y, z , reprezintă vectorul de poziție, respectiv coordonatele centrului de greutate al elementului de masă dm .

Expresiile $\int_{(D)} x dm$, $\int_{(D)} y dm$, $\int_{(D)} z dm$ reprezintă momentele statice ale corpurilor în raport cu planele Oyz, Oxz, Oxy, iar $\int_{(D)} \bar{r} dm$ reprezintă momentul static

în raport cu punctul O. Teorema momentelor statice în cazul corpurilor, se scrie:

$$\int_{(D)} \bar{r} dm = M \bar{r}_c, \int_{(D)} x dm = M x_c, \int_{(D)} y dm = M y_c, \int_{(D)} z dm = M z_c, \quad (3.83)$$

care se enunță în mod analog ca în cazul sistemelor de puncte materiale.

În cazul corpurilor, se impune introducerea noțiunii de densitate medie, care se definește prin formulele:

$$\rho_{med} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (3.84)$$

iar prin trecerea la limită $\Delta V \rightarrow 0$, se obține densitatea:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (3.85)$$

Corpurile pot fi: bare, plăci sau volume și densitatea ρ va fi prin urmare densitate liniară ($\rho_l = \frac{dm}{ds}$, ds – este elementul de lungime), sau densitatea superficială (de arie) ($\rho_s = \frac{dm}{dS}$, dS fiind elementul de arie), respectiv densitatea volumică ($\rho_v = \frac{dm}{dV}$, dV este element de volum).

În cazul corpurilor omogene și izotrope, densitatea este constantă: $\rho = \text{constant}$ și deci formulele (3.82) devin pentru bare:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(l)} \bar{r} ds}{\int_{(l)} ds}; x_c = \frac{\int_{(l)} x ds}{\int_{(l)} ds}; y_c = \frac{\int_{(l)} y ds}{\int_{(l)} ds}; z_c = \frac{\int_{(l)} z ds}{\int_{(l)} ds} \quad (3.86)$$

Pentru plăci omogene:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(S)} \bar{r} dS}{\int_{(S)} dS}; x_c = \frac{\int_{(S)} x dS}{\int_{(S)} dS}; y_c = \frac{\int_{(S)} y dS}{\int_{(S)} dS}; z_c = \frac{\int_{(S)} z dS}{\int_{(S)} dS} \quad (3.87)$$

iar pentru volume:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(V)} \bar{r} dV}{\int_{(V)} dV}; x_c = \frac{\int_{(V)} x dV}{\int_{(V)} dV}; y_c = \frac{\int_{(V)} y dV}{\int_{(V)} dV}; z_c = \frac{\int_{(V)} z dV}{\int_{(V)} dV} \quad (3.88)$$

Pentru corpurile omogene, centrele de greutate au caracter geometric. Pentru corpurile neomogene, putem scrie:

$$\bar{r}_c = \frac{\int_{(D)} \rho(x, y, z) \bar{r} dV}{\int_{(D)} \rho(x, y, z) dV}, \bar{r}_c = \frac{\int_{(D)} \rho(x, y, z) x dV}{\int_{(D)} \rho(x, y, z) dV}, \dots \quad (3.89)$$

3.12.1. Proprietăți referitoare la centrele de greutate

Calcularea poziției centrului de greutate se simplifică într-o anumită măsură pentru anumite situații particulare, deduse din unele proprietăți:

a) Pentru un corp sau un sistem de puncte materiale care admite un plan, o axă sau un centru de simetrie, centrul de greutate respectiv se va găsi în acel plan, pe aceea axă sau în acel centru.

Demonstrația o facem pentru un sistem de puncte materiale. Fie planul de simetrie Oxy: pentru un punct oarecare $A_i(x_i, y_i, z_i)$ există punctul $A'_i(x_i, y_i, -z_i)$, fiecare de masă m_i . Rezultă $\sum_{i=1}^n m_i z_i = 0$, și deci $z_c = 0$ cu alte cuvinte centrul de greutate se găsește în planul de simetrie Oxy. Pentru un corp rigid, demonstrația se face asemănător, înlocuind $\sum_{i=1}^n m_i z_i$ cu $\int_{(D)} z dm$.

Dacă sistemul de puncte materiale admite axa de simetrie (de exemplu Ox), fiecărui punct de masă m_i : $A_i(x_i, y_i, z_i)$ îi corespunde un alt punct de aceeași masă: $A'_i(x_i, -y_i, -z_i)$. Vor rezulta $\sum_{i=1}^n m_i y_i = 0, \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0$ și deci $y_c = 0, z_c = 0$. Centrul de greutate se află pe axa de simetrie Ox.

Dacă sistemul de puncte materiale admite centrul de simetrie și fie aceasta originea sistemului de axe, atunci fiecărui punct $A_i(x_i, y_i, z_i)$ de masă m_i din sistem, îi corespunde un alt punct din sistem $A'_i(-x_i, -y_i, -z_i)$ de aceeași masă. Rezultă: $\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0, \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0, \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0$ sau $x_c = y_c = z_c = 0$, adică centrul de greutate se va găsi în centrul O de simetrie.

Am presupus în aceste cazuri că simetria are loc atât geometric, cât și ca distribuție a maselor.

b) Dacă sistemul de puncte materiale se găsește în interiorul unei suprafețe convexe, atunci centrul de greutate se va găsi și el în interiorul suprafeței convexe.

Într-adevăr, în raport cu reperul Oxyz astfel ales că originea O să fie într-un punct al suprafeței convexe, iar planul Oxy tangent acesteia, toate punctele sistemului se găsesc de aceeași parte a planului Oxy. Deci toate coordonatele z_i vor avea același

semn, de exemplu $z_i > 0$, va rezulta $\sum_{i=1}^n m_i z_i > 0$ și deci din (3.79) $z_c > 0$, adică centrul

de greutate al sistemului se va găsi de aceeași parte a planului tangent ca și suprafața convexă considerată.

În particular, dacă toate punctele sistemului se află într-un plan sau pe o dreaptă, suprafața convexă poate fi presupusă că la limită coincide cu acestea. Deci pentru un sistem de puncte materiale aflate într-un plan sau pe o dreaptă, centrul de greutate se află în acel plan, respectiv pe acea dreaptă.

c) Dacă în locul maselor unui sistem de puncte materiale se introduc mase proporționale cu ele, poziția centrului de greutate nu se modifică.

Într-adevăr, dacă se modifică numărătorul și numitorul fracției (3.78) cu același factor k , se obține:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n (k m_i) \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n (k m_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

d) Poziția centrului de greutate nu depinde de sistemul de axe ales, la fel ca și centrul forțelor paralele.

e) Dacă un sistem (S) de n puncte materiale este format din p subsisteme $(S_1), (S_2), \dots, (S_p)$, $p < n$, disjuncte, de mase respectiv M_1, M_2, \dots, M_p și centre de greutate C_1, C_2, \dots, C_p cunoscute, atunci centrul de greutate al sistemului (S) este dat de relația:

$$\bar{r}_c = \frac{M_1 \bar{r}_{c_1} + M_2 \bar{r}_{c_2} + \dots + M_p \bar{r}_{c_p}}{M_1 + M_2 + \dots + M_p} \quad (3.90)$$

unde \bar{r}_{c_k} este vectorul de poziție al centrului de greutate C_k ($k=1, p$).

Într-adevăr, notând $M_k = \sum_{i \in (S_k)} m_i$, din (3.78), se deduc:

$$\bar{r}_{c_k} = \frac{\sum_{i \in (S_k)} m_i \bar{r}_i}{M_k}, k = 1, p \quad (3.91)$$

sau:

$$\sum_{i \in (S_k)} m_i \bar{r}_i = M_k \bar{r}_{c_k}, k = \overline{1, p} \quad (3.92)$$

și deci:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i \in (S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i \in (S)} m_i} = \frac{\sum_{i \in (S_1)} m_i \bar{r}_i + \sum_{i \in (S_2)} m_i \bar{r}_i + \dots + \sum_{i \in (S_p)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i \in (S_1)} m_i + \sum_{i \in (S_2)} m_i + \dots + \sum_{i \in (S_p)} m_i} = \frac{M_1 \bar{r}_{c_1} + M_2 \bar{r}_{c_2} + \dots + M_p \bar{r}_{c_p}}{M_1 + M_2 + \dots + M_p}$$

f) Dacă sistemul (S) de puncte materiale provine dintr-un sistem (S₁) din care a fost eliminat sistemul (S₂) și dacă se cunosc masele M₁, M₂ și centrele de greutate C₁, C₂ ale sistemelor S₁, respectiv S₂, atunci centrul de greutate al sistemului (S) va fi dat de:

$$\bar{r}_c = \frac{M_1 \bar{r}_{c_1} - M_2 \bar{r}_{c_2}}{M_1 - M_2} \quad (3.93)$$

Pentru a arăta acest lucru, folosim formulele:

$$\bar{r}_{c_1} = \frac{\sum_{i \in (S_1)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i \in (S_1)} m_i}, \bar{r}_{c_2} = \frac{\sum_{i \in (S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i \in (S_2)} m_i} \quad (3.94)$$

Analog ca la punctul e), obținem:

$$\begin{aligned} \bar{r}_c &= \frac{\sum_{i \in (S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i \in (S)} m_i} = \frac{(\sum_{i \in (S)} m_i \bar{r}_i + \sum_{i \in (S_2)} m_i \bar{r}_i) - \sum_{i \in (S_2)} m_i \bar{r}_i}{(\sum_{i \in (S)} m_i + \sum_{i \in (S_2)} m_i) - \sum_{i \in (S_2)} m_i} = \frac{\sum_{i \in (S_1)} m_i \bar{r}_i - \sum_{i \in (S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i \in (S_1)} m_i - \sum_{i \in (S_2)} m_i} \\ &= \frac{M_1 \bar{r}_{c_1} - M_2 \bar{r}_{c_2}}{M_1 - M_2} \end{aligned}$$

3.12.2. Centrele de greutate ale unor corpuri omogene uzuale

a) Bara dreaptă omogenă are centrul de greutate în mijlocul său, acesta fiind punct de simetrie.

b) Perimetrul triunghiului are centrul de greutate la intersecția bisectoarelor triunghiului median (fig.3.32). Pentru a arăta acest lucru, considerăm barele AB, BD, DA, care au centrele de greutate respectiv D', A', B' (mijloacele acestora), unde se consideră concentrate greutatea (masele) acestora.

Ținând seama de reducerea a două forțe paralele, centrul de greutate al maselor m_{B'} și m_{D'} se va afla pe linia mijlocie B'D' astfel că:

$$\frac{EB'}{ED'} = \frac{m_C g}{m_{B'} g} = \frac{AB}{AD} \quad (3.95)$$

Dar $\frac{AD}{AB} = \frac{\frac{AD}{2}}{\frac{AB}{2}} = \frac{A'D'}{A'B'}$ și deci relația (3.95) se mai scrie:

$$\frac{EB'}{ED'} = \frac{A'B'}{A'D'} \quad (3.96)$$

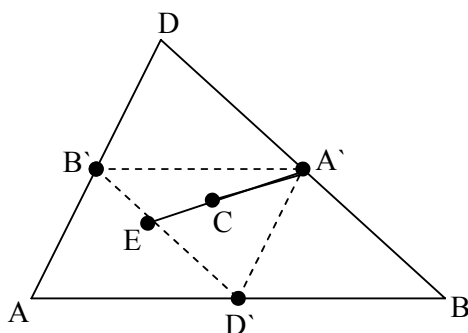


fig.3.32

proprietate caracteristică bisectoarei din A' în triunghiul median $A'B'D'$. Deci E este piciorul bisectoarei din A' . Urmează că centrul de greutate al maselor m_A și $m_E = m_{B'} + m_{D'}$ se va găsi pe segmentul $A'E$. Prin simetrie, procedând analog și cu celelalte puncte B' și D' , se deduce că centrul de greutate C căutat se va găsi pe fiecare bisectoare a triunghiului $A'B'D'$, adică la intersecția lor.

c) bara omogenă în formă de arc de cerc. Fie arcul de cerc AB de rază R și unghiul la vârf 2α (fig.3.33). Alegem axa Ox ca fiind axă de simetrie a arcului. Centrul de greutate se va găsi pe axa Ox și pentru a-l determina aplicăm formula (3.86). Alegem elementul de arc PQ de lungime $ds = R d\theta$ cuprins între razele OQ (care face unghiul θ cu Ox) și OP (care face unghiul $\theta + d\theta$ cu axa Ox). Abscisa mijlocului elementului de arc PQ este $x = R \cos \theta$ și deci (3.86) devine:

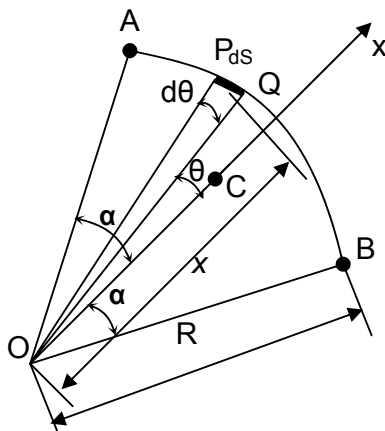


fig.3.33

$$OC = x_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x ds}{\int_{-\alpha}^{\alpha} ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.97)$$

în formula (3.97), α este jumătatea unghiului la centru al arcului, măsurat în radiani. În particular pentru semicerc ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), din (3.97) se deduce $x_C = \frac{2R}{\pi}$.

d) pentru placa triunghiulară omogenă, se împarte placa ABD în fâșii elementare paralele cu una din laturi, de exemplu cu AD (fig.3.34). Aceste fâșii

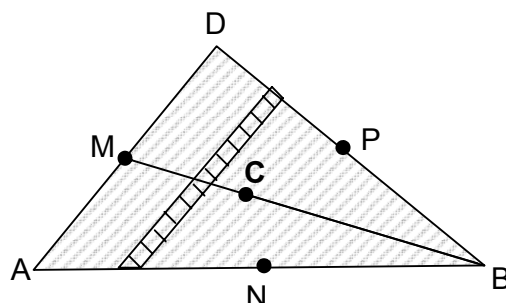


fig.3.34

elementare au lățimea infinit mică și pot fi approximate cu segmente de dreaptă. Centrul fiecărui segment se află în mijlocul lui. Toate mijloacele acestor fâșii elementare paralele cu AD se află pe mediana BM, deci și centrul de greutate C trebuie să fie pe această mediană (proprietatea b) de la 3.12.1. Asemănător se arată că punctul C se află și pe celelalte două mediane DN și AP, deci centrul de greutate se află la $\frac{2}{3}$

din aceasta față de vârf sau la $\frac{1}{3}$ din aceasta față de latură.

Față de un reper O, punctele A, B, D, au vectorii de poziție \vec{r}_A , \vec{r}_B , respectiv \vec{r}_D , iar punctul P-mijlocul lui BD, are vectorul de poziție $\vec{r}_P = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_D)$.

Punctul C împarte segmentul AP în raportul $\frac{CP}{AC} = \frac{1}{2}$ și deci:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_P + \frac{1}{2}\vec{r}_A}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_D}{3} \quad (3.98)$$

Urmează că centrul de greutate C al suprafeței triunghiului, are coordonatele, media aritmetică a coordonatelor corespunzătoare vârfurilor triunghiului:

$$x_C = \frac{x_A + x_B + x_D}{3}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B + y_D}{3}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B + z_D}{3} \quad (3.99)$$

e) Placa omogenă în formă de sector circular. Se consideră sectorul circular AOB din fig.3.55 de rază R și unghiul la centru 2α . Alegem axa Ox ca axă de simetrie a sectorului. Elementul de arie OPQ are valoarea $dS = \frac{1}{2}R^2 d\theta$ și centrul de greutate

e mediana din O a triunghiului OPQ la distanța $2/3R$ față de aceasta. Folosind formula

(3.87), în care $x = \frac{2}{3}R \cos \theta$, putem scrie:

$$OC = x_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x dS}{\int_{-\alpha}^{\alpha} dS} = \frac{\frac{1}{3}R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\frac{1}{2}R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.100)$$

Și în acest caz α este jumătatea unghiului la centru și se măsoară în radiani.

În particular, în cazul suprafeței semicercului ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), se obține $x_C = \frac{4R}{3\pi}$.

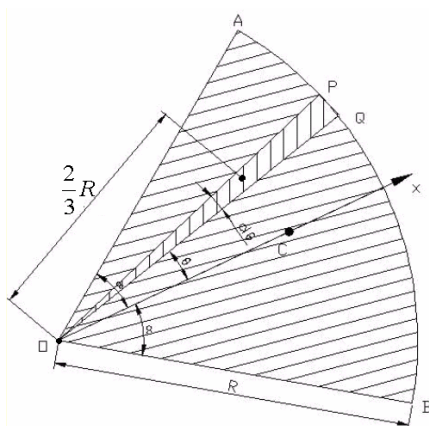


fig. 3.35

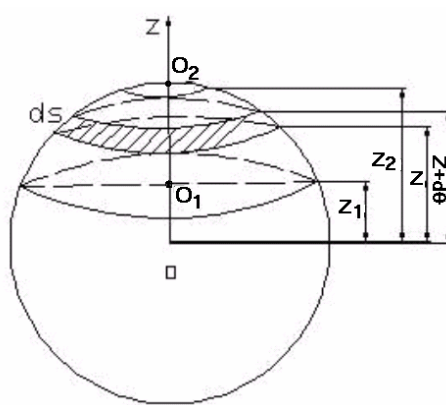


fig. 3.36

f) Placa omogenă în formă de zonă sferică. Zona sferică este porțiunea din suprafața unei sfere cuprinsă între două plane paralele care intersectează sfera. Considerăm sfera de rază R , iar cele două plane paralele z_1 respectiv z_2 (fig. 3.36). Centrul sferei este O , iar Oz axa de simetrie a zonei sferice.

Aria elementară dS este cuprinsă între planele de cote z și $z+dz$ și are valoarea $dS=2\pi R dz$. Formula (3.87) devine:

$$z_C = \frac{\int_{z_1}^{z_2} z dS}{\int_{z_1}^{z_2} dS} = \frac{2\pi R \int_{z_1}^{z_2} z dz}{2\pi R \int_{z_1}^{z_2} dz} = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (3.101)$$

Deci centrul de greutate al unei zone sferice omogene se află la mijlocul segmentului ce unește centrele cercurilor de bază.

g) Centrul de greutate al tetraedrului omogen. În tetraedrul ABDE se duc plane paralele cu una din fețe de grosimi infinit mici. Aceste plăci pot fi asimilate cu suprafețele unor triunghiuri a căror centre de greutate se află la intersecția medianelor. Toate centrele acestor triunghiuri se află pe segmentul ce unește un vârf cu punctul de

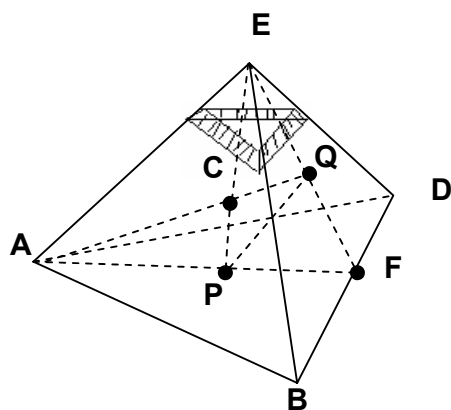


fig. 3.37

intersecție al medianelor feței opuse. În fig.3.37, centrul de greutate al tetraedrului se va găsi pe dreapta EP, unde P este punctul de intersecție al medianelor feței ABD.

Analog se arată că centrul de greutate al tetraedrului se găsește și pe segmentul de dreaptă AQ, unde Q este punctul de intersecție al medianelor feței BDE.

În acest fel, se deduce că centrul C căutat se află la intersecția dreptelor EP și AQ. Dacă notăm cu F

mijlocul lui BD, rezultă că punctul C se află în planul AFE.

Folosind proprietatea medianelor într-un triunghi, se poate scrie:

$$\frac{QF}{EF} = \frac{PF}{AF} = \frac{1}{3} \quad (3.102)$$

ceea ce implică paralelismul segmentelor PQ și AE. Astfel, triunghiurile CPQ și ACE

vor fi asemenea și în plus $\frac{PQ}{AE} = \frac{1}{3}$ și deci:

$$\frac{CP}{CE} = \frac{PQ}{AE} = \frac{1}{3} \quad (3.103)$$

Dar $\frac{CP}{CE} = \frac{1}{3}$ implică $\frac{CP}{PE} = \frac{1}{4}$ și $\frac{CE}{PE} = \frac{3}{4}$. Se deduce că punctul C se află pe segmentul PE astfel că:

Dar $\frac{CP}{CE} = \frac{1}{3}$ implică $\frac{CP}{PE} = \frac{1}{4}$ și $\frac{CE}{PE} = \frac{3}{4}$. Se deduce că punctul C se află pe segmentul PE astfel că:

$$CP = \frac{1}{4} PE, \quad CE = \frac{3}{4} PE \quad (3.104)$$

În concluzie, centrul de greutate C al tetraedrului omogen coincide cu centrul de greutate al suprafeței secțiunii dusă paralel cu una din fețe la $\frac{1}{4}$ din înălțime față de ea, respectiv la $\frac{3}{4}$ de vârful opus.

h) Centrul de greutate al piramidei omogene. Se împarte baza piramidei în

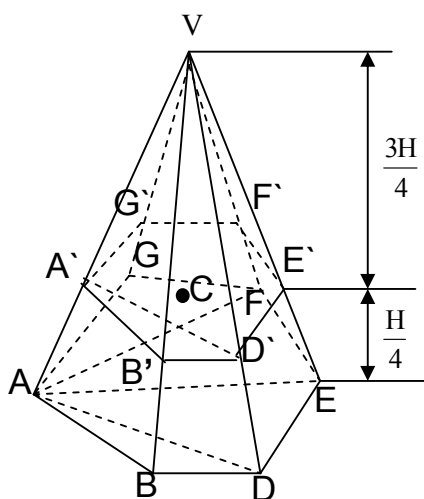


fig.3.38

triunghiuri formate prin unirea unui vârf al bazei cu celelalte nealăturate. În acest fel, piramida este împărțită în tetraedre care au același vârf. În fig.3.38 piramida VABDEFG cu baza un hexagon se împarte în patru tetraedre VABD, VADE,VAEF și VAFG. Ducem un plan paralel cu baza la $\frac{1}{4}$ din înălțimea față de aceasta (sau la $\frac{3}{4}$ față de vârf) care intersectează piramida, obținându-se secțiunea $A'B'D'E'F'G'$. Centrele de greutate ale tetraedrelor VABD, VADE,VAEF și VAFG coincid cu centrele de greutate ale suprafețelor triunghiurilor $A'B'D'$, $A'D'E'$, $A'D'E'$, $A'E'F'$, $A'F'G'$.

Între ariile triunghiurilor din cele două plane au loc relațiile:

$$\frac{S_{A'B'D'}}{S_{ABD}} = \frac{S_{A'D'E'}}{S_{ADE}} = \frac{S_{A'E'F'}}{S_{AEF}} = \frac{S_{A'F'G'}}{S_{AFG}} = \frac{9}{16} \quad (3.105)$$

ceea ce implică:

$$\frac{V_{VABD}}{S_{A'B'D'}} = \frac{V_{VADE}}{S_{A'D'E'}} = \frac{V_{VAEF}}{S_{A'E'F'}} = \frac{V_{VAFG}}{S_{A'F'G'}} = \frac{16}{27} H \quad (3.106)$$

În centrele de greutate ale suprafețelor $A'B'D'$, $A'D'E'$, $A'E'F'$ și $A'F'G'$ vom aplica forțe proporționale cu volumele tetraedrelor sau ,ce este echivalent, cu suprafețele bazelor (deoarece tetraedrele au aceeași înălțime) sau chiar cu suprafețele secțiunilor. Dar centrul acestor forțe este tocmai centrul de greutate al suprafeței poligonului de secțiune $A'B'D'E'F'G'$.

Prin urmare, centrul de greutate al piramidei omogene coincide cu centrul de greutate al secțiunii duse paralel cu baza la $\frac{1}{4}$ din aceasta față de bază (sau $\frac{3}{4}$ față de vârf).

Un caz particular este un con omogen oarecare, care poate fi considerat ca limita unei piramide cu baza un poligon înscris în curba bazei, al cărui număr de laturi crește nemărginit. Mărimea acestor laturi tinde către 0, iar centrul de greutate al conului va coincide cu centrul de greutate al piramidei astfel considerate.

Rezultă că centrul de greutate al conului coincide cu centrul de greutate al secțiunii făcute prin con printr-un plan paralel cu baza, dus la $\frac{1}{4}$ din înălțimea conului față de bază.

i) Centrul de greutate al sectorului sferic omogen. Sectorul sferic este porțiunea din sferă mărginită de suprafața unui con cu vârful în centrul sferei și a calotei sferice corespunzătoare bazei conului. Considerăm un sector sferic cu

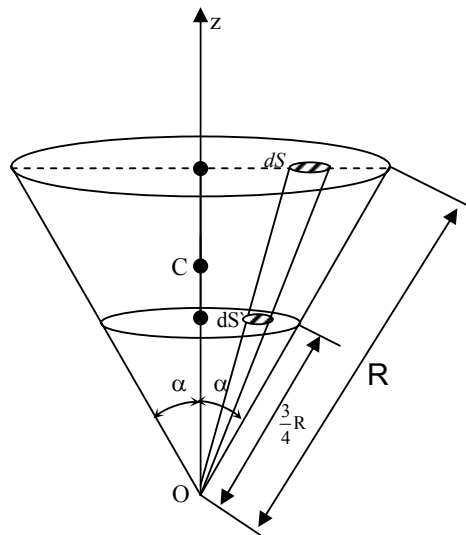


fig.3.39

unghiul plan de la vârf 2α și raza sferei R . Alegem axa Oz ca axă de simetrie a sectorului sferic. Conul elementar cu baza de arie dS situată pe calota sferică are volumul elementar $dV = \frac{1}{3} R ds$. Se

consideră calota sferică de rază $\frac{3}{4} R$, care este intersectată de conul elementar după o suprafață de arie dS' . Dar centrul de greutate al conului elementar coincide cu centrul de greutate al elementului de arie dS' .

În mod analog formulelor (3.106), deducem că volumul conului elementar este dat de $dV = \frac{16}{27} R dS'$.

În locul volumului elementar dV se poate introduce aria dS' , deci centrul de greutate al volumului sectorului sferic

coincide cu centrul de greutate al suprafeței calotei sferice corespunzătoare de rază $\frac{3}{4} R$.

Dar centrul de greutate al suprafeței calotei sferice este la mijlocul înălțimii (formula 3.101), astfel că:

$$OC = z_c = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} R + \frac{3}{4} R \cos \alpha \right) = \frac{3}{8} R (1 + \cos \alpha)$$

sau

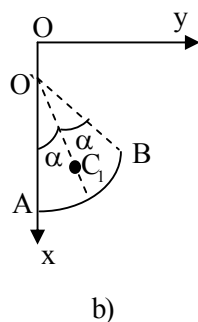
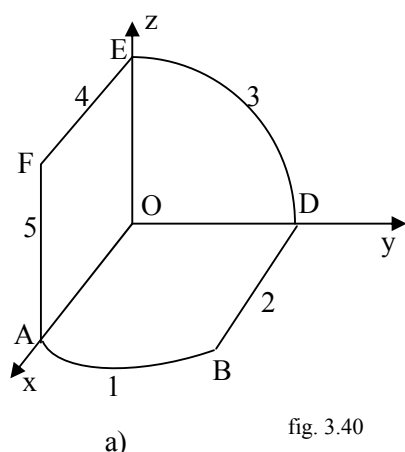
$$OC = \frac{3}{8} R (1 + \cos \alpha) \quad (3.107)$$

În particular pentru emisferă ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) $z_c = \frac{3}{8} R$

Aplicație:

Să se determine poziția centrului de greutate al cadrului de sârmă omogen ABDEF, în care arcul de cerc AB are tangenta în A paralelă cu Oy, sfertul de cerc DE are centrul în O, $BD \parallel EF \parallel Ox$, $AF \parallel Oz$, $OD=OE=AF=\sqrt{3}l$, $BD=2l$, $OA=EF=3l$ (fig.3.40).

Rezolvare: Notăm C_i centrul de greutate pentru bara i ($i=\overline{1,5}$). Pentru bara AB, centrul arcului de cerc O' se va afla pe OA deoarece tangenta în A la arc va fi perpendiculară pe Ox. Fie $x=O'A=O'B$ și $2\alpha=\angle(AO'B)$. din condițiile $O'B \sin 2\alpha=OD$ și $O'B \cos 2\alpha=O'A-(OA-BD)$ se formează sistemul



$$\begin{aligned} x \sin 2\alpha &= \sqrt{3}l \\ x \cos 2\alpha &= x - l \end{aligned}$$

care are soluția $x=2l$,
 $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Pentru calcularea centrului de greutate cerut se formează tabelul:

Nr. barei	l_i	x_i	y_i	z_i	$l_i x_i$	$l_i y_i$	$l_i z_i$
1	$\frac{\pi}{3}l$	$(1 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi})l$	$\frac{3}{\pi}l$	0	$(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3})l^2$	l^2	0
2	$2l$	$l-l$	$\sqrt{3}l$	0	$2l^2$	$2\sqrt{3}l^2$	0
3	$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}l$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}l$	$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}l$	0	$3l^2$	$3l^2$
4	$3l$	$\frac{3}{2}l$	0	$\sqrt{3}l$	$\frac{9}{2}l^2$	0	$3\sqrt{3}l^2$
5	$\sqrt{3}l$	$3l$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}l$	$3\sqrt{3}l^2$	0	$\frac{3}{2}l^2$
	Σ				Σ_x	Σ_y	Σ_z

Se obțin:

$$x_c = \frac{\sum x}{\sum l_i} = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{24\sqrt{3} + 39 + 2\pi}{30 + 6\sqrt{3} + (2 + 3\sqrt{3})\pi} l,$$

$$y_c = \frac{\sum y}{\sum l_i} = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{30 + 6\sqrt{3} + (2 + 3\sqrt{3})\pi} l,$$

$$z_c = \frac{\sum z}{\sum l_i} = \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i} = \frac{9(3 + 2\sqrt{3})}{30 + 6\sqrt{3} + (2 + 3\sqrt{3})\pi} l$$

2) Se consideră placa plană omogenă verticală ABD din fig. 3.41.a) de greutate G în care arcul de cerc AD are centrul în B, arcul de cerc BD are centrul în A, iar triunghiul ABD este echilateral de latură $2l$. a) Să se determine poziția centrului de greutate C al plăcii. b) Forțele F_1, F_2, F_3 acționează ca în fig. 3.41.a) și au modulele egale cu greutatea plăcii. Să se reducă sistemul de forțe în O și să se scrie ecuația axei centrale ($PQ=l$).

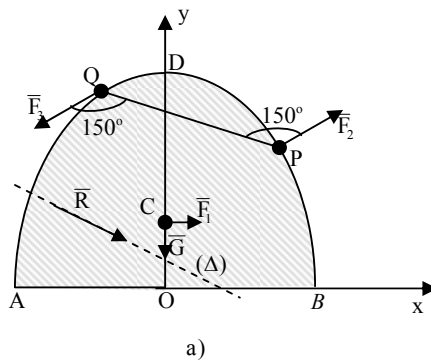
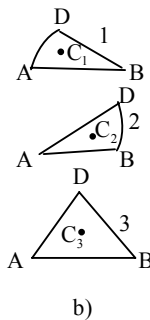


fig. 3.41

Rezolvare:

a) Descompunem placa dată în cele trei plăci componente din fig. 3.41.b). Pentru întocmirea tabelului de mai jos, avem:

$$BC_l = AC_2 = \frac{2}{3} 2l \frac{1}{2} \frac{6}{\pi} = \frac{4l}{\pi}$$



Nr. placă	A_i	y_i	$A_i y_i$
1	$\frac{2}{3} \pi l^2$	$\frac{2l}{\pi}$	$\frac{4}{3} l^3$
2	$\frac{2}{3} \pi l^2$	$\frac{2l}{\pi}$	$\frac{4}{3} l^3$
3	$-\sqrt{3} l^2$	$\frac{l\sqrt{3}}{3}$	$-l^3$

Am ținut seama că axa Oy este axă de simetrie. Se obține

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{5l}{4\pi - 3\sqrt{3}} \approx 0,68l$$

b) Pentru reducere, forțele F_2 și F_3 nu sunt bine precizate, deoarece poziția punctelor P și Q nu este unică. Totuși, cele două forțe formează un cuplu, deci rezultanta sistemului de forțe are componentele:

$$X=F_1=G \quad Y=-G$$

Mărima momentului este $M_0 = F_2 l \frac{1}{2} - y_C F_1 = G(\frac{l}{2} - y_C)$, astfel că

$$\bar{R} = G\bar{i} - G\bar{j}, \bar{M}_0 = G(\frac{l}{2} - y_C)\bar{k} \quad (\text{rezultanta unică în care punctul O nu se află pe}$$

axa centrală (Δ) a cărei ecuație este: $x+y=0,18l$.

3) Să se determine centrul de greutate al corpului volumetric din fig.3.42.a) compus dintr-un semicilindru ABDE și porțiunea dintr-o sferă mărginită de calota DEV de înălțime $O_2V = \frac{R}{2}$. Se cunosc $DO_2 = O_2E = AO_1 = O_1B = R$, $BD = 4R$ (O_2 este centrul cercului de bază al calotei DEV).

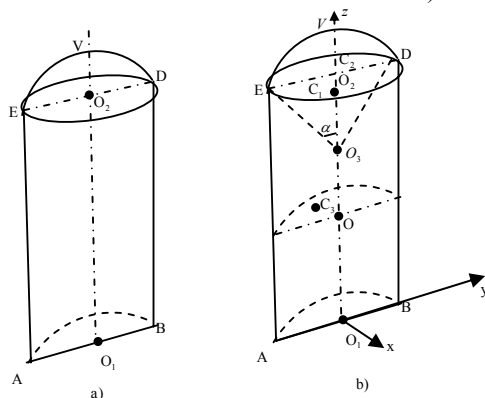


fig.3.42

Rezolvare: Corpul dat se descompune în următoarele trei: (fig.3.42.b): corpul 1- conul DO_3E , corpul 2- sectorul sferic O_3DVE , corpul 3- semicilindrul ABDE, unde O_3 este centrul sferei din care provine calota DEV. Centrele de greutate ale celor trei corpuri le notăm respectiv C_1, C_2, C_3 .

Pentru determinarea poziției lui O_3 ($O_3 \in O_1z$), notăm $O_3O_2 = z$. Din condiția $DO_3 = O_3V$, rezultă

$$\sqrt{R^2 + x^2} = \frac{R}{2} + x, \quad \text{de unde}$$

$x = \frac{3}{4}R$, astfel că raza sferei este $r = \frac{3}{4}R + \frac{R}{2} = \frac{5}{4}R$. Dacă $\alpha = \angle EO_3O_2$ atunci

$\cos \alpha = 3/5$. Din $O_3C_2 = \frac{3}{8}r(1 + \cos \alpha) = \frac{3}{8} \frac{5R}{4} \frac{8}{5} = \frac{3}{4}R$ rezultă că punctele O_2 și C_2

coincid. Planul xO_1z este plan de simetrie, deci $y_c = 0$, astfel că putem completa tabelul:

Nr.corp	V_i	x_i	z_i	$V_i x_i$	$V_i z_i$
1	$-\frac{\pi R^3}{4}$	0	$\frac{61}{16}R$	0	$-\frac{61\pi}{64}R^4$
2	$\frac{4\pi R^3}{15}$	0	$4R$	0	$\frac{16}{15}\pi R^4$
3	$2\pi R^3$	$-\frac{4R}{3\pi}$	$2R$	$-\frac{8}{3}R^4$	$4\pi R^4$

Rezultă: $x_C = -\frac{160R}{121\pi}$, $z_C = \frac{359R}{176\pi}$. Am ținut seama în calculul lui V_2 de aplicația 1 de la 3.12.3.

3.12.3. Teoremele lui Pappus-Guldin

Teorema 1. Se consideră un arc de curbă plană AB(fig.3.43). Aria suprafeței generată printr-o rotație completă a arcului de curbă în jurul unei axe din planul său, pe care nu o intersectează este egală cu lungimea arcului de curbă înmulțită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei.

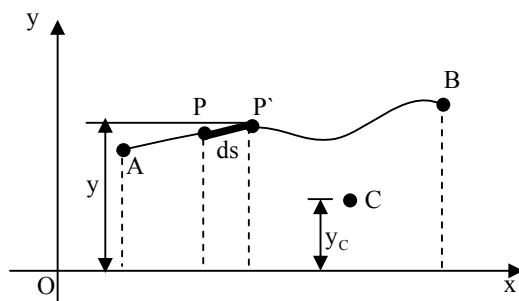


fig. 3.43

Elementul de arc $PP'=ds$ generează prin rotație o suprafață având generatoarea ds , raza medie y și aria

$$dA = 2\pi y ds \quad (3.108)$$

Aria totală este:

$$A = \int_{(L)} dA = 2\pi \int_{(L)} y ds$$

iar din (3.86) rezultă $\int_{(L)} y ds = y_C L$ și

deci aria devine:

$$A = 2\pi y_C L \quad (3.109)$$

Teorema 2. Se consideră o suprafață plană (fig.3.44). Volumul generat prin rotirea completă a suprafeței în jurul unei axe din planul său, pe care nu o intersectează, este egal cu aria suprafeței respective înmulțită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței.

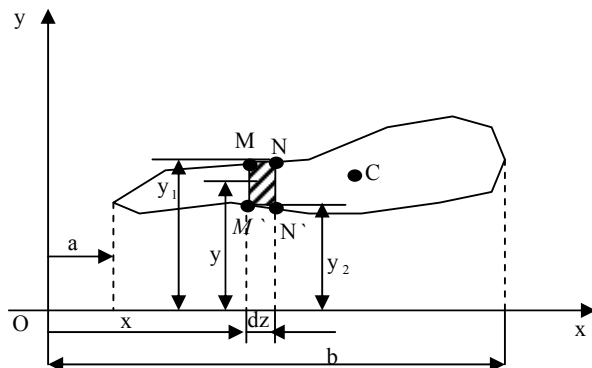


fig. 3.44.

Volumul elementar dV care rezultă prin rotirea elementului de suprafață $MNN'M'$ poate fi considerat ca diferența volumelor a doi cilindri de înălțime dx și raze y_1 respectiv y_2 :

$$dV = \pi y_1^2 dx - \pi y_2^2 dx =$$

$$= \pi(y_1^2 - y_2^2) dx$$

Volumul total va fi:

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx \quad (3.110)$$

Pe de altă parte, suprafața elementară $MNN'M'$ are aria $dA = (y_1 - y_2)dx$, iar ordonata centrului de greutate este $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. În acest fel, relația (3.110) se mai poate scrie sub forma

$$V = 2\pi \int_a^b y dA$$

Folosind formulele (3.87), formula volumului devine:

$$V = 2\pi y_C A \quad (3.111)$$

unde A este aria suprafeței plane date.

Aplicații: Să se determine volumul unui sector sferic de rază R și unghi la centru plan α (fig. 3.45).

Rezolvare: Vom determina volumul cerut, aplicând teorema a doua a lui Pappus-Guldin. Considerăm (fig. 3.45) placa plană AOB de forma unui sector circular având unghiul la centru α , raza R și situată în planul Oxy . Dacă C este centrul de greutate al plăcii, iar C' proiecția pe axa Ox avem:

$$OC = \frac{4}{3} R \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}, CC' = y_C = OC \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} R \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}.$$

Aria plăcii AOB este $A = \frac{\alpha}{2} R^2$, astfel că volumul cerut va fi dat de relația (3.111) care devine:

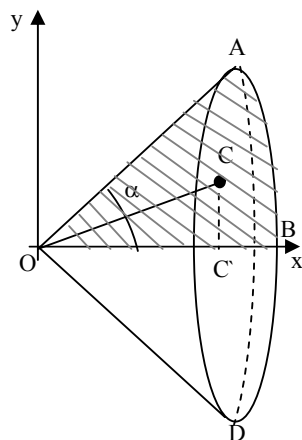


fig. 3.45.

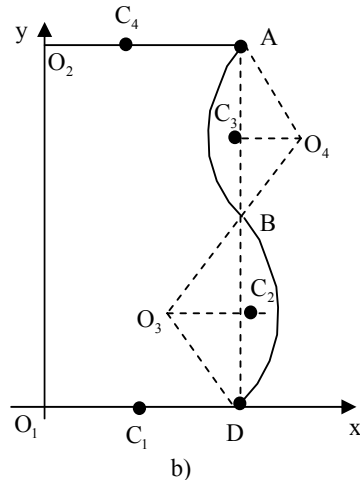
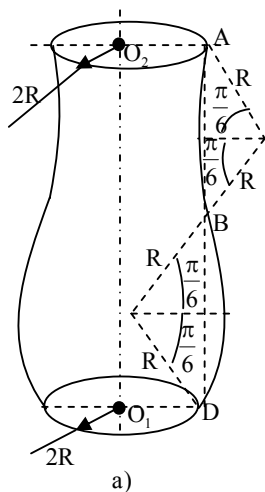


fig. 3.45.

$$V = 2\pi y_C A = \frac{\pi}{3}(1 - \cos \alpha)R^3$$

2) Să se determine aria totală a corpului din fig. 3.46.a.

Rezolvare: Vom aplica teorema 1 a lui Pappus-Guldin pentru cadrul O_1DBAO_2 din fig.3.46.b). Avem următoarea descompunere a barelor:

1. bara dreaptă O_1D , 2. bara arc de cerc BD , 3. arc de cerc AB , 4. bara dreaptă O_2A .

cu centrele de greutate notate respectiv C_1, C_2, C_3, C_4 . Pentru calculul centrului de greutate al cadrului, avem:

$$x_1 = O_1C_1 = R; \quad O_3C_2 = O_4C_3 = \frac{3}{\pi}R, \quad x_2 = 2R - R \cos \frac{\pi}{6} + \frac{3R}{\pi},$$

$$x_3 = 2R + R \cos \frac{\pi}{6} - \frac{3R}{\pi}, \quad x_4 = O_2C_4 = R; \quad l_1 = l_4 = 2R; \quad l_2 = l_3 = \frac{\pi}{3}R$$

$$\text{astfel că: } x_C = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i} = \frac{2(\pi + 3)}{\pi + 6}R \text{ Aplicând formula (3.108) avem:}$$

$$A = 2\pi x_C L = 2\pi \frac{2(\pi + 3)}{\pi + 6}R(4R + \frac{2\pi}{3}R) = \frac{9}{3}\pi(\pi + 3)R^2$$

3.13. Echilibrul corpului rigid

Un corp rigid este liber dacă poate ocupa orice poziție în spațiu, iar poziția acestuia depinde numai de forțele care acționează asupra lui. Corpul este în echilibru dacă sistemul de forțe care acționează asupra lui este echivalent cu 0. Într-un punct arbitrar O , ecuațiile de echilibru sunt:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0 \quad (3.112)$$

Aceste două ecuații vectoriale conduc la șase ecuații scalare pentru rigidul în spațiu sau trei ecuații scalare în plan.

Dacă într-o problemă de echilibru a unui corp rigid, numărul ecuațiilor scalare independente de echilibru este egal cu numărul necunoscutelor scalare, atunci problema este static determinată. În cadrul mecanicii teoretice se rezolvă numai probleme static determinate. Problemele static nedeterminate fac obiectul altor cursuri.

Pentru rezolvarea problemei echilibrului rigidului liber, este necesar să determinăm numărul gradelor de libertate ale rigidului liber. Pentru a stabili poziția unui rigid oarecare în spațiu, este necesar să se cunoască poziția a trei puncte necoliniare. Dar fiecare punct este definit prin trei parametri. Acești nouă parametri nu sunt independenți, deoarece distanțele dintre puncte rămân constante, corpul fiind nedeforabil. Prin urmare, între cei nouă parametri se pot scrie trei relații și rezultă

că doar șase rămân independenți. În concluzie, un rigid liber în spațiu are șase grade de libertate. În plan este necesar să se cunoască poziția a două puncte și ținând seama că distanța dintre cele două puncte este constantă, se obține în final că rigidul liber în plan are trei grade de libertate.

Deci ecuațiile vectoriale (3.112) se obține un sistem de șase ecuații scalare având ca necunoscute cele șase coordonate care definesc poziția corpului în spațiu, respectiv trei ecuații scalare cu trei necunoscute în plan. În general, acest sistem de ecuații poate fi rezolvat. Astfel rezultă pozițiile corpului pentru care sistemul de forțe este în echilibru, poziții numite de echilibru.

Deoarece pozițiile de echilibru principal întotdeauna se pot determina, problema pusă este static determinată

3.14. Echilibrul rigidului supus la legături fără frecare

Corpul rigid este supus legături când prezența altor corpuri fac imposibile anumite mișcări ale acestuia în raport cu corpul material cu ajutorul căruia s-au realizat legăturile. În vederea rezolvării unei astfel de probleme de echilibru a corpului rigid supus la legături, se folosește axioma legăturilor: legăturile pot fi înlocuite cu sisteme de forțe numite reacțiuni (forțe de legătură) care au același efect asupra corpului ca și legăturile. Reacțiunea unei legături la care este supus un corp rigid este o forță sau un cuplu sau un sistem de forțe care se reduce la un torsesor complet. În general trebuie studiat fiecare tip de legătură și determinate elementele torsesorului de reducere al forțelor de legătură.

Asupra unui corp rigid supus legăturii acționează două categorii de forțe exterioare: direct aplicate și de legătură. Notând \bar{R}_d și \bar{M}_d , respectiv \bar{R}_l și \bar{M}_l elementele torsesorilor de reducere în raport cu un punct arbitrar, a sistemelor forțelor direct aplicate, respectiv de legătură, condițiile (3.112) de echilibru devin:

$$\bar{R}_d + \bar{R}_l = 0, \quad \bar{M}_d + \bar{M}_l = 0 \quad (3.113)$$

Din (3.113) rezultă că reacțiunea legăturii este egală și de sens contrar cu acțiunea corpului material dat.

În caz corpului supus la legături, numărul gradelor de libertate scade sub șase. Deci și numărul parametrilor necunoscuți care determină poziția corpului este mai mic decât șase. Elementele torsesorului de reducere al forțelor de legătură nu sunt complet determinate de natura legăturii. Legăturile mai obișnuite ale corpului rigid sunt: rezemarea, articulația, încastrarea, legătura prin fir. Ele pot fi fără frecare (ideale) sau cu frecare. Vom studia în continuare aceste legături ale corpului rigid.

3.14.1. Reazemul simplu

Rezemarea este legătura prin care un corp se sprijină pe un alt corp. Urmează că punctul de contact dintre cele două corpuri, rămâne permanent pe o suprafață sau o

curbă dată. Astfel, se consideră cazul cel mai general, ce corespunde unui contact punctual al celor două corpuri. Corpul (C_1) se sprijină într-un punct A pe un alt corp (C_2) (fig.3.47). suprafețele celor două corpuri (C_1) și (C_2) au în punctul A un plan tangent (T) și normala comună (n) .

Reazemul simplu suprimă un grad de libertate, deci în spațiu rigidul rămâne cu cinci grade de libertate, iar în plan cu două grade de libertate.

Pentru a studia forțele care apar în punctul teoretic de contact A , se descompun elementele torsorului de reducere al forțelor direct aplicate $\bar{F}_i (i = \overline{1, n})$ în câte două componente. Rezultanta \bar{R}_d se descompune în \bar{R}_n după normala comună A_n din punctul A și \bar{R}_t după o dreaptă (δ) care rezultă din intersecția planului (T) cu planul definit de \bar{R}_d și normala A_n . Momentul \bar{M}_d se descompune în \bar{M}_n după A_n și \bar{M}_t după (Δ) , intersecția planului (T) cu planul definit de \bar{M}_d și A_n .

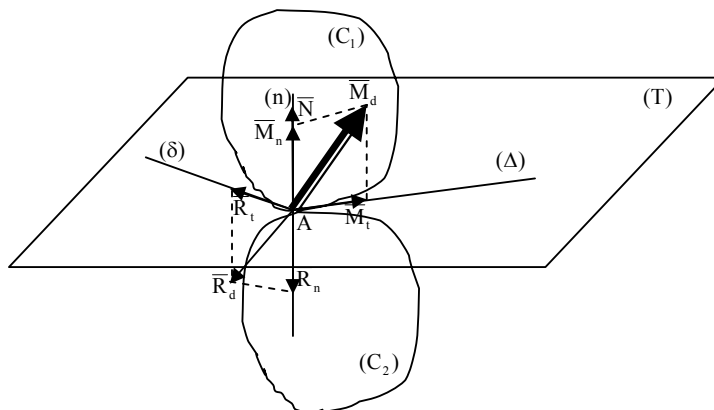


fig. 3.47

Componenta \bar{R}_n are tendința de a deplasa corpul (C_1) în direcția normalei, spre corpul (C_2) . Dar această deplasare nu e posibilă din cauza rigidității corpurilor (C_1) și (C_2) , și deci conform principiului acțiunii și al reacțiunii, apare o forță de legătură \bar{N} egală și direct opusă lui \bar{R}_n :

$$\bar{R}_n + \bar{N} = 0 \quad (3.114)$$

Componenta \bar{R}_t caută să pună în mișcare corpul (C_1) în planul tangent, în cazul ideal neexistând nici o forță care să i se opună. Pentru a avea echilibru, este necesar ca această componentă să fie nulă.

$$\bar{R}_t = 0 \quad (3.115)$$

Componentele \bar{M}_t și \bar{M}_n ale momentului rezultat caută să imprimе corpului mișcări de rostogolire, respectiv de pivotare. Dar, în cazul echilibrului, astfel de mișcări nu pot exista, deci ambele componente trebuie să fie nule:

$$\bar{M}_t = 0, \bar{M}_n = 0 \quad (3.116)$$

Din (3.115) rezultă $\bar{R}_d = \bar{R}_n$, astfel că (3.114) se mai scrie:

$$\bar{R}_d + \bar{N} = 0 \quad (3.117)$$

iar din (3.116) rezultă:

$$\bar{M}_t = 0 \quad (3.118)$$

În concluzie, torsorul de reducere în punctul A al forțelor direct aplicate $\bar{F}_i (i = 1, n)$ și al forței \bar{N} , care apare în A este nul. Urmează că reacțiunea legăturii este forța normală \bar{N} . Mărimea este necunoscută apriori și se determină din condițiile de echilibru.

În cazul reazemului simplu, reacțiunea legăturii este o forță situată pe normala la cele două suprafețe ale corpurilor în punctul de contact. Dacă una din suprafețe are un punct singular de contact, atunci normala se consideră la cealaltă suprafață. Sensul reacțiunii normale în cazul legăturilor unilaterale este cel în care corpul părăsește legătura.

În fig.3.48 sunt date exemple de corpuri simplu rezemate, iar în fig. 3.49 simbolizarea reazemului simplu.

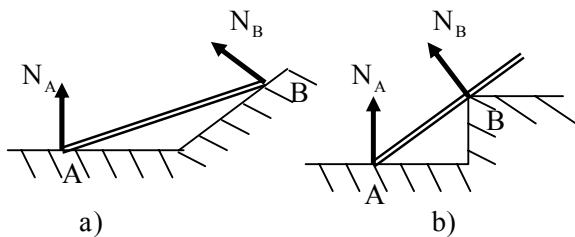


fig. 3.48

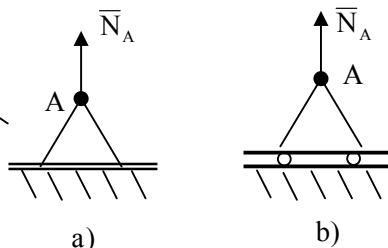


fig. 3.49

Aplicație: Bara omogenă AB se sprijină cu capătul A pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, iar cu capătul B pe un plan orizontal. Frecările se neglijează. Forța distribuită are valoarea q (fig.3.50).

Să se determine ecuația care dă poziția de echilibru (ecuație în θ) și să se calculeze reacțiunile din A și B în funcție de θ .

Rezolvare: (fig.3.50.b). Forța distribuită are valoarea lq , este perpendiculară pe bara AB și situată la distanța $\frac{l}{2}$ față de capătul A. Ecuațiile de echilibru (proiecții pe axele Ox și Oy și momente în raport cu mijlocul barei C) sunt:

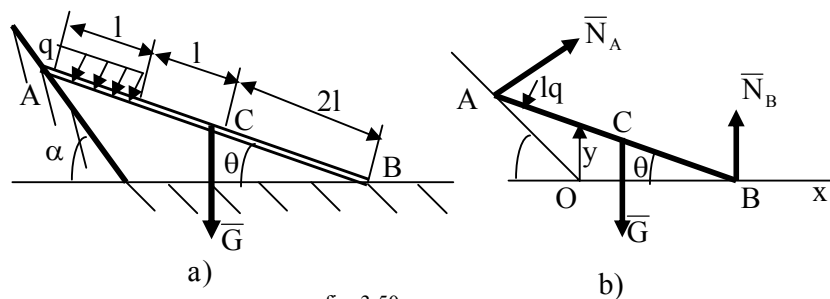


fig. 3.50

$$N_A \sin \alpha - lq \sin \theta = 0$$

$$N_A \cos \alpha - lq \cos \theta - G + N_B = 0$$

$$2lN_B \cos \theta - 2lN_A \cos(\alpha - \theta) + \frac{3l}{2}lq = 0$$

Prima ecuație conduce la $N_A = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} lq$, care se înlocuiește în a treia și se obține $N_B = \frac{4 \sin \theta \cos(\alpha - \theta) - 3 \sin \alpha}{4 \sin \alpha \cos \theta} lq$. Reacțiunile N_A și N_B se înlocuiesc în ecuația a doua, care după simplificări ne dă ecuația în θ cerută:

$$8 \sin(2\theta - \alpha) = \sin 2\alpha \left(3 + \frac{4G}{lq} \cos \theta\right)$$

3.14.2. Articulația

Articulația este legătura unui rigid prin care un punct al acestuia este obligat să rămână în permanență într-un punct fix, corpul putându-se roti în jurul acestui punct. Considerăm punctul O de articulație al corpului C (fig.3.51).

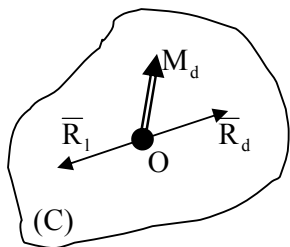


fig. 3.51

Sistemul de forțe F_i ($i=1, n$) care acționează asupra corpului, se reduce în punctul O la rezultanta \bar{R}_d și la momentul \bar{M}_d . Punctul O este fixat și deci deplasarea corpului C datorită forței \bar{R}_d nu este posibilă. Prin urmare, trebuie să existe o forță din partea articulației (\bar{R}_l) opusă lui \bar{R}_d pe care s-o echilibreze:

$$\bar{R}_d + \bar{R}_l = 0 \quad (3.119)$$

Momentul \overline{M}_d produce o rotație a corpului permisă de legătură. Deci pentru a avea echilibru, un astfel de moment nu poate exista. Rezultă că pentru echilibru trebuie satisfăcută și condiția.

$$\overline{M}_d = 0 \quad (3.120)$$

Condițiile (3.119) și (3.120) arată că tursorul forțelor date având elementele \overline{R}_d și \overline{M}_d împreună cu tursorul forțelor de legătură reprezentat de reacțiunea \overline{R}_l trebuie să fie nul. Prin aplicarea axiomei legăturilor în locul articulației se introduce o forță de legătură arbitrară \overline{R}_l , necunoscută ca mărime, direcție și sens.

Dacă solidul rigid este acționat de un sistem de forțe în spațiu, articulația care trebuie să permită orice rotație în jurul punctului fix O, se realizează cu ajutorul unei suprafețe de sprijin de formă sferică (fig.3.52). Asemenea legătură se numește articulație sferică sau spațială. În cazul în care solidul este acționat de un sistem de forțe coplanare, articulația se realizează cu ajutorul unei suprafețe de sprijin cilindrice și se numește articulație cilindrică. În fig. 3.53.a se simbolizează articulația sferică sau cilindrică.

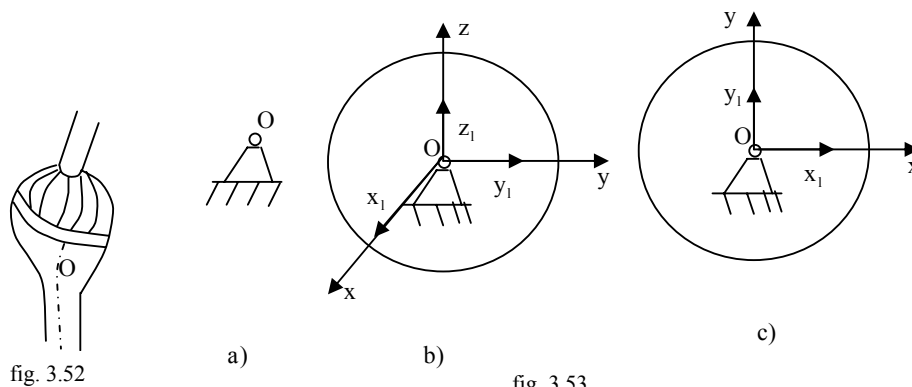


fig. 3.52

fig. 3.53

În cazul articulației sferice, se alege un sistem de axe Oxyz, reacțiunea \overline{R}_l se determină prin proiecțiile sale X_l, Y_l, Z_l (fig.3.53.b), deci introduce trei necunoscute scalare. Dar rigidul având o articulație, are numai trei grade de libertate, poziția unui punct arbitrar din rigid fiind totdeauna precizată.

În cazul articulației cilindrice, reacțiunea \overline{R}_l fiind în planul forțelor exterioare direct aplicate rigidului, are componente doar pe două axe perpendiculare din acest plan. Se alege sistemul de referință Oxy situat în planul forțelor date și deci reacțiunea \overline{R}_l este definită prin proiecțiile sale pe axe: X_l și Y_l , iar Z_l este nulă (fig.3.53.c).

În concluzie, legătura prin articulație reduce numărul gradelor de libertate ale unui rigid de la șase la trei în cazul articulației spațiale sau de la trei la una în cazul

articulației cilindrice, dar introduce ca necunoscute suplimentare proiecțiile reacțiunii \bar{R}_I pe un sistem de axe (trei pentru articulația sferică sau două pentru cea cilindrică).

Din ecuațiile (3.119) și (3.120) proiectate pe un sistem de axe, se obțin șase ecuații scalare în spațiu (sau trei în plan) din care rezultă poziția de echilibru a solidului și reacțiunea \bar{R}_I .

Aplicație: Bara AB de greutate neglijabilă, articulată în A și rezemată în D (fig.3.54.a) este acționată de sistemul de forțe și momentul M. Să se determine reacțiunile din A și D.

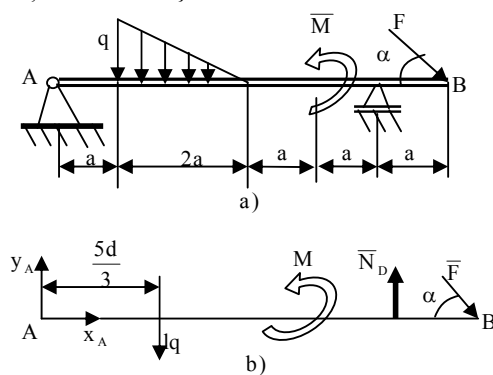


fig. 3.54

Rezolvare: (fig.3.54.b)

Proiecțiile pe axe și momentul față de punctul A se scriu:

$$X_A + F \cos \alpha = 0,$$

$$Y_A - aq + N_D - F \sin \alpha = 0$$

$$M + \frac{5}{3}a \cdot aq + 5aN_D - 6aF \sin \alpha$$

din care rezultă:

$$X_A = -F \cos \alpha$$

$$Y_A = \frac{2}{3}aq - \frac{1}{5}F \sin \alpha + \frac{1}{5a}M$$

$$N_D = \frac{1}{3}aq + \frac{6}{5}F \sin \alpha - \frac{1}{5a}M$$

3.14.3. Încăstrarea

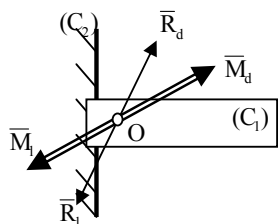


fig. 3.55

Un corp (C_1) este încadrat în alt corp (C_2) dacă este fixat rigid de acesta (fig.3.55). Încăstrarea suprimă toate gradele de libertate ale corpului și face imposibilă orice deplasare a lui. Orice sistem de forțe aplicate face ca rigidul (C_1) să rămână în echilibru față de corpul (C_2).

Dacă un sistem de forțe $\bar{F}_i (i = \overline{1, n})$ se reduce în raport cu punctul O la un torsor format din \bar{R}_d, \bar{M}_d , atunci aceste componente nu pot să aibă nici un efect asupra corpului, astfel că trebuie să existe un torsor datorat încadrării, format din forța \bar{R}_I și momentul \bar{M}_I opus primului. Pentru echilibru este deci necesar să aibă loc relațiile:

$$\bar{R}_d + \bar{R}_I = 0, \quad \bar{M}_d + \bar{M}_I = 0 \quad (3.121)$$

Încăstrarea este deci echivalentă cu un torsesor format din forța \bar{R}_I și momentul \bar{M}_I . În rezolvarea problemelor de echilibru, încăstrarea se înlocuiește printr-o forță și printr-un cuplu cu componentele necunoscute apriori.

În cazul corpului (C_1) supus unor forțe în spațiu, reacțiunea în încăstrare introduce șase necunoscute scalare și anume: X_I, Y_I, Z_I , care determină \bar{R}_I și M_{Ix}, M_{Iy}, M_{Iz} care determină \bar{M}_I .

În cazul când corpul (C_1) este supus numai unor forțe coplanare, reacțiunea din încăstrare se compune dintr-o forță situată în planul forțelor, de componente X_I, Y_I și un cuplu de moment M_{Iz} perpendicular pe planul forțelor. Numărul necunoscutelor scalare este deci trei în plan.

Aplicație: Bara cotită omogenă OABD este încăstrată în O și acționată de

forțele distribuite vertical de valoare maximă q , din momentul \bar{M} , iar greutatea specifică liniară a barei este p . Porțiunea OAB este orizontală, iar BD este verticală. Se cunosc $OA=3l, AB=2l, BD=l$. Se cer forțele de legătură din încăstrarea O.

Rezolvare: Condițiile de echilibru se scriu în acest caz:

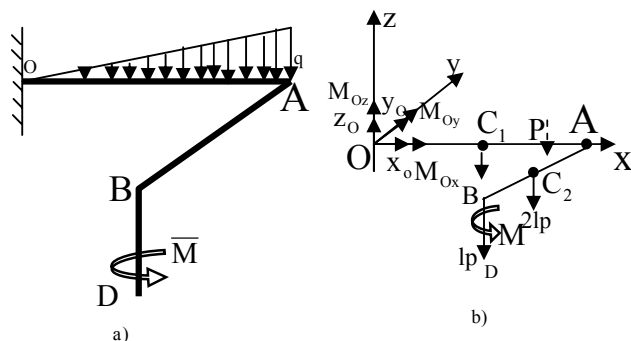


fig. 3.56

$$\bar{R}_O + \bar{F}_{OA} + \bar{G}_{OA} + \bar{G}_{AB} + \bar{G}_{BD} = 0$$

$$\bar{M}_{IO} + \bar{M}_O(\bar{F}_{OA}) + \bar{M}_O(\bar{G}_{OA}) + \bar{M}_O(\bar{G}_{AB}) + \bar{M}_O(\bar{G}_{BD}) + \bar{M} = 0$$

unde \bar{F}_{OA} este forța distribuită ce acționează asupra barei OA, \bar{G}_{PQ} fiind greutatea barei PQ.

Avem:

$$\bar{R} = X_O \bar{i} + Y_O \bar{j} + Z_O \bar{k}, \quad \bar{F}_{OA} = -\frac{3}{2} l q \bar{k}, \quad \bar{G}_{OA} = -3 l p \bar{k}, \quad \bar{G}_{AB} = -2 l p \bar{k},$$

$$\bar{G}_{BD} = -l p \bar{k} \quad (\text{fig. 3.56, b});$$

$$\bar{M}_{IO} = M_{Ox} \bar{i} + M_{Oy} \bar{j} + M_{Oz} \bar{k}; \quad \bar{M}_O(\bar{F}_{OA}) = \overline{OP} \times \bar{F}_{OA} = 3l^2 q \bar{j}; \quad OP = 2l,$$

$$\bar{M}_O(\bar{G}_{OA}) = \overline{OC_1} \times \bar{G}_{OA} = \frac{9}{2} l^2 p \bar{j}; \quad \bar{M}_O(\bar{G}_{AB}) = \overline{OC_2} \times \bar{G}_{AB} = 2l^2 p \bar{i} + 6l^2 p \bar{j};$$

$$\bar{M}_O(\bar{G}_{BD}) = \overline{OC_3} \times \bar{G}_{BD} = 2l^2 p \bar{i} + 3l^2 p \bar{j}; \quad \bar{M} = M \bar{k}.$$

Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$X_o = 0, Y_o = 0, Z_o = 6lp + \frac{3}{2}lq, M_{ox} = -4l^2 p; M_{oy} = -\frac{27}{2}l^2 p - 3l^2 q; M_{oz} = -M$$

3.14.4. Legătura prin fir

Firele, în statică se consideră perfect flexibile și inextensibile, deci legături unilaterale.

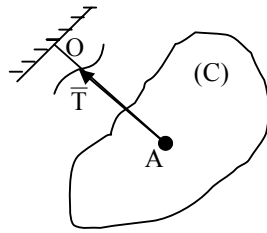


fig. 3.57

Corpul (C) este prins în punctul A cu un fir având un capăt fixat în punctul O (fig. 3.57). Punctul A al corpului se mișcă pe o sferă de rază OA, deci corpul este supus la o legătură unilaterală, adică la o rezemare pe suprafața unei sfere.

Legătura prin fir se înlocuiește cu o reacțiune având direcția normalei la suprafața sferei. Această forță de legătură se numește tensiune în fir.

În cazurile în care un solid rigid este supus în același timp la mai multe legături, se suprimă toate legăturile și se introduc în locul acestora elemente mecanice (forțe sau momente) corespunzătoare fiecărei legături.

Aplicatie: Bara OA de greutate \bar{G} și lungime $2l$ este articulată în O și se sprijină în punctul B pe un semicilindru de rază R. Asupra barei acționează momentul M, iar de capătul A este fixat un fir trecut peste un scripete, la celălalt capăt al firului aflându-se greutatea \bar{P} (fig. 3.58.a). a) Să se determine reacțiunile din O și B. b) pentru ce valoare a greutății P, bara nu se sprijină pe semicilindru?

Rezolvare: a) Forțele și momentul sunt introduse în fig. 3.58.b. Ecuațiile de proiecție pe cele două axe (forțele sunt coplanare) și de moment față de axa Oz sunt:

$$X_o - N_B \sin \beta + T \cos \alpha = 0, \quad Y_o - G - N_B \cos \beta + T \sin \alpha = 0$$

$$-M - lG + N_B R \cos \beta + 2lT \sin \alpha = 0$$

Ținând seama că $T=P$, sistemul are soluția:

$$N_B = \frac{\tan \beta}{R} (M + lG - 2lP \sin \alpha), \quad X_o = P \cos \alpha - \frac{\sin^2 \beta}{R \cos \beta} (M + lG - 2lP \sin \alpha),$$

$$Y_o = G - P \sin \alpha - \frac{\sin \beta}{R} (M + lG - 2lP \sin \alpha)$$

$$\text{din condiția } N_B=0, \text{ rezultă } P_{\min} = \frac{1}{2l \sin \alpha} (M + lG).$$

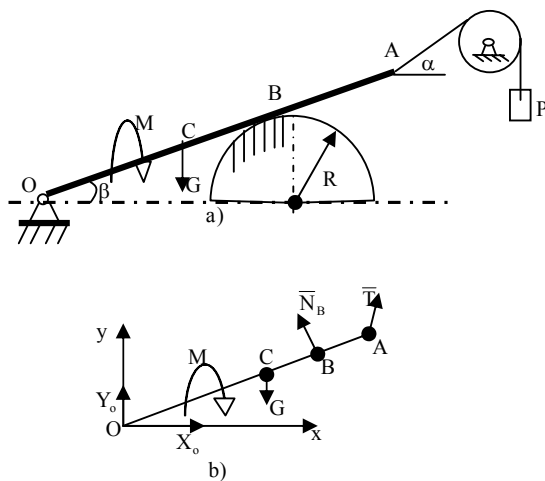


fig.3.58

3.15. Echilibrul rigidului supus la legături cu frecare

3.15.1. Generalități

Am văzut că în cazul legăturilor fără frecare, în cazul reazemului simplu, mișcarea (alunecarea) ar trebui să aibă loc când rezultanta forțelor exterioare are o componentă \bar{R}_t cuprinsă în planul tangent la cele două corpuri în punctul comun de contact O. În realitate, componenta \bar{R}_t trebuie să depășească o anumită limită spre a pune corpul în mișcare. Acest lucru se explică prin faptul că din cauza deformabilității, corpurile nu au un singur punct de contact O, ci o suprafață. Suprafața de contact prezintă asperități care se deformează în prezența diverselor forțe sau momente, iar mișcarea este împiedicată și din cauza acțiunii dintre moleculele corpurilor în contact. Am arătat că dacă nu se ține seama de deformabilitatea corpurilor, torsiul forțelor exterioare $\bar{F}_i (i = \overline{1, n})$ se reduce în punctul de contact la o rezultantă \bar{R}_d și la momentul resultant \bar{M}_d . Acestora le corespunde pentru echilibru, torsiul forțelor de legătură format din rezultanta \bar{R}_l și momentul \bar{M}_l .

3.15.2. Frecare de alunecare

Vom considera cazul când torsiul de reducere al forțelor exterioare este

format numai din forța $\bar{R}_d = \bar{R}_n + \bar{R}_t$ (fig.3.59). Conform principiului acțiunii și reacțiunii, va apare pentru echilibru reacțiunea $\bar{R}_l = \bar{N} + \bar{F}_f$. În cazul echilibrului cu frecare, reacțiunea \bar{R}_l este înclinată cu unghiul α față de normala (On), iar în cazul echilibrului la limită, acest unghi îl notăm cu φ .

Componenta \bar{F}_f egală și opusă lui \bar{R}_t , situată în planul tangent (T) se numește forța de frecare de alunecare și are ca punct de aplicație punctul de contact O, direcția este dată de direcția tendinței de mișcare, sensul opus lui \bar{R}_t (opus tendinței de mișcare) și mărimea variabilă, cuprinsă între zero și o valoare maximă F_{fmax} , când corpul se află la limita echilibrului.

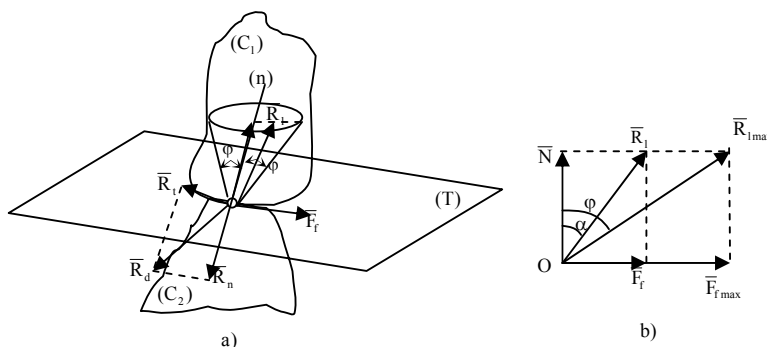


fig. 3.59

Experimental s-a stabilit că valoarea maximă este proporțională cu mărimea componentei normale \bar{N} a reacțiunii.

Din fig.3.59.b, observăm că $F_f = N \tan \alpha$, iar la limită $F_{fmax} = N \tan \varphi$. Notăm, la fel ca la echilibrul punctului material $\mu = \tan \varphi$ – coeficientul de frecare de alunecare, unde φ este unghiul de frecare, astfel că:

$$\begin{aligned} F_{fmax} &= \mu N \\ F_f &\leq F_{fmax} = \mu N \end{aligned} \quad (3.122)$$

Legile lui Coulomb studiate anterior (paragraful 2.3.5) rămân valabile și aici.

Rotind suportul reacțiunii \bar{R}_l , se obține conul de frecare, care are ca axă normală comună (O_n), iar unghiul la vârf 2φ . Corpul (C_1) este în echilibru când reacțiunea \bar{R}_l (respectiv \bar{R}_d) sunt în interiorul conului de frecare sau la limită pe generatoarele acestuia.

Aplicatie: Bara AB de lungime $2R$ și greutate G se sprijină cu capătul A pe o semisferă de centru O și rază R , iar cu capătul B pe un perete vertical. Punctele O, A, B, sunt coplanare. Poziția de echilibru este dată de unghiul θ (fig.3.60.a). Coeficienții de frecare din A și B sunt aceiași. Să se determine valorile coeficientului

de frecare pentru echilibru în poziția din figură. Să se arate că dacă $\theta > 135^\circ$, atunci bara nu poate fi în echilibru.

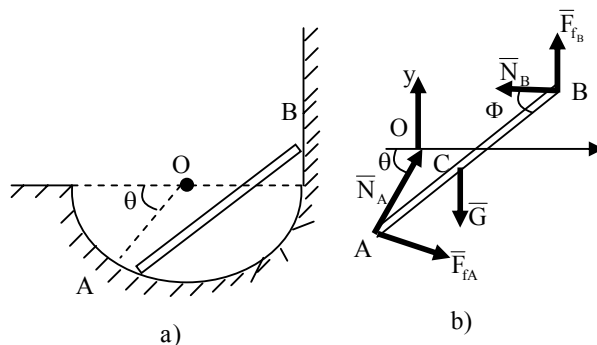


fig. 3.60

Rezolvare: Pentru început, presupunem că punctul B coboară (fig. 3.60.b).

Ecuatiile de echilibru sunt:

$$N_A \cos \theta + F_{fA} \sin \theta - N_B = 0$$

$$N_A \sin \theta - F_{fA} \cos \theta + F_{fB} = 0$$

$$2N_B \sin \Phi + 2F_{fB} \cos \Phi - G \cos \Phi = 0$$

unde Φ este unghiul barei AB cu orizontala. Din proiecția pe orizontală a barei AB scrisă în două moduri, deducem $2\cos\Phi = 1 + \cos\theta$.

La limita echilibrului se poate scrie în plus $F_{fA} = \mu N_A$, $F_{fB} = \mu N_B$, astfel că se obțin:

$$N_A = \frac{G(2 \sin \Phi + \mu \cos \Phi)}{2(\sin \theta - \mu \cos \theta)(\sin \Phi + \mu \cos \Phi)}, N_B = \frac{G \cos \Phi}{2(\sin \Phi + \mu \cos \Phi)}$$

$$F_{fA} = \frac{\mu G(2 \sin \Phi + \mu \cos \Phi)}{2(\sin \theta - \mu \cos \theta)(\sin \Phi + \mu \cos \Phi)}, F_{fB} = \frac{\mu G \cos \Phi}{2(\sin \Phi + \mu \cos \Phi)}$$

Prima ecuație a condițiilor de echilibru, devine:

$$(2 \sin \Phi + \mu \cos \Phi)(\cos \theta + \mu \sin \theta) = \cos \Phi(\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

sau:
$$2 \operatorname{tg} \Phi + \mu = \frac{\operatorname{tg} \theta - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \theta}$$

Ținând seama de relația de legătură între Φ și θ , care se mai scrie

$$\operatorname{tg} \Phi = \sqrt{\operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}, \text{ precum și de formula } \operatorname{tg} \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \text{ deducem condiția}$$

de echilibru la limită:

$$tg \frac{\theta}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2} = 2 \frac{\mu tg^2 \frac{\theta}{2} + (1 - \mu^2) tg \frac{\theta}{2} - \mu}{1 - tg^2 \frac{\theta}{2} + 2\mu tg \frac{\theta}{2}}$$

Din această ecuație, deducem valoarea minimă a lui μ :

$$\mu_{\min} = \frac{tg^2 \frac{\theta}{2} - 1 - tg^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2} + \sqrt{tg^6 \frac{\theta}{2} + 3tg^4 \frac{\theta}{2} + 2tg^2 \frac{\theta}{2} + 1}}{2tg \frac{\theta}{2}}$$

În cazul tendinței de mișcare opuse, se obține ecuația de echilibru:

$$tg \frac{\theta}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2} = \frac{\mu tg^2 \frac{\theta}{2} - (1 - \mu^2) tg \frac{\theta}{2} - \mu}{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2\mu tg \frac{\theta}{2} - 1}$$

din care deducem valoare maximă a lui μ :

$$\mu_{\max} = \frac{tg^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2} - tg^2 \frac{\theta}{2} + 1 + \sqrt{tg^6 \frac{\theta}{2} + 3tg^4 \frac{\theta}{2} + 2tg^2 \frac{\theta}{2} + 1}}{2tg \frac{\theta}{2}}$$

Ținând seama că membrul drept a lui μ_{\min} este pozitivă, condiția cerută este:

$$\begin{aligned} & \frac{tg^2 \frac{\theta}{2} - 1 - tg^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2} + \sqrt{tg^6 \frac{\theta}{2} + 3tg^4 \frac{\theta}{2} + 2tg^2 \frac{\theta}{2} + 1}}{2tg \frac{\theta}{2}} \leq \mu \leq \\ & \leq \frac{tg^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2} - tg^2 \frac{\theta}{2} + 1 + \sqrt{tg^6 \frac{\theta}{2} + 3tg^4 \frac{\theta}{2} + 2tg^2 \frac{\theta}{2} + 1}}{2tg \frac{\theta}{2}} < 1 \end{aligned}$$

Dacă ultima inegalitate nu este îndeplinită, condiția cerută va fi:

$$\frac{tg^2 \frac{\theta}{2} - 1 - tg^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{tg^2 \frac{\theta}{2} + 2} + \sqrt{tg^6 \frac{\theta}{2} + 3tg^4 \frac{\theta}{2} + 2tg^2 \frac{\theta}{2} + 1}}{2tg \frac{\theta}{2}} \leq \mu < 1$$

Dacă

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 2} + \sqrt{\operatorname{tg}^6 \frac{\theta}{2} + 3\operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1} > 2\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \text{atunci}$$

unghiul θ nu definește nici o poziție de echilibru. Pentru $\theta > 135^\circ$, rezultă $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} > 1 + \sqrt{2}$ și deducem imediat că ultima inegalitate are loc, deci nu există nici o poziție de echilibru.

3.15.3. Frecarea de rostogolire

Considerăm corpul (C_1) rezemat pe corpul (C_2) (fig.3.61). Torsorul forțelor exterioare aplicate asupra lui (C_1) , presupunem că este format numai din componentele \bar{R}_n și \bar{M}_t celelalte fiind nule. Componenta \bar{R}_n este anulată de

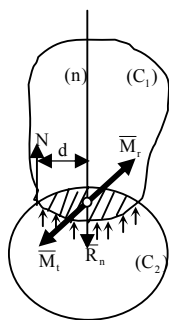


fig.3.61

reacțiunea normală \bar{N} , iar componenta \bar{M}_t în caz ideal ar produce o mișcare de rotație a solidului rigid în jurul unei axe din planul tangent, numită mișcare de rostogolire. Sub acțiunea cuplului \bar{M}_t , corpul (C_1) tinde să se rostogolească peste corpul (C_2) . Din cauza deformării din punctul de rezemare O dintre corpurile (C_1) și (C_2) , se produce un cuplu egal și direct opus lui \bar{M}_t , numit momentul frecării de rostogolire (\bar{M}_r).

Cauzele apariției frecării de rostogolire sunt deformațiile celor două corpuri în jurul punctului O, care fac ca acest punct să se transforme într-o suprafață. În fiecare punct al acestei suprafețe va apărea o reacțiune elementară. Acest sistem de reacțiuni se reduce în punctul O și se obține o reacțiune normală \bar{N} . Datorită tendinței de rostogolire dată de componenta \bar{M}_t , punctul O se deplasează în O' situat la extremitatea suprafeței de contact. Reacțiunea normală \bar{N} împreună cu componenta $\bar{R}_n = -\bar{N}$ constituie un cuplu al cărui moment este chiar momentul frecării de rostogolire care este opus cuplului \bar{M}_t . Se deduce astfel că \bar{M}_r a ajuns la o valoare maximă $M_{r \max}$.

Experimental, s-a stabilit că valoarea maximă $M_{r \max}$ este direct proporțională cu valoarea reacțiunii normale și că depinde de natura materialelor din care sunt construite corpurile în contact și de starea suprafețelor lor, astfel că putem scrie:

$$0 \leq M_r \leq M_{r \max} = sN \quad (3.123)$$

unde s este coeficientul de proporționalitate, numit coeficient de frecare la rostogolire. Valorile acestui coeficient se determină experimental și are dimensiunea unei

lungimi. Acest lucru rezultă din considerarea valorii maxime a brațului d , rezultat ca urmare a deformării corpurilor, ceea ce conduce la momentul maxim al frecării de rostogolire $M_{r \max} = dN$.

În rezumat, frecarea de rostogolire se manifestă printr-un cuplu opus cuplului care tinde să rostogolească corpul, de mărime variabilă de la zero până la valoarea maximă sN , în care N este mărimea reacțiunii normale dintre corpuri, iar s este coeficientul de frecare de rostogolire.

Coeficientul de frecare de rostogolire s este în general foarte mic, mișcarea de rostogolire se produce de obicei mai ușor decât cea de alunecare. În tehnică se folosesc din acest motiv rulmenți care introduc frecarea de rostogolire în locul celei de alunecare.

Aplicație: (Echilibrul roții trase). Se consideră (fig.3.62) o roată de rază R care este acționată de forța \vec{F} paralelă cu un plan înclinat cu unghi α față de orizontală. Roata este omogenă, de greutate \vec{G} și este conținută într-un plan normal planului înclinat. Rezemarea în O se face cu frecare de alunecare (coeficientul μ) și frecare de rostogolire (coeficient s). Să se studieze echilibrul în acest caz.

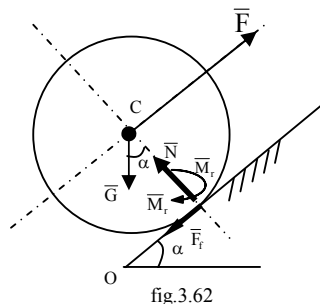


fig.3.62

și:

Rezolvarea Ecuatiile de echilibru sunt:

$$G - G \sin \alpha - F_f = 0 \quad N - G \cos \alpha = 0$$

$$-RF + GR \sin \alpha + M_r = 0$$

$$F_f \leq \mu N, M_r \leq sN$$

$$\text{Rezultă: } N = G \cos \alpha, F_f = F - G \sin \alpha,$$

$$M_r = R(F - G \sin \alpha)$$

Astfel că pentru echilibru trebuie îndeplinite condițiile:

$$F - G \sin \alpha \leq \mu G \cos \alpha, R(F - G \sin \alpha) \leq sG \cos \alpha$$

de unde rezultă:

$$P \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha); P \leq G(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha)$$

$$\text{În ipoteza } \mu > \frac{s}{R} \text{ (sau } \sin \alpha + \mu \cos \alpha > \sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha) \text{ și dacă}$$

$$G(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha) < P \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

atunci roata se rostogolește în sus fără să alunece pe planul înclinat.

$$\text{În ipoteza } \mu < \frac{s}{R} \text{ și } G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) < P \leq G(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha), \text{ roata}$$

alunecă în sus pe planul înclinat fără rostogolire.

În ipoteza $\mu = \frac{S}{R}$ roata părăsește poziția de echilibru prin rostogolire și alunecare în sus.

3.15.4. Frecarea de pivotare

În cele ce urmează, torsorul forțelor exterioare aplicare asupra corpului (C_1) îl presupunem format numai din \bar{R}_n și \bar{M}_n celelalte fiind nule.

Sub acțiunea cuplului \bar{M}_n corpul (C_1) tinde să se rotească în jurul normalei, păstrând neschimbată suprafața de contact, deci va tinde să pivoteze.

Și în acest caz mișcarea nu se produce dacă mărimea lui \bar{M}_n este mică. Rezultă că din cauza frecărilor dintre cele două corpuri pe suprafața de rezemare, se produce un cuplu \bar{M}_p de moment egal și opus lui \bar{R} a cărei mărime variază de la zero când $M_n=0$, la o valoare maximă $M_{p \max}$. Acesta este cuplul frecării de pivotare dintre corpurile (C_1) și (C_2) (fig.3.63.a).

Modul de formare a cuplului de frecare de pivotare se explică astfel. Sub acțiunea forței \bar{R}_n , pe fiecare element de arie dS din suprafața de contact a corpurilor (C_1) și (C_2) apare o reacțiune normală $d\bar{N}$. Mișcarea de pivotare este o mișcare de alunecare a suprafețelor în contact, deci pe fiecare element de suprafață dS (fig.3.63.b) apare o forță de frecare de alunecare $d\bar{F}_f$ a cărei valoare maximă este μdN , μ fiind coeficientul frecării de alunecare.

Momentul frecării de pivotare reprezintă momentul resultant al forțelor de frecare în raport cu axa de rotație. Notând cu ρ distanța de la elementul de arie dS la axa de rotație, momentul maxim al frecării de pivotare este egal cu momentul resultant al forțelor de frecare de alunecare:

$$M_{p \max} = \int_{(D)} \mu \rho dN \quad (3.124)$$

Echilibrul are loc dacă $M_n \leq M_{p \max}$, egalitatea corespunzând echilibrului la limită.

Calculul momentului maxim al frecării de pivotare în general este dificil și poate fi făcut numai în cazuri mai simple. Dificultatea constă în faptul că nu se cunoaște modul de repartizare al forței \bar{R}_n pe suprafața de contact și deci nu se cunoaște $d\bar{N}$. În altă ordine de idei μ este variabil cu timpul, deoarece mișcarea cu frecare lustruiește suprafețele de contact, astfel că μ scade.

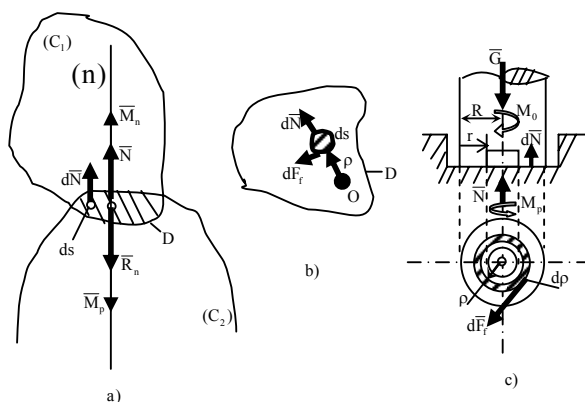


Fig.3.63

În concluzie, cuplul frecării de pivotare este un cuplu direct opus celui ce tinde să producă mișcarea de pivotare, de mărime variabilă de la zero până la o valoare maximă, ce reprezintă suma tuturor momentelor forțelor de frecare maxime în raport cu axa de pivotare.

Frecarea de pivotare este întâlnită de exemplu la lagărele verticale ale

mașinilor, numite de altfel pivoți.

Ca exemplu al modului de calcul al momentului frecării de pivotare, vom considera suprafața de contact dintre cele două corpuri plană. Pe un element oarecare dS de arie al acestei suprafețe, forța normală elementară va fi $dN = p dS$, unde p este presiunea de contact pe elementul de unitate de suprafață, iar mărimea forței de frecare maxime $dF_f = \mu dN = \mu p dS$. Cu acestea formula (3.124) devine $dM_{p \max} = \rho dF_{f \max} = \mu p \rho dS$, iar momentul rezultat, finit, al forțelor de frecare la alunecare în raport cu punctul O va fi:

$$M_{p \max} = \int_{(D)} \mu p \rho dS \quad (3.125)$$

În cazul particular când presiunea este constantă, iar suprafața de contact între cele două corpuri este o coroană circulară (fig.3.63.c) de raze R și r , relația (3.125) în care $dS = 2\pi \rho dp$. Devine:

$$M_{p \max} = 2\pi \mu p \int_r^R \rho^2 dp$$

Ținând seama că forța normală de apăsare este $R_n = G$ și $p = \frac{G}{\pi(R^2 - r^2)}$,

ultima formulă se scrie:

$$M_{p \max} = \frac{2}{3} \mu G \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \quad (3.126)$$

iar în cazul rezemării pe toată suprafața circulară ($r=0$):

$$M_{p \max} = \frac{2}{3} \mu R G \quad (3.127)$$

Formula (3.125) este valabilă și când se pune problema unui arbore cilindric omogen de greutate G cu axa de simetrie verticală, la partea sa inferioară, fiind o

suprafață de rotație. Arborele este acționat de greutatea proprie și de momentul \bar{M} dirijat după axa de simetrie. Considerând și ecuația de proiecții pe axa cilindrului (fig.3.64):

$$G - \int_{(D)} p \cos \theta dS = 0$$

deducem:

$$G = \int_{(D)} p \cos \theta dS \quad (3.128)$$

Legea de repartitie a presiunilor de contact se cunoaște experimental și depinde de distanța ρ și unghiul θ .

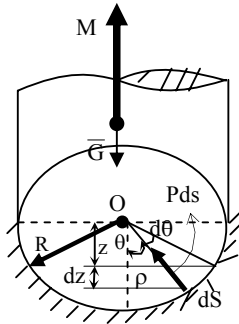


fig. 3.64

Aplicație: Se consideră un arbore cilindric de greutate G cu axa de simetrie verticală și cu suprafața de rotație o semisferă de rază R . Presiunea de contact este forma $p=k\rho$, iar coeficientul de frecare între suprafețele de

contact: $\mu = \frac{\mu_0}{R}$ (μ_0 -constantă). Se cere constanta k și momentul $M_{p \max}$ pentru echilibru la limită al arborelui.

Rezolvare: În cazul problemei $\rho=R \sin \theta$. Elementul dS este aria zonei sferice de înălțime dz : $dS=2\pi R dz$, unde $z=R \cos \theta$, astfel că (3.128) devine:

$$\begin{aligned} G &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \theta dS = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} kR \sin \theta \cos \theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = 4k\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{4}{3} k\pi R^3 \sin^3 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} k\pi R^3 \quad \text{astfel că:} \quad k = \frac{3G}{4\pi R^3} \end{aligned}$$

Din relația (3.125) rezultă:

$$\begin{aligned} M_{p \max} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu \rho p dS = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0}{R} (R \sin \theta)^2 k (R \sin \theta) 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 4\pi \mu_0 k R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \\ &= \frac{3}{4} \mu_0 R G \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta^2) d\theta = \frac{3}{4} \mu_0 R G \left(\frac{3}{2} \theta - \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi \mu_0 R G}{16} \end{aligned}$$

3.15.5. Frecarea în articulația plană

Considerăm o articulație plană în care fusul de rază r solidar cu rigidul, se reazemă într-un lagăr fix cu diametrul puțin mai mare decât al fusului (fig.3.65).

Torsorul de reducere al forțelor exterioare direct aplicate se reduce în raport cu centrul O al fusului la rezultanta \bar{R}_d și momentul \bar{M}_d .

Punctul A de contact al fusului cu lagărul se află pe raza $OA=r$ care formează unghiul α cu rezultanta \bar{R}_d . În punctul A apare reacțiunea normală \bar{N} , forța de frecare de alunecare \bar{F}_f și momentul frecării de rostogolire \bar{M}_r .

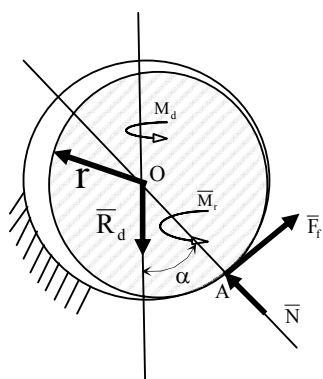


fig. 3.65

Ecuatiile de echilibru ale fusului sunt:

$$\begin{aligned} N - R_d \cos \alpha &= 0, \\ F_f - R_d \sin \alpha &= 0, \\ -M_d + M_r + R_d r \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.129)$$

Notăm coeficienții de frecare de alunecare și rostogolire cu μ respectiv s , și deci se pot scrie condițiile:

$$F_f \leq \mu N, \quad M_r \leq sN \quad (3.130)$$

Din relațiile (3.129) și (3.130) rezultă condițiile de echilibru ale fusului:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu', \quad M_d \leq r R_d \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right) \quad (3.131)$$

Pentru cazul când forța de frecare este maximă, adică echilibru la limită, se poate considera egalitate în relația (3.131). astfel că putem scrie:

$$\sin \alpha = \frac{\mu'}{\sqrt{1 + \mu'^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu'^2}} \quad (3.132)$$

Cu notația

$$\mu = \frac{\mu' + \frac{s}{r}}{\sqrt{1 + \mu'^2}}$$

relația (3.131) devine:

$$M_d \leq \mu r R_d \quad (3.133)$$

Deoarece $\bar{R}_l = \bar{N} + \bar{F}_f = -\bar{R}_d$, se deduce:

$$R_l = \sqrt{N^2 + F_f^2} = R_d \quad (3.134)$$

Cum fenomenul este mult mai complex, pentru calculul momentului maxim al frecării în articulația plană, se admite formula:

$$M_{a\max} = \mu r R_l$$

În calcule, în cazul articulației plane, se poate scrie $\bar{R}_l = X_l \bar{i} + Y_l \bar{j}$, astfel că $R_l = \sqrt{(X_l)^2 + (Y_l)^2}$. În general coeficientul de frecare în articulație μ se determină experimental.

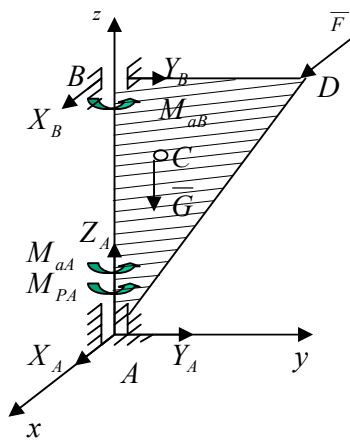


fig.3.66

Aplicație: Placa triunghiulară ABD de greutate G și dimensiuni $AB=2l$, $BD=l$, $\angle ABD=90^\circ$, este așezată în poziție verticală și se poate roti în jurul axei AB. Coeficientul de frecare în lagărele A și B este μ , iar raza lor r . Să se determine mărimea maximă a forței \bar{F} care acționează perpendicular pe planul plăcii pentru ca placa să nu se rotească (fig.3.66).

Rezolvare: Alegem sistemul de axe cu originea în A, A_y în planul plăcii și A_z de-a lungul axei AB. Forțele și momentele de legătură vor fi:

$$\bar{R}_A = X_A \bar{i} + Y_A \bar{j} + Z_A \bar{k},$$

$$\bar{R}_B = X_B \bar{i} + Y_B \bar{j} \quad \bar{M}_{aA} = M_{aA} \bar{k},$$

$$\bar{M}_{aB} = M_{aB} \bar{k}, \quad \bar{M}_{PA} = M_{PA} \bar{k}$$

Prin \bar{M}_{aA} , \bar{M}_{aB} , \bar{M}_{PA} înțelegem momentul în articulațiile A, B, respectiv momentul frecării de pivotare din A.

Ecuatiile de echilibru scalare împreună cu valorile la limită a momentelor de frecare sunt:

$$X_A + X_B + F = 0, \quad Y_A + Y_B = 0, \quad Z_A - G = 0, \quad -\frac{l}{3}G - 2lY_B = 0$$

$$2lF + 2lX_B = 0, \quad -lF + M_{aA} + M_{aB} + M_{PA} = 0, \quad M_{aA} = \mu r \sqrt{X_A^2 + Y_A^2},$$

$$M_{aB} = \mu r \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}, \quad M_{PA} = \frac{2}{3} \mu r Z_A$$

Rezolvarea acestui sistem conduce la

$$X_A = 0, \quad Y_A = \frac{G}{6}, \quad Z_A = G, \quad X_B = -F, \quad Y_B = -\frac{G}{6}, \quad M_{aA} = \frac{1}{6} \mu r G,$$

$$M_{aB} = \mu r \sqrt{F^2 + \frac{G^2}{36}}, \quad M_{PA} = \frac{2}{3} \mu r G.$$

Din ecuația a șasea se obține după înlocuire: $F = \frac{\mu r}{6l} (5G + \sqrt{36F^2 + G^2})$,
ecuație din care se determină

$$F_{\max} = \frac{\mu r (5l + \sqrt{l^2 + 24\mu^2 r^2})}{6(l^2 + \mu^2 r^2)}$$

3.15.6 Frecarea firelor

Se consideră un fir de greutate neglijabilă, flexibil și inextensibil înfășurat pe un disc cilindric fix. În cazul ideal considerăm o porțiune de fir A_1A_2 (fig.3.67). La extremitățile firului vor acționa tensiunile T_1 și T_2 . Forțele de legătură normale ce acționează asupra firului din partea discului, sunt repartizate pe toată lungimea arcului A_1A_2 . Dar această repartiție nu este cunoscută, iar prin ecuația de momente în raport cu punctul O se elimină din calcule:

$$T_1 R - T_2 R = 0$$

de unde:

$$T_1 = T_2 \quad (3.135)$$

În concluzie, în lipsa frecării, echilibrul firului se realizează în cazul că

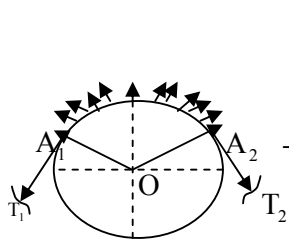


fig. 3.67

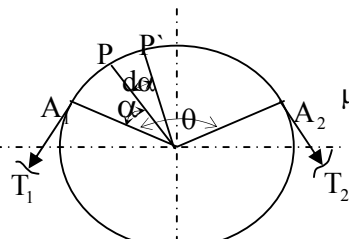


fig. 3.68

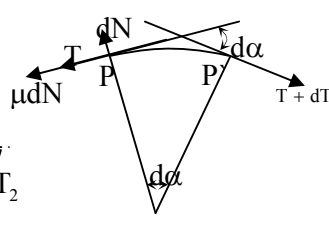


fig. 3.69

tensiunile de la extremitățile firului sunt egale.

Fie μ coeficientul de frecare dintre fir și disc, același pe toată porțiunea de contact A_1A_2 și θ unghiul la centru subîntins de acest arc. Se pune problema să determinăm relația dintre tensiunile T_1 și T_2 din punctele A_1 și A_2 pentru ca firul să rămână în echilibru.

Presupunem de exemplu că firul are tendința de mișcare spre punctul A_2 , deci putem scrie ca $T_2 > T_1$. Poziția unui punct P al firului va fi dată de unghiul α

(fig.3.68). Firul se va afla în echilibru dacă fiecare element al său se va găsi în echilibru. Izolând un element de fir PP', unghiul la centru corespunzător acestuia va fi $d\alpha$. Asupra acestuia acționează în punctele P și P' tensiunile T, respectiv T+dT (deoarece tendința de mișcare este dată de $T_2 > T_1$) tangente în punctele P și P'.

Asupra elementului de fir acționează reacțiunea normală dN din partea cilindrului și forța de frecare maximă μdN , care se pot presupune concentrate în punctul P, elementul de fir PP' fiind foarte mic (fig. 3.69).

Condițiile de echilibru ale elementului PP' sunt date de ecuațiile de proiecții ale forțelor pe direcțiile tangentei și normalei în punctul P:

$$\begin{aligned} -T - \mu dN + (T + dT) \cos d\alpha &= 0 \\ -dN + (T + dT) \sin d\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

Dar $d\alpha$ este mic și deci putem face aproximările: $\sin d\alpha \approx d\alpha$, $\cos d\alpha \approx 1$, astfel că sistemul de ecuații (3.136) se mai scrie:

$$\begin{aligned} dT - \mu dN &= 0 \\ T d\alpha - dN &= 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

(am neglijat infiniții mici de ordin superior).

Din ecuațiile (3.137) se obține:

$$\frac{dT}{T} = \mu d\alpha. \quad (3.138)$$

Această ecuație diferențială cu variabile separabile, se integrează între pozițiile extreme A_1 și A_2 ale firului:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\theta d\alpha.$$

care se mai scrie:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \theta \quad (3.139)$$

sau:

$$T_2 = T_1 e^{\mu \theta} \quad (3.140)$$

Rezultă că la limita echilibrului, când tendința de mișcare este dată de relația $T_2 > T_1$, tensiunile de la extremitățile firului sunt legate prin relația (3.140), unde μ este coeficientul de frecare la alunecare, iar θ este unghiul de înfășurare măsurat în radiani.

Pentru tendința de mișcare inversă, corespunzător cazului când $T_1 > T_2$, la limita echilibrului, relația (3.140) devine:

$$T_1 = T_2 e^{\mu \theta} \quad (3.141)$$

Din relațiile (3.140) și (3.141), ținând seama că ecuațiile sunt scrise la limita echilibrului, rezultă că pentru realizarea echilibrului sunt necesare condițiile:

$$e^{-\mu\theta} \leq \frac{T_2}{T_1} \leq e^{\mu\theta} \quad (3.142)$$

Aceste relații au fost stabilite de Euler în anul 1762.

Valoarea exponențială crește foarte repede cu θ și frecarea firului poate fi astfel mult mărită. Pe baza acestei proprietăți se construiesc frânele cu benzi.

4. ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE

4.1. Echilibrul sistemelor de puncte materiale

Considerăm un sistem (S) de puncte materiale P_1, P_2, \dots, P_n . Dacă aceste puncte interacționează mecanic, atunci (S) formează un sistem mecanic de puncte materiale. Pe scurt, astfel de sisteme le vom numi sisteme de puncte materiale.

O parte din forțele ce acționează sistemul (S) de puncte materiale sunt numite forțe interioare și reprezintă interacțiunea mecanică dintre punctele sistemului. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, ele sunt două câte două egale în modul, au același suport și sunt de sensuri opuse.

Dacă \overline{F}_{ij} este forța care reprezintă acțiunea mecanică a punctului P_j asupra punctului P_i , aplicată în punctul P_i , iar \overline{F}_{ji} este forța care reprezintă acțiunea mecanică a punctului P_i asupra punctului P_j , aplicată în P_j , atunci avem:

$$\overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji} = 0 \quad (4.1)$$

$$\overline{r}_i \times \overline{F}_{ij} + \overline{r}_j \times \overline{F}_{ji} = 0 \quad (i, j = \overline{1, n}, i \neq j) \quad (4.2)$$

unde \overline{r}_i și \overline{r}_j sunt vectorii de poziție ai punctelor P_i și P_j în raport cu un reper fix.

Toate celelalte forțe care acționează sistemul (S) vor fi forțele exterioare sistemului (S) și le vom nota cu un singur indice. Forțele exterioare sistemului (S) de puncte materiale provin din interacțiunile mecanice dintre punctele P_i ale sistemului (S) și alte puncte care nu aparțin acestui sistem.

Clasificarea forțelor în forțe interioare și exterioare este convențională, tot așa ca și faptul cuprinderii punctelor P_i într-un singur sistem de puncte (S). Într-adevăr, dacă P_i și P_j fac parte din sistemul (S), forța \overline{F}_{ij} este o forță interioară sistemului (S), iar dacă se consideră că P_j nu face parte din (S), atunci aceeași forță \overline{F}_{ij} devine o forță exterioară sistemului (S).

Un sistem de puncte materiale este în echilibru, dacă fiecare punct material este în echilibru. Rezultă că sistemul (S) de puncte materiale va fi în echilibru dacă:

$$\overline{F}_{di} + \overline{F}_{li} + \sum_{j=1}^n \overline{F}_{ij} = 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (4.3)$$

Se pot stabili două categorii de probleme relativ la echilibrul sistemelor de puncte:

Fiind date forțele care acționează sistemul (S) de puncte, se cere să se determine poziția de echilibru a acestui sistem.

Fiind date pozițiile punctelor care formează un sistem (S) în echilibru, se cere să se determine forțele care acționează acest sistem.

Condițiile (4.3) de echilibru sunt echivalente cu $3n$ relații scalare. În cazul sistemelor cu legături, numărul parametrilor geometrici este egal cu $3n-m$ dacă legăturile sunt date prin m relații scalare independente. Urmează că dintre cele $3n$ ecuații de echilibru, numai $3n-m$ vor servi la determinarea poziției sistemului, iar restul de m ecuații se vor utiliza pentru determinarea forțelor de legătură.

Se observă că problema astfel enunțată în cazul cel mai general, este o problemă mixtă în raport cu clasificarea menționată anterior. Într-adevăr, în acest caz, este necesar să se determine atât poziția sistemului de puncte, cât și forțele de legătură respective. Dacă din ecuațiile de echilibru (4.3) se pot determina toate necunoscutele, problema este static determinată, iar dacă numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul ecuațiilor scalare de echilibru, problema este static nedeterminată.

Aplicarea directă a condițiilor (4.3) în probleme practice întâmpină dificultăți chiar în cazul în care sistemul are un număr relativ redus de puncte materiale, din cauza forțelor interioare necunoscute. Eliminarea forțelor interioare din relațiile (4.3) pe care le îndeplinesc o pereche de forțe \overline{F}_{ij} și \overline{F}_{ji} se face în felul următor:

Ținând seama de relația (4.1), vom aduna membru cu membru relațiile (4.3) și vom obține:

$$\sum_{i=1}^n \overline{F}_{di} + \sum_{i=1}^n \overline{F}_{li} = 0 \quad (4.4)$$

deoarece forțele interioare $\overline{F}_{ij}, \overline{F}_{ji}$ prin adunare se reduc două câte două.

Folosind relația (4.2) și multiplicând relația (4.3) cu \overline{r}_i , prin adunare vom obține:

$$\sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times \overline{F}_{di} + \sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times \overline{F}_{li} = 0 \quad (4.5)$$

deoarece momentele forțelor interioare $\overline{r}_i \times \overline{F}_{ij}$ și $\overline{r}_j \times \overline{F}_{ji}$ se reduc două câte două.

Folosim notațiile:

$$\overline{R}_d = \sum_{i=1}^n \overline{F}_{di}, \quad \overline{M}_d = \sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times \overline{F}_{di},$$

care sunt elementele trosorului de reducere față de punctul O ale forțelor direct aplicate și:

$$\overline{R}_l = \sum_{i=1}^n \overline{F}_{li}, \quad \overline{M}_l = \sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times \overline{F}_{li},$$

care sunt elementele trosorului de reducere față de punctul O ale forțelor de legătură.

Cu acest notații, condițiile de echilibru (3.4) și (3.5) devin:

$$\overline{R}_d + \overline{R}_l = 0, \quad \overline{M}_d + \overline{M}_l = 0 \quad (4.6)$$

și sunt aceleași cu condițiile de echilibru ale corpului rigid.

Pentru un sistem nedeformabil de puncte materiale, condițiile (4.6) sunt necesare și suficiente, dar pentru un sistem deformabil de puncte materiale aceasta este o condiție necesară însă nu și suficientă. Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem deformabil de puncte materiale să fie în echilibru, este ca el să fie rigidizat (solidificat) în poziția de echilibru. Această observație se bazează pe principiul solidificării enunțat în paragraful 0.5.

4.2. Echilibrul sistemelor de corpuri rigide

Un corp rigid poate fi considerat ca un sistem rigid de puncte materiale. Un sistem (C) de corpuri rigide C_i ($i = \overline{1, n}$) poate fi considerat ca un sistem de puncte materiale, divizat în subsisteme rigide, fiecare dintre aceste subsisteme alcătuind unul dintre corpurile rigide C.

Forțele care acționează sistemul (C) pot fi grupate în forțe interioare, reprezentând interacțiunea mecanică dintre diferitele puncte ale corpurilor C_i și în forțe exterioare sistemului (C). Forțele interioare vor satisface evident relațiile (4.1) și (4.2).

Am arătat anterior că poziția unui corp rigid liber depinde de șase parametri scalari. Urmează că poziția sistemului (C) format din n corpuri libere, va fi determinată prin 6n parametri scalari, deci sistemul (C) rigid liber are 6n grade de libertate.

Legăturile între corpurile sistemului (C), exprimate prin relații între coordonatele punctelor corpurilor C_i , vor restrânge gradele de libertate ale sistemului de corpuri. Dacă aceste relații sunt independente și sunt în număr de m, numărul gradelor de libertate ale sistemului (C) va fi de 6n-m.

Deoarece un corp rigid liber are șase grade de libertate, între punctele a două corpuri nu pot exista mai mult de șase relații distincte de legătură. Aceste legături pot fi înlocuite cu forțe de legătură, pe baza axiomei legăturilor. Legăturile interioare dintre corpuri pot fi deformabile sau nedeformabile. Legăturile nedeformabile sunt legăturile studiate pentru corpul rigid: rezemarea, articulația, încastrarea și legătura prin fir inextensibil și perfect flexibil. Corpurile sistemului considerat mai pot fi legate între ele și prin elemente deformabile, de exemplu prin arcuri elastice. Dacă toate legăturile interioare ale sistemului sunt nedeformabile, sistemul de corpuri rigide

se numește nedeformabil. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, legăturile interioare dintre două corpuri rigide ale sistemului, au sensuri contrare, suport comun și aceeași valoare.

Forțele de legătură exterioare, interioare și parametrii de poziție ai sistemului, în general sunt necunoscute. Studiul echilibrului unui sistem de corpuri se poate face prin mai multe metode. Una dintre ele este metoda separării sau a izolării corpurilor. În acest caz, sistemul este în echilibru numai dacă fiecare parte a lui, adică fiecare corp este în echilibru.

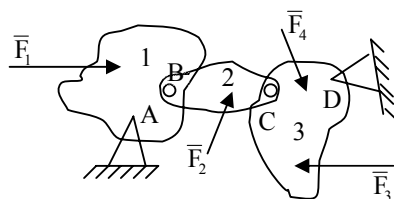


fig.4.1

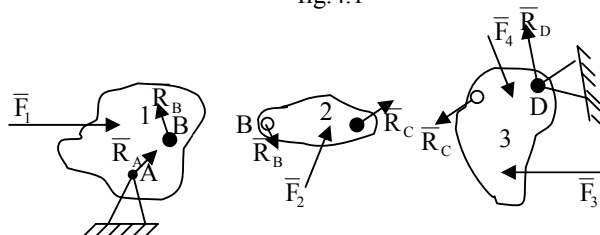


fig.4.2

Prin această metodă, se elimină legăturile exterioare și interioare și se înlocuiesc cu reacțiuni corespunzătoare. Metoda separării corpurilor constă în punerea condițiilor de echilibru pentru fiecare corp, sub acțiunea forțelor direct aplicate și a reacțiilor exterioare și interioare. În caz că numărul de ecuații nu este suficient pentru a găsi necunoscutele (poziția sistemului, reacțiuni exterioare și interioare) sistemul este static

nedeterminat.

La eliberarea legăturilor interioare, reacțiunile corespunzătoare pentru cele două corpuri se introduc egale și opuse

Ca exemplu, considerăm sistemul din fig.4.1 format din corpurile 1, 2 și 3.

Aplicând metoda separării corpurilor, forțele care își fac echilibru sunt precizate în fig.4.2. În punctele B și C apar legături interioare și deci se aplică principiul acțiunii și reacțiunii, deci forțele de legătură sunt opuse. Pentru fiecare corp se pun condițiile date de formulele (4.6) și se rezolvă sistemul obținut.

O altă metodă întâlnită în studiul echilibrului sistemului de corpuri este metoda rigidizării sau solidificării, care constă în considerarea sistemului de corpuri ca un singur corp ce se află în echilibru sub acțiunea tuturor forțelor direct aplicate și reacțiilor exterioare. Facem mențiunea foarte importantă că reacțiunile interioare se echilibrează două câte două, deci nu vor apărea în calcule.

Spre deosebire de prima metodă, aici se obține un număr redus de ecuații cu mai puține necunoscute, deoarece cele date de reacțiunile interioare se elimină. Această metodă se aplică numai în cazul când numărul de ecuații este suficient pentru rezolvarea sistemului de ecuații scalare care rezultă din formulele (4.6).

În cazul exemplului din fig.4.1., aplicând metoda rigidizării, reacțiunile din B și C nu apar, în schimb vor apărea reacțiunile din A și D, precum și forțele exterioare $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ și \bar{F}_4 .

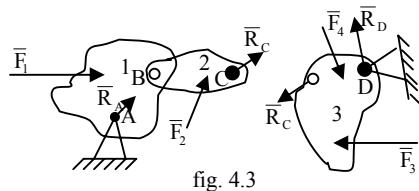


fig. 4.3

O ultimă posibilitate în studiul echilibrului sistemelor de corpuri este și metoda mixtă. În acest caz, se separă grupuri de corpuri solidificate și se aplică pentru fiecare subsistem ecuațiile (4.6).

Numărul de ecuații, dar și numărul de necunoscute, este intermediar în raport cu primele două metode. Nici această metodă nu este întotdeauna aplicabilă. Aplicarea acestei metode depinde de numărul de ecuații și numărul de necunoscute (analog metodei rigidizării).

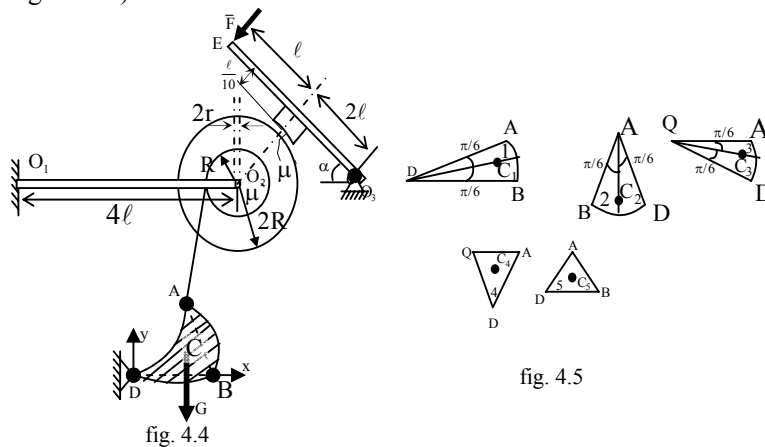


fig. 4.4

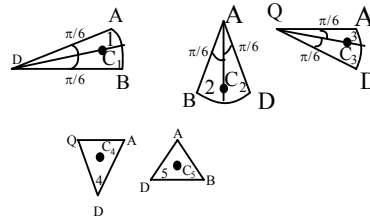


fig. 4.5

Pentru exemplul dat, metoda mixtă este prezentată în fig.4.3, corpurile 1 și 2 s-au solidificat, prin urmare în calcule nu apare reacțiunea din punctul B, dar vor apărea reacțiunile din A, C și D, precum și forțele exterioare $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ și \bar{F}_4 .

Aplicații: Se consideră sistemul de corpuri din fig.4.4 aflat în echilibru într-un plan vertical. Bara O_1O_2 este încastrată în O_1 în poziția orizontală. Trolieul articular în O_2 de bara O_1O_2 are greutatea neglijabilă, raza fusului r și coeficientul de frecare în articulație μ' . Bara O_3E se sprijină pe toba mare a trolieului, coeficientul de frecare la alunecare este μ , iar forța F acționează perpendicular pe bară în E .

Pe toba mică a trolieului este prins un fir vertical la capătul căruia se află placa plană omogenă ABD de greutate G , articulată în D . Triunghiul ABD este echilateral de latură $2l$, toate arcele de cerc sunt egale, arcul AB are centrul cercului în D , iar

segmentul BD este orizontal. Se cunosc: $r = \frac{R}{10}$; $\mu = 0,1$; $\mu' = 0,2$; $\alpha = \frac{\pi}{6}$, iar

barele O_1O_2 și O_3E au greutatea neglijabilă. Să se determine:

Poziția centrului de greutate al plăcii;

Forța minimă F necesară pentru echilibru în poziția din figură;

Forțele de legătură.

Rezolvare: a) Pentru determinarea poziției centrului de greutate, descompunem placa dată în cele cinci plăci din fig.4.5 în care facem mențiunile: Q este centrul cercului din care provine arcul AD, QA fiind orizontală.

Avem:

$$DC_1 = AC_2 = QC_3 = \frac{4L}{\pi}; \quad A_1 = A_2 = A_3 = \frac{2}{3}\pi l^2, \quad A_4 = A_5 = \sqrt{3}l^2,$$

$$x_3 = QC_3 \cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}QA = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{\pi}l.$$

În raport cu sistemul de axe Oxy, întocmim tabelul următor:

Nr. Placă	A_i	x_i	y_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	$\frac{2}{3}\pi l^2$	$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}l$	$\frac{2}{\pi}l$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}l^3$	$\frac{4}{3}l^3$
2	$\frac{2}{3}\pi l^2$	L	$\frac{\sqrt{3}\pi - 4}{\pi}l$	$\frac{2}{3}\pi l^3$	$\frac{2}{3}(\pi\sqrt{3} - 4)l^3$
3	$-\frac{2}{3}\pi l^2$	$\frac{2\sqrt{3} - \pi}{\pi}l$	$\frac{\sqrt{3}\pi - 4}{\pi}l$	$\frac{2}{3}(\pi - 2\sqrt{3})l^3$	$\frac{2}{3}(4 - \pi\sqrt{3})l^3$
4	$\sqrt{3}l^2$	0	$\frac{2}{3}\sqrt{3}l$	0	$2l^3$
5	$-\sqrt{3}l^2$	l	$\frac{\sqrt{3}}{3}l$	$-\sqrt{3}l^3$	$-l^3$
	$\frac{4}{3}\pi l^2$			$\frac{1}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})l^3$	$\frac{7}{3}l^3$

Poziția lui C va fi :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i A_i}{\sum_{i=1}^5 A_i} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi} l \approx 0,59l, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i A_i}{\sum_{i=1}^5 A_i} = \frac{7}{4\pi} l \approx 0,55l.$$

Metoda rigidizării nu se poate aplica în cazul acestei probleme, deoarece se pot scrie trei ecuații de echilibru (două de proiecții și una de momente), iar numărul de necunoscute ar fi opt: trei în O_1 , câte două în O_3 și D, precum și F). Vom aplica metoda izolării corpurilor, considerând sistemul în poziția de echilibru la limită.

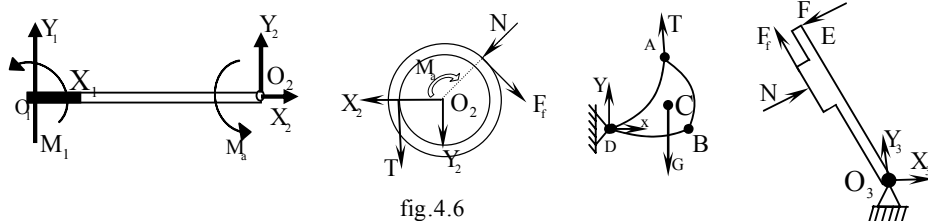


fig.4.6

În fig. 4.6 sunt reprezentate corpurile sistemului eliberate de legături, reacțiunile corespunzătoare legăturilor interioare fiind egale și de sens contrar pentru corpurile pe care le leagă. Am notat cu M_1 și M_a momentele din încastrarea O_1 , respectiv din articulația O_2 .

Pentru fiecare corp considerăm axele de referință în planul forțelor, una orizontală, cealaltă verticală, astfel că ecuațiile scalare de echilibru la limită sunt:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 0 & Y_1 + Y_2 &= 0 \\ M_1 + M_a + 4lY_2 &= 0 & M_a &= \mu' r \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} \\ -N \sin \alpha - X_2 + F_f \cos \alpha &= 0 & -N \cos \alpha - F_f \sin \alpha - T - Y_2 &= 0 \\ RT - 2RF_f - M_a &= 0 & X &= 0 \\ Y + T - G &= 0 & lT - x_C G &= 0 \\ X_3 + (N - F) \sin \alpha - F_f \cos \alpha &= 0 \\ Y_3 + (N - F) \cos \alpha + F_f \sin \alpha &= 0 & 3lF - 2lN - \frac{l}{10} F_f &= 0 \\ F_f &= \mu N \end{aligned} \quad (4.7)$$

Din (4.7₁₀) rezultă $T = \frac{x_C}{l} G$, iar din (4.7₁₄) și (4.7₅) rezultă $X_2 = (\mu \cos \alpha - \sin \alpha) N$. Cu acestea și din (4.7₆) avem:

$Y_2 = -\frac{x_c}{l}G - N(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$. Din (4.7₄) și (4.7₇) se obține o ecuație în N:

$$\mu' r \sqrt{(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)^2 N^2 + \left[\frac{x_c}{l}G + (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)N \right]^2} = R \left(\frac{x_c}{l}G - 2\mu N \right).$$

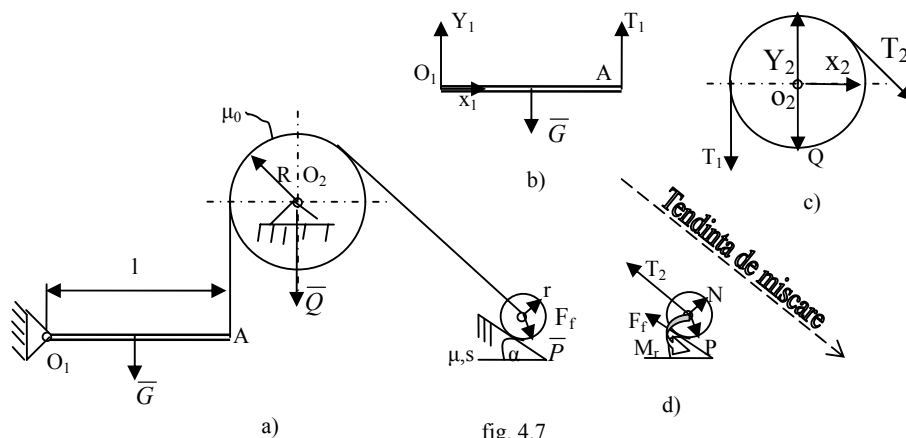


fig. 4.7

În cazul numeric dat, această ultimă ecuație are două soluții în N. Din condiția $\frac{x_c}{l}G - 2\mu N > 0$, va rezulta $N = 2,63 G$.

Din (4.7₁₃) obținem $F_{\min} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\mu}{10} \right) N = 1,75 G$, iar din (4.7₅), (4.7₆) și (4.7₇) reacțiunile din O_2 : $X_2 = (\mu \cos\alpha - \sin\alpha)N = -1,52 G$, $Y_2 = -(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)N - \frac{x_c}{l}G = -3 G$, $M_a = R \left(\frac{x_c}{l}G - 2\mu N \right) = 0,064 RG$.

Din (4.74₁), (4.74₂) și (4.74₃) obținem reacțiunile din O_1 : $X_1 = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)N = 1,52 G$; $Y_1 = -Y_2 = (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)N + \frac{x_c}{l}G = 3G$;

$M_1 = -M_a - 4/Y_2 = 11,94/G$. Din (4.74₉) rezultă reacțiunile din D: $X = 0$;

$Y = G - T = 0,41G$, iar din (4.74₁₁) și (4.74₁₂) obținem reacțiunile din O_3 :

$X_3 = (F - N)\sin\alpha + \mu N \cos\alpha = 0,46G$;

$Y_3 = (F - N)\cos\alpha - \mu N \sin\alpha = -0,9G$.

2) Se consideră sistemul de corpuri din fig.4.7.a în care bara O_1A este orizontală, coeficientul de frecare dintre fir și discul O_2 este μ_0 , iar coeficienții de frecare la alunecare și rostogolire dintre discul O_3 și planul înclinat sunt μ , respectiv s . Să se determine coeficienții de frecare μ și s pentru ca echilibrul să fie ca în figură, precum și reacțiunile din O_1 și O_2 într-o poziție de echilibru la limită.

Rezolvare: Izolăm fiecare corp (fig.4.7,b,c,d) și introducem forțele date și de legătură. Pentru bară și discul O_2 sistemul de axe este format din orizontală și verticală, iar pentru discul O_3 o axă este de-a lungul planului înclinat pe linia de cea mai mare pantă, cealaltă fiind normala pe plan. Presupunând în primul caz că discul O_3 are tendința să coboare pe planul înclinat, condițiile de echilibru sunt:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 & Y_1 + T_1 - G &= 0 \\ lT_1 - \frac{l}{2}G &= 0 & X_2 + T_2 \cos \alpha &= 0 \\ Y_2 - T_1 - Q - T_2 \sin \alpha &= 0 & T_2 \leq T_1 e^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} & P \sin \alpha - T_2 - F_f = 0 \\ N - P \cos \alpha &= 0 & M_r + T_2 r - Pr \sin \alpha &= 0 & F_f \leq \mu N \\ M_r &\leq sN \end{aligned}$$

Din ecuația (4.8₃) rezultă $T_1 = \frac{G}{2}$, iar din inecuația (4.8₆):

$$T_2 \leq \frac{G}{2} e^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}. \text{ În ecuația (4.8}_7\text{) putem scrie } F_f = P \sin \alpha - T_2 \geq P \sin \alpha - \frac{G}{2} e^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}, \text{ astfel că din (4.8}_8\text{) și (4.8}_{10}\text{) va rezulta}$$

$$\mu \geq \frac{F_f}{\mu_0 N} \geq \operatorname{tg} \alpha - \frac{Ge^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{2P \cos \alpha}. \text{ Analog din (4.8}_9\text{) și (4.8}_{11}\text{):}$$

$$s \geq \frac{M_r}{N} \geq r \left[\operatorname{tg} \alpha - \frac{Ge^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{2P \cos \alpha} \right]. \text{ În cazul când tendința de mișcare este}$$

$$\text{inversă, vor rezulta: } \mu \geq \frac{Ge^{-\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{2P \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \text{ și } s \geq r \left[\frac{Ge^{-\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{2P \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right]. \text{ Cu notația}$$

$$\mu' = \max \left\{ \frac{Ge^{-\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{2P \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \alpha - \frac{Ge^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{2P \cos \alpha} \right\}, \text{ condițiile cerute se scriu în final:}$$

$\mu \geq \mu', s \geq r\mu'$. Considerând poziția de echilibru la limită în cazul fig.4.7.d,

$$\text{reacțiunile din } O_1 \text{ și } O_2 \text{ vor fi: } X_1 = 0; \quad Y_1 = \frac{G}{2}; \quad X_2 = -\frac{G}{2} e^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} \cos \alpha;$$

$$Y_2 = Q + \frac{G}{2} \left[1 + e^{\mu_0 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} \right].$$

4. 3. Grinzi cu zăbrele

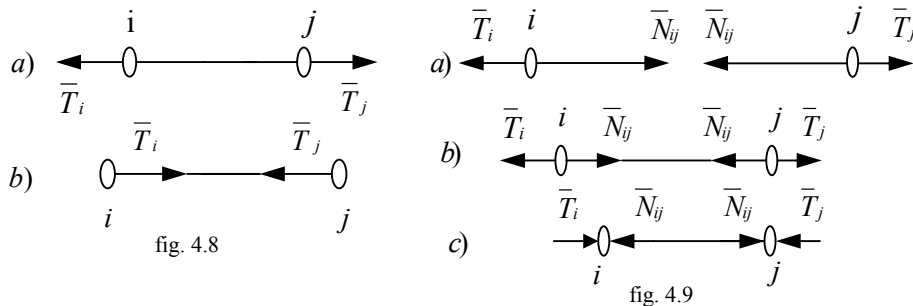
4.3.1 Sisteme articulate, generalități

Un sistem articulat este o construcție din bare rigide care sunt legate între ele prin articulații numite noduri.

Acestea pot avea configurația geometrică a unei linii poligonale deschise, neputând suprima nici o bară fără a întrerupe continuitatea sistemului – de exemplu cablurile de susținere ale podurilor suspendate, sau se poate suprima una din bare, dar fără a se întrerupe continuitatea sistemului – de exemplu macarale, ferme de acoperiș, turnuri metalice.

Sistemele articulate pot fi: plane (dacă toate nodurile și forțele exterioare sunt situate într-un plan), spațiale – dacă acestea din urmă nu sunt conținute într-un plan.

În calculul sistemelor articulate se admit următoarele ipoteze: Barele sunt rectilinii, au secțiunea transversală neglijabilă în raport cu lungimea lor, legăturile



sunt ideale, iar forțele exterioare acționează numai în noduri. Chiar și forțele exterioare care prin natura lor sunt distribuite (greutatea barelor, forța vântului, forțele

datorate depunerii zăpezilor) se înlocuiesc prin forțe echivalente aplicate numai în noduri.

Din echilibrul unui sistem de corpuri rigide rezultă că fiecare parte a sa este în echilibru. Dar sistemul articulat este format din bare și noduri. În ceea ce privește barele, deoarece forțele se aplică în noduri, o bară $i - j$ (fig.4.8.a) va fi acționată numai de forțele de legătură ce se exercită din partea nodurilor i și j (\bar{T}_i și \bar{T}_j).

Din condiția de echilibru pentru bară $i - j$ rezultă $\bar{T}_i = -\bar{T}_j$ și că aceste forțe au direcția barei. În fig.4.8.a, bara este întinsă, iar în fig.4.8.b, bara este comprimată.

Pentru determinarea forței ce acționează într-o anumită secțiune a barei (efortul în bară) aceasta se secționează (fig.4.9.a). Din echilibrul fiecărei părți, rezultă că $\bar{N}_{ij} = -\bar{T}_i = \bar{T}_j = -\bar{N}_{ji}$, deci $\bar{N}_{ij} = \bar{N}_{ji}$.

Deoarece între nodul i și j nu acționează forțe exterioare, efortul într-o bară are

aceeași valoare, în orice secțiune a barei. Forțele cu care barele acționează asupra nodurilor reprezintă chiar efortul din bare. În cazul unei bare întinse, eforturile sunt dirijate de la noduri spre mijlocul barei (fig.4.9.b), iar în cazul unei bare comprimate, eforturile intră în nod (fig.4.9.c).

În ceea ce privește echilibrul fiecărui nod, se ține seama că într-un nod “ i ” pot acționa următoarele forțe: rezultanta forțelor exterioare direct aplicate asupra nodului i (\bar{F}_i), reacțiunea eventualelor legături exterioare (\bar{R}_i), precum și eforturile din barele care leagă nodul i cu alt nod j (\bar{N}_{ij}).

Ecuatiile de echilibru pentru cele n noduri sunt:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + \sum_{j=1}^p \bar{N}_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.9)$$

unde p este numărul de bare ce trec prin i .

Pentru un sistem articulat plan, condițiile (4.9) conduc la un sistem de $2n$ ecuații scalare de echilibru, în care necunoscutele sunt legăturile exterioare, poziția de echilibru sau/și eforturile din bare. O construcție plană, nedeformabilă, constituită din bare drepte, articulate între ele la capete, forțele exterioare acționând în planul grinzii în noduri, se numește grindă cu zăbrele. Acestea se întâlnesc în unele aplicații tehnice: hale industriale, mașini de ridicat, poduri de cale ferată, stâlpi de înaltă tensiune, etc.

Grinzile cu zăbrele pot fi fără bare supraabundente, când din structura grinzii nu poate fi îndepărtată nici o bară fără a strica rigiditatea sistemului (exemplu: structura formată numai din triunghiuri), precum și din bare supraabundente, când pot fi îndepărtate bare din grinda cu zăbrele fără ca sistemul articulat să devină deformabil (exemplu: patrulaterul articulat cu două diagonale nearticulate între ele).

Pentru o grindă cu zăbrele fără bare supraabundente, relația dintre numărul b al barelor și numărul n al nodurilor se determină astfel: la primele trei noduri

corespund trei bare; pentru următoarele $n - 3$ noduri corespund câte două bare de fiecare nod, pentru a obține o structură formată numai din triunghiuri. Rezultă $b = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$.

Această relație exprimă condiția ca să nu existe bare în plus față de cele necesare rigidizării sistemului.

Pentru determinarea eforturilor din bare, se prezintă în continuare trei metode: metoda izolării (separării) nodurilor, metoda secțiunilor (Ritter), metoda grafică Maxwell – Cremona.

Oricare ar fi metoda folosită, rezolvarea unei grinzi cu zăbrele începe în general, cu determinarea reacțiunilor exterioare printr-o metodă analitică sau grafică, considerând grinda cu zăbrele ca un corp rigid, sub acțiunea unui sistem de forțe coplanare.

4.3.2. Metoda izolării nodurilor

Am văzut că în fiecare nod al unei grinzi cu zăbrele în echilibru acționează un sistem de forțe concurente, echivalent cu zero. Aceste forțe sunt exterioare (direct aplicate și de legătură), precum și eforturile din barele care trec prin nodul respectiv. Eforturile se presupun inițial, că sunt de întindere. Dacă după determinarea eforturilor unele au valori negative, înseamnă că aceste bare sunt comprimate.

Metoda izolării nodurilor constă în punerea condițiilor de echilibru a forțelor din fiecare nod al grinzii. Deoarece se separă nodurile, se obține în fiecare din acestea un sistem de forțe concurente plane, astfel că se obțin câte două ecuații de proiecții ale forțelor pe două direcții perpendiculare, deci în total $2n$ ecuații scalare. Cum inițial s-au folosit cele trei ecuații de echilibru ale grinzii plane pentru determinarea reacțiunilor, numai $2n-3$ din ecuațiile de echilibru vor fi independente.

Necunoscutele fiind eforturile din bare în număr egal cu b , determinarea acestora este posibilă numai dacă $b = 2n-3$. Prin urmare problema este static determinată numai dacă grinda se realizează cu numărul minim de bare.

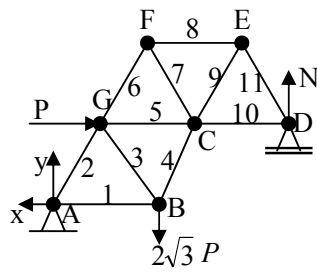


fig4.10

Considerăm toate cele $2n$ ecuații de echilibru a nodurilor, ultimele trei care se scriu sunt întotdeauna identic verificate. Acestea vor fi ecuații de verificare a calculelor efectuate.

Metoda izolării nodurilor prezintă dezavantajul că erorile de rotunjire se cumulează, astfel că ecuațiile de verificare nu vor fi satisfăcute identic. Un alt dezavantaj al metodei constă în faptul că verificarea rezultatelor se face la sfârșit.

Aplicatie: Pentru grinda cu zăbrele din

fig.4.10, vom determina eforturile din bare cu ajutorul metodei izolării nodurilor, toate barele având aceeași lungime.

Rezolvare: Relația $b = 2n - 3$ este verificată, deoarece în cazul problemei date $b = 11$, $n = 7$ și deci grinda cu zăbrele este static determinată. Vom determina în prealabil reacțiunile din articulația A și reazemul D din condiția de echilibru a întregului sistem prin proiecții pe orizontală, verticală și momente în raport cu punctul A:

$$P - X = 0. \quad N + Y - 2\sqrt{3}P = 0. \quad -\frac{a\sqrt{3}}{2}P - 2a\sqrt{3}P + \frac{5a}{2}N = Q$$

Din acest sistem, rezultă : $X = P$, $Y = \sqrt{3}P$, $N = \sqrt{3}P$.

În continuare vom izola fiecare nod și vom scrie ecuațiile de echilibru.

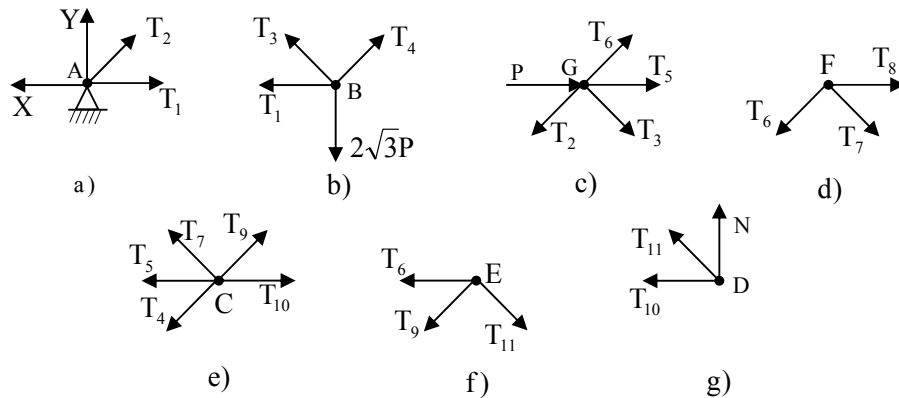


fig. 4.11

Pentru nodul A (fig.4.11.a) :

$$T_1 + \frac{1}{2}T_2 - X = 0 \quad \text{și deci} \quad T_1 = 2P \quad (\text{întindere})$$

$$Y + T_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad T_2 = -2P \quad (\text{compresiune})$$

Pentru nodul B (fig.4.11.b) (nu se poate continua cu nodul G, deoarece ar conține trei eforturi necunoscute)

$$\frac{1}{2}T_4 - \frac{1}{2}T_3 - T_1 = 0 \quad T_3 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_4 - 2\sqrt{3}P = 0 \quad T_4 = 4P \quad (\text{întindere})$$

Pentru nodul G (fig.4.11.c):

$$\frac{1}{2}T_6 + T_5 + \frac{1}{2}T_3 + P - \frac{1}{2}T_2 = 0 \quad T_5 = -P \quad (\text{compresiune})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_6 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 = 0 \quad T_6 = -2P \text{ (compresiune)}$$

Pentru nodul F (fig.4.11.d):

$$T_B + \frac{1}{2}T_7 - \frac{1}{2}T_6 = 0 \quad T_7 = 2P \quad (\text{întindere})$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}T_7 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_6 = 0 \quad T_8 = -2P \text{ (compresiune)}$$

Pentru nodul C (fig.4.11.e):

$$T_{10} + \frac{1}{2}T_9 - \frac{1}{2}T_7 - T_5 - \frac{1}{2}T_4 = 0 \quad T_9 = 2P \quad (\text{întindere})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_9 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_7 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_4 = 0 \quad T_{10} = P \quad (\text{întindere})$$

Pentru nodul E (fig.4.11.f):

$$\frac{1}{2}T_{11} - T_8 - \frac{1}{2}T_9 = 0 \quad T_{11} = -2P \text{ (compresiune)}$$

Ecuatiile de verificare vor fi:

$$\text{nodul E: } -\frac{\sqrt{3}}{2}T_9 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_{11} = 0$$

$$\text{nodul D (fig.4.11.g): } -T_{10} - \frac{1}{2}T_{11} = 0, \quad N + T_{11} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Aceste ecuații sunt identic verificate. Nu au apărut erori de calcul, deoarece nu au fost făcute aproximări.

4.3.3 Metoda secțiunilor (Ritter)

Această metodă constă în secționarea grinzii în două părți, care vor fi în echilibru sub acțiunea forțelor direct aplicate, a reacțiunilor și a eforturilor din barele secționate.

Numărul total al ecuațiilor de echilibru pentru cele două părți este $3+3 = 6$, dar 3 din acestea sunt folosite pentru determinarea reacțiunilor, prin urmare mai rămân numai 3 ecuații independente. Deoarece se pot determina numai 3 eforturi necunoscute, rezultă că secțiunea făcută trebuie să conțină cel mult trei bare.

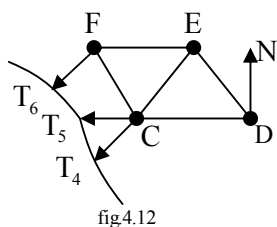
Și la această metodă se verifică relația $b = 2n - 3$, apoi se determină reacțiunile exterioare, după care se impun condițiile de echilibru pentru una din cele două părți ale grinzii.

Pentru determinarea celor 3 eforturi necunoscute din secțiunea făcută se vor scrie ecuații de echilibru în care să apară numai câte una din necunoscute. Astfel se

vor scrie ecuații de momente pentru partea cea mai simplă a grinzii în raport cu punctele unde se intersectează direcțiile a câte două din barele sectionate. Aceste ecuații vor conține numai momentul celui de-al treilea efort necunoscut. Dacă două din barele sectionate sunt paralele și nu se intersectează, se scrie o ecuație de proiecții pe direcția perpendiculară pe cele două bare paralele, astfel încât numai efortul din cealaltă bară să aibă proiecție.

Ca la metoda precedentă, eforturile din barele sectionate se presupun de întindere și dacă rezultă negative vor fi de compresiune.

Aplicație: Vom considera din nou grinda cu zăbrele din fig. 4.10 și vom face o secțiune prin barele 4,5 și 6 (fig. 4.12).



Vom scrie ecuațiile de echilibru pentru partea cea mai simplă (ce conține nodurile D, E, C, F). Din ecuația de momente în raport cu punctul C:

$$aN + aT_6 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \text{rezultă} \quad T_6 = -2P, \text{ iar}$$

din ecuația de momente în raport cu punctul G:

$$-aT_4 \frac{\sqrt{3}}{2} + 2aN = 0 \quad \text{rezultă} \quad T_4 = 4P.$$

Barele 4 și 6 sunt paralele, deci a treia ecuație va fi de proiecții pe direcția perpendiculară pe cele 2 bare:

$$T_5 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}N = 0 \quad \text{Rezultă} \quad T_5 = -P.$$

Se observă că rezultatele sunt evident aceleași cu cele găsite la metoda anterioară. În general, operația de secționare se repetă până ce toate eforturile din bare s-au calculat.

4.3.4. Metoda grafică Maxwell-Cremona

Eforturile într-o grindă cu zăbrele mai pot fi determinate și prin metode grafice. Una din acestea este epura Cremona. Se introduce o notație pentru forțe (notația Bow) astfel: un domeniu va fi mărginit de suportul forțelor exterioare, al reacțiunilor și de barele grinzii. În acest fel, fiecare forță se găsește la granița a două domenii. În particular, dacă una din forțe coincide cu o bară a grinzii, aceasta se va deplasa pe suport în exteriorul grinzii. Se alege un sens convențional de parcurgere a domeniilor exterioare și convenim ca fiecare forță să fie redenumită prin două numere: primul indică primul domeniu întâlnit în sensul de parcurgere ales, iar al doilea număr indică ultimul domeniu întâlnit.

Prima etapă constă în determinarea reacțiunilor exterioare. Acest calcul poate fi făcut grafic, dar și analitic. Prin metoda grafică, se construiește la scară poligonul

forțelor exterioare format din rezultanta forțelor date \bar{R}_d și din cele două componente ale forțelor de legătură. Se ține seama și că cele trei forțe trebuie să aibă suporturile concurente pentru echilibru.

În continuare se alege un nod cu două eforturi necunoscute astfel încât, corespunzător sensului ales inițial, în jurul fiecărui nod se obține poligonul forțelor care trebuie să se închidă pentru echilibru. Se procedează în acest fel cu fiecare nod, până la ultimul.

Urmărind sensul efortului într-unul din noduri, se poate stabili dacă este de întindere sau compresiune. În epura Cremona eforturile de compresiune se notează prin linii îngroșate. Folosind această notație în fig. 4.14 este construită epura Cremona pentru aceeași grindă din fig. 4.10.

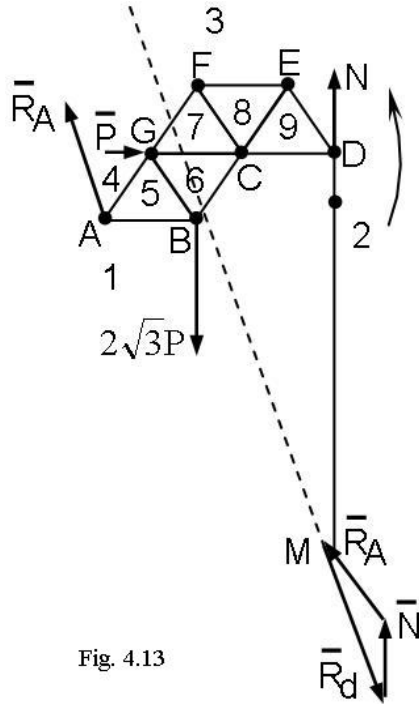


Fig. 4.13

În fig. 4.13 sensul ales este cel trigonometric. Cu ajutorul notațiilor făcute, forța P corespunde notației 3-4, efortul în bara FC ce acționează în F corespunde la 7-8, iar cel ce acționează în nodul C corespunde la 8-7.

Pentru determinarea reacțiunilor din A și D, mai întâi vom determina grafic rezultanta forțelor exterioare date P și $2\sqrt{3}P$ și axa centrală (linia punctată din fig. 4.13), folosind poligonul forțelor și poligonul funicular. Ținând seama că forța de legătură \bar{R}_A din A, rezultanta forțelor date \bar{R}_d și normala \bar{N} din D sunt concurente, și cunoscând direcția normalei \bar{N} , notăm cu M intersecția suportului rezultantei \bar{R}_d cu suportul lui \bar{N} . Din condiția $\bar{R}_d + \bar{N} + \bar{R}_A = 0$, se determină imediat \bar{R}_A (care are direcția cunoscută \overline{MA}) și mărimea lui \bar{N} . În cazul când

reacțiunile exterioare au fost calculate analitic, se verifică dacă poligonul forțelor exterioare se închide.

În fig. 4.14 (epura Cremona) poligonul forțelor exterioare și de legătură este 1-2-3-4.

În continuare se alege nodul A care are două eforturi necunoscute: 1-5 și 5-4. Reacțiunea \bar{R}_A , eforturile din barele AB și AG vor forma un triunghi pentru care se cunoaște o latură (4-1) și direcția celorlalte două, paralele cu barele respective.

Ducem prin 1 (inițial arbitrar) o dreaptă paralelă cu AB și din 4 o dreaptă paralelă cu bara AG, punctul de intersecție va reprezenta numărul 5. Se continuă în acest fel până când toate domeniile vor fi reprezentate în planul forțelor, prin puncte.

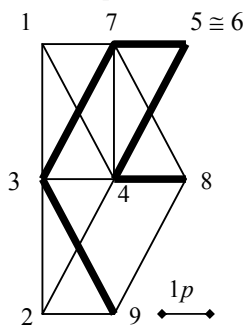


fig. 4.15

Pentru a determina valoarea și natura efortului într-o anumită bară, se stabilește denumirea efortului pentru bară în unul din noduri, în conformitate cu convenția inițială. De exemplu, efortul în bara EF ce acționează în nodul E se numește 3-8. În planul forțelor, lungimea segmentului 3-8 reprezintă la scară valoarea efortului. În ceea ce privește natura efortului, alegând nodul E ca nod de referință, în rotația peste bara FE, primul domeniu întâlnit este 3, iar al doilea 8. Prin urmare în nodul E va acționa efortul 3-8 din epura Cremona cu originea în 3 și extremitatea în 8. Deoarece efortul 3-8 din bara FE acționează înspre nodul E, rezultă că bara FE este supusă la compresie.

În același mod se pot determina toate eforturile și natura lor folosind construcția epurei Cremona.

Se verifică că în jurul fiecărui nod se închide poligonul forțelor.

5. ECHILIBRUL FIRELOR

5.1. Definiții. Ipoteze de calcul.

În mecanică, prin noțiunea de fir se înțelege un corp la care două din dimensiuni sunt neglijabile în raport cu a treia, adică secțiunea transversală este foarte mică în comparație cu lungimea.

Firele se consideră perfect flexibile – proprietatea firului de a nu opune nici o rezistență la orice tendință de schimbare a formei cu excepția modificării lungimii. De asemenea firele sunt torsionabile – nu pot prelua eforturi de încovoiere și de răsucire și în sfârșit firele se consideră inextensibile – adică nu se alungesc oricât de mari ar fi forțele de întindere la care sunt supuse.

Un corp cu proprietățile enunțate nu există în realitate. El se numește fir ideal și reprezintă un model pentru studiu.

În acest capitol vom urmări determinarea formei de echilibru numită curbă funiculară și a forțelor interioare numite tensiuni în fire supuse forțelor exterioare.

În tehnică se consideră ca fire, cablurile mașinilor de ridicat, al funicularelor, al podurilor suspendate, cablurile electrice, lanțurile, odgoanele etc.

5.2. Echilibrul firului supus la forțe concentrate la extremități

Firul supus la două forțe concentrate ce acționează la extremitățile lui va fi

studiat prin metoda solidificării.

Firul va fi în echilibru în acest caz, numai dacă cele două forțe sunt în echilibru, adică egale, de sens contrar și au același suport. În concluzie, forma de echilibru a firului este un segment de dreaptă ce coincide cu suportul comun al celor două forțe. Forțele trebuie să acționeze astfel ca firul să fie supus numai la întindere, nu și la compresiune (fig.5.1).

Dacă se secționează firul într-un punct P, pentru restabilirea echilibrului trebuie să introducem în cele două porțiuni obținute forțele \bar{T} și $-\bar{T}$ pentru că în cazul echilibrului, aceste forțe de legătură sunt egale și de sens contrar.

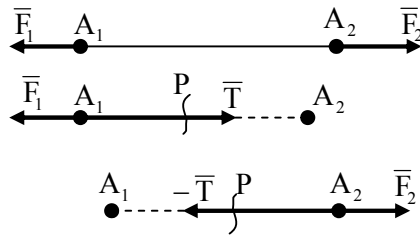


fig.5.1

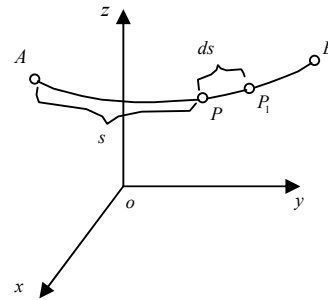


fig.5.2

5.3. Echilibrul firului supus la forțe distribuite

Un fir de lungime L este suspendat în punctele $A(X_A, Y_A, Z_A)$ și $B(X_B, Y_B, Z_B)$ și asupra lui acționează pe unitatea de lungime forța distribuită \bar{P} . Alegând capătul A ca origine de măsurare a arcelor, poziția unui punct oarecare P de pe arc de curba AB este definită de arcul AP de lungime s. Arcul s reprezintă coordonata curbilinie a punctului P.(fig.5.2).

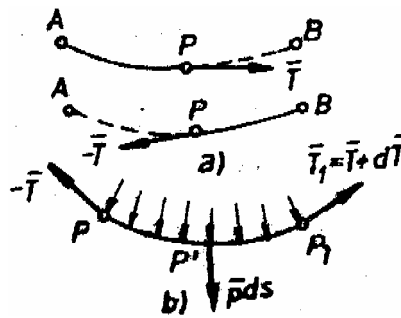


fig. 5.3

Se pun problemele de a determina ecuația curbei funiculare, tensiunea din fir $\bar{T} = \bar{T}(s)$, precum și tensiunile \bar{T}_A și \bar{T}_B din punctele A și B.

Secționăm firul în punctul P și introducem pentru echilibru în cele două porțiuni de fir forțele \bar{T} și $-\bar{T}$.

Convențional, vom nota prin $+\bar{T}$ forța ce acționează asupra porțiunii de fir AP și prin $-\bar{T}$, cea care acționează asupra porțiunii PB (fig.5.3.a).

Pentru echilibru, detașăm un element de fir PP_1 de lungime ds (fig.5.3.b).

În punctele P și P_1 acționează tensiunile $-\bar{T}$ și $\bar{T} + d\bar{T}$, unde $d\bar{T}$ este variația tensiunii de-a lungul elementului de fir. Forța exterioară ce acționează asupra elementului de fir PP_1 de lungime ds este $\bar{p} ds$. Aceasta este o forță repartizată de-a lungul arcului elementar PP_1 și poate fi înlocuită printr-una concentrată aplicată în punctul P' al arcului PP_1 .

Ecuatiile de echilibru ale elementului de fir PP_1 sunt:

$$\begin{aligned}\bar{T}_1 - \bar{T} + \bar{p}ds &= 0 \\ \overline{PP_1} \times \bar{T}_1 + \overline{PP_1} \times \bar{p}ds &= 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

Modulul celui de-al doilea termen din (5.1₂) conține termenul în $(ds)^2$ (deoarece $ds \gg PP_1$) care în comparație cu modulul primului termen care-l conține pe ds este un infinit mic de ordinul doi deci neglijabil în comparație cu primul termen.

Din ecuația (5.1₂) se obține:

$$\overline{PP_1} \times \bar{T}_1 = 0 \quad (5.2)$$

ceea ce înseamnă că tensiunea \bar{T}_1 este coliniară cu coarda PP_1 .

Dar punctele P și P_1 sunt infinit apropiate și deci coarda PP_1 devine tangentă la curba de echilibru a firului.

În concluzie, se poate spune că în orice punct al firului, tensiunea \bar{T} din fir este dirijată de-a lungul tangentei la curba de echilibru.

Din relația $\bar{T}_1 = \bar{T} + d\bar{T}$, ecuația (5.1₁) devine după unele transformări:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p}(s) = 0, \quad (5.3)$$

În care se ține seama că $\bar{T} = \bar{T}(s)$ este dirijată după direcția tangentei în secțiunea ds a curbei funiculare.

Vom stabili în cele ce urmează, ecuațiile de echilibru față de un reper cartezian. Pentru aceasta, fie $P(x,z,y)$ și $P'(x+dx,y+dy,z+dz)$.

Tangenta în P la curba funiculară trece prin P' și formează cu direcțiile axelor unghiurile α, β, γ , pentru care cosinuşii directori sunt:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}, \quad (5.4)$$

Proiecțiile tensiunii pe axe de coordonate sunt:

$$T_x = T \cos \alpha, \quad T_y = T \cos \beta, \quad T_z = T \cos \gamma, \quad (5.5)$$

iar proiecțiile forței exterioare distribuită pe unitatea de lungime $\bar{p}(s)$ le vom nota $p_x(s), p_y(s), p_z(s)$.

Proiecțiile ecuației (5.3) pe axe de coordonate sunt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T \frac{dx}{ds} + p_x(s) &= 0 & \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + p_y(s) &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + p_z(s) &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Din identitatea

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1, \quad (5.7)$$

și din sistemul (5.6) se pot determina ecuațiile curbei funiculare și tensiunea în fir, astfel: se dezvoltă derivatele în relația (5.6), apoi se înmulțește fiecare ecuație cu $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, respectiv $\frac{dz}{ds}$, și cu ajutorul relației (5.7), se obține:

$$dT + p_x(s)dx + p_y(s)dy + p_z(s)dz = 0 \quad (5.8)$$

Relațiile (5.7) și (5.8) alcătuiesc un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute: x, y, z (poziția de echilibru) și T în funcție de variabila independentă s .

Constantele de integrare ce se introduc în rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale, se determină din condițiile ca A și B să se afle pe curba funiculară, precum și din condiția ca lungimea curbei funiculare între A și B să fie egală cu L .

În cazul când forța pe unitatea de lungime de arc a firului derivă într-o funcție de forță $U = U(x, y, z)$, astfel că:

$$p_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (5.9)$$

atunci ecuația (5.8) devine:

$$dT + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dT + dU = d(T + U) = 0 \quad (5.10)$$

Prin integrare, se obține:

$$T + U = \text{const.} \quad (5.11)$$

Deci tensiunea în fir este determinată cu excepția unei constante arbitrare.

5.4. Echilibrul firului omogen greu

În acest caz, firul suspendat în punctele A și B este acționat de propria sa greutate. Forța exterioară este reprezentată de greutatea specifică ρ pe unitatea de lungime, care față de un sistem de referință cartezian cu axa Oy verticală cu sensul pozitiv ascendent, are expresia

$$\bar{p}(s) = -\rho \bar{j}$$

cu ρ constant.

Ținând seama că $p_x = p_z = 0, p_y = -\rho$, ecuațiile (5.6) devin:

$$\frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) - \rho = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dz}{ds}\right) = 0 \quad (5.12)$$

de unde prin integrarea primei și celei de-a treia din ecuațiile (5.12) rezultă:

$$T \frac{dx}{ds} = C_1, \quad T \frac{dz}{ds} = C_2 \quad (5.13)$$

Prin împărțirea celor două ecuații din (5.13) se obține $\frac{dz}{dx} = \frac{C_2}{C_1}$, de unde

prin integrare, rezultă $z = \frac{C_2}{C_1} x + C_3$. Prin urmare, curba funiculară este situată într-

un plan vertical determinat de punctele de suspendare.

În cele ce urmează, alegem sistemul de referință astfel ca axele Ox și Oy să fie conținute în planul vertical ce conține cele două puncte A și B de suspendare (axa Oy fiind verticală ascendentă). Pentru determinarea curbei de echilibru, vom folosi primele două ecuații ale sistemului (5.12):

$$\frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) - \rho = 0 \quad (5.14)$$

la care se adaugă relația (5.7) pentru acest caz:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad (5.15)$$

Din prima ecuație a sistemului (5.14) rezultă prin integrare:

$$T \frac{dx}{ds} = T \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = T_0 = \text{const.} \quad (5.16)$$

Prin urmare, tensiunea T în fir este minimă pentru $\alpha = 0$, adică în punctul cel mai de jos al curbei funiculare, (unde tangenta este orizontală) și o notăm cu T_0 .

Constanta T_0 se determină din condițiile la limită.

Din relația (5.16) rezultă că proiecția tensiunii într-un punct oarecare al curbei funiculare de echilibru, pe direcția orizontalei este constantă. Tensiunea maximă va fi pentru α_{\max} , adică în punctul de prindere cel mai ridicat.

Din relația (5.14₂) și ținând seama că $T = \frac{ds}{dx} T_0$, se obține:

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\rho}{T_0} ds = \frac{\rho}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (5.17)$$

Cu notațiile $\frac{\rho}{T_0} = \frac{1}{a}$ (a – constanta de dimensiunea unei lungimi) și

$\frac{dy}{dx} = y'$, relația (5.17) se mai scrie sub forma:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{a} dx. \quad (5.18)$$

Prin integrarea ecuației diferențiale (5.18) se obține:

$$\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{x-x_0}{a} \quad (5.19)$$

unde x_0 este o nouă constantă de integrare care urmează să se determine din condițiile inițiale.

Relația (5.19) înmulțită cu -1 și ținând seama că :

$$-\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \ln(\sqrt{1+y'^2} - y'), \text{ devine:}$$

$$\ln(\sqrt{1+y'^2} - y') = -\frac{x-x_0}{a} \quad (5.20)$$

Relațiile (5.19) și (5.20) sunt echivalente cu următoarele:

$$\sqrt{1+y'^2} + y' = \exp \frac{x-x_0}{a} \quad (5.19')$$

$$\sqrt{1+y'^2} - y' = \exp \left(-\frac{x-x_0}{a} \right) \quad (5.20')$$

Prin scăderea relațiilor (5.19') și (5.20') se obține:

$$y' = sh \frac{x-x_0}{a} \quad (5.21)$$

Prin integrarea ecuației (5.21) se obține:

$$y - y_0 = a ch \frac{x-x_0}{a} \quad (5.22)$$

unde y_0 este a treia constantă de integrare.

Constantele de integrare T_0 , x_0 și y_0 se determină din condițiile ca extremitățile A și B ale firului să se găsească pe curba de echilibru:

$$y_A - y_0 = a ch \frac{x_A - x_0}{a}, \quad y_B - y_0 = a ch \frac{x_B - x_0}{a} \quad (5.23)$$

precum și condițiile ca lungimea firului între capetele A și B să fie:

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{x_A}^{x_B} ch \frac{x-x_0}{a} dx = a \left(sh \frac{x_B - x_0}{a} - sh \frac{x_A - x_0}{a} \right) \quad (5.24)$$

Din relațiile (5.23) și (5.24) se pot determina cele trei constante de integrare T_0 (sau a), x_0 și y_0 .

Pentru calculul mărimii tensiunii T din fir, vom folosi relația (5.8) din care rezultă:

$$dT - \rho dy = 0 \quad (5.25)$$

Pentru integrarea ecuației (5.25), ținem seama în (5.21) că, pentru $x = x_0, y' = 0$, deci x_0 este punctul de minim al curbei de echilibru unde tensiunea este T_0 . Pe de altă parte $dy = y' dx = sh \frac{x - x_0}{a} dx$ și $T_0 = \rho a$. Integrând ecuația

(5.25) pe intervalul $[x_0, x]$, se obține $T - T_0 - \rho a \left(ch \frac{x - x_0}{a} - 1 \right) = 0$, sau după simplificări:

$$T = T_0 ch \frac{x - x_0}{a}. \quad (5.26)$$

Același rezultat se putea obține din (5.16) folosind (5.21).

Ținând seama de (5.22), relația (5.26) se mai scrie:

$$T = \rho(y - y_0), \quad (5.27)$$

cu direcția lui \bar{T} în fiecare punct, tangentă la curba de echilibru (5.22).

Față de un sistem de referință ales particular (fig.5.4), rezultatele obținute se pot simplifica. În acest scop, alegem sistemul de referință Oxy astfel ca axa Oy să treacă prin punctul de minim M al curbei de echilibru ($y' = 0$ pentru $x = 0$) și acesta să fie situat la distanța a față de origine ($y = a$ pentru $x = 0$). Astfel, din formula (5.21) va rezulta $x_0 = 0$ și deci din (5.22), $y_0 = 0$. Cu aceste simplificări, ecuația (5.22) devine:

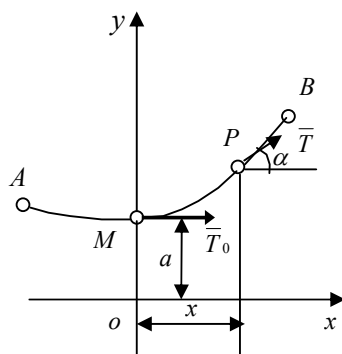


fig. 5.4

$$y = a ch \frac{x}{a} \quad (5.28)$$

și se mai numește ecuația lăncșorului.

În acest sistem de axe, formula (5.26) devine:

$$T = py \quad (5.29)$$

iar lungimea arcului de curbă \widehat{MP} este :

$$L = \int_0^x ds = a sh \frac{x}{a}. \quad (5.30)$$

În particular, dacă $y_A = y_B = a + f$ (fig.5.5), punctul de minim M este la mijlocul

firului ($x_A = -x_B$), iar f se numește săgeata lăncșorului.

Pentru a stabili o relație de legătură între săgeata f , distanța a și lungimea L a firului AB, vom folosi formulele (5.28) și (5.30), astfel:

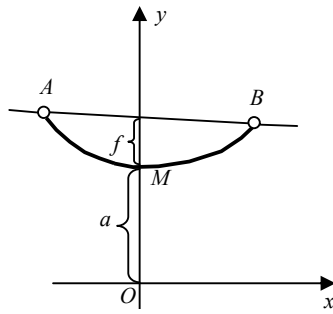


fig. 5.5

$$a + f = a \operatorname{ch} \frac{x_B}{a} \quad (5.31)$$

$$L = 2a \operatorname{sh} \frac{x_B}{a}$$

Ținând seama de identitatea $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ și eliminând $\frac{x_B}{a}$ între relațiile (5.31), se obține relația căutăată :

$$4f^2 + 8af - L^2 = 0, \quad (5.32)$$

care permite determinarea unei necunoscute în funcție de celelalte două.

5.5. Firul omogen greu foarte întins

Se consideră un fir omogen greu foarte întins. În acest caz, tensiunile în orice secțiune au valori foarte mari în raport cu greutatea proprie a firului ($T_0 \gg \rho L$).

Dar $T_0 = a\rho$ și deci $a \gg L$, iar din faptul că $x < L$ rezultă imediat $\frac{x}{a} \ll 1$.

Acest lucru ne permite să aproximăm $\operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a}$ prin dezvoltare în serie

Taylor a funcțiilor $e^{\frac{x-x_0}{a}}$ și $e^{-\frac{x-x_0}{a}}$ din care vom reține primii termeni. Se obține $\operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a} \approx 1 + \frac{(x - x_0)^2}{2a^2}$, astfel că ecuația de echilibru a firului omogen greu foarte întins, devine parabola :

$$y - y_0 = a + \frac{(x - x_0)^2}{2a} \quad (5.33)$$

Expresia tensiunii T într-un punct de abscisă x , folosind formula (5.26), devine :

$$T = T_0 \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{2a^2} \right] \quad (5.34)$$

În cazul alegerii sistemului de referință particular când axa Oy este verticală și trece prin M ($x_0 = y_0 = 0$), rezultatele anterioare se scriu :

$$y = a + \frac{x^2}{2a^2}, \quad T = T_0 \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} \right) \quad (5.35)$$

Lungimea arcului de parabolă este

$$\widehat{PM} = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{a}{2} \left[\ln \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a} \right) - \frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right]$$

Aplicatie: Un fir omogen având greutatea G și lungimea $L = 2L_0 + L_1$ este trecut prin două inele A și B de greutate neglijabilă, aflate pe o axă fixă orizontală (fig.5.6.a). Coeficientul de frecare dintre fiecare inel și axă este μ . Să se determine tensiunea T_0 , săgeata maximă f și deschiderea AB.

Rezolvare: În poziția de echilibru la limită, axa Oz este axă de simetrie pentru curba de echilibru a firului.

Prin izolarea inelului B (fig.5.6.b) se obțin ecuațiile de echilibru ($G = \rho L = \rho L_1 + 2L_0$):

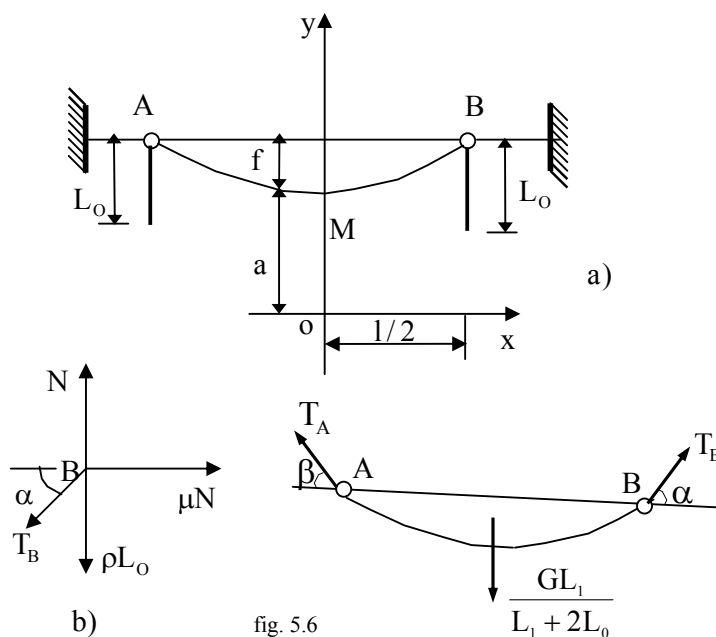


fig. 5.6

$$T_B \cos \alpha - \mu N = 0 \quad N - \rho L_0 - T_B \sin \alpha = 0, \quad (5.36)$$

iar prin metoda rigidizării, dar numai a curbei lăncișor AB (fig. 5.6.c) :

$$\begin{aligned} T_A \cos \beta - T_B \cos \alpha &= 0, & T_B \sin \alpha + T_A \sin \beta - \frac{GL_1}{L_1 + 2L_0} &= 0 \\ \frac{l}{2} T_B \sin \alpha - \frac{l}{2} T_A \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Din ecuațiile (5.37₁) și (5.37₃) rezultă $\alpha = \beta$ și din (5.37₂) :

$$T_A = T_B = \frac{GL_1}{2(L_1 + 2L_0) \sin \alpha}. \text{ Pe de altă parte, eliminând } N \text{ între relațiile (5.36) se}$$

$$\text{obține } T_B = \frac{\mu \rho L_0}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = \frac{\mu GL_1 \cdot L_0}{(2L_0 + L_1)(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}.$$

$$\text{Din egalitatea tensiunilor } T_B \text{ rezultă } \operatorname{ctg} \alpha = \mu \frac{2L_0 + L_1}{L_1}. \text{ Din relația (5.32)}$$

$$\text{rezultă } a = \frac{L_1^2 - 4f^2}{8f}. \text{ Scriem expresia lui } T_0 \text{ în două moduri :}$$

$$T_0 = \rho a = \frac{Ga}{L_1 + 2L_0} \text{ și } T_0 = T_B \cos \alpha = \frac{GL_1 \cos \alpha}{2(L_1 + 2L_0) \sin \alpha}, \text{ de unde rezultă}$$

$$a = \frac{1}{2}(L_1 + 2L_0) \text{ și } T_0 = \frac{1}{2} \mu G. \text{ Ținând seama de expresia pentru } \operatorname{ctg} \alpha \text{ și}$$

de cele două forme pentru a , se obține ecuația

$$4f^2 + 4\mu(L_1 + 2L_0)f - L_1^2 = 0, \text{ de unde rezultă}$$

$$f_{\max} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\mu^2(L_1 + 2L_0)^2 + L_1^2} - \mu(L_1 + 2L_0) \right]. \text{ Din expresia}$$

$$a + f = y_B = a \operatorname{ch} \frac{l}{2a}, \text{ se obține o ecuație de gradul doi în } e^{\frac{l}{2a}}, \text{ de unde,}$$

ținând seama că $e^{\frac{l}{2a}} > 1$, se obține :

$$l = 2a \ln \frac{L_1 + 2f}{L_1 - 2f} = \mu(L_1 + 2L_0) \ln \frac{L_1 - \mu(L_1 + 2L_0) + \sqrt{\mu^2(L_1 + 2L_0)^2 + L_1^2}}{L_1 + \mu(L_1 + 2L_0) - \sqrt{\mu^2(L_1 + 2L_0)^2 + L_1^2}}$$

6. APLICAȚII TEHNICE ALE STATICII

În acest capitol vom prezenta unele aplicații tehnice ale staticii, cunoscute și sub numele de mașini simple.

Prin mașină simplă se înțelege un corp sau un sistem de corpuri rigide cu ajutorul cărora prin aplicarea unei forțe active \overline{P} în mod avantajos, să se învingă o forță rezistentă \overline{Q} opusă tendinței de mișcare.

În general, mașinile sunt astfel construite încât cu o forță activă mică să se pună în mișcare o forță rezistentă mare, iar uneori să schimbe sensul de acționare al forței rezistente. Pentru fiecare mașină simplă se pune problema stabilirii unei relații între forțele P și Q la limita echilibrului, după ce în prealabil s-a presupus tendința de mișcare dată de forța activă P .

În cele ce urmează se va cerceta echilibrul mai multor mașini simple. În caz că frecările nu sunt neglijabile, se va studia echilibrul la limită, când poate începe mișcarea mașinii simple.

6.1. Pârghia

Pârghia este un corp rigid având o articulație plană în jurul căreia se poate roti.

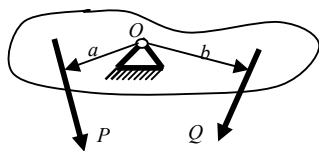


fig.6.1

Pârghiile se întâlnesc în construcția unor unelte (foarfeci, clești, pensete), a unor instrumente de măsură (cântare, balanțe), a unor aparate și instalații.

Pârghia este astfel construită încât forța activă P pentru realizarea echilibrului la limită să fie mult mai mică decât forța rezistentă Q .

Se consideră pârghia din fig.6.1 cu axă fixă realizată printr-o articulație cilindrică, având forțele \overline{P} și \overline{Q} aplicate într-un plan perpendicular pe axa fixă. Dacă forțele nu acționează într-un astfel de plan, ele ar trebui proiectate în planul perpendicular pe axa de rotație, iar proiecțiile vor fi notate tot prin P și Q .

Brațele forțelor \overline{P} și \overline{Q} față de punctul O se vor nota prin a și b . Pentru început vom considera că nu există frecare în articulație. Din ecuația de echilibru a momentelor forțelor \overline{P} și \overline{Q} în raport cu punctul O se obține :

$$P = \frac{b}{a} Q. \quad (6.1)$$

Din această relație se deduce că în cazul raportului $\frac{b}{a}$ subunitar, forța activă P se poate alege mai mică decât forța Q .

În cazul frecării în lagăr, vom ține seama de coeficientul de frecare μ în articulație, de raza fusului r și de faptul că frecarea se manifestă printr-un cuplu (fig.6.2).

Rezultanta forțelor \bar{P} , \bar{Q} și \bar{R}_l care acționează asupra pârgheii trebuie să fie nulă. Ele fiind coplanare, trebuie să fie concurente, deci se obține :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \quad (6.2)$$

unde α este unghiul format de direcțiile forțelor \bar{P} și \bar{Q} .

Momentul maxim al frecării din articulație este

$$M_{a \max} = \mu r R_l \quad (6.3)$$

Condiția de echilibru la limită a pârgheii este dată de ecuația de momente față de axa fusului, perpendiculară în O pe planul forțelor :

$$P_a - Qb - \mu r R_l = 0 \quad (6.4)$$

Ținând seama de formula (6.2), obținem :

$$P = \frac{ab + \mu^2 r^2 \cos \alpha \pm \mu r \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha - \mu^2 r^2 \sin^2 \alpha}}{a^2 - \mu^2 r^2} \quad (6.5)$$

Cele două valori corespund celor două cazuri posibile de rotire a pârgheii. Deoarece practic, $a > \mu r$, forța de mărime P dată de (6.5) este bine definită.

În particular, dacă forțele \bar{P} și \bar{Q} sunt paralele, caz întâlnit frecvent, adică $\alpha = 0$, relația (6.4) devine :

$$P_a - Qb - \mu r(P + Q) = 0 \quad (6.6)$$

astfel că se deduce :

$$P = \frac{b + \mu r}{a - \mu r} Q \quad (6.7)$$

Pentru ca forța \bar{P} să fie mai mică decât forța \bar{Q} , trebuie ca produsul μr să fie mic și constructiv $b < a$. Aceasta se realizează fie prin micșorarea razei fusului, fie prin diminuarea frecărilor.

Ținând seama că în formula (6.7) forța P este maximă și considerând și cealaltă tendință de mișcare posibilă, pentru echilibru trebuie ca forța P să verifice inegalitățile

$$\frac{b - \mu r}{a + \mu r} Q \leq P \leq \frac{b + \mu r}{a - \mu r} Q \quad (6.8)$$

Egalitățile corespund echilibrului la limită.

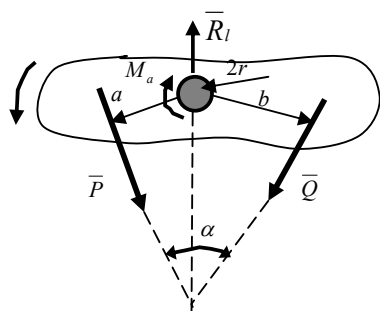


fig. 6.2

6.2. Scripetele simplu

Scripetele simplu este format dintr-un disc circular articulat într-o articulație cilindrică, având pe periferie un șanț peste care este trecut un fir la extremitățile căruia acționează forțele P și Q (fig.6.3). Cu alte cuvinte, scripetele simplu este o pârghie cu brațele egale.

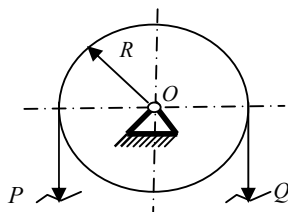


fig. 6.3

Scripetii se folosesc frecvent în construcția mașinilor de ridicat. Scripetii pot fi fiși – când fusul articulației este fix și mobili – când un capăt al firului este fix, forța activă este aplicată la celălalt capăt, iar forța rezistentă acționează asupra articulației.

Pentru scripetele fix din fig.6.3, din ecuația de momente în raport cu articulația O, rezultă

$$P = Q \quad (6.9)$$

în cazul când se neglijează frecările.

Dacă se ia în considerare și frecarea din articulația O, prin particularizarea ecuația (6.7) ($a = b = R$), se obține :

$$P = \frac{R + \mu r}{R - \mu r} Q \quad (6.10)$$

unde R și r sunt razele scripetelui respectiv articulației.

Până acum am considerat suporturile forțelor activă și rezistentă ca fiind paralele, iar greutatea firului și a scripetelui neglijabile. Firul nu se poate considera perfect flexibil, deoarece cablurile în general opun rezistență la încovoiere.

Din această cauză apar abateri de la poziția ideală, așa cum arată în fig.6.4. Considerând echilibrul la limită, brațul forței active se micșorează cu ε_1 , iar brațul forței rezistente se mărește cu ε_2 .

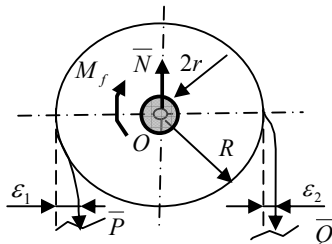


fig. 6.4

Ca și în cazul pârgheii, reacțiunea din articulația O este $R_l = N = P + Q$, iar momentul maxim al frecării din articulație

$$M_{a\max} = \mu r (P + Q)$$

Ecuația din momente în raport cu punctul O se scrie :

$$P(R - \varepsilon_1) - Q(R + \varepsilon_2) - \mu r (P + Q) = 0 \quad (6.11)$$

unde μ este coeficientul de frecare în articulație, iar r este raza fusului. Din (6.11) se

deduce :

$$P_{\max} = \frac{R + \varepsilon_2 + \mu r}{R - \varepsilon_1 - \mu r} Q \quad (6.12)$$

Fracția din relația (6.12) se mai scrie și sub forma :

$$\frac{R + \varepsilon_2 + \mu r}{R - \varepsilon_1 - \mu r} = 1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R - \varepsilon_1 - \mu r} + \frac{2\mu r}{R - \varepsilon_1 - \mu r} \quad (6.13)$$

Dar $\varepsilon_1 \ll R$ și $\mu r \ll R$, astfel că vom neglija termenii ε_1 și μr de la numitor, deci relația (6.12) se va scrie sub forma :

$$P_{\max} = \left(1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R} + 2 \frac{\mu r}{R} \right) Q \quad (6.14)$$

Termenul $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R}$ caracterizează rigiditatea firului, iar termenul $2 \frac{\mu r}{R}$, frecarea din articulație.

În general, expresia $k = 1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R} + 2 \frac{\mu r}{R}$ este strict supraunitară și se numește cifra scripetelui. Cazul $k = 1$ corespunde firului perfect flexibil și ideal . Expresia (6.14) devine :

$$P_{\max} = kQ \quad (6.15)$$

Deoarece $k \geq 1$, forța activă P este mai mare decât forța rezistentă Q , dar scripetele are avantajul că schimbă sensul de acționare al forței.

6.3. Trolitul

Trolitul este format din două roți coaxiale și solidare care au o axă fixă O (fig.6.5). Trolitul este o pârghie cu brațe inegale. Forța activă P acționează prin intermediul unui fir înfășurat pe tamburul de rază R_2 , iar în sens opus, forța rezistentă Q prin intermediul unui fir înfășurat pe tamburul de rază $R_1 < R_2$.

În cazul ideal, relația (6.1) devine :

$$P = \frac{R_1}{R_2} Q \quad (6.16)$$

iar ținând seama și de frecarea din articulația O , din formula (6.7) deducem :

$$P = \frac{R_1 + \mu r}{R_2 - \mu r} Q \quad (6.17)$$

unde r este raza fusului .

Față de scripetele obișnuit, trolitul are avantajul că micșorează forța activă în raport cu forța rezistentă .

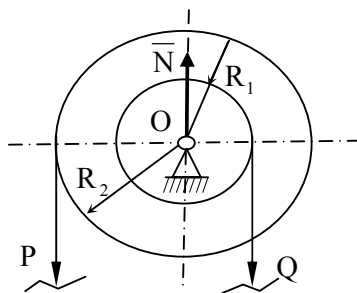


fig. 6.5

6.4. Sisteme de scripeți

Mai mulți scripeți fiși și mobili astfel dispuși încât forța activă P să fie mai mică decât forța rezistentă Q , formează un sistem de scripeți. În cazul unui sistem de scripeți se vor stabili forțele active și forțele rezistente și relațiile dintre acestea.

a) Scripetele exponențial este format dintr-un scripete fix și n scripeți mobili, deci din $n+1$ scripeți. În cele ce urmează vom considera cazul a doi scripeți mobili (fig. 6.6) ($n=2$) și vom admite că toți scripeții au aceeași cifră k .

Considerând echilibrul la limită, cu tendința de mișcare dată de forța activă P , condițiile de echilibru pentru fiecare scripete sunt:

$$\begin{aligned} P &= kT_1, & T_1 &= kT_2, & T_1 + T_2 &= T_3, \\ T_3 &= kT_4, & T_3 + T_4 &= Q \end{aligned} \quad (6.18)$$

Din acest sistem se obțin în ordine :

$$T_4 = \frac{Q}{k+1}, \quad T_3 = \frac{kQ}{k+1}, \quad T_2 = \frac{kQ}{(k+1)^2}, \quad T_1 = \frac{k^2Q}{(k+1)^2} \quad (6.19)$$

$$P = \frac{k^2}{(k+1)^2} Q. \quad (6.20)$$

Analog și pentru un sistem format din n scripeți mobili și unul fix, vom obține:

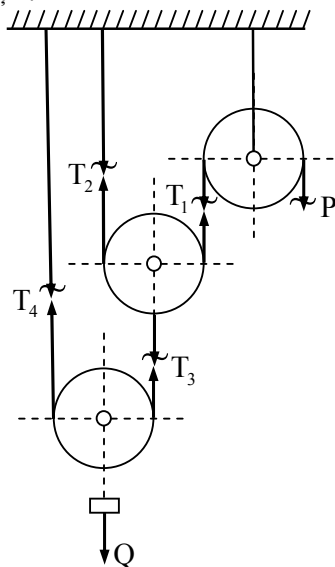


fig. 6.6

$$P = \frac{k^{n+1}}{(k+1)^n} Q. \quad (6.21)$$

În particular, pentru $k = 1$ (scripeți ideali), formula (6.21) devine :

$$P = \frac{Q}{2^n}. \quad (6.22)$$

Se observă că forța activă scade exponențial cu numărul de scripeți, de unde și denumirea de scripete exponențial. Scripetele exponențiale sunt foarte eficiente, dar au dezavantajul că sunt voluminoase.

b) Palanul este un sistem de scripeți montat în două mufe : una superioară fixă și cealaltă inferioară mobilă, fiecare având un număr de n scripeți care se pot roti liber.

Se admite că toți scripeții sunt identici și au aceeași cifră k , iar cele două mufe se află la o distanță suficient de mare pentru ca firele să

fie paralele între ele. Pentru simplificare, vom considera $n = 3$ (fig.6.7). Vom secționa fiecare fir, iar condițiile de echilibru la limită, folosind formulele (6.15) sunt :

$$P_{\max} = kT_1 ,$$

$$T_1 = kT_2 , \quad T_2 = kT_3 , \quad T_3 = kT_4 , \quad T_4 = kT_5 , \quad T_5 = kT_6 \quad (6.23)$$

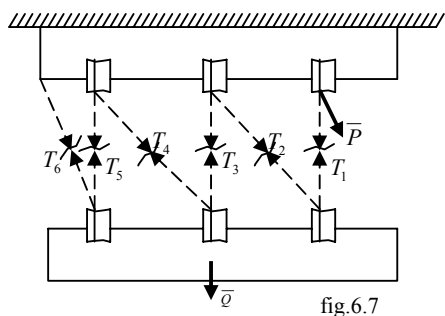


fig.6.7

Mufla inferioară este în echilibru, iar această condiție conduce la relația :

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = Q \quad (6.24)$$

Din sistemul (6.23) deducem :

$$T_1 = \frac{P}{k} , \quad T_2 = \frac{P}{k^2} , \quad T_3 = \frac{P}{k^3} , \quad T_4 = \frac{P}{k^4} , \quad T_5 = \frac{P}{k^5} , \quad T_6 = \frac{P}{k^6} \quad (6.25)$$

Expresiile (6.25), înlocuite în relația (6.24) conduc la relația

$$\frac{P}{k} + \frac{P}{k^2} + \frac{P}{k^3} + \frac{P}{k^4} + \frac{P}{k^5} + \frac{P}{k^6} = Q ,$$

din care deducem :

$$P = \frac{(k-1)k^6}{k^6 - 1} Q . \quad (6.26)$$

În cazul când palanul este format din n scripete în mufla fixă și n scripete în mufla mobilă, se obține :

$$P = \frac{(k-1)k^{2n}}{k^{2n} - 1} Q \quad (6.27)$$

În particular, pentru $k = 1$ (toți scripetii ideali), se obține :

$$P = \frac{Q}{2n} \quad (6.28)$$

Se observă că forța rezistentă este redusă proporțional cu numărul de scripete și în comparație cu scripetele exponențial este mai puțin eficient ($2^n \geq 2n$), dar mai frecvent folosit în practică.

c) Scripetele diferențial este format dintr-un troliu având axa fixă și un scripete mobil pe care se înfășoară un fir continuu (fig. 6.8).

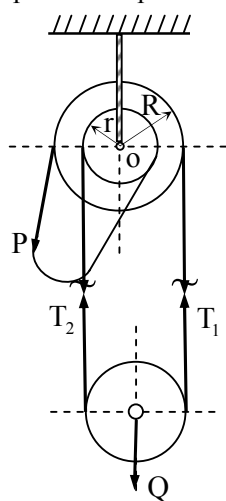


fig. 6.8

Forța activă P acționează prin intermediul firului, pe tamburul mare al troliului, iar forța rezistentă Q acționează în axa scripetelui mobil. Considerând numai cazul ideal, ecuațiile de echilibru pentru scripetele mobil se scriu sub forma :

$$T_1 + T_2 = Q, \quad T_1 = T_2 \quad (6.29)$$

Pentru troliu, scriem ecuația de momente în raport cu axa O :

$$PR + T_2 r - T_1 R = 0. \quad (6.30)$$

Din relațiile (6.29) și (6.30) deducem :

$$P = \frac{R-r}{2R} Q. \quad (6.31)$$

Scripetele diferențial este cu atât mai eficient, cu cât diferența $R-r$ este mai mică. Dar micșorarea forței P conduce la lungirea timpului de acționare al scripetelui. Totuși, acesta are avantajul că este acționat de forțe care se pot alege astfel încât timpul de lucru să nu crească mult.

6.5. Șurubul

Șurubul este un organ de mașină obținut dintr-o piesă cilindrică circulară la periferia căreia este practicat un canal elicoidal numit filet. Șurubul este folosit pentru a învinge forța rezistentă Q aplicând o forță activă P mult mai mică, atât ca element de fixare, cât și ca element de mișcare.

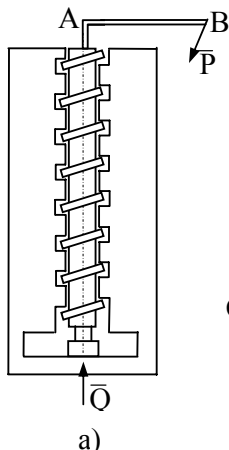


fig. 6.9

Șurubul se înșurubează într-o piesă denumită piuliță, care are un gol cilindric pe suprafața căruia este practicat un filet de asemenea elicoidal, având aceleași elemente geometrice ca și filetul șurubului (fig. 6.9.a).

Parametrii de bază pentru filetul unui șurub sunt raza r (de fapt este raza cilindrului corespunzător elicei), unghiul dintre tangenta într-un punct al filetului și planul perpendicular pe axa cilindrului, precum și pasul p – distanța dintre două puncte consecutive situate pe aceeași generatoare.

Dacă se consideră desfășurată suprafața laterală a cilindrului, se deduce imediat relația de legătură între aceste elemente :

$$P = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha . \quad (6.32)$$

Mișcarea relativă a șurubului față de piuliță este o mișcare elicoidală particulară numită mișcare de șurub.

Există cazuri când piulița este fixată, iar șurubul are o mișcare elicoidală (presa cu șurub, șurubul de presiune), cazuri când șurubul este fix și piulița are o mișcare elicoidală (șuruburile de asamblare), cazuri când piulița are mișcare de rotație, iar șurubul mișcare de translație (șurubul binoculului) și cazuri când șurubul are mișcare de rotație și piulița mișcare de translație (șurubul conducător de la strung).

Vom presupune în cele ce urmează că piulița este fixă și șurubul mobil, iar coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = \operatorname{tg} \varphi$.

Considerând un element de arie dS de pe suprafața de contact a îmbinării (fig. 6.9.b), vom studia echilibrul la limită al acestuia. Forțele elementare care intervin sunt următoarele : reacțiunea normală de mărime $dN = p dS$ care acționează în sens opus forței rezistente Q , normală pe secțiune în planul tangent și forța de frecare maximă $dF_1 = \mu dN = \mu p dS$, dirijată după tangenta la secțiune în sens contrar cu tendința de mișcare a șurubului.

Deoarece ne interesează numai relația între forța activă P și forța rezistentă Q , este suficient să scriem numai ecuațiile de proiecții pe axa șurubului și de momente în raport cu această axă :

$$\begin{aligned} Q - \int_{(S)} dN \cos \alpha + \int_{(S)} dF_f \sin \alpha &= 0 \\ -Pl + \int_{(S)} r dN \sin \alpha + \int_{(S)} r dF_f \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

unde l este brațul forței active P , iar integralele se efectuează pe toată suprafața de contact.

Dar r , μ și α sunt constante și deci din relațiile (6.33) deducem :

$$\begin{aligned} Q &= (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \int_{(S)} dN \\ P &= \frac{r}{l} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \int_{(S)} dN \end{aligned} \quad (6.34)$$

Reacțiunea $\int_{(S)} dN$ se poate elimina prin împărțirea celor două relații din (6.34) astfel că :

$$P_{\max} = \frac{r \sin \alpha + \mu \cos \alpha}{l \cos \alpha + \mu \sin \alpha} Q = \frac{r}{l} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot Q \quad (6.35)$$

Dacă se schimbă tendința de mișcare, relația (6.35) devine :

$$P_{\min} = \frac{r}{l} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \cdot Q \quad (6.36)$$

deci, pentru ca șurubul să fie în echilibru, trebuie îndeplinite inegalitățile :

$$\frac{r}{l} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \cdot Q \leq P \leq \frac{r}{l} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot Q \quad (6.37)$$

Pentru valori ale lui P exterioare acestui domeniu, șurubul se mișcă față de piuliță.

În cazul când unghiul α este mai mic decât unghiul de frecare φ ($\alpha \leq \varphi$), minimul forței P devine negativ, astfel că șurubul rămâne în echilibru oricât de mare ar fi forța rezistentă Q . În acest caz, pentru a desface șurubul, trebuie să aplicăm brațului AB o forță minimă de sens contrar lui P , egală cu P_{\min} . În tehnică, acest caz se numește autofixare (autoblocare).

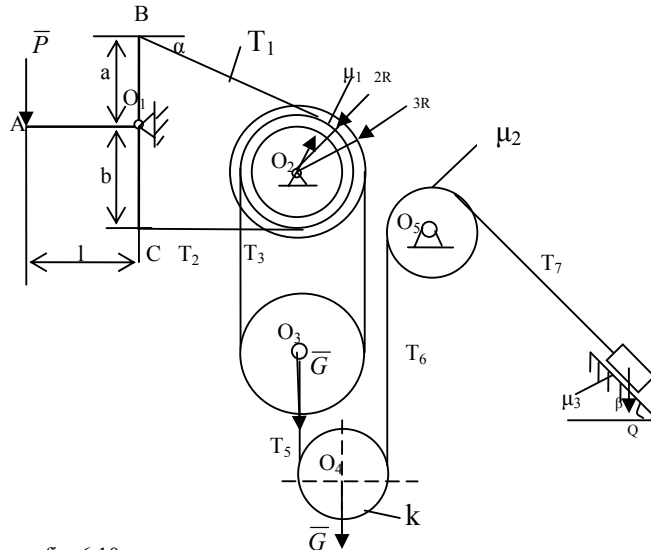


fig. 6.10

Aplicatie: Se consideră sistemul de corpuri din fig.6.10. De pârghia cotită în unghi drept ABC este fixată o bandă înfășurată pe discul mijlociu al trolui O_2 . Între bandă și toba de rază $2R$, coeficientul de frecare este μ_1 . Discurile O_3 și O_4 sunt identice, de greutate G și cifră k . Între bandă și discul O_5 , coeficientul de frecare este μ_2 , iar între greutatea Q și planul înclinat, coeficientul de frecare este μ_3 . Să se determine forțele P și Q pentru echilibru în poziția din figură.

Rezolvare : Se separă fiecare din cele șase corpuri și vom scrie ecuațiile de momente astfel : pentru pârghia ABC , în raport cu O_1 , iar pentru trolu în raport cu O_2 :

$$lP + bT_2 - aT_1 \sin \alpha = 0 ,$$

$$RT_3 + 2RT_1 - 2RT_2 - 3RT_4 = 0$$

Relația lui Euler pentru trolu este

$$T_1 = T_2 e^{\mu_1(\pi-\alpha)}$$

Pentru discurile O_3 și O_4 scriem ecuații de proiecții pe verticală și ținem seama de cifra scripetilor. Pentru discul O_2 scriem relația lui Euler, iar pentru greutatea q , ecuația de proiecții de-a lungul planului. Vom calcula forța P minimă și domeniul de valori pentru Q , la început presupunând tendința lui Q de a coborî pe planul înclinat :

$$T_3 + T_4 = T_5 + G$$

$$T_3 = kT_4$$

$$T_5 + T_6 = G$$

$$T_6 = kT_5$$

$$T_7 = T_6 e^{\mu_2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$$

$$T_7 = Q(\sin \beta - \mu_3 \cos \beta)$$

Se obțin:

$$T_5 = \frac{G}{k+1} ,$$

$$T_4 = \frac{(k+2)G}{(k+1)^2} ,$$

$$T_3 = \frac{(k^2 + 2k)G}{(k+1)^2} ,$$

$$T_2 = \frac{(2k^2 + 7k + 6)G}{2(k+1)^2 [e^{\mu_1(\pi-\alpha)} - 1]} ,$$

$$T_1 = \frac{(2k^2 + 7k + 6)e^{\mu_1(\pi-\alpha)} \cdot G}{2(k+1)^2 [e^{\mu_1(\pi-\alpha)} - 1]} ,$$

$$P_{\min} = \frac{(2k^2 + 7k + 6)[ae^{\mu_1(\pi-\alpha)} \cdot \sin \alpha - b]}{2l(k+1)^2 [e^{\mu_1(\pi-\alpha)} - 1]} ,$$

$$T_6 = \frac{k}{k+1} G ,$$

$$T_7 = \frac{k}{k+1} e^{-\mu_2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} ,$$

$$Q_{\max} = \frac{ke^{\mu_2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}}{(k+1)(\sin \beta - \mu_3 \cos \beta)}.$$

Analog, pentru tendința inversă a lui Q, se obține

$$Q_{\min} = \frac{ke^{-\mu_2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} \cdot G}{(k+1)(\sin \beta + \mu_3 \cos \beta)},$$

astfel că în final se obține :

$$\frac{ke^{-\mu_2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} \cdot G}{(k+1)(\sin \beta + \mu_3 \cos \beta)} \leq Q \leq \frac{ke^{\mu_2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} \cdot G}{(k+1)(\sin \beta - \mu_3 \cos \beta)}.$$

CAPITOLUL 2. CINEMATICA

7.1 Cinematica punctului material

Cinematica punctului material studiază mișcarea mecanică a punctelor materiale, fără a se ține cont de masele și forțele ce acționează asupra lor. Mișcarea punctelor materiale se raportează la un reper de care se consideră fixat un anumit sistem de referință. Reperul (sistemul de referință) poate fi fix sau mobil. În raport cu reperul fix, mișcarea punctului material se numește mișcare absolută, iar în raport cu reperul mobil, mișcarea se numește mișcare relativă.

7.2. Elementele cinematice ale mișcării punctului material

7.2.1. Legea de mișcare

Mișcarea unui punct material M este cunoscută dacă în orice moment se poate preciza poziția lui în raport cu un reper presupus fix O. Pentru aceasta, se definește vectorul de poziție $\vec{r} = \overline{OM}$ al punctului material M față de originea O a reperului, ca funcție de timp (fig. 7.1):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (7.1)$$

Funcția vectorială $\vec{r} = \vec{r}(t)$ reprezintă legea de mișcare a punctului material sub formă vectorială. Această funcție vectorială trebuie să îndeplinească anumite restricții impuse de fenomenul fizic al mișcării punctului: ea trebuie să fie continuă, uniformă, finită în modul și derivabilă de cel puțin două ori.

Acest vector fiind definit de două funcții scalare în plan sau de trei funcții scalare în spațiu rezultă că punctul material liber are două grade de libertate în plan sau trei grade de libertate în spațiu.

Definirea vectorului de poziție \vec{r} poate fi făcută în coordonate carteziane prin cunoașterea funcțiilor scalare în timp

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad (7.2)$$

deoarece

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (7.3)$$

versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ai reperului fix fiind vectori constanți.

Dacă se folosesc coordonatele cilindrice, cunoașterea lui \vec{r} este echivalentă cu cunoașterea următoarelor funcții scalare:

$$\rho = \rho(t) \quad , \quad \theta = \theta(t) \quad , \quad z = z(t) \quad (7.4)$$

care reprezintă raza polară, unghiul polar, respectiv cota punctului material M (fig. 7.1). Vectorul de poziție este de forma:

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{k} \quad (7.5)$$

Versorii \vec{u}_ρ și \vec{u}_θ care se folosesc în cadrul coordonatelor cilindrice sunt vectori variabili iar derivatele lor se exprimă cu ajutorul derivatelor unghiului polar θ .

Funcțiile de timp $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$ care definesc poziția punctului material M față de reperul O, formează legile de mișcare (ecuațiile de mișcare) scalare ale punctului material.

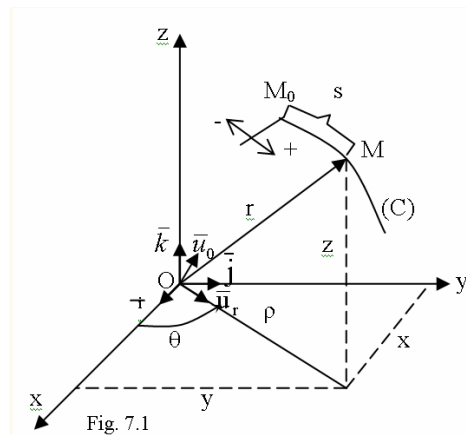


Fig. 7.1

7.2.2. Traectoria punctului material

Traectoria este locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de punct în mișcare. Între traectorie și curba pe care se deplasează punctul nu există întotdeauna o identitate. Spre exemplu, pe un cerc, un punct poate parcurge numai un arc sau poate parcurge de mai multe ori cercul.

Ecuațiile (7.1), (7.2), (7.3), (7.4) și (7.5) pot fi considerate ca fiind ecuațiile parametrice ale traectoriei. Prin eliminarea parametrului t între ecuațiile scalare ale mișcării (7.2), se obțin ecuațiile a două suprafețe:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (7.6)$$

care prin intersecția lor determină traectoria sub forma implicită.

Cu ajutorul legilor de mișcare în coordonate cilindrice, se pot obține în mod analog ecuațiile implicite ale traectoriei:

$$\Phi_1(\rho, \theta, z) = 0, \quad \Phi_2(\rho, \theta, z) = 0 \quad (7.7)$$

În unele probleme de cinematică se cunoaște traectoria. În acest caz, mișcarea punctului material poate fi definită printr-o singură ecuație scalară, astfel: se alege pe curba (C) un punct arbitrar M_0 și un sens pozitiv de măsurare a arcelor pe curbă. Poziția unui punct oarecare M poate fi definită prin valoarea $s(t)$ a arcului de

curbă $\widehat{M_0 M}$ (fig. 7.1). Legea de mișcare a punctului M pe traectorie în acest caz, este dată de ecuația

$$s = s(t) \quad (7.8)$$

care se numește ecuație orară (lege orară) a mișcării punctului material.

7.2.3. Viteza punctului material

Mișcările se pot deosebi între ele și prin faptul că punctele materiale pot parcurge aceleași distanțe în intervale de timp diferite sau distanțe diferite în același interval de timp. Aceste considerente impun introducerea unei noi noțiuni numită viteză. Viteza este o mărime vectorială care precizează direcția și sensul în care se efectuează mișcarea. Pentru determinarea vectorului vitează, vom urmări variația în timp a vectorului de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ a punctului M de pe traiectorie în raport cu un reper fix O.

La un moment oarecare t, punctul M are vectorul de poziție $\vec{r}(t)$. Într-un interval suficient de scurt dt , punctul M ajunge în poziția M' căruia îi corespunde vectorul de poziție $\vec{r}(t + \Delta t)$. (fig. 7.2). Prin urmare, în intervalul de timp dt , punctul

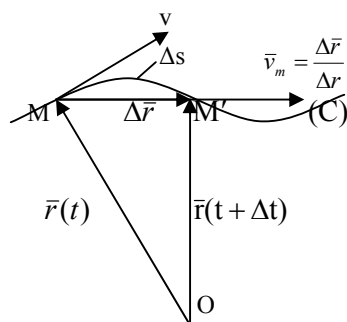


fig. 7.2

a parcurs arcul de curbă $\widehat{MM'}$ de lungime Δs căruia îi corespunde vectorul variație:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

a vectorului de poziție \vec{r} . Intervalul de timp Δt fiind foarte mic, se poate asimila elementul de arc cu elementul de coardă.

În acest caz raportul $\Delta \vec{r} / \Delta t$ se definește ca viteză medie:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (7.9)$$

Viteza medie dă o imagine asupra modului cum se deplasează punctul. De cele mai multe ori însă interesează direcția și sensul mișcării. Acestea se obțin cu ajutorul vitezei instantanee. Limita acestui raport când Δt tinde la zero, reprezintă viteza instantanee (sau viteza) punctului material la momentul t:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (7.10)$$

Deci în mișcarea unui punct material, viteza este un vector reprezentat de derivata vectorului de poziție al punctului în raport cu timpul.

Derivatele unei funcții vectoriale (sau scalare) în raport cu timpul se notează cu puncte. Astfel, de exemplu

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ și } \ddot{v} = \frac{d^2 v}{dt^2}$$

Pentru determinarea elementelor caracteristice ale vectorului viteză, din relația (7.10) deducem:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \times \bar{\tau} = \dot{s} \bar{\tau} \quad (7.11)$$

deoarece

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} = \bar{\tau} \text{ (versorul tangentei)} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} = 1 \quad (7.12)$$

În concluzie, vectorul viteză \bar{v} este aplicat în punctul M, are direcția tangentei în M la traiectorie iar sensul este dat de mișcarea punctului pe traiectorie. Mărimea vectorului viteză este

$$v = |\bar{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (7.13)$$

Ecuția de dimensiuni a vitezei este

$$[\bar{v}] = LT^{-1} \quad (7.14)$$

Unitatea de măsură pentru viteză este m/s (din relația (7.13)).

7.2.4. Accelerația punctului material

Accelerația este o mărime care arată variația vitezei unui punct în decursul mișcării, ca direcție, sens și modul.

În intervalul mic de timp Δt , punctul material străbate pe traiectorie arcul $\overset{\wedge}{MM'}$ și are în M viteza $\bar{v}(t)$ iar în M' $\bar{v}(t + \Delta t)$. În acest fel, viteza s-a modificat cu $\Delta \bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)$ (fig. 7.3). Pe porțiunea $\overset{\wedge}{MM'}$, accelerația medie este definită prin raportul:

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} \quad (7.15)$$

Accelerația la momentul t (accelerația instantanee sau momentană) va fi limita când Δt tinde la zero a raportului (7.15):

$$\bar{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \quad (7.16)$$

Prin urmare accelerația este derivată în raport cu timpul a vitezei sau derivată a doua în raport cu timpul a vectorului de poziție al punctului respectiv. Accelerația este o mărime vectorială, având punctul de aplicație în M, este conținută în planul de variație al vitezei, deci în planul osculator în punctul M la traiectorie (planul a două

tangente infinit apropiate) și este îndreptată spre interiorul traiectoriei (înspre concavitate).

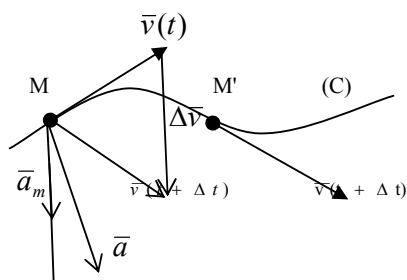


fig. 7.3

Ecuția de dimensiuni a accelerației este

$$[\bar{v}] = LT^{-2} \quad (7.17)$$

Unitatea de măsură a accelerației este m/s².

7.2.5. Hodograful vitezei

Punctul M în deplasarea sa pe curba (C) ocupă pozițiile M₁, M₂, ..., M_n cu vitezele $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$. Într-un

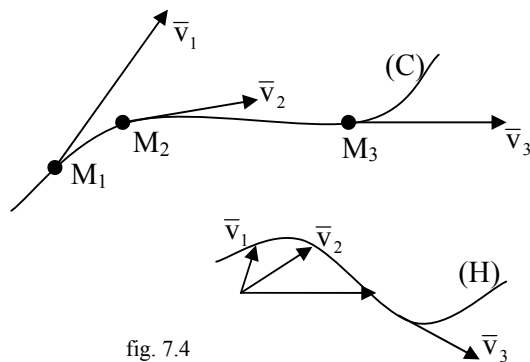


fig. 7.4

punct arbitrar O, construim vectorii echipolenți cu vectorii viteză (fig. 7.4). Locul geometric al extremităților vectorilor echipolenți cu vitezele este o curbă (H) numită hodograful vitezelor. Cu ajutorul curbei (H) se poate observa variația vitezei punctului M.

Ecuția vectorială a hodografului vitezei se obține din relația

$$\bar{r}_{(H)} = \bar{v}(t) \quad (7.18)$$

Ecuția analitică a hodografului vitezei se obține proiectând relația (7.18) pe axele unui reper ales și eliminând parametrul t.

Rezultă imediat că viteza unui punct oarecare P de pe hodograf este tocmai accelerația:

$$\dot{\bar{r}}_{(H)} = \frac{d\overline{OP}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}(t) \quad (7.19)$$

7.2.6. Invarianții mișcării în raport cu schimbarea reperului

Considerăm două repere fixe (O și O_1) în raport cu care se studiază mișcarea punctului (fig. 7.5), astfel că putem scrie:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}(t) \quad (7.20)$$

cu $\vec{r}_0 = \text{constant}$.

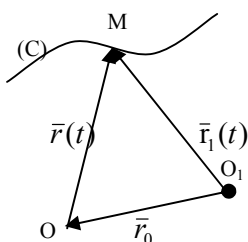


fig. 7.5

Vitezele și accelerațiile unui punct arbitrar M de pe traiectorie raportate la cele două repere se obțin din relația (7.20) prin derivări succesive:

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad , \quad \vec{a}_1 = \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}} = \vec{a} \quad (7.21)$$

Observăm că viteza și accelerația sunt invariante în raport cu schimbarea reperului.

7.2.7. Viteza și accelerația unghiulară

În unele cazuri, de exemplu în mișcarea punctului pe cerc, poziția acestuia pe traiectorie este dată de un unghi θ . În raport cu o axă fixă Ox (fig. 7.6), obținem:

$$\theta = \theta(t) \quad (7.22)$$

Dacă M și M' sunt două poziții succesive, la momentele t respectiv $t + \Delta t$ pe cercul cu centrul în O , definim viteza unghiulară medie:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \quad (7.23)$$

Viteza unghiulară instantanee va fi limita raportului (7.23) pentru Δt tinzând la zero:

$$\omega_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (7.24)$$

În mod analog, definim

accelerația unghiulară instantanee:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (7.25)$$

Ecuatiile de dimensiuni sunt:

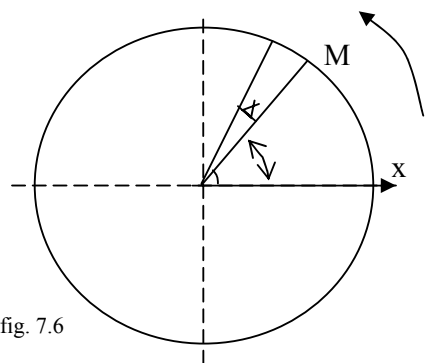


fig. 7.6

$$[\omega] = T^{-1}, \quad [\varepsilon] = T^{-2} \quad (7.26)$$

Viteza unghiulară se măsoară în rad/s iar accelerația unghiulară în rad/s².

7.2.8. Viteza și accelerația areolară

Sunt cazuri când este necesară introducerea unei mărimi care să caracterizeze variația ariei cuprinse între două raze vectoriale și arcul de traiectorie parcurs de un punct M (fig. 7.7). În intervalul de timp Δt mic, punctul parcurge arcul MM' iar aria triunghiului curbiliniu OMM' se aproximează cu aria unui triunghi a cărui arie este:

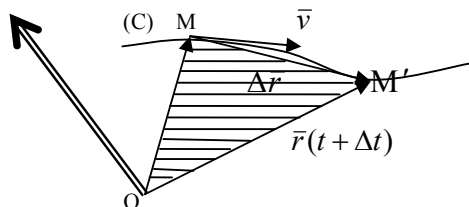


fig. 7.7

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \times \Delta r \quad (7.27)$$

Mărimii scalare ΔA îi asociem vectorul $\Delta \bar{A}$ de mărime ΔA , perpendicular pe planul OMM' iar sensul dat de regula burghiului drept (prin deplasarea lui M către M')

$$\Delta \bar{A} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \Delta \bar{r} \quad (7.28)$$

Viteza areolară se introduce pentru a descrie modul cum vectorul de poziție \bar{r} parcurge („mătură”) suprafața conică OMM'.

Viteza areolară medie se consideră prin definiție:

$$\bar{\Omega}_m = \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \quad (7.29)$$

Prin trecere la limită pentru Δt tinzând la zero (M tinde spre M'), obținem viteza areolară instantanee:

$$\bar{\Omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v} \quad (7.30)$$

Proiecțiile vitezei areolare pe un sistem de axe cartezian se obțin din relația (7.30):

$$\Omega_x = \frac{1}{2} (y\dot{z} - \dot{y}z), \quad \Omega_y = \frac{1}{2} (z\dot{x} - \dot{z}x), \quad \Omega_z = \frac{1}{2} (x\dot{y} - \dot{x}y) \quad (7.31)$$

Viteza areolară este nulă când vectorii \bar{r} și \bar{v} sunt colineari sau când punctul M trece prin O.

În particular, dacă traiectoria este o curbă plană (situată în planul Oxy), atunci $\Omega_x = \Omega_y = 0, \Omega_z \neq 0$. În coordonate polare, se poate scrie:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (7.32)$$

astfel că se obține:

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \dot{\theta}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (7.33)$$

Accelerația areolară caracterizează modul de variație al vitezei areolare. Prin definiție, accelerația areolară este derivata vitezei areolare în raport cu timpul:

$$\bar{\Gamma} = \frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \dot{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} (\dot{\bar{r}} \times \bar{v} + \bar{r} \times \dot{\bar{v}}) = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{a} \quad (7.34)$$

Proiecțiile accelerației unghiulare sunt:

$$\Gamma_x = \frac{1}{2} (y\ddot{z} - z\ddot{y}), \Gamma_y = \frac{1}{2} (z\ddot{x} - x\ddot{z}), \Gamma_z = \frac{1}{2} (x\ddot{y} - y\ddot{x}) \quad (7.35)$$

În particular, dacă mișcarea se efectuează cu viteză areolară constantă, atunci vectorii \bar{r} și \bar{v} sunt colineari tot timpul mișcării, deci accelerația punctului M trece permanent prin punctul fix O. Urmează că $\bar{\Gamma} = \dot{\bar{\Omega}} = 0$, iar din $\bar{\Omega} = \bar{c}$ rezultă $\bar{r} \times \bar{v} = 2\bar{c}$ astfel că vectorii \bar{r} și \bar{c} sunt perpendiculari. Deci locul geometric al punctelor M este un plan perpendicular pe \bar{c} care trece prin punctul fix O.

7.3. Studiul mișcării punctului în diferite sisteme de coordonate

7.3.1. Sistemul de coordonate carteziene

În sistemul de coordonate carteziene, vectorul de poziție al unui punct material M este definit prin coordonatele sale x, y, z (fig. 7.8):

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (7.36)$$

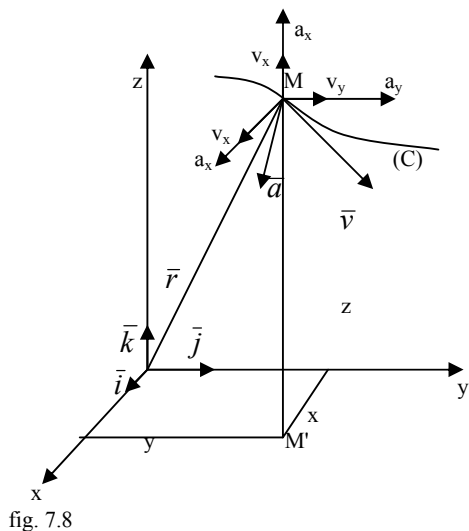


fig. 7.8

Cunoașterea mișcării revine la cunoașterea acestor coordonate ca funcții de timp:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (7.37)$$

Relațiile (7.37) definesc legea de mișcare și reprezintă de asemenea ecuațiile parametrice ale traiectoriei. Prin eliminarea timpului din ecuațiile (7.37), se obțin ecuațiile traiectoriei sub formă implicită:

$$f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0 \quad (7.38)$$

Pentru obținerea vitezei în coordonate carteziene, folosim formula (7.10) și ținem seama că versorii axelor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt vectori constanți:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \quad (7.39)$$

Proiecțiile vitezei sunt:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \quad (7.40)$$

iar mărimea vitezei este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (7.41)$$

Unghiurile suportului vectorului viteză cu axele rezultă din relațiile:

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{\dot{z}}{v} \quad (7.42)$$

Accelerația punctului se determină din relația (7.16):

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} \quad (7.43)$$

Proiecțiile accelerației sunt:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad (7.44)$$

iar mărimea accelerației este:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (7.45)$$

Cosinusurile unghiurilor făcute de accelerație cu axele sunt:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{\ddot{z}}{a} \quad (7.46)$$

În particular, pentru mișcări în plan, considerăm sistemul de referință Oxy, astfel că legea de mișcare a punctului este dată de ecuațiile:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (7.47)$$

Ecuția traiectoriei (C) rezultă prin eliminarea timpului din relațiile (7.47):

$$f(x, y) = 0 \quad (7.48)$$

Vectorul viteză este:

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \quad (7.49)$$

iar mărimea vitezei:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (7.50)$$

Vectorul accelerație este:

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} \quad (7.51)$$

cu mărimea

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \quad (7.52)$$

Dacă mișcarea este rectilinie, se alege axa Ox ca traiectorie a mișcării (fig. 7.10).

Legea mișcării este:

$$(7.53)$$

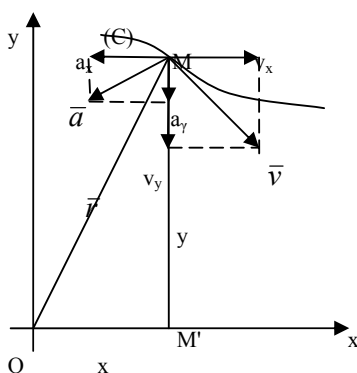


fig. 7.9

$$x = x(t)$$

cu viteza:

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} \quad (7.54)$$

și accelerația

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} \quad (7.55)$$

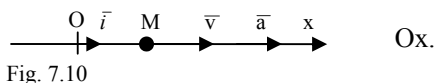


Fig. 7.10

Se observă că acestea au direcția axei

Ox.

Pentru obținerea hodografului mișcării, folosim formula (7.18). Coordonatele unui punct

de pe curba hodografului, în raport axele carteziene, le notăm cu X, Y, Z , astfel că se poate scrie:

$$X(t) = \dot{x}(t), \quad Y(t) = \dot{y}(t), \quad Z(t) = \dot{z}(t) \quad (7.56)$$

Prin eliminarea din ecuațiile (7.56) a parametrului t se obțin ecuațiile hodografului sub formă analitică:

$$F(X, Y, Z) = 0, \quad G(X, Y, Z) = 0 \quad (7.57)$$

Aplicație: Un punct material se deplasează în planul Oxy după legea:

$$x = 2a \sin^2 t, \quad y = 2b \sin t \cos t, \quad a, b > 0$$

Să se determine traiectoria, viteza, accelerația și hodograful mișcării.

Rezolvare: Prin eliminarea timpului între cele două ecuații parametrice ale traiectoriei, obținem ecuația analitică a traiectoriei (elipsă): $b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2ab^2 x = 0$, Viteza are proiecțiile: $v_x = 2a \sin 2t$, $v_y = 2b \cos 2t$, cu modulul

$$v = 2\sqrt{a^2 \sin^2 2t + b^2 \cos^2 2t}, \text{ accelerația are proiecțiile: } a_x = 4a \cos 2t,$$

$a_y = -4b \sin 2t$, modulul accelerației este: $|\bar{a}| = 4\sqrt{a^2 \cos^2 2t + b^2 \sin^2 2t}$, iar ecuațiile parametrice ale hodografului mișcării sunt: $X = 2a \sin 2t$, $Y = 2b \cos 2t$, din care rezultă ecuația analitică a hodografului: $b^2 X^2 + a^2 Y^2 = 4a^2 b^2$.

7.3.2. Sistemul de coordonate polare

Dacă un punct are o traiectorie plană, putem folosi sistemul de coordonate polare. Poziția unui punct M este definită prin coordonatele: $OM=r$ (rază polară) și unghiul θ dintre axa fixă Ox și raza polară (fig. 7.11). Mișcarea punctului este definită dacă se cunosc coordonatele r și θ ca și funcții de timp:

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t) \quad (7.58)$$

Relațiile (7.58) formează ecuațiile parametrice ale traiectoriei în coordonate polare.

Prin eliminarea timpului între relațiile (7.58), obținem ecuația traiectoriei în coordonate polare sub formă analitică:

$$f(r, \theta) = 0 \quad (7.59)$$

Pentru stabilirea direcțiilor pe care se proiectează viteza și accelerația în sistemul de coordonate polare, procedăm astfel: considerăm că unghiul polar θ rămâne constant iar r variază. Deci punctul M descrie dreapta OM care reprezintă una

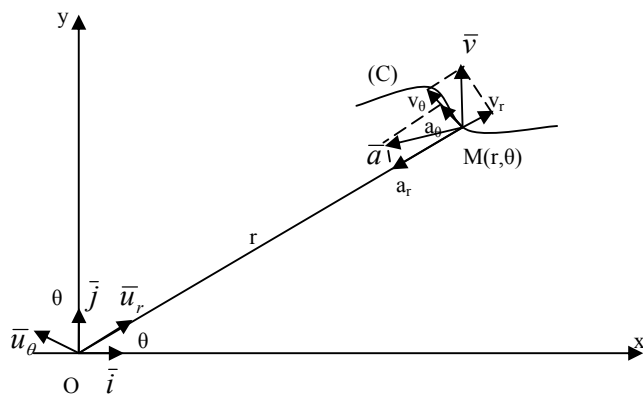


fig. 7.11

din direcțiile de proiectare. Pe această direcție alegem versorul \bar{u}_r în sensul de creștere al razei polare. Considerăm apoi că raza polară rămâne constantă ($r = \text{constant}$). Rezultă că punctul M descrie un arc de cerc de rază $OM = r$. A doua direcție se alege tangențial la acest arc de cerc în punctul M.

Pe această direcție se alege versorul \bar{u}_θ cu originea în punctul fix O, cu sensul pozitiv dat de sensul de creștere al unghiului θ . Versorii \bar{u}_r și \bar{u}_θ sunt perpendiculari și definesc axele sistemului de coordonate polar. În timpul mișcării, versorii \bar{u}_r și \bar{u}_θ își schimbă direcția, deci axele sistemului de coordonate polare sunt mobile, dar versorii \bar{u}_r și \bar{u}_θ rămân perpendiculari.

Deoarece vom avea nevoie de derivatele în raport cu timpul ale versorilor \bar{u}_r și \bar{u}_θ (care în general sunt diferite de zero), vom exprima acești vectori în funcție de versorii axelor fixe Oxy, \bar{i} și \bar{j} :

$$\bar{u}_r = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}, \quad \bar{u}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j} \quad (7.60)$$

Derivând în raport cu timpul relațiile (7.60) și având în vedere că $\dot{\bar{i}} = 0$, $\dot{\bar{j}} = 0$, obținem:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}}_r &= -\sin \theta \times \dot{\theta} \bar{i} + \cos \theta \times \dot{\theta} \bar{j} = \dot{\theta} \bar{u}_\theta \\ \dot{\bar{u}}_\theta &= -\cos \theta \times \dot{\theta} \bar{i} - \sin \theta \times \dot{\theta} \bar{j} = -\dot{\theta} \bar{u}_r \end{aligned} \quad (7.61)$$

Vectorul de poziție $\bar{r} = \overline{OM}$ al punctului M se exprimă în funcție de versorul \bar{u}_r astfel:

$$\bar{r} = r \bar{u}_r \quad (7.62)$$

Viteza se obține prin derivarea în raport cu timpul a relației (7.62) și ținând seama de relațiile (7.61):

154 CAPITOLUL 2. CINEMATICA

$$\bar{v} = \dot{r} = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\bar{u}}_r = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta \quad (7.63)$$

Dar

$$\bar{v} = v_r\bar{u}_r + v_\theta\bar{u}_\theta \quad (7.64)$$

astfel că obținem proiecțiile vitezei în coordonate polare:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (7.65)$$

Componentele v_r și v_θ fiind perpendiculare, modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \quad (7.66)$$

Accelerația se obține derivând expresia (7.63) în raport cu timpul și ținând seama că termenii $\dot{r}\bar{u}_r$ și $r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$ sunt produse de două respectiv trei funcții de timp:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = (\ddot{r}\bar{u}_r + \dot{r}\dot{\bar{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\bar{u}_\theta + r\ddot{\theta}\bar{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\bar{u}}_\theta)$$

Înlocuind pe $\dot{\bar{u}}_r$ și $\dot{\bar{u}}_\theta$ cu expresiile lor (7.61) și grupând termenii, obținem:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{u}_\theta \quad (7.67)$$

Dar

$$\bar{a} = a_r\bar{u}_r + a_\theta\bar{u}_\theta \quad (7.68)$$

astfel încât proiecțiile accelerației în coordonate polare sunt:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (7.69)$$

Aplicație: Mișcarea unui punct are loc într-un plan, astfel încât în coordonate polare, legea de mișcare este dată de:

$$r = a_0\sqrt{5 - 4\cos 2t}, \quad \theta = \arctg(3 \operatorname{tg} t), \quad a_0 > 0$$

Să se determine traiectoria în coordonate polare și carteziene, viteza și accelerația punctului și hodograful mișcării.

Rezolvare: În coordonate polare, traiectoria este curba $r = 3a_0\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}{9 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$,

iar în coordonate carteziene, putem scrie: $x = r \cos \theta = \pm a_0 \cos t$,
 $y = r \sin \theta = \pm 3a_0 \sin t$ de unde putem obține elipsa: $9x^2 + y^2 = a_0^2$. Proiecțiile

vitezei sunt: $v_r = \dot{r} = \frac{4a_0 \sin 2t}{\sqrt{5 - 4\cos 2t}}$, $v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{3a_0}{\sqrt{5 - 4\cos 2t}}$, iar mărimea vitezei este:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = a_0\sqrt{\frac{9 + 16\sin^2 2t}{5 - 4\cos 2t}} = a_0\sqrt{5 + 4\cos 2t}. \quad \text{Proiecțiile}$$

accelerației sunt: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -a_0\sqrt{5 - 4\cos 2t}$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ și deci mărimea accelerației devine: $a = a_0\sqrt{5 - \cos 2t} = r$. Hodograful mișcării în

coordonate polare, are ecuațiile parametrice:
 $X = v_r = \frac{4a_0 \sin 2t}{\sqrt{5-4\cos 2t}}$, $Y = v_\theta = \frac{3a_0}{\sqrt{5-4\cos 2t}}$ astfel că ecuația analitică
 devine: $X^2 Y^2 + Y^4 - 10a_0^2 Y^2 + 9a_0^4 = 0$: În coordonate carteziene, forma
 hodografului coincide cu traiectoria mișcării: $9X^2 + Y^2 = 9a_0^2$.

7.3.3. Sistemul de coordonate cilindrice

În sistemul de coordonate cilindrice (sistem mobil), poziția unui punct oarecare M este cunoscută cu ajutorul unghiului polar $\theta = \theta(t)$, a razei polare $\rho = \rho(t)$ și a cotei $z = z(t)$ (fig. 7.12), unde Oxy este un sistem de axe fixe și $\theta = \angle(Ox, OM')$, $\rho = OM'$, $z = MM'$ iar M' este proiecția lui M pe planul Oxy ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).
 Ecuațiile:

$$\theta = \theta(t); \rho = \rho(t); z = z(t) \quad (7.70)$$

reprezintă și ecuațiile parametrice ale traiectoriei (sau legea de mișcare în coordonate cilindrice).

Versorii sistemului de coordonate cilindrice sunt: \bar{u}_ρ , versorul razei polare; \bar{u}_θ perpendicular pe \bar{u}_ρ conținut în planul Oxy dirijat în sensul de creștere al unghiului θ și versorul \bar{k} al axei Oz. Numai versorul \bar{k} este un vector constant. Ecuațiile traiectoriei se obțin din relațiile (7.70) prin eliminarea lui t:

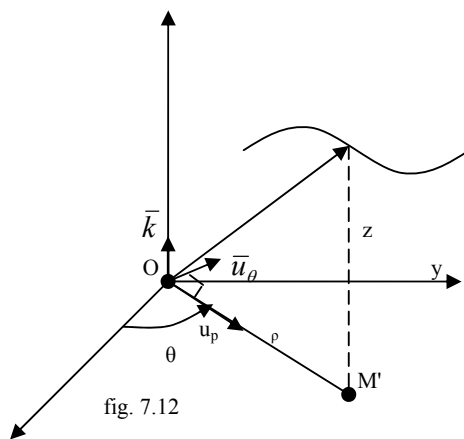


fig. 7.12

$$f_1(\rho, \theta, z) = 0 \quad , \quad f_2(\rho, \theta, z) = 0 \quad (7.71)$$

Legătura dintre versorii $\bar{u}_\rho, \bar{u}_\theta, \bar{i}$ și \bar{j} este dată de relațiile:

$$\bar{u}_\rho = \cos \theta \times \bar{i} + \sin \theta \times \bar{j} \quad , \quad \bar{u}_\theta = -\sin \theta \times \bar{i} + \cos \theta \times \bar{j} \quad (7.72)$$

Prin derivare în raport cu timpul a relațiilor (7.72), obținem:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}}_\rho &= \dot{\theta}(-\sin \theta \times \bar{i} + \cos \theta \times \bar{j}) = \dot{\theta} \bar{u}_\theta \\ \dot{\bar{u}}_\theta &= \dot{\theta}(-\cos \theta \times \bar{i} - \sin \theta \times \bar{j}) = -\dot{\theta} \bar{u}_\rho \end{aligned} \quad (7.73)$$

Din figura 7.12, vectorul de poziție \vec{r} al punctului material M se scrie sub forma:

$$\vec{r} = \overline{OM'} + \overline{M'M} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k} \quad (7.74)$$

Prin derivarea vectorului de poziție (7.74) în raport cu timpul, ținând seama de relațiile (7.73) și de $\dot{\vec{k}} = 0$, obținem vectorul viteze:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z} \vec{k} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k} \quad (7.75)$$

Dar $\vec{v} = v_\rho \vec{u}_\rho + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{k}$, astfel încât proiecțiile vitezei pe axe sunt:

$$v_\rho = \dot{\rho} \quad ; \quad v_\theta = \rho \dot{\theta} \quad ; \quad v_z = \dot{z} \quad (7.76)$$

Modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} \quad (7.77)$$

Accelerația se obține prin derivarea vectorului viteză (7.75), în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\rho} \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\vec{u}}_\theta + \ddot{z} \vec{k}$$

Înlocuind derivatele versorilor, rezultă:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{k} \quad (7.78)$$

Dar $\vec{a} = a_\rho \vec{u}_\rho + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{k}$ conduce la proiecțiile accelerației pe axe:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2; \quad a_\theta = 2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}; \quad a_z = \ddot{z} \quad (7.79)$$

și la mărimea accelerației:

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2} \quad (7.80)$$

Sistemul de coordonate cilindrice sunt o generalizare a sistemului de coordonate polare din plan ($z \equiv 0$)

Viteza areolară, în coordonate cilindrice se scrie:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = -\frac{1}{2} \rho z \dot{\theta} \vec{u}_\rho + \frac{1}{2} (z \dot{\rho} - \rho \dot{z}) \vec{u}_\theta + \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} \vec{k} \quad (7.81)$$

iar accelerația areolară:

$$\vec{\Gamma} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} = -\frac{1}{2} z (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + \frac{1}{2} (z \ddot{\rho} - z \rho \ddot{\theta}^2 - \rho \ddot{z}) \vec{u}_\theta + \frac{1}{2} \rho (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{k} \quad (7.82)$$

Aplicatie: Un punct material M se mișcă pe un cilindru drept cu baza elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, descriind o elice cu unghiul de înclinare α . Viteza areolară a proiecției M' a punctului M pe planul Oxy este constanta k. Să se determine viteza punctului M (fig. 7.13)

Rezolvare: Din ecuația elipsei, deducem: $x = a \cos \varphi$; $y = b \sin \varphi$; $\varphi \in R$.
Pe de altă parte, în funcție de raza polară și de unghiul polar, putem scrie: $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$. Din relațiile anterioare rezultă:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \quad (a)$$

Din condiția $\Omega_z = k$, rezultă $p^2 \dot{\theta} = 2k$ și deci:

$$\dot{\theta} = \frac{2k}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \quad (b)$$

Derivând relația (a) în raport cu timpul, obținem:

$$\dot{\theta} = \frac{ab\dot{\varphi}}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \quad (c)$$

Din relațiile (b) și (c) obținem:

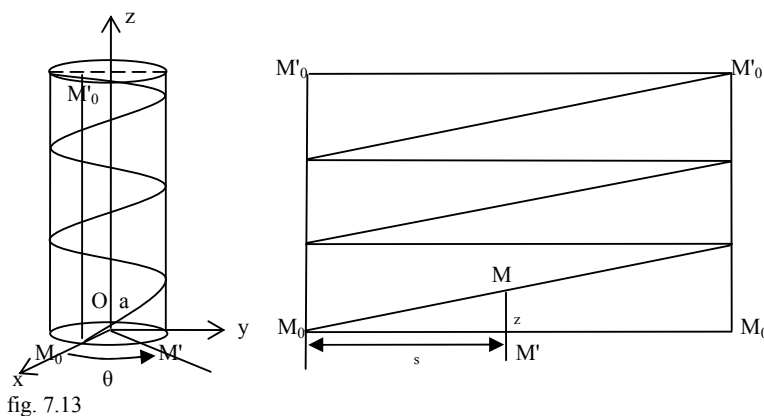
$$\dot{\varphi} = \frac{2k}{ab}; \quad \varphi = \frac{2k}{ab}t + \varphi_0$$

Lungimea arcului de elipsă elementar ds parcurs de punctul M' (proiecția punctului M pe planul Oxy) este

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \quad \dot{\varphi} dt \quad \text{și deci:}$$

$$\dot{s} = \frac{2k}{ab} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

Cunoscând unghiul de înclinare α , rezultă $z = s \operatorname{tg} \alpha$.



Cu acestea, putem obține derivatele coordonatelor cilindrice:

$$\dot{\rho} = \frac{k(b^2 - a^2)}{ab} \cdot \frac{\sin(\frac{4k}{ab}t + 2\varphi_0)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0) + b^2 \sin^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0)}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2k}{a^2 \cos^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0) + b^2 \sin^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0)};$$

$$\dot{z} = \frac{2k}{ab} \sqrt{a^2 \sin^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0) + b^2 \cos^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0)} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

și prin urmare, viteza devine:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} = \frac{2k}{ab \cos \alpha} \sqrt{a^2 \sin^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0) + b^2 \cos^2(\frac{2k}{ab}t + \varphi_0)}$$

7.3.4. Sistemul de coordonate sferice

Poziția unui punct M în coordonate sferice este determinată cu ajutorul razei vectoriale r , a azimutului θ și a longitudinii φ (fig. 7.14). Legea de mișcare a punctului M (sau ecuațiile parametrice ale traiectoriei) este:

$$r=r(t); \quad \theta=\theta(t); \quad \varphi=\varphi(t) \quad (7.83)$$

unde $r=OM$, $\theta = (Oz, \overrightarrow{OM})$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM'})$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ iar M' este proiecția punctului M pe planul Oxy. Ecuația analitică a traiectoriei în coordonate sferice se obține prin eliminarea parametrului t între ecuațiile (7.83)

$$f_1(r, \theta, \varphi) = 0, f_2(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (7.84)$$

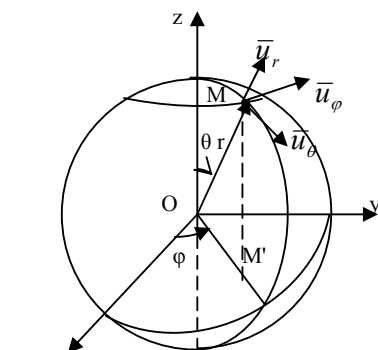


fig. 7.14

Versorii sistemului de coordonate sferice sunt: \overline{u}_r în prelungirea razei vectoriale OM cu sensul pozitiv dat de creșterea acesteia; \overline{u}_θ - conținut în planul zOM, perpendicular pe OM în sensul crescător al lui θ și \overline{u}_φ în sensul crescător al lui φ și perpendicular pe planul zOM.

Deoarece vom avea nevoie de derivatele acestor versori în raport cu timpul, legătura între versorii sistemului

de coordonate sferice și ai sistemului de coordonate carteziane fixe, este dată de relațiile:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= \sin \theta \cos \varphi \bar{i} + \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k} ; \\ \bar{u}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \bar{i} + \cos \theta \sin \varphi \bar{j} - \sin \theta \bar{k} ; \\ \bar{u}_\varphi &= -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}\end{aligned}\quad (7.85)$$

Prin derivare în raport cu timpul a relațiilor (7.85), obținem:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}}_r &= \dot{\theta}(\cos \theta \cos \varphi \bar{i} + \cos \theta \sin \varphi \bar{j} - \sin \theta \bar{k}) + \dot{\varphi}(-\sin \theta \sin \varphi \bar{i} + \sin \theta \cos \varphi \bar{j}) = \\ &= \dot{\theta} \bar{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \bar{u}_\varphi \\ \dot{\bar{u}}_\theta &= -\dot{\theta}(\sin \theta \cos \varphi \bar{i} + \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k}) + \dot{\varphi}(-\cos \theta \sin \varphi \bar{i} + \cos \theta \cos \varphi \bar{j}) = \\ &= \dot{\theta} \bar{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \bar{u}_\varphi \\ \dot{\bar{u}}_\varphi &= -\dot{\varphi}(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}) = -\dot{\varphi}(\cos \theta \bar{u}_\theta + \sin \theta \bar{u}_r)\end{aligned}\quad (7.86)$$

Vectorul de poziție al punctului M se poate exprima cu ajutorul versorului \bar{u}_r astfel:

$$\bar{r} = r \bar{u}_r \quad (7.87)$$

Prin derivare în raport cu timpul a relației (7.87) și ținând seama de relațiile (7.86), obținem viteza punctului M:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\bar{u}}_r = \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\theta} \bar{u}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \bar{u}_\varphi \quad (7.88)$$

Dar:

$$\bar{v} = v_r \bar{u}_r + v_\theta \bar{u}_\theta + v_\varphi \bar{u}_\varphi$$

astfel că proiecțiile vitezei pe axele sistemului de coordonate sferice sunt:

$$v_r = \dot{r}; \quad v_\theta = r \dot{\theta}; \quad v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta \quad (7.89)$$

Mărimea vitezei este:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} \quad (7.90)$$

Prin derivarea relației (7.88) în raport cu timpul, obținem vectorul accelerație:

$$\begin{aligned}\bar{a} = \dot{\bar{v}} &= \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\dot{\theta}} \bar{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\bar{u}}_\theta + r \dot{\dot{\varphi}} \sin \theta \bar{u}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\bar{u}}_\varphi + \\ &+ r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \bar{u}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\bar{u}}_\varphi\end{aligned}$$

Ținând seama de relațiile (7.86) și grupând termenii, accelerația se mai scrie:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \bar{u}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \bar{u}_\theta + \\ &+ (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \bar{u}_\varphi\end{aligned}\quad (7.91)$$

Rezultă:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (7.92)$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta$$

iar mărimea accelerației

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\phi^2} \quad (7.93)$$

Aplicatie: Bara DE de lungime $\sqrt{2} R$ culisează cu capătul D pe sfertul de cerc AB de rază R situat în planul Oxy iar cu capătul E pe sfertul de cerc BC de rază R situat în planul planul Oyz. Viteza culisei E este v_0 (constantă). Să se determine viteza și accelerația mijlocului M al barei (fig.7.15), cunoscând că în momentul inițial D se află în A \in Ox.

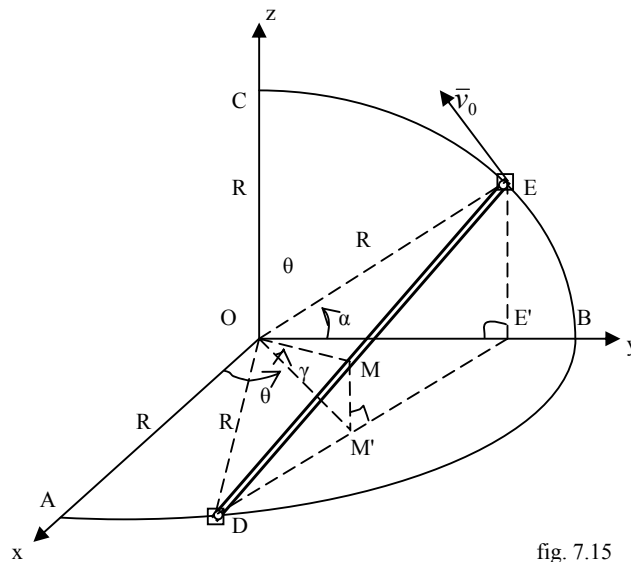


fig. 7.15

Rezolvare: Din datele problemei rezultă: $\widehat{DOE} = 90^\circ$. Vom rezolva problema în coordonate sferice. Pentru aceasta notăm $\beta = \widehat{M'Oy}$ și $\gamma = \widehat{M'OM}$ și unde M' este proiecția punctului M pe planul fix Oxy. De asemenea, notăm cu E' proiecția lui E pe axa Oy. Coordonatele sferice sunt: $r = R \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, $\phi = \frac{\pi}{2} - \beta$. Pentru determinarea unghiului β , se folosește triunghiul $OM'E'$ în care:

$$OE' = R \cos \alpha, OM' = \sqrt{OM^2 - M'M^2} = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$$

$$M'E' = \frac{1}{2} DE' = \frac{1}{2} \sqrt{DE^2 - E'E^2} = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$$

Rezultă $\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$ și deci $\beta = \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$; Unghiul γ se

determină din triunghiul OMM' în care $OM = \sqrt{OM^2 - M'M^2} = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$,

astfel că rezultă $\cos \gamma = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}{2}$ și prin urmare $\gamma = \arccos \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}{2}$.

Pentru a determina viteza, calculăm în prealabil derivatele coordonatelor sferice:

$$\dot{r} = 0, \dot{\theta} = -\dot{\gamma} = \frac{v_0}{R} \cdot \frac{-\cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}; \dot{\varphi} = -\dot{\beta} = \frac{-v_0}{R} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$$

Proiecțiile vitezei în coordonate sferice sunt:

$$v_r = \dot{r} = 0; \quad v_\theta = r \dot{\theta} = -v_0 \frac{\cos \frac{v_0}{R} t}{\sqrt{2(1 + \cos^2 \frac{v_0}{R} t)}};$$

$$v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta = -\frac{1}{2} v_0 \sin \frac{v_0}{R} t$$

Mărimea vitezei este: $v = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}} \alpha; \alpha = \frac{v_0}{R} t$

Proiecțiile accelerației pe axele sistemului sferic sunt în acest caz :

$$a_r = -r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = \frac{v_0^2}{2\sqrt{2}R} \cdot \frac{\cos^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha - 1}{1 + \cos^2 \alpha}$$

$$a_\theta = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}R} \cdot \frac{\sin \alpha (1 + \cos^4 \alpha)}{(1 + \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}; \quad a_\varphi = -\frac{v_0^2}{R} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$$

7.3.5. Sistemul de coordonate intrinseci (naturale, Frenet)

Sistemul de coordonate intrinseci, numite și coordonate naturale sau coordonate Frenet se folosește în cazul în care traiectoria este cunoscută. Triunghiul lui

162 CAPITOLUL 2. CINEMATICA

Frenet este mobil, având originea în punctul mobil M care efectuează mișcarea. Axele triedrului sunt numite axe intrinseci și acestea sunt: tangenta (de versor $\vec{\tau}$) cu sensul pozitiv în sensul parametrului scalar s crescător, măsurat de la originea arcelor M_0 ; normala principală (de versor \vec{n}) definit ca intersecție a planului osculator cu planul normal; binormala (de versor \vec{b}) definită ca intersecție dintre planul normal și planul rectificanț (fig. 7.16). Mișcarea punctului este cunoscută cu ajutorul ecuației orare a mișcării:

$$s=s(t) \quad (7.94)$$

Pentru determinarea componentelor vitezei și accelerației în triedrul Frenet, vom folosi două relații cunoscute din geometria diferențială:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \quad (7.95)$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho_c} \quad (7.96)$$

În relația (7.96) (Frenet) ρ_c reprezintă raza de curbură a traiectoriei în punctul considerat.

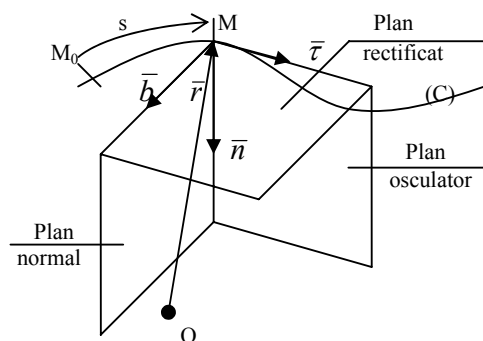


fig. 7.16

Vectorul de poziție \vec{r} se exprimă în funcție de arcul de curbă s, adică:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \quad (7.97)$$

Viteza se obține prin derivarea vectorului de poziție în raport cu timpul, ținând seama că acest vector depinde implicit de timp. Din relațiile (7.97) și (7.95) rezultă:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{\tau} \quad (7.98)$$

Proiecțiile vitezei pe axele

triedrului Frenet vor fi:

$$v_\tau = \dot{s}; v_n=0; v_b=0 \quad (7.99)$$

Se poate deduce că viteza este dirijată după tangentă, (fapt cunoscut de la definiția vitezei) și că mărimea vitezei este $v = \dot{s}$.

Derivând relația (7.98) în raport cu timpul, obținem expresia vectorului accelerației: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s} \vec{\tau} + \dot{s} \dot{\vec{\tau}}$ unde, ținând seama de relația (7.96), se poate

scrie: $\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{\vec{n}}{\rho_c}$ astfel că accelerația devine:

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\bar{n} = a_\tau\bar{\tau} + a_n\bar{n} \quad (7.100)$$

Proiecțiile accelerației pe axele sistemului intrinsec sunt deci:

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho_c} = \frac{v^2}{\rho_c} \quad (7.101)$$

Modulul accelerației este :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho_c^2}} \quad (7.102)$$

Se observă că accelerația are proiecția pe binormală nulă în tot timpul mișcării, vectorul accelerației fiind cuprins în planul osculator. Accelerația tangențială a_τ este pozitivă sau negativă, după semnul lui \dot{v} . Accelerația normală a_n este întotdeauna centripetă, deoarece este îndreptată în același sens cu versorul \bar{n} adică spre centrul de curbura. Vectorul accelerație \bar{a} va fi deci îndreptat întotdeauna spre interiorul concavității traiectoriei.

Dacă într-un interval de timp, accelerația tangențială este nulă ($a_\tau = 0$), rezultă $\dot{v} = 0$ și deci $v = \text{constant}$. O astfel de mișcare se numește uniformă. În cazul unei mișcări uniforme curbilinie ($\rho_c \neq \infty$), accelerația nu poate fi nulă deoarece $a_n = v^2/\rho_c \neq 0$. Aceasta se explică prin aceea că accelerația normală a_n apare datorită variației direcției vitezei, care are loc chiar și atunci când mișcarea este uniformă. Traectoria fiind curbă, tangenta într-un punct mobil al ei își schimbă continuu direcția.

Dacă mișcarea este rectilinie, $\rho_c = \infty$ și deci $a_n = 0$, astfel că $\bar{a} = a_\tau\bar{\tau} = \ddot{s}\bar{\tau}$ direcțiile accelerației și a vitezei fiind aceleași.

Pentru ca accelerația să fie nulă tot timpul mișcării, trebuie ca $a_\tau = 0$ și $a_n = 0$, ceea ce conduce la viteză constantă (mișcare uniformă) și la $\rho_c = \infty$ (mișcare rectilinie). Prin urmare, singura mișcare fără accelerație este mișcarea rectilinie și uniformă.

Dacă $v = 0$, punctul material se află în repaus, caz neinteresant.

Din relația (7.102) se poate determina raza de curbura:

$$\rho_c = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} \quad (7.103)$$

Din relațiile (7.98) și (7.100), rezultă:

$$\bar{v} \times \bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} \times \left(\dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho_c}\bar{n} \right) = \frac{v^3}{\rho_c}\bar{b} \quad (7.104)$$

Din această relație, rezultă:

$$\rho_c = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \quad (7.105)$$

cea în coordonate carteziene, conduce la formula:

$$\rho_c^2 = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2} \quad (7.106)$$

Din formula (7.106) rezultă că raza de curbura se poate calcula numai cu elemente cinematice (proiecții de viteze și accelerații).

În particular, dacă curba este plană: $y = f(x)$, $z = 0$ și ținând seama că $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, $\ddot{y} = \ddot{x}f'(x) + \dot{x}^2 f''(x)$, obținem formula razei de curbura sub forma:

$$\rho_c = \frac{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}, f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (7.107)$$

Aplicații:

1) Să se determine raza de curbura pentru fiecare din aplicațiile de la paragrafele 7.3.1, 7.3.2 și 7.3.4.

Rezolvare: Folosind formula (7.103), obținem:

Pentru aplicația 7.3.1:
$$\rho_c = \frac{(a^2 \sin^2 2t + b^2 \cos^2 2t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

Pentru aplicația 7.3.2:
$$\rho_c = \frac{a_0}{3} (5 + 4 \cos 2t)^{\frac{3}{2}}$$

Pentru aplicația 7.3.4:

$$\rho_c = R(1 + 2\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha) \sqrt{\frac{1 + 3\cos^3 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^6 \alpha}{2(1 - \cos^2 \alpha + 14\cos^4 \alpha - 27\cos^8 \alpha + 20\cos^{10} \alpha - 11\cos^{12} \alpha + 6\cos^{14} \alpha)}}$$

2) Un punct se deplasează cu viteză constantă v_0 pe lăncșorul de ecuație $y = kch \frac{x}{k}$ ($k = \text{constantă}$). Să se determine raza de curbura a lăncșorului și accelerația punctului la un moment dat t .

Rezolvare: Folosind formula (7.107), obținem:
$$\rho_c = kch^2 \frac{x}{h}$$

Pentru a-l exprima pe x ca funcție de t , folosim formula $v_0 = \dot{s}$, unde lungimea arcului de curbura elementar este dat de relația:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = \left(1 + sh^2 \frac{x}{k} \right) dx^2 \quad \text{sau}$$

$$ds = \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{k}} dx \text{ care prin integrare devine: } s = \int_0^x \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{k}} dx = ksh \frac{x}{k}$$

$$\text{Rezultă, } \dot{s} = ch \frac{x}{k} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ astfel că } v_0 = ch \frac{x}{k} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ care se scrie: } v_0 dt = ch \frac{x}{k} dx$$

Această ecuație se integrează și se obține $v_0 t = ksh \frac{x}{k}$ de unde rezultă:

$$x = k \ln \left(\frac{v_0}{k} t + \sqrt{\frac{v_0^2}{k^2} t^2 + 1} \right)$$

Folosind ultima expresie, raza de curbură ρ_c se scrie în funcție de t :

$$\rho_c = \frac{v_0^2}{k} t^2 + k. \text{ Accelerația punctului considerat are proiecțiile: } a_r = \dot{v} = 0 ;$$

$$a_n = \frac{v_0^2}{\rho_c} = \frac{kv_0^2}{v_0^2 t^2 + k^2} = a$$

Rezultă că accelerația este îndreptată spre centrul de curbură.

7.4. Cinematica vibrațiilor

7.4.1. Generalități

În practică se întâlnesc frecvent procese și mișcări vibratorii. Cunoscând cauzele care provoacă vibrațiile, se încearcă prin diferite studii să se diminueze efectul lor dăunător. Dar sunt și situații când funcționarea unor tipuri de mașini se bazează pe fenomene vibratorii.

Vibrațiile motoarelor sau a unei bare, oscilațiile unui pendul sunt câteva exemple de mișcări de acest gen. Este necesar să fie studiate în mod special mișcările unui sistem material la care vitezele își schimbă sensul de mai multe ori într-un interval de timp.

Un sistem material efectuează o vibrație (oscilație) dacă parametrii care îi determină configurația la un moment dat, variază alternativ în timp față de valorile poziției de echilibru static.

O mișcare oscilatorie este periodică dacă toate elementele mișcării se repetă identic după un interval minim de timp T (numit perioadă). Perioada se măsoară în secunde (s). După o perioadă, poziția, viteza și accelerația tuturor punctelor sunt

aceleași. Dacă notăm cu $x(t)$ parametrul care determină configurația sistemului material la un moment dat t , atunci mișcarea este periodică dacă există $T > 0$ astfel ca: $x(t) = x(t+T)$ oricare ar fi timpul t , cu t și $t+T$ din domeniul de interes. De exemplu, mișcarea unui punct material pe axa Ox după legea de mișcare $x(t) = 7 \sin 9\pi t$ are perioada $T = 2/9$ [s].

Mișcarea efectuată într-o perioadă se numește ciclu al vibrației (oscilației) periodice. Numărul de perioade într-o secundă se numește frecvența vibrației și $f = \frac{1}{T}$. Frecvența se măsoară în hertz [Hz]. În exemplul de mai sus frecvența este $f = 9/2$ [Hz]. În cazul unui sistem mecanic cu un număr finit (n) de grade de libertate, mișcarea este periodică dacă fiecare parametru x_k ($k = \overline{1, n}$) ce definește configurația sistemului este o funcție periodică de perioadă T_k : $x_k(t) = x_k(t+T_k)$.

Dacă perioadele T_k sunt comensurabile între ele și dacă există n numere naturale N_k ($k = \overline{1, n}$) astfel încât $\frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2} = \dots = \frac{T_n}{N_n} (= T_0)$ atunci perioada

mișcării este egală cu produsul dintre T_0 (valoarea comună a rapoartelor din ultima relație și cel mai mic multiplu comun al numerelor N_1, N_2, \dots, N_n). De exemplu mișcarea unui sistem mecanic cu trei grade de libertate definită prin ecuațiile $x_1 = 3 \sin 6t$, $x_2 = 5 \cos\left(8t + \frac{\pi}{9}\right)$, $x_3 = 7 \sin 12t$ este periodică de perioadă $T = \pi$ [s],

deoarece $T_1 = \frac{\pi}{3}$ [s], $T_2 = \frac{\pi}{4}$ [s], $T_3 = \frac{\pi}{6}$ [s] sunt comensurabile între ele și

$\frac{T_1}{4} = \frac{T_2}{3} = \frac{T_3}{2} = \frac{\pi}{12} (= T_0)$ iar cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 3 și 2 este 12 ($T = 12T_0 = \pi$). Dar mișcarea unui sistem cu două grade de libertate definită prin ecuațiile $y_1 = 3 \sin 6t$, $y_2 = 7 \sin \sqrt{5}t$ nu este periodică cu toate că $T_1 = \frac{\pi}{3}$ și $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$,

numerele T_1 și T_2 nu sunt comensurabile.

Se observă că frecvența și perioada sunt inverse. În general se întâlnește un spectru larg de frecvențe (de la cele joase până la valori foarte înalte).

Cea mai simplă și cea mai des întâlnită mișcare vibratorie este vibrația armonică.

7.4.2. Vibrația armonică

O mișcare cu un singur grad de libertate a unui sistem mecanic este o vibrație armonică, dacă funcția $x = x(t)$ care definește mișcarea (și poate fi lungime sau unghi) este de forma:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \text{ sau } x = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.108)$$

cu x_0 , ω și φ constante reale.

Perioada vibrației armonice este $T = 2\pi/\omega$ deoarece perioada funcției trigonometrice sinus (sau cosinus) este 2π astfel că: $[\omega(t+T) + \varphi] - (\omega t + \varphi) = 2\pi$. Frecvența vibrației armonice este $f = 1/T = \omega/2\pi$

Pulsația vibrației armonice este numărul de perioade într-un interval de timp egal cu 2π secunde. Rezultă $p = 2\pi/T = \omega$. Pulsația se mai numește frecvența circulară. Argumentul $\omega t + \varphi$ este faza și se măsoară în radiani, iar φ este faza inițială, ω este pulsația (frecvența circulară) vibrației și se măsoară în rad/s. Centrul de vibrație este punctul în care accelerația \ddot{x} este nulă. În cazul vibrației reprezentate de ecuațiile (7.108) centrul de vibrație este în originea axei. Dacă centrul de vibrație este punctul de abscisă $x = x'$, ecuația vibrației armonice are forma:

$$x = x' + x_0 \sin(\omega t + \varphi) \text{ sau } x = x' + x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.109)$$

Elongația este valoarea scalară a distanței la un moment dat între centrul de vibrație și mobil. În cazul relației (7.108), elongația este x , iar în cazul relației (7.109) elongația este $x - x'$.

Amplitudinea vibrației armonice este maximul elongației, deci x_0 . Convenim să reprezentăm o vibrație armonică printr-o ecuație de forma (7.108) sau (7.109) în care $x_0 > 0$. Dacă $x_0 < 0$ atunci se va înlocui faza inițială φ cu $\pi - \varphi$ sau $\pi + \varphi$.

Două vibrații armonice ce se efectuează după legile

$$x_1 = x_{10} \sin(\omega t + \varphi), x_2 = x_{20} \sin(\omega t + \varphi + \varphi_0) \quad (7.110)$$

sunt în fază dacă $\varphi_0 = 0$. Dacă $\varphi_0 > 0$, atunci mișcarea dată de x_2 este defazată de mișcarea dată de x_1 cu unghiul φ_0 (defazaj). Dacă $\varphi_0 = \pi$, cele două mișcări sunt în opoziție.

Derivând în raport cu timpul succesiv în formula (7.108), obținem viteza și accelerația punctului M:

$$v = \dot{x} = -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7.111)$$

$$a = \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) \quad (7.112)$$

Rezultă că viteza și accelerația sunt de asemenea funcții armonice de timp. Viteza are amplitudinea $x_0 \omega$ și este defazată înainte față de mișcare cu unghiul $\varphi_0 = \pi/2$, iar accelerația are amplitudinea $x_0 \omega^2$ și este defazată înainte față de mișcare cu unghiul $\varphi_0 = \pi$.

Diagramele mișcării armonice sunt date în figura 7.17

Dacă amplitudinea x_0 sau pulsația ω sunt funcții de timp, atunci vibrația armonică respectivă se spune că este modulată în amplitudine respectiv în frecvență. Legea unei vibrații armonice modulată în amplitudine este de forma $x(t) = f(t)\cos(\omega t + \varphi)$ în care $f(t)$ este o funcție de timp neconstantă. Legea unei vibrații

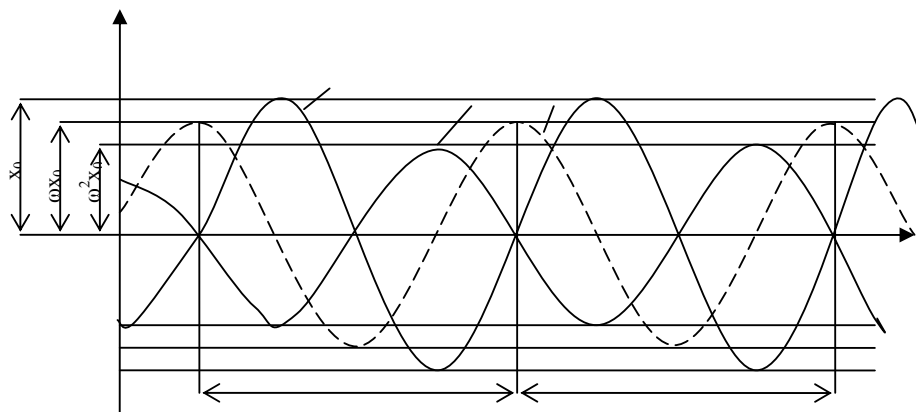


fig. 7.17

armonice moduată în frecvență este de forma $x(t) = x_0 \cos g(t)$ în care funcția $g(t)$ nu este o funcție liniară în timp.

7.4.3. Reprezentarea vectorială a vibrațiilor armonice

Considerăm vectorul \overline{OA} de modul x_0 care se rotește în jurul originii cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 7.18). În momentul inițial, unghiul dintre \overline{OA} și axa Ox

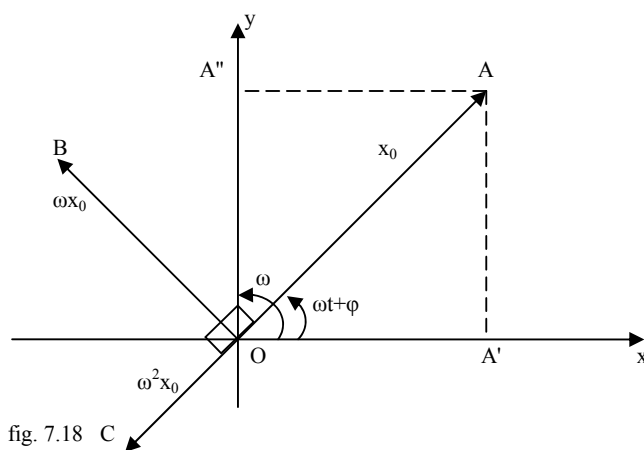


fig. 7.18 C

este φ . Urmează că la un moment dat t , unghiul dintre \overline{OA} și axa Ox este $\omega t + \varphi$. Vectorul \overline{OA} reprezintă mișcarea armonică (7.108₂), deoarece legea acestei mișcări este dată de proiecția $OA' = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ a vectorului pe axa fixă Ox , iar mișcarea

armonică (7.108₁) de proiecția

$\overline{OA}'' = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$ pe axa Oy. Viteza unghiulară de rotație este egală cu pulsația mișcării armonice.

În același mod, deducem că viteza vibrației armonice dată de relația (7.111) poate fi reprezentată printr-un vector \overline{OB} a cărui mărime este ωx_0 și se rotește cu aceeași viteză unghiulară ω , fiind în avans cu unghiul $\pi/2$ față de vectorul \overline{OA} . Accelerația se reprezintă prin vectorul \overline{OC} a cărui mărime este $\omega^2 x_0$ și este în avans cu unghiul π față de vectorul \overline{OA} . Urmează că accelerația și mișcarea sunt în opoziție de fază.

Mișcările armonice $x_1 = x_{10} \cos(\omega t + \varphi)$ și $x_2 = x_{20} \sin(\omega t + \varphi)$ sunt defazate cu unghiul $\pi/2$ deoarece x_2 se mai poate scrie sub forma $x_2 = x_{20} \sin(\omega t + \varphi - \pi/2)$. Deci acestea se reprezintă prin doi vectori perpendiculari cu mărimile x_{10} respectiv x_{20} .

7.4.4. Reprezentarea prin numere complexe a vibrațiilor armonice

Vectorul rotitor \overline{OA} din paragraful precedent se reprezintă în planul complex Oxy prin afixul z al extremităților sale A:

$$z = x_0 [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] = x_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (7.113)$$

Numărul complex z reprezintă fie vibrația armonică (7.108₂) (prin partea sa reală) fie vibrația armonică (7.108₁) (prin partea sa imaginară).

Viteza vibrației armonice se obține prin derivare în raport cu timpul în relația (7.113):

$$\dot{z} = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) + i \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi) = i \omega x_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = i \omega z \quad (7.114)$$

iar accelerația va fi derivată în raport cu timpul a vitezei:

$$\ddot{z} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) - i \omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) = i \omega \dot{z} = -\omega^2 z \quad (7.115)$$

Relațiile (7.114) și (7.115) se mai pot scrie și sub formele:

$$\dot{z} = i \omega z = \omega x_0 e^{i(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}, \quad \ddot{z} = -\omega^2 z = \omega x_0 e^{i(\omega t + \varphi + \pi)}$$

astfel că putem scrie (ca la paragraful 7.4.3.) că viteza este defazată de mișcare cu $\pi/2$ iar accelerația este defazată față de mișcare cu unghiul π .

Observăm din relația (7.114) că derivata unui număr complex este echivalentă cu înmulțirea acestuia cu $i\omega$ ceea ce înseamnă că înmulțirea cu numărul

pur imaginar i dă unghi $\pi/2$ în sensul lui ω , iar înmulțirea cu ω transformă amplitudinea x_0 în ωx_0 .

Practic, în calcule legea de mișcare se înlocuiește cu z , viteza cu \dot{z} iar accelerația cu \ddot{z} iar după efectuarea calculelor corespunzătoare se interpretează rezultatul obținut alegând partea sa reală dacă ne interesează vibrația armonică (7.108₂) sau partea sa imaginară dacă ne interesează vibrația armonică (7.108₁).

7.4.5. Compunerea vibrațiilor armonice coliniare de aceeași pulsație

Considerăm axele coliniare Ox și $O'x'$ (fig. 7.19) astfel încât originea O' are față de originea fixă O o mișcare armonică cu legea $x_1 = OO' = x_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$.

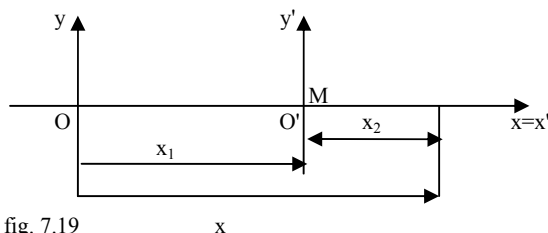


fig. 7.19

Punctul M are în raport cu originea O o altă mișcare vibratorie armonică după legea

$$x_2 = O'M = x_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

. În cele ce urmează, vom arăta că mișcarea absolută a punctului M în raport cu originea O este tot o mișcare vibratorie armonică. Notăm $x = OM = OO' + O'M = x_1 + x_2$ și deci:

$$\begin{aligned} x &= x_{10} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_{20} \cos(\omega t + \varphi_2) = \\ &= (x_{10} \cos \varphi_1 + x_{20} \cos \varphi_2) \cos \omega t - (x_{10} \sin \varphi_1 + \\ &\quad + x_{20} \sin \varphi_2) \sin \omega t = C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t = \\ &= x_0 \cos(\omega t + \varphi) \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (7.16)$$

unde am notat:

$$\begin{aligned} C_1 &= x_{10} \cos \varphi_1 + x_{20} \cos \varphi_2 = x_0 \cos \varphi \\ C_2 &= x_{10} \sin \varphi_1 + x_{20} \sin \varphi_2 = x_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (7.117)$$

Din sistemul (7.117) se deduc valorile x_0 și φ :

$$x_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + 2x_{10}x_{20} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (7.118)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_{10} \sin \varphi_1 + x_{20} \sin \varphi_2}{x_{10} \cos \varphi_1 + x_{20} \cos \varphi_2} \quad (7.119)$$

În mod analog se poate generaliza rezultatul obținut pentru un număr de $n > 2$ vibrații armonice coliniare de aceeași pulsație $x_i = x_{i0} \cos(\omega t + \varphi_i)$, $i = \overline{1, n}$ compunerea acestora va fi tot o vibrație armonică $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ unde:

$$x_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i0} x_{j0} \cos(\varphi_i - \varphi_j)}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i0} \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n x_{i0} \cos \varphi_i} \quad (7.120)$$

Un caz particular, dar des întâlnit, este când legea de mișcare a punctului M este de forma:

$$x = x_{10} \cos \omega t + x_{20} \sin \omega t \quad (7.121)$$

adică cele două mișcări componente sunt defazate cu unghiul $\frac{\pi}{2}$

Legea mișcării rezultate se mai scrie sub forma: $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$, unde:

$$x_0 = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{x_{20}}{x_{10}}$$

Din relația (7.116), rezultă viteza punctului M în mișcarea rezultantă:

$$v = \dot{x} = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.122)$$

iar accelerația devine:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad (7.123)$$

7.4.6. Compuneri de vibrații coliniare cu pulsații diferite. Fenomenul de bătăi

Presupunem că cele două vibrații armonice componente au pulsații diferite ω_1 și ω_2 ; $\omega_1 > \omega_2$:

$$x_1 = x_{10} \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \quad x_2 = x_{20} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (7.124)$$

Mișcarea rezultantă este:

$$x = x_1 + x_2 = x_{10} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_{20} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (7.125)$$

Expresia (7.125) se mai poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned}
x &= x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) + x_{20} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_2\right) = \\
&= x_{10} \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) - x_{10} \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) + \\
&+ x_{20} \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right) + x_{20} \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right) = \\
&= \left[x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) + x_{20} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right) \right] \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \\
&+ \left[-x_{10} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) + x_{20} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right) \right] \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t = \\
&= C_1(t) \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + C_2(t) \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t = x_0(t) \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi(t)\right] \quad (7.126)
\end{aligned}$$

unde am notat:

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) + x_{20} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right) \\
C_2(t) &= -x_{10} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) + x_{20} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right) \quad (7.127)
\end{aligned}$$

Din relația (7.126), prin identificare, deducem sistemul:

$$x_0(t) \cos \varphi(t) = C_1(t), x_0(t) \sin \varphi(t) = -C_2(t) \quad (7.128)$$

și de aici obținem funcțiile:

$$x_0(t) = \sqrt{C_1^2(t) + C_2^2(t)} = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + 2x_{10}x_{20} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]} \quad (7.129)$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \left[-\frac{C_2(t)}{C_1(t)} \right] = \operatorname{arctg} \frac{x_{10} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) - x_{20} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right)}{x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi_1\right) + x_{20} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \varphi_2\right)} \quad (7.130)$$

După cum se observă, prin compunerea a două vibrații armonice se obține o mișcare vibratorie rezultantă care prezintă următoarele deosebiri esențiale față de o vibrație armonică: amplitudinea vibrației rezultante este o funcție periodică de timp de perioadă $T' = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$ deoarece $x_0(t + T') = x_0(t)$; faza la momentul t a vibrației rezultante nu mai este liniară în t , fiind de forma $\theta(t) = (\omega_1 + \omega_2)t/2 + \varphi(t)$ iar funcția $\varphi(t)$ verifică ecuația: $\varphi(t + T') = \varphi(t) + \lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{N}$

Vibrația definită de relația (7.126) este numită vibrație cvasiarmonică modulată în amplitudine și frecvență. Este important de reținut că, deși funcția amplitudine este periodică iar $\varphi(t)$ are proprietatea enunțată, totuși vibrația rezultată va fi periodică numai dacă pulsațiile ω_1 și ω_2 ale vibrațiilor armonice componente vor fi comensurabile, adică raportul lor este o fracție rațională: $\omega_1/\omega_2 = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $m/\omega_1 = n/\omega_2 = (m-n)/(\omega_1 - \omega_2)$, perioada T a mișcării rezultante definită de relația (7.126) va fi:

$$T = mT_1 = nT_2 = m \frac{2\pi}{\omega_1} = n \frac{2\pi}{\omega_2} = (m-n) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = (m-n)T' = (m+n) \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} \quad (7.131)$$

unde $T_1 = 2\pi/\omega_1$ și $T_2 = 2\pi/\omega_2$ sunt perioadele mișcărilor armonice componente (7.124).

Dacă cele două pulsații ω_1 și ω_2 ale mișcărilor componente au valori foarte apropiate, diferența $\omega_1 - \omega_2$ este foarte mică în comparație cu media pulsațiilor $(\omega_1 + \omega_2)/2$ deci funcțiile $x_0(t)$ și $\varphi(t)$ variază foarte încet în comparație cu funcțiile $\cos(\omega_1 + \omega_2)t/2$ și $\sin(\omega_1 + \omega_2)t/2$. Perioada T_1 și T_2 ale mișcărilor componente sunt aproape egale astfel că în timpul unei perioade $T_1 \approx T_2$, amplitudinea mișcării rezultante și funcția φ rămân constante, astfel că în acest timp, mișcarea rezultantă se poate considera armonică.

Într-un interval de timp oarecare, mișcarea rezultantă poate fi considerată ca o succesiune de mișcări armonice, fiecare având aceeași durată $T_1 \approx T_2$ dar cu amplitudini diferite. Amplitudinile acestor mișcări armonice sunt cuprinse între limitele $|x_{10} - x_{20}|$, $x_{10} + x_{20}$ (din relația (7.129)) de variație ale amplitudinii mișcării rezultante. Fenomenul se repetă după intervalele de timp egale cu perioada $T' = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$. Mișcarea în condițiile de mai sus poartă numele de bătăi (fig. 7.20). Frecvența bătăilor este: $f = 1/T' = \omega_1/2\pi - \omega_2/2\pi = f_1 - f_2$.

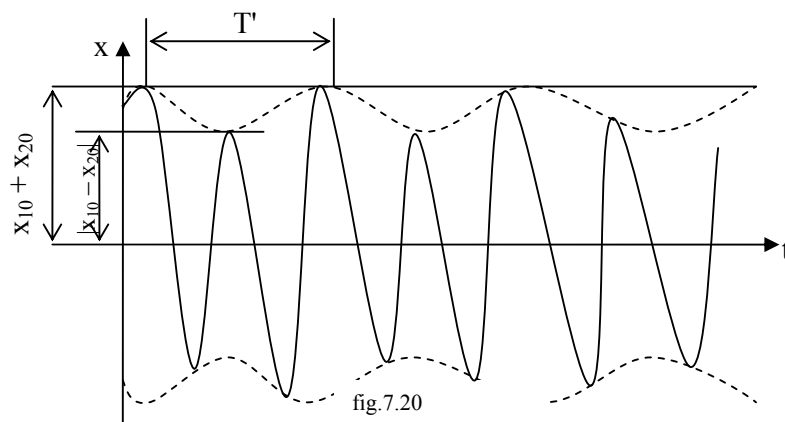


fig. 7.20

În mod asemănător se pot compune un număr finit n de mișcări componente, obținându-se mișcarea rezultantă.

Viteza mișcării rezultante va fi obținută prin derivarea în raport cu timpul a relației (7.126):

$$v = \dot{x} = \dot{x}_0(t) \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi(t)\right] - \dot{x}_0(t) \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \dot{\varphi}(t)\right] \sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi(t)\right]$$

Accelerația mișcării rezultante este:

$$a = \ddot{x} = \ddot{x}_0 \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi(t)\right] - 2\dot{x}_0(t) \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \dot{\varphi}(t)\right] \sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi(t)\right] - \\ - x_0(t) \ddot{\varphi}(t) \sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi(t)\right] - x_0(t) \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \dot{\varphi}(t)\right]^2 \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi(t)\right]$$

7.4.7. Compunerea vibrațiilor rectilinii armonice ortogonale

Există numeroase situații când punctele unor elemente ale unui sistem vibrant cu două sau trei grade de libertate au mișcări astfel încât coordonatele lor carteziene

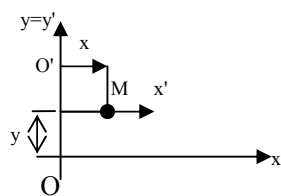


fig. 7.21

se prezintă sub forma unor legi armonice. Aceasta revine la a considera mișcarea unui asemenea punct ca o compunere de două, respectiv trei vibrații rectilinii armonice ortogonale. În cele ce urmează, vom considera numai două astfel de mișcări: fie sistemul fix de axe Oxy și un sistem mobil $Ox'y'$ a cărui origine O' se mișcă pe Oy

după legea $OO' = y = y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Pe axa

$O'x'$ care rămâne paralelă cu Ox se mișcă punctul M după legea $O'M = x = x' = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ (fig. 7.21). Mișcarea punctului M va fi rezultanta compunerii a două vibrații armonice ortogonale. Ecuațiile parametrice ale traiectoriei punctului M care se mișcă în planul Oxy sunt:

$$x = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); y = y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (7.132)$$

Considerăm mai multe cazuri particulare:

1. Dacă cele două pulsații sunt egale $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (vibrații armonice ortogonale sincrone), atunci din sistemul (7.132) eliminăm parametrul t și obținem o conică rotită față de reperul fix, față de care au fost scrise ecuațiile mișcării punctului:

$$y_0^2 x^2 + x_0^2 y^2 - 2x_0^2 y_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) xy - x_0^2 y_0^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (7.133)$$

Discriminantul conicei (7.133) este:

$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = x_0^2 y_0^2 - x_0^2 y_0^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = x_0^2 y_0^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) > 0 \quad (7.134)$$

ceea ce este caracteristica unei elipse.

Deci, prin compunerea a două vibrații armonice ortogonale sincrone se obține o mișcare a punctului pe o elipsă cu centrul în originea sistemului de axe fixe Oxy și care este rotită față de aceasta. În funcție de defazajul $\varphi_1 - \varphi_2$, se întâlnesc următoarele două situații particulare:

a) $\varphi_1 - \varphi_2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ caz în care ecuația (7.133) se mai scrie: $(y_0x \pm x_0y)^2 = 0$ de unde rezultă:

$$y = \pm \frac{y_0}{x_0} x \quad (7.135)$$

Ecuațiile (7.135) reprezintă două drepte care trec prin origine și au pantele egale cu $\pm y_0 / x_0$, semnul superior corespunde defazajului $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ radiani, iar semnul inferior corespunzând defazajului $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ radiani.

Putem trage concluzia că prin compunerea a două vibrații armonice ortogonale sincrone și defazate de un multiplu întreg de π radiani, se obține o mișcare rectilinie oscilatorie armonică, cu centrul de oscilație situat în originea axelor.

b) $\varphi_1 - \varphi_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, caz în care ecuația (7.133) devine:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1 = 0 \quad (7.136)$$

ceea ce reprezintă o elipsă de semiaxe x_0 și y_0 cu centrul în originea axelor.

Pentru diverse valori ale lui $k \in \mathbb{Z}$, vor rezulta doar sensuri alternânde de parcurs pe elipsă. În figura 7.22 sunt arătate traiectoriile punctului pentru câteva valori ale defazajului $\varphi_1 - \varphi_2$.

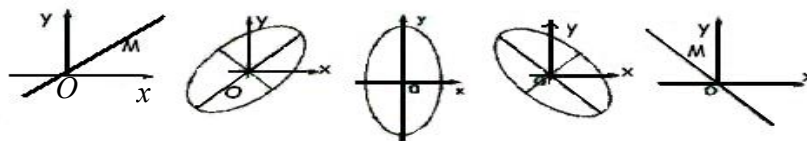


fig.7.22

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{3\pi}{4} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \pi$$

2. Dacă cele două pulsații sunt diferite, avem două situații distincte:

a) Pulsațiile ω_1 și ω_2 nu sunt comensurabile (raportul lor nu este un număr rațional). În acest caz, traiectoria punctului va fi o curbă închisă, înscrisă în dreptunghiul cu centrul în originea sistemului de axe și cu laturile egale cu $2x_0$ și $2y_0$ (fig. 7.23).

b) Pulsațiile ω_1 și ω_2 sunt comensurabile: există două numere naturale prime între ele m și n astfel încât:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n}{m} \quad (7.137)$$

Presupunem $\omega_2 > \omega_1$, ceea ce implică $n > m$.

Notăm:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{n-m}{m} \omega_1 \quad (7.138)$$

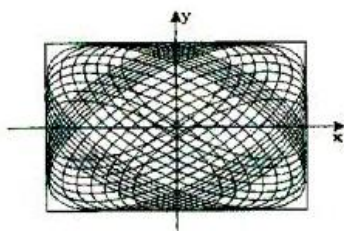


fig. 7.23

Din relațiile (7.132) deducem perioadele celor două mișcări:

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega_1}; \quad T_y = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad (7.139)$$

Din relația (7.137) și pentru intervale de timp egale cu multiplii întregi ai intervalului rezultă: $T = mT_x = nT_y = (n-m)T_{xy}$ unde

$$T_{xy} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (7.140)$$

Din relația (7.132₂) rezultă:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) &= \cos(\Delta\omega t + \varphi_2 - \varphi_1 + \omega_1 t + \varphi_1) = \\ &= \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) - \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi) = \frac{y}{y_0} \end{aligned} \quad (7.141)$$

Din relațiile (7.141) și (7.132₁), prin eliminarea funcției $\omega_1 t + \varphi_1$, obținem:

$$y_0^2 x^2 + x_0^2 y^2 - 2x_0 y_0 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) - x_0^2 y_0^2 \sin^2(\Delta\omega t + \Delta\varphi) = 0 \quad (7.142)$$

unde am notat $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Funcțiile $\sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi)$ și $\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)$ care apar în relația (7.142) au proprietățile:

$$\begin{aligned} \sin[\Delta\omega(t+T) + \Delta\varphi] &= \sin[\Delta\omega t + \Delta\varphi + (n-m)\Delta\omega T_{xy}] = \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \\ \cos[\Delta\omega(t+T) + \Delta\varphi] &= \cos[\Delta\omega t + \Delta\varphi + (n-m)\Delta\omega T_{xy}] = \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned}$$

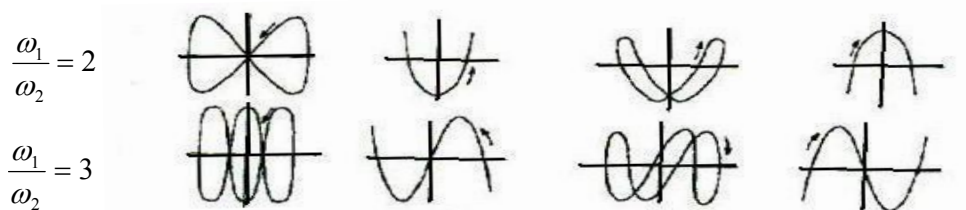


fig. 7.24

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= 0 & \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} & \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{3\pi}{4} & \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Pe de altă parte și funcțiile $\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ și $\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ au proprietățile:

$$\cos[\omega_1(t+T) + \varphi_1] = \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \omega_1 m T_x) = \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (7.143)$$

$$\cos[\omega_2(t+T) + \varphi_2] = \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \omega_2 n T_y) = \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (7.144)$$

Relațiile (7.143) și (7.144) pun în evidență faptul că în condițiile relației (7.137), punctul M trece periodic prin aceleași valori după intervale de timp egale cu perioada T.

Prin urmare, se poate trage concluzia că traiectoria punctului M în mișcarea determinată prin ecuațiile (7.132) este condiția (7.137) o curbă închisă, încadrată într-un dreptunghi cu centru în originea sistemului de axe și de laturi egale cu $2x_0$ respectiv $2y_0$ și care se repetă identic cu perioada T.

Formulele acestor curbe închise, numite curbe Lissajous depind de raportul celor două pulsații ale vibrațiilor ortogonale componente, precum și de defazajul lor.

În figura 7.24 sunt reprezentate câteva forme ale acestei curbe pentru valorile:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \text{ și } \frac{\omega_2}{\omega_1} = 3 \text{ și pentru defazajele } \varphi_2 - \varphi_1 = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}$$

7.4.8. Vibrația amortizată

Vibrația amortizată are legea:

$$x = x_0 e^{-ht} \cos(pt + \varphi) \quad (7.145)$$

unde x_0 , h , p , φ sunt constante. Coordonata x se numește elongație, constanta $h > 0$ se numește factor de amortizare, p se numește pseudopulsatie iar φ este faza inițială (la momentul $t=0$).

Viteza se obține din relația (7.145) prin derivare în raport cu timpul:

$$v = \dot{x} = -hx - x_0 p e^{-ht} \sin(pt + \varphi) \quad (7.146)$$

iar accelerația devine:

$$a = \ddot{x} = \dot{v} = -2hx - h^2 x - p^2 x \quad (7.147)$$

Se observă că valorile vitezei și accelerației descresc în timp. Amplitudinea $x_0 e^{-ht}$ este funcție de timp, descresște și tinde spre zero, deci vibrația amortizată este modulată în amplitudine. În cazul $h < 0$ vibrația este crescătoare, modulată crescător în amplitudine.

Mișcarea oscilatorie amortizată nu este periodică,

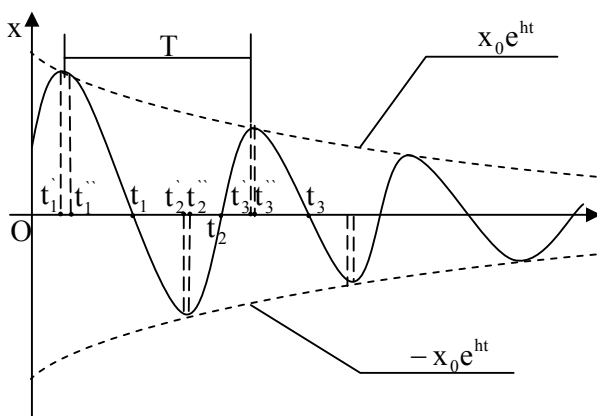


fig. 7.25

deoarece nu se repetă identic după un anumit interval de timp. Totuși, anumite proprietăți ale mișcării cum sunt: intersecția diagramei vibrației cu axa timpului ($x=0$) în același sens, intervalul de timp între două puncte de extrem succesive, precum și intersecția diagramei vibrației amortizate cu curbele exponențiale $x = x_0 e^{-ht}$, se repetă după un interval de timp, $T = 2\pi/p$ numit pseudoperioadă.

Diagrama vibrației amortizate (7.145) este dată în figura 7.25. Punctul material intersectează axa timpului când $\cos(pt+\varphi)=0$ ceea ce implică:

$$t_k = k \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{2p} - \frac{\varphi}{p}, k \in Z \quad (7.148)$$

Între două treceri consecutive prin axa timpului, intervalul de timp este:

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{p} = \frac{T}{2} \text{ iar între două treceri succesive în același sens prin axa } t,$$

intervalul de timp este:

$$t_{k+2} - t_k = \frac{2\pi}{p} = T \quad (7.149)$$

Pozițiile de extrem (maximul și minimul elongației) ale punctului se obțin prin anularea derivatei (7.146), ceea ce conduce la ecuația: $tg(pt + \varphi) = -\frac{h}{p}$ care are soluțiile:

$$t'_k = k \frac{\pi}{p} - \frac{\varphi}{p} - \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{h}{p}, k \in Z \quad (7.150)$$

Pentru k număr par, se obțin maxime iar pentru k impar, minime. Intervalul de timp între două puncte de extrem consecutive de aceeași natură este:

$$t'_{k+2} - t'_k = \frac{2\pi}{p} = T. \text{ Dacă } x(t'_k) \text{ și } x(t'_{k+2}) \text{ sunt două maxime consecutive, atunci}$$

rezultă:

$$\frac{x(t'_{k+2})}{x(t'_k)} = e^{-hT} \quad (7.151)$$

ceea ce înseamnă că maximele (sau minimele) formează o progresie geometrică de rație e^{-hT} . Diagrama vibrației amortizate (7.145) este cuprinsă între curbele exponențiale

$$x = \pm x_0 e^{-ht} \quad (7.152)$$

Pentru valorile lui t pentru care $\cos(pt+\varphi)=\pm 1$, ceea ce conduce la valorile:

$$t''_k = k \frac{\pi}{p} - \frac{\varphi}{p}, k \in Z \quad (7.153)$$

diagrama vibrației amortizate este tangentă la curbele (7.152).

Acest lucru rezultă imediat, prin calculul derivatelor în raport cu timpul ale funcției date de relațiile (7.145) și (7.152) și ținând seama că $\sin(pt_k'' + \varphi) = 0$. Se obțin aceeași coeficienți unghiulari dați de $\dot{x} = \pm hx_0 e^{-ht_k''}$. Pentru k număr par, diagrama este tangentă la curba exponențială $x = x_0 e^{-ht}$, iar pentru k număr impar, diagrama este tangentă la exponențială $x = -x_0 e^{-ht}$. Și în această situație vom calcula intervalul de timp între două puncte de tangentă succesive cu una din aceste curbe:

$$t_{k+2}'' - t_k'' = \frac{2\pi}{p} = T$$

Urmează ca și punctele de tangentă cu una din curbele (7.152) se repetă cu perioada T . Comparând relațiile (7.150) și (7.153), pentru aceeași valoare a lui $k \in \mathbb{Z}$, constatăm că:

$$t'' = t_k' + \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{h}{p} \quad (7.154)$$

ceea ce înseamnă că momentul când elongația este extremă este anterior momentului când diagrama mișcării este tangentă curbilor (7.152) cu intervalul de timp egal cu $1/p \operatorname{arctg} h/p$. Prin logaritmarelației (7.151) obținem:

$$\ln \frac{x(t_k')}{x(t_{k+2}') } = hT = \delta \quad (7.155)$$

Logaritmul natural al câtului a două maxime sau minime succesive se numește decrementul logaritm al vibrației amortizate, și este deci egal cu produsul dintre factorul de amortizare h și pseudoperioada T .

Inversul τ al factorului de amortizare se numește constanta de timp și deci: $\tau = \frac{1}{h} = \frac{T}{\delta}$. Dacă decrementul logaritm δ este mai mic, prin dezvoltarea în serie a funcției e^δ în relația (7.151) se poate obține aproximativ $\frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 + \delta$ de unde $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \delta$. În concluzie: descreșterea relativă a două maxime (minime) succesive, este egală cu decrementul logaritm.

Aplicație: Legea de mișcare x_1 a unui punct material este vibratorie amortizată cu factorul de amortizare h și pseudopulsatia $p \neq h$. Un al doilea punct se mișcă după legea $x_2 = \ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + 2h^2 x_1$. Să se determine legea de mișcare x_2 cunoscând că la momentul $t=0$, $x_2=x_0$, $\dot{x}_2 = v_0$.

Rezolvare: Notăm $x_1 = C e^{-ht} \cos(pt + \varphi)$ unde C și φ și se vor determina ulterior din condițiile inițiale pentru al doilea punct. Din definirea lui x_2 , rezultă:

$x_2 = (h^2 - p^2)C e^{-ht} \cos(pt + \varphi)$ și $\dot{x}_2 = -hx_2 - p(h^2 - p^2)C e^{-pt} \sin(pt + \varphi)$. Din condițiile inițiale date, rezultă: $(h^2 - p^2)C \cos\varphi = x_0$ și $hx_0 + p(h^2 - p^2)C \sin\varphi = -v_0$ de unde se obțin:

$$C = \frac{\sqrt{p^2 x_0^2 + (v_0 + hx_0)^2}}{p|h^2 - p^2|} \text{ si } \varphi = -\arctg \frac{hx_0 + v_0}{x_0 p}$$

Există următoarele situații:

a) $h > p$ astfel că:

$$x_2 = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 x_0^2 + (v_0 + hx_0)^2} e^{-ht} \cos(pt - \arctg \frac{hx_0 + v_0}{x_0 p})$$

b) $h < p$ astfel că:

$$x_2 = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 x_0^2 + (v_0 + hx_0)^2} e^{-ht} \cos(pt + \pi - \arctg \frac{hx_0 + v_0}{x_0 p})$$

7.5. Mișcări particulare ale punctului material

7.5.1. Mișcarea rectilinie

În cazul mișcării rectilinii, punctul material are ca traiectorie o dreaptă. Studiul mișcării se simplifică dacă se alege axa Ox chiar traiectoria mișcării (fig.7.26), iar mișcarea poate fi studiată cu o singură funcție de timp, legea de mișcare fiind:

$$x = x(t) \quad (7.156)$$

Viteza și accelerația au respectiv expresiile:

$$v = \dot{x}, a = \ddot{x} \quad (7.157)$$

Diagramele mișcării vitezei și accelerației se obțin prin reprezentarea într-un plan,

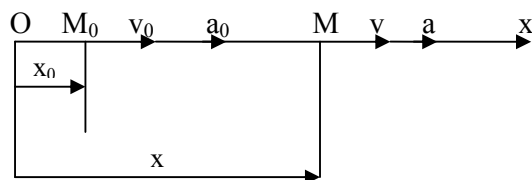


fig. 7.26

pe axa absciselor timpul, iar pe ordonată legea mișcării $x = x(t)$, respectiv legea vitezei $v = \dot{x}(t)$ și a accelerației $a = \ddot{x}(t)$. Aceste diagrame dau o imagine intuitivă asupra modului cum se desfășoară mișcarea. În unele cazuri, se pune și problema inversă: cunoscând viteza sau accelerația punctului material, se pune problema să determinăm legea sa de mișcare. Aceasta conduce la ecuații diferențiale de forma:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \ddot{x} = g(t, x, \dot{x}) \quad (7.158)$$

care sunt de ordinul unu, respectiv doi. Prin integrarea acestor ecuații, se obține legea de mișcare care depinde de o constantă, respectiv două constante de integrare. Pentru determinarea lor trebuie să cunoaștem condițiile inițiale adică poziția și viteza la momentul inițial:

$$t = t_0; \quad x(t_0) = x_0; \quad v(t_0) = v_0 \quad (7.159)$$

Un alt mod de reprezentare sintetică a mișcării este imaginea mișcării în planul fazelor, unde pe axa absciselor se reprezintă legea de mișcare x iar pe ordonata

viteză v . Astfel de reprezentări grafice se pot utiliza numai pentru studiul mișcărilor sistemelor cu un singur grad de libertate.

Aplicatie: Un punct material se mișcă pe axa Ox , după legea:

$$x(t) = v^3(t) + v^2(t) - 2 \quad (a)$$

unde $v(t)$ este viteza punctului. Să se determine legea de mișcare ca funcție de timp, dacă $x(0)=0$.

Rezolvare: Din condiția $x(0)=0$, ecuația $v^3(t) + v^2(t) - 2 = 0$ are singura soluție acceptabilă $v(0)=1$. Prin derivarea relației (a) în raport cu timpul și simplificare cu $v(t) \neq 0$, rezultă ecuația diferențială în necunoscuta $v(t)$: $(3v+2)dv=dt$ cu soluția

$$\frac{3}{2} v^2(t) + 2v(t) = t + C_1 \quad (b)$$

Din condiția $v(0)=1$, rezultă constanta de integrare $C_1=7/2$ care înlocuită în ecuația (b), conduce la ecuația de grad doi în v : $9v^2(t) + 4v(t) - t - 7 = 0$. Această ecuație are soluțiile:

$$v_1(t) = -\frac{-2 + \sqrt{25 + 6t}}{3} ; \quad v_2(t) = \frac{-2 - \sqrt{25 + 6t}}{3}$$

Soluția $v_2(t)$ nu convine pentru ca $v(0)=1$, astfel că $v_1(t) = \frac{-2 + \sqrt{25 + 6t}}{3}$

care se mai scrie sub forma $dx = \frac{\sqrt{25 + 6t} - 2}{3} dt$. Ultima ecuație se integrează

și obținem: $x(t) = \frac{1}{27} (\sqrt{25 + 6t})^3 - \frac{2}{3} t + C_2$. Din condiția $x(0)=0$, rezultă

$$C_2 = -\frac{125}{27} \text{ și deci: } x(t) = \left(\frac{\sqrt{25 + 6t}}{3} \right)^3 - \frac{2}{3} t - \frac{125}{27}$$

7.5.2. Mișcarea rectilinie uniformă

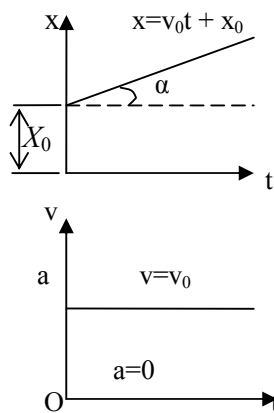


fig. 7.27

Mișcarea rectilinie și uniformă este mișcarea a cărei traiectorie este o dreaptă și a cărei viteză este constantă:

$$v = \dot{x} = v_0 = \text{constant} \quad (7.160)$$

Prin integrarea ecuației (7.160), se obține legea de mișcare:

$$x(t) = v_0 t + c \quad (7.161)$$

Unde constanta de integrare c se determină din condiția $t=0$, $x=x_0$, astfel că $c=x_0$, deci legea de mișcare se scrie sub forma:

$$x = v_0 t + x_0 \quad (7.162)$$

Accelerația punctului este:

$$a = \dot{v} = 0 \quad (7.163)$$

Mișcarea rectilinie și uniformă este singura mișcare cu accelerație nulă. În figura 7.27 sunt reprezentate diagramele mișcării pentru $v_0 > 0$ și $x_0 > 0$. Din ecuația (7.162) rezultă că această diagramă este o linie dreaptă, cu ordonata la origine egală cu x_0 iar unghiul format cu axa timpului este dat de $\alpha = \arctg v_0$.

Diagrama vitezei este o dreaptă paralelă cu axa timpului la distanța v_0 de origine. Accelerația se reprezintă printr-o dreaptă ce se confundă cu axa timpului. Dacă vectorul accelerație este nul: $\vec{a} = 0$, rezultă $\ddot{x} = 0$; $\ddot{y} = 0$; $\ddot{z} = 0$. Prin integrare, obținem:

$$x = At + x_0, y = Bt + y_0, z = Ct + z_0 \quad (7.164)$$

unde constantele de integrare A, B, C, x_0, y_0, z_0 se determină din condițiile inițiale. Prin eliminarea timpului între ecuațiile (7.164), obținem traiectoria:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad \text{care reprezintă ecuația unei drepte. Proiecțiile}$$

vitezei pe axe sunt: $v_x = \dot{x} = A, v_y = \dot{y} = B, v_z = \dot{z} = C$ iar modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \text{constant.}$$

7.5.3. Mișcarea rectiline uniform variată

Mișcarea rectiline uniform variată are traiectoria o dreaptă și accelerația constantă. Mișcarea se numește uniform accelerată dacă accelerația este pozitivă și uniform încetinită dacă accelerația este negativă. Dacă axa Ox coincide cu traiectoria, rezultă: $a = \ddot{x} = a_0 = \text{constant}$. Prin integrare de două ori, obținem: $\dot{x} = a_0 t + C_1$

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2$$

În condițiile inițiale: $t=0, x=x_0, v=v_0$, se obțin: $C_1=v_0, C_2=x_0$ și deci legea mișcării și viteza devin respectiv:

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \quad (7.165)$$

$$v = a_0 t + v_0 \quad (7.166)$$

În aplicații este uneori util să se exprime viteza v a punctului material în funcție de abscisa x . Eliminând timpul între relațiile (7.165) și (7.166), obținem formula lui Galilei:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a_0(x - x_0)}$$

Exemple de diagrame ale mișcării sunt date în fig. 7.28 pentru mișcarea uniform accelerată iar în fig. 7.29 pentru mișcarea uniform încetinită.

Se observă că valoarea extremă (maximă sau minimă) a lui x este atinsă la momentul t_1 când $v=0$.

Caz particular: mișcarea unui punct sub acțiunea gravitației (fig. 7.30)

În acest caz putem scrie: $a=g$. Pentru condițiile inițiale $t=0$, $x=x_0$, $v=v_0$, rezultă: $x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0 = h$. Pentru căderea liberă din origine, condițiile inițiale sunt $t=0$, $x_0=0$, $v_0=0$ și obținem: $h = \frac{1}{2}gt^2$, $v=gt$ de unde deducem:

$$t = \frac{v}{g}; h = \frac{v^2}{2g}; v = \sqrt{2gh}$$

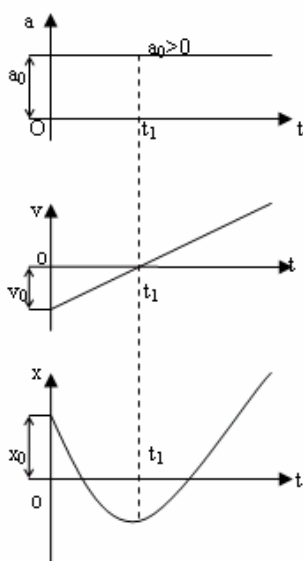


Fig. 7.28

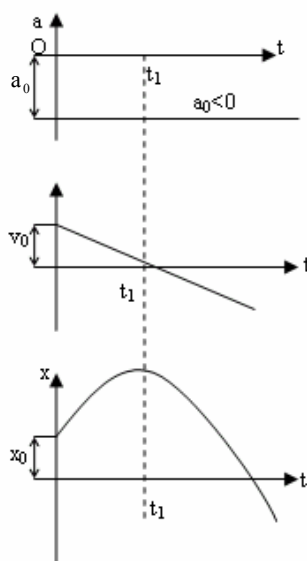


Fig. 7.29

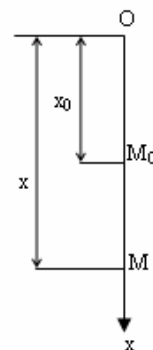


Fig. 7.30

Aplicație: Un punct material, pornește din repaus, se deplasează rectiliniu și după 20 s atinge viteza de 36km/h efectuând o mișcare uniform accelerată. În continuare, punctul are o mișcare uniformă pe distanța de 1 km. După aceea punctul este frânt uniform și se oprește pe o distanță de 0,2 km. Să se studieze mișcarea și să se traseze diagramele mișcării.

Rezolvare: În prima etapă (primele 20s), mișcarea este uniform accelerată, cu legea $x = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_0t + x_0$. Alegem originea timpului și a spațiului în A. Plecând din repaus, avem $v_0=0$ și $x_0=0$, astfel că legea de mișcare și viteza sunt respectiv:

$$x = \frac{1}{2}a_1t^2; v=a_1t \quad (a)$$

184 CAPITOLUL 2. CINEMATICA

După timpul $t=20$ [s], viteza $v=36$ [km/h]=10 [m/s], astfel că punctul ajunge în B cu accelerația constantă dată de $a_1 = \frac{v_B}{t} = \frac{10}{20} = 0,5$ [m / s²]. Din relația (a), distanța parcursă este: $x_B=AB=\frac{1}{2} \times 0,5 \times 20^2 = 100$ [m]

În etapa a doua (spațiul BC) mișcarea este uniformă cu legea:

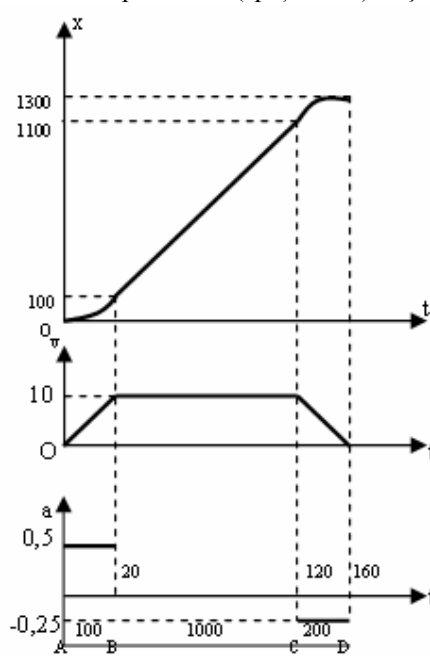


fig. 7.31

(b) $x=v_0 t$ deoarece viteza este constantă tot timpul (și egală cu viteza în punctul B deci $v_0=v=10$ [m/s] iar originea spațiului și a timpului le-am considerat în punctul B.

Timpul necesar ajungerii în punctul C este dat de relația (b):

$$t_c = \frac{x_c}{v_0} = \frac{1000}{10} = 100$$
 [s]. Ultima etapă

este o mișcare uniform întârziată. Originea timpului și a spațiului le considerăm în punctul C. În acest moment viteza este tot v_0 astfel că legea de mișcare are forma $x = -\frac{1}{2} a_3 t^2 + v_0 t$ iar viteza $v = -a_3 t + v_0$. În punctul D, mobilul se oprește: $v_D=0=-a_3 t_D + v_0$ de unde rezultă $a_3 t_D = v_0 = 10$.

Distanța CD este necunoscută:

$$CD=x_D=-\frac{1}{2} a_3 t_D^2 + v_0 t_D = -\frac{1}{2} v_0 t_D + v_0 t_D = \frac{1}{2} v_0 t_D. \text{ Rezultă:}$$

$$t_D = \frac{2 CD}{v_0} = \frac{2 \times 200}{10} = 40$$
 [s] și $a_3 = \frac{v_0}{t_D} = \frac{10}{40} = 0,25$ [m / s²].

Diagramele mișcării sunt reprezentate în fig. 7.31 în care am ținut seama la fiecare etapă de rezultatele precedente.

7.5.4. Mișcarea circulară

a) Studiul mișcării în coordonate Frenet

Ecuția orară a mișcării circulare este (fig.7.32). $s(t)=M_0 M=R\theta$ unde $\theta=\theta(t)$. Folosind rezultatele din paragraful 7.3.5., viteza este:

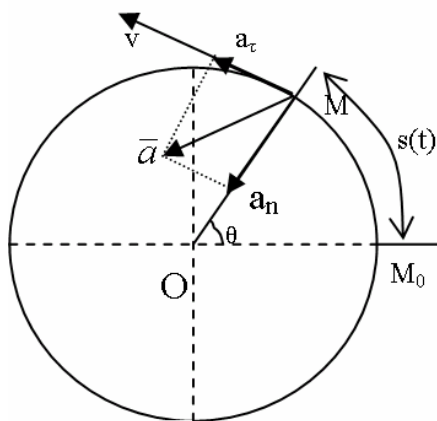


fig. 7.32

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = R\dot{\theta}\vec{\tau} = R\omega\vec{\tau} \quad (7.167)$$

iar accelerația: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\vec{n}$

cu componentele:

$$a_t = \ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\varepsilon; a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho_c} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 \quad (7.168)$$

Modulul accelerației este

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

În particular, dacă $\omega = \text{constant}$, rezultă $\varepsilon = 0$, $a_t = 0$ și $a_n \neq 0$, deci mișcarea circulară este uniformă. Dacă $\varepsilon = \text{constant}$, rezultă $a_t \neq 0$ și $a_n \neq 0$, deci mișcarea circulară este uniform variată. Dacă ω și ε au același sens, mișcarea circulară este uniform

accelerată iar dacă ω și ε au sensuri opuse, mișcarea circulară este uniform întârziată.

Se poate stabili o analogie între mișcările rectilinie și circulară ale punctului material (uniform și uniform variate), comparând mărimile x cu θ , v cu ω și a cu ε .

b) Studiul mișcării în coordonate carteziene

Ecuatiile parametrice ale traiectoriei punctului arbitrar M sunt:

$x = R \cos \theta$; $y = R \sin \theta$ unde $\theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = \varepsilon$. Ecuatia traiectoriei este $x^2 + y^2 = R^2$. viteza are proiecțiile (fig. 7.33).

$$v_x = \dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta = -R\omega \sin \theta = -y\omega$$

$$v_y = \dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta = R\omega \cos \theta = x\omega$$

Vectorul viteză este de forma $\vec{v} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}$. Cum $\vec{OM} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$ și $\vec{OM} \cdot \vec{v} = 0$ rezultă că viteza este perpendiculară pe vectorul de poziție \vec{OM} . Modulul vitezei este $v = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega R$. Proiecțiile accelerației sunt:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -R\varepsilon \sin \theta - R\omega^2 \cos \theta = -y\varepsilon - x\omega^2$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = R\varepsilon \cos \theta - R\omega^2 \sin \theta = x\varepsilon - y\omega^2$$

iar vectorul accelerație este $\vec{a} = (-y\varepsilon - x\omega^2)\vec{i} + (x\varepsilon - y\omega^2)\vec{j}$

$$\text{Modulul accelerației este } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

c) Studiul mișcării în coordonate polare

În coordonate polare, ecuațiile parametrice ale traiectoriei sunt: $r = R = \text{constant}$; $\theta = \theta(t)$. Viteza în coordonate polare are expresia (fig. 7.34):

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta \text{ iar}$$

$$\text{acelerația } \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -R\omega^2\vec{u}_r + R\epsilon\vec{u}_\theta$$

$$\text{Mărima accelerației este } a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = R\sqrt{\epsilon^2 + \omega^2}$$

Aplicație: Două puncte M_1 și M_2 se deplasează pe un cerc de rază R (fig. 7.35). Ele pornesc în același moment $t=0$ din punctul A cu aceeași viteză inițială v_0 dar de sensuri contrare. Punctul M_1 are o mișcare uniformă, iar punctul M_2 o mișcare uniform întârziată. Cele două puncte se întâlnesc prima dată în punctul B când punctul M_2 se oprește. Să se determine poziția punctului B și timpul după care are loc întâlnirea.

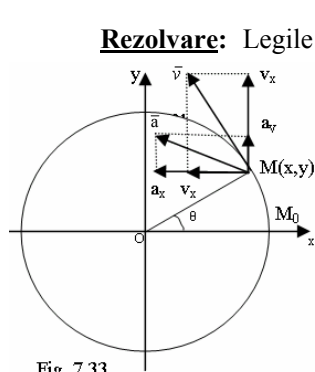


Fig. 7.33

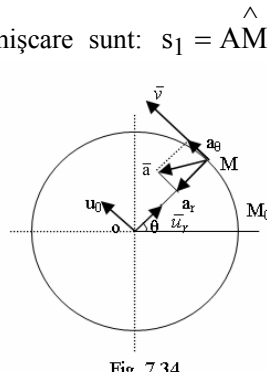


Fig. 7.34

Rezolvare: Legile de mișcare sunt: $s_1 = \widehat{AM_1}$ și $s_2 = \widehat{AM_2}$. Mișcarea punctului M_1 este uniformă, deci $\dot{s}_1 = v_0$ de unde rezultă prin integrare $s_1 = C_1 t + C_2$. Din condițiile inițiale: $t=0$, $s_1=0$, $\dot{s}_1 = v_0$ deducem: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, astfel că: $s_1 = v_0 t$. Mișcarea punctului M_2 este uniform întârziată, deci:

$$\ddot{s}_2 = -C = \text{constant iar prin integrare, obținem: } s_2 = -\frac{1}{2} C t^2 + C_3 t + C_4.$$

Condițiile inițiale pentru punctul M_2 sunt: $t=0$, $s_2=0$, $\dot{s}_2 = v_0$ iar constantele de integrare au valorile: $C_3 = v_0$, $C_4 = 0$. Ecuația de mișcare a lui M_2 este:

$$s_2 = -\frac{1}{2} C t^2 + v_0 t.$$

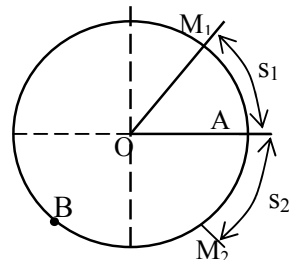


fig. 7.35

În punctul B de întâlnire, avem condițiile: $s_1 + s_2 = 2\pi R$; $v_2 = 0$ din care deducem: $C = \frac{3 v_0^2}{4 \pi R}$,

$$t = \frac{4 \pi R}{3 v_0} \text{ astfel că legile de mișcare ale celor}$$

doi puncte sunt: $s_1 = \frac{4}{3} \pi R$; $s_2 = \frac{2}{3} \pi R$. Unghiul

$$\angle AOB \text{ este } \frac{4\pi}{3}.$$

7.5.5. Mișcarea elicoidală

Considerăm punctul M în mișcare pe o elice circulară cu rază R și pasul p (fig. 7.3.6)

Ecuatiile parametrice ale traiectoriei în coordonate carteziene sunt:

$$x=R\cos\theta; y=R\sin\theta; z=R\theta\operatorname{tg}\alpha \text{ unde } \operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{2\pi R} \text{ și deci } z = \frac{\theta p}{2\pi}.$$

Proiecțiile vitezei sunt: $v_x = \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta = -y\dot{\theta}$; $v_y = \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta = x\dot{\theta}$

$$v_z = \dot{z} = \frac{\dot{\theta}p}{2\pi} = R\dot{\theta}\operatorname{tg}\alpha \text{ iar vectorul viteză este } \bar{v} = -y\dot{\theta}\bar{i} + x\dot{\theta}\bar{j} + R\dot{\theta}\operatorname{tg}\alpha\bar{k}.$$

Modulul vitezei este:

$$v = \dot{\theta}\sqrt{x^2 + y^2 + R^2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{R\dot{\theta}}{\cos\alpha} \quad (7.169)$$

Accelerația are proiecțiile:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = -y\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -R(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = x\ddot{\theta} - y\dot{\theta}^2$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} = R\ddot{\theta}\operatorname{tg}\alpha$$

și deci vectorul accelerație este:

$$\bar{a} = -(y\ddot{\theta} + x\dot{\theta}^2)\bar{i} + (x\ddot{\theta} - y\dot{\theta}^2)\bar{j} + R\ddot{\theta}\operatorname{tg}\alpha\bar{k}$$

Modulul accelerației devine:

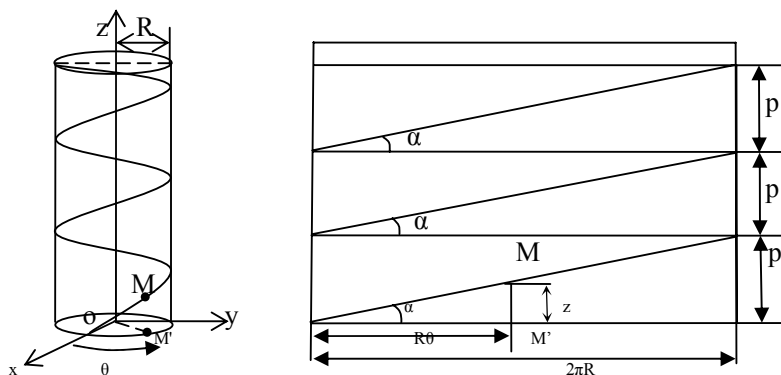


fig. 7.36

$$a = \sqrt{(y\ddot{\theta} + x\dot{\theta}^2)^2 + (x\ddot{\theta} - y\dot{\theta}^2)^2 + R^2\ddot{\theta}^2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4\cos^2\alpha} \quad (7.170)$$

Pentru determinarea razei de curbura a elicei circulare, vom folosi sistemul de coordonate naturale (fig.7.36)

$$s = \overset{\wedge}{M_0 M} = \frac{R\theta}{\cos \alpha} \quad (7.171)$$

Din relația (7.171) sau din relația (7.169) se deduce modulul vitezei:

$$v = \dot{s} = \frac{R\dot{\theta}}{\cos \alpha}. \text{ Proiecțiile accelerației sunt: } a_\tau = \ddot{s} = \frac{R\ddot{\theta}}{\cos \alpha}; a_n = \frac{v^2}{\rho_c} = \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{\rho_c^2 \cos^2 \alpha} \text{ iar}$$

mărimea accelerației:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{R}{\cos \alpha} \sqrt{\ddot{\theta}^2 + \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{\rho_c^2 \cos^2 \alpha}} \quad (7.127)$$

Egalând mărimile accelerației determinate cu relațiile (7.170) respectiv (7.172), obținem raza de curbura ρ_c a elicei circulare: $\rho_c = \frac{R}{\cos^2 \alpha}$

7.5.6. Mișcarea punctului material pe o cicloidă

Cicloida este curba descrisă de un punct M fixat pe periferia unui disc circular care se rostogolește fără alunecare pe o axa, viteza centrului C fiind cunoscută $v_c(t)$ (fig.7.37)

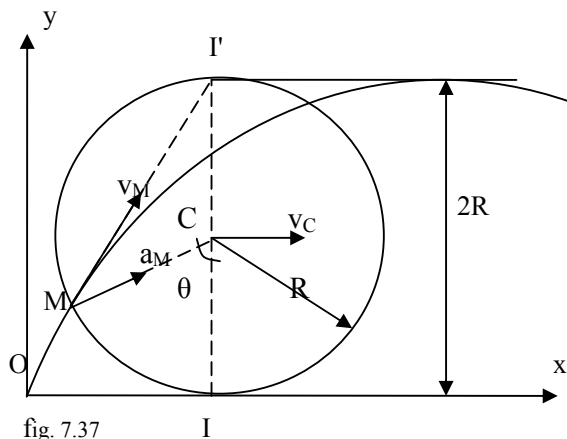


fig. 7.37

Vom studia în cele ce urmează mișcarea punctului M. Presupunem că discul se rostogolește pe axa Ox iar originea O o considerăm în punctul când M se află pe axa x. Notăm unghiul MCI cu θ , unde I este punctul de contact dintre disc și axă.

Legea de mișcare a punctului M (sau ecuațiile parametrice ale cicloidei) este dată de ecuațiile:

$$x = OI = MC \sin \theta;$$

$y = CI - MC \cos \theta$ unde $OI = \overset{\wedge}{MI} = R\theta$ și deci $x = R(\theta - \sin \theta)$; $y = R(1 - \cos \theta)$ iar $\theta = \theta(t)$. Expresia unghiului θ în funcție de timp, o exprimăm ținând seama de felul cum se

mișcă discul: $R\theta(t) = \int_0^t v_c(t)dt$ de unde rezultă: $\theta(t) = \frac{1}{R} \int_0^t v_c(t)dt$;

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_c(t)}{R} = \omega; \ddot{\theta}(t) = \frac{\dot{v}_c(t)}{R} = \varepsilon$$

Proiecțiile vitezei punctului M pe axele Ox și Oy sunt respectiv:

$$v_x = \dot{x} = R\dot{\theta}(1 - \cos\theta) = v_c(1 - \cos\theta) \text{ și } v_y = \dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = v_c\sin\theta$$

Vectorul viteză devine:

$$\vec{v} = v_c[(1 - \cos\theta)\vec{i} + \sin\theta\vec{j}] \quad (7.173)$$

Modulul vitezei punctului M este: $v = v_c\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2v_c\sin\frac{\theta}{2}$.

Viteza punctului M trece tot timpul mișcării prin punctul I' diametral opus lui I. Pentru a demonstra această proprietate, vom arăta că vectorii \overline{IM} și \vec{v} sunt perpendiculari, adică $\overline{IM} \cdot \vec{v} = 0$. Pentru aceasta scriem vectorul:

$$\overline{IM} = -R\sin\theta\vec{i} + R(1 - \cos\theta)\vec{j} \quad (7.174)$$

de unde rezultă $\overline{IM} \cdot \vec{v} = 0$. De asemenea, se poate stabili că $v = \dot{\theta}IM = 2\omega R\sin\frac{\theta}{2}$ deoarece, din relația (7.174), deducem $IM = R\sqrt{\sin^2\theta + (1 - \cos\theta)^2} = 2R\sin\frac{\theta}{2}$.

Proiecțiile accelerației pe axe sunt:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x = R\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + R\dot{\theta}^2\sin\theta = \dot{v}_c(1 - \cos\theta) + \frac{v_c^2}{R}\sin\theta$$

$$a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y = R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta = \dot{v}_c\sin\theta + \frac{v_c^2}{R}\cos\theta$$

Vectorul accelerație se scrie sub forma:

$$\vec{a} = [\dot{v}_c(1 - \cos\theta) + \frac{v_c^2}{R}\sin\theta]\vec{i} + [\dot{v}_c\sin\theta + \frac{v_c^2}{R}\cos\theta]\vec{j} \quad (7.175)$$

iar modulul accelerației devine

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}\dot{v}_c^2 + 2\dot{v}_c\frac{v_c^2}{R}\sin\theta + \frac{v_c^4}{R^2}}$$

În particular, dacă $v_c = \text{constant}$, accelerația punctului M trece tot timpul mișcării prin centrul discului C. În adevăr, vectorii \overline{MC} și \vec{a} sunt paraleli deoarece $\overline{MC} = R(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$.

Pentru calculul razei de curbură ρ_c a cicloidei, folosim formula

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \text{ unde } a_\tau = \dot{v} = 2\dot{v}_c\sin\frac{\theta}{2} + \frac{v_c^2}{R}\cos\frac{\theta}{2}; a_n = \frac{v^2}{\rho_c} = \frac{4}{\rho_c}v_c^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

astfel că $\rho_c = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} = 4R\sin\frac{\theta}{2} = 2IM$

7.6. Probleme

7.6.1. Mecanismul din figura 7.38 se mișcă astfel: capătul A al barei AB culisează pe dreapta (Δ) din planul Oxy iar capătul B pe axa Oz. Dreapta Δ se rotește în jurul axei Oz iar OP se rotește în jurul unei drepte perpendiculare pe planul determinat de axele Oz și Δ . Se cunosc unghiurile de rotație: $\hat{A}Ox = \hat{B}OP = \theta = \omega t + \theta_0$; $\omega > 0$ și $OP = BP = AP = L$. Să se determine traiectoria, viteza, accelerația punctului M ($BM = 1$) și raza de curbură a traiectoriei.

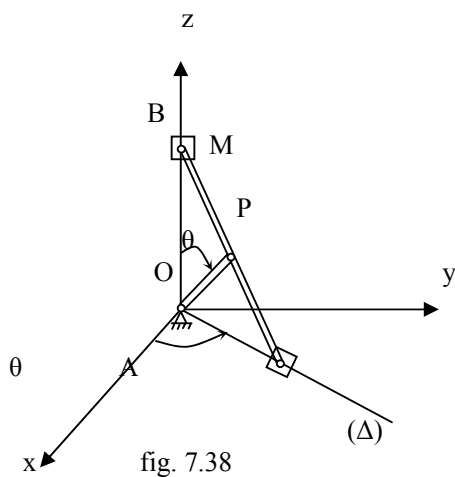


fig. 7.38

Rezolvare: Legea de

mișcare a punctului M în coordonate carteziene este dată de relațiile:

$$x = l \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} l \sin 2\theta$$

$$y = l \sin^2 \theta = \frac{1}{2} l (1 - \cos 2\theta)$$

$$\text{și } z = (2L - l) \cos \theta \quad (a)$$

Eliminând parametrul θ între relațiile (a) obținem ecuația traiectoriei ca fiind elipsoidul de ecuație

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{(2L - l)^2} = 1.$$

Proiecțiile vitezei pe axele carteziene sunt:

$$v_x = \dot{x} = l\omega \cos 2\theta; v_y = \dot{y} = l\omega \sin 2\theta; v_z = (l - 2L)\omega \sin \theta.$$

$$\text{Vectorul viteză devine } \vec{v} = l\omega \cos 2\theta \vec{i} + l\omega \sin 2\theta \vec{j} + (l - 2L)\omega \sin \theta \vec{k}.$$

$$\text{Mărima vitezei este } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \sqrt{l^2 + (2L - l)^2 \sin^2 \theta}.$$

Proiecțiile accelerației punctului M pe axe sunt: $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -2l\omega^2 \sin 2\theta$;

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = 2l\omega^2 \cos 2\theta; a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} = (l - 2L)\omega^2 \cos \theta$$

Vectorul accelerație este:

$$\vec{a} = -2l\omega^2 \sin 2\theta \vec{i} + 2l\omega^2 \cos 2\theta \vec{j} - (2L - l)\omega^2 \cos \theta \vec{k}$$

iar mărimea accelerației este

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 \sqrt{4l^2 + (2L - l)^2 \cos^2 \theta}$$

Raza de curbura a traiectoriei o determinăm cu formula $\rho_c = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}$

unde

$$\dot{v} = \frac{\omega^2 (2L - l)^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{l^2 + (2L - l)^2 \sin^2 \theta}}.$$

$$\text{Se obține: } \rho_c = \frac{[l^2 + (2L - l)^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}{l \sqrt{4l^2 + (2L - l)^2 \cos^2 \theta + 4(2L - l)^2 \sin^2 \theta}}$$

7.6.2. Pentru mecanismul cu culisă oscilantă din figura 7.39, se cunosc $\theta = \omega t$; $O_2A = R$; $O_1O_2 = 2R$, $O_1B = l$; $BC = D$. Cursorul C se mișcă rectiliniu pe orizontala punctelor B' și B'' , pozițiile limită a articulației B. Punctul M se află pe bara BC astfel că $CM = d$. Să se determine traiectoria, viteza și accelerația punctului M.

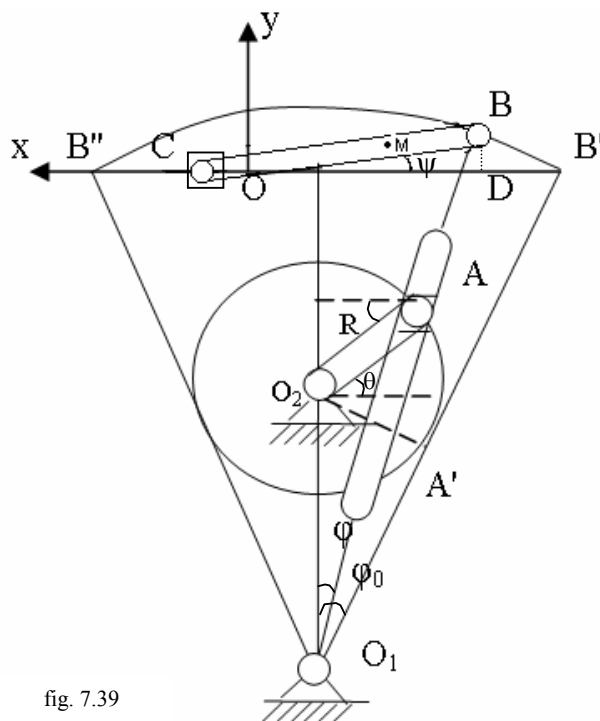


fig. 7.39

Rezolvare: Notăm

$$\varphi = \widehat{O_2O_1A} \text{ și } \psi = \widehat{BCB'}.$$

Unghiul φ este cunoscut din relația

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{R \cos \theta}{2R + R \sin \theta} = \\ &= \frac{\cos \theta}{2 + \sin \theta} \end{aligned}$$

Poziția limită a barei O_1B conduce la valoarea maximă a unghiului φ :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{O_2A'}{O_1A'} = \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

Calculând distanța BD în două moduri, obținem: $D \sin \psi = l \cos \varphi - l \cos \varphi_0$ de unde:

$$\sin \psi = \frac{1}{D} \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Alegem un sistem de axe cu originea în O care coincide cu poziția culisei C când articulația B ocupă poziția extremă B' (fig.7.39)

Distanța OC o determinăm din relația $OC=CB'-OB'$ și aceasta devine:

$$OC = l \left(\frac{1}{2} - \sin \varphi \right) - D + \sqrt{D^2 - l^2 \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}$$

Coordonatele punctului M în raport cu reperul Oxy sunt:

$$x = -(d \cos \psi - OC) = l \left(\frac{1}{2} - \sin \varphi \right) - D + y = d \sin \psi$$

$$+ \frac{D-d}{D} \sqrt{D^2 - l^2 \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}$$

Traectoria punctului M o obținem din ultimele relații prin eliminarea parametrului φ . Obținem ecuația traectoriei:

$$\left[\frac{D^2}{d^2 l^2} - \frac{(D-d)^2}{l^2} \right] y^2 + \frac{(x+D)^2}{l^2} - \frac{x+D}{l} + \frac{\sqrt{3}}{dl} Dy + \left[1 - \frac{2}{l} (x+D) \right] \frac{D-d}{l} \sqrt{d^2 - y^2} +$$

$$+ \frac{d^2}{l^2} (D-d)^2 = 0$$

Proiecțiile vitezei pe axe sunt:

$$v_x = \dot{x} = l \omega \left[\frac{l \sin \varphi \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\sqrt{D^2 - d^2 \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}} - \cos \varphi \right], \quad v_y = \dot{y} = -\frac{dl \omega}{D} \sin \varphi$$

iar proiecțiile accelerației pe axe sunt:

$$a_x = \ddot{x} = l \omega^2 \left\{ \frac{\left(\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \right) \left[D^2 - d^2 \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right] - \sin^2 \varphi \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{\left[D^2 - d^2 \left(\cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \sin \varphi \right\}$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{dl \omega^2}{D} \cos \varphi$$

7.6.3. O bilă de biliard este lansată din punctul A(d,0), cu viteza v_0 în planul orizontal Oxy (fig.7.40). Bila întâlnește axa Oy într-un punct C după care își schimbă direcția și ajunge în punctul B(2d,4d) cu viteza $v_0/2$. Știind că viteza bilei descrește proporțional cu distanța parcursă și se neglijează efectul ciocnirii în punctul C, să se determine:

- Poziția punctului C;
- Timpul necesar parcurgerii spațiului ACB
- Viteza și accelerația bilei la un moment dat.

Rezolvare: În această problemă a biliardului, se știe că $\hat{ACO} = \hat{BCD} = \alpha$, astfel că triunghiurile BCD și AOC sunt asemenea.

Rezultă relația $\frac{OA}{OC} = \frac{BD}{CD}$ iar din egalitatea $OC+CD=4d$, rezultă

$$OC = \frac{3}{4}d$$

Din enunț rezultă ca viteza este proporțională cu spațiul s parcurs, deci:

$$v = C_1 s + C_2 \quad (a)$$

Distanța parcursă de bilă până în B va fi:

$$AC + CB = \sqrt{d^2 + \frac{16}{9}d^2} + \sqrt{4d^2 + \frac{64}{9}d^2} = 5d$$

Constantele C_1 și C_2 care apar în relația (a) se determină din condițiile inițiale (în A) și finale (în B), care sunt:

$$t=0; \quad s=0; \quad v = \dot{s} = v_0 \quad \text{și} \quad t=t_B;$$

$$s=5d; \quad v = \frac{1}{2}v_0$$

Se obțin

$$C_1 = -\frac{v_0}{10d}; \quad C_2 = v_0 \quad \text{astfel că}$$

formula (a) devine:

$$v = v_0 - \frac{v_0}{10d}s$$

care se mai scrie:

$$\dot{s} + \frac{v_0}{10d}s = v_0 \quad (b)$$

Ecuția diferențială (b) are soluția generală:

$$s = C_3 e^{-\frac{v_0}{10d}t} + 10d \quad (c)$$

Constanta de integrare C_3 din ecuația (c) se determină din condiția inițială $t=0, s=0$. Obținem $C_3 = -10d$, astfel că legea de mișcare (c) este de forma:

$$s = 10d(1 - e^{-\frac{v_0}{10d}t}) \quad (d)$$

Relația (d) este adevărată pentru $s > AC$, adică pentru $t > \frac{10d}{v_0} \ln \frac{6}{5}$. Din condiția $s(t_B) = 5d$, rezultă $t_B = \frac{10d}{v_0} \ln 2$

Mișcarea fiind rectilinie, viteza bilei pe direcția CB este:

$$v = \dot{s} = v_0 e^{-\frac{v_0}{10d}t} \quad (t > \frac{10d}{v_0} \ln \frac{6}{5}) \quad \text{iar accelerația este } a = \dot{v} = -\frac{v_0}{10d} e^{-\frac{v_0}{10d}t}$$

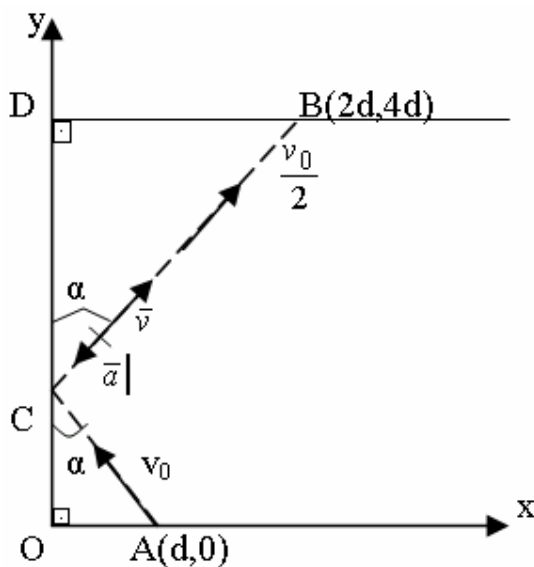


fig. 7.40

194 CAPITOLUL 2. CINEMATICA

Din ultima ecuație se vede că accelerația are sens opus vitezei tot timpul mișcării.

7.6.4. Bara OA se rotește cu viteza unghiulară constantă ω , în jurul punctului O și intersectează în punctul M cercul de rază OC=R (fig.7.41). Să se determine:

- Viteza punctului M pe cerc și pe bară
- Accelerația punctului M pe cerc și pe bară

Rezolvare: Vom adopta sistemul de coordonate polare:

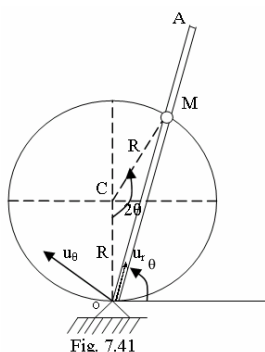


Fig. 7.41

$r = OM = 2R \sin \theta$, $\theta = \omega t$. Viteza punctului M pe bară este:

$v_r = \dot{r} = 2\omega R \cos \theta$. Componenta v_θ a vitezei este:
 $v_\theta = r\dot{\theta} = 2\omega R \sin \theta$, astfel că viteza punctului pe cerc este $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = 2\omega R$. Accelerația lui M pe bară este
 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -4\omega^2 R \sin \theta$. Componenta a_θ a accelerației este: $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 4\omega^2 R \cos \theta$ iar accelerația punctului M pe cerc este $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 4\omega^2 R$

7.6.5. Bara AB de lungime l se mișcă în planul fix Oxy, astfel încât capătul A culisează pe axa Oy cu viteza constantă v_0 începând din O, iar capătul B pe o curbă (C) astfel încât bara este tangentă tot timpul mișcării în B la curba (C) (fig.7.42). Să se determine curba (C) și viteza punctului B.

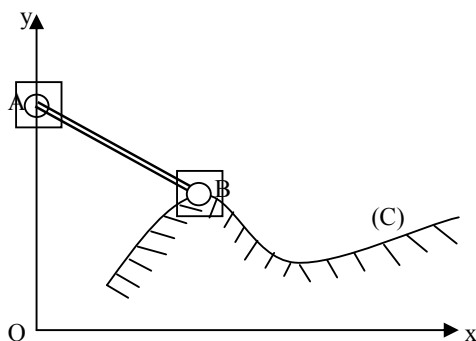


fig. 7.42

Rezolvare: Vectorul \overline{AB} este tangent la curba (C) și dacă notăm coordonatele punctului B cu x respectiv y, putem scrie relația:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y_A}{x - 0} \quad (a)$$

unde :

$$y_A = v_0 t; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (b)$$

Din relațiile (a) și (b) rezultă:

$$\dot{x}(y - v_0 t) = x\dot{y} \quad (c)$$

Din condiția $AB=l$, rezultă:

$$x^2 + (y - v_0 t)^2 = l^2 \quad (d)$$

Relația (d) derivată în raport cu timpul devine:

$$x\ddot{x} + (\dot{y} - v_0)(y - v_0 t) = 0 \quad (e)$$

Relațiile (c) și (e) le considerăm un sistem cu necunoscutele \dot{x} și \dot{y} și deci obținem

$$\dot{x} = \frac{v_0}{l^2} x(y - v_0 t) \text{ și } \dot{y} = \frac{v_0}{l^2} (y - v_0 t)^2 \quad (f)$$

Relația (f₂) se scrie în formele echivalente:

$$\frac{dy}{(y - v_0 t)^2} = \frac{v_0 dt}{l^2} \Leftrightarrow \frac{d(y - v_0 t)}{(y - v_0 t)^2 - l^2} = \frac{v_0 dt}{l^2} \quad (g)$$

Ultima relație din (g), prin integrare, conduce la formula:

$$\ln \frac{l - y + v_0 t}{l + y - v_0 t} = 2 \frac{v_0 t}{l} + C \quad (h)$$

În momentul inițial: $t=0$; $x=x_0$; $y=y_0$ și deci constanta de integrare C devine

$$C = \ln \frac{l - y_0}{l + y_0} \quad (i)$$

Iar din relațiile (h) și (i), obținem:

$$\frac{l - y + v_0 t}{l + y - v_0 t} = \frac{l - y_0}{l + y_0} e^{\frac{2v_0 t}{l}} \quad (j)$$

Din relația (j) rezultă:

$$y - v_0 t = l \frac{l + y_0 - (l - y_0) e^{\frac{2v_0 t}{l}}}{l + y_0 + (l - y_0) e^{\frac{2v_0 t}{l}}} = -l \frac{y_0 \operatorname{ch} \frac{v_0}{l} t - l \operatorname{sh} \frac{v_0}{l} t}{y_0 \operatorname{sh} \frac{v_0}{l} t - l \operatorname{ch} \frac{v_0}{l} t} \quad (k)$$

Cu notația:

$$\frac{y_0}{l} = th \ k \quad (l)$$

din relația (k) deducem:

$$y = v_0 t - l \operatorname{th} \left(\frac{v_0}{l} t - k \right) \quad (m)$$

astfel că relația (f₁) devine:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v_0}{l} \operatorname{th} \left(\frac{v_0}{l} t - k \right) dt.$$

Ultima relație o integrăm și obținem:

$$\ln x = -\ln \operatorname{ch} \left(\frac{v_0}{l} t - k \right) + C' \quad (n)$$

Din condiția inițială, rezultă constanta de integrare: $C' = \ln x_0 \operatorname{ch} k$. Din relația (d) pentru $t=0$, rezultă $x_0^2 = l^2 - y_0^2$ și de aici, ținând seama de notația (l), obținem $x_0 \operatorname{ch} k = l$, iar din relația (n) obținem:

$$x = \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)} \quad (o)$$

Relațiile (m) și (o) formează ecuațiile parametrice ale curbei (C).

Proiecțiile vitezei punctului B pe axe se obțin din relațiile (f) în care ținem seama de relațiile (m) și (o).

$$\dot{x} = - \frac{v_0 \operatorname{sh} \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)} ; \quad \dot{y} = v_0 \operatorname{th}^2 \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)$$

Mărimea vitezei punctului B este:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{v_0 \operatorname{sh} \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)} = v_0 \operatorname{th} \left(\frac{v_0}{l} t - k \right)$$

7.6.6. Pe suprafața exterioară a unui trunchi de con circular drept, având razele R respectiv R/2, este practicat un canal elicoidal, de lungime minimă ce unește extremitățile A și B ale unei generatoare a trunchiului de con AB=3R (fig.7.43a). Un punct material M se deplasează în acest canal de la A spre B cu viteza $v=a_0 t$ (a_0 constantă>0). Să se determine:

- Timpul de mișcare a punctului M
- Timpul în care punctul M ajunge în B
- Raza de curbură a traiectoriei.

Rezolvare: Notăm O vârful conului circular drept din care provine trunchiul de con considerat. Alegem sistemul de referință cu originea în O, iar axa Oz dirijată după axa conului, generatoarea AB conținută în planul xOz. Notăm cu M' proiecția punctului M pe planul Oxy. Unghiul dintre generatoarea conului și axa Oz de simetrie a conului se notează cu α și este dat de relația:

$$\sin \alpha = \frac{O_2 B}{OB} = \frac{R}{3R + 3R} = \frac{1}{6}$$

Pentru determinarea legii de mișcare a punctului M, vom folosi sistemul de coordonate cilindrice care sunt:

$$OM' = \rho; \quad \angle xOM' = \theta; \quad M'M = z \quad (a)$$

Coordonatele carteziene ale punctului M sunt:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad z = \rho \operatorname{tg} \alpha;$$

Vectorul de poziție al punctului M este:

$$\vec{r} = \overline{OM} = \rho(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + \operatorname{tg} \alpha \vec{k})$$

În figura 7.43 b este reprezentată suprafața exterioară desfășurată a trunchiului de con. Punctele A' și B' coincid cu A respectiv cu B de pe trunchiul de con. Drumul de lungime minimă între A și B pe trunchiul de con este segmentul AB' din figura 7.43b.

$$\gamma = \frac{\pi}{3}.$$
$$\delta = \frac{|\overline{\mathbf{OM}} \times \vec{\mathbf{v}}|}{v} \quad (\text{b})$$
$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} &= \dot{\bar{\mathbf{r}}} = (\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta) \bar{\mathbf{i}} + (\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta) \bar{\mathbf{j}} + \dot{\rho} \operatorname{ctg} \alpha \bar{\mathbf{k}} \\ v &= \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha}\end{aligned}\quad (\text{c})$$

iar mărimea vectorului din relația (d) este:

Înlocuind (c) și (e) în relația (b) obținem:

$$\delta = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha}} \quad (\text{f})$$

Din relația (f) obținem viteza unghiulară dată de relația:

$$\dot{\theta} = \frac{\delta \dot{\rho}}{\rho \sqrt{\rho^2 - \delta^2 \sin^2 \alpha}} \quad (g)$$

Cu ajutorul relației (g), formula vitezei dată de relația (c) devine:

$$v = \frac{\rho \dot{\rho}}{\sin \alpha \sqrt{\rho^2 - \delta^2 \sin^2 \alpha}} \quad (h)$$

Prin integrarea relației (h), obținem:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{R}{2}}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \delta^2 \sin^2 \alpha}} &= \sin \alpha \int_0^t v(t) dt \\ \text{sau} \quad \sqrt{\rho^2 - \delta^2 \sin^2 \alpha} - \sqrt{\frac{R^2}{4} - \delta^2 \sin^2 \alpha} &= \frac{1}{2} a_0 t^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\rho = \sqrt{\delta^2 \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{2} \sqrt{R^2 - 4\delta^2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} a_0 t^2 \sin \alpha \right)^2} \quad (i)$$

Ținând seama de relațiile lui δ și $\sin \alpha$ în relația (i), obținem:

$$\rho = \frac{1}{12} \sqrt{36R^2 + a_0^2 t^4} \quad (j)$$

Integrând ecuația (j) obținem

$$\int_0^{\theta} d\theta = \delta \int_{\frac{R}{2}}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - \delta^2 \sin^2 \alpha}} = \delta \int_{\frac{R}{2}}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{1 - \frac{\delta^2 \sin^2 \alpha}{\rho^2}}}$$

de unde

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{\delta}{\delta \sin \alpha} \left| \arcsin \frac{\delta \sin \alpha}{\rho} \right|_{\frac{R}{2}}^{\rho} \quad \text{sau} \\ \theta &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\arcsin \frac{2\delta \sin \alpha}{R} - \arcsin \frac{\delta \sin \alpha}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (k)$$

Ținând seama de expresiile lui δ , $\sin \alpha$ și ρ din relația (k), avem:

$$\theta = 3\pi - 6 \arcsin \frac{6R}{\sqrt{36R^2 + a_0^2 t^4}} \quad (l)$$

Coordonata z rezultă din relația:

$$z = \rho \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{12} \sqrt{35(36R^2 + a_0^2 t^4)} \quad (m)$$

Legea de mișcare a punctului M este dată de coordonatele cilindrice $\rho(t), \theta(t), z(t)$ date respectiv de expresiile (j), (l), (m).

b) Viteza punctului M este dată de expresia:

$$v = \dot{s} = a_0 t \quad (n)$$

unde $s(t) = \overset{\frown}{AM}$. Prin integrarea ecuației (n) obținem : $s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$

Dar lungimea totală $s_1 = AB = 6R \sin \gamma = 3\sqrt{3} R$ (fig 7.43b) rezultă în timpul mișcării de la A la B: $t_{AB} = \sqrt{\frac{2s_1}{a_0}} = \sqrt{\frac{6\sqrt{3}R}{a_0}}$.

c) Raza de curbură a traiectoriei este dată de formula:

$$\rho_c = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} \text{ unde accelerația } a \text{ este dată de formula (7.80):}$$

$$a^2 = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2$$

$$\text{Se obține: } a^2 = a_0^2 + \frac{181440R^4 a_0^4 t^4}{(36R^2 + a_0^2 t^4)^3} \text{ și deci: } \rho_c = \frac{1}{R^2} \frac{\sqrt{(36R^2 + a_0^2 t^4)^3}}{181440}$$

7.6.7. Punctul M se deplasează pe o sferă de rază $R = \text{constant}$ între două puncte A și B pe drumul cel mai scurt (fig 7.44). Punctul A are longitudinea $\varphi=0$, azimutul $\theta=\pi/2$ iar punctul B longitudinea $\varphi=\alpha$ și azimutul $\theta=\beta$. Sistemul de axe Oxyz este ales astfel ca axa Ox să coincidă cu raza punctului A. Să se determine:

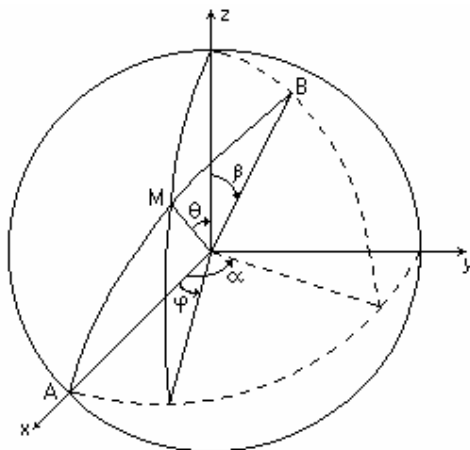


fig 7.44

a) Traectoria punctului M.

b) Dacă mișcarea punctului M este uniformă, se cer legile mișcării, accelerația punctului M și raza de curbură a traiectoriei.

Rezolvare: Componentele vitezei în coordonate sferice sunt (θ scade):

$$v_r = \ddot{R} = 0; \quad v_\theta = -R\dot{\theta}, \quad v_\varphi = R\dot{\varphi} \sin \theta \quad (a)$$

Viteza este tangentă la traiectorie, arcul sferic AB are lungimea minimă, deci unghiul γ dintre viteza și versorul \bar{u}_0 definit în paragraful 7.3.4. este constant. Prin urmare, se mai poate scrie:

$$v_\theta = v \cos \gamma, \quad v_\varphi = v \sin \gamma \quad (b)$$

unde unghiul γ se va determina ulterior. Având în vedere relațiile (a), relațiile (b) se mai scriu sub forma:

200 CAPITOLUL 2. CINEMATICA

$$-R\dot{\theta} = v \cos \gamma, \quad R\dot{\phi} \sin \theta = v \sin \gamma \quad (c)$$

Vom determina traiectoria punctului M, împărțind relațiile (c) membru cu membru și obținem:

$$-\frac{dt}{\sin \theta} = \operatorname{ctg} \gamma d\phi \quad (d)$$

Integrând ecuația diferențială (d), obținem:

$$\ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right| = \phi \operatorname{ctg} \gamma + C \quad (e)$$

În momentul inițial, punctul M se află în A, deci $\phi=0$, $\theta=\pi/2$ și deci din relația (e) deducem $C=0$, astfel că din relația (e), obținem ecuația traiectoriei în coordonate sferice:

$$\phi = \operatorname{tg} \gamma \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right|; \quad R = \text{constant} \quad (f)$$

Unghiul constant γ se determină din condiția ca traiectoria să treacă prin punctul B, deci pentru $\phi=\alpha$ și $\theta=\beta$ obținem:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha}{\ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right|} \quad (g)$$

b) În ipoteza $v=v_0=\text{constant}$, obținem din relațiile (c) și (f):

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{v_0}{R} \cos \gamma \cdot t, \quad \phi = \operatorname{tg} \gamma \cdot \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{v_0}{2R} \cos \gamma \cdot t \right) \right| \quad (h)$$

Relațiile (h) exprimă legile de mișcare ale punctului M în coordonate sferice iar unghiul γ este cunoscut din relația (g).

Viteza are componentele în acest caz:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = v_0 \cos \gamma = \text{constant}, \quad v_\phi = v_0 \sin \gamma = \text{constant}$$

iar accelerația are componentele:

$$a_r = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = -\frac{v_0^2}{R}$$

$$a_\theta = 2R\dot{\theta} + R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{v_0^2}{R} \sin^2 \gamma \operatorname{tg} \left(\frac{v_0}{R} \cos \gamma \cdot t \right)$$

$$a_\phi = R\ddot{\phi} \sin \theta + 2R\dot{\phi} \sin \theta + 2R\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta = -\frac{v_0^2}{R} \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{tg} \left(\frac{v_0}{R} \cos \gamma \cdot t \right)$$

$$\text{Modulul accelerației este: } a = \frac{v_0^2}{R} \sqrt{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{v_0}{R} \cos \gamma \cdot t \right)}$$

$$\text{Raza de curbura este: } \rho_c = \frac{v_0^2}{a} = \frac{R}{\sqrt{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \left(\frac{v_0}{R} \cos \gamma \cdot t \right)}}$$

7.6.8. Un punct material M se deplasează pe hiperbola echilateră $y=1/x$, $0 < x \leq 1$, astfel încât viteza este proporțională cu distanța OM, factorul de proporționalitate fiind $k>0$. În momentul inițial M se află în A(1,1).

Să se determine:

Legea de mișcare a punctului M

Viteza punctului

Accelerația punctului

Raza de curbură a traiectoriei (fig 7.45)

Rezolvare: Rezolvarea este dificilă în coordonate carteziene și deci vom rezolva problema în coordonate polare: notăm $OM=r$ și $\angle MOx=\theta$.

Coordonatele punctului M în sistemul de coordonate carteziene în funcție de coordonatele polare sunt:

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta \quad (a)$$

Înlocuind în relația (a) ecuația hiperbolei echilatre obținem:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}} \quad (b)$$

Derivata razei polare în raport cu timpul este:

$$\dot{r} = -\frac{\sqrt{2} \cos 2\theta}{\sin 2\theta \sqrt{\sin 2\theta}} \dot{\theta}$$

Ținând seama de formula vitezei în coordonate polare:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = \frac{\sqrt{2} \dot{\theta}}{\sin 2\theta \sqrt{\sin 2\theta}}$$

condiția din enunț se reduce la ecuația diferențială:

$$\frac{d\theta}{\sin 2\theta} = k dt \quad (c)$$

Ecuația (c) are soluția generală: $\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \theta = kt + C$ unde constanta C se determină din condițiile inițiale: $t=0$; $x=1$; $y=1$; care se mai scriu cu ajutorul relațiilor (a) sub forma: $t=0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \sqrt{2}$.

Rezultă $C=0$ și deci $\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \theta = kt$, de unde obținem:

$$\theta = \operatorname{arctg} e^{2kt} \quad (d)$$

Raza polară (b), cu ajutorul relației (d) devine:

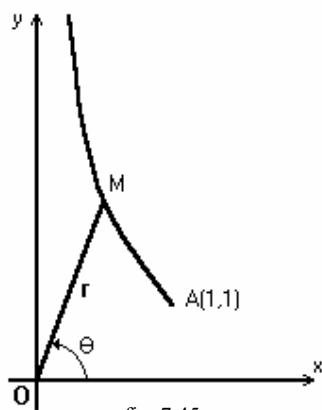


fig. 7.45

$$r = \sqrt{2 \operatorname{ch} 2kt} \quad (\text{e})$$

Legile de mișcare ale punctului M în coordonate polare sunt date de relațiile (d) și (e).

b) Viteza punctului M are proiecțiile pe axele sistemului de coordonate polare:

$$v_r = \dot{r} = \sqrt{2}k \frac{\operatorname{sh} 2kt}{\sqrt{\operatorname{ch} 2kt}} \quad v_\theta = r\dot{\theta} = -\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\operatorname{ch} 2kt}}$$

iar modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = k\sqrt{2\operatorname{ch} 2kt} = kr$$

c) Accelația punctului M în coordonate polare are proiecțiile:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = k^2\sqrt{2\operatorname{ch} 2kt}, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

și deci accelerația are ca și viteza mărimea proporțională cu distanța:

$$a = a_r = k^2\sqrt{2\operatorname{ch} 2kt} = k^2r$$

d) Ținând seama că derivata vitezei este: $\dot{v} = \sqrt{2}k^2 \frac{\operatorname{sh} 2kt}{\sqrt{\operatorname{ch} 2kt}}$ raza de curbura

$$\text{a traiectoriei este } \rho_c = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} = \sqrt{2}(\operatorname{ch} 2kt)^{\frac{3}{2}}$$

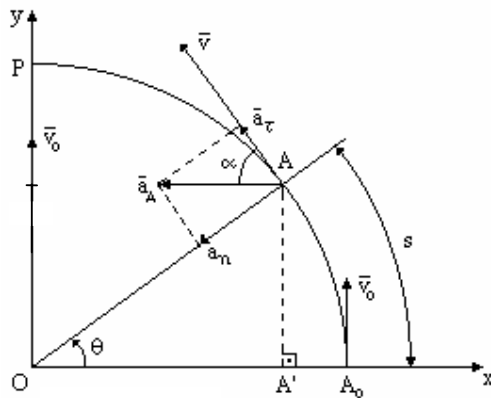


fig. 7.46

7.6.9. Un punct material A se deplasează pe un sfert de cerc de centru O și rază R, astfel încât accelerația lui este tot timpul mișcării paralelă cu axa Ox. În momentul inițial, punctul A se află în A₀ și are viteza v₀ (fig. 7.46). Un alt punct B se mișcă uniform cu viteza v₀ și rectiliniu pe axa Oy. Să se arate că dacă mișcările celor două puncte încep simultan ele se și întâlnesc simultan pe cerc.

Rezolvare: Notăm cu α unghiul dintre accelerația punctului A

și viteza lui și deci obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{v^2}{R\dot{v}} \quad (\text{a})$$

Dar:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \quad (\text{b})$$

unde $s=A_0A$

Notăm cu $\theta = \angle A_0OA = s/R$ astfel că din condiția ca accelerația rămâne paralelă cu axa Ox , rezultă $\alpha = \pi/2 - \theta$ și deci ținând seama de relația (b), relația (a) se mai scrie sub forma: $\operatorname{ctg} \frac{s}{R} = \frac{v ds}{R dv}$ sau :

$$\frac{R dv}{v} = \operatorname{tg} \frac{s}{R} ds \quad (c)$$

Relația (c) devine prin integrare: $R \ln |v| \Big|_{v_0}^v = -R \ln \left| \cos \frac{s}{R} \right| \Big|_0^s$ de unde obținem:

$$v = \frac{v_0}{\cos \frac{s}{R}} \quad (d)$$

Ținând seama că $v = \frac{ds}{dt}$ relația (d) devine o ecuație diferențială de forma:

$$\cos \frac{s}{R} ds = v_0 dt, \text{ cu soluția generală: } R \sin \frac{s}{R} = v_0 t + C.$$

Din condiția $t=0, s=0$ obținem $C=0$ și deci: $\sin \frac{s}{R} = \sin \theta = \frac{v_0}{r} t$

Din ultima relație rezultă $AA' = R \sin \theta = v_0 t$ unde A' este proiecția punctului A pe axa Ox . Mișcarea punctului B este uniformă și deci $OB = v_0 t$.

Urmează ca $OB = AA'$ tot timpul mișcării și deci cele două puncte se întâlnesc simultan în punctul P pe axa Oy și de pe sfertul de cerc.

7.6.10. Un punct material M se deplasează pe cicloidă OA de ecuație:

$$x = R[\theta(t) - \sin \theta(t)]; y = R[1 - \cos \theta(t)]; \theta(t) \in [0, 2\pi] \quad (a)$$

cu viteza constantă v_0 . În momentul inițial $M \equiv O$ (fig 7.47). Să se determine:

- Legea de mișcare a punctului
- Proiecțiile vitezei și a accelerației și să se arate că vectorii accelerație și viteză sunt perpendiculari

Rezolvare: Prin derivare în raport cu timpul a relației (a) obținem:

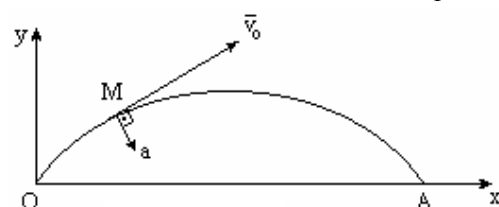


fig. 7.47

$$v_x = \dot{x} = R(1 - \cos \theta) \dot{\theta};$$

$$v_y = \dot{y} = R \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

și deci:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \\ &= 2R \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \dot{\theta} = v_0 \end{aligned} \quad (b)$$

Relația (b) este o ecuație diferențială de forma: $\sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{v_0}{2R} dt$ care prin integrare și ținând seama că la momentul inițial $t=0$, $\theta=0$, conduce la legea de mișcare: $\theta = 2 \arccos(1 - \frac{v_0 t}{4R})$ care este definită pentru $t \leq \frac{8R}{v_0}$.

Proiecțiile vitezei pe axe sunt :

$$v_x = \dot{x} = \frac{v_0}{4R} \sqrt{v_0 t(8R - v_0 t)}, \quad v_y = \dot{y} = \frac{v_0}{4R} (4R - v_0 t)$$

Proiecțiile accelerației pe axe sunt:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{v_0^2(4R - v_0 t)}{4R \sqrt{v_0 t(8R - v_0 t)}}, \quad a_y = \ddot{y} = -\frac{v_0^2}{4R}$$

Vectorii viteză, respective accelerație se scriu sub forma:

$$\vec{v} = \frac{v_0}{4R} [\sqrt{v_0 t(8R - v_0 t)} \vec{i} + (4R - v_0 t) \vec{j}], \quad \vec{a} = \frac{v_0^2}{4R} [\frac{4R - v_0 t}{\sqrt{v_0 t(8R - v_0 t)}} \vec{i} - \vec{j}]$$
 De

oarece $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$, rezultă ce cei doi vectori sunt perpendiculari tot timpul mișcării.

7.6.11. Să se arate că mișcarea rectilinie definită de ecuația

$$x = 5 - 2 \sin^2 2t - 2 \sin 2t \sin 6t - \sqrt{3} \sin 8t \quad (a)$$

este o mișcare oscilatorie armonică. Să se determine centrul de vibrație, pulsație, perioada, frecvența, amplitudinea, viteza și accelerația punctului.

Rezolvare: Folosind formule trigonometrice cunoscute, relația (a) se mai poate scrie sub forma:

$$x = 4 + \cos 8t - \sqrt{3} \sin 8t \quad (b)$$

Relația (b) se mai scrie astfel:

$$x = 4 + x_0 \cos(8t + \varphi) \quad (c)$$

unde, indentificând relațiile (b) și (c), obținem: $x_0 = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Mișcarea definită de relația (a) este echivalentă cu:

$$x = 4 + 2 \cos(8t + \frac{\pi}{3}) \quad (d)$$

Centrul de oscilație se determină din condiția $\ddot{x} = 0$ care are loc pentru $\cos(8t + \frac{\pi}{3}) = 0$. Centrul de oscilație are abscisa $x_0 = 4$. Pulsația este $\omega = 8$ [rad/s].

Perioada mișcării, respectiv frecvența, sunt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} [s]; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{4}{\pi} \approx 1,27 [Hz].$$

Valorile extreme ale elongației (d) sunt: $x_{\max} = 6$, $x_{\min} = 2$ astfel că amplitudinea mișcării este: $A = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = 2$.

Viteza și accelerația sunt respectiv:

$$v = \dot{x} = -16 \sin\left(8t + \frac{\pi}{3}\right), \quad a = \ddot{x} = -128 \cos\left(8t + \frac{\pi}{3}\right)$$

7.6.12. Un punct material M execută o mișcare oscilatorie armonică pe o axă, având centrul C de vibrație de abscisă: $x_c = 0,1[\text{m}]$. În momentul inițial $t=0$ punctul M trece prin origine cu viteza $1[\text{m/s}]$. Să se determine: legile de mișcare, perioada și amplitudinea dacă frecvența oscilațiilor este $f=5/\pi[\text{Hz}]$.

Rezolvare: Legea mișcării este de forma:

$x = 0,1 + x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ unde $\omega = 2\pi f = 10[\text{rad/s}]$ iar x_0 și φ le vom determina din condițiile: $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=1$ care devin:

$$x_0 \cos \varphi = -0,1, \quad x_0 \sin \varphi = -0,1.$$

Din acest sistem, rezultă $x_0 = \frac{1}{10}\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ deci legea mișcării are forma:

$$x = 0,1 + 0,142 \cos\left(10t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

Perioada este $T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{5}$ iar amplitudinea $A = \frac{0,242 + 0,042}{2} = 0,142[\text{m}]$

7.6.13. Un punct material execută o mișcare vibratorie amortizată de-a lungul axei Ox. Constanta de timp este $\tau = 5[\text{s}]$ și decrementul logaritm $\delta = 0,4$. În momentul inițial $t=0$ punctul trece prin origine cu viteza $v=2[\text{m/s}]$. Se cer:

a) Legea de mișcare

b) Curbele exponențiale tangente diagramei mișcării.

Rezolvare:

Legea mișcării amortizate are forma:

$$x = x_0 e^{-ht} \cos(pt + \varphi) \quad \text{unde } h = \frac{1}{\tau} = 0,2[\text{s}^{-1}] \text{ iar pseudopulsatia } p \text{ este dată de}$$

relația $p = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi h}{\delta} = \pi$. Constantele x_0 și φ le determinăm din condițiile inițiale: $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=2$:

$$x_0 \cos \varphi = 0, \quad x_0 (h \cos \varphi + p \sin \varphi) = -2 \quad \text{rezultă: } x_0 = \frac{2}{\pi}, \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ și}$$

deci legea de mișcare a punctului este:

$$x = \frac{2}{\pi} e^{-0,2t} \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Curbele exponențiale tangente diagramelor mișcării au formele:

$$x = \pm \frac{2}{\pi} e^{-0,2t} \text{ și sunt tangente în punctele de abscise:}$$

$$t_k = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

7.6.14. Un punct M_1 parcurge un drum rectiliniu (Δ) cu viteza constantă v_1 . Punctul M_2 se află în momentul inițial pe dreapta Ox , perpendiculară pe (Δ) iar punctul M_1 în O (fig 7.48). Punctul M_2 se deplasează cu viteza constantă v_2 în direcția punctului M_1 . Să se determine traiectoria punctului M_2 și să se cerceteze dacă cele două traiectorii se pot întâlni.

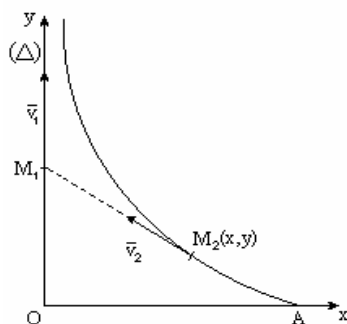


Fig. 7.48

Rezolvare: Alegem axa Oy după direcția axei (Δ) . Legea de mișcare a punctului M_1 este $OM_1 = v_1 t$ iar a punctului M_2 este $y = y(x)$ (necunoscută). Deoarece viteza punctului M_2 este tangentă la traiectoria acestuia, coeficientul unghiular al tangentei M_1M_2 se scrie sub forma:

$$\frac{y - v_1 t}{x} = \frac{dy}{dx} \text{ relație care se mai scrie}$$

astfel:

$$x \frac{dy}{dx} = y - v_1 t \quad (a)$$

Prin derivarea relației (a) în raport cu x rezultă:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = -v_1 \frac{dt}{dx} \quad (b)$$

Din relația:

$$v_2 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\right)^2} = \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

rezultă:

$$\dot{x} = \frac{-v_2}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} \quad (c)$$

Din relațiile (b) și (c) obținem:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{v_1}{v_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (d)$$

În ecuația (d), notăm $\frac{dy}{dx} = u$ și $\frac{v_1}{v_2} = k$ (constantă), astfel că ea se mai scrie:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = k \frac{dx}{x} \quad (e)$$

În momentul inițial, $t=0$, $x=a$, $dy/dx = \tan \pi$ și deci $u=0$, astfel că prin integrarea ecuației diferențiale (e), obținem: $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = k \ln x - k \ln a$, relație din care deducem:

$$u + \sqrt{1+u^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^k \quad (f)$$

Înmulțim relația (f) cu -1 și obținem:

$$\sqrt{1+u^2} - u = \left(\frac{x}{a}\right)^{-k} \quad (g)$$

Din scăderea relațiilor (f) și (g), obținem:

$$\frac{dy}{dx} = u = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^k - \left(\frac{x}{a}\right)^{-k} \right] \quad (h)$$

Pentru $k=1$ ($v_1=v_2$) integrând ecuația (h), obținem traiectoria punctului M_2 :

$$y(x) = \frac{x^2 - a^2}{4a} - \frac{a}{2} \ln \frac{x}{a}. \text{ Pentru } x=0, y \text{ devine infinit, axa } Oy \text{ este}$$

asimptotă, deci cele două puncte M_1 și M_2 nu se pot întâlni în acest caz.

Pentru $k \neq 1$, din ecuația (h) prin integrare, deducem:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)a^k} + x^{1-k} \frac{a^k}{k-1} \right] - \frac{ka}{k^2-1}$$

În cazul $k>1$, din nou axa Oy este asimptotă, iar M_1 și M_2 nu se întâlnesc. În cazul $k<1$, $x=0$ implică $y=ka/(1-k^2)$, deci cele două traiectorii se pot întâlni.

7.6.15. Punctul M descrie curba $ABCD$, formată din arcul de cerc AB de rază $2R$ și unghi la centru θ , segmentul de dreaptă BC de lungime $6R\theta$ și arcul de cerc CD de rază R și unghi la centru 2θ (fig 7.49). Punctul execută o mișcare uniform

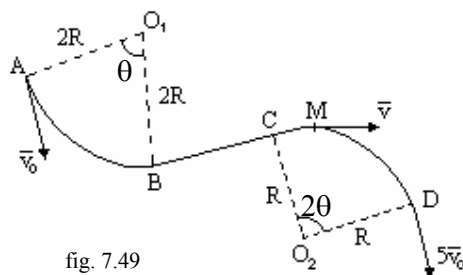


fig. 7.49

accelerată, în momentul inițial viteza este v_0 iar în D ajunge cu viteza $5v_0$. Să se determine legea de mișcare, viteza și accelerația punctului M .

Rezolvare: Notăm lungimea arcului de curbă $AM=s$. Mișcarea fiind uniform accelerată avem:

$$\ddot{s} = C_1 \quad (C_1 = \text{constanta} > 0) \quad (a)$$

Prin integrarea ecuației (a) obținem viteza punctului:

$$v = \dot{s} = C_1 t + C_2 \quad (b)$$

și apoi legea de mișcare:

$$s = \frac{1}{2} C_1 t^2 + C_2 t + C_3 \quad (c)$$

Condițiile inițiale sunt:

$$t=0, s=0, \dot{s}=0$$

astfel că rezultă: $C_2=v_0$, $C_3=0$, iar relațiile (c) și (b) devin respectiv:

$$s = \frac{1}{2} C_1 t^2 + v_0 t \quad (d)$$

$$v = \dot{s} = C_1 t + v_0 \quad (e)$$

În punctul D, pentru $t=t_D$ (deocamdată necunoscut), se poate scrie:

$$5v_0 = C_1 t_D + v_0, \quad 10R\theta = \frac{1}{2} C_1 t_D^2 + v_0 t_D, \text{ unde } 10R\theta \text{ este lungimea drumului}$$

ABCD. Din sistemul de mai sus rezultă:

$$t_D = \frac{4R\theta}{v_0}; C_1 = \frac{v_0^2}{R\theta} \quad (f)$$

Expresiile (d) și (e) cu ajutorul relației (f) devin:

$$s = \frac{v_0^2 t^2}{2R\theta} + v_0 t, \quad v = \frac{v_0^2}{R\theta} t + v_0$$

Componenta tangentială a accelerației pentru arcele de cerc AB și CD și în același timp accelerația pe segmentul BC este dată de formula: $a_\tau = \dot{v} = \frac{v_0^2}{R\theta}$. Expresia

componentei normale a accelerației pentru arcul AB este: $a_n = \frac{v^2}{2R} = \frac{v_0^2}{2R^3\theta^2} (v_0 t + R\theta)^2$

iar pentru arcul CD este: $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R^2\theta^2} (v_0 t + R\theta)^2$.

8. CINEMATICA CORPULUI RIGID

8.1. Elementele generale ale mișcării corpului rigid

8.1.1 Problemele cinematicii corpului rigid

Corpul rigid este un element important în tehnică și semnifică un corp material în formă fixă, compus din particule elementare pentru care distanța dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică în timp și în spațiu.

Experiența arată că modelele abstracte de punct material și corp rigid reflectă anumite proprietăți reale ale corpurilor, ceea ce justifică folosirea acestora.

Conceptul de corp rigid are avantajul de a simplifica studiul mișcării corpului în sensul adoptării unui număr finit de parametri care să definească poziția corpului în mișcare, cu toate că un corp rigid este format dintr-un număr infinit de puncte.

Mișcarea unui corp față de un sistem de referință este cunoscută, dacă se pot determina legile de mișcare, traiectoria, viteza și accelerația fiecărui punct din corp. Prin legile de mișcare ale unui corp rigid se înțeleg funcțiile scalare de timp care determină în orice moment al mișcării, poziția corpului față de un reper. Practic nu este posibil să se descrie mișcarea rigidului prin mișcarea fiecărui punct, dar este suficient să fie cunoscut în fiecare moment al mișcării, numai pozițiile unor puncte din care, pe baza păstrării distanțelor dintre puncte se vor determina pozițiile celorlalte puncte din rigid. Numărul minim al funcțiilor scalare independente care determină poziția corpului în orice moment reprezintă numărul gradelor de libertate ale corpului. Funcțiile scalare care determină mișcarea corpului sunt elemente geometrice (distanțe, unghiuri), funcții de timp. Alegerea acestor elemente depinde de condițiile în care corpul execută mișcarea, de natura legăturilor, etc. Legăturile la care este supus un corp (sau sistem de corpuri) micșorează numărul gradelor de libertate.

Obiectul prezentului capitol este constituit din următoarele două probleme:

- 1) fiind date legile de mișcare ale corpului rigid, se caută legile de mișcare, traiectoriile, vitezele și accelerațiile punctelor rigidului.
- 2) fiind date mișcările unor puncte ale corpului, vom căuta să determinăm legile de mișcare pentru corp, adică a oricărui puncte din corp.

8.1.2. Legile de mișcare

În acest capitol, studiul mișcării unui corp rigid se face studiind mișcarea unui sistem de axe mobil, legat de corpul în mișcare, față de un sistem de referință fix.

Poziția unui corp rigid față de un anumit reper din spațiul Euclidian tridimensional R^3 este cunoscută dacă se cunosc pozițiile a trei puncte necoliniare din rigid.

Considerăm sistemul de axe fixe $O_1x_1y_1z_1$ și sistemul de axe mobile $Oxyz$ invariabil legat de corpul în mișcare. Față de reperul fix considerăm trei puncte necoliniare A, B și C. Poziția oricărui alt punct M din rigid este cunoscută deoarece distanțele AM, BM și MC sunt fixate. Poziția fiecărui punct, se știe că depinde de trei funcții scalare independente de timp, deci de trei parametri, astfel că pentru cele trei puncte A, B, C sunt necesari $3 \times 3 = 9$ parametri pe care îi vom considera coordonatele punctelor respective. Dar distanțele AB, BC și AC rămân nemodificate în cursul mișcării, astfel că putem scrie următoarele relații de legătură dintre aceste coordonate:

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = \text{const} \\
 BC^2 &= (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = \text{const} \\
 AC^2 &= (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = \text{const}
 \end{aligned} \quad (8.1)$$

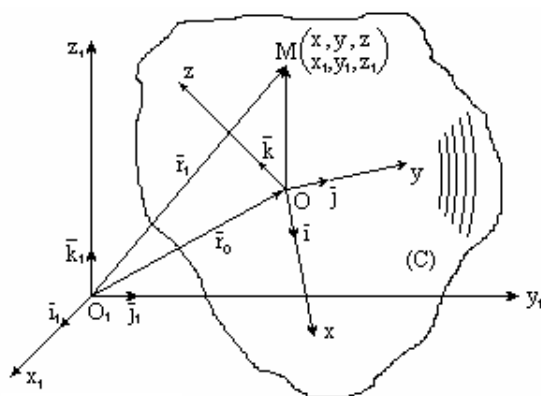


fig. 8.1

Urmează că din cei 9 parametri rămân $9-3=6$ parametri independenți de unde rezultă că un corp rigid liber are 6 grade de libertate.

Originea reperului Oxyz legat de corpul în mișcare, o alegem într-un punct arbitrar O (fig. 8.1) Deoarece acest sistem se mișcă împreună cu corpul rigid (C) dar nu independent față de acesta, este suficient să studiem mișcarea sistemului mobil Oxyz în raport cu sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$. Determinarea

poziției corpului rigid revine la determinarea poziției sistemului Oxyz față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$.

Originea sistemului mobil O este determinată prin cunoașterea vectorului său de poziție pe care îl raportăm la reperul fix:

$$\vec{r}_0 = \vec{O_1O} = x_0 \vec{i}_1 + y_0 \vec{j}_1 + z_0 \vec{k}_1 \quad (8.2)$$

ceea ce conduce la cunoașterea funcțiilor scalare de timp:

$$x_0 = x_0(t); \quad y_0 = y_0(t); \quad z_0 = z_0(t); \quad (8.3)$$

Funcția vectorială $\vec{r}_0(t)$ este o funcție de timp continuă, uniformă și derivabilă de cel puțin două ori.

Versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt la rândul lor funcții de timp, deoarece își schimbă poziția în timp odată cu axele pe care le caracterizează. Se știe că orice vector funcție de timp se exprimă cu ajutorul a trei funcții scalare de timp, de exemplu proiecțiile sale pe un anumit sistem de axe. Deci pentru cei trei versori mobili sunt necesare $3 \times 3 = 9$ funcții scalare de timp. Dar aceste funcții nu sunt independente, deoarece se pot scrie 6 relații specifice din condițiile ca vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ să fie ortonormați:

$$\vec{i}^2 = 1; \quad \vec{j}^2 = 1; \quad \vec{k}^2 = 1 \quad (8.4)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0; \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (8.5)$$

Rezultă că pentru determinarea direcțiilor axelor sistemului de referință mobil, sunt necesari trei parametri de poziție independenți. Deci numărul funcțiilor de

timp scalare independente ce determina poziția sistemului de referință mobil este 6, adică egal chiar cu numărul gradelor de libertate ale corpului rigid liber.

Pentru a stabili legea de mișcare a unui punct arbitrar M din corp, considerăm următorii vectori: vectorul de poziție al punctului M față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$:

$$\vec{r}_1 = \vec{O_1M} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \quad (8.6)$$

unde coordonatele x_1, y_1, z_1 ale punctului M sunt funcții de timp necunoscute. Vectorul de poziție al punctului M față de reperul mobil este:

$$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (8.7)$$

la care direcția este variabilă dar modulul constant, deoarece distanța dintre punctele O și M nu se modifică, conform ipotezei rigidității corpului:

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \text{constant} \quad (8.8)$$

Între vectorii $\vec{r}_1, \vec{r}_0, \vec{r}$ există relația de legătură (fig 8.1):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (8.9)$$

ceea ce reprezintă legea de mișcare a punctului M sub formă vectorială.

Ecuția (8.9) proiectată pe axele sistemului de referință duce la următoarele relații scalare:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x \cos(\vec{i}, \vec{i}_1) + y \cos(\vec{j}, \vec{i}_1) + z \cos(\vec{k}, \vec{i}_1) \\ y_1 &= y_0 + x \cos(\vec{i}, \vec{j}_1) + y \cos(\vec{j}, \vec{j}_1) + z \cos(\vec{k}, \vec{j}_1) \\ z_1 &= z_0 + x \cos(\vec{i}, \vec{k}_1) + y \cos(\vec{j}, \vec{k}_1) + z \cos(\vec{k}, \vec{k}_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Ecuțiile (8.10) reprezintă legea de mișcare a punctului M în raport cu sistemul de referință fix (legea de mișcare absolută), sau ecuațiile parametrice ale traiectoriei punctului M față de sistemul de referință fix.

8.1.3 Derivata absolută și relativă a unei funcții vectoriale de timp

Fie $O_1x_1y_1z_1$ și $Oxyz$ două sisteme de referință triortogonale drepte, primul fix iar al doilea mobil, având versorii $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ respectiv $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (fig. 8.1) și un vector $\vec{u}(t)$ variabil. Notăm vectorul $\vec{u}(t)$ raportat la sistemul de referință fix astfel:

$$\vec{u} = u_{x_1}\vec{i}_1 + u_{y_1}\vec{j}_1 + u_{z_1}\vec{k}_1 \quad (8.11)$$

Față de sistemul de referință mobil, vectorul $\vec{u}(t)$ se scrie sub forma:

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \quad (8.12)$$

Derivata în raport cu timpul a funcției vectoriale $\vec{u}(t)$ raportată la sistemul de referință fix se numește *derivată absolută* și se notează

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} = \dot{u}_{x_1}\vec{i}_1 + \dot{u}_{y_1}\vec{j}_1 + \dot{u}_{z_1}\vec{k}_1 \quad (8.13)$$

Derivata în raport cu timpul a funcției vectoriale (8.12) este:

$$\dot{\bar{u}} = \dot{u}_x \bar{i} + \dot{u}_y \bar{j} + \dot{u}_z \bar{k} + u_x \dot{\bar{i}} + u_y \dot{\bar{j}} + u_z \dot{\bar{k}} \quad (8.14)$$

Prin analogie cu derivată absolută (8.13) a vectorului (8.11) definim derivată relativă față de sistemul mobil în raport cu timpul a funcției vectoriale \bar{u} și se notează cu $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, vectorul

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \dot{u}_x \bar{i} + \dot{u}_y \bar{j} + \dot{u}_z \bar{k} \quad (8.15)$$

O astfel de derivată mai este numită și derivată locală. Din relațiile (8.13), (8.14) și (8.15) deducem:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u_x \dot{\bar{i}} + u_y \dot{\bar{j}} + u_z \dot{\bar{k}} \quad (8.16)$$

Pentru a calcula derivata în raport cu timpul a versorilor axelor mobile, vom deriva relațiile de ortonormalitate (8.4) și (8.5) în raport cu timpul și obținem:

$$\dot{\bar{i}} \cdot \dot{\bar{i}} = 0; \quad \dot{\bar{j}} \cdot \dot{\bar{j}} = 0; \quad \dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{k}} = 0 \quad (8.17)$$

$$\dot{\bar{i}} \cdot \dot{\bar{j}} + \dot{\bar{i}} \cdot \dot{\bar{k}} = 0; \quad \dot{\bar{j}} \cdot \dot{\bar{k}} + \dot{\bar{j}} \cdot \dot{\bar{i}} = 0; \quad \dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{i}} + \dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{j}} = 0 \quad (8.18)$$

Prin convenție considerăm vectorul viteză unghiulară prin proiecțiile sale pe axele reperului mobil, obținute din relațiile (8.18)

$$\dot{\bar{i}} \cdot \dot{\bar{j}} = -\dot{\bar{i}} \cdot \dot{\bar{k}} = \omega_z; \quad \dot{\bar{j}} \cdot \dot{\bar{k}} = -\dot{\bar{j}} \cdot \dot{\bar{i}} = \omega_x; \quad \dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{i}} = -\dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{j}} = \omega_y \quad (8.19)$$

Pentru calculul vectorilor $\dot{\bar{i}}, \dot{\bar{j}}, \dot{\bar{k}}$, considerăm un vector oarecare care se scrie astfel:

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} = (\bar{V} \cdot \bar{i}) \bar{i} + (\bar{V} \cdot \bar{j}) \bar{j} + (\bar{V} \cdot \bar{k}) \bar{k} \quad (8.20)$$

Punem în locul vectorului \bar{V} pe rând vectorii $\dot{\bar{i}}, \dot{\bar{j}}, \dot{\bar{k}}$ și ținem seama de notațiile (8.19):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i}) \bar{i} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j}) \bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k}) \bar{k} = \omega_z \bar{j} - \omega_y \bar{k} = \bar{\omega} \times \bar{i} \\ \dot{\bar{j}} &= (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i}) \bar{i} + (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{j}) \bar{j} + (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k}) \bar{k} = -\omega_z \bar{i} + \omega_x \bar{k} = \bar{\omega} \times \bar{j} \\ \dot{\bar{k}} &= (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i}) \bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j}) \bar{j} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{k}) \bar{k} = \omega_y \bar{j} - \omega_x \bar{i} = \bar{\omega} \times \bar{k} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Relațiile (8.21) se numesc relațiile lui Poisson. Ultimul termen al relației (8.16), ținând seama de relațiile lui Poisson, se mai scrie:

$$\begin{aligned} u_x \dot{\bar{i}} + u_y \dot{\bar{j}} + u_z \dot{\bar{k}} &= u_x \bar{\omega} \times \bar{i} + u_y \bar{\omega} \times \bar{j} + u_z \bar{\omega} \times \bar{k} = \\ &= \bar{\omega} \times (u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{u} \end{aligned} \quad (8.22)$$

În acest fel relația (8.16) devine:

$$\dot{\bar{u}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{u} \quad (8.23)$$

Prin urmare derivate absolută a unui vector \bar{u} variabil care este raportat la sistemul de referință mobil, se scrie cu ajutorul derivatei relative $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ și a vectorului $\bar{\omega}$ determinat cu versorii axelor mobile.

Observații:

1) Dacă vectorul \bar{u} este invariabil față de reperul mobil, relația de legătură (8.23) devine:

$$\dot{\bar{u}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{\omega} \times \bar{u} \quad (8.24)$$

2) Dacă în particular $\bar{u} = \bar{\omega}$ (vectorul viteză unghiulară), obținem:

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k} \quad (8.25)$$

unde vectorul $\bar{\varepsilon}$ se numește accelerație unghiulară a sistemului de referință mobil. Derivata absolută a vectorului viteză unghiulară $\bar{\omega}$ este egală cu derivata sa relativă. Din relația (8.29) rezultă că orice vector paralel cu $\bar{\omega}$ are derivata absolută egală cu derivata relativă.

Proiecțiile vectorului accelerație unghiulară $\bar{\varepsilon}$ pe axele sistemului de referință mobil sunt:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z; \quad (8.26)$$

iar pe axele sistemului de referință fix sunt:

$$\varepsilon_{x1} = \dot{\omega}_{x1}; \quad \varepsilon_{y1} = \dot{\omega}_{y1}; \quad \varepsilon_{z1} = \dot{\omega}_{z1}. \quad (8.27)$$

8.1.4. Distribuția de viteze și accelerații în mișcarea corpului rigid

Viteza unui punct M la un moment dat, este derivata absolută în raport cu timpul a vectorului de poziție în raport cu reperul fix dat de formula (8.9):

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}} \quad (8.28)$$

unde

$$\dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0 = \dot{x}_0 \bar{i}_1 + \dot{y}_0 \bar{j}_1 + \dot{z}_0 \bar{k}_1 = v_{ox} \bar{i} + v_{oy} \bar{j} + v_{oz} \bar{k} \quad (8.29)$$

este viteza originii O iar ținând seama de relația (8.24) avem:

$$\dot{\bar{r}} = x \dot{\bar{i}} + y \dot{\bar{j}} + z \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (8.30)$$

În acest fel formula (8.28) devine:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (8.31)$$

unde $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară de rotație a sistemului mobil, definit de relațiile (8.19).

Formula (8.31) se numește *formulă generală a distribuției de viteze* și cu ajutorul acesteia se efectuează distribuția de viteze a punctelor rigidului la un moment dat al mișcării sale.

Viteza unui punct arbitrar M al rigidului se exprimă cu ajutorul parametrilor cinematici ai corpului care sunt: \bar{v}_0 (viteza unui punct particular din rigid) și $\bar{\omega}$ (viteza unghiulară instantanee a corpului).

Proiecțiile pe axele mobile ale vitezei \bar{v} se obțin din relația (8.31):

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + z\omega_y - y\omega_z \\ v_y &= v_{0y} + x\omega_z - z\omega_x \\ v_z &= v_{0z} + y\omega_x - x\omega_y \end{aligned} \quad (8.32)$$

Formula (8.31) se mai numește și formula lui Euler pentru distribuția de viteze în mișcarea corpului rigid.

Prin derivare în raport cu timpul, obținem:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k} = \bar{\varepsilon}_x \bar{i} + \bar{\varepsilon}_y \bar{j} + \bar{\varepsilon}_z \bar{k} \quad (8.33)$$

Din relația (8.31), derivând în raport cu timpul obținem:

$$\dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} \quad (8.34)$$

Accelerația punctului arbitrar M la un moment dat este $\bar{a} = \dot{\bar{v}}$, astfel ca ținând seama de relația (8.30), formula (8.34) devine:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (8.35)$$

unde:

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 = \ddot{x}_0 \bar{i}_1 + \ddot{y}_0 \bar{j}_1 + \ddot{z}_0 \bar{k}_1 \quad (8.36)$$

este accelerația originii reperului mobil O față de reperul fix.

Formula (8.35) se numește *formula generală a distribuției de accelerații în mișcarea punctelor unui corp rigid*. Această formulă se aplică pentru a determina accelerația unui punct arbitrar M, dacă se cunosc vectorii: \bar{a}_0 – accelerația punctului de referință O din corp, $\bar{\omega}$ – viteza unghiulară și $\bar{\varepsilon}$ – accelerația unghiulară a corpului rigid.

Proiecțiile accelerației \bar{a} pe axele sistemului mobil sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{0x} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z)y + (\omega_x\omega_y + \dot{\omega}_z)z \\ a_y &= a_{0y} + (\omega_x\omega_y + \dot{\omega}_z)x - (\omega_x^2 + \omega_z^2)y + (\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x)z \\ a_z &= a_{0z} + (\omega_x\omega_z - \dot{\omega}_y)x + (\omega_y\omega_z + \dot{\omega}_x)y - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z \end{aligned} \quad (8.37)$$

Relația (8.35) se mai numește formula lui Euler pentru distribuția de accelerații într-un corp rigid.

8.1.5 Proprietăți generale ale distribuției de viteze

Folosind formula generală a distribuției de viteze (8.31), putem deduce unele proprietăți importante privind distribuția de viteze din care vom prezenta în cele ce urmează câteva:

a) Vectorul $\bar{\omega}$ este același în orice punct al rigidului. Într-adevăr considerăm trei puncte necoliniare O, A, B din rigid. Din ipoteza de rigiditate a corpului rigid,

modulele vectorilor \overline{OA} și \overline{OB} , precum și unghiul AOB sunt constante în timpul mișcării, astfel că:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = OA \cdot OB \cos(\overset{\frown}{AOB}) = \text{constant} \quad (8.38)$$

Presupunem că punctului A îi corespunde viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$ iar punctului B îi corespunde viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$, astfel că putem scrie, ținând seama că vectorii \overline{OA} și \overline{OB} sunt invariabili față de sistemul de referință mobil:

$$\dot{\overline{OA}} = \overline{\omega}_1 \times \overline{OA}; \quad \dot{\overline{OB}} = \overline{\omega}_2 \times \overline{OB} \quad (8.39)$$

Derivând relația (8.38) în raport cu timpul, obținem relația:

$$\dot{\overline{OA}} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \dot{\overline{OB}} = 0 \quad (8.40)$$

Înlocuind expresiile (8.39) în relația (8.40), obținem:

$$(\overline{\omega}_1 \times \overline{OA}) \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot (\overline{\omega}_2 \times \overline{OB}) = 0$$

sau, ținând seama de proprietățile produsului mixt:

$$\overline{\omega}_1 \cdot (\overline{OA} \times \overline{OB}) - \overline{\omega}_2 \cdot (\overline{OA} \times \overline{OB}) = 0$$

respectiv

$$(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2) \cdot (\overline{OA} \times \overline{OB}) = 0 \quad (8.41)$$

Dar punctele O, A și B sunt arbitrare și necoliniare, astfel că $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2$

b) *Vectorul $\overline{\omega}$ nu depinde de alegerea originii sistemului de referință mobil.*

Presupunem că punctele O și O' sunt două origini pentru două sisteme mobile cărora le corespund vitezele unghiulare $\overline{\omega}$ respectiv $\overline{\omega}'$. Prin urmare, viteza unui punct arbitrar M din corpul rigid se scrie sub următoarele două forme:

$$\overline{v}_M = \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{OM} \quad (8.42)$$

$$\overline{v}_M = \overline{v}_{O'} + \overline{\omega}' \times \overline{O'M} \quad (8.43)$$

Dar viteza punctului O' se poate scrie față de originea O sub forma:

$$\overline{v}_{O'} = \overline{v}_O + \overline{\omega}' \times \overline{OO'} \quad (8.44)$$

Inlocuim relația (8.44) în (8.43) și rezultatul obținut în expresia (8.42) după care rezultă:

$$\overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{OO'} + \overline{\omega}' \times \overline{O'M} = \overline{v}_O + \overline{\omega} \times \overline{OM} \quad (8.45)$$

care se mai scrie:

$$\overline{\omega} \times (\overline{OO'} - \overline{OM}) + \overline{\omega}' \times \overline{O'M} = 0 \quad (8.46)$$

Folosind relația $\overline{OO'} - \overline{OM} = \overline{MO'} = -\overline{O'M}$ din formula (8.46), rezultă:

$$(\overline{\omega} - \overline{\omega}') \times \overline{O'M} = 0 \quad (8.47)$$

Cum punctul M a fost ales arbitrar, rezultă $\overline{\omega} = \overline{\omega}'$.

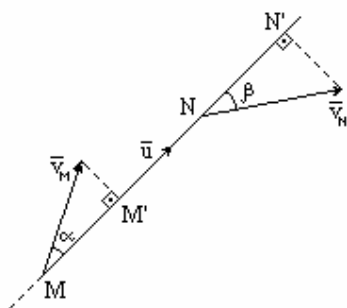


fig. 8.2

c) *Teorema proiecțiilor vitezelor.* Proiecțiile vitezelor a două puncte arbitrare ale unui rigid pe dreapta care le unește sunt egale și de același sens. Considerăm punctele M și N din rigid (fig 8.2.) și presupunem că punctul M este originea reperului mobil.

Rezultă:

$$\vec{v}_N = \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \overline{MN} \quad (8.48)$$

Înmulțim scalar relația (8.48) cu versorul $\vec{u} = \frac{\overline{MN}}{MN}$ de unde obținem:

$$\vec{v}_N \cdot \vec{u} = \vec{v}_M \cdot \vec{u} = \text{constant}$$

sau:

$$v_N \cos \beta = v_M \cos \alpha = \text{constant}$$

Această teoremă demonstrează cinematic rigiditatea unui corp solid: distanța dintre punctele M și N rămâne nemodificată, deoarece proiecțiile vitezelor după această direcție sunt egale.

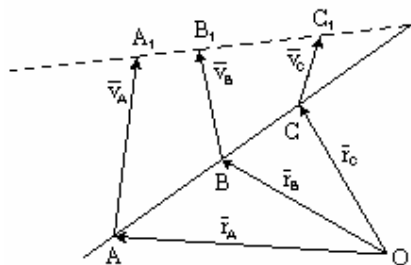


fig 8.3

d) *Teorema coliniarității extremității vectorilor viteză:* extremitățile vectorilor viteză a trei puncte coliniare din corpul rigid în mișcare sunt coliniare. Considerăm punctele coliniare A, B, C (fig 8.3) ceea ce vectorial înseamnă că există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\overline{AB} = \lambda \overline{AC} \quad (8.50)$$

Vitezele corespunzătoare celor trei puncte sunt respectiv:

$$\vec{v}_A = \overline{AA_1}; \vec{v}_B = \overline{BB_1}; \vec{v}_C = \overline{CC_1} \quad (8.51)$$

Cu ajutorul vectorilor de poziție $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ relația (8.50) se scrie sub forma:

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \lambda (\vec{r}_C - \vec{r}_A) \quad (8.52)$$

Prin derivarea relației (8.52) în raport cu timpul și ținând seama de relațiile:

$$\dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_A, \dot{\vec{r}}_B = \vec{v}_B, \dot{\vec{r}}_C = \vec{v}_C \quad (8.53)$$

precum și de notațiile (8.51), obținem:

$$\overline{BB_1} - \overline{AA_1} = \lambda (\overline{CC_1} - \overline{AA_1}) \quad (8.54)$$

Adunând relațiile (8.52) și (8.54), astfel că obținem:

$$\vec{r}_B + \overline{BB_1} - (\vec{r}_A + \overline{AA_1}) = \lambda [\vec{r}_C + \overline{CC_1} - (\vec{r}_A + \overline{AA_1})]$$

ceea ce implică:

$$\overline{OB_1} - \overline{OA_1} = \lambda (\overline{OC_1} - \overline{OA_1}) \quad (8.55)$$

sau:

$$\overline{A_1B_1} = \lambda \overline{A_1C_1} \quad (8.56)$$

relație ce înseamnă coliniaritatea punctelor A_1, B_1, C_1 .

e) Proiecțiile vitezelor punctelor unui rigid în mișcare pe suportul vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ sunt aceleași. Considerăm punctele M și N din rigid (fig 8.4), astfel că alegând punctul M ca origine a reperului mobil, putem scrie:

$$\vec{v}_N = \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{MN} \quad (8.57)$$

Înmulțim scalar relația (8.57) cu versorul $\vec{u}_1 = \vec{\omega} / \omega$ al vitezei unghiulare de unde obținem:

$$\vec{v}_N \cdot \vec{u}_1 = \vec{v}_M \cdot \vec{u}_1 = \text{constant sau:}$$

$$v_N \cos \beta = v_M \cos \alpha = \text{constant} \quad (8.58)$$

ceea ce demonstrează proprietatea.

f) Punctele unui rigid în mișcare, situate pe o dreaptă paralelă la suportul vectorului $\vec{\omega}$ au aceeași viteză.

Considerăm punctele M și N din rigid, situate pe o dreaptă (d) paralelă cu suportul lui $\vec{\omega}$ (fig 8.5). Se observă că putem scrie relația:

$$\vec{r}_N = \vec{r}_M + \vec{MN} = \vec{r}_M + \vec{MN} \frac{\vec{\omega}}{\omega} \quad (8.59)$$

Viteza punctului M este:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_M \quad (8.60)$$

iar a punctului N se scrie, ținând seama de relația (8.59):

$$\begin{aligned} \vec{v}_N &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_N = \\ &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_M + \frac{\vec{MN}}{\omega} \vec{\omega} \right) = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_M \end{aligned} \quad (8.61)$$

Se observă că cele două viteze sunt egale ca vectori.

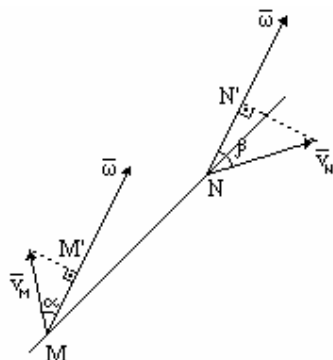


Fig. 8.4

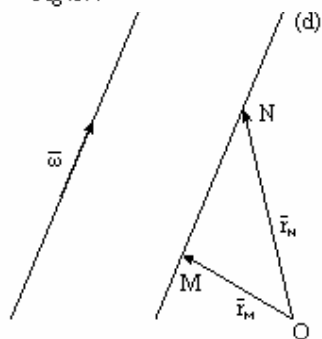


Fig. 8.5

Aplicatie Se consideră mișcarea paralelipipedului dreptunghic OABCDEFG cu dimensiunile : $OA=2a$, $OC=a$, $OE=3a$. Reperul mobil se alege ca în figura 8.6. Se cunosc : $\vec{v}_A = -2at\vec{j} - 4at\vec{k}$; $\vec{v}_B = at\vec{i} + \lambda\vec{j} - 3at\vec{k}$; $\vec{v}_D = 7at\vec{i} - 3at\vec{j} + \eta\vec{k}$ cu λ și η necunoscute. Să se determine:

- λ și η astfel ca problema astfel dată să fie posibilă;
- vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$;
- viteza punctului E.

Rezolvare:

a) Ținând seama de proprietatea c) a distribuției de viteze, trebuie ca proiecțiile lui \vec{v}_B și \vec{v}_A pe dreapta AB să fie aceleași.

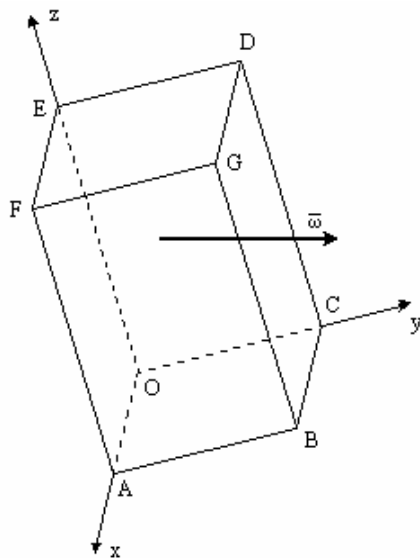


Fig. 8.6

necunoscută. Rezultă $\omega_y = 2t$. Celelalte două ecuații care rezultă din această relație sunt identic verificate, ceea ce confirmă că mișcarea are loc în condițiile date. Aceste două ecuații puteau fi folosite la determinarea necunoscutelor λ și η dacă nu foloseam teorema proiecțiilor la a).

c) Viteza punctului E se determină cu ajutorul formulei (8.31):

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overline{DE} \quad (8.66)$$

unde $\vec{\omega} = t \vec{i} + 2t \vec{j} - t \vec{k}$ l-am determinat la punctul b). Se obține:

$$\vec{v}_E = 6at \vec{i} - 3at \vec{j} \quad (8.67)$$

$$\vec{v}_B \cdot \frac{\overline{AB}}{AB} = \vec{v}_B \cdot \frac{\overline{AB}}{AB} \quad (8.62)$$

de unde rezultă: $\lambda = -2at$

De asemenea, proiecțiile lui \vec{v}_B și \vec{v}_A pe dreapta BD trebuie să fie aceleași:

$$\vec{v}_A \cdot \frac{\overline{BD}}{BD} = \vec{v}_D \cdot \frac{\overline{BD}}{BD} \quad (8.63)$$

Rezultă $\eta = at$.

b) Vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ îl vom determina din relațiile:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB} \quad (8.64)$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AD} \quad (8.65)$$

în care $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ este necunoscut.

Din relația vectorială (8.64), rezultă $\omega_y = -t$ și $\omega_x = t$. Din relația (8.65) rezultă trei ecuații cu o singură

8.1.6 Proprietățile generale ale distribuției de accelerații

În baza formulei generale a distribuției de accelerații ale punctelor unui corp rigid, dată de (8.35), se deduc următoarele proprietăți:

a) Formula generală a distribuției de accelerații (8.35) își păstrează aceeași formă, oricare ar fi punctul de referință ales în rigid.

Demonstrația rezultă imediat dacă ținem seama că dacă alegem două puncte de referință O și O' din rigid, vitezele unghiulare (deci și accelerațiile unghiulare) corespunzătoare sunt aceleași și în plus pentru un punct oarecare M din rigid, accelerația sa este:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \overline{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{OM}) \quad (8.68)$$

iar accelerația punctului O' este:

$$\bar{a}_{O'} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \overline{OO'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OO'}) \quad (8.69)$$

Scăzând membru cu membru relațiile (8.68) și (8.69) și ținând seama de relația $\overline{OM} - \overline{OO'} = \overline{O'M}$, obținem:

$$\bar{a}_M - \bar{a}_{O'} = \bar{\varepsilon} \times \overline{O'M} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{O'M}) \quad (8.70)$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunțată.

b) Componenta axipetă a accelerației unui punct din corpul rigid este perpendiculară pe vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ al rigidului și orientată spre suportul acestuia.

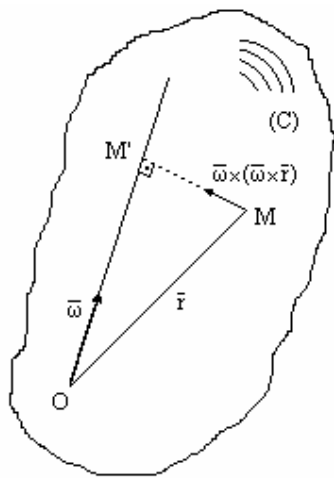


fig. 8.7

Fie M un punct oarecare din rigid, punctul O de referință pe suportul vectorului viteză unghiulară $\bar{\omega}$ și M' proiecția lui M pe suportul lui $\bar{\omega}$ (fig. 8.7). Rezultă:

$$\bar{r} = \overline{OM'} + \overline{M'M} = \lambda \bar{\omega} + \overline{M'M} \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (8.71)$$

Componenta axipetă se scrie folosind formula (8.71):

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) &= \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\lambda \bar{\omega} + \overline{M'M})) = \\ &= \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{M'M}) \end{aligned} \quad (8.72)$$

Prin dezvoltarea ultimului produs dublu vectorial din formula (8.72), obținem:

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{M'M}) = (\bar{\omega} \cdot \overline{M'M}) \bar{\omega} - \omega^2 \overline{M'M}$$

Dar $\bar{\omega} \cdot \overline{M'M} = 0$ și deci:

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -\omega^2 \overline{M'M} = \omega^2 \overline{MM'} \quad (8.73)$$

Se observă că mărimea componentei axipete este:

$$|\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})| = \omega^2 MM'$$

c) În mișcarea corpului rigid liber, la un moment dat există în general un singur punct de accelerație nulă și va fi numit *polul accelerațiilor*.

Într-adevăr, condițiile $a_x = a_y = a_z = 0$ introduse în relația (8.37) conduc la un sistem de ecuații algebrice liniare și neomogene cu necunoscutele x, y, z . Determinantul acestui sistem este:

$$\Delta = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2 \quad (8.74)$$

Dar vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ în general nu sunt coliniari, deci $\Delta \neq 0$, sistemul obținut are soluție unică, ceea ce confirmă faptul că la un moment dat al mișcării, există un unic punct de accelerație nulă.

8.2. Mișcarea generală a corpului rigid

Rigidul în mișcarea generală nu îi este impusă nici o restricție geometrică și în consecință are 6 grade de libertate. Vectorii \bar{v}_O și $\bar{\omega}$ sunt funcții arbitrare de timp,

nesupuși la vreo restricție din cauza inexistenței restricțiilor geometrice impuse mișcării. Deci aceștia se exprimă sub forma:

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j} + v_{0z} \vec{k} = \dot{x}_0 \vec{i}_1 + \dot{y}_0 \vec{j}_1 + \dot{z}_0 \vec{k}_1 \quad (8.75)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (8.76)$$

În mișcarea generală, vectorii \vec{v}_0 și \vec{a}_0 precum și $\vec{\omega}$ cu $\vec{\varepsilon}$, nu coincid în general:

$$\vec{a}_0 = a_{0x} \vec{i} + a_{0y} \vec{j} + a_{0z} \vec{k} \quad (8.77)$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k} \quad (8.78)$$

8.2.1. Studiul vitezelor

Se știe că proiecția vitezei \vec{v} a unui punct arbitrar al unui corp pe suportul vectorului $\vec{\omega}$ este aceeași. Folosind formula generală (8.31) a distribuției de viteze, vectorul \vec{u} construit cu ajutorul acestei proiecții se scrie:

$$\vec{u} = (\vec{v}_0 \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}) \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega} \quad (8.79)$$

Această viteză se numește viteză de lunecare. Dacă există în rigid un punct care să aibă viteza \vec{u} , atunci există o infinitate de astfel de puncte, situate pe o dreaptă paralelă cu vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ și trece prin punctul respectiv. Această dreaptă se numește axa instantanee de rototranslație. Punctele de pe axa instantanee de rototranslație au viteza de lunecare \vec{u} . Ne propunem să găsim condițiile de existență ale axei de rototranslație și ecuația ei analitică. Fie (Δ) această axa și un punct curent M pe axa al cărui vector de poziție este $\vec{r} = \vec{OM}$. Viteza punctului M este:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{u} \quad (8.80)$$

Pentru a determina vectorul \vec{r} din relația (8.80), înmulțim vectorial această relație la stânga cu vectorul $\vec{\omega}$ și ținem seama de proprietățile:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r} \quad (8.81)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (8.82)$$

astfel că se obține:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r} = 0 \quad (8.83)$$

De aici, notând $\lambda = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{r}}{\omega^2}$, rezultă:

$$\vec{r} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega} \quad (8.84)$$

Pentru $\lambda=0$ în expresia (8.84), vectorul $(\vec{\omega} \times \vec{v}_0)/\omega^2$ este perpendicular pe suportul lui $\vec{\omega}$ (deci și pe axa (Δ)), trece prin O , deci va reprezenta vectorul $\vec{OO'}$ unde prin O' am notat proiecția lui O pe axa (Δ) (fig 8.8)

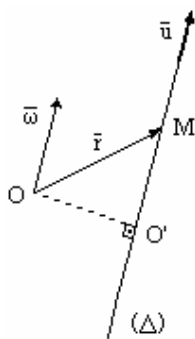


fig. 8.8

Rezultă că ecuația (8.84) reprezintă ecuația vectorială a axei instantanee de rototranslație și deci aceasta există dacă $\omega \neq 0$.

În timpul mișcării, axa (Δ) își schimbă poziția deoarece vectorii $\bar{\omega}$ și \bar{v}_0 depind de timp.

Față de un sistem de referință fix, ecuația vectorială a axei de rototranslație se scrie:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} + \lambda \bar{\omega} \quad (8.85)$$

și deci își schimbă poziția și față de reperul fix.

Pentru a scrie ecuația analitică a axei instantanee de rototranslație în raport cu reperul mobil, folosim condiția:

$$\bar{v} = \lambda' \bar{\omega}, \lambda' \in \mathbf{R} \quad (8.86)$$

ceea ce conduce la ecuațiile scalare:

$$\frac{v_x}{\omega_x} = \frac{v_y}{\omega_y} = \frac{v_z}{\omega_z} \quad (8.87)$$

sau ținând seama de relațiile (8.32):

$$\frac{v_{ox} + z\omega_y - y\omega_z}{\omega_x} = \frac{v_{oy} + x\omega_z - z\omega_x}{\omega_y} = \frac{v_{oz} + y\omega_x - x\omega_y}{\omega_z} \quad (8.88)$$

Față de sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$, ținând seama de relația $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$, ecuația axei instantanee de rototranslație

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_0 - (y_1 - y_0)\omega_{z_1} + (z_1 - z_0)\omega_{y_1}}{\omega_{x_1}} &= \frac{\dot{y}_0 - (z_1 - z_0)\omega_{x_1} + (x_1 - x_0)\omega_{z_1}}{\omega_{y_1}} = \\ &= \frac{\dot{z}_0 - (x_1 - x_0)\omega_{y_1} + (y_1 - y_0)\omega_{x_1}}{\omega_{z_1}} \end{aligned} \quad (8.89)$$

Pentru studiul distribuției de viteze, considerăm ca punct de referință, un punct oarecare P de pe axa instantanee de rototranslație, astfel că un punct current M aparținând rigidului are la un moment dat viteza:

$$\bar{v}_M = \bar{u} + \bar{\omega} \times \bar{PM} \quad (8.90)$$

Se poate considera că viteza punctului M din rigid are două componente: una este \bar{u} paralelă cu $\bar{\omega}$ (invariantă) și alta $\bar{\omega} \times \bar{PM}$ normală pe $\bar{\omega}$ (variabilă cu punctul). Punctele de pe axa instantanee de rototranslație care au viteza \bar{u} au proprietatea că viteza lor este minimă, componenta normală pe $\bar{\omega}$ fiind nulă. În acest mod, se poate stabili o analogie între axa instantanee de rototranslație și axa centrală din statică. De asemenea, la fel ca în statică, în cazul distribuției de viteze există doi invarianti: vectorul $\bar{\omega}$ și vectorul \bar{u} .

8.2.2. Axoidele mișcării generale a rigidului

Din ecuațiile vectoriale (8.84) și (8.85) ale axei instantanee de rototranslație, am văzut că aceasta își schimbă poziția în timp față de rigid, cât și față de sistemul de referință fix, ca urmare descrie două suprafețe riglate care au la un moment dat al mișcării ca generatoare comună, axa instantanee de rototranslație.

Locul geometric descris de axa instantanee de rototranslație față de sistemul de referință fix se numește axoidă fixă, iar față de sistemul de referință mobil se numește axoida mobilă.

Eliminând timpul între ecuațiile (8.88), se obține ecuația analitică a axoidei mobile, de forma $f(x,y,z)=0$, iar între ecuațiile (8.89), se obține ecuația analitică a axoidei fixe, de forma $g(x_1,y_1,z_1)=0$.

Axoidele mișcării generale a rigidului prezintă importanță deosebită pentru aplicații, deoarece mișcarea rigidului poate fi privită ca mișcare a axoidei mobile legată de rigid în raport cu axoida fixă.

Menționăm două dintre proprietățile acestor axoide:

a) Axoida fixă și axoida mobile sunt tangente, iar planul tangent conține axa instantanee de rototranslație (Δ) (fig 8.9).

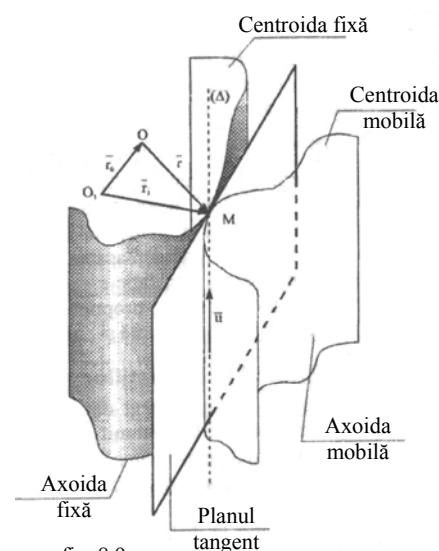


fig. 8.9

Într-adevăr, cele două axoide au ca generatoare comună axa (Δ) de rototranslație. Considerăm punctul arbitrar $M \in (\Delta)$. În timpul mișcării, punctul M descrie o curbă pe axoida fixă numită centroidă fixă, iar pe axoida mobilă o curbă numită centroidă mobilă. Vectorii viteze ai punctului M pe cele două centroide sunt tangente în acest punct la cele două curbe, deci planul tangent la fiecare axoidă va fi determinat de axa instantanee de rototranslație (Δ) și respectiv de fiecare tangentă pe cele două centroide.

Vectorii viteze la cele două centroide sunt respectiv:

$$\bar{v}_{1M} = \dot{\bar{r}}_1, \quad \bar{v}_{M} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \quad (8.91)$$

Între vectorii \bar{r} , \bar{r}_0 , \bar{r}_1 există relația:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} \quad (8.92)$$

Derivând relația (8.92) în raport cu timpul și ținând seama de relația (8.80) obținem:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{u} \quad (8.93)$$

astfel că:

$$\vec{v}_{1M} = \vec{v}_M + \vec{u} \quad (8.94)$$

Această ultimă relație, indică coplanaritatea vectorilor \vec{v}_{1M} , \vec{v}_M și \vec{u} ceea ce înseamnă că cele două plane tangente sunt confundate.

b) Axoïda mobilă se rostogolește peste axoïda fixă și alunecă după axa instantanee de rototranslație cu viteza de alunecare \vec{u} .

Pentru demonstrație înmulțim relația (8.94) cu timpul elementar dt și obținem:

$$\vec{v}_{1M} dt = \vec{v}_M dt + \vec{u} dt \quad (8.95)$$

Fiecare termen al relației (8.95) reprezintă deplasarea elementară a punctului M în timpul imediat următor dt din figura 8.9. Deplasarea elementară a punctului M pe centroida fixă este $\vec{v}_M dt$, pe centroida mobilă $\vec{v}_M dt$, iar deplasarea elementară a punctului M pe direcția axei instantanee de rototranslație, proprietatea se demonstrează analog astfel că această proprietate este adevărată și pentru cele două axoïde.

8.2.3 Studiul accelerațiilor

Am arătat că la un moment dat al mișcării, există un singur punct de accelerație nulă pe care l-am numit polul accelerațiilor, și se notează cu J .

În cazul în care vectorii viteze unghiulară și accelerație unghiulară sunt coliniari, este posibil să existe în corpul rigid puncte situate pe o dreaptă paralelă cu direcția comună a vectorilor $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$, numită axa instantanee de rototranslație relativ la distribuția de accelerații, care să aibă accelerația de valoare minimă. Accelerația comună a acestor puncte se numește accelerație de alunecare și trebuie să fie coliniară cu direcția comună a vectorilor $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$. Accelerația de alunecare se exprimă sub forma:

$$\vec{w} = \frac{\vec{a}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega} = \pm \frac{\vec{a}_0 \cdot \vec{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \vec{\varepsilon} \quad (8.96)$$

unde semnul “+” se ia când $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ au același sens și “-” în caz contrar.

Pentru a determina axa instantanee relativ la distribuția de accelerații (Δ'), deoarece direcția ei este cunoscută, este suficient să cunoaștem vectorul de poziție al unui punct de pe axă: $\vec{r}'_0 = \vec{OO'}$ unde O' este proiecția lui O pe axa căutată. Vectorul \vec{r}'_0 îl vom determina din condiția ca accelerația punctului O' să fie accelerație de alunecare:

$$\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_0 - \omega^2 \vec{r}'_0 = \frac{\vec{a}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega} \quad (8.97)$$

224 CAPITOLUL 2. CINEMATICA

Înmulțim relația (8.97) cu ω^2 și vectorial la stanga cu $\vec{\varepsilon}$, după care adunăm membru cu membru cele două noi ecuații astfel obținute, din care va rezulta:

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (8.98)$$

Se observă că vectorul \vec{r}_0 există, dacă cel puțin unul din vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ este nenul. Axa instantanee (Δ') există și este unic determinată în orice moment al mișcării rigidului astfel că ecuația sa vectorială se scrie sub forma:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{\omega} = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega}}{\varepsilon^2 + \omega^4} + \lambda \vec{\omega} \quad (8.99)$$

Dacă la un moment dat, vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega} = 0$ dar vectorul accelerație unghiulară $\vec{\varepsilon} \neq 0$, ecuația vectorială a axei (Δ') este de forma:

$$\vec{r} = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_0}{\varepsilon^2} + \lambda \vec{\omega} \quad (8.100)$$

Aplicație: Pentru aplicația de la 8.1.5 să se determine ecuația axei instantanee de rototranslație, viteza de lunecare și axa instantanee relativă la accelerații.

Rezolvare: În primul rând, vom determina viteza originii reperului mobil: $\vec{v}_0 = \vec{v}_A \times \vec{AO} = 0$. În raport cu reperul mobil, ecuația axei instantanee de rototranslație (Δ) este dată de relația (8.88) de unde rezultă intersecția planelor de ecuații $x+2y+5z=0$, $5x-2y+z=0$. Viteza de lunecare este dată de relația (8.79): $\vec{u} = (\vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} / \omega^2) \vec{\omega} = 0$. Cum $\vec{u} = 0$ iar axa instantanee este fixă, rezultă că rigidul are o mișcare de rotație cu axă fixă.

Axa (Δ') instantanee de rototranslație relativă la accelerații este dată de relația (8.99). Ecuația acesteia este intersecția planelor de ecuații: $2x=y$ și $x=-z$

8.3. Mișcarea de translație a corpului rigid

Un corp rigid are o mișcare de *translație*, dacă orice dreaptă din rigid, rămâne tot timpul mișcării paralelă cu ea însași. Translațiile pot fi:

- a) rectilinii: mișcarea unui piston în interiorul unui cilindru, mișcarea cabinei unui ascensor, mișcarea sertarului unei mese;
- b) circulare: mișcarea scaunului unui scrânciob, mișcarea bilei de cuplare a două roți cu axe fixă;
- c) alte tipuri de translații: translația cicloidă – la biela de cuplare a roților unei locomotive etc.

8.3.1. Legea de mișcare

Considerăm un sistem de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ și un corp (C) în mișcare de translație față de acesta (fig 8.10). Sistemul de referință Oxyz, legat de corpul

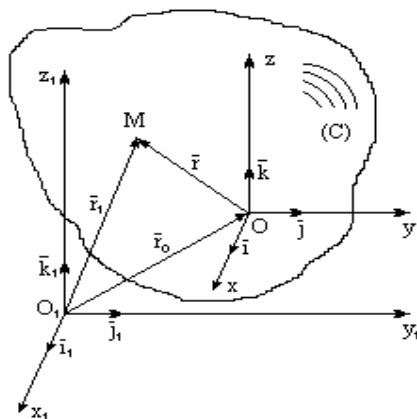


fig. 8.10

(C), originea fiind arbitrară într-un punct O, are o mișcare de translație ca și corpul (C). Cum orice dreaptă rămâne paralelă cu ea însăși pe tot timpul mișcării, deducem că și axele reperului mobil Ox, Oy, Oz rămân paralele cu ele însele. Vom alege prin urmare axele sistemului mobil astfel încât să rămână paralele cu axele reperului fix, ceea ce conduce la concluzia că versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt constanți atât ca mărime cât și ca direcție.

Originea O a sistemului legat de corp este determinată de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ prin vectorul $\bar{r}_O = \bar{r}_O(t)$, ceea ce revine la cunoașterea funcțiilor scalare de

timp, care reprezintă legile de mișcare ale rigidului:

$$x_O = x_O(t), y_O = y_O(t), z_O = z_O(t) \quad (8.101)$$

Un corp rigid aflat în mișcare de translație are deci, maxim trei grade de libertate. Pentru translații particulare, numărul gradelor de libertate scade la două sau la unu.

Derivând versorii reperului mobil, obținem:

$$\dot{\bar{i}} = 0, \dot{\bar{j}} = 0, \dot{\bar{k}} = 0 \quad (8.102)$$

astfel că în mișcarea de translație:

$$\bar{\omega} = 0, \bar{\varepsilon} = 0 \quad (8.103)$$

Într-o mișcare de translație, traiectoriile diferitelor puncte ale rigidului (C) sunt identice, ele putând fi suprapuse printr-o translație geometrică. Acest fapt rezultă și din relația cunoscută:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_O + \bar{r} \quad (8.104)$$

În cazul translației, $\bar{r} = \overline{OM}$ este un vector constant și deci traiectoria punctului O coincide cu traiectoria punctului M (printr-o translație geometrică de vector \bar{r}). Ecuația (8.104) proiectată pe axele fixe, se mai scrie sub forma:

$$x_1 = x_O + x, y_1 = y_O + y, z_1 = z_O + z \quad (8.105)$$

unde $\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$

Prin eliminarea timpului între ecuațiile (8.105) se obțin ecuațiile traiectoriei punctului M în coordonate cartezene.

8.3.2. Distribuția de viteze

Prin aplicare formulei generale a distribuției vitezelor și ținând seama de relația (8.103), un punct oarecare din rigid are viteza:

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_O \quad (8.106)$$

Prin urmare, la un moment dat, toate punctele unui rigid în mișcare de translație au aceeași viteză. Proiecțiile pe axe ale vitezei unui punct M sunt:

$$v_x = \dot{x}_O; \quad v_y = \dot{y}_O; \quad v_z = \dot{z}_O \quad (8.107)$$

8.3.3. Distribuția de accelerații

Aplicând formula generală a distribuției de accelerații și ținând seama de relația (8.103), un punct oarecare din rigid are accelerația:

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_O \quad (8.108)$$

Deci, la un moment dat, în mișcarea de translație a rigidului, toate punctele sale au aceeași accelerație. Proiecțiile pe axe ale accelerației punctului M sunt:

$$a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z} \quad (8.109)$$

În concluzie, pentru studiul mișcării de translație a solidului rigid, este suficient să se studieze mișcarea unui singur punct convenabil ales din rigid.

Vectorii viteză și accelerație de translație sunt vectori liberi, aceeași în orice punct al rigidului.

Aplicatie: Două discuri de centre C_1 , respectiv C_2 , fiecare de rază R , se rostogolesc fără alunecare pe axa Ox . Bara AB este articulată pe cele două periferii (fig. 8.11). În momentul inițial AB se află pe axa Ox . Vitezele centrelor C_1 și C_2 sunt constante și egale cu v_O . Să se determine traiectoria, viteza și accelerația unui punct oarecare M de pe bară, la un moment dat. Să se determine viteza lui M când unghiul

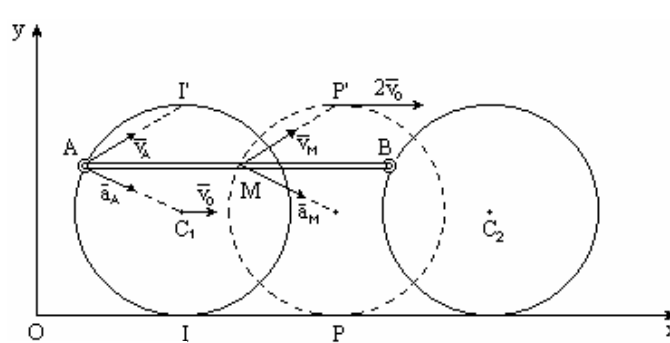


fig. 8.11

$$(\bar{v}_M, \bar{a}_M) = \text{maxim.}$$

Rezolvare: Este un exemplu de translație cicloidală, deoarece discurile au aceeași raza, iar mișcarea are loc fără alunecare. Traiectoria punctului M este un cerc de aceeași rază R cu cercurile date (cercul punctat în fig. 8.11).

Viteza punctului M coincide cu viteza punctului A : $\bar{v}_M = \bar{v}_A$. Notăm cu I punctul de intersecție dintre cercul de centru C_1 cu axa Ox , iar I' este punctul diametral opus lui I . Dar de la mișcarea pe cicloidă se știe că $v_A = \omega \cdot IA = v_O/R \cdot IA$, iar vectorul \bar{v}_A trece prin I' , astfel că $v_M = v_O/R \cdot IA$ și \bar{v}_M trece prin punctul P' diametral opus punctului P de intersecție a traiectoriei punctului m cu axa Ox . Pe de altă parte, $\bar{a}_M = \bar{a}_A$ iar \bar{a}_A

trece prin centrul C_1 ; $a_A = v_o^2/R = a_M$ iar \bar{a}_M trece prin centrul traiectoriei lui M. unghiul dintre viteză și accelerație este de maxim $\pi/2$, caz în care $M \equiv P'$. În acest caz: $v_M = v_{P'} = v_o/R \cdot 2R = 2v_o$.

8.4. Mișcarea de rotație cu axă fixă a corpului rigid

Un corp rigid are o mișcare de *rotație cu axă fixă*, dacă tot timpul mișcării, două puncte O_1 și O' aparținând corpului, rămân fixe față de un sistem de referință. Toate punctele situate pe dreapta care unește cele două puncte fixe, rămân de asemenea fixe. Această dreaptă se numește axă de rotație.

Exemple de rigide în mișcare de rotație cu axă fixă: mișcarea unui pendul, mișcarea volanților, mișcarea acelor unui ceasornic în raport cu cadranul etc.

8.4.1. Legea de mișcare

Pentru simplificarea studiului, originile celor două sisteme de referință se aleg

în același punct ($O_1 \equiv O$), iar axele Oz_1 și Oz să coincidă cu axa de rotație (Δ). Corpul (C) are punctele O_1 și O' fixe pe axa de rotație (Δ). Mișcarea corpului se raportează la sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$ presupus fix. Sistemul de referință mobil $Oxyz$ este fixat de corpul (C).

Poziția reperului mobil $Oxyz$ și deci a corpului, față de sistemul de axe fixe este definită de unghiul θ măsurat în planul fix $O_1x_1y_1$, dintre axele O_1x_1 și Ox (sau unghiul diedru al planelor $O_1x_1z_1$ și Oxz) (fig 8.12).

Ținând seama de faptul că $\bar{r}_O = \bar{O}_1\bar{O} = O$. Deducem că un corp rigid având o mișcare de rotație cu axă fixă, are un singur grad de libertate. Legea de mișcare a

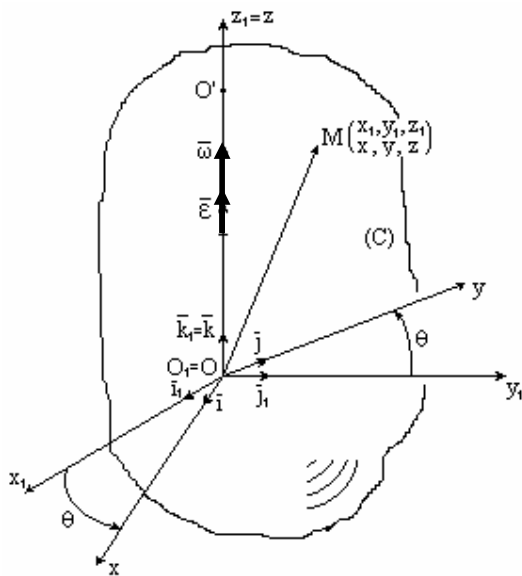


fig. 8.12

corpului (C) este dată de:

$$\theta = \theta(t)$$

(8.110)

După felul cum au fost definite cele două sisteme de axe, între versorii acestora (fig 8.12) se pot stabili următoarele relații:

$$\bar{i} = \cos\theta \bar{i}_1 + \sin\theta \bar{j}_1, \bar{j} = -\sin\theta \bar{i}_1 + \cos\theta \bar{j}_1, \bar{k} = \bar{k}_1 \quad (8.111)$$

Poziția unui punct arbitrar M din corpul (C) este dată prin vectorul de poziție

$$\bar{r}_1 = \bar{r} = \overline{OM} = x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1 = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} \quad (8.112)$$

Înlocuind versorii \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} dați de relațiile (8.111) în ultimul membru al relațiilor (8.112) și identificând coeficienții versorilor \bar{i}_1 , \bar{j}_1 , \bar{k}_1 , obținem legea de mișcare a punctului M din corp, care are coordonatele (x,y,z) față de sistemul legat de corp:

$$x_1 = x \cos\theta - y \sin\theta, y_1 = x \sin\theta + y \cos\theta, z_1 = z; \quad (8.113)$$

Prin eliminarea timpului care apare implicit în relațiile (8.113) prin intermediul lui $\theta = \theta(t)$, obținem traiectoria analitică a punctului M în coordonate carteziane:

$$x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = \text{constan } t, z_1 = z \quad (8.114)$$

Un punct arbitrar dintr-un rigid având o mișcare de rotație cu axă fixă, are o traiectorie circulară, situată într-un plan ($z_1 = z$) perpendicular pe axa de rotație, cu centrul pe axa de rotație și raza egală cu distanța de la punct la axa de rotație ($\sqrt{x^2 + y^2}$).

8.4.2. Distribuția de viteze

Deoarece punctul O este fix, fiind pe axa de rotație, rezultă $\bar{v}_O = 0$. Pentru calculul lui $\bar{\omega}$, vom deriva relațiile (8.111) în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= -\dot{\theta} \sin\theta \bar{i}_1 + \dot{\theta} \cos\theta \bar{j}_1 = \dot{\theta} \bar{j}, \dot{\bar{j}} = -\dot{\theta} \cos\theta \bar{i}_1 - \dot{\theta} \sin\theta \bar{j}_1 = -\dot{\theta} \bar{i} \\ \dot{\bar{k}} &= \dot{\bar{k}}_1 = 0 \end{aligned} \quad (8.115)$$

astfel că se obțin:

$$\omega_x = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = 0, \omega_y = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = 0, \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \quad (8.116)$$

și prin urmare

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k} = \dot{\theta} \bar{k} \quad (8.117)$$

Vectorul $\bar{\omega}$ are direcția axei de rotație, are ca mărime valoarea unghiului $\dot{\theta}$, fapt pentru care $\bar{\omega}$ se numește **vectorul viteză unghiulară** al mișcării de rotație cu axa fixă.

Folosind formula generală a distribuției de viteze și ținând seama că $\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$, obținem:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (8.118)$$

Proiecțiile vectorului viteză \bar{v} pe axele reperului mobil, sunt:

$$v_x = -\dot{\theta} y; \quad v_y = \dot{\theta} x; \quad v_z = 0 \quad (8.119)$$

iar mărimea acesteia:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |\dot{\theta}| \sqrt{x^2 + y^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2}$$

Din formulele (8.119) rezultă următoarele proprietăți ale distribuției de viteze în mișcarea de rotație cu axă fixă:

a) singurele puncte care au viteza nulă sunt cele pentru care $x=0, y=0$, deci punctele de pe axa de rotație.

b) punctele situate pe o axă (Δ) paralelă cu axa de rotație Oz a rigidului au vitezele aceleași, deoarece în expresiile proiecțiilor v_x, v_y, v_z nu apare cota z .

c) vitezele sunt conținute în plane normale pe axa de rotație Oz , deoarece $v_z=0$.

d) punctele corpului situate pe o dreaptă (Δ_1) perpendiculară pe axa de rotație Oz în P , au vitezele normale pe această dreaptă, iar modulele sunt proporționale cu distanța la axa de rotație. Acest lucru rezultă imediat considerând un punct oarecare $M \in (\Delta_1)$, astfel că $\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{PM}$. Dar \bar{v}_M este perpendiculară atât pe vectorul $\bar{\omega}$ (deci pe axa de rotație Oz), cât și pe vectorul \bar{PM} (deci pe axa Δ_1). Pe de altă parte, $v_M = \omega \cdot PM$ și deci viteza este proporțională cu distanța PM . Unghiul α format de dreapta (Δ_1) și dreapta ce unește extremitățile vitezelor este dat de relația

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_M}{PM} = \omega. \text{ Acest unghi este independent de}$$

punctul M , astfel că extremitățile vectorilor viteză sunt colineare.

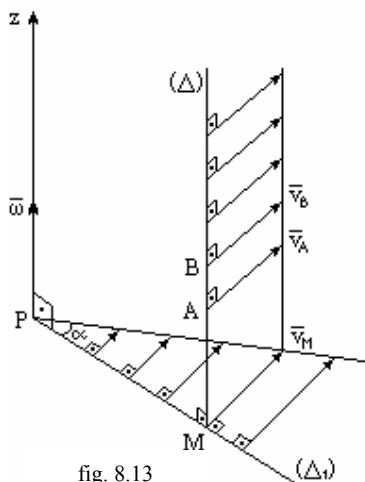


fig. 8.13

8.4.3. Distribuția de accelerații

Deoarece punctul O este fix, avem $\bar{a}_O=0$. Ținând cont de relația (8.117), vectorul **accelerație unghiulară** $\bar{\varepsilon}$ al mișcării de rotație cu axă fixă este

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta} \bar{k} = \varepsilon \bar{k} \quad (8.120)$$

Din formula generală a distribuției de accelerații, avem:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{w} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) \quad (8.121)$$

Înlocuind expresiile analitice ale vectorilor $\bar{\varepsilon}$, \bar{w} și \bar{r} relația (8.121) devine:

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -\dot{\theta}y & \dot{\theta}x & 0 \end{vmatrix} \quad (8.122)$$

de unde se determină proiecțiile pe axe ale reperului mobil ale accelerației:

$$a_x = -\dot{\theta}^2 x - \ddot{\theta} y = -\omega^2 x - \varepsilon_y, \quad a_y = \ddot{\theta} x - \dot{\theta}^2 y = \varepsilon x - \omega^2 y, \quad a_z = 0 \quad (8.123)$$

Mărimea accelerației punctului arbitrar M din rigid este:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (8.124)$$

În cazul mișcării de rotație cu axă fixă, accelerația are două componente: accelerația tangențială \bar{a}_τ , și accelerația normală \bar{a}_n care au respectiv expresiile:

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}; \quad \bar{a}_n = \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) \quad (8.125)$$

ale căror mărimi sunt date de relațiile:

$$a_\tau = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \varepsilon; \quad a_n = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \omega^2; \quad |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8.126)$$

Se deduce că accelerația unui punct oarecare M din corp se determină (ca și viteza de altfel) ca la mișcarea circulară a punctului pe un cerc de rază $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, cu centrul pe axa de rotație, planul cercului fiind perpendicular pe axa de rotație, iar viteza unghiulară și accelerația unghiulară sunt egale cu cele ale rigidului.

Din expresiile proiecțiilor accelerației pe axe (8.123), rezultă următoarele proprietăți ale distribuției de accelerații în mișcarea corpului cu axă fixă:

a) punctele care au accelerația nulă rezultă din sistemul:

$$-\omega^2 x - \varepsilon y = 0; \quad \varepsilon x - \omega^2 y = 0 \quad (8.127)$$

care este omogen cu determinantul $\varepsilon^2 + \omega^4 \neq 0$. Rezultă soluția unică $x=0, y=0$, astfel că singurele puncte care au accelerația nulă sunt cele de pe axa de rotație.

b) toate punctele situate pe o axă (Δ) paralelă cu axa de rotație Oz au aceleași accelerații, acest lucru rezultând din faptul că proiecțiile a_x, a_y, a_z nu depind de coordonata z.

c) Deoarece proiecția $a_z=0$, rezultă că accelerațiile sunt conținute în plane normale pe axa de rotație Oz.

d) pentru punctele de pe o dreaptă (Δ_1) care întâlnește axa de rotație sub un unghi drept, accelerațiile fac același unghi cu axa (Δ_1) și variază liniar cu distanța la axa de rotație. Acest lucru rezultă considerând (Δ_1) ca axă Oz și astfel că din relațiile (8.123) rezultă:

$$a_y = -\omega^2 x; \quad a_y = \varepsilon x; \quad a_z = 0 \quad (8.128)$$

iar mărimea accelerației devine:

$$a = x \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (8.129)$$

Pentru unghiul φ format de vectorul accelerație \bar{a}_M cu axa Ox rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (8.130)$$

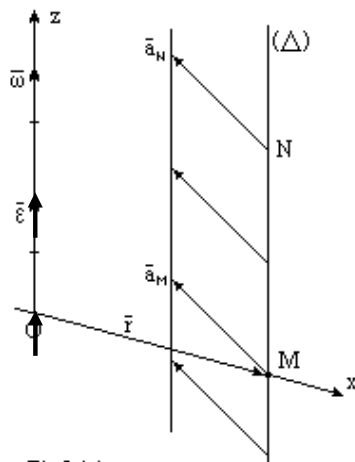


Fig 8.14

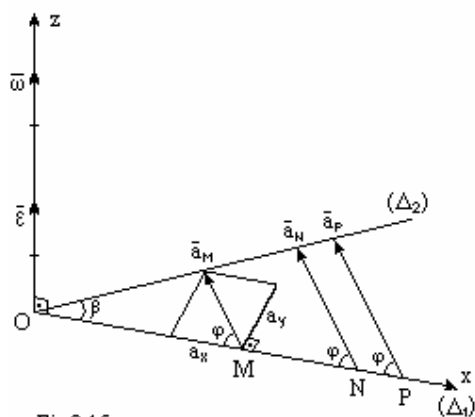


Fig 8.15

e) din proprietatea (d) se deduce că extremitățile accelerațiilor unor puncte coliniare (situate pe axa Ox), sunt situate pe o dreaptă (Δ_2) care face cu Ox unghiul β dat de relația.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{1 - \omega^2} \quad (8.131)$$

Proprietățile distribuției de accelerații sunt reprezentate grafic în figurile (8.14) și (8.15).

Observații

1. Dacă axa de rotație nu coincide cu nici una din axele sistemului de referință, vectorul viteză unghiulară are forma

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (8.132)$$

2. Dacă $\varepsilon=0$ și deci $\omega = \text{constant}$, mișcarea de rotație cu axă fixă a rigidului este uniformă. Dacă $\varepsilon \neq 0$, mișcarea se numește variată, iar dacă $\varepsilon = \text{constant}$, mișcarea este uniform variată. Dacă $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$ au același sens, mișcarea de rotație este accelerată, în caz contrar mișcarea este întârziată.

3. În unele situații este cunoscută turația n a unei mașini rotative (exprimată în rot/min). Între viteza unghiulară ω și turația n există relația $\omega = \pi n / 30$ în care ω se măsoară în rad/s.

Aplicație: Bara OA de lungime l are o mișcare de rotație cu axă fixă. Accelerația unui punct oarecare M de pe bară formează unghiul $\varphi = \omega_0 t$ cu bara. Să se

determine viteza și accelerația capătului A al barei. Viteza unghiulară inițială a barei este ω_0 (fig 8.16).

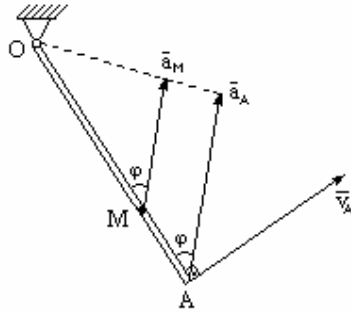


fig. 8.16

Rezolvare: Din datele problemei și din relația (8.130) rezultă:

$$\operatorname{tg} \omega_0 t = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \quad (8.133)$$

care se mai scrie:

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = \operatorname{tg} \omega_0 t dt$$

Prin integrarea acestei ecuații diferențiale, se obține:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} \ln |\cos \omega_0 t| + c \quad (8.134)$$

unde constanta c de integrare se determină din condițiile inițiale. La momentul $t=0$, $\omega=\omega_0$ și înlocuind, obținem $c = \frac{1}{\omega_0}$, astfel că rezultă:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\ln e |\cos \omega_0 t|} \quad (8.135)$$

Prin derivare în raport cu timpul, rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 \operatorname{tg} \omega_0 t}{\ln^2 e |\cos \omega_0 t|} \quad (8.136)$$

Viteza punctului A, $\vec{v}_A \perp \overline{OA}$ și $v_A = l\omega = \frac{l\omega_0}{\ln e |\cos \omega_0 t|}$

Accelerația punctului A care face același unghi $\varphi = \omega_0 t$ cu bara are mărime:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{l\omega_0^2}{\ln^2 e |\cos \omega_0 t|} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega_0 t} = \frac{l\omega_0^2}{|\cos \omega_0 t| \ln^2 e |\cos \omega_0 t|} \quad (8.137)$$

8.5 Mișcare de rototranslație a rigidului.

Un corp rigid are o mișcare de rototranslație dacă două puncte aparținând rigidului rămân tot timpul mișcării pe o dreaptă fixă din spațiu. Evident, toate punctele rigidului rămân situate pe dreapta formată de cele două puncte, vor avea mișcări rectilinii, dreaptă care se numește axă de rototranslație.

Exemple de mișcări de rototranslație sunt mișcarea unui șurub față de piuliță, mișcarea unui glonte în interiorul țevii armei, mișcarea unui burghiu, mișcarea unui corp pe verticală rotindu-se în același timp în jurul axei verticale, etc.

8.5.1 Legea de mișcare

Pentru a studia mișcarea, considerăm un triedru fix astfel încât axa O_1z_1 să coincidă cu axa mișcării de rototranslație. Fie corpul rigid (C) ale cărui două puncte, O și O' rămân pe dreapta fixă O_1z_1 tot timpul mișcării acestuia. Solidar cu corpul (C), considerăm sistemul de referință mobil Oxyz, a cărui axă Oz coincide cu axa fixă O_1z_1 (fig. 8.17). Spre deosebire de mișcarea de rotație punctual O se mișcă pe axa O_1z_1 .

Poziția corpului (C) față de sistemul de referință fix, este determinată de coordonata z_0 a punctului O și de unghiul θ dintre axa Ox_1 (paralelă cu O_1x_1) și axa Ox măsurat în planul Oxy.

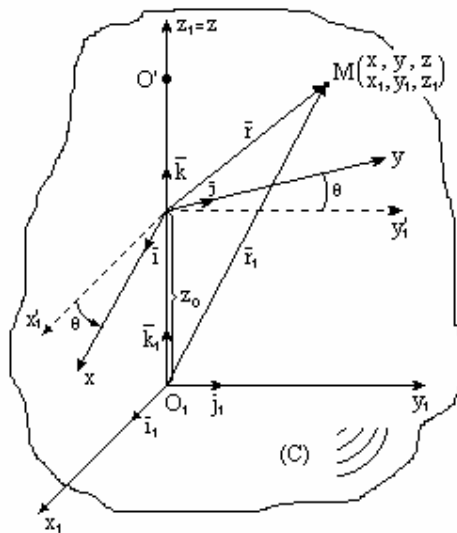


fig. 8.17

Legea de mișcare a corpului (C) este dată de funcțiile scalare:

$$z_0 = z_0(t), \theta = \theta(t) \quad (8.138)$$

Prima determină legea de mișcare a originii sistemului legat de corp, a doua definește rotația planului Oxz, față de planul $O_1x_1z_1$.

Prin urmare, rigidul în mișcare de rototranslație are în general două grade de libertate – dacă z_0 și θ sunt independente. La unele mișcări de rototranslație, între z_0 și θ există legături de forma:

$$z_0 = z_0(\theta) \quad (8.139)$$

caz, în care corpul rigid are un singur grad de libertate.

Considerând un punct arbitrar M din corp, având coordonatele x_1, y_1, z_1 față de sistemul

de axe fixe și coordonatele x, y, z , față de sistemul de referință mobil, legile de mișcare ale sale, sunt:

$$x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta; \quad y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta; \quad z_1 = z_0 + z \quad (8.140)$$

Relațiile (8.140) reprezintă și ecuațiile parametrice ale traiectoriei sale. Eliminând timpul din primele două ecuații, obținem ecuația analitică a traiectoriei:

$$x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = \text{const} \tan t, \quad z_1 = z_1(t) \quad (8.141)$$

Traietoriile punctelor rigidului sunt curbe situate pe suprafețe cilindrice coaxiale, care au ca axă de simetrie, axa de rototranslație.

8.5.2. Distribuția de viteze

Originea O a reperului mobil se mișcă în direcția axe O_1z_1 , astfel că:

$$\bar{v}_0 = \dot{z}_0 \bar{k}_1 = v_0 \bar{k}_1 = v_0 \bar{k} \quad (8.142)$$

Procedând ca la mișcarea de rotație cu axă fixă, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ se scrie:

$$\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{k}_1 = \omega \bar{k}_1 = \omega \bar{k} \quad (8.143)$$

Folosind formula generală a distribuției de viteze, obținem pentru mișcarea de rototranslație:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \dot{z}_0 \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (8.144)$$

din care obținem proiecțiile vitezei pe axele reperului mobil:

$$v_x = -\dot{\theta} y = -\omega y; \quad v_y = \omega x; \quad v_z = \dot{z}_0 = v_0 \quad (8.145)$$

Mărimea vitezei punctului M este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)\dot{\theta}^2 + \dot{z}_0^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)\omega^2 + v_0^2} \quad (8.146)$$

Distribuția de viteze în mișcarea de rototranslație a rigidului se obține prin însumarea vectorială a distribuțiilor de viteze de la mișcarea de translație în lungul axei O_1z_1 cu viteză \bar{v}_0 și de la mișcarea de rotație în jurul aceleiași axe cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$.

Din expresiile (8.145), deducem următoarele proprietăți ale distribuției de viteze în mișcarea de rototranslație a rigidului:

a) în general nu există nici un punct al rigidului a cărei viteză să fie nulă tot timpul mișcării. Acest lucru rezultă din relația (8.146). Punctele rigidului care au viteza minimă (egală cu \bar{v}_0) sunt situate pe axa de rototranslație. Viteza \bar{v}_0 se mai numește viteză de lunecare.

b) punctele situate pe o dreaptă (Δ) paralelă cu axa de rototranslație au vitezele egale ca vectori, deoarece în expresiile (8.145) nu apare coordonata z .

c) pe o dreaptă (Δ_1) perpendiculară pe axa mișcării de rototranslație și care taie axa, proiecția unui punct $M \in (\Delta_1)$ pe planul normal la axa mișcării de rototranslație, variază proporțional cu distanța OM (fig 8.18). Considerăm axa (Δ_1) să coincidă cu Ox, astfel că proiecțiile lui \bar{v}_M pe această axă sunt:

$$v_x = 0; \quad v_y = \omega x; \quad v_z = v_0 \quad (8.147)$$

Proiecția v_y crește proporțional cu distanța $x = OM$. Unghiul α dintre viteză și axa mișcării de rototranslație este același pentru toate punctele de pe axa (Δ) și are valoarea:

$$\alpha = \arctg \frac{\omega x}{v_0} \quad (8.148)$$

8.5.3 Distribuția de accelerații

Accelerația punctului O este evident:

$$\bar{a}_0 = \ddot{\theta}_0 \bar{k}_1 = a_0 \bar{k}_1 = a_0 \bar{k} \quad (8.149)$$

iar accelerația unghiulară:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta} \bar{k}_1 = \ddot{\theta} \bar{k} = \varepsilon \bar{k} \quad (8.150)$$

Din forma generală a distribuției de accelerații avem:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \dot{z}_0 \bar{k} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -\dot{\theta}y & \dot{\theta}x & 0 \end{vmatrix} \quad (8.151)$$

Proiecțiile pe axele mobile ale accelerației în mișcarea de rototranslație sunt:

$$a_x = -\dot{\theta}y - \dot{\theta}^2x = -\varepsilon y - \omega^2x; \quad a_y = \dot{\theta}x - \dot{\theta}^2y = \varepsilon x - \omega^2y; \quad a_z = \dot{z}_0 \quad (8.152)$$

Mărimea accelerației este:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\dot{z}_0^2 + (x^2 + y^2)(\varepsilon^2 + \omega^4)} \quad (8.153)$$

Din relațiile (8.152) și (8.153) deducem că distribuția de accelerații în mișcarea de rototranslație a rigidului se poate obține din compunerea a două distribuții: una corespunzătoare unei mișcări de translație în direcția axei de rototranslație și alta corespunzătoare în jurul acestei axe.

Din expresiile (8.152) rezultă următoarele proprietăți ale distribuției de

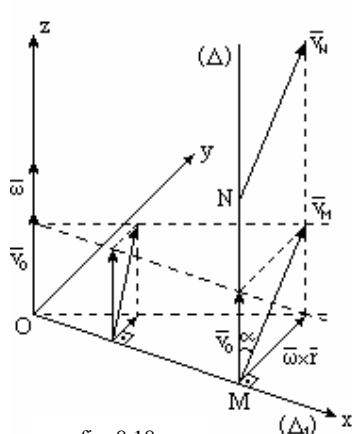


fig. 8.18

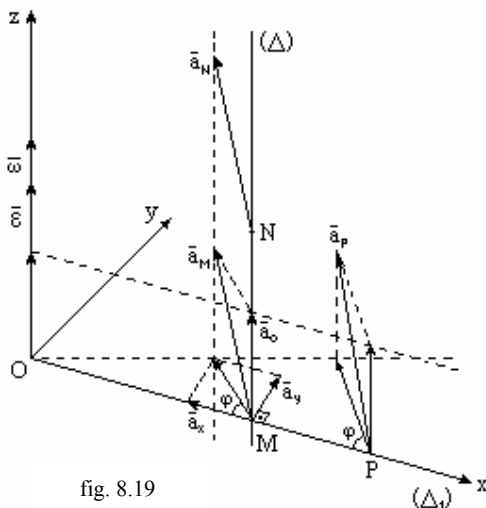


fig. 8.19

accelerații în mișcarea de rototranslație:

a) în general nu există nici un punct al rigidului în care accelerația să fie nulă tot timpul mișcării. Punctele de pe axa de rototranslație au accelerația minimă și egală cu $a_0 = \dot{z}_0$. În particular, dacă viteza de alunecare $v_0 = \dot{z}_0$ este constantă, punctele de pe axa de rototranslație au accelerația nulă. Accelerația $a_0 \neq 0$ se numește accelerație de alunecare.

b) toate punctele rigidului situate pe o dreaptă (Δ) paralelă cu axa mișcării de rototranslație, au accelerațiile egale ca vectori (fig 8.19), deoarece în expresiile (8.152) nu apare coordonata z .

c) proiecțiile accelerațiilor tuturor punctelor de pe o dreaptă (Δ_1) perpendiculară pe axa mișcării de rototranslație și care taie axa, pe un plan normal la axa mișcării de rototranslație sunt proporționale cu distanța de la punctul respectiv la axa de rototranslație.

Acest lucru rezultă dacă considerăm axa (Δ_1)= Ox . Proiecțiile accelerației punctului M de pe axa Ox pe axele mobile sunt (fig 8.19):

$$a_x = -\omega^2 x, a_y = \varepsilon x, a_z = \ddot{z}_0 \quad (8.154)$$

de unde se observă ca a_x și a_y variază proporțional cu distanța $x=OM$.

8.5.4. Mișcarea de șurub

Un caz particular al mișcării de rototranslație este mișcarea de șurub. Șurubul înaintază cu pasul p la o înaintare completă a acestuia datorită existenței filetului. Este un exemplu de corp rigid în care se impune o relație de legătură între funcțiile $z_0(t)$ și $\theta(t)$ de tipul (8.139), ceea ce înseamnă că mișcarea de șurub are un singur grad de libertate.

Între funcțiile z_0 și θ are loc o relație de legătură liniară:

$$z_0(t) = C \theta(t), C \in \mathbf{R} \quad (8.155)$$

Prin diferențierea relației (8.155), obținem:

$$dz_0 = C d\theta \quad (8.156)$$

Integrăm relația (8.156) și ținem seama că înaintarea cu pasul p implică o rotație completă de 2π radiani:

$$\int_0^p dz_0 = C \int_0^{2\pi} d\theta \quad (8.157)$$

Din relația (8.157) rezultă:

$$C = \frac{p}{2\pi} \quad (8.158)$$

Înlocuim constanta C dată de relația (8.158) în relația (8.155), derivăm în raport cu timpul și obținem:

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_0}{p} \quad (8.159)$$

Analog pentru accelerații, din relația (8.159), deducem:

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{v_0}{p} \quad (8.160)$$

Aplicație: Un șurub are pasul $p=2[\text{mm}]$, raza exterioară $R=8[\text{mm}]$ și accelerația de lunecare $a_0=1/2 [\text{mm/s}^2]$. Se cer viteza și accelerația unui punct de pe periferia șurubului.

Rezolvare: Din relația (8.160), rezultă:

$$\varepsilon = \frac{2\pi a_0}{p} = \frac{\pi}{2}; \quad \omega = \frac{\pi}{2} t \quad (8.161)$$

Viteza de lunecare este:

$$v_0 = a_0 t = \frac{1}{2} t \quad (8.162)$$

iar viteza perpendiculară pe axă este :

$$v' = \omega R = 4\pi t \quad (8.163)$$

astfel că putem scrie viteza punctului de pe periferie:

$$v = \sqrt{v_0^2 + v'^2} = \frac{1}{2} t \sqrt{1 + 32\pi^2} \quad (8.164)$$

Accelerația tangențială este:

$$a_t = v' = 4\pi \quad (8.165)$$

iar cea normală:

$$a_n = R\omega^2 = 2\pi^2 t \quad (8.166)$$

astfel că:

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_t^2 + a_n^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16\pi^4 t^2 + 64\pi^2 + 1} \quad (8.167)$$

8.6 Mișcarea plan paralelă (plană) a corpului rigid

Un corp rigid are o mișcare plană sau plan paralelă dacă trei puncte necoliniare ale rigidului sunt conținute tot timpul mișcării într-un plan considerat fix, numit planul mișcării. Toate punctele aparținând rigidului și sunt coplanare cu cele trei puncte rămân de asemenea conținute în acest plan. Prin urmare, traiectoriile tuturor punctelor rigidului sunt curbe plane situate în plane paralele cu planul fix, motiv pentru care mișcarea se mai numește și plan paralelă.

Exemple de mișcări plane: mișcarea bilei mecanismului bielă – manivelă, mișcarea roții unui vehicul care se deplasează rectiliniu, mișcările elementelor tuturor mecanismelor plane, etc.

În particular, mișcarea de rotație cu axă fixă și mișcarea de translație cu traiectorii curbe plane sunt exemple de mișcări plane.

8.6.1 Legea de mișcare

Considerăm corpul rigid (C), planul fix (P) și un punct arbitrar P din corp (fig 8.20).

Planul (P) intersectează corpul (C) și determină secțiunea (S). Proiecția punctului M pe secțiunea S o notăm cu M'. Din definiția dată mișcării plane rezultă că punctul M' rămâne tot timpul mișcării în planul P iar segmentul MM' are mărimea

invariabilă și rămâne paralelă cu el însuși, adică are o mișcare de translație, rezultă că toate punctele corpului situate pe segmentul MM' au traiectorii identice, viteze și accelerații egale. Pentru studiul mișcării este suficient studiul mișcării unui singur punct al său de exemplu punctul M' aflat în mișcare în secțiunea (S). Deci mișcarea corpului (C) se reduce la studiul mișcării secțiunii (S) din planul fix (P).

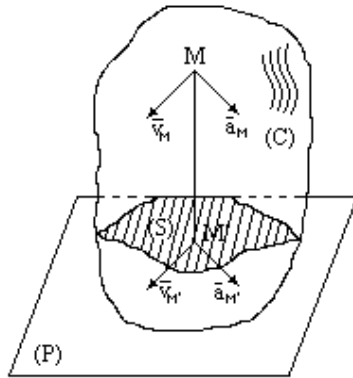


fig. 8.20

Considerăm secțiunea plana (S) și alegem sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ astfel încât planul $O_1x_1y_1$ să coincidă cu planul secțiunii (S) și un sistem de referință mobil $Oxyz$ legat de corp, cu planul Oxy în planul fix $O_1x_1y_1$ iar axele Oz și O_1z_1 sunt paralele (fig 8.21)

Poziția punctului O este determinată de vectorul său de poziție:

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i}_1 + y_0 \vec{j}_1 \quad (8.168)$$

iar rotația reperului mobil, de unghiul θ dintre axele O_1x_1 și Ox .

Rezultă că mișcarea plană are trei grade de libertate iar legea de mișcare a corpului este dată de funcțiile

$$x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t), \theta_0 = \theta_0(t) \quad (8.169)$$

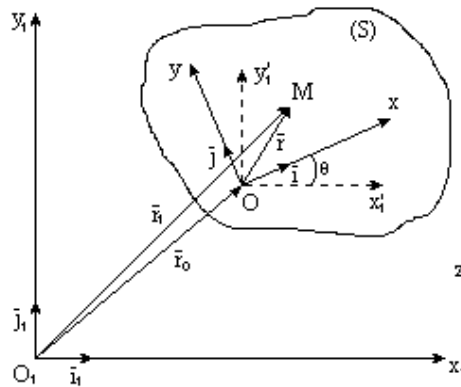


fig. 8.21

Dacă rigidul este supus și la alte legături, numărul gradelor de libertate se va reduce corespunzător legăturilor, la două sau la un grad de libertate.

Între versorii celor două sisteme de referință se pot stabili următoarele relații de legătură:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{j}_1, \\ \vec{j} &= -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1, \quad \vec{k} = \vec{k}_1 \end{aligned} \quad (8.170)$$

Poziția punctului arbitrar M este dată de relația vectorială:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (8.171)$$

unde :

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1; \quad \vec{r}_0 = x_0 \vec{i}_1 + y_0 \vec{j}_1; \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (8.172)$$

Ținând seama de relațiile (8.170) și (8.172), prin proiecția vectorilor din relația (8.171) pe axele sistemului de referință fix obținem:

$$x_1 = x_0 + x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y_1 = y_0 + x \sin \theta + y \cos \theta \quad (8.173)$$

Prin eliminarea timpului între relațiile (8.173) se obține ecuația analitică a traiectoriei (în coordonate carteziene) a punctului M: $f(x_1, y_1) = 0$, care este o curbă evident plană.

8.6.2. Distribuția de viteze

Viteza originii reperului mobil O este:

$$\bar{v}_0 = \dot{x}_0 \bar{i}_1 + \dot{y}_0 \bar{j}_1 = v_{ox} \bar{i}_1 + v_{oy} \bar{j}_1 \quad (8.174)$$

Pentru determinarea vitezei unghiulare ținem seama că $\bar{k}_1 = \bar{k}$ și deci $\dot{\bar{k}} = \dot{\bar{k}}_1 = 0$, precum și de relațiile (8.170):

$$\omega_x = -\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = 0; \quad \omega_y = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = 0; \quad \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \quad (8.175)$$

Rezultă:

$$\bar{\omega} = \omega_z \bar{k} = \dot{\theta} \bar{k} = \dot{\bar{\theta}} \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta} \bar{k} \quad (8.176)$$

Plecând de la formula generală a distribuției de viteze și ținând seama de relațiile (8.174) și (8.175), deducem pentru cazul mișcării plan paralele:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = v_{ox} \bar{i}_1 + v_{oy} \bar{j}_1 + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \dot{x}_0 \bar{i}_1 + \dot{y}_0 \bar{j}_1 + \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \quad (8.177)$$

și deci proiecțiile vitezei punctului M pe axele sistemului mobil vor fi:

$$v_x = v_{ox} - \omega y; \quad v_y = v_{oy} + \omega x; \quad v_z = 0 \quad (8.178)$$

Din relația (8.174), ținând seama de relația (8.170), obținem:

$$v_{ox} = \dot{x}_0 \cos \theta + \dot{y}_0 \sin \theta, \quad v_{oy} = -\dot{x}_0 \sin \theta + \dot{y}_0 \cos \theta \quad (8.179)$$

Înlocuim relația (8.179) în relația (8.178) care devine :

$$v_x = \dot{x}_0 \cos \theta + \dot{y}_0 \sin \theta - \omega y, \quad v_y = -\dot{x}_0 \sin \theta + \dot{y}_0 \cos \theta + \omega x \quad (8.180)$$

Din relația (8.177) deducem că distribuția vitezelor în mișcarea plan paralelă, se obține prin suprapunerea distribuției de viteze într-o mișcare de translație cu viteza \bar{v}_0 și a distribuției de viteze într-o mișcare de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul fix, și trece prin punctul O cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$.

Ne punem problema să simplificăm formula (8.177) de distribuție a vitezelor, în sensul de a găsi un punct pe care îl vom nota cu I astfel încât viteza să fie nulă la un moment dat:

$$\bar{v}_I = 0 \quad (8.181)$$

În acest fel viteza unui punct oarecare M devine:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{IM} \quad (8.182)$$

Notăm cu $\bar{r}_1 = \bar{OI}$ (vectorul de poziție al punctului I în raport cu punctul O), astfel că din relațiile (8.181) și (8.177), rezultă:

$$\bar{v}_I = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_1 = 0 \quad (8.183)$$

Pentru determinarea lui I înmulțim relația (8.183) vectorial la stânga cu vectorul $\vec{\omega}$ și obținem :

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_I) = 0 \quad (8.184)$$

Prin dezvoltarea produsului dublu vectorial în relația (8.184) se obține:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_I) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_I = 0 \quad (8.185)$$

Dar $\vec{\omega}$ este perpendicular pe planul mișcării astfel că $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_I = 0$ și din relația (8.185), se obține:

$$\vec{r}_I = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2} \quad (8.186)$$

Punctul I astfel determinat este unic la un moment dat, deoarece \vec{v}_0 și $\vec{\omega}$ sunt unice.

Dacă luăm punctul I ca un punct de referință, viteza unui punct arbitrar M se scrie sub forma:

$$\vec{v} = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \vec{IM} \quad (8.187)$$

iar din definiția punctului I, $\vec{v}_I = 0$ rezultă:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{IM} \quad (8.188)$$

Formula (8.188) are aceeași formă cu distribuția de viteze de la mișcarea de rotație cu axă fixă.

Distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă a corpului rigid, este o distribuție de viteze de rotație în jurul unei axe perpendiculare în punctul I pe planul mișcării. Din acest motiv punctul I este numit centru instantaneu de rotație (C.I.R.), iar axa perpendiculară în I pe planul mișcării este numită axă instantanee de rotație. Toate punctele rigidului ce se găsesc pe axa instantanee de rotație au la un moment dat viteza nulă.

Ținând seama de relațiile (8.186) și (8.179), obținem coordonatele centrului instantaneu de rotație I în sistemul de referință mobil:

$$\begin{aligned} x_I &= -\frac{v_{oy}}{\omega} = \frac{\dot{x}_0 \sin \theta - \dot{y}_0 \cos \theta}{\omega} \\ y_I &= \frac{v_{ox}}{\omega} = \frac{\dot{x}_0 \cos \theta + \dot{y}_0 \sin \theta}{\omega} \end{aligned} \quad (8.189)$$

În timpul mișcării corpului rigid poziția centrului instantaneu de rotație I își modifică poziția atât față de corp (față de sistemul de referință mobil), cât și față de sistemul de referință fix.

Locul geometric al centrului instantaneu de rotație în raport cu sistemul de referință mobil este o curbă plană numită *rostogolitoare*, (*rolantă*, *centroidă mobilă*). Ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei sunt date de relațiile (8.189) iar ecuația vectorială este dată de relația (8.186). Pentru a obținerea ecuației analitice a rostogolitoarei, se elimină timpul între relațiile (8.189):

$$f(x_I, y_I) = 0 \quad (8.190)$$

Locul geometric al centrului instantaneu de rotație în raport cu sistemul de referință fix este o altă curbă plană numită *bază* (*centroidă fixă*). Ținând seama de relațiile vectoriale (8.171) și (8.186), scrise pentru punctul I, rezultă

$$\bar{r}_{II} = \bar{r}_0 + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} \quad (8.191)$$

care reprezintă ecuația vectorială a bazei. Ecuațiile parametrice ale bazei se obțin din relația (8.191) proiectând-o pe axele sistemului de referință fix:

$$x_{II} = x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega}; \quad y_{II} = y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad (8.192)$$

Prin eliminarea timpului între ecuațiile (8.192), găsim ecuația analitică a bazei:

$$G(x_{II}, y_{II}) = 0 \quad (8.193)$$

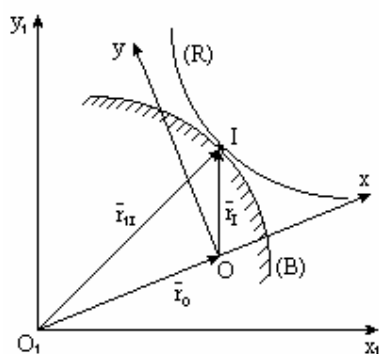


fig. 8.22

Cele două centroide pot fi folosite pentru a urmări mișcarea plană a corpului rigid, mai precis a secțiunii sale (S) și au următoarele două proprietăți:

a) baza și rostogolitoarea sunt tangente tot timpul mișcării în centrul instantaneu de rotație I (fig. 8.22)

Demonstrarea acestei proprietăți se poate face scriind expresia vectorului de poziție al centrului instantaneu de rotație I față de sistemul de referință fix:

$$\bar{r}_{II} = \bar{r}_0 + \bar{r}_I \quad (8.194)$$

Prin derivarea în raport cu timpul a relației (8.194) și ținând seama că vectorul \bar{r}_I

este variabil ca modul și direcție, obținem:

$$\dot{\bar{r}}_{II} = \dot{\bar{r}}_0 + \frac{\partial \bar{r}_I}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_I \quad (8.195)$$

Dar $\dot{\bar{r}}_{II} = \bar{V}_{II}$ este viteza punctului I pe bază, $\partial \bar{r}_I / \partial t = \bar{V}_I$ este viteza punctului I pe rostogolitoare, iar termenul rămas $\dot{\bar{r}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_I = \bar{v}_I$ este viteza punctului I față de reperul mobil, astfel că $\bar{v}_I = 0$. Rezultă :

$$\bar{V}_{II} = \bar{V}_I \quad (8.196)$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunțată deoarece cei doi vectori au direcțiile după tangentele la cele două curbe și se referă la același punct I.

b) centroida mobilă se rostogolește peste centroidă fixă fără alunecare.

Punctul I descrie pe bază un arc de curbă ds_I iar pe rostogolitoare arcul de curbă ds în timpul dt , astfel că putem scrie:

$$ds_I = V_{II} dt, \quad ds = V_I dt \quad (8.197)$$

Din relația (8.196) rezultă $V_{II} = V_I$ și deci :

$$ds_1 = ds \quad (8.198)$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunțată.

Suprafețele generate de axa instantanee de rotație (suportul vectorul $\vec{\omega}$) față de sistemele de referință fix și mobil, în cazul mișcării plane vor fi doi cilindri: unul fix și unul mobil ce se rostogolește fără alunecare peste cel fix. Acești doi cilindri sunt axoïda fixă respectiv axoïda mobilă, iar intersecția lor cu planul fix ce conține secțiunea (S), determină baza (centroïda fixă), respectiv rostogolitoarea (centroïda mobilă).

Dacă se cunoaște la un moment dat poziția punctului I și valoarea vitezei unghiulare $\vec{\omega}$, vitezele punctelor din secțiunea (S) se obțin ca într-o mișcare de rotație cu centrul în punctul I.

În consecință, pentru studiul distribuției de viteze în mișcarea plană a rigidului, este necesar să fie cunoscuți centrul instantaneu de rotație I și vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$. Se impun prezentarea unor metode pentru determinarea acestor elemente cinematice ale mișcării plane a rigidului în funcție de elementele cunoscute ale mișcării unor puncte particulare din rigid.

8.6.3 Metode pentru determinarea distribuției de viteze în mișcarea plan paralelă

a) *Metoda centrului instantaneu de rotație* se bazează pe determinarea centrelor instantanee de rotație ale diferitelor elemente ale mecanismului studiat, apoi a vitezelor unghiulare instantanee ale acestor elemente și în final a vitezelor diferitelor puncte. În mișcarea plan-paralelă, la un moment dat distribuția de viteze este formal ca într-o rotație în jurul centrului instantaneu de rotație. Viteza unui punct oarecare M este:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_I \times \vec{IM} \quad (8.199)$$

Centrul instantaneu de rotație se află la intersecția perpendicularelor ridicate din diferite puncte M, N...pe suporturile vitezelor respective (fig 8.23). Mărimile vitezelor punctelor M și N se determină ca la mișcarea circulară, astfel că:

$$v_M = \omega_I \cdot IM, v_N = \omega_I \cdot IN \quad (8.200)$$

Pentru a aplica această metodă, trebuie să cunoaștem viteza \vec{v}_A ca vector (modul, direcție și sens) a unui punct A, precum și suportul vitezei unui alt punct N.

Distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă a unui corp rigid se obține astfel: se determină centrul instantaneu de rotație, ca intersecție a două normale pe suporturile vitezelor a două puncte din secțiunea (S). viteza unghiulară instantanee ω_I din jurul centrului instantaneu de rotație, se determină cunoscând modulul vitezei

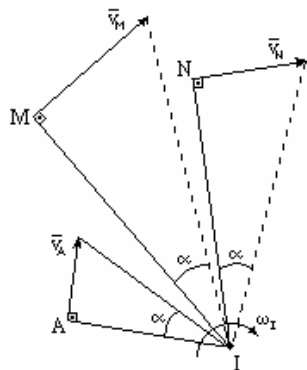


fig. 8.23

unui punct A: $\omega_I = \frac{v_A}{IA}$ care are sensul lui \bar{v}_A viteza unui punct arbitrar M se obține ca la mișcarea de rotație cu axă fixa, construind raza IM și viteza \bar{v}_M perpendiculară pe IM în sensul lui ω_I și având modulul:

$$v_M = \omega_I IM = \frac{IM}{IA} v_A \quad (8.201)$$

Unghiul α sub care se văd, la un moment dat, vitezele tuturor punctelor din centrul instantaneu de rotație este același pentru toate punctele secțiunii (S), deoarece ω_I nu diferă de la un punct la altul:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_A}{IA} = \frac{v_M}{IM} = \omega_I \quad (8.202)$$

În cazul când suporturile vitezelor celor două puncte M și N sunt paralele și $v_M = v_N$ fig(8.24 a) centrul instantaneu de rotație se află la infinit, regăsindu-se în acest fel translația ca un caz particular al mișcării plan-paralele.

Dacă însă suporturile vitezelor sunt paralele dar $v_M \neq v_N$, trebuie să cunoaștem și mărimile celor două viteze. Folosind proprietatea de distribuție liniară a vitezelor în raport cu centrul instantaneu de rotație, acesta se găsește pe dreapta MN la intersecția acesteia cu dreapta care unește extremitățile vectorilor \bar{v}_M și \bar{v}_N (fig 8.24b).

În multe probleme tehnice este necesar să se studieze mișcarea plană simultană, în același plan de referință, a mai multor corpuri rigide între care există

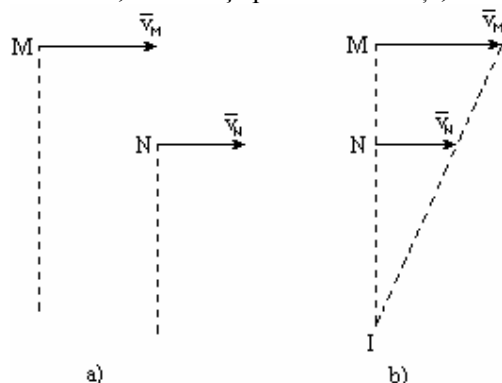


fig. 8.24

anumite legături. Astfel, pentru analiza și sinteza mecanismelor plane prezintă o deosebită importanță studiul cinematic al mișcărilor elementelor componente. În aceste probleme pentru studiul distribuțiilor de viteze este necesar să fie cunoscute în momentul în care se studiază mișcarea, distribuțiile de viteze pentru fiecare corp, vitezele unghiulare instantanee și pozițiile centrelor instantanee.

Punctul care aparține simultan la două corpuri și care la un moment dat are aceeași viteză, se numește *centru instantaneu de rotație relativ* al respectivelor corpuri.

Considerăm două secțiuni (S_1) și (S_2) ale celor două corpuri, care execută mișcări în același plan fix (fig 8.25). Punctele celor două secțiuni execută rotații în jurul centrelor instantanee de rotație I_1 , respective I_2 cu vitezele unghiulare

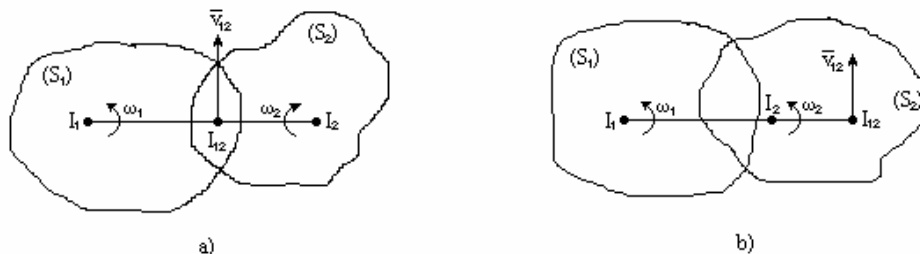


Fig. 8.25

instantanee ω_1 și ω_2 . Punctele I_1 și I_2 se numesc centre instantanee absolute, deoarece se referă la mișcările celor două secțiuni față de planul fix.

Dacă se studiază mișcarea secțiunii (S_1) față de secțiunea (S_2) adică o mișcare relativă, atunci există în planul lor un punct I_{12} numit centru instantaneu relativ, care va reprezenta centrul de rotație în mișcarea secțiunii (S_1) în raport cu secțiunea (S_2) și invers. Viteza punctului I_{12} față de I_1 este:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{I}_1 \vec{I}_{12} \quad (8.203)$$

iar viteza sa în raport cu I_2 este:

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{I}_2 \vec{I}_{12} \quad (8.204)$$

I_{12} este centrul instantaneu relative dacă:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \text{ sau } \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 0 \quad (8.205)$$

Din relațiile (8.203), (8.204) și (8.205), rezultă

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{I}_1 \vec{I}_{12} - \vec{\omega}_2 \times \vec{I}_2 \vec{I}_{12} = 0 \quad (8.206)$$

Dar $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$, $\vec{\omega}_2 = -\omega_2 \vec{k}$, astfel că relația (8.206) se mai scrie:

$$\vec{k} \times (\omega_1 \vec{I}_1 \vec{I}_{12} + \omega_2 \vec{I}_2 \vec{I}_{12}) = 0 \quad (8.207)$$

de unde rezultă:

$$-\omega_1 \vec{I}_1 \vec{I}_{12} = \omega_2 \vec{I}_2 \vec{I}_{12} \quad (8.208)$$

relație care se mai scrie sub forma:

$$\vec{I}_1 \vec{I}_{12} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \vec{I}_2 \vec{I}_{12} \quad (8.209)$$

ceea ce arată că vectorii $\vec{I}_1 \vec{I}_{12}$ și $\vec{I}_2 \vec{I}_{12}$ sunt colineari, adică punctul I_{12} se găsește pe linia centrelor instantanee absolute $I_1 I_2$. Aceasta demonstrează că punctele I_1, I_2, I_{12} sunt coliniare. S-a obținut astfel **teorema celor trei centre instantanee de rotație**: două centre instantanee de rotație absolute și cel relativ, referitoare la două corpuri în mișcare plan-paralelă, sunt coliniare.

Poziția centrului instantaneu relativ se determină din raportul:

$$\frac{I_1 I_{12}}{I_2 I_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (8.210)$$

care arată că centrul instantaneu relativ I_{12} împarte segmentul format de centrele instantanee absolute I_1 și I_2 într-un raport invers cu raportul vitezelor unghiulare. Dacă ω_1 și ω_2 au sensuri opuse, atunci punctul I_{12} se află în interiorul segmentului $I_1 I_2$ (fig

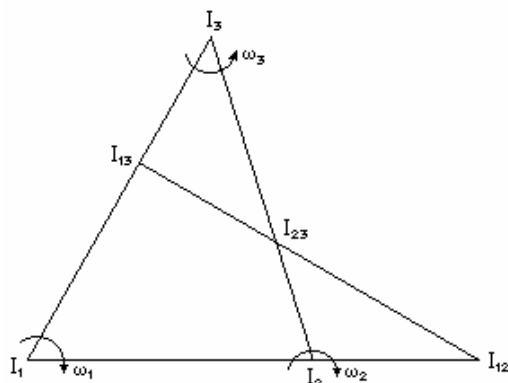


fig. 8.26

8.25 a), iar dacă au același sens, atunci I_2 se află în exterior (fig 8.25b). Problema se poate extinde și în cazul a trei secțiuni ale căror centre instantanee absolute de rotație sunt I_1 , I_2 , I_3 (fig 8.26) iar vitezele unghiulare sunt ω_1 , ω_2 , ω_3 . Centrul instantaneu relativ I_{12} se găsește pe dreapta $I_1 I_2$ conform relației (8.210). Centrul instantaneu relativ I_{13} se află pe dreapta $I_1 I_3$, conform relației:

$$\frac{I_3 I_{13}}{I_1 I_{13}} = \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad (8.211)$$

Centrul instantaneu relativ I_{23} este situat pe segmentul $I_2 I_3$ și satisface relația

$$\frac{I_2 I_{23}}{I_3 I_{23}} = \frac{\omega_3}{\omega_2} \quad (8.212)$$

Înmulțind ultimele trei relații, obținem:

$$\frac{I_1 I_{12}}{I_2 I_{12}} \frac{I_3 I_{13}}{I_1 I_{13}} \frac{I_2 I_{23}}{I_3 I_{23}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_2} = 1 \quad (8.213)$$

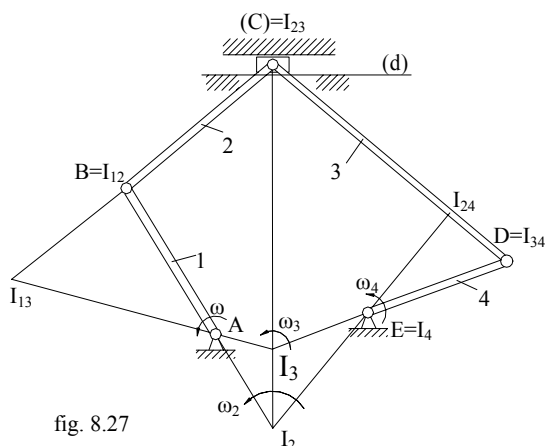


fig. 8.27

instantanee absolute și relative.

care demonstrează teorema *coliniarității centrelor instantanee relative ale celor trei secțiuni*, conform teoremei lui Menelaus.

Determinarea centrelor instantanee relative este utilă în aplicații deoarece cu ajutorul lor se pot determina unele centre instantanee absolute

Aplicație: Se consideră mecanismul plan din figura 8.27. Se dă $\omega = \text{constant}$. Să se determine vitezele unghiulare instantanee precum și centrele

246 CAPITOLUL 2. CINEMATICA

Rezolvare: Barele $AB(=1)$ și $DE(=4)$ efectuează mișcări de rotație cu axă fixă, iar barele $BC(=2)$ și $CD(=3)$ mișcări plan-paralele. Centrele instantanee de rotație absolute sunt: $I_1 \equiv A$, $I_4 \equiv E$. I_2 se află la intersecția normalei pe (d) în C cu AB iar I_3 se află la intersecția normalei pe (d) în C cu DE.

Centrele instantanee de rotație relative sunt: $I_{12}=B$, $I_{23}=C$, $I_{34}=D$. Din teorema coliniarității centrelor instantanee relative, rezultă că I_{13} se află la intersecția dreptelor I_1I_{23} cu I_1I_3 iar I_{24} la intersecția dreptelor $I_{23}I_{34}$ și I_2I_4 .

$$\text{Din relația } v_B = AB\omega = BI_2\omega_2 \text{ rezultă } \omega_2 = \frac{AB}{BI_2}\omega \text{ și deci } v_C = CI_2\omega_2 = \frac{AB \cdot CI_2}{BI_2}\omega.$$

Pe de altă parte $v_C = CI_3\omega_3$ de unde obținem $\omega_2 = \frac{AB}{BI_2} \cdot \frac{CI_2}{CI_3}\omega$. În sfârșit

$$v_D = DI_3\omega_3 = DE\omega_4 \text{ de unde rezultă: } \omega_4 = \frac{DI_3}{DE}\omega_3 = \frac{DI_3}{DE} \cdot \frac{AB}{BI_2} \cdot \frac{CI_2}{CI_3}\omega. \text{ Observăm că}$$

vitezele unghiulare ω_2 și ω_3 sunt funcții de timp, deoarece centrele instantanee I_2 și I_3 nu sunt fixe.

b) *Metoda rabaterii vitezelor* este o metodă grafică, fiind corespondentul grafic al metodei centrului instantaneu de rotație. Metoda centrului instantaneu de rotație are dezavantajul că uneori asemenea centre sunt situate în afara cadrului desenului. În aceste cazuri se poate folosi metoda rabaterii vitezelor.

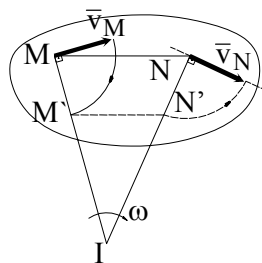


fig. 8.28

Presupunem cunoscut vectorul viteză al unui punct M (\vec{v}_M) și suportul vitezei unui alt punct N (fig. 8.28), unde M și N sunt două puncte ale unui corp rigid având o mișcare plană. Desenul se execută la scară atât pentru viteze cât și pentru dimensiunile corpurilor.

Construcția vitezei \vec{v}_N o facem în felul următor:

viteza \vec{v}_M construită la scară se rabate în sens arbitrar cu $\pi/2$ și se obține punctul M' : prin M' se duce o paralelă la MN care intersectează dreapta IN în punctul N' ; segmentul NN' se rabate cu $\pi/2$ în sens opus celui în care a fost

rabătită viteza \vec{v}_M , obținând astfel la aceeași scară viteza căutată \vec{v}_N . Demonstrația este imediată dacă se ține seama că $\triangle IMN$ și $\triangle IM'N'$ sunt asemenea, astfel că:

$$\frac{IM}{IN} = \frac{IM'}{IN'} = \frac{IM - IN}{IN - IN'} = \frac{MN'}{NN'} = \frac{v_M}{v_N} \quad (8.214)$$

Ultima egalitate a fost scrisă în baza construcției făcute: $v_M = MM'$; $v_N = NN'$. Din relația (8.214) rezultă:

$$v_N = \frac{IN}{IM} v_M \quad (8.215)$$

relație care comparată cu (8.201) confirmă corectitudinea construcției făcute.

Aplicație: Folosind metoda rabaterii, să determinăm distribuția de viteze pentru mecanismul bielă-manivelă (fig. 8.29).

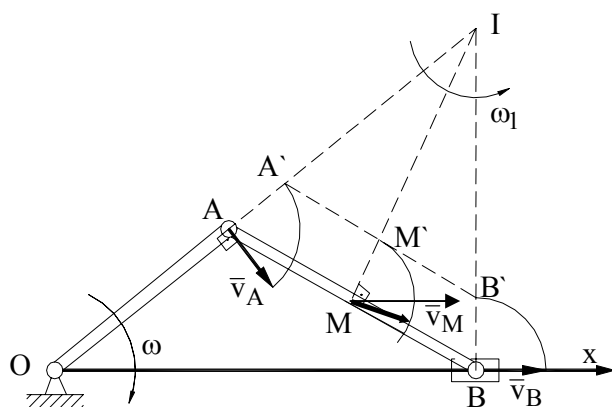


fig. 8.29

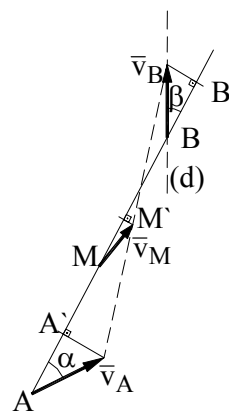


fig. 8.30

Rezolvare: Viteza punctului A are sensul lui ω , direcția perpendiculară pe OA și mărimea $v_A = OA \cdot \omega$ iar viteza punctului B are direcția ghidajului Ox. Viteza \vec{v}_A se rabate cu $\pi/2$ obținându-se punctul A'. Prin A' ducem paralela la AB care intersectează perpendiculara în B pe Ox în punctul B'. Segmentul BB' se rabate cu $\pi/2$ în sens opus cu \vec{v}_A , obținând la scară viteza \vec{v}_B . Viteza unui punct arbitrar M de pe bielă se obține notând cu M' intersecția dreptelor IM și A'B' după care segmentul MM' se rabate cu $\pi/2$ în același sens cu BB' și se obține viteza \vec{v}_M la scară.

c) *Metoda proiecțiilor vitezelor* este o metodă grafică care se bazează pe teorema proiecțiilor vitezelor, care a fost demonstrată ca proprietate a distribuției de viteze în mișcarea generală a rigidului. Pentru două puncte arbitrare A și B aparținând secțiunii (S), se poate scrie: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \times \vec{AB}$. Multiplicând scalar această egalitate cu vectorul \vec{AB} , rezultă relația: $\vec{v}_B \cdot \vec{AB} = \vec{v}_A \cdot \vec{AB} + (\omega \times \vec{AB}) \cdot \vec{AB}$. Ultimul termen este nul, deoarece conține doi vectori coliniari, astfel că după simplificare cu scalarul AB, obținem: $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, unde $\alpha = \angle(\vec{v}_A, \vec{AB})$, $\beta = \angle(\vec{v}_B, \vec{AB})$. În acest fel proiecțiile vitezelor a două puncte A și B pe dreapta AB care le unește, sunt egale și de același sens.

În unele aplicații la această metodă se mai adaugă și teorema coliniarității extremităților vectorilor viteză care se cunoaște de la proprietățile distribuției de viteze în mișcarea generală a rigidului. În acest caz este necesar să se cunoască vectorul viteză al unui punct și suportul vitezei unui alt punct. Această metodă se aplică în felul următor (fig. 8.30):

Vectorul viteză \vec{v}_A al punctului A este cunoscut și deci este cunoscută lungimea $AA' = v_A \cos \alpha$. În punctul B, în același sens, se construiește segmentul $BB' = AA'$ care va fi proiecția vectorului (necunoscut deocamdată) \vec{v}_B pe direcția AB:

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta \quad (8.216)$$

Din B' se ridică perpendiculara pe AB până intersectează suportul (d) al lui \vec{v}_B . Acest punct reprezintă la scară, extremitatea vectorului \vec{v}_B . Pentru a construi viteza oricărui punct M de pe AB se construiește pe AB segmentul $MM' = AA' = BB'$ (în același sens cu AA' și BB'). Din punctul M' se ridică perpendiculara pe AB. Aplicând teorema coliniarității extremităților vectorilor viteză, unim extremitățile vectorilor \vec{v}_A și \vec{v}_B printr-o dreaptă care va intersecta perpendiculara ridicată în M' pe AB. Acest punct va fi extremitatea vectorului viteză \vec{v}_M căutat – la aceeași scară.

Pentru un alt punct arbitrar N necoliniar cu AB, se aplică teorema proiecțiilor atât pe AN cât și pe BN.

Aplicație: Pentru mecanismul bielă-manivelă să determinăm viteza unui punct oarecare de pe bielă (fig. 8.31).

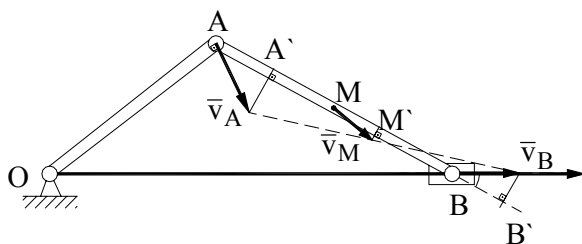


fig. 8.31.

Rezolvare: În acest caz cunoaștem viteza punctului A ca vector și direcția Ox a vitezei punctului B. Proiectăm extremitatea lui \vec{v}_A ($\vec{v}_A \perp OA$) pe AB și obținem punctul A'. În punctul B în același sens ca AA' construim segmentul $BB' = AA'$ pe AB. În punctul B' ridicăm o perpendiculară pe AB până intersectează pe Ox și obținem extremitatea vectorului \vec{v}_B . Fie un punct M arbitrar pe bielă. Construim segmentul $MM' = AA' = BB'$. Perpendiculara în M' pe AB se intersectează cu linia ce unește extremitățile vectorilor \vec{v}_A și \vec{v}_B într-un punct care va fi extremitatea vectorului viteză \vec{v}_M .

d) Metoda planului vitezelor

Se numește plan al vitezelor corespunzător unui rigid care are o mișcare plană, figura formată din vectorii \vec{v}_A , \vec{v}_B , \vec{v}_C , ... ce reprezintă vitezele diferitelor puncte A, B, C, ... ale corpului dacă toți acești vectori sunt aplicați în același punct

notat cu p și numit pol (fig. 8.32). În acest fel, oricărui punct al rigidului din planul mișcării îi corespunde un punct în planul vitezelor.

Alegem o origine arbitrară p din care se duc vectorii $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$ la o anumită scară (fig. 8.32b). Extremitățile acestor vectori le notăm cu a, b, c . Formula lui Euler scrisă pentru punctele A și B este:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad (8.217)$$

sau:

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad (8.218)$$

Din figura 8.32 deducem că

$$\vec{ab} = \vec{v}_B - \vec{v}_A, \text{ astfel că rezultă } \vec{ab} = \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad (8.219)$$

relație cu care se pot stabili unele proprietăți importante pentru construcția planului vitezelor. Astfel din relația (8.219) deducem că segmentele de dreaptă din planul vitezelor sunt perpendiculare pe corespundentele lor din planul mișcării.

Vectorul $\vec{\omega}$ este perpendicular pe \vec{AB} și deci între mărimile vectorilor din relația (8.219) există relația: $ab = \omega AB$ sau

$$\frac{ab}{AB} = \omega \quad (8.220)$$

ceea ce înseamnă că la un moment dat, raportul dintre segmentele de drepte construite în planul vitezelor și cele corespunzătoare din planul mișcării este același. Analog

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC} = \omega \quad (8.221)$$

de unde rezultă că Δabc și ΔABC sunt asemenea. În concluzie figurile obținute în planul vitezelor sunt asemenea cu cele corespundente din planul mișcării și rotite cu $\pi/2$ în sensul vitezei unghiulare ω .

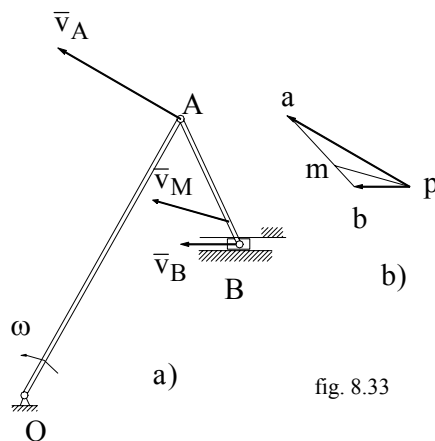


fig. 8.33

Cu ajutorul proprietăților stabilite, pentru orice punct din corp se poate construi punctul corespundent din planul vitezelor și deci viteza lui.

Aplicatie: Să se determine viteza unui punct oarecare M de pe bara AB a mecanismului din figura 8.33 folosind metoda planului vitezelor. Se cunosc v_A, v_B și $\frac{MB}{MA} = k$.

Rezolvare: Viteza \vec{v}_A este perpendiculară pe OA iar \vec{v}_B are direcția ghidajului. Construim în punctul arbitrar p

segmentele $pa = v_A$, și $pb = v_B$ (la scară) cu $\overline{pa} \parallel \overline{v_A}$ și $\overline{pb} \parallel \overline{v_B}$. Fie m pe ab astfel încât $\frac{mb}{am} = k$. Viteza punctului M va fi $\overline{v_M} = \overline{mp}$ și $v_M = \frac{mp}{ap} v_A$.

8.6.4. Distribuția de accelerații

Aplicăm formula generală a distribuției de accelerații pentru calculul accelerației unui punct arbitrar M dintr-un corp care execută o mișcare plan-paralelă:

$$\overline{a} = \overline{a_0} + \overline{\varepsilon_I} \times \overline{r} + \overline{\omega_I} \times (\overline{\omega_I} \times \overline{r}) \quad (8.222)$$

Dar vectorii $\overline{\omega_I}$ și \overline{r} sunt ortogonali, astfel că ultimul termen al relației (8.222) se mai scrie:

$$\overline{\omega_I} \times (\overline{\omega_I} \times \overline{r}) = (\overline{\omega_I} \cdot \overline{r}) \overline{\omega_I} - \omega_I^2 \overline{r} = -\omega_I^2 \overline{r} \quad (8.223)$$

astfel că formula (8.222) devine:

$$\overline{a} = \overline{a_0} + \overline{\varepsilon_I} \times \overline{r} - \omega_I^2 \overline{r} \quad (8.224)$$

unde:

$$\overline{a_0} = \overline{\ddot{r}_0} = \overline{\dot{v}_0} = a_{Ox} \overline{i} + a_{Oy} \overline{j} = \ddot{x}_0 \overline{i}_1 + \ddot{y}_0 \overline{j}_1 \quad (8.225)$$

reprezintă accelerația originii reperului mobil O . Accelerația unghiulară are expresia:

$$\overline{\varepsilon_I} = \overline{\dot{\omega}_I} = \overline{\ddot{\theta} k_1} = \varepsilon_I \overline{k_1} = \varepsilon_I \overline{k} \quad (8.226)$$

Înlocuind relațiile (8.225) și (8.226) în (8.224), obținem proiecțiile accelerației punctului curent M pe axele mobile:

$$a_x = a_{Ox} - \varepsilon_I y - \omega_I^2 x; \quad a_y = a_{Oy} + \varepsilon_I x - \omega_I^2 y; \quad a_z = 0. \quad (8.227)$$

Proiecțiile a_{Ox} și a_{Oy} le obținem din expresia (8.225) pe care o înmulțim scalar cu versorii \overline{i} respectiv \overline{j} dați de formulele (8.170). Rezultă:

$$a_{Ox} = \ddot{x}_0 \cos \theta + \ddot{y}_0 \sin \theta; \quad a_{Oy} = -\ddot{x}_0 \sin \theta + \ddot{y}_0 \cos \theta \quad (8.228)$$

În mișcarea plană, distribuția de accelerații se obține ca o suprapunere de două distribuții: una într-o mișcare de translație cu accelerația $\overline{a_0}$ a punctului O și alta într-o mișcare de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul mișcării ce trece prin punctul I , cu vectorii $\overline{\varepsilon_I}$ și $\overline{\omega_I}$ coliniari. Accelerația de rotație are două componente: $\overline{\varepsilon_I} \times \overline{r}$ perpendiculară pe \overline{OM} de mărime $\varepsilon_I r$, numită tangențială, precum și componenta normală $-\omega_I^2 \overline{r}$, având direcția \overline{OM} și mărimea $\omega_I^2 r$.

Ca și în cazul distribuției de viteze, ne punem problema existenței unui punct (notat cu J) care să aibă accelerația nulă la un moment dat: $\overline{a_J} = 0$, punct care se va numi polul accelerațiilor. Presupunem că există un asemenea punct, a cărui poziție în

raport cu reperele O și O_1 este determinată de vectorii $\overline{r_J}$ respectiv $\overline{r_{1J}}$ pentru care $\overline{a_J} = 0$. Din formula (8.224), accelerația punctului J este:

$$\overline{a_J} = \overline{a_0} + \overline{\varepsilon_I} \times \overline{r_J} - \omega_I^2 \overline{r_J} = \overline{0} \quad (8.229)$$

Pentru determinarea poziției punctului J din relația (8.229), înmulțim această relație vectorial la stânga cu $\overline{\varepsilon_I}$ și apoi cu ω_I^2 :

$$\overline{\varepsilon_I} \times \overline{a_0} + \overline{\varepsilon_I} \times (\overline{\varepsilon_I} \times \overline{r_J}) - \omega_I^2 \overline{\varepsilon_I} \times \overline{r_J} = \overline{0} \quad (8.230)$$

$$\omega_I^2 \overline{a_0} + \omega_I^2 \overline{\varepsilon_I} \times \overline{r_J} - \omega_I^4 \overline{r_J} = \overline{0} \quad (8.231)$$

Prin adunarea relațiilor (8.230) și (8.231), obținem:

$$\overline{\varepsilon_I} \times \overline{a_0} + \overline{\varepsilon_I} \times (\overline{\varepsilon_I} \times \overline{r_J}) + \omega_I^2 \overline{a_0} - \omega_I^4 \overline{r_J} = \overline{0} \quad (8.232)$$

Ținând seama că vectorii $\overline{\varepsilon_I}$ și $\overline{r_J}$ sunt perpendiculari, al doilea termen al relației (8.232) se mai scrie:

$$\overline{\varepsilon_I} \times (\overline{\varepsilon_I} \times \overline{r_J}) = -\varepsilon_I^2 \overline{r_J} \quad (8.233)$$

Din relația (8.232) va rezulta:

$$\overline{r_J} = \frac{\overline{\varepsilon_I} \times \overline{a_0} + \omega_I^2 \overline{a_0}}{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (8.234)$$

Un astfel de punct J este deci determinat în mod unic. Vectorul $\overline{r_J}$ este un vector variabil, punctul J se găsește în planul mobil al mișcării, dar nu este neapărat un punct al secțiunii (S) a corpului rigid.

În raport cu sistemul de referință mobil, coordonatele polului J sunt:

$$x_J = \frac{\omega_I^2 a_{0x} - \varepsilon_I a_{0y}}{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}; \quad y_J = \frac{\omega_I^2 a_{0y} + \varepsilon_I a_{0x}}{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (8.235)$$

Vectorul de poziție al punctului J față de reperul fix O_1 este:

$$\overline{r_{1J}} = \overline{r_O} + \overline{r_J} = \overline{r_O} + \frac{\overline{\varepsilon_I} \times \overline{a_0} + \omega_I^2 \overline{a_0}}{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (8.236)$$

de unde obținem coordonatele sale față de sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$:

$$x_{1J} = x_O + x_J \cos \theta - y_J \sin \theta; \quad y_{1J} = y_O + x_J \sin \theta + y_J \cos \theta \quad (8.237)$$

$$\text{sau: } x_{1J} = x_O + \frac{\omega_I^2 \ddot{x}_O - \varepsilon_I \ddot{y}_O}{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}, \quad y_{1J} = y_O + \frac{\omega_I^2 \ddot{y}_O + \varepsilon_I \ddot{x}_O}{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (8.238)$$

Luând polul accelerațiilor J ca punct de referință, accelerația unui punct arbitrar M al secțiunii (S) este:

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{JM} - \omega_I^2 \overline{JM} \quad (8.239)$$

deoarece $\overline{a_J} = 0$.

Polul accelerațiilor are proprietatea remarcabilă că **la un moment dat**, distribuția de accelerații în mișcarea plan-paralelă este identică cu cea dintr-o mișcare

de rotație, **ca și cum** secțiunea (S) **s-ar roti** în jurul polului accelerațiilor J cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_I$ și accelerația unghiulară $\overline{\varepsilon}_I$. Axa (Δ_I) a mișcării instantanee, perpendiculară în punctul J pe planul fix, nu coincide în general cu axa instantanee de rotație (Δ), definită la distribuția de viteze.

Pentru studiul distribuției de accelerații în mișcarea plană a rigidului, prezintă importanță deosebită determinarea poziției polului accelerațiilor.

8.6.5. Metode pentru determinarea distribuției de accelerații

Vom prezenta câteva metode pentru determinarea distribuției accelerațiilor și a polului accelerațiilor J în funcție de elementele cunoscute ale mișcării unor puncte particulare din planul mișcării.

a) *Metoda polului accelerațiilor* este o metodă grafo-analitică ce se bazează pe proprietatea că distribuția de accelerații este identică cu cea a unei mișcări de rotație în jurul unei axe (Δ_I) ce trece prin polul accelerațiilor și este perpendiculară pe planul mișcării.

Pentru aplicarea metodei polului accelerațiilor, presupunem cunoscute accelerația \overline{a}_A a unui punct A din corp, viteza unghiulară $\overline{\omega}_I$ și accelerația unghiulară $\overline{\varepsilon}_I$. Cea mai mare importanță pentru aplicarea acestei metode o are determinarea poziției polului accelerațiilor J. Aceasta se poate face grafo-analitic sau grafic.

Determinarea grafo-analitică a polului accelerațiilor

Pentru început, presupunem cunoscut punctul J. Accelerația punctului A are două componente: o componentă tangențială $\overline{\varepsilon}_I \times \overline{JA}$ de mărime $a_\tau = \varepsilon_I \cdot JA$, direcția

perpendiculară pe vectorul \overline{JA} și sensul dat de vectorul $\overline{\varepsilon}_I$; a doua componentă, normală $\overline{\omega}_I \times (\overline{\omega}_I \times \overline{JA}) = -\omega_I^2 \overline{JA}$ având direcția vectorului \overline{JA} , sensul de la A spre J, iar mărimea $a_n = \omega_I^2 JA$. Mărimea accelerației punctului A este:

$$a_A = JA \sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (8.240)$$

Din relația (8.240) deducem prima formulă pentru determinarea polului accelerațiilor:

$$JA = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}} \quad (8.241)$$

$$\text{Din figura 8.34. deducem: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{JA \varepsilon_I}{JA \omega_I^2}$$

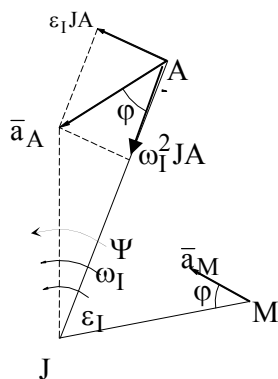


fig.8.34

unde prin φ am notat unghiul dintre $\overline{a_A}$ și componenta sa normală, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$. Rezultă deci a doua formulă necesară pentru determinarea polului accelerațiilor:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon_I}{\omega_I^2}, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \quad (8.242)$$

Sensul unghiului φ este același cu al accelerației unghiulare instantanee $\overline{\varepsilon_I}$.

Unghiul ψ sub care se vede accelerația punctului A din polul J al accelerațiilor este dat de formula (fig. 8.34):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\varepsilon_I JA}{JA - \omega_I^2 JA} = \frac{\varepsilon_I}{1 - \omega_I^2} \quad (8.243)$$

Deoarece ω_I și ε_I nu se modifică de la un punct la altul, la același moment dat, din relațiile (8.242) și (8.243) rezultă că și unghiurile φ și ψ nu se schimbă de la punct la punct. Deci, la un moment dat, accelerațiile tuturor punctelor din secțiunea (S) fac cu dreapta ce unește punctul respectiv cu polul accelerațiilor J, același unghi, iar din polul accelerațiilor, accelerațiile tuturor punctelor se văd sub același unghi ψ .

În concluzie polul accelerațiilor J se determină astfel:

-prin punctul A se duce o dreaptă înclinată cu unghiul φ față de accelerația $\overline{a_A}$, unghiul φ având același sens cu accelerația unghiulară ε_I și cu mărimea dată de ecuația trigonometrică (8.242).

-pe dreapta dusă prin punctul A se determină polul accelerațiilor J cu mărimea AJ dată de relația (8.241).

Accelerația unui punct arbitrar M se determină ca la mișcarea de rotație cu axa perpendiculară în J pe planul secțiunii (S), cu viteza unghiulară ω_I și accelerația unghiulară ε_I , calculând cele două componente:

$$a_n = \omega_I^2 JM ; a_\tau = \varepsilon_I JM \quad (8.244)$$

Aplicatia1: Mecanismul bielă-manivelă din figura 8.35 este pus în mișcare de manivela OA care se rotește cu o viteză unghiulară egală cu:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 t}, 0 \leq t < \frac{1}{\omega_0}, \omega_0 > 0.$$

Să se determine pentru biela AB: centrul instantaneu de rotație, baza, rostogolitoarea, polul accelerațiilor, viteza și accelerația mijlocului M al lui AB dacă OA=OB=1.

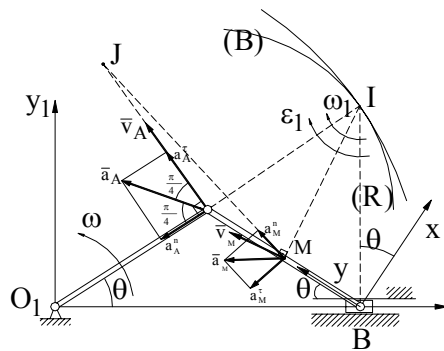


fig. 8.35.

Rezolvare: Centrul instantaneu de rotație I al bielei AB care are o mișcare plană se află la intersecția dintre perpendiculara în B pe OB, și OA. Față de sistemul

de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ coordonatele lui I sunt: $x_{1I} = 2l \cos \theta$, $y_{1I} = 2l \sin \theta$ unde

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 t}, \text{ astfel că baza este cercul de ecuație: } x_{1I}^2 + y_{1I}^2 = 4l^2.$$

Față de reperul mobil Bxy (By de-a lungul bielei AB), coordonatele lui I sunt: $x_I = 2l \sin \theta \cos \theta$, $y_I = 2l \sin^2 \theta$ ceea ce conduce la ecuația analitică a rostogolitoarei: cercul de ecuație $x_I^2 + y_I^2 - 2ly_I = 0$. Baza (cercul de centru O_1 și rază $2l$) și rostogolitoarea (cerc de centru A și rază l) sunt tangente interior, după cum se știe în punctul I. Viteza unghiulară instantanee ω_I se determină din relația

$$v_A = l\omega = l\omega_I \text{ și deci } \omega_I = \omega = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 t} \text{ (sensul lui } \omega_I \text{ este opus sensului lui } \omega).$$

Urmează că accelerația unghiulară este $\varepsilon_I = \dot{\omega}_I = \frac{\omega_0^2}{(1 - \omega_0 t)^2}$ și are același sens cu ω_I .

Viteza punctului M este perpendiculară pe IM, are sensul lui ω_I și mărimea

$$v_M = IM\omega = \frac{l\omega_0}{2(1 - \omega_0 t)} \sqrt{1 + 8\sin^2 \theta}. \text{ Pentru determinarea polului J al accelerațiilor,}$$

considerăm ca punct de referință A: componenta tangențială a accelerației punctului

$$A \text{ este } a_A^r = l\varepsilon = \frac{l\omega_0^2}{(1 - \omega_0 t)^2} \text{ iar cea normală } a_A^n = l\omega^2 = \frac{l\omega_0^2}{(1 - \omega_0 t)^2}, \text{ astfel că accelerația}$$

punctului A care face unghiul $\frac{\pi}{4}$ cu manivela O_1A , are mărimea

$$a_A = \sqrt{(a_A^r)^2 + (a_A^n)^2} = \frac{l\sqrt{2}\omega_0^2}{(1 - \omega_0 t)^2}. \text{ Distanța de la A la J este } JA = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}} = l \text{ iar unghiul}$$

φ dintre $\overline{a_A}$ și \overline{AJ} este $\varphi = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Urmează că $AJ \perp O_1A$, $AJ = l$ (fig. 8.35).

Punctul M are componenta tangențială a accelerației

$$a_M^r = MJ\varepsilon_I = \frac{l\omega_0}{1 - \omega_0 t} \sqrt{5 + \sin 2\theta}, \quad (\overline{a_M^r} \perp \overline{JM}) \text{ iar cea normală}$$

$$a_M^n = MJ\omega_I^2 = \frac{l\omega_0}{1 - \omega_0 t} \sqrt{5 + \sin 2\theta} \text{ (coliniară cu } \overline{MJ}). \text{ Accelerația punctului M}$$

formează unghiul $\varphi = \frac{\pi}{4}$ în sensul lui ε_I cu JM și are mărimea

$$a_M = \sqrt{(a_M^r)^2 + (a_M^n)^2} = \frac{l\omega_0}{1 - \omega_0 t} \sqrt{2(5 + \sin 2\theta)}.$$

Determinarea grafică a polului accelerațiilor se poate aplica dacă se cunosc \vec{a}_A și \vec{a}_B a două puncte A și B aparținând aceleși secțiuni (S) a corpului rigid.

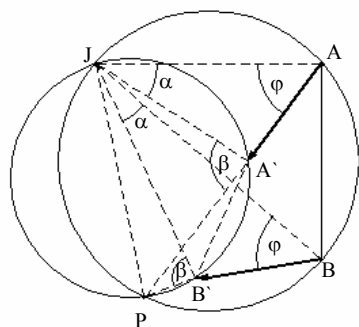


fig. 8.36

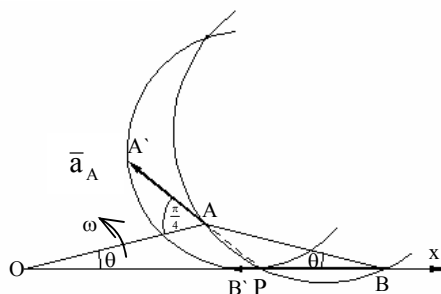


fig. 8.37

Polul accelerațiilor se construiește în felul următor: se desenează la scară accelerațiile $\vec{a}_A = \vec{AA'}$ și $\vec{a}_B = \vec{BB'}$. Suporturile lor se intersectează în punctul P. se construiesc cercurile circumscrise $\triangle ABP$ și $\triangle A'B'P$. Al doilea punct de intersecție al acestor două cercuri este polul J căutat (fig. 8.36).

Pentru demonstrarea acestor afirmații, presupunem cunoscut unghiul φ . Din A și B ducem drepte care formează unghiul φ cu AA' respectiv BB' în același sens, care, după cum se știe, se intersectează în polul accelerațiilor J. Deoarece $\angle PAJ = \angle PBJ$ urmează că patrulaterul ABPJ este inscriptibil. Dar

$$a_A = AA' = JA \sqrt{\varepsilon_l^2 + \omega_l^4},$$

$$a_B = BB' = JB \sqrt{\varepsilon_l^2 + \omega_l^4}$$

astfel că $\frac{AA'}{BB'} = \frac{JA \sqrt{\varepsilon_l^2 + \omega_l^4}}{JB \sqrt{\varepsilon_l^2 + \omega_l^4}} = \frac{JA}{JB}$. Din

această proporționalitate de laturi și ținând seama că $\angle JAA' = \angle JBB' = \varphi$, rezultă asemănarea $\triangle JAA'$ și $\triangle JBB'$. Această asemănare conduce la egalitatea unghiurilor $\angle JAA'$ și $\angle JBB'$ ($=\alpha$) precum și a unghiurilor $\angle JAP$ și $\angle JBP$ (notate cu β) unde am notat $\beta = \alpha + \varphi$. În acest fel patrulaterul $A'B'PJ$ este inscriptibil, și deci J este la intersecția celor două cercuri astfel construite.

Aplicatia2: Pentru mecanismul bielă-manivelă de la aplicația anterioară să se determine grafic poziția polului accelerațiilor pentru $\omega = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 t}$, $t < \frac{1}{\omega_0}$, $\theta < \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare: Accelerația punctului A formează unghiul $\pi/4$ cu OA, are mărimea $a_A = \sqrt{2}l\omega^2$ și sensul lui ω . Accelerația punctului B are direcția axei Ox, sensul spre O iar mărimea este modulul derivatei a doua în raport cu timpul a distanței OB: $a_B = 2l\omega^2 \cos \theta$.

În figura 8.37 s-au figurat la scară segmentele $AA' = a_A$ și $BB' = a_B$. Punctul P se află la intersecția dreptelor AA' și BB' . Cercurile circumscrise triunghiurilor $\triangle ABP$ și $\triangle A'B'P$ se intersectează în polul J al accelerațiilor.

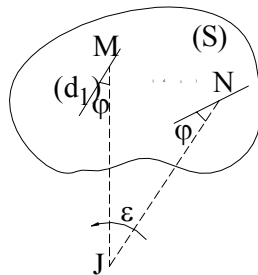


fig. 8.38.

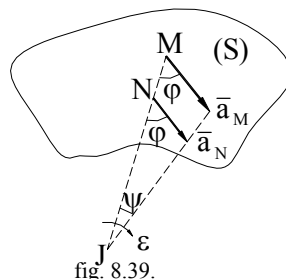


fig. 8.39.

Observații: 1. Dacă se cunosc direcțiile (d_1) și (d_2) ale accelerațiilor a două puncte M și N din secțiunea (S) a rigidului și unghiul $\varphi (= \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2})$ (fig. 8.38), atunci polul J al accelerațiilor se află la intersecția dreptelor duse prin M și N care formează cu direcțiile (d_1) și (d_2) unghiul φ măsurat în sens trigonometric dacă $\varphi > 0$ și în sens invers trigonometric pentru $\varphi < 0$.

2. Dacă accelerațiile $\overline{a_M}$, $\overline{a_N}$ a două puncte M și N din secțiunea (S) sunt paralele, dar de mărimi diferite, atunci polul accelerațiilor se va afla la intersecția dreptelor care unesc originile și respectiv extremitățile celor doi vectori (fig. 8.39). Această construcție rezultă din proprietatea că accelerațiile $\overline{a_M}$, $\overline{a_N}$ se văd din punctul J sub același unghi ψ (dat de formula 8.243). Dacă vectorii accelerație $\overline{a_M}$, $\overline{a_N}$ ar fi egali, am avea o distribuție de accelerații de translație și asta ar duce la concluzia că $\varepsilon_I = 0$ și $\omega_I = 0$, ceea ce nu este posibil deoarece secțiunea (S) este în mișcare.

b) *Metoda planului accelerațiilor.* Această metodă este analogă metodei planului vitezelor. Se consideră un corp care are o mișcare plană (fig. 8.40) în care la un moment dat, accelerațiile punctelor A, B și C sunt respectiv $\overline{a_A}$, $\overline{a_B}$, $\overline{a_C}$. Planul accelerațiilor se obține alegând un punct arbitrar q în care se aplică vectorii echipolenți $q\alpha$, $q\beta$, $q\gamma$ cu $\overline{a_A}$, $\overline{a_B}$, $\overline{a_C}$. Toate accelerațiile se reprezintă grafic la o scară convenabil aleasă. Prin această construcție grafică, oricărui punct M al rigidului din planul mișcării (fig. 8.40a) îi corespunde un punct m în planul accelerațiilor (fig. 8.40b).

Considerând punctul A ca punct de referință, accelerația punctului B este:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \varepsilon_I \times \overline{AB} - \omega_I^2 \overline{AB} \quad (8.245)$$

Din figura 8.40b și cu ajutorul relației (8.245), obținem:

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{a_B} - \overline{a_A} = \varepsilon_I \times \overline{AB} - \omega_I^2 \overline{AB} \quad (8.246)$$

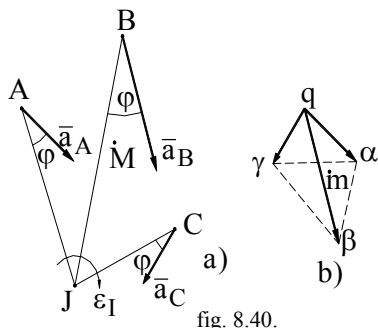


fig. 8.40.

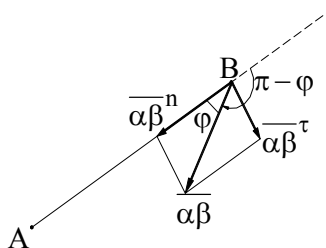


fig. 8.41.

Din relația (8.246) deducem unele proprietăți ale planului accelerațiilor. Astfel, dacă descompunem vectorul $\overline{\alpha\beta}$ după două direcții: una este \overline{AB} , notată $\overline{\alpha\beta}^n = -\omega_I^2 \overline{AB}$ iar cealaltă este perpendiculară pe \overline{AB} , notată $\overline{\alpha\beta}^\tau = \varepsilon_I \times \overline{AB}$, atunci unghiul dintre vectorii \overline{BA} și $\overline{\alpha\beta}$ este tocmai φ dat de relația (8.242). Prin urmare, segmentul $\alpha\beta$ este rotit față de segmentul AB în sensul lui ε_I cu unghiul $\pi - \varphi$ (fig. 8.41). În acest fel, laturile triunghiului $\alpha\beta\gamma$ sunt rotite față de laturile triunghiului ABC cu același unghi $\pi - \varphi$, deci cele două triunghiuri sunt asemenea, având unghiuri egale. Mărimea segmentului $\alpha\beta$ se determină din relația (8.246): $\alpha\beta = AB\sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}$ și deci:

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (8.247)$$

La un moment dat, raportul dintre segmentele din planul accelerațiilor și cele din planul mișcării este același pentru orice pereche de puncte. Pentru punctele A, B, C respectiv α, β, γ se poate scrie:

$$\frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\alpha\gamma}{AC} = \frac{\beta\gamma}{BC} = \sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (8.248)$$

Astfel că raportul de asemănare al triunghiurilor $\Delta\alpha\beta\gamma$ și ΔABC este $\sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}$.

În concluzie, figurile obținute în planul accelerațiilor sunt asemenea cu cele corespondente din planul mișcării și rotite cu unghiul $\pi - \varphi$ în sensul accelerației unghiulare ε_I . Astfel, cu ajutorul planului accelerațiilor se poate determina accelerația oricărui punct al secțiunii (S). Dacă în particular, punctele A, B și C sunt coliniare, atunci și punctele α, β, γ sunt coliniare iar γ împarte segmentul $\alpha\beta$ în același raport în care punctul C împarte segmentul AB.

Aplicație: Să se determine distribuția de accelerații pentru mecanismul din figura 8.42a cunoscând lungimile celor trei bare și viteza unghiulară constantă ω , în poziția arătată.

Rezolvare: Deoarece vom avea nevoie de unele elemente din planul vitezelor, în figura 8.42b am construit vectorul $\overline{pa} = \overline{v_A}$ de mărime $pa = v_A = OA \cdot \omega$ și direcția perpendiculară pe OA. Viteza punctului B este perpendiculară pe O'B în sensul lui ω , mărimea v_B rezultând din condiția ca proiecțiile pe AB a vitezelor $\overline{v_A}$ și $\overline{v_B}$ să fie aceleași.

Și pentru planul accelerațiilor și pentru planul vitezelor folosim același factor de

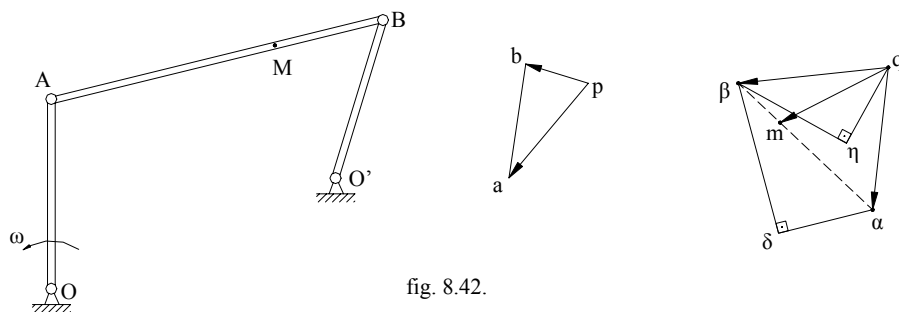


fig. 8.42.

scară. Accelerația punctului A este cunoscută: deoarece ω este constantă, accelerația are direcția \overline{AO} și mărimea $a_A = \omega^2 OA$. Construim în planul accelerațiilor $\overline{qa} = \overline{a_A}$. Deoarece viteza unghiulară a barei O'B este funcție de timp, nu se cunoaște nici direcția și nici sensul accelerației $\overline{a_B}$. În acest caz trebuie să folosim două ecuații pentru a determina punctul β – corespundentul lui B. Prima exprimare o scriem pentru distribuția de accelerații în mișcarea plană a barei AB:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega_l^2 \overline{AB} \quad (8.249)$$

iar a doua pentru distribuția de accelerații în mișcarea de rotație cu axa fixă a barei O'B:

$$\overline{a_B} = \overline{a_B^t} + \overline{a_B^n} = \overline{\varepsilon'} \times \overline{O'B} + \overline{\omega'} \times (\overline{\omega'} \times \overline{O'B}) \quad (8.250)$$

Viteza unghiulară instantanee ω_l nu este cunoscută și deci nici componenta $-\omega_l^2 \overline{AB}$, dar este paralelă cu \overline{BA} . Pentru a determina scalarul $\omega_l^2 \cdot \overline{AB}$ folosim planul vitezelor și formula:

$$\overline{v_B} - \overline{v_A} = \overline{\omega} \times \overline{AB} \quad (8.251)$$

din care deducem, folosind și figura 8.42b:

$$\omega_l^2 \overline{AB} = \frac{(\overline{v_B} - \overline{v_A})^2}{AB} = \frac{(ab)^2}{AB} \quad (8.252)$$

În planul accelerațiilor construim segmentul $\alpha\delta$ paralel cu AB din planul mișcării și de mărime $\alpha\delta = \omega_l^2 AB = \frac{(ab)^2}{AB}$. În formula (8.250), componenta normală este complet cunoscută: $\overline{a_B^n} \parallel \overline{BO}$ și are mărimea $a_B^n = \omega^2 \cdot O'B = \frac{(O'B \cdot \omega')^2}{O'B} = \frac{v_B^2}{O'B}$ unde v_B se cunoaște din planul vitezelor. În planul accelerațiilor, construim segmentul $q\eta$ paralel cu BO' de mărime $q\eta = a_B^n = \frac{v_B^2}{O'B}$. Componenta $\overline{\varepsilon_l} \times \overline{AB}$ are direcția perpendiculară pe AB iar componenta $\overline{a_B^r}$ are direcția perpendiculară pe O'B. Din aceste considerente, putem construi corespondentul lui B: punctul β care se va afla la intersecția perpendicularelor în δ pe $\alpha\delta$ și în η pe $q\eta$. Accelerația punctului B va fi vectorul $\overline{q\beta}$ din planul accelerațiilor. Accelerația punctului M va fi $\overline{a_M} = \overline{qm}$ unde punctul m este corespondentul lui M din planul mișcării în planul accelerațiilor:

$$\frac{\alpha m}{m\beta} = \frac{AM}{MB} \quad (8.253)$$

c) Metoda planului vitezelor și al accelerațiilor

Distribuția de viteze și accelerații pentru secțiunea (S) aflată în mișcare plană, se poate face folosind planul vitezelor și accelerațiilor. Pentru a construi planul

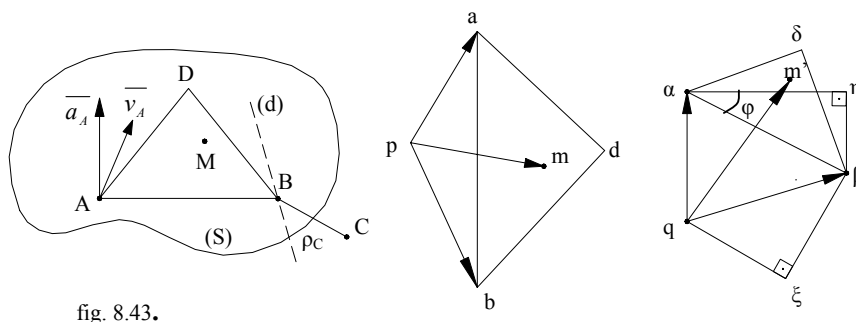


fig. 8.43.

vitezelor trebuie să cunoaștem la un moment dat al mișcării viteza unui punct ca vector precum și direcția vitezei unui alt punct. Pentru planul accelerațiilor trebuie să cunoaștem accelerația unui punct și raza de curbură a traiectoriei unui alt punct.

Notăm cu A punctul căruia la un moment dat i se cunosc viteza $\overline{v_A}$ și accelerația $\overline{a_A}$, (d) este dreapta suport a vitezei punctului B și ρ_C raza de curbură a traiectoriei punctului B (C fiind centrul de curbură al traiectoriei punctului B) (fig.8.43a). Pentru simplificarea factorilor de scară pentru viteze și accelerații îi presupunem unitari. Pentru construcția planului vitezelor, ducem din polul p vectorul $\overline{pa} = \overline{v_A}$ și o paralelă cu dreapta (d), pe care se va mai afla punctul b. Dar

$$\overline{v_B} - \overline{v_A} = \overline{\omega} \times \overline{AB} = \overline{pb} - \overline{pa} \quad (8.254)$$

astfel că vectorul \overline{AB} este perpendicular pe vectorul diferență $\overline{pb} - \overline{pa}$, ceea ce înseamnă că punctul b se va afla pe perpendiculara în a pe AB. Urmează imediat poziția lui b: intersecția paralelei prin p la (d) cu perpendiculara din a pe AB.

Viteza unghiulară instantanee ω_I a secțiunii (S) care efectuează o mișcare plană este dată de relația (8.216):

$$\omega_I = \frac{ab}{AB} \quad (8.255)$$

Punctul d se determină astfel ca triunghiurile ΔABD și Δabd să fie asemenea și cu laturile respectiv perpendiculare două câte două.

Viteza oricărui punct M al secțiunii (S) este imediată:

$$\overline{v_M} = \overline{pm} \quad (8.256)$$

unde m este corespondentul lui M din planul mișcării în planul vitezelor.

Pentru construirea planului accelerațiilor ducem $\overline{qa} = \overline{a_A}$ într-un punct arbitrar q (fig. 8. 43c). Pentru accelerația punctului B scriem două relații: una pentru distribuția de accelerații în mișcarea plană:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{\varepsilon_I} \times \overline{AB} - \omega_I^2 \overline{AB} \quad (8.257)$$

și alta pentru distribuția de accelerații în mișcarea de rotație cu axă fixă:

$$\overline{a_B} = \overline{a_B^r} + \overline{a_B^n} \quad (8.258)$$

În formula (8.257), componenta $-\omega_I^2 \overline{AB}$ este paralelă cu AB și cu ajutorul relației (8.255), deducem mărimea ei:

$$\omega_I^2 \cdot AB = \frac{(ab)^2}{AB} \quad (8.259)$$

În planul accelerațiilor, construim punctul η astfel încât $\alpha\eta \parallel AB$ și $\alpha\eta = \frac{(ab)^2}{AB}$, cu ab determinat din planul vitezelor (fig. 8.43b). Componenta $\overline{\varepsilon_I} \times \overline{AB}$

este perpendiculară pe AB deci pe $\alpha\eta$, astfel că punctul β – corespondentul lui B din planul mișcării în planul accelerațiilor – se va afla pe această perpendiculară în η pe $\alpha\eta$. În relația (8.258), componenta normală are direcția BC și mărimea:

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{\rho_C} = \frac{(pb)^2}{BC} \quad (8.260)$$

ceea ce conduce la construcția segmentului $q\xi$ paralel cu BC și de mărime:

$$q\xi = a_B^n = \frac{(pb)^2}{BC} \quad (8.261)$$

Componenta tangențială $\overline{a_b^t}$ este perpendiculară pe $\overline{a_b^n}$ deci pe $q\xi$. Punctul β se va afla și pe perpendiculara în ξ pe $q\xi$, deci poziția lui β este imediată. Accelerația punctului B va fi: $\overline{a_B} = q\beta$ (8.262)

Punctul δ se obține imediat prin construcția triunghiului $\Delta\alpha\beta\delta$ asemenea cu ΔABD . Accelerația punctului arbitrar M va fi vectorul:

$$\overline{a_M} = qm' \quad (8.263)$$

unde m' este corospondentul lui M în planul accelerațiilor.

Unghiul φ este dat de relația (fig. 8.43c):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta\beta}{\alpha\eta} = \frac{\varepsilon_I}{\omega_I^2} \quad (8.264)$$

și de aici, cu ajutorul relației (8.225) obținem accelerația unghiulară a secțiunii (S):

$$\varepsilon_I = \frac{\eta\beta(ab)^2}{\alpha\eta(AB)^2} \quad (8.265)$$

8.6.6. Cercurile lui Bresse

Sunt unele situații când interesează precizarea locului geometric al punctelor

din secțiunea (S) din planul mișcării pentru care la un moment dat unghiul dintre vectorii viteză și accelerație ai aceluiași punct are o valoare dată α .

La momentul considerat, presupunem cunoscute pozițiile centrului instantaneu de rotație I, al polului accelerațiilor J și al unghiului φ (dat de relația (8.242)). Fie un punct M al locului geometric căutat (fig. 8.44). Pentru început, considerăm cazul când vectorul accelerație este situat între vectorul viteză și dreapta MJ și $\alpha < \pi/2$. Din punctul M segmentul IJ se vede sub unghiul $\beta = |\pi/2 - \alpha - \varphi|$ astfel că dacă α și φ sunt aceleași pentru toate punctele căutate M, atunci și unghiul β rămâne nemodificat la momentul considerat. Urmează că

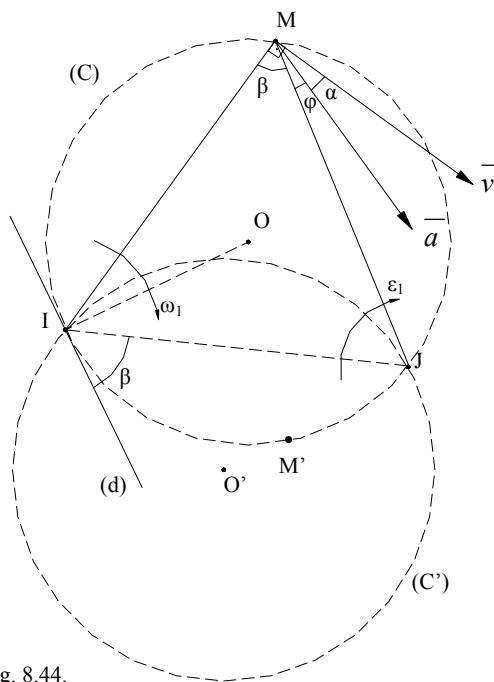


fig. 8.44.

din M, segmentul IJ se vede sub același unghi β . Toate punctele M care au această proprietate se găsesc pe arcul de cerc capabil de unghiul β și care se sprijină pe punctele I și J considerate fixe la momentul considerat. Locul geometric este arcul de cerc (C) circumscris triunghiului ΔMIJ cu excepția arcului IM'J, dar și arcul de cerc (C') simetricul arcului (C) față de segmentul IJ. Menționăm că pentru poziția M' a punctului M (fig. 8.44) unghiul α este mai mare ca $\pi/2$. Dacă se consideră $\alpha > \pi/2$, atunci locul geometric căutat este format din celelalte două arce de cerc simetrice și ele față de segmentul IJ, situate „sub” segmentul IJ. În cazul când vectorul vitează \vec{v} este cuprins între vectorul accelerație \vec{a} și segmentul MJ, unghiul β rămâne constant dar de mărime $\beta = \pi/2 + \alpha - \varphi$, locul geometric fiind tot două arce de cerc capabile de noul unghi β .

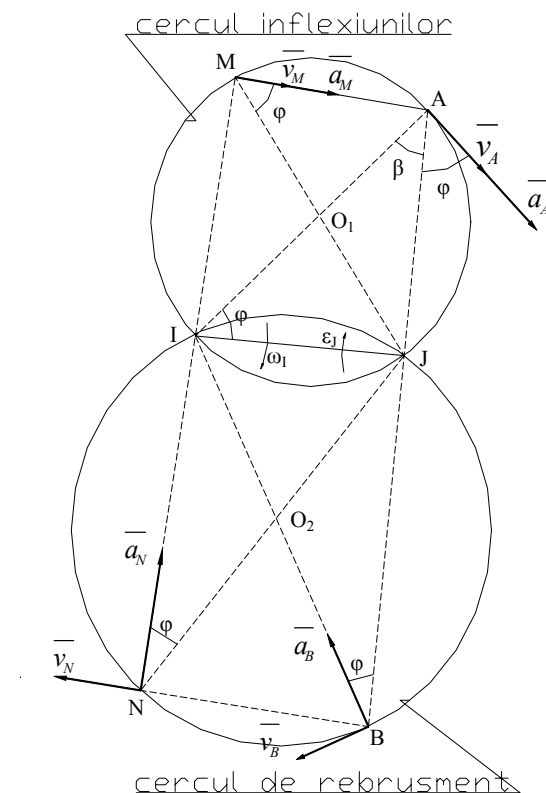


fig. 8.45.

Pentru construcția locului geometric, construim dreapta (d) în punctul I astfel că unghiul pe care îl formează cu IJ să fie chiar β . În acest fel dreapta (d) devine tangentă la cercul (C). Centrul O al cercului (C) se va afla deci la intersecția perpendicularelor în I pe dreapta (d) și în mijlocul lui IJ pe IJ.

În aplicații, au o importanță deosebită două locuri geometrice particulare, care se numesc cercurile lui Bresse. Acestea sunt cercul inflexiunilor la care viteza și accelerația unui punct al locului geometric sunt vectori coliniari și cercul de rebrusment la care viteza și accelerația unui punct al locului geometric sunt perpendiculare.

Pentru construcția acestor două cercuri, ducem de o parte și de cealaltă a segmentului IJ prin punctul I câte o dreaptă care formează unghiurile φ respectiv $\pi/2 - \varphi$ cu segmentul IJ (fig. 8.45). Perpendiculara în I pe IJ intersectează cele două drepte

în punctele A respectiv B. Cercul de diametru IA este cercul inflexiunilor pentru că unghiul $\beta = \pi/2 - \varphi$ iar cercul de diametru BI este cercul de rebrusment în care $\beta = \varphi$.

Dacă viteza unghiulară este constantă, urmează, că accelerația unghiulară și deci unghiul φ sunt nule. Punctul A coincide cu I deci cercul inflexiunilor va avea în acest caz diametrul IJ iar cercul de rebrusment nu există: nu există puncte care să aibă viteza și accelerația perpendiculare între ele.

O proprietate importantă a unui punct M de pe cercul inflexiunilor este următoarea: la un moment dat, viteza fiind tangentă la traiectorie, rezultă că și accelerația este tangentă la traictorie, astfel încât componenta normală a accelerației este nulă: $a_n = v^2 / \rho_c = 0$. Dar $v \neq 0$ astfel că rezultă $\rho_c = \infty$. Este cazul mișcării de translație, un caz particular al mișcării plane, dar este posibil ca punctul M să fie un punct în care se schimbă concavitatea traiectoriei, deci un punct de inflexiune de unde și denumirea de cerc al inflexiunilor.

În cazul unui punct N de pe cercul de rebrusment, accelerația este normală pe viteză, deci normală pe traiectorie, astfel încât componenta tangențială a accelerației este nulă: $a_t = \dot{v} = 0$. La momentul considerat punctul se deplasează astfel încât viteza are o valoare extremă.

Proprietățile cinematice deduse pentru cercurile de inflexiune și de rebrusment au aplicații importante în studiul mecanismelor plane.

8.7. Mișcarea rigidului cu un punct fix

Corpul rigid are o mișcare cu punct fix, dacă există un punct O care nu se mișcă față de un sistem de referință considerat fix.

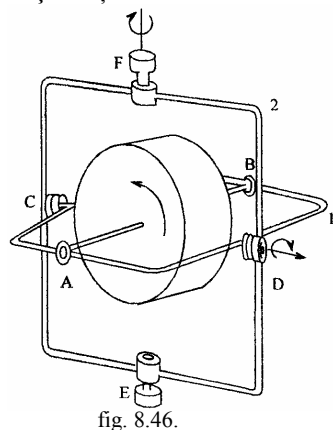


fig. 8.46.

În cazul acestei mișcări, toate punctele corpului cu excepția punctului fix O, ținând seama de rigiditatea corpului, au traiectoriile curbe situate pe sfere concentrice, centrul fiind punctul fix O. În consecință mișcarea rigidului cu un punct fix se mai numește și mișcare sferică. Deoarece punctul O este fix, rigidul poate efectua numai rotații. Exemple de corpuri cu punct fix sunt: busola giroscopică, giroscopul stabilizator la vapoare sau avioane, un corp suspendat cardanic, etc. În figura 8.46 este reprezentat un astfel de corp care se rotește în jurul punctului fix de intersecție al următoarelor trei axe de rotație concurente: volantul se rotește în jurul axei AB față de cadrul (1); acest ax se rotește în jurul axului CD perpendicular pe primul, față de cadrul (2); cadrul (2) se rotește în jurul axului EF.

8.7.1. Legile de mișcare

Considerăm corpul rigid (C) care are punctul fix O (fig. 8.47) bine determinat. Pentru a determina poziția rigidului la un moment dat, trebuie să se cunoască pozițiile a încă două puncte A și B care împreună cu O formează un triunghi. Punctele A și B introduc fiecare câte trei parametri de poziție care pot fi coordonatele lor față de un sistem de referință fix legat de punctul O. Între cei șase parametri există trei relații care exprimă faptul că distanțele dintre punctele O, A și B rămân invariabile tot timpul mișcării. Rezultă că numai $6-3=3$ parametri sunt independenți și prin urmare rigidul cu punct fix are trei grade de libertate în general.

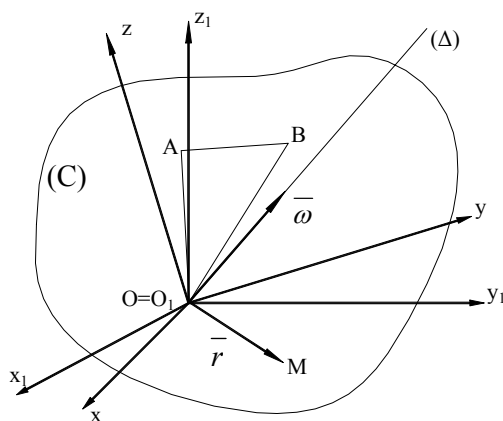


fig. 8.47.

Deplasările pe care le efectuează rigidul cu un punct fix O rezultă din rotații în jurul a trei axe concurente în O.

Pentru studiul mișcării corpului se alege sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$ presupus fix, cu originea O_1 în punctul fix al rigidului și sistemul mobil $Oxyz$ solidar cu corpul (fig. 8.47). Mișcarea rigidului este complet cunoscută dacă se cunoaște mișcarea sistemului de referință $Oxyz$ în raport cu sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$. Pentru determinarea poziției sistemului de referință mobil, este necesar să fie cunoscute

numai direcțiile axelor sale, pentru care sunt necesari trei parametri de poziție independenți. Prin urmare $\vec{r}_O = 0$ și deci:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 \quad (8.266)$$

astfel că legile de mișcare ale unui punct M din corp sunt obținute din relația (8.266) proiectată pe axele reperului fix:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos(\bar{i}, \bar{i}_1) + y \cos(\bar{j}, \bar{i}_1) + z \cos(\bar{k}, \bar{i}_1) \\ y_1 &= x \cos(\bar{i}, \bar{j}_1) + y \cos(\bar{j}, \bar{j}_1) + z \cos(\bar{k}, \bar{j}_1) \\ z_1 &= x \cos(\bar{i}, \bar{k}_1) + y \cos(\bar{j}, \bar{k}_1) + z \cos(\bar{k}, \bar{k}_1) \end{aligned} \quad (8.267)$$

Pentru studiul mișcării corpului cu punct fix, se pot folosi unghiurile lui Euler (fig. 8.48) care sunt trei parametri independenți și anume:

$$\psi = \psi(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t) \quad (8.268)$$

Se intersectează planele $O_1x_1y_1$ și Oxy și rezultă linia nodurilor ON. Unghiul dintre axele O_1x_1 și ON se notează cu ψ și se numește unghi de precesie. Unghiul

dintre axele ON și Ox se notează cu φ și se numește unghi de rotație proprie iar unghiul dintre axele O_1z_1 și Oz se notează cu θ și se numește unghi de nutație.

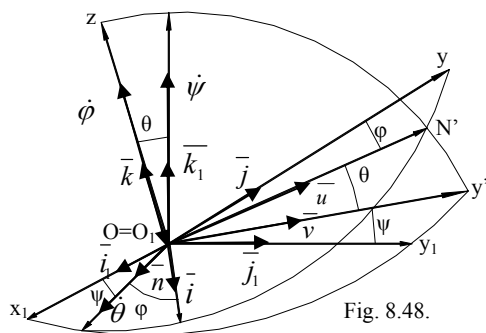


Fig. 8.48.

Unghiurile lui Euler trebuie luate în sensul arătat în figura 8.48. Pentru o anumită poziție a sistemului de referință mobil Oxyz corespund trei unghiuri ψ, φ, θ unic determinate.

Dar și reciproc, pentru trei unghiuri ψ, φ, θ corespunde o poziție precisă a sistemului mobil Oxyz care se obține în modul următor: în planul $O_1x_1y_1$ se consideră unghiul ψ , astfel rezultând linia ON a nodurilor; prin O se duce un plan perpendicular pe ON, în acest plan se consideră unghiul θ cu axa O_1z_1 , rezultă astfel axa Oz; prin O se construiește un plan perpendicular pe Oz, se consideră în acest plan unghiul φ cu axa nodurilor ON, obținând astfel axa Ox. Axa Oy va fi situată în acest plan perpendiculară pe Ox. Menționăm că poziția rigidului cu ajutorul unghiurilor lui Euler este caracterizată de aceste trei rotații în succesiunea arătată.

Pentru a stabili legătura între cosinusurile directoare și unghiurile lui Euler, pe lângă versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ ai axelor triedrului fix și $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ale triedrului mobil, se mai consideră: versorul \bar{n} al liniei nodurilor ON; versorul \bar{v} conținut în planul $O_1x_1y_1$ perpendicular pe \bar{n} în sensul de creștere al unghiului ψ (versorul axei $Oy' \perp ON$ din figura 8.48) și versorul \bar{u} conținut în planul Oxy, perpendicular pe \bar{n} în sensul de creștere al unghiului φ (versorul axei $ON' \perp ON$ din figura 8.48). Cu ajutorul acestor versori se pot scrie următoarele relații de legătură:

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \cos\psi \bar{i}_1 + \sin\psi \bar{j}_1, \quad \bar{v} = -\sin\psi \bar{i}_1 + \cos\psi \bar{j}_1 \\ \bar{u} &= \cos\theta \bar{v} + \sin\theta \bar{k}_1, \quad \bar{k} = -\sin\theta \bar{v} + \cos\theta \bar{k}_1 \\ \bar{i} &= \cos\varphi \bar{n} + \sin\varphi \bar{u}, \quad \bar{j} = -\sin\varphi \bar{n} + \cos\varphi \bar{u}\end{aligned}\quad (8.269)$$

Pentru a exprima versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ în funcție de versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$, înlocuim expresiile versorilor $\bar{n}, \bar{v}, \bar{u}$ din primele trei relații din formulele (8.269) în ultimele trei și obținem:

$$\begin{aligned}\bar{i} &= (\cos\varphi \cos\psi - \cos\theta \sin\varphi \sin\psi) \bar{i}_1 + (\cos\varphi \sin\psi + \cos\theta \sin\varphi \cos\psi) \bar{j}_1 + \sin\theta \sin\varphi \bar{k}_1 \\ \bar{j} &= (-\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \cos\theta \sin\psi) \bar{i}_1 + (-\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\theta \cos\psi) \bar{j}_1 + \cos\varphi \sin\theta \bar{k}_1 \\ \bar{k} &= \sin\theta \sin\psi \bar{i}_1 - \sin\theta \cos\psi \bar{j}_1 + \cos\theta \bar{k}_1\end{aligned}\quad (8.270)$$

În acest fel se obțin cosinusurile directoare necesare în relația (8.267) și acestea sunt: $\cos(\bar{i}, \bar{i}_1) = \bar{i} \cdot \bar{i}_1 = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi$

$$\cos(\bar{j}, \bar{i}_1) = \bar{j} \cdot \bar{i}_1 = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi$$

$$\cos(\bar{k}, \bar{i}_1) = \bar{k} \cdot \bar{i}_1 = \sin \theta \sin \psi$$

$$\cos(\bar{i}, \bar{j}_1) = \bar{i} \cdot \bar{j}_1 = \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi$$

$$\cos(\bar{j}, \bar{j}_1) = \bar{j} \cdot \bar{j}_1 = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi$$

$$\cos(\bar{k}, \bar{j}_1) = \bar{k} \cdot \bar{j}_1 = -\sin \theta \cos \psi$$

$$\cos(\bar{i}, \bar{k}_1) = \bar{i} \cdot \bar{k}_1 = \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\bar{j}, \bar{k}_1) = \bar{j} \cdot \bar{k}_1 = \sin \theta \cos \varphi$$

$$\cos(\bar{k}, \bar{k}_1) = \bar{k} \cdot \bar{k}_1 = \cos \theta \quad (8.271)$$

Prin urmare, legile de mișcare date de relația (8.267) în funcție de unghiurile lui Euler sunt cunoscute. Relațiile (8.267) reprezintă legile mișcării absolute, respectiv ecuațiile parametrice ale traiectoriei unui punct arbitrar M față de sistemul de referință fix.

Prin ridicarea la pătrat a relațiilor (8.267), adunându-le membru cu membru și ținând seama de relațiile (8.271), rezultă:

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 = OM^2 (= R^2) \quad (8.272)$$

Din relația (8.272) deducem că traiectoria punctului M este o curbă situată pe sfera cu centrul O și rază OP (=R).

8.7.2. Distribuția de viteze în mișcarea rigidului cu punct fix

Punctul de referință O al corpului rigid (C) este fix, deci $\bar{v}_O = 0$ astfel că aplicând formula generală a distribuției de viteze, viteza punctului curent M are expresia:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (8.273)$$

unde $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară de rotație a sistemului mobil, deci a corpului la un moment dat. În acest caz, nu se mai face o restricție referitoare la vectorul $\bar{\omega}$, deci este un vector de modul și direcție variabile, suportul trece prin punctul fix O și deci:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} = \omega_{x_1} \bar{i}_1 + \omega_{y_1} \bar{j}_1 + \omega_{z_1} \bar{k}_1 \quad (8.274)$$

rezultă:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \quad (8.275)$$

de unde obținem proiecțiile vitezei pe axele legate de corp:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x \quad (8.276)$$

Proiecțiile vectorului vitează unghiulară pe axele mobile se obțin din formulele:

$$\omega_x = \dot{j} \cdot \bar{k} = -\bar{j} \cdot \dot{\bar{k}}, \quad \omega_y = \dot{k} \cdot \bar{i} = -\bar{k} \cdot \dot{\bar{i}}, \quad \omega_z = \dot{i} \cdot \bar{j} = -\bar{i} \cdot \dot{\bar{j}}, \quad (8.277)$$

iar proiecțiile vectorului $\bar{\omega}$ pe axele fixe, se obțin din relația (8.274) prin înmulțire scalară, respectiv cu versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \omega_x \cos(\bar{i}, \bar{i}_1) + \omega_y \cos(\bar{j}, \bar{i}_1) + \omega_z \cos(\bar{k}, \bar{i}_1) \\ \omega_{y_1} &= \omega_x \cos(\bar{i}, \bar{j}_1) + \omega_y \cos(\bar{j}, \bar{j}_1) + \omega_z \cos(\bar{k}, \bar{j}_1) \\ \omega_{z_1} &= \omega_x \cos(\bar{i}, \bar{k}_1) + \omega_y \cos(\bar{j}, \bar{k}_1) + \omega_z \cos(\bar{k}, \bar{k}_1) \end{aligned} \quad (8.278)$$

Viteza unghiulară $\bar{\omega}$ mai poate fi calculată și cu ajutorul unghiurilor lui Euler, folosind formulele (8.277), (8.270) și (8.278).

În cele ce urmează, vom realiza trei rotații succesive în jurul unor axe ce trec prin punctul fix, modificând pe rând cele trei unghiuri ale lui Euler. Rigidul cu punct fix poate fi adus dintr-o poziție într-alta printr-o rotație finită în jurul unei axe care trece prin punctul fix, numită axa rotațiilor finite. În acest sens, considerăm punctul arbitrar M cu vectorul de poziție $\bar{r} = \overline{OM}$ care se va deplasa în timpul elementar dt în poziția M_1 prin variația succesivă a unghiurilor lui Euler în sensul lor pozitiv de măsurare. Prin variația unghiului de precesie ψ , rigidul execută o mișcare de rotație în jurul axei O_1z_1 cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1 = \dot{\psi} \bar{k}_1$ (fig. 8.48). Aceasta este mișcarea de precesie când punctul M ajunge în M' . Deoarece deplasările le considerăm elementare, se aproximează arcele de cerc respective prin coardele corespunzătoare și putem scrie relații de forma:

$$d\bar{r} = \bar{v}dt = (\bar{\omega} \times \bar{r})dt \quad (8.279)$$

În cazul mișcării de precesie, relația (8.279) devine:

$$\overline{MM'} = (\bar{\omega}_1 \times \bar{r})dt \quad (8.280)$$

Iar vectorul de poziție al punctului M' este:

$$\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{MM'} = \bar{r} + (\bar{\omega}_1 \times \bar{r})dt \quad (8.281)$$

Prin variația unghiului de rotație proprie ϕ din planul Oxy, corpul execută o mișcare de rotație în jurul axei Oz cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ de mărime $\dot{\phi}$ dirijată

după Oz: $\overline{\omega_2} = \dot{\phi} \overline{k}$. Punctul M' ajunge în M'' astfel că putem scrie:
 $\overline{M'M''} = (\overline{\omega_2} \times \overline{OM'})dt$.

Ținând seama de relația (8.281) și neglijând factorul $(dt)^2$, obținem:

$$\overline{M'M''} = (\overline{\omega_2} \times \overline{r})dt + [\overline{\omega_2} \times (\overline{\omega_1} \times \overline{r})](dt)^2 = (\overline{\omega_2} \times \overline{r})dt \quad (8.282)$$

Vectorul de poziție al punctului M'' este:

$$\overline{OM''} = \overline{OM'} + \overline{M'M''} = \overline{r} + (\overline{\omega_1} \times \overline{r})dt + (\overline{\omega_2} \times \overline{r})dt \quad (8.283)$$

În final se variază unghiul de nutație θ , corpul executând o mișcare de rotație în jurul liniei nodurilor ON cu viteza unghiulară $\overline{\omega_3}$ de mărime $\dot{\theta}$ și dirijată după ON: $\overline{\omega_3} = \dot{\theta} \overline{n}$. În această poziție finală M_1 , se deduce:

$$\overline{M''M_1} = (\overline{\omega_3} \times \overline{OM''})dt = (\overline{\omega_3} \times \overline{r})dt + \{\overline{\omega_3} \times [(\overline{\omega_1} \times \overline{r}) + (\overline{\omega_2} \times \overline{r})]\}(dt)^2 = (\overline{\omega_3} \times \overline{r})dt \quad (8.284)$$

Prin urmare, deplasarea totală a punctului M în timpul dt de pe traseul $M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow M_1$ este:

$$\begin{aligned} \overline{MM_1} &= \overline{MM'} + \overline{M'M''} + \overline{M''M_1} = (\overline{\omega_1} \times \overline{r})dt + (\overline{\omega_2} \times \overline{r})dt + (\overline{\omega_3} \times \overline{r})dt = \\ &= [(\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \overline{\omega_3}) \times \overline{r}]dt \end{aligned} \quad (8.285)$$

De asemenea se poate exprima deplasarea punctului M considerând rotația în jurul axei instantanee de rotație: $\overline{MM_1} = (\overline{\omega} \times \overline{r})dt$ (8.286)

Din relațiile (8.285) și (8.286) obținem:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \overline{\omega_3} = \dot{\psi} \overline{k_1} + \dot{\phi} \overline{k} + \dot{\theta} \overline{n} \quad (8.287)$$

Proiecțiile pe axele sistemului de referință mobil ale relației (8.287) sunt:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \overline{\omega} \cdot \overline{i} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y &= \overline{\omega} \cdot \overline{j} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z &= \overline{\omega} \cdot \overline{k} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (8.288)$$

Analog, proiecțiile vectorului $\overline{\omega}$ pe axele sistemului de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \overline{\omega} \cdot \overline{i_1} = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \omega_{y_1} &= \overline{\omega} \cdot \overline{j_1} = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \omega_{z_1} &= \overline{\omega} \cdot \overline{k_1} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned} \quad (8.289)$$

Pentru a determina punctele unde viteza se anulează, din relația (8.273) rezultă condiția:

$$\overline{\omega} \times \overline{r} = 0 \quad (8.290)$$

care are loc pentru $\overline{r} = 0$ (punctul fix O), cât și pentru

$$\overline{r} = \lambda \overline{\omega}, \quad \lambda \in R \quad (8.291)$$

ceea ce înseamnă că cei doi vectori sunt coliniari.

Prin urmare, punctele a căror viteză se anulează la un moment dat, se află pe o dreaptă care trece prin punctul fix – și este suportul vectorului $\vec{\omega}$. Această dreaptă se va numi **axa instantanee de rotație** și este dreapta spre care tinde axa rotațiilor finite pentru $dt \rightarrow 0$. Din (8.273) deducem că distribuția de viteze la un moment dat se obține **ca și cum** rigidul s-ar fi rotit în jurul axei instantanee de rotație cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$.

În decursul mișcării corpului, axa instantanee de rotație își schimbă continuu poziția atât față de rigid, cât și față de sistemul referință fix, dar tot timpul trece prin punctul fix al rigidului. Prin urmare, axoidele mișcării corpului cu punct fix, sunt suprafețe conice cu vârful în punctul fix O. Prin definiție axoida mobilă sau **conul polodic** este locul geometric al axelor instantanee de rotație față de sistemul de referință legat de corp.

Ecuția analitică a axei instantanee de rotație față de sistemul de referință mobil se obține din relația (8.291) prin eliminarea parametrului λ :

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad (8.292)$$

unde x, y, z sunt coordonatele unui punct curent al axei instantanee de rotație iar proiecțiile $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ale vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ pe sistemul de referință mobil, date de relațiile (8.277) sau (8.288) sunt funcții de timp.

La același rezultat se putea ajunge și impunând condiția ca să se anuleze proiecțiile vitezei date de relația (8.276):

$$\omega_y z - \omega_z y = 0, \quad \omega_z x - \omega_x z = 0, \quad \omega_x y - \omega_y x = 0 \quad (8.293)$$

Eliminând timpul din ecuațiile (8.292) sau (8.293), rezultă ecuația analitică a conului polodic. Analog, locul geometric al axelor instantanee de rotație față de sistemul de referință fix, se numește axoidă fixă sau **con herpolodic**.

Ecuția analitică a axei instantanee de rotație față de sistemul de referință fix se obține tot din relația (8.273):

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}} \quad (8.294)$$

unde $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ sunt date de relațiile (8.278) sau (8.289) și sunt funcții de timp.

Eliminând timpul din relațiile (8.294) obținem ecuația analitică a axoidei fixe. Aceste două suprafețe riglate sunt numite **conurile lui Poinot**.

Cele două axoide au la un moment dat o generatoare comună care este axa instantanee de rotație. Mișcarea rigidului poate fi privită ca mișcarea axoidei mobile față de axoida fixă. Cunoașterea celor două suprafețe conice nu determină complet mișcarea corpului, deoarece conul polodic se poate rostogoli pe conul herpolodic după legi diferite.

Pentru această mișcare, vom demonstra în cele ce urmează următoarele două proprietăți (fig. 8.49):

suprafețele conice ale corpului cu punct fix sunt tangente după axa instantanee de rotație. Conul polodic se rostogolește fără alunecare peste conul herpolodic.

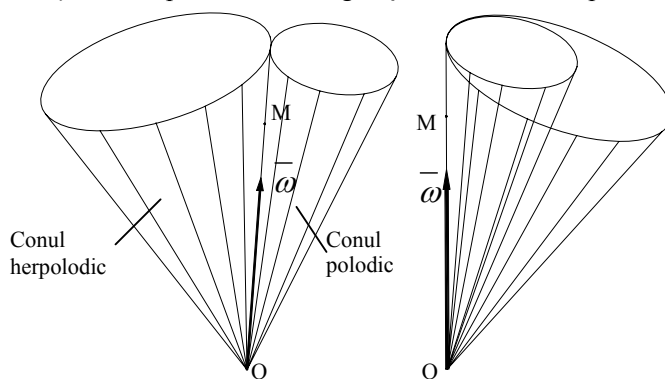


fig. 8.49.

Pentru a demonstra aceste proprietăți, considerăm un punct arbitrar M pe axa instantanee de rotație. Vectorii de poziție ai punctului M față de cele două sisteme de referință sunt:

$$\begin{aligned}\overline{r_{1M}} &= x_1 \overline{i}_1 + y_1 \overline{j}_1 + z_1 \overline{k}_1, \\ \overline{r_M} &= x \overline{i} + y \overline{j} + z \overline{k}\end{aligned}\quad (8.295)$$

Dar originile celor două sisteme de referință coincid, astfel că:

$$\overline{r_{1M}} = \overline{r_M} \quad (8.296)$$

Derivând în raport cu timpul relația (8.296) și ținând seama că vectorul $\overline{r_M}$ este raportat la reperul mobil, obținem:

$$\frac{d}{dt} \overline{r_{1M}} = \frac{\partial \overline{r_M}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{r_M} = \frac{\partial \overline{r_M}}{\partial t} \quad (8.297)$$

deoarece $\overline{v_M} = \overline{\omega} \times \overline{r_M} = 0$, punctul M fiind ales pe axa instantanee de rotație. Cei doi termeni ai relației (8.297) reprezintă vitezele cu care punctul M se deplasează pe cele două suprafețe:

$$\overline{V_{1M}} = \overline{V_M} \quad (8.298)$$

Egalitatea acestor viteze demonstrează că cele două curbe descrise de punctul M sunt tangente, planul tangent conținând aceeași generatoare OM și cele două viteze identice. Din relația (8.298) rezultă că și arcele elementare de curbă parcurse de punctul M pe fiecare suprafață sunt egale $ds_1 = V_{1M} dt = V_M dt = ds$. Deci curba descrisă de punctul M pe suprafața mobilă se rostogolește fără alunecare peste curba descrisă de punct pe suprafața fixă. Deoarece punctul M a fost ales arbitrar, concluziile anterioare se pot extinde și la cele două suprafețe.

8.7.3. Distribuția de accelerații în mișcarea rigidului cu punct fix

Punctul O al rigidului este fix, astfel că accelerația lui este nulă: $\overline{a_O} = 0$. Formula generală a distribuției de accelerații devine:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (8.299)$$

În cazul mișcării rigidului cu punct fix, vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ este variabil ca mărime și direcție, suportul său trecând prin punctul fix și în consecință vectorul accelerație unghiulară $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ este un vector al cărui suport este diferit de cel al lui $\bar{\omega}$:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k} = \dot{\omega}_{x_1} \bar{i}_1 + \dot{\omega}_{y_1} \bar{j}_1 + \dot{\omega}_{z_1} \bar{k}_1 \quad (8.300)$$

Proiecțiile accelerației unghiulare $\bar{\varepsilon}$ pe axele reperului mobil respectiv ale reperului fix, se obțin folosind formulele (8.300), (8.288) și (8.289):

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \varepsilon_z = \dot{\omega}_z \quad (8.301)$$

$$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1}, \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1}, \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1} \quad (8.302)$$

Vectorul accelerație dat de relația (8.299) are două componente: $\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ numită accelerație tangențială și care este perpendiculară pe vectorul accelerație unghiulară $\bar{\varepsilon}$, iar $\bar{a}_{ax} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ numită accelerație axială (axipetă) care este perpendiculară pe vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$.

Pentru calculul accelerației punctului curent M, vom dezvolta relația (8.299):

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} \quad (8.303)$$

de unde deducem proiecțiile accelerației pe axele triedrului mobil:

$$\begin{aligned} a_x &= -(\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x \omega_y - \varepsilon_z)y + (\omega_x \omega_z + \varepsilon_y)z \\ a_y &= (\omega_x \omega_y + \varepsilon_z)x - (\omega_x^2 + \omega_z^2)y + (\omega_y \omega_z - \varepsilon_x)z \\ a_z &= (\omega_x \omega_z - \varepsilon_y)x + (\omega_y \omega_z + \varepsilon_x)y - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z \end{aligned} \quad (8.304)$$

Se pune problema să determinăm punctele care la un moment dat au accelerația nulă. Coordonatele punctelor care au accelerația nulă se obțin ca soluții ale sistemului:

$$a_x = 0, a_y = 0, a_z = 0 \quad (8.305)$$

Din relațiile (8.305) și (8.304) se obține un sistem algebric liniar și omogen de trei ecuații cu trei necunoscute: x, y și z. Determinantul acestui sistem este:

$$D = \begin{vmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x \omega_y - \varepsilon_z & \omega_x \omega_z + \varepsilon_y \\ \omega_x \omega_y + \varepsilon_z & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y \omega_z - \varepsilon_x \\ \omega_x \omega_z - \varepsilon_y & \omega_y \omega_z + \varepsilon_x & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{vmatrix} \quad \text{care după efectuarea calculelor}$$

devine:

$$D = -(\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon})^2 \quad (8.306)$$

Dar vectorul $\bar{\omega}$ este variabil ca mărime și direcție iar vectorul $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ nu este coliniar cu vectorul $\bar{\omega}$. În consecință $\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} \neq 0$ și deci $D \neq 0$ ceea ce înseamnă că sistemul (8.305) admite numai soluția banală $x=y=z=0$, adică corespunzător punctului fix O.

La aceeași concluzie mai puteam ajunge, făcând observația că în punctul de accelerație nulă componentele \bar{a}_r , \bar{a}_{ax} trebuie să fie coliniare. Dar componenta \bar{a}_r este perpendiculară pe vectorul $\bar{\varepsilon}$ iar componenta \bar{a}_{ax} este perpendiculară pe vectorul $\bar{\omega}$, deci cele două componente sunt situate în două plane distincte ceea ce înseamnă că suma celor doi vectori nu poate fi nulă. În mișcarea corpului cu un punct fix nu există puncte care să aibă accelerația nulă cu excepția punctului fix O.

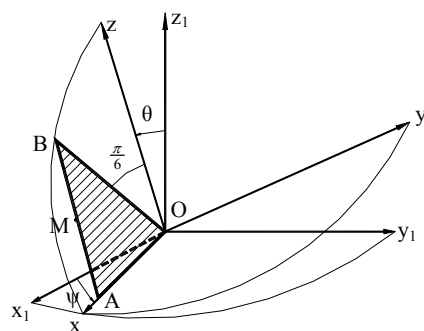


fig. 8.50.

Aplicatie: Placa triunghiulară echilaterală OAB de latură l se mișcă astfel încât vârful O rămâne fix, latura OA se mișcă în planul fix Ox_1y_1 cu viteza vârfului A constantă v_o iar latura OB rămâne în planul Ox_1z_1 . Să se determine (fig. 8.50): vectorii viteze unghiulare instantanee și accelerație unghiulare instantanee, viteza și accelerația mijlocului M al laturii AB, conurile lui Poincaré

Rezolvare: a) placa execută o mișcare de rotație cu punct fix. Alegem axa Ox direcționată după latura OA iar planul plăcii OAB ca plan Oxz. Utilizăm unghiurile lui Euler astfel că linia nodurilor coincide cu Ox. Urmează că $\varphi=0$ și versorii \bar{n} și \bar{i} sunt identici: $\bar{n} = \bar{i}$. În momentul inițial, axele Ox și Ox_1 coincid. Unghiul de precesie ψ este cunoscut din relația: $v_A = v_O = l\dot{\psi}$ de unde obținem:

$$\psi = \frac{v_O}{l} t \quad (8.307)$$

Ținând seama că unghiul de rotație proprie $\varphi=0$, relațiile (8.270) devin:

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \cos\psi \bar{i}_1 + \sin\psi \bar{j}_1, \quad \bar{j} = -\cos\theta \sin\psi \bar{i}_1 + \cos\theta \cos\psi \bar{j}_1 + \sin\theta \bar{k}_1, \\ \bar{k} &= \sin\theta \sin\psi \bar{i}_1 - \sin\theta \cos\psi \bar{j}_1 + \cos\theta \bar{k}_1 \end{aligned} \quad (8.308)$$

$$\text{Vectorul } \overline{OB} \text{ sub forma: } \overline{OB} = l \cos \frac{\pi}{3} \bar{i} + l \sin \frac{\pi}{3} \bar{k} = \frac{l}{2} (\bar{i} + \sqrt{3} \bar{k})$$

Pentru ca latura OB să rămână în planul Ox_1z_1 , trebuie ca $\overline{OB} \cdot \bar{j}_1 = 0$ ceea ce conduce la relația:

$$\bar{i} \cdot \bar{j}_1 + \sqrt{3} \bar{k} \cdot \bar{j}_1 = 0 \quad (8.309)$$

Ținând seama de relațiile (8.308) condiția (8.309) se reduce la relația

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \left(\frac{V_o}{l} t \right) \quad (8.310)$$

Prin urmare unghiurile ψ și θ nu sunt independente, deci mișcarea considerată admite un singur grad de libertate. Mișcarea este posibilă pentru $\psi \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$. Pentru determinarea proiecțiilor vectorului viteză unghiulară instantanee $\bar{\omega}$ vom deriva versorii reperului mobil dați de relațiile (8.308):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= \frac{V_o}{l} (-\sin \psi \bar{i}_1 + \cos \psi \bar{j}_1) \\ \dot{\bar{j}} &= \dot{\theta} (\sin \theta \sin \psi \bar{i}_1 - \sin \theta \cos \psi \bar{j}_1 + \cos \theta \bar{k}_1) + \frac{V_o}{l} (\cos \theta \cos \psi \bar{i}_1 + \cos \theta \sin \psi \bar{j}_1) \\ \dot{\bar{k}} &= \dot{\theta} (\cos \theta \sin \psi \bar{i}_1 - \cos \theta \cos \psi \bar{j}_1 - \sin \theta \bar{k}_1) + \frac{V_o}{l} (\sin \theta \cos \psi \bar{i}_1 + \sin \theta \sin \psi \bar{j}_1) \end{aligned} \quad (8.311)$$

Folosind formulele (8.277), obținem:

$$\begin{aligned} \omega_x = \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} &= \dot{\theta} (\sin^2 \theta \sin^2 \psi + \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \cos^2 \theta) + \frac{V_o}{l} (\sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi - \sin^2 \theta \cos \psi \sin \psi) = \dot{\theta} \\ \omega_y = \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} &= \dot{\theta} (\cos \theta \cos \psi \sin \psi - \sin \psi \cos \theta \cos \psi) + \frac{V_o}{l} (\cos^2 \psi \sin \theta + \sin^2 \psi \sin \theta) = \frac{V_o}{l} \sin \theta \\ \omega_z = \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} &= \frac{V_o}{l} (\cos \theta \sin^2 \psi + \cos \theta \cos^2 \psi) = \frac{V_o}{l} \cos \theta \end{aligned} \quad (8.312)$$

Vectorul viteză unghiulară în raport cu reperul mobil este de forma:

$$\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{i} + \frac{V_o}{l} \sin \theta \bar{j} + \frac{V_o}{l} \cos \theta \bar{k} \quad (8.313)$$

sau ținând seama de relația (8.310) vectorul $\bar{\omega}$ devine:

$$\bar{\omega} = \frac{V_o}{l} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{V_o}{l} t \right)}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{V_o}{l} t \right)}} \bar{i} + \frac{V_o}{\sqrt{3} l} \operatorname{tg} \left(\frac{V_o}{l} t \right) \bar{j} + \frac{V_o}{\sqrt{3} l} \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{V_o}{l} t \right)} \bar{k} \quad (8.314)$$

Pentru a scrie vectorul $\bar{\omega}$ în raport cu sistemul de referință fix, ținem seama de relația (8.278), astfel că proiecțiile sale sunt:

$$\omega_{x_1} = \dot{\theta} \bar{i} \cdot \bar{i}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \bar{j} \cdot \bar{i}_1 + \dot{\psi} \cos \theta \bar{k} \cdot \bar{i}_1 = \dot{\theta} \cos \psi = \frac{V_o}{l} \frac{1}{\cos \left(\frac{V_o}{l} t \right) \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{V_o}{l} t \right)}}$$

$$\omega_{y_1} = \dot{\theta} \bar{i} \cdot \bar{j}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \bar{j} \cdot \bar{j}_1 + \dot{\psi} \cos \theta \bar{k} \cdot \bar{j}_1 = \dot{\theta} \sin \psi = \frac{v_o}{l} \frac{\sin(\frac{v_o}{l} t)}{\cos^2(\frac{v_o}{l} t) \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)}}$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\theta} \bar{i} \cdot \bar{k}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \bar{j} \cdot \bar{k}_1 + \dot{\psi} \cos \theta \bar{k} \cdot \bar{k}_1 = \dot{\psi} = \frac{v_o}{l} \quad (8.315)$$

Vectorul $\bar{\omega}$ deci va fi:

$$\bar{\omega} = \frac{v_o}{l} \frac{1}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)}} \left[\frac{1}{\cos(\frac{v_o}{l} t)} \bar{i}_1 + \frac{\sin(\frac{v_o}{l} t)}{\cos^2(\frac{v_o}{l} t)} \bar{j}_1 + \bar{k}_1 \right] \quad (8.316)$$

Proiecțiile accelerației unghiulare pe axele reperului mobil sunt date de relațiile (8.301) și deci:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x = \ddot{\theta} = \frac{v_o^2}{l^2} \frac{[\operatorname{tg}(\frac{v_o}{l} t) + \operatorname{tg}^3(\frac{v_o}{l} t)][7 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)]}{[3 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y = \frac{v_o}{l} \dot{\theta} \cos \theta = \frac{v_o^2}{\sqrt{3} l^2} [1 + \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)]$$

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = -\frac{v_o}{l} \dot{\theta} \sin \theta = -\frac{v_o^2}{\sqrt{3} l^2} \frac{\operatorname{tg}(\frac{v_o}{l} t) + \operatorname{tg}^3(\frac{v_o}{l} t)}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)}} \quad (8.317)$$

viteza punctului mobil M în raport cu reperul mobil este:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{OM} = \frac{v_o}{4} \operatorname{tg}(\frac{v_o}{l} t) \bar{i} + \frac{\sqrt{3} v_o}{2} \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)}} \bar{j} -$$

$$- \frac{\sqrt{3} v_o}{4} \operatorname{tg}(\frac{v_o}{l} t) \bar{k} \quad (8.318)$$

Accelerația punctului M în raport cu reperul mobil are proiecțiile date de relațiile (8.304) și deci obținem:

$$a_x = \frac{v_o^2}{4l} [2 \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t) - 1], \quad a_y = \frac{v_o^2}{4\sqrt{3}l} \frac{\operatorname{tg}(\frac{v_o}{l} t) [\operatorname{tg}^4(\frac{v_o}{l} t) - 7 \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t) - 4]}{[3 - \operatorname{tg}^2(\frac{v_o}{l} t)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$a_z = -\frac{\sqrt{3}v_o^2}{4l} \frac{3tg^2(\frac{v_o}{l}t) + 1}{3 - tg^2(\frac{v_o}{l}t)} \quad (8.319)$$

c) Ecuația axei instantanee de rotație în raport cu reperul mobil se obține din relația (8.292):

$$\frac{x}{\dot{\theta}} = \frac{y}{\frac{v_o}{l} \sin \theta} = \frac{z}{\frac{v_o}{l} \cos \theta} \quad (8.320)$$

Ținând seama de relația (8.3.10), relația (8.3.19) se mai scrie sub forma :

$$\frac{\sqrt{3 - tg^2 \Psi}}{1 + tg^2 \Psi} x = \frac{\sqrt{3}}{tg \Psi} y = \sqrt{\frac{3}{3 - tg^2 \Psi}} z \quad (8.321)$$

Din ultimele două relații, rezultă $tg^2 \Psi = \frac{3y^2}{y^2 + z^2}$ relație care substituită în primele două, conduce la ecuația analitică a conului polodic:

$$4y^2 + z^2 - \sqrt{3} xz = 0 \quad (8.322)$$

Ecuația axei instantanee de rotație în raport cu reperul fix o obținem din (8.294):

$$\frac{x_1}{\dot{\theta} \cos \Psi} = \frac{y_1}{\dot{\theta} \sin \Psi} = \frac{z_1}{\dot{\Psi}}$$

sau, ținând seama de relațiile (8.315):

$$\cos \Psi \sqrt{3 - tg^2 \Psi} x_1 = \frac{\cos \Psi \sqrt{3 - tg^2 \Psi}}{\sin \Psi} y_1 = z_1 \quad (8.323)$$

Din primele două relații obținem $tg \Psi = y_1/x_1$ iar ecuația conului herpolodic va fi:

$$x_1^2 y_1^2 + x_1^2 z_1^2 + y_1^2 z_1^2 - 3x_1^4 = 0 \quad (8.324)$$

8.8. Probleme

8.8.1. Mecanismul din figura 8.51 este format din cama 1 de rază r cu excentricitatea $O_1C=e$ care se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul punctului fix O_1 și din tachelul 2 care are o mișcare de translație rectilinie, capătul său fiind concav sferic de rază R ($R>r+e$) și centrul O . Punctele O și O_1 se află pe axa tachelului 2. a) Să se determine legea de mișcare, viteza și accelerația tachelului 2; b) Să se determine legea de mișcare dacă tachelul 2 ar avea capătul plan.

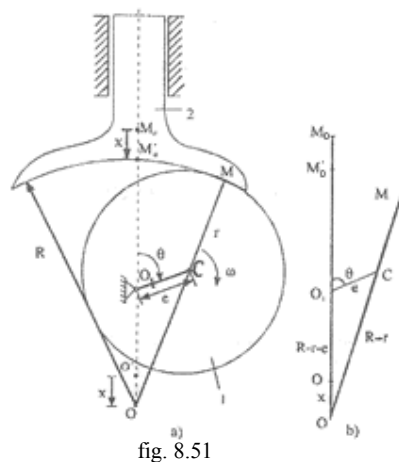


fig. 8.51

Rezolvare: Presupunem ca în momentul inițial, centrul C al camei 1 se afla pe axa tachetului astfel ca O_1 astfel ca O_1 să se afle între C și O. Punctul de contact M dintre camă și tachet se află în momentul inițial în M_0 ($O_1M_0 = r+e$). Notăm cu M'_0 punctul de pe axa tachetului și de pe concavitatea sferică a tachetului, cu O' centrul O al sferei de raza R în momentul inițial.

Legea de mișcare a tachetului este dată de deplasarea $x = M_0M'_0$. Deoarece $O'M_0 = OM'_0 = R$ și $M_0M'_0 = x$, rezultă $OO' = x$. Unghiul $\angle M'_0O_1C = \theta$ este dat de: $\theta = \omega t$. În

punctul M de contact, cama și tachetul sunt tangente, astfel că punctele O, C și M sunt coliniare. Rezultă $OC = R-r$ (fig. 8.51 b). Distanța $O'O_1$ se determină în poziția când M coincide cu M_0 (deci și cu M'_0). Rezultă $O'O_1 = R-r-e$. Din triunghiul OO_1C aplicând teorema cosinusurilor, deducem

$$x_{1,2} = r + e - R - e \cos \theta \pm \sqrt{(r + e - R - e \cos \theta)^2 - 2e(e - R + r)(1 - \cos \theta)}$$

Ținând seama că în momentul inițial $\theta=0$, $x=0$ rezultă singura soluție convenabilă, după unele transformări:

$$x = \sqrt{(R-r)^2 - e^2 \sin^2 \theta} + r + e - R - e \cos \theta \text{ care reprezintă legea de mișcare a tachetului. Viteza tachetului este } v = \dot{x} = \omega e \sin \theta - \frac{e^2 \omega \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{(R-r)^2 - e^2 \sin^2 \theta}} \text{ iar accelerația}$$

$$a = \dot{v} = \omega^2 e \cos \theta - e^2 \omega^2 \frac{(R-r)^2 \cos 2\theta + e^2 \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta \cos 2\theta)}{\sqrt{(R-r)^2 - e^2 \sin^2 \theta}^3}$$

b) Dacă tachetul are capătul plan, înseamnă că R tinde la infinit. În acest caz, legea sa de mișcare este:

$$x = \lim_{R \rightarrow \infty} [\sqrt{(R-r)^2 - e^2 \sin^2 \theta} - (R-r) + e(1 - \cos \theta)] = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{(R-r)^2 - e^2 \sin^2 \theta} + R - r} + e(1 - \cos \theta) \right] = e(1 - \cos \theta)$$

Mișcarea va fi rectilie oscilatorie armonică.

8.8.2 Cubul OABCDEFG din figura 8.52 de muchie 1 se deplasează astfel încât viteza vârfului F se află în planul AOE și are mărimea $v_F = 2\omega l$, $\omega > 0$ iar viteza punctului B face un unghi de 60° cu muchia BC. Știind că vârful O este fix, să se determine: Vectorul viteză unghiulară; ecuația axei instantanee de rotație; viteza și accelerația punctului E.

Rezolvare

Alegem reperul Oxyz legat de cub ca în figura 8.52.

Mișcarea fiind de rotație, avem: $\vec{v}_F = \vec{\omega} \times \vec{OF} \times l\omega_2 \vec{i} + l(\omega_3 - \omega_1)\vec{j} - l\omega_2 \vec{k}$ unde vectorul $\vec{\omega}$ are forma necunoscută: $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$.

Din condiția că \vec{v}_F să se afle în planul xOz, rezultă: $\omega_1 = \omega_3$ iar din condiția $v_F = 2\omega l$ rezultă: $\omega_2 = \sqrt{2}\omega$. În aceste condiții, viteza punctului B se scrie în forma:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB} = -l\omega_1 \vec{i} + l\omega_1 \vec{j} + l(\omega_1 - \sqrt{2}\omega) \vec{k}$$

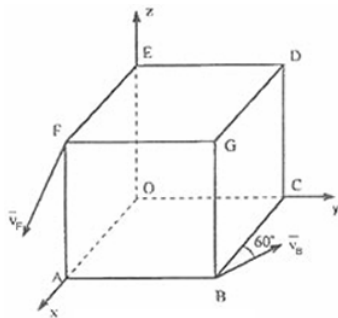


fig. 8.52

Din condiția $v_B \cos 60^\circ = l\omega_1$ rezultă ecuația

$$2\omega_1 = \sqrt{2\omega_1^2 + (\omega_1 - \sqrt{2}\omega)^2} \text{ care are soluțiile}$$

$\omega_1 = (-\sqrt{2} \pm 2)\omega$. Dar în ultima ecuație se impune condiția $\omega_1 > 0$, astfel ca $\omega_1 = (2 - \sqrt{2})\omega$ și deci obținem:

$$\vec{\omega} = (2 - \sqrt{2})\omega \vec{i} + \sqrt{2}\omega \vec{j} + (2 - \sqrt{2})\omega \vec{k}$$

Ecuația axei instantanee de rotație este dată de formula (8.288):

$$\frac{\sqrt{2}\omega z - (2 - \sqrt{2})\omega y}{(2 - \sqrt{2})\omega} = \frac{(2 - \sqrt{2})\omega y - (2 - \sqrt{2})\omega z}{\sqrt{2}\omega} = \frac{(2 - \sqrt{2})\omega y - \sqrt{2}\omega x}{(2 - \sqrt{2})\omega}$$

deci de intersecție a planelor de ecuații:

$$(\sqrt{2} - 1)x + y - 2\sqrt{2}z = 0, \quad 2\sqrt{2}x - y - (\sqrt{2} - 1)z = 0$$

$$\text{Viteza punctului E este: } \vec{v}_E = \vec{\omega} \times \vec{OE} = \sqrt{2}\omega l \vec{i} - (2 - \sqrt{2})\omega l \vec{j} \text{ iar}$$

$$\text{accelerația punctului E: } \vec{a}_E = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OE}) = (6 - 4\sqrt{2})\omega^2 l \vec{i} + (2\sqrt{2} - 2)\omega^2 l \vec{j} - (8 - 4\sqrt{2})\omega^2 l \vec{k}$$

8.8.3 Piramida OABCD din figura 8.53. se află în mișcare. Se cunosc AB paralelă cu OC precum și $OD = OA = AM = MB = l$, $OC = 3l$. Viteza lui O este $\vec{v}_0 = v_0 \vec{j}$ (v_0 - constantă), viteza lui M este normală la CD iar viteza punctului D este

egală cu $3\sqrt{2} v_0$ și paralela cu vectorul \overline{BC} . Să se determine vectorul viteză unghiulară și viteza de alunecare a piramidei.

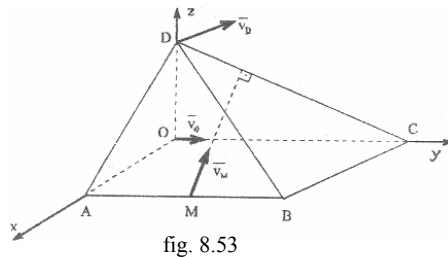


fig. 8.53

Rezolvare: Față de reperul mobil

Oxyz din figura 8.53, din condiția $\overline{v_D} \parallel \overline{BC}$ rezultă $\overline{v_D} = 3 v_0 (-\bar{i} + \bar{j})$. Notăm: $\overline{v_M} = \lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j} + \lambda_3 \bar{k}$. Din condiția $\overline{v_M} \perp \overline{CD}$ rezultă: $\lambda_3 = 3\lambda_2$. Din distribuția generală de viteze a rigidului, putem scrie $\overline{v_M} = \overline{v_0} + \overline{\omega} \times \overline{OM}$,

$\overline{v_D} = \overline{v_0} + \overline{\omega} \times \overline{OD}$ ceea ce conduce la sistemul de cinci ecuații cu cinci necunoscute:

$$\lambda_1 - l\omega_z = 0, \quad \lambda_2 = v_0 + l\omega_z, \quad 3\lambda_2 = l(\omega_x - \omega_y), \quad 3v_0 = l\omega_y, \quad -3v_0 = v_0 - l\omega_x$$

unde $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sunt proiecțiile vectorului viteză unghiulară $\overline{\omega}$ pe axele legate de

rigid. Se obțin: $\omega_x = \frac{4v_0}{l}, \omega_y = \frac{3v_0}{l}, \omega_z = \frac{2v_0}{3l}$. Viteza de alunecare a rigidului este dată de relația (8.279) și este :

$$\overline{u} = \frac{v_0 \cdot \overline{\omega}}{\omega^2} \overline{\omega} = \frac{9v_0}{229} (12\bar{i} + 9\bar{j} - 2\bar{k})$$

8.8.4. Se consideră secțiunea (S) a unui corp care are o mișcare de rotație cu axa fixă. Punctele A și B se mișcă în planul secțiunii astfel că la un moment dat se cunosc: viteza punctului A, v este perpendiculară pe AB, accelerația punctului B, a formează unghiul $\alpha < \frac{\pi}{2}$ cu AB și distanța AB=d (fig. 8.54).

Să se determine: axa de rotație; viteza unghiulară în momentul considerat; viteza punctului B în același moment.

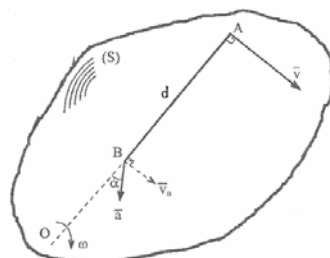


fig. 8.54

Rezolvare: Viteza punctului A, v este conținută în planul secțiunii (S), este perpendiculară pe AB \in (S), deci axa de rotație va fi perpendiculară pe planul secțiunii într-un punct O de pe prelungirea lui AB, deoarece $\alpha < \pi/2$ (fig. 8.54). Punctului O îl vom determina ulterior. Din formula (8.130) deducem $\varepsilon = \dot{\omega} = \omega^2 \tan \alpha$ iar accelerația punctului B este $a = OB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Ținând seama de cele două relații rezultă:

$$OB = \frac{a \cos \alpha}{\omega^2} \quad (a)$$

Viteza punctului B, v_B este perpendiculară pe AB iar extremitățile vectorilor v , v_B și punctul O sunt colineare. Mărimea vitezei punctului B, ținând seama de relația (a) este:

$$v_B = OB \omega = \frac{a \cos \alpha}{\omega} \quad (b)$$

Din relația : $\frac{v}{v_B} = \frac{OA}{OB}$ ținând seama de relația (a), rezultă ecuația în ω :

$$d\omega^2 - v\omega + a \cos \alpha = 0 \text{ care admite soluțiile } \omega_{1,2} = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4ad \cos \alpha}}{2d} \text{ Prin}$$

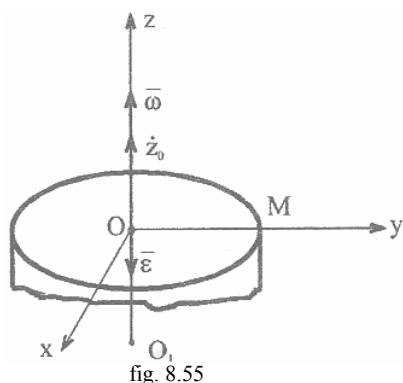
urmare, există două mișcări de rotație cu axa fixă în condițiile date. Poziția punctului

$$O \text{ se determină din relația (a) și deci: } OB = \frac{2ad^2 \cos \alpha}{v^2 - 2ad \cos \alpha \pm v\sqrt{v^2 - 4ad \cos \alpha}}$$

Iar viteza punctului B din relația (b) :

$$v_B = \frac{2ad \cos \alpha}{v \pm \sqrt{v^2 - 4ad \cos \alpha}}$$

8.8.5 Între accelerația a și viteza v a unui punct M de pe filetul unui șurub în mișcare și care are raza R există relația $a = \dot{v} + v^2/R$. Să se determine, cunoscând viteza inițială v_0 a punctului M, în funcție de pasul p sau de unghiul de pantă α (fig. 8.55): viteza și accelerația punctului M; viteza și accelerația unghiulară a șurubului; punctele care au viteza și accelerația perpendiculare.



Rezolvare: Considerăm un sistem de axe fixate de șurub, astfel că axa de rototranslație Oz este dirijată după axa de simetrie a șurubului iar axa Oy trece prin punctul M (fig. 8.55). Pentru rezolvarea problemei vom folosi expresiile analitice ale vitezelor și accelerațiilor punctelor șurubului față de acest sistem de referință. Notăm $z_0 = O_1 O$.

a) Viteza punctului M este tangentă la traiectorie deci la elicea cilindrică de rază R și unghi de pantă α , astfel că scriem expresia analitică în două moduri:

$$\overline{v_M} = -v \cos \alpha \, \overline{i} + v \sin \alpha \, \overline{k} = -\omega R \, \overline{i} + \dot{z}_0 \, \overline{k} \quad (a)$$

Din relația (a) rezultă:

$$\dot{z}_0 = v \sin \alpha, \omega = \frac{v \cos \alpha}{R} \quad (b)$$

Ținând seama că în mișcarea de șurub pasul p este dat de formula:

$$p = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha \quad (c)$$

din relațiile (b) obținem:

$$\dot{z}_0 = \frac{pv}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2}}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2}} \quad (d)$$

Prin derivarea relațiilor (b) respectiv (d), obținem respectiv:

$$\ddot{z} = \dot{v} \sin \alpha, \quad \varepsilon = \frac{\dot{v} \cos \alpha}{R}, \quad \ddot{z} = \frac{p\dot{v}}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2}}, \quad \varepsilon = \frac{2\pi\dot{v}}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2}} \quad (e)$$

Accelerația punctului M este vectorial $\overline{a} = \overline{a_0} + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$ sau analitic $\overline{a} = -R\varepsilon \, \overline{i} - R\omega^2 \, \overline{j} + \ddot{z}_0 \, \overline{k}$ iar mărimea

$$a = \sqrt{\ddot{z}_0^2 + R^2(\varepsilon^2 + \omega^4)} \quad (f)$$

Ținând seama de expresiile (e) și (d) mărimea accelerației devine :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{p^2 \dot{v}^2}{4\pi^2 R^2 + p^2} + R^2 \left[\frac{4\pi^2 \dot{v}^2}{4\pi^2 R^2 + p^2} + \frac{16\pi^4 v^4}{(4\pi^2 R^2 + p^2)^2} \right]} = \\ &= \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{16\pi^4 R^2 v^4}{(4\pi^2 R^2 + p^2)^2}} \end{aligned} \quad (g)$$

Din condiția dată și din relația (g) rezultă după simplificare :

$$\frac{\dot{v}}{v^2} = -\frac{p^2(p^2 + 8\pi^2 R^2)}{2R(4\pi^2 R^2 + p^2)^2} \quad (h)$$

care este o ecuație diferențială cu soluția: $\frac{1}{v} = \frac{p^2(p^2 + 8\pi^2 R^2)}{2R(4\pi^2 R^2 + p^2)^2} t + C$ unde

constanta C se determină din condiția: $t=0, v=v_0$. Rezultă expresia mărimii vitezei punctului M în funcție de pasul p :

$$v = \frac{2R(p^2 + 4\pi^2 R^2)^2 v_0}{p^2(p^2 + 8\pi^2 R^2)v_0 t + 2R(p^2 + 4\pi^2 R^2)^2} \quad (i)$$

În funcție de panta α , viteza punctului M se scrie, ținând seama de relațiile (c) și (h);

$$v = \frac{2Rv_0}{2R + \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)v_0 t} \quad (j)$$

Accelerația punctului M în funcție de pasul p se obține din (g) ținând seama de relația (h) :

$$a = \frac{2R(p^2 + 4\pi^2 R^2)^2 v_0^2 (32\pi^2 R^4 + 8\pi^2 R^2 p^2 + p^4)}{[p^2(p^2 + 8\pi^2 R^2)v_0 t + 2R(p^2 + 4\pi^2 R^2)^2]^2}$$

iar în funcție de unghiul de panta α dat de relația (c), accelerația este

$$a = \frac{2R(1 + \cos^4 \alpha)v_0^2}{[2R + \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)v_0 t]^2}$$

b) Mărima vitezei unghiulare ω o deducem din relațiile (d) și (h) respectiv (j):

$$\omega = \frac{4\pi R(p^2 + 4\pi^2 R^2)^{\frac{3}{2}} v_0}{p^2(p^2 + 8\pi^2 R^2)v_0 t + 2R(p^2 + 4\pi^2 R^2)^2} \quad (k)$$

$$\omega = \frac{2v_0 \cos \alpha}{2R + \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)v_0 t} \quad (l)$$

Accelerația unghiulară ε se obține din relațiile (k) sau (l) prin derivare în raport cu timpul:

$$\varepsilon = -\frac{4\pi R p^2 (p^2 + 8\pi^2 R^2)(p^2 + 4\pi^2 R^2)^{\frac{3}{2}} v_0^2}{[p^2(p^2 + 8\pi^2 R^2)v_0 t + 2R(p^2 + 4\pi^2 R^2)^2]^2} \quad (m)$$

$$\varepsilon = -\frac{2v_0 \cos \alpha \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)v_0^2}{[2R + \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)v_0 t]^2} \quad (n)$$

În acest fel, expresiile analitice ale vitezei punctului M data de relația (a) și a accelerației punctului M dată de relația (n) sunt cunoscute.

c) Notăm $P(x,y,z)$ punctul care are proprietatea căutată. Viteza lui este dată de expresia $\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OP} = -y\vec{\omega} \vec{i} + x\vec{\omega} \vec{j} + \dot{z}_0 \vec{k}$ unde prin \vec{v}_0 am notat viteza originii reperului mobil O, de mărime \dot{z}_0 (și nu viteza inițială v_0 a punctului M). Accelerația punctului P are forma : $\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) =$

$$= -(\varepsilon y + \omega^2 x)\vec{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y)\vec{j} + \ddot{z}_0 \vec{k}$$

Din condiția ca viteza și accelerația punctului P să fie perpendiculare ($\vec{v}_p \cdot \vec{a}_p = 0$), rezultă:

$$(\varepsilon y + \omega^2 x)y\omega + (\varepsilon x - \omega^2 y)x\omega + \dot{z}_0 \ddot{z}_0 = 0 \quad (o)$$

Ținând seama de relațiile (b) după simplificări în relația (o) obținem:

$$(x^2 + y^2) \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha = 0$$

Relație imposibilă, ceea ce înseamnă că nu există puncte care să aibă viteza și accelerația perpendiculare.

8.8.6. Mecanismul bielă manivelă din fig. 8.56 este pus în mișcare de manivela O_1A care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei O_1z_1 . În mijlocul C al bielei AB este articulat vârful unei plăci plane triunghiulare CDE . Vârful D al plăcii culisează pe axa O_1x_1 . Se cunosc: $2DC=2DE=O_1A=2l$; $EC=\sqrt{2}l$; $AC=BC=a$ ($a>l$). Să se determine: a) Baza și rostogolirea pentru bara AB ; b) Baza și rostogolirea pentru placa CDE ; c) Vitezele unghiulare pentru bară și placă; d) Viteza punctului E .

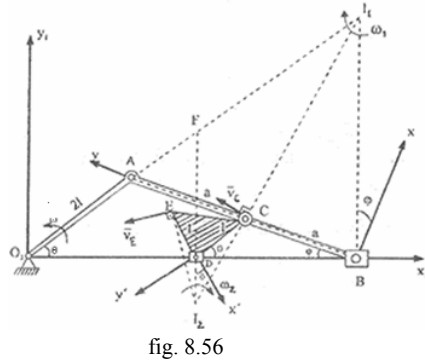


fig. 8.56

Rezolvare: Bara AB are o mișcare plană cu centrul instantaneu în I_1 , obținut ca intersecție a dreptei O_1A cu perpendiculara în B pe axa fixă O_1x_1 . Mișcarea barei AB este dată de unghiul $\varphi = \angle O_1BA$. Mișcarea barei O_1A este definită de unghiul $\theta = \angle AO_1x_1$ care are proprietatea $\dot{\theta} = \omega$. Placa CDE are mișcare plană iar centrul său instantaneu se află la intersecția dreptelor I_1C cu perpendiculara în D pe axa O_1x_1 .

Între unghiurile θ și φ există relația:

$$l \sin \theta = a \sin \varphi \quad (a)$$

În triunghiul O_1AB , avem $O_1B = 2(l \cos \theta + a \cos \varphi)$ și deci, DC fiind linie mijlocie:

$$O_1D = DB = l \cos \theta + a \cos \varphi$$

Perpendiculara în D pe O_1x_1 intersectează O_1I_1 în F , adică la mijlocul lui O_1I_1 .

În triunghiul O_1DE are loc relația:

$$FD = O_1D \tan \theta = (l \cos \theta + a \cos \varphi) \tan \theta$$

Și deci

$$BI_1 = 2FD = 2(l \cos \theta + a \cos \varphi) \tan \theta$$

În acest fel, se pot calcula coordonatele centrului instantaneu I_1 în raport cu reperul fix:

$$x_{I1} = O_1B = 2(l \cos \theta + a \cos \varphi) \quad y_{I1} = BI_1 = 2(l \cos \theta + a \cos \varphi) \tan \theta \quad (b)$$

Pentru a determina ecuația analitică a bazei, eliminăm parametrii θ și φ între relațiile (a) și (b). Prin împărțirea relațiilor (b) obținem: $\tan \theta = y_{I1}/x_{I1}$.

Relația (b₁) ținând seama de relația (a) se mai scrie: $x_{I1} - 2l \cos \theta =$

$$2a \sqrt{1 - \frac{l^2}{a^2} \sin^2 \theta} \text{ de unde rezultă, după ridicare la pătrat: } \cos \theta = \frac{1}{4l} (x_{I1}^2 + 4l^2 - 4a^2)$$

Această relație împreună cu relația $\operatorname{tg}\theta = y_{1l}/x_{1l}$ permite eliminarea parametrului θ . Obținem ecuația analitică a bazei barei AB, de forma:

$$(x_{1l}^2 + y_{1l}^2)(x_{1l}^2 + 4l^2 - 4a^2)^2 - 16l^2 x_{1l}^2 = 0$$

Față de sistemul de referință Bxy fixat de bara AB (fig.8.56), coordonatele punctului I_1 sunt :

$$\begin{aligned} x_1 &= BI_1 \cos \varphi = 2(l \cos \theta + a \cos \varphi) \operatorname{tg} \theta \cos \varphi \\ y_1 &= BI_1 \sin \varphi = 2(l \cos \theta + a \cos \varphi) \operatorname{tg} \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (c)$$

Ecuația analitică a rostogolitoarei se obține prin eliminarea parametrilor θ și φ între relațiile (a) și (c). Pentru aceasta, prin împărțirea relațiilor (c) obținem :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{x_1} \quad (d)$$

și deci ținând seama de relația (d) obținem :

$$\sin 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad (e)$$

Din relația (d) obținem :

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{x_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad (f)$$

Din relațiile (f) și (a) obținem :

$$\sin \theta = \frac{a}{l} \sin \varphi = \frac{ax_1 y_1}{l \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad (g)$$

Cu ajutorul relației (g) obținem :

$$|\operatorname{tg} \theta| = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \frac{ax_1 y_1}{\sqrt{l^2(x_1^2 + y_1^2) - a^2 x_1^2 y_1^2}} \quad (h)$$

Relația (c₂) se mai scrie :

$$y_1 = 2l \sin \theta + a \operatorname{tg} \theta \sin 2\varphi \quad (i)$$

Ținând seama de relațiile (e), (g) și (h), din relația (i) deducem ecuația analitică a rostogolitoarei:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2) \sqrt{l^2(x_1^2 + y_1^2) - a^2 x_1^2 y_1^2} = \\ 2ax_1 \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)[l^2(x_1^2 + y_1^2) - a^2 x_1^2 y_1^2]} \pm \pm 2a^2 x_1^2 y_1 \end{aligned}$$

b) Coordonatele centrului instantaneu de rotație I_2 față de sistemul de axe fixe rezultă imediat dacă se cunoaște distanța DI_2 . Pentru acest calcul, considerăm triunghiul $O_1 DF_1$ de unde rezultă :

$$O_1 F \cos \theta = O_1 D = l \cos a + a \cos \theta \quad (j)$$

și deci $0_1 F = l + \frac{a \cos \varphi}{\cos \theta} = FI_1$

În triunghiul AO_1B, DC este linie mijlocie și prin urmare $DC \parallel O_1A$ adică $DC \parallel FI_1$. Rezultă că triunghiurile DCI_2 și FI_1I_2 sunt asemenea. Deci $\frac{DC}{FI_1} = \frac{DI_2}{FI_2}$.

Rezultă: $DI_2 = l(\cos \theta \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta)$

Coordonatele punctului I_2 față de sistemul fix sunt :

$$x_{2I} = O_1D = l \cos \theta + a \cos \varphi, \quad y_{2I} = -DI_2 = -l(\cos \theta \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta) \quad (k)$$

Folosind relația (a), ecuația (k1) se mai scrie sub forma :

$$x_{2I} l \cos \theta = \sqrt{a^2 - l^2 \sin^2 \theta}$$

După ridicarea la pătrat a ultimei relații, se obține:

$$\cos \theta = \frac{x_{2I}^2 + l^2 - a^2}{2lx_{2I}} \quad (l)$$

Din ecuația (k2) ținând seama de relația (l) rezultă:

$$\sin \theta = \frac{l^2 y_{2I} - a^2 y_{2I} - x_{2I}^2 y_{2I}}{2lx_{2I}} \quad (m)$$

Din relațiile (l) și (m) după ridicarea la pătrat, obținem ecuația bazei pentru placa DCE:

$$x_{2I}^2 (x_{2I}^2 + l^2 - a^2)^2 + (y_{2I} l^2 - a^2 y_{2I} - x_{2I}^2 y_{2I})^2 - 4l^2 x_{2I}^4 = 0$$

Fața de sistemul de axe $x'Dy'$ fixate de placă, coordonatele punctului I_2 sunt :

$$x'_I = DI_2 \cos \theta = l(\cos^2 \theta \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta \cos \theta)$$

$$y'_I = DI_2 \sin \theta = l(\sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \varphi + \sin^2 \theta) \quad (n)$$

Folosind formulele unghiului dublu, relațiile (n) se mai scriu sub forma :

$$\cos 2\theta \operatorname{tg} \varphi + \sin 2\theta = \frac{2x'_I}{l} - \operatorname{tg} \varphi, \quad \sin 2\theta \operatorname{tg} \varphi - \cos 2\theta = \frac{2y'_I}{l} - 1 \quad (o)$$

$$\text{Ridicăm la pătrat relațiile (o), le adunăm și obținem: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{x'^2_I + y'^2_I - ly'_I}{lx'_I}$$

$$\text{Din relațiile (o), deducem: } \cos 2\theta = \frac{l - 2y'_I + (2x'_I - l \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \varphi}{l(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} . \text{ Pe de altă}$$

parte, folosind relația (a) putem scrie: $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - \frac{2a^2}{l^2} \sin^2 \varphi = 1 -$

$\frac{2a^2}{l^2} \frac{tg^2 \varphi}{1 + tg^2 \varphi}$. Din ultimele trei relații obținem ecuația analitică a rostogolitoarei

pentru placa DCE : $(l^2 - a^2)(x_I'^2 + y_I'^2 - ly_I')^2 + l^3 x_I' (y_I' - x_I') = 0$

c) Viteza unghiulară instantanee ω_1 a barei AB se determină scriind viteza punctului A în doua moduri: $v_A = 2l\omega = AI_I \omega_I$. Pentru a determina distanța AI_1 , folosim relația (j):

$$AF = O_I F - O_I A = \frac{a \cos \varphi}{\cos \theta} - l \text{ astfel că distanța } AI_1 \text{ devine: } AI_1 = AF + FI_1 =$$

$$\frac{2a \cos \varphi}{\cos \theta}$$

Din ultimele două relații obținem $\omega_1 = \frac{l \cos \theta}{a \cos \varphi} \omega$. Viteza unghiulară se mai

putea obține din relația (a) prin derivarea în raport cu timpul și luând în considerare că $\dot{\varphi} = \omega_1$. Pentru a determina viteza unghiulară instantanee ω_2 a plăcii CDE, scriem

viteza punctului C în două moduri: $v_C = I_2 C \omega_2 = I_1 C \omega_1$. Rezultă: $\omega_2 = \frac{I_1 C}{I_2 C} \omega_1$

Din asemănarea triunghiurilor DCI_2 și $FI_1 I_2$ rezultă:

$$\frac{I_1 C}{I_2 C} = \frac{FI_1 - DC}{DC} = \frac{a \cos \varphi}{l \cos \theta}$$

Din ultimele trei relații deducem $\omega_2 = \omega$. Rezultă că placa CDE are o mișcare relativă de translație față de bara $O_1 A$.

d) Viteza punctului E va fi perpendiculară pe dreapta $I_2 E$ în sensul lui ω_2 și are mărimea: $v_E = I_2 E \omega_2$ unde lungimea $I_2 E$ se determină din triunghiul $I_2 DE$:

$$I_2 E = l \sqrt{1 + (\cos \theta \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta)^2 + 2 \cos \theta (\cos \theta \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta)}$$

8.8.7. Placa plană dreptunghiulară OABC se mișcă în planul fix $O_1 x_1 y_1$ astfel că vârful O culisează pe dreapta (d) ce face unghiul $\alpha = \text{constant}$ cu axa $O_1 x_1$. Latura OA se rotește cu unghiul $\theta = \theta(t)$ în jurul punctului O astfel că mărimile vitezelor punctelor O și A sunt egale. Se cunosc: $OO_1 = v_0 t$ ($v_0 = \text{constant}$); $OA = BC = 2a$; $AB = OC = 2b$, iar în momentul inițial $\theta = \pi/2$ (fig. 8.57) Se cer:

- Expresia lui θ ca funcție de timp;
- Poziția centrului instantaneu de rotație al plăcii;
- Expresia analitică și reprezentarea grafică a bazei și a rostogolitoarei;
- Viteza punctului C;
- Polul accelerațiilor și accelerația punctului C.

Rezolvare: Funcția $\theta = \theta(t)$ se va determina din condiția ca punctele O și A să aibă aceeași viteză în modul. Punctul O are o mișcare rectilinie iar din legea sa de mișcare deducem că viteza punctului O este constantă și egală cu v_0 .

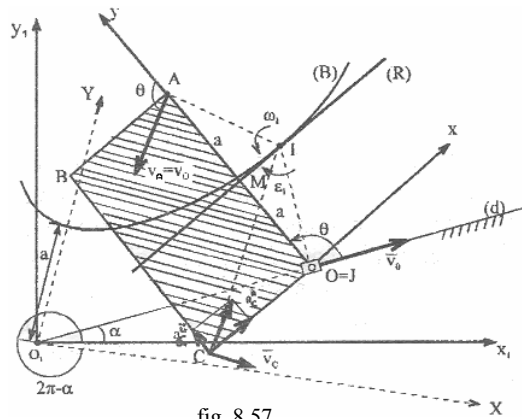


fig. 8.57

Pentru determinarea vitezei punctului A, scriem coordonatele punctului A față de sistemul fix $O_1x_1y_1$:

$$\begin{aligned} x_A &= v_0 t \cos \alpha + 2a \cos(\theta + \alpha) \\ y_A &= v_0 t \sin \alpha + 2a \sin(\theta + \alpha) \end{aligned} \quad (a)$$

Din relația (a) derivând în raport cu timpul, obținem:

$$v_A = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{v_0^2 - 4av_0\dot{\theta}^2}.$$

Ținând seama că $v_A = v_O$, deducem:

$$4a\dot{\theta}(a\dot{\theta} - v_0\theta) = 0 \quad (b)$$

Din relația (b), soluția $\dot{\theta} = 0$ conduce la o mișcare de

translație a plăcii cu $\theta = \pi/2$ (din condiția inițială) caz care nu interesează. Din relația (b) mai rezultă:

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{a} \sin \theta \quad \text{adică o ecuație diferențială care are soluția:}$$

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{v_0}{a} t + C.$$

Din condiția $t=0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rezultă $C=0$ și deci $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{\frac{v_0 t}{a}}$ ceea ce conduce la relația:

$$\sin \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{v_0 t}{a}} \quad (c)$$

Deci funcția θ se mai scrie: $\theta = 2 \operatorname{arctg} e^{\frac{v_0 t}{a}}$

b) Mișcarea plană a plăcii OABC este definită de funcțiile $O_1O = v_0 t$ și θ dată de ultima relație. Pentru determinarea centrului instantaneu de rotație I trebuie să mai cunoaștem și direcția vitezei punctului A pe lângă cunoașterea direcției vitezei punctului O. Această direcție rezultă imediat din condiția ca proiecțiile vitezelor punctelor O și A pe direcția AO să fie aceleași și de același sens (vezi formula 8.49).

Rezultă că \vec{v}_A formează unghiul θ cu \overline{OA} (fig. 8.57). Punctul I se va afla la intersecția normalelor în O pe (d) și în A pe \vec{v}_A . Față de sistemul fix de axe, coordonatele lui I sunt:

$$x_{1I} = v_0 t \cos \alpha - IO \sin \alpha, \quad y_{1I} = v_0 t \sin \alpha + IO \cos \alpha \quad (d)$$

unde distanța IO o determinăm scriind distribuția de viteze în mișcarea plană pentru punctele O și A: $IO \omega_I = v_0 = v_A = IA \omega_I$

Am notat viteza unghiulară instantanee cu ω_I . Din ultimele relații rezultă $IO=IA$, adică triunghiul AIO este isoscel. Notăm M mijlocul laturii OA, astfel că din

triunghiul MOI rezultă, ținând seama și de relația (c): $IO = \frac{a}{\sin \theta} = ach \frac{v_0 t}{a}$. Ținând

seama de ultima relație, coordonatele lui I date de relația (d), devin:

$$x_{1I} = v_0 t \cos \alpha - a \sin \alpha \cdot ch \frac{v_0 t}{a}, \quad y_{1I} = v_0 t \sin \alpha + a \cos \alpha \cdot ch \frac{v_0 t}{a} \quad (e)$$

c) Baza se obține din relațiile (e) prin eliminarea parametrului t. Pentru aceasta înmulțim prima relație din (e) cu $\cos \alpha$, a doua cu $\sin \alpha$, le adunăm și deducem:

$$v_0 t = x_{1I} \cos \alpha + y_{1I} \sin \alpha \quad (f)$$

Din relațiile (e) și (f) obținem ecuația analitică a bazei și este de forma:

$$a ch \frac{x_{1I} \cos \alpha + y_{1I} \sin \alpha}{a} = -x_{1I} \sin \alpha + y_{1I} \cos \alpha \quad (g)$$

Pentru reprezentarea grafică a curbei (g), facem o transformare de coordonate de tipul: $X = x_{1I} \cos \alpha + y_{1I} \sin \alpha$, $Y = -x_{1I} \sin \alpha + y_{1I} \cos \alpha$

Aceste relații se mai scriu sub forma:

$$X = x_{1I} \cos(2\pi - \alpha) - y_{1I} \sin(2\pi - \alpha), \quad Y = x_{1I} \sin(2\pi - \alpha) + y_{1I} \cos(2\pi - \alpha)$$

Ultimele relații reprezintă o rotație a axelor $O_1 x_1 z_1$ de unghi $2\pi - \alpha$. Prin urmare, baza dată de formula (g) se mai scrie $Y = ach \frac{X}{a}$ adică lăncșorul (fig 8.57),

care intersectează axa $O_1 Y$ în punctul $Y=a$. Considerăm reperul mobil Oxy ca în figura 8.57. Față de acest sistem de axe, avem $y_I=a$ deci rostogolitoarea este o dreaptă paralelă cu axa Ox care trece prin mijlocul M al laturii OA. Evident rostogolitoarea este tangentă în I la bază.

d) Viteza unghiulară instantanee ω_I a plăcii este:

$$\omega_I = \dot{\theta} = \frac{v_0}{a} \sin \theta = \frac{v_0}{ach \frac{v_0 t}{a}}$$

iar accelerația unghiulară ε_1 este:

$$\varepsilon_I = \ddot{\theta} = \frac{v_0}{a} \dot{\theta} \cos \theta = -\frac{v_0^2}{a^2} \frac{sh \frac{v_0 t}{a}}{ch^2 \frac{v_0 t}{a}}$$

Viteza punctului C este perpendiculară pe segmentul IC în sensul lui ω_1 , iar mărimea dată de formula:

$$v_C = IC\omega_1 = \frac{v_0}{ach \frac{v_0 t}{a}} \sqrt{4b^2 + 4absh \frac{v_0 t}{a} + a^2 ch^2 \frac{v_0 t}{a}}$$

e) Polul accelerațiilor se află în O deoarece mișcarea punctului O este rectilinie și uniformă. Accelerația punctului C are două componente: accelerația tangențială de mărime:

$$a_C^n = OC\varepsilon_1 = \frac{2bv_0^2}{a^2} \frac{sh \frac{v_0 t}{a}}{ch^2 \frac{v_0 t}{a}}$$

și accelerația normală de mărime:

$$a_C^n = OC\omega_1^2 = \frac{2bv_0^2}{a^2 ch^2 \frac{v_0 t}{a}}$$

astfel că mărimea accelerației punctului C este:

$$a_c = \sqrt{(a_c^t)^2 + (a_c^n)^2} = \frac{2bv_0^2}{a^2 ch^2 \frac{v_0 t}{a}} \sqrt{1 + sh^2 \frac{v_0 t}{a}} = \frac{2bv_0^2}{a^2 ch \frac{v_0 t}{a}}$$

8.8.8. Se consideră mișcarea patruleterului articulat ABCD în planul fix $O_1x_1y_1$. Bara AD are viteza unghiulară constantă ω . Se cunosc $AD=BC=2a$, $AB=CD=2b$; $CM=MD$ (fig. 8.58). Să se determine pentru bara CD:

Centrul instantaneu de rotație, baza și rostogolitoarea;

Viteza și accelerația unghiulară instantanee;

Polul accelerațiilor;

Viteza și accelerația punctului M.

Rezolvare. Problema admite două cazuri după cum $a > b$ sau $a < b$. În cazul $a = b$ mecanismul nu se mișcă.

Cazul $a > b$ (fig. 8.58 a). Barele AD și BC au mișcări de rotație cu axă fixă, normalele pe vitezele punctelor C și D sunt tocmai de direcția acestor două bare, deci centrul instantaneu de rotație I al barei CD care are mișcare plană se află la intersecția

barelor AD și BC. Notăm: $\theta = \widehat{DAB}(\dot{\theta} = \omega)$, $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle ADB$. Pentru a determina coordonatele punctului I față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$, facem următoarele considerații geometrice: triunghiurile ABD și DCB sunt egale, din datele problemei.

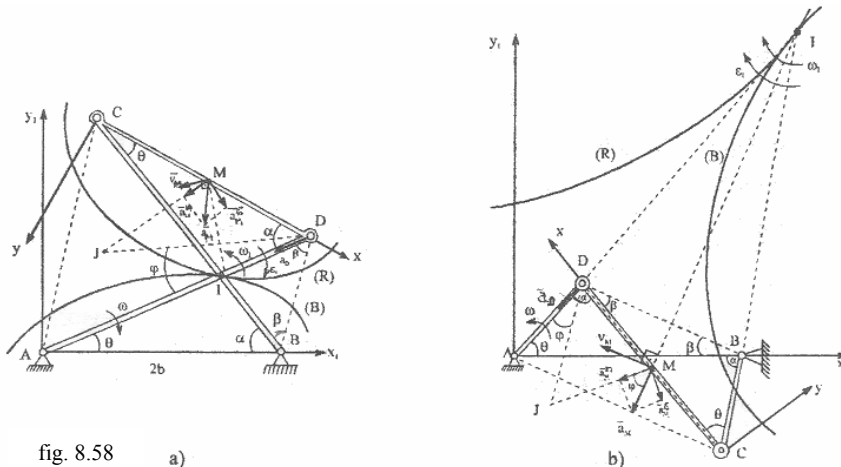


fig. 8.58 a)

Urmează egalitățile de unghiuri:

$$\angle BCD = \theta, \angle CBD = \beta, \angle ADC = \alpha \quad (1)$$

Din egalitățile (1) și din condiția $AB=CD$, rezultă egalitatea triunghiurilor AIB și CID și, de aici, avem:

$$IB=ID, AI=CI \quad (2)$$

Din triunghiul ABD, rezultă:

$$BD = 2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}, \sin \beta = \frac{b \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} \quad (3)$$

Din relația (3₂) rezultă

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \theta}{a - b \cos \theta} \quad (4)$$

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul ABD și ținând seama de relația (4), obținem ecuația:

$$\sin \alpha + \cos \alpha \frac{b \sin \theta}{a - b \cos \theta} = \frac{a \sin \theta}{a - b \cos \theta} \quad (5)$$

Cu notația $\operatorname{tg} \alpha/2 = u$ în ecuația (5), obținem: a) $\alpha = \theta$ ceea ce corespunde cazului când ABCD este dreptunghi dar în repaus; b) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$ ceea ce conduce la relația:

$$\sin \alpha = \frac{2u}{1+u^2} = \frac{(a-b^2)\sin \theta}{a^2+b^2-2ab\cos \theta} \quad (6)$$

În sfârșit din triunghiul AIB se poate determina segmentul AI prin aplicarea teoremei sinusurilor.

$$\frac{AI}{\sin \alpha} = \frac{IB}{\sin \theta} = \frac{2a}{\sin \alpha + \sin \theta} \quad (7)$$

Rezulta:

$$AI = \frac{a^2 - b^2}{a - b \cos \theta} \quad (8)$$

Coordonatele punctului I sunt:

$$x_{I_I} = AI \cos \theta = \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta}{a - b \cos \theta}, \quad y_{I_I} = AI \sin \theta = \frac{(a^2 - b^2) \sin \theta}{a - b \cos \theta} \quad (9)$$

Pentru obținerea bazei, considerăm ecuațiile (9) ca un sistem în $\sin \theta$ și $\cos \theta$, astfel că obținem:

$$\sin \theta = \frac{ay_{I_I}}{a^2 - b^2 + bx_{I_I}}, \quad \cos \theta = \frac{ax_{I_I}}{a^2 - b^2 + bx_{I_I}} \quad (10)$$

Din relațiile (10) obținem ecuația analitică a bazei: elipsa de ecuație:

$$(B): (a^2 - b^2)x_{I_I}^2 + a^2 y_{I_I}^2 - 2b(a^2 - b^2)x_{I_I} - (a^2 - b^2)^2 = 0 \quad (11)$$

Considerăm reperul mobil Oxy ca în figura 8.58 a. Față de acest sistem de axe, coordonatele centrului instantaneu de rotație sunt formal aceleași cu cele față de reperul fix:

$$x_I = CI \cos \theta = \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta}{a - b \cos \theta}, \quad y_I = CI \sin \theta = \frac{(a^2 - b^2) \sin \theta}{a - b \cos \theta} \quad (12)$$

Ecuația analitică a rostogolitoarei este evident elipsa:

$$(R): (a^2 - b^2)x_I^2 + a^2 y_I^2 - 2b(a^2 - b^2)x_I - (a^2 - b^2)^2 = 0 \quad (13)$$

b) Scriem viteza punctului D în două moduri:

$$v_D = 2a\omega = DI\omega_I \quad (14)$$

Ținând seama că $DI=BI$, din relațiile (7), (8) și (14), obținem:

$$\omega_I = \frac{2a\omega(a - b \cos \theta)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = \dot{\theta} \quad (15)$$

Acceleerația unghiulară instantanee se obține din relația (15):

$$\varepsilon_I = \dot{\omega}_I = \ddot{\theta} = -\frac{4a^2 b \omega^2 (a^2 - b^2)(a - b \cos \theta) \sin \theta}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^3} \quad (16)$$

c) Pentru determinarea polului accelerațiilor J, vom ține seama de vectorul accelerație al punctului D care are direcția și sensul vectorului \overline{DA} (fig. 8.58 a) și mărimea:

$$a_D = 2a\omega^2 \quad (17)$$

in formula (8.241) obținem distanța:

$$JD = \frac{a_D}{\sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}} = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^3}{2a(a - b\cos\theta)\sqrt{(b^3 - a^2b)^2 \sin^2\theta + (a - b\cos\theta)^2(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^2}} \quad (18)$$

iar din formula (8.242) obținem unghiul φ dintre JD și \bar{a}_D :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|\varepsilon_I|}{\omega_I^2} = \frac{b(a^2 - b^2)\sin\alpha}{(a - b\cos\theta)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)} \quad (19)$$

Ținând seama de relațiile (18) și (19), poziția lui J este determinată.

d) Viteza punctului M este perpendiculară pe IM cu sensul același cu sensul lui ω_I și de mărime:

$$v_M = IM\omega_I \quad (20)$$

unde:

$$IM = \frac{\sqrt{a^4 + b^4 \sin^2\theta + a^2 b^2 \cos 2\theta + 2ab(b^2 - a^2)\cos\theta}}{a - b\cos\theta} \quad (21)$$

Accelerația punctului M are două componente: componenta normală de direcție MJ și cu mărimea:

$$a_M^2 = JM\omega_I^2 \quad (22)$$

și componenta tangențială, perpendiculară pe JM cu sensul lui ε_I și de mărime:

$$a_M^n = JM\varepsilon_I \quad (22')$$

unde

$$JM = \sqrt{b^2 + JD^2 - 2bJD\cos(\alpha - \varphi)} \quad (22'')$$

iar JD este dat de relația (18) iar unghiul α de relația (6).

Accelerația punctului M este prin urmare:

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^r)^2} = JM\sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (23)$$

Cazul a < b (fig. 8.58b) a) Notăm $\theta = \sphericalangle DAB$, $\alpha = \sphericalangle ABC$, $\beta = \sphericalangle CDB$

Triunghiurile ABD și DCB sunt egale, de unde rezultă egalitățile:

$$\sphericalangle BCD = \theta, \sphericalangle ABD = \beta, \sphericalangle ADC = \alpha \quad (24)$$

Urmează ca și în cazul precedent, egalitatea triunghiurilor AIB și CID, de unde deducem:

$$IB = ID, AI = CI, BD \parallel AC \quad (25)$$

În triunghiul ABD, avem:

$$BD = 2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}, \sin\beta = \frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}} \quad (26)$$

și deci:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \theta}{b - a \cos \theta} \quad (27)$$

În triunghiul ABD, teorema sinusurilor și relația (27) implică relația:

$$\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{a \sin \theta}{b - a \cos \theta} = \frac{b \sin \theta}{b - a \cos \theta} \quad (28)$$

din care deducem singura soluție acceptabilă:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b-a}{b+a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \quad (29)$$

Din triunghiul ABI, obținem:

$$ID = BI = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}{b \cos \theta - a} \quad (30)$$

În relația (30) se poate arăta ușor că $b \cos \theta - a > 0$ (ADBC fiind trapez rezultă $\alpha + \beta > \pi/2$ deci B se proiectează pe AI între D și I).

Din relația (30) se poate deduce segmentul:

$$AI = ID + AD = \frac{b^2 - a^2}{b \cos \theta - a} \quad (31)$$

Ținând seama de relația (31), coordonatele punctului I în raport cu reperul fix $O_1x_1y_1$ sunt:

$$x_{I O_1} = AI \cos \theta = \frac{(b^2 - a^2) \cos \theta}{b \cos \theta - a}, \quad y_{I O_1} = AI \sin \theta = \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta}{b \cos \theta - a} \quad (32)$$

În acest caz, ecuația analitică a bazei este hiperbola de ecuație:

$$(B): (b^2 - a^2)x_{I O_1}^2 - a^2 y_{I O_1}^2 - 2b(b^2 - a^2)x_{I O_1} + (a^2 - b^2)^2 = 0 \quad (33)$$

Față de reperul Cxy (fig. 8.58 b), coordonatele punctului I sunt:

$$x_I = CI \cos \theta = \frac{(b^2 - a^2) \cos \theta}{b \cos \theta - a}, \quad y_I = CI \sin \theta = \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta}{b \cos \theta - a}, \quad (34)$$

Ecuația analitică a rostogolitoarei este tot o hiperbolă:

$$(R): (b^2 - a^2)x_I^2 - a^2 y_I^2 - 2b(b^2 - a^2)x_I + (b^2 - a^2)^2 = 0 \quad (35)$$

b) Viteza unghiulară instantanee este:

$$\omega_I = \frac{v_D}{DI} = \frac{2a\omega(b \cos \theta - a)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = \dot{\theta} \quad (36)$$

$$\text{iar accelerația unghiulară: } \varepsilon_I = \dot{\omega}_I = \frac{4a^2 b \omega^2 (b^2 - a^2)(b \cos \theta - a) \sin \theta}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^3} \quad (37)$$

Spre deosebire de cazul precedent, $\bar{\omega}_I$ și $\bar{\varepsilon}_I$ au același sens.

c) Accelerația punctului D are mărimea:

$$a_D = 2a\omega^2 \quad (38)$$

și direcția \overline{DA} . Distanța JD este:

$$JD = \frac{a_D}{\sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4}} = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^3}{2a(b \cos \theta - a) \sqrt{(b^3 - a^2 b)^2 \sin^2 \theta + (b \cos \theta - a)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^2}} \quad (39)$$

iar unghiul φ este dat de ecuația trigonometrică:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon_I}{\omega_I^2} = \frac{b(b^2 - a^2) \sin \theta}{(b \cos \theta - a)(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)} \quad (40)$$

Poziția polului accelerațiilor J este figurată în fig. 8.58 b.

d) Viteza punctului M este perpendiculară pe IM, are sensul lui ω_I și mărimea:

$$v_M = IM \omega_I \quad (41)$$

unde:

$$IM = \frac{\sqrt{a^4 + b^2(b^2 - a^2) \sin^2 \theta + ab(b^2 - a^2) \cos \theta}}{b \cos \theta - a} \quad (42)$$

Componenta normală a accelerației punctului M este de direcție MJ și de mărime:

$$a_M^n = JM \omega_I^2 \quad (43)$$

iar componenta tangențială este perpendiculară pe JM în sensul lui ε_I (fig. 8.58 b) și de mărime:

$$a_M^\Gamma = JM \varepsilon_I \quad (43')$$

unde:

$$JM = \sqrt{b^2 + JD^2 - 2bJD \cos(\alpha - \varphi)} \quad (43'')$$

cu JD dat de relația (39) iar α de relația (29). Accelerația punctului M este:

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\Gamma)^2} = JM \sqrt{\varepsilon_I^2 + \omega_I^4} \quad (44)$$

8.8.9. Dreptele (Δ_1) , (Δ_2) , (Δ_3) sunt concurente în punctul O și formează între ele unghiuri cunoscute α , β , γ (fig. 8.59). Un rigid efectuează trei mișcări de rotație instantanee în jurul unor axe paralele cu cele date cu vitezele unghiulare ω_1 , ω_2 , respectiv ω_3 . Să se determine viteza unghiulară rezultantă $\overline{\omega}$.

Rezolvare: Considerăm triedrul Oxyz fixat de rigid față de care vectorul vitezei unghiulare rezultantă $\overline{\omega}$ are componentele necunoscute ω_x , ω_y , ω_z :

$$\overline{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

Notând versorii celor trei axe (Δ_1) , (Δ_2) , (Δ_3) cu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, vectorul $\overline{\omega}$ se scrie în forma:

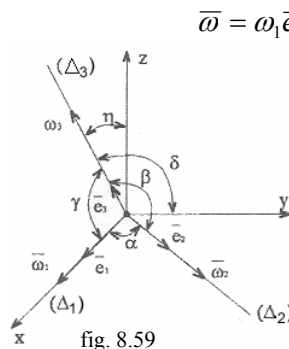


fig. 8.59

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3 \quad (a)$$

Notăm $\delta = (\hat{O_y}, \Delta_3)$, $\eta = (\hat{Oz}, \Delta_3)$ și exprimăm versorii \bar{e}_k , $k=1, 2, 3$ în funcție de versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{i}, \quad \bar{e}_2 = \cos \alpha \bar{i} + \sin \alpha \bar{j}, \\ \bar{e} &= \cos \gamma \bar{i} + \cos \delta \bar{j} + \cos \eta \bar{k} \end{aligned} \quad (b)$$

unde unghiurile δ și η le vom determina astfel: axele (Δ_2) și (Δ_3) formează unghiul β și deci $\cos \beta = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \cos \delta$ de unde obținem:

$$\cos \delta = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha} \quad (c)$$

Pe de altă parte (Δ_3) formează cu axele Oxyz unghiurile γ , δ și η deci putem scrie:

$$\cos^2 \gamma + \cos^2 \delta + \cos^2 \eta = 1 \quad (d)$$

Din relația (d) și cu ajutorul relației (c) obținem:

$$\cos \eta = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}}{\sin \alpha} \quad (e)$$

Din relațiile (a), (b), (c) și (e) obținem:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= (\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha + \omega_3 \cos \gamma) \bar{i} + (\omega_2 \sin \alpha + \omega_3 \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha}) \bar{j} + \\ &+ \frac{\omega_3}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \cdot \bar{k} \end{aligned} \quad (f)$$

Mărimea vectorului $\bar{\omega}$ rezultă din relațiile (a) sau (f)

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \alpha + 2\omega_1\omega_3 \cos \gamma + 2\omega_2\omega_3 \cos \beta}$$

8.8.10. Un rigid se rotește cu o viteză unghiulară de mărime constantă ω_1 în jurul unei axe solidare cu el, în timp ce această axă se rotește în același sens, tot cu o viteză unghiulară de mărime constantă ω_2 în jurul unei axe fixe care o intersectează. Sa se determine:

a) Conurile lui Poinot;

b) Locul punctelor rigidului a căror accelerație este perpendiculară pe axa instantanee.

Rezolvare. Punctul de intersecție al celor două axe de rotație îl alegem ca origine comună a celor două repere: $O_1x_1y_1z_1$ fix și $Oxyz$ solidar cu rigidul (fig. 8.60).

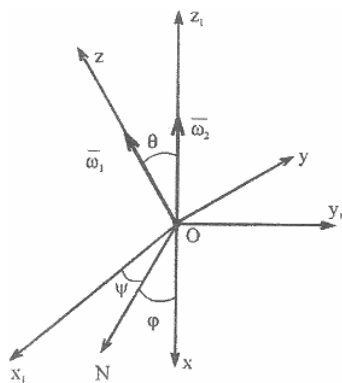


fig. 8.60

Axa Oz_1 coincide cu axa fixă de rotație, iar axa Oz mobilă coincide cu axa de rotație solidară cu rigidul. Rigidul are o mișcare de rotație cu punct fix iar viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$ este suma vectorială a vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ al celor două mișcări componente:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \omega_1 \bar{k} + \omega_2 \bar{k}_1$$

Pentru rezolvarea problemei, vom utiliza unghiurile lui Euler. Din formula (8.287) deducem:

$$\dot{\psi} = \omega_2, \quad \dot{\varphi} = \omega_1, \quad \dot{\theta} = 0$$

astfel că obținem legea de mișcare a rigidului:

$$\psi = \omega_2 t + C_1, \quad \varphi = \omega_1 t + C_2, \quad \theta = C_3 \quad (a)$$

unde constantele de integrare C_1, C_2, C_3 le determinăm din condițiile inițiale. Fără a particulariza problema, putem presupune că în momentul inițial, linia nodurilor ON coincide cu axa Ox_1 iar axa mobilă Ox cu linia nodurilor. Deci, avem condițiile inițiale:

$$t = 0, \quad \psi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \theta = \theta_0 (= \text{constantă})$$

din care vor rezulta valorile constantelor:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = \theta_0 \quad (b)$$

Din relațiile (a) și (b) obținem:

$$\psi = \omega_2 t, \quad \varphi = \omega_1 t, \quad \theta = \theta_0$$

Proiecțiile vitezei unghiulare instantanee ω pe axele reperului mobil, le deducem din formulele (8.288):

$$\omega_x = \omega_2 \sin \theta_0 \sin \omega_1 t, \quad \omega_y = \omega_2 \sin \theta_0 \cos \omega_1 t, \quad \omega_z = \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1$$

iar proiecțiile pe axele reperului fix, le deducem din formulele (8.289):

$$\omega_{x_1} = \omega_1 \sin \omega_2 t \sin \theta_0, \quad \omega_{y_1} = -\omega_1 \cos \omega_2 t \sin \theta_0, \quad \omega_{z_1} = \omega_2 + \omega_1 \cos \theta_0$$

Ecuția axei instantanee de rotație față de reperul mobil, o obținem din relația (8.292):

$$\frac{x}{\omega_2 \sin \theta_0 \sin \omega_1 t} = \frac{y}{\omega_2 \sin \theta_0 \cos \omega_1 t} = \frac{z}{\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1} \quad (c)$$

Conul polodic îl obținem din relația (c) prin eliminarea parametrului t :

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{\omega_2 \sin \theta_0}{\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1} \right)^2 z^2 = 0$$

Ecuția axei instantanee de rotație față de reperul fix, o obținem din (8.294):

$$\frac{x_1}{\omega_1 \sin \omega_2 t \sin \theta_0} = \frac{y_1}{-\omega_1 \cos \omega_2 t \sin \theta_0} = \frac{z_1}{\omega_2 + \omega_1 \cos \theta_0} \quad (d)$$

Conul herpolodic îl obținem din relația (d) prin eliminarea parametrului t :

$$x_1^2 + y_1^2 - \left(\frac{\omega_1 \sin \theta_0}{\omega_2 + \omega_1 \cos \theta_0} \right)^2 z_1^2 = 0$$

b) Față de reperul mobil, considerăm un punct arbitrar $M(x,y,z)$ și deci vectorul său de poziție este $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Accelerația punctului M este dată de formula (8.299):

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (e)$$

unde vectorul accelerație unghiulară $\vec{\varepsilon}$ este dat de formula:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \omega_1 \omega_2 \sin \theta_0 \cos \omega_1 t \vec{i} - \omega_1 \omega_2 \sin \theta_0 \sin \omega_1 t \vec{j}$$

Punctele rigidului care au accelerația perpendiculară pe axa instantanee de rotație sunt caracterizate de condiția:

$$\vec{a}_M \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (f)$$

deoarece axa instantanee de rotație are direcția vectorului $\vec{\omega}$. Din relațiile (e) și (f) rezultă ecuația căutată: planul de ecuație

$$\sin \omega_1 t x + \cos \omega_1 t y - \frac{\omega_2 \sin \theta_0}{\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1} z = 0 \quad (g)$$

Planul (g) taie planul $z=0$ după o dreaptă perpendiculară pe axa instantanee de rotație și deci perpendiculară pe planul zOz_1 .

9. CINEMATICA MIȘCĂRII COMPUSE

9.1. Mișcarea relativă a punctului material

9.1.1. Generalități

În capitolele precedente, am analizat mișcarea unui punct material și a unui solid rigid în raport cu un sistem de referință presupus fix. În unele cazuri este necesar

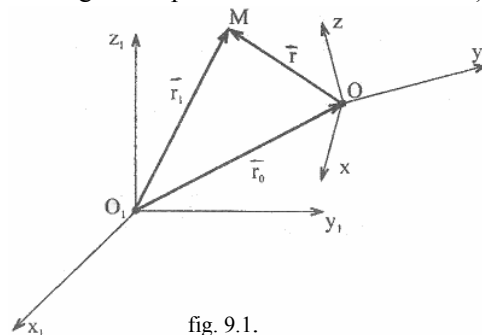


fig. 9.1.

să raportăm mișcarea la un sistem de referință care se află în mișcare față de un sistem fix. În acest caz, se pune problema să se determine parametrii cinematici ce caracterizează mișcarea sistemului material în raport cu reperul fix, atunci când se cunosc parametrii cinematici care caracterizează mișcarea în raport cu unul sau mai multe mobile.

Considerăm un punct material M în mișcare față de sistemul de referință $Oxyz$, care la rândul său se

mișcă în raport cu un sistem de referință presupus fix $O_1x_1y_1z_1$ (fig. 9.1). În mișcarea relativă a punctului material intervin trei noțiuni importante și anume: **mișcarea absolută** care este mișcarea punctului material față de sistemul de referință fix. Viteza și accelerația punctului în această mișcare se vor numi viteză absolută; respectiv accelerația absolută; **mișcarea relativă** este mișcarea punctului material față de reperul mobil. Viteza și accelerația punctului în această mișcare se numesc viteză relativă, respectiv accelerație relativă; **mișcarea de transport** este mișcarea punctului presupus solidar cu sistemul de referință mobil, față de sistemul de referință fix. Viteza și accelerația punctului fixat de sistemul de referință mobil față de cel fix se numește viteză de transport, respectiv accelerație de transport. Pentru a studia mișcarea de transport se imobilizează punctul față de sistemul mobil care se va mișca cu acesta.

În general în astfel de probleme, se cunosc elementele cinematice ale mișcării relative și a celei de transport și se urmăresc determinarea elementelor cinematice ale mișcării absolute.

În figura 9.2. se consideră un exemplu de mișcare relativă: punctul M se mișcă pe cercul de centru O care la rândul său se rotește în jurul punctului fix O_1 în planul $O_1x_1y_1$. Vom determina mișcarea absolută, relativă și de transport ale punctului

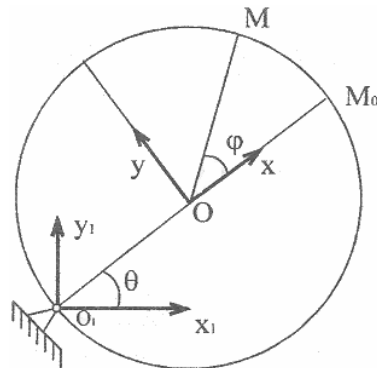


fig. 9.2

M. Astfel, considerăm reperul mobil solidar în cercul având originea O în centrul cercului iar axa Ox de-a lungul diametrului ce trece prin punctul fix O_1 . Axa fixă O_1x_1 este orizontală.

Mișcarea absolută este mișcarea punctului M față de sistemul fix $O_1x_1y_1$.

Mișcarea relativă este mișcarea pe cerc, față de sistemul Oxy și este dată de unghiul $\varphi = \angle MOx$. Mișcarea de transport este mișcarea punctului M față de reperul Oxy (**ca și cum** $\varphi = \text{constant}$) față de reperul fix $O_1x_1y_1$. Acest punct descrie un cerc de rază O_1M ($\text{unghi } MO_1x_1 = \theta + \varphi/2$).

Legea mișcării absolute a punctului M (fig. 9.1) este:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (9.1)$$

unde $\vec{r}_1 = \overline{O_1M}$ este vectorul de poziție al punctului M față de reperul fix, $\vec{r}_0 = \overline{O_1O}$ este vectorul de poziție al originii reperului mobil față de cel fix și $\vec{r} = \overline{OM}$ este vectorul de poziție al punctului M față de sistemul de referință mobil.

Legea mișcării absolute a punctului M se scrie vectorial:

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1 \quad (9.2)$$

sau scalar:

$$x_1 = x_1(t); y_1 = y_1(t); z_1 = z_1(t) \quad (9.3)$$

ceea ce mai înseamnă și ecuațiile parametrice ale traiectoriei absolute a punctului M.

Legea mișcării relative a punctului M se scrie vectorial:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (9.4)$$

sau scalar:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t); \quad (9.5)$$

deci relațiile (9.5) pot fi considerate și ca ecuații parametrice ale traiectoriei relative a punctului M.

Legea de mișcare a originii reperului mobil față de reperul fix este dată de vectorul:

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i}_1 + y_0 \vec{j}_1 + z_0 \vec{k}_1 \quad (9.6)$$

deci de scalarii:

$$x_0 = x_0(t); y_0 = y_0(t); z_0 = z_0(t); \quad (9.7)$$

Relațiile (9.7) împreună cu cosinușii directori ai axelor mobile față de cele fixe, determină poziția sistemului de referință mobil față de sistemul de referință fix.

9.1.2. Compunerea vitezelor în mișcarea relativă

Prin derivarea relației (9.1) în raport cu timpul și ținând seama că vectorul \vec{r} este definit în raport cu sistemul de referință mobil, obținem:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}} \quad (9.8)$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \omega \times \vec{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (9.9)$$

Observăm că:

$$\dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0 \quad (9.10)$$

reprezintă viteza lui O față de sistemul de referință fix. Relația (9.8) se mai scrie:

$$\dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.11)$$

Din definițiile date în paragraful 9.1., rezultă:

Viteza punctului M față de sistemul de referință fix, este viteza absolută:

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}_1 \quad (9.12)$$

Viteza punctului M față de sistemul de referință mobil, ca și cum ar fi fix, este viteza relativă:

$$\vec{v}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (9.13)$$

Viteza punctului M fixat de reperul mobil în mișcare față de sistemul de referință fix, este viteza de transport:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.14)$$

Relațiile (9.11), (9.12), (9.13) și (9.14) conduc la relația de compunere a vitezelor în mișcarea relativă a punctului material:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \quad (9.15)$$

9.1.3. Compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă

Pentru determinarea accelerațiilor, vom deriva relația (9.11) în raport cu timpul:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{v}}_0 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (9.16)$$

Vectorul $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ este raportat la sistemul de referință mobil și deci derivata sa absolută va fi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) + \vec{\omega} \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \quad (9.17)$$

Accelerația originii reperului mobil este:

$$\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0 \quad (9.18)$$

Din relațiile (9.17), (9.18) și (9.19) rezultă:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{a}_0 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

sau:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (9.19)$$

Din definițiile anterioare, rezultă:

Accelerația punctului M față de sistemul de referință fix și deci accelerația absolută a punctului, este:

$$\vec{a}_a = \ddot{\vec{r}}_1 \quad (9.20)$$

Accelerația punctului M față de sistemul de referință mobil ca și cum acesta ar fi fix, este accelerația relativă a punctului:

$$\vec{a}_r = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \quad (9.21)$$

Accelerația punctului M fixat de sistemul de referință mobil, în mișcare față de cel fix este accelerația de transport a punctului:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (9.22)$$

Termenul

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad (9.23)$$

se numește accelerație Coriolis sau accelerație complementară și exprimă după cum se observă, influența simultană a mișcării de rotație a sistemului de referință mobil și a mișcării relative a punctului asupra accelerației absolute a acestuia. Accelerația Coriolis este un vector perpendicular pe planul determinat de vectorii $\bar{\omega}$ și \bar{v}_r cu sensul dat de rotirea vectorului $\bar{\omega}$ peste \bar{v}_r după regula de înaintare a burghiului drept. Modulul de accelerație Coriolis este:

$$a_c = 2\omega v_r \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r) \quad (9.24)$$

Accelerația Coriolis este nulă în următoarele cazuri:

- $\bar{\omega} = 0$ când mișcarea sistemului de referință mobil este o translație;
- $\bar{v}_r = 0$, situație corespunzătoare poziției de echilibru relativ;
- $\bar{\omega}$ și \bar{v}_r sunt paraleli.

Înlocuind relațiile (9.20), (9.21) și (9.23) în relația (9.19), obținem relația de compunere a accelerațiilor în mișcarea relativă a punctului material:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \quad (9.25)$$

Aplicație: Să reluăm exemplul din figura 9.2. Se cunosc raza R a cercului, $\varphi = \omega_1 t$, $\theta = \omega_2 t$, ω_1, ω_2 - constante. Să se determine viteza absolută și accelerația absolută a punctului M la un moment dat (fig. 9.3).

Rezolvare

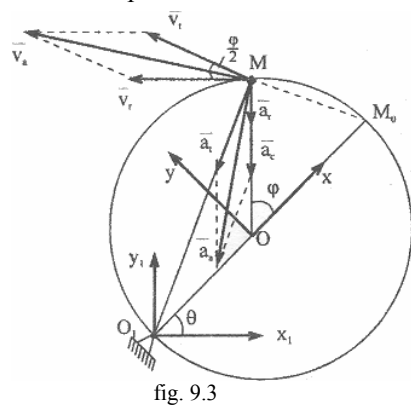
Soluție geometrică

Ținând seama de concluziile analizei mișcării făcute anterior, vitezele componente sunt: viteza relativă \bar{v}_r tangentă în M la cerc cu sensul dat de creșterea unghiului φ și de mărime: $v_r = R\dot{\varphi} = R\omega_1$. Viteza de transport \bar{v}_t este perpendiculară pe O_1M în sensul creșterii unghiului φ și de mărime:

$$v_t = O_1M\dot{\theta} = 2R\omega_2 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Viteza absolută este vectorul diagonală a paralelogramului construit cu suportii vectorilor \bar{v}_r și \bar{v}_t și de mărime:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(\bar{v}_r, \bar{v}_t)} = R\sqrt{\omega_1^2 + 4\omega_2(\omega_2 + \omega_1) \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$



Accelerațiile componente sunt: Accelerația relativă \bar{a}_r are numai componenta normală, deoarece $\omega_1 = \text{constant}$ și deci direcția este a razei MO cu sensul spre O și de mărime: $a_r = R\dot{\varphi}^2 = R\omega_1^2$. Accelerația de transport \bar{a}_t are numai componenta normală ($\omega_2 = \text{constant}$), adică direcția dreptei MO₁ și are sensul spre O₁ cu mărimea: $a_t = O_1 M \dot{\theta}^2 = 2R\omega_2^2 \cos \frac{\varphi}{2}$. Accelerația Coriolis \bar{a}_c este un vector perpendicular pe \bar{v}_r situat în planul mișcării, deci are direcția identică cu accelerația relativă. Din definiția produsului vectorial, deducem că sensul vectorului \bar{a}_c este spre O și are mărimea: $a_c = 2\omega_2 R\omega_1 = 2R\omega_1\omega_2$. Accelerația absolută \bar{a}_a este vectorul diagonală a paralelogramului construit cu suportii vectorilor \bar{a}_t și $\bar{a}_r + \bar{a}_c$ iar mărimea este:

$$a_a = \sqrt{a_t^2 + (a_r + a_c)^2 + 2a_t(a_r + a_c)\cos \frac{\varphi}{2}} = R\sqrt{\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)^2 + 4\omega_2^2(\omega_1 + \omega_2)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Soluție analitică

Problema mai poate fi rezolvată și cu ajutorul formulelor stabilite la paragrafele 9.2 și 9.3. Pentru aceasta, alegem sistemele de referință O₁x₁y₁ și Oxy ca în figura 9.3. Față de reperul mobil, vom scrie toți vectorii componenți. Astfel:

$$\bar{r} = \overline{OM} = R(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}); \bar{\omega} = \omega_2 \bar{k}. \text{ Vectorul } \bar{v}_0 \text{ îl raportăm la reperul}$$

fix: $\bar{v}_0 = \dot{\overline{O_1O}} = R\omega_2(-\sin \theta \bar{i}_1 + \cos \theta \bar{j}_1)$ apoi la reperul mobil: $\bar{v}_0 = R\omega_2 \bar{j}$. Deci vitezele componente sunt:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = R\omega_1(-\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j})$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = R\omega_2[-\sin \varphi \bar{i} + (1 + \cos \varphi) \bar{j}]$$

Prin urmare, viteza absolută are expresia vectorială:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -R(\omega_1 + \omega_2) \sin \varphi \bar{i} + R[\omega_2 + (\omega_1 + \omega_2) \cos \varphi] \bar{j}$$

iar mărimea

$$v_a = R\sqrt{(\omega_1 + \omega_2)^2 \sin^2 \varphi + [\omega_2 + (\omega_1 + \omega_2) \cos \varphi]^2} = R\sqrt{\omega_1^2 + 4\omega_2(\omega_1 + \omega_2) \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Accelerațiile sunt:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = -R\omega_1^2(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j})$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -R\omega_2^2[(1 + \cos \varphi) \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}]$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_r = -2R\omega_1\omega_2(\cos\varphi\bar{i} + \sin\varphi\bar{j})$$

Prin urmare, accelerația absolută este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -R[\omega_2^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \cos\varphi]\bar{i} - R(\omega_1 + \omega_2)^2 \sin\varphi\bar{j}$$

iar mărimea

$$\begin{aligned} a_a &= R\sqrt{[\omega_2^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \cos\varphi]^2 + (\omega_1 + \omega_2)^4 \sin^2\varphi} = \\ &= \sqrt{\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)^2 + [2\omega_2(\omega_1 + \omega_2)\cos\frac{\varphi}{2}]^2} \end{aligned}$$

Se constată cu ușurință că rezultatele obținute prin cele două metode sunt identice.

9.2. Compunerea a două mișcări ale corpului rigid

9.2.1. Generalități

În cadrul cinematicii rigidului, am studiat distribuția de viteze și accelerație în mișcarea acestuia față de un reper fix. În cele ce urmează, vom studia aceeași problemă în cazul când mișcarea se raportează la un reper mobil și vom determina distribuțiile de viteze și de accelerații în acest caz.

Vom considera un corp rigid (C) care se mișcă față de triedrul mobil T_1 ($O_1x_1y_1$). Triedrul T_0 ($Ox_0y_0z_0$) este fix iar triedrul T_2 ($O_2x_2y_2z_2$) este solidar cu corpul.

În general, se cunoaște mișcarea corpului față de triedrul mobil (T_1) precum și mișcarea triedrului mobil (T_1) față de triedrul fix (T_0) și ne punem problema să determinăm mișcarea corpului față de triedrul fix (T_0). Pentru studiul vitezelor și accelerațiilor se alege un punct arbitrar M din rigid. Mișcarea corpului față de triedrul mobil (T_1) este definită de vectorii:

\bar{v}_{21} - viteza originii triedrului T_2 față de triedrul T_1 ;

\bar{a}_{21} - accelerația originii triedrului T_2 față de triedrul T_1 ;

$\bar{\omega}_{21}$ - viteza unghiulară a corpului față de triedrul T_1 ;

$\bar{\epsilon}_{21}$ - accelerația unghiulară a corpului față de triedrul T_1 ;

Mișcarea triedrului (T_1) față de triedrul fix T_0 este definită de vectorii:

\bar{v}_{10} - viteza originii triedrului (T_1) față de triedrul (T_0);

\bar{a}_{10} - accelerația originii triedrului (T_1) față de triedrul (T_0);

$\bar{\omega}_{10}$ - viteza unghiulară în mișcarea triedrului (T_1) față de (T_0);

$\bar{\epsilon}_{10}$ - accelerația unghiulară în mișcarea triedrului (T_1) față de (T_0);

Mișcarea corpului rigid (C) față de triedrul fix (T_0) se numește mișcare absolută, iar mișcarea corpului, deci a triedrului (T_2) față de triedrul (T_1) reprezintă

mișcarea relativă a corpului. Mișcarea corpului (C) solidar cu triedrul (T₁) față de triedrul fix (T₀) este mișcarea de transport a corpului.

Considerăm cunoscuți parametrii cinematici ai mișcărilor relativă și de transport și anume: \vec{v}_{21} , \vec{a}_{21} , $\vec{\omega}_{21}$, \vec{e}_{21} , parametrii ce caracterizează mișcarea reperului (T₂) față de (T₁) și \vec{v}_{10} , \vec{a}_{10} , $\vec{\omega}_{10}$, \vec{e}_{10} , parametrii ce caracterizează mișcarea reperului (T₁) față de reperul fix (T₀).

Un punct arbitrar M din corp este definit de vectorii de poziție $\vec{r}_2 = \overline{O_2M}$ în

raport cu originea reperului (T₂);

$\vec{r}_1 = \overline{O_1M}$ în raport cu originea

reperului (T₁); $\vec{r} = \overline{OM}$ în raport cu originea reperului fix (T₀). (fig. 9.4).

Pentru vectorii de poziție ai punctelor O₂ și O₁ față de reperul fix (T₀), vom folosi notațiile: $\vec{r}_{20} = \overline{OO_2}$;

$\vec{r}_{10} = \overline{OO_1}$ iar poziția punctului O₂ față

de O₁ este dată de vectorul de poziție

$\vec{r}_{21} = \overline{O_1O_2}$.

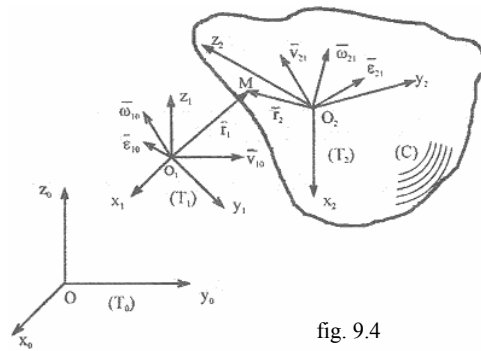


fig. 9.4

Pentru a determina distribuția de viteze și de accelerații trebuie să determinăm viteza absolută și accelerația absolută a punctului arbitrar M precum și vectorii viteze unghiulară absolută $\vec{\omega}_{20}$ și accelerația unghiulară absolută \vec{e}_{20} în mișcarea corpului față de triedrul fix (T₀).

Legea mișcării absolute a punctului M se scrie în formă vectorial astfel:

$$\vec{r} = \vec{r}_{10} + \vec{r}_{21} + \vec{r}_2 = \vec{r}_{20} + \vec{r}_2 \quad (9.26)$$

9.2.2. Distribuția de viteze

Viteza punctului arbitrar M al corpului față de triedrul fix (T₀) se obține folosind rezultatele de la paragraful 9.1.2., deoarece putem considera că punctul M se mișcă față de triedrul (T₁) care se mișcă la rândul său față de (T₀).

Viteza relativă a punctului M este viteza lui M față de triedrul (T₁). Punctul M este solidar legat cu triedrul (T₂), astfel că:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{21} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2 \quad (9.27)$$

Viteza de transport a punctului M este viteza punctului M solidar legat cu triedrul (T₁) față de triedrul fix (T₀), deci:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_{10} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{r}_1 \quad (9.28)$$

Viteza absolută se calculează cu formula

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \quad (9.29)$$

de unde viteza absoluta a lui M solidar legat cu triedrul (T_2) fata de triedrul fix (T_0) este:

$$\bar{v}_{20}^M = \bar{v}_a = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2 \quad (9.30)$$

Relația (9.30) nu permite determinarea vitezei absolute a punctelor corpului in funcție de parametrii cinematici ai mișcărilor componente.

9.2.3 Distribuția de accelerații

În cele ce urmează, vom folosi rezultatele de la paragraful 9.1.3. Astfel, accelerația relativă a punctului M este accelerația lui M față de triedrul (T_1)

$$\bar{a}_r = \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) \quad (9.31)$$

Accelerația de transport a punctului M este accelerația lui M solidar legat de triedrul (T_1) față de reperul fix (T_0) :

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{10} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1) \quad (9.32)$$

Accelerația Coriolis se va calcula cu viteza unghiulară de transport $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{10}$ și cu viteza relativă dată de formula (9.27), deci :

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega}_{10} \times (\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) \quad (9.33)$$

Expresia accelerației absolute a punctului M al rigidului se obține folosind formula (9.25):

$$\begin{aligned} \bar{a}_{20}^M = \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = \bar{a}_{10} + \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1) + \\ + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) + 2\bar{\omega}_{10} \times (\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) \end{aligned} \quad (9.34)$$

Relația (9.34) ne permite determinarea accelerației absolute a punctelor corpului in funcție de parametrii cinematici ai mișcărilor componente.

9.3. Compunerea a n mișcări instantanee ale corpului rigid

În paragraful anterior, am considerat un singur reper intermediar mobil. In cele ce urmează vom considera reperul fix (T_0) și reperele intermediare $(T_1), (T_2), \dots, (T_{n-1})$ mobile ce execută mișcări unul față de celălalt. De asemenea reperul (T_n) este fixat de corpul (C) . Vom determina mișcarea punctului M din corp in raport cu reperul fix (T_0) , cunoscând mișcărilor relative ale fiecărui triedru de referință față de triedrul precedent.

Parametrii cinematici ce caracterizează mișcarea relativă a triedrului (T_{k+1}) față de triedrul (T_k) sunt : $\bar{v}_{k+1,k}, \bar{a}_{k+1,k}, \bar{\omega}_{k+1,k}, \bar{\varepsilon}_{k+1,k}, \forall k = \overline{1, n-1}$ iar poziția punctului M față de triedrul (T_k) este definită de vectorul de poziție $\bar{r}_k = \overline{O_k M}$, $k = \overline{1, n}$ iar față de triedrul fix (T_0) de vectorul de poziție $\bar{r} = \overline{OM}$. Originea O_{k+1} a triedrului (T_{k+1}) față de triedrul (T_k) este definită prin vectorul de poziție $\bar{r}_{k+1,k} = \overline{O_k O_{k+1}}$. Legea mișcării absolute a punctului arbitrar M din corp se scrie vectorial sub forma :

$$\bar{r} = \bar{r}_{1,0} + \bar{r}_{2,1} + \dots + \bar{r}_{n,n-1} + \bar{r}_n = \sum_{k=1}^n \bar{r}_{k,k-1} + \bar{r}_n \quad (9.35)$$

9.3.1. Distribuția de viteze

Relația (9.30) a vitezei absolute \bar{v}_{20} a punctului M în cazul unei singure mișcări relative și a unei singure mișcări de transport a corpului (C) poate fi generalizată prin inducție completă la cazul unei mișcări relative și n-1 mișcări de transport. În acest caz, expresia vitezei absolute a punctului M este :

$$\bar{v}_{n,0}^M = \bar{v} = \sum_{k=1}^n \bar{v}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k \quad (9.36)$$

Pentru demonstrarea prin inducție completă a acestei relații, facem observația că pentru $n=2$ relația (9.36) a fost demonstrată în paragraful 9.2.2. Pentru a demonstra relația (9.36) în care în locul lui n se consideră $n+1$, adică :

$$\bar{v}_{n+1,0}^M = \sum_{k=1}^{n+1} \bar{v}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k \quad (9.36')$$

facem observația că primele n mișcări le considerăm mișcări de transport și deci viteza de transport are forma :

$$\bar{v}_t = \bar{v}_{n,0}^M = \sum_{k=1}^n \bar{v}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k \quad (9.36'')$$

iar a “ $n+1$ ”-a mișcare este mișcarea relativă: viteza punctului M fixat de reperul (T_{n+1}) față de reperul (T_n) este viteza relativă a punctului :

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{n+1,n} + \bar{\omega}_{n+1,n} \times \bar{r}_{n+1} \quad (9.37)$$

Viteza absolută a punctului M în acest caz este :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{v}_{n+1,0}^M \quad (9.38)$$

unde $\bar{v}_{n+1,0}^M$ este dată de relația (9.36'), ceea ce demonstrează formula generală (9.36).

Pentru a calcula viteza unghiulară instantanee a corpului (C) față de reperul fix $\overline{\omega}_{n,0}$, considerăm punctele M și N din rigid, astfel că aplicând formula (9.36) pentru fiecare punct, se poate scrie :

$$\overline{v}_M = \sum_{k=1}^n \overline{v}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^n \overline{\omega}_{k,k-1} \times \overline{O_i M} \quad (9.39)$$

$$\overline{v}_N = \sum_{k=1}^n \overline{v}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^n \overline{\omega}_{k,k-1} \times \overline{O_i N} \quad (9.40)$$

Ținând seama de relația vectorială

$$\overline{O_i N} = \overline{O_i M} + \overline{MN} \quad (9.41)$$

formula (9.40) devine :

$$\overline{v}_N = \sum_{k=1}^n \overline{v}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^n \overline{\omega}_{k,k-1} \times \overline{O_i M} + \sum_{k=1}^n \overline{\omega}_{k,k-1} \times \overline{MN} = \overline{v}_M + \left(\sum_{k=1}^n \overline{\omega}_{k,k-1} \right) \times \overline{MN} \quad (9.42)$$

Dar punctele M și N fiind din rigid, putem scrie relația lui Euler între vitezele celor două puncte, sub forma :

$$\overline{v}_N = \overline{v}_M + \overline{\omega} \times \overline{MN} \quad (9.43)$$

Comparând relațiile (9.42) și (9.43), deducem formula vitezei unghiulare instantanee a corpului (C) față de reperul fix :

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_{n,0} = \sum_{k=1}^n \overline{\omega}_{k,k-1} \quad (9.44)$$

Deci viteza absolută (instantanee) în mișcarea compusă a rigidului, este suma vectorială a vitezelor unghiulare relative a mișcărilor componente.

Cu ajutorul vectorilor \overline{v}_M și $\overline{\omega}_{n,0}$ se poate determina distribuția de viteze a rigidului. Astfel un punct arbitrar P din rigid va avea viteza absolută în funcție de \overline{v}_M de forma :

$$\overline{v}_P = \overline{v}_M + \overline{\omega}_{n,0} \times \overline{MP} \quad (9.45)$$

Relația (9.45) arată că vitezele absolute ale diferitelor puncte ale rigidului sunt vectori legați, asemănători vectorilor moment din statică. Vectorii viteze unghiulară sunt vectori alunecători, asemănători cu vectorii forță din statică, formula (9.44) este analoagă celei cu care se calculează forța rezultantă. Se poate face o analogie formală cu relațiile din statică care dau rezultanta și momentul resultant. Vectorul viteze unghiulară absolută $\overline{\omega}_{n,0}$ este analog vectorului resultant \overline{R} iar vectorul viteze absolută \overline{v}_P este analog vectorului moment resultant \overline{M}_P în raport cu punctul P. Determinarea vectorilor $\overline{\omega}_{n,0}$ și \overline{v}_P se face deci efectuând reducerea vectorilor alunecători $\overline{\omega}_{k,k-1}$ și a vectorilor liberi $\overline{v}_{k,k-1}$ în punctul P.

În baza acestei analogii, așa cum în statistică din analiza torsorului de reducere într-un punct, \bar{R} și \bar{M}_p s-au tras concluzii asupra sistemului de forțe, tot astfel din cercetarea vectorilor $\bar{\omega}_{n,0}$ și \bar{v}_p se pot trage concluzii asupra mișcării rezultante.

Discuția asupra distribuției de viteze în cazul mișcării rezultante, este rezumată în cele ce urmează prin analogie cu cazurile de reducere :

I. Dacă $\bar{\omega}_{n,0} \cdot \bar{v}_p \neq 0$, distribuția de viteze este aceea a unei mișcări rezultante de rotranație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_{n,0}$ în jurul unei axe ce trece prin punctul M, definit în raport cu punctul P prin vectorul

$$\overline{PM} = \frac{\bar{\omega}_{n,0} \times \bar{v}_p}{\omega_{n,0}^2} \quad (9.46)$$

Viteza de alunecare \bar{u} în lungul axei instantanee este dată de formula :

$$\bar{u} = \frac{\bar{\omega}_{n,0} \cdot \bar{v}_p}{\omega_{n,0}^2} \bar{\omega}_{n,0} \quad (9.47)$$

II. Dacă $\bar{\omega}_{n,0} \cdot \bar{v}_p = 0$ și $\bar{\omega}_{n,0} \neq 0$ viteza de alunecare \bar{u} este zero, deci corpul are o distribuție de viteze specifică unei rotații cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_{n,0}$ în jurul unei axe ce trece prin punctul M definit prin relația (9.46).

III. Dacă $\bar{\omega}_{n,0} = \bar{0}$ și $\bar{v} \neq \bar{0}$ distribuția de viteze este specifică unei translații de viteză \bar{v}_p .

IV. Dacă $\bar{\omega}_{n,0} = \bar{0}$ și $\bar{v} = \bar{0}$, vitezele tuturor punctelor rigidului sunt nule și deci rigidul este în repaus față de sistemul fix.

9.3.2 Distribuția de accelerații

Expresia (9.34) obținută pentru accelerația absolută a punctului M din corp în cazul unei mișcări relative și a unei singure mișcări de transport se poate generaliza prin recurență în cazul unei mișcări relative și n-1 mișcări de transport. Astfel, considerăm punctul M din corp fixat de reperul arbitrar (T_{k+1}). Procedând ca în paragraful 9.2.3 avem următoarele componente :

Accelerația relativă este :

$$\bar{a}_r = \bar{a}_{k+1,k} + \bar{\varepsilon}_{k+1,k} \times \bar{r}_{k+1} + \bar{\omega}_{k+1,k} \times (\bar{\omega}_{k+1,k} \times \bar{r}_{k+1}) \quad (9.48)$$

Accelerația de transport este :

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{k,0}^M \quad (9.49)$$

iar accelerația Coriolis :

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_{k,0} \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega}_{k,0} \times (\bar{v}_{k+1,k} + \bar{\omega}_{k+1,k} \times \bar{r}_{k+1}) \quad (9.50)$$

Accelerația absolută a punctului M o notăm $\bar{a}_{k+1,0}^M$ și se obține din formulele (9.48), (9.49) și (9.50) folosind relația (9.34) :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{k+1,0}^M &= \bar{a}_{k,0}^M + \bar{a}_{k+1,k} + \bar{\varepsilon}_{k+1,k} \times \bar{r}_{k+1} + \bar{\omega}_{k+1,k} \times (\bar{\omega}_{k+1,k} \times \bar{r}_{k+1}) + \\ &2\bar{\omega}_{k,0} \times (\bar{v}_{k+1,k} + \bar{\omega}_{k+1,k} \times \bar{r}_{k+1}) \end{aligned} \quad (9.51)$$

În relația (9.51), înlocuim pe rând pe $k = 0, n-1$ și obținem succesiv :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{1,0}^M &= 0 + \bar{a}_{1,0} + \bar{\varepsilon}_{1,0} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{1,0} \times (\bar{\omega}_{1,0} \times \bar{r}_1) + 0 \\ \bar{a}_{2,0}^M &= \bar{a}_{1,0}^M + \bar{a}_{2,1} + \bar{\varepsilon}_{2,1} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{2,1} \times (\bar{\omega}_{2,1} \times \bar{r}_2) + 2\bar{\omega}_{1,0} \times (\bar{v}_{2,1} + \bar{\omega}_{2,1} \times \bar{r}_2) \\ \bar{a}_{3,0}^M &= \bar{a}_{2,0}^M + \bar{a}_{3,2} + \bar{\varepsilon}_{3,2} \times \bar{r}_3 + \bar{\omega}_{3,2} \times (\bar{\omega}_{3,2} \times \bar{r}_3) + 2(\bar{\omega}_{1,0} + \bar{\omega}_{2,1}) \times (\bar{v}_{3,2} + \bar{\omega}_{3,2} \times \bar{r}_3) \\ &\dots\dots \\ \bar{a}_{n,0}^M &= \bar{a}_{n-1,0} + \bar{a}_{n,n-1} + \bar{\varepsilon}_{n,n-1} \times \bar{r}_n + \bar{\omega}_{n,n-1} \times (\bar{\omega}_{n,n-1} \times \bar{r}_n) + \\ &+ 2 \times (\bar{\omega}_{1,0} + \dots + \bar{\omega}_{n-1,n-2}) \times (\bar{v}_{n,n-1} + \bar{\omega}_{n,n-1} \times \bar{r}_n) \end{aligned} \quad (9.52)$$

Relațiile (9.52) le adunăm termen cu termen, reducem termenii $\bar{a}_{1,0}^M, \bar{a}_{2,0}^M \dots \bar{a}_{n-1,0}^M$ și obținem formula căutată pentru distribuția de accelerații în mișcarea compusă :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n,0}^M &= \sum_{k=1}^n \bar{a}_{k,k-1} + \sum_{k=1}^n (\bar{\varepsilon}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) + \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \times (\bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) + \\ &2 \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times (\bar{v}_{k,k-1} + \bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) \end{aligned} \quad (9.53)$$

Pentru determinarea accelerației unghiulare instantanee $\bar{\varepsilon}_{n,0}$ din mișcarea absolută a triedrului (T_n) față de triedrul fix (T_0), vom folosi formula de definiție :

$$\bar{\varepsilon}_{n,0} = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{n,0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{k,k-1} \quad (9.54)$$

Dar vectorii $\bar{\omega}_{k,k-1}$ au fost definiți prin proiecțiile lor pe sistemul de referință mobil (T_k), astfel că putem scrie :

$$\frac{d}{dt} \bar{\omega}_{k,k-1} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_{k,k-1} + \bar{\omega}_{k,0} \times \bar{\omega}_{k,k-1} = \bar{\varepsilon}_{k,k-1} + \left(\sum_{j=1}^k \bar{\omega}_{j,j-1} \right) \times \bar{\omega}_{k,k-1} \quad (9.55)$$

unde am folosit relația :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_{k,k-1} = \bar{\varepsilon}_{k,k-1}$$

Ținând seama că $\bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{\omega}_{k,k-1} = 0$ și cu ajutorul relației (9.52) formula (9.51) capătă forma finală:

$$\bar{\varepsilon}_{n,0} = \sum_{k=1}^n \bar{\varepsilon}_{k,k-1} + \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times \bar{\omega}_{k,k-1} \quad (9.57)$$

Accelerația absolută a unui punct oarecare N se obține folosind formula generală a distribuției de accelerații:

$$\bar{a}_N = \bar{a}_M + \bar{\varepsilon}_{n,0} \times \overline{MN} + \bar{\omega}_{n,0} \times (\bar{\omega}_{n,0} \times \overline{MN}) \quad (9.58)$$

Aplicație: Se consideră mecanismul din figura 9.5 cu dimensiunile: $OA=O'B=1$, $O_1A=O_1B=O_1D=1/2$, $OO'=a$. Paralelogramul articulat $OABO'$ se mișcă în planul fix Oy_0z_0 astfel încât $\angle AOO'=\omega t$. Bara cotită în unghi drept O_1DE rămâne tot timpul mișcării paralelă cu planul fix Ox_0y_0 și $\angle AO_1D=2\omega t$, ($\omega=\text{constantă}$). Punctul M se deplasează pe porțiunea DE după legea $DM=a\omega t$ ($\omega=\text{constantă}$). Să se determine:

Viteza și accelerația absolută a punctului M;

Viteza și accelerația unghiulară absolută;

Viteza și accelerația punctului E.

Rezolvare. Reperul (T_1) îl alegem cu originea în O_1 (mijlocul lui AB) cu axele paralele cu cele fixe, deoarece bara AB are o mișcare de translație. Reperul (T_2) îl alegem cu originea în D, axele O_2z_2 și Oz_0 paralele iar O_2x_2 este de-a lungul dreptei DE. Reperul (T_3) este paralel cu (T_2) și $O_3=M$.

Pentru determinarea vitezei punctului M, vom apela la formula (9.36) în care vom calcula următorii termeni: deoarece bara AB execută o mișcare de translație,

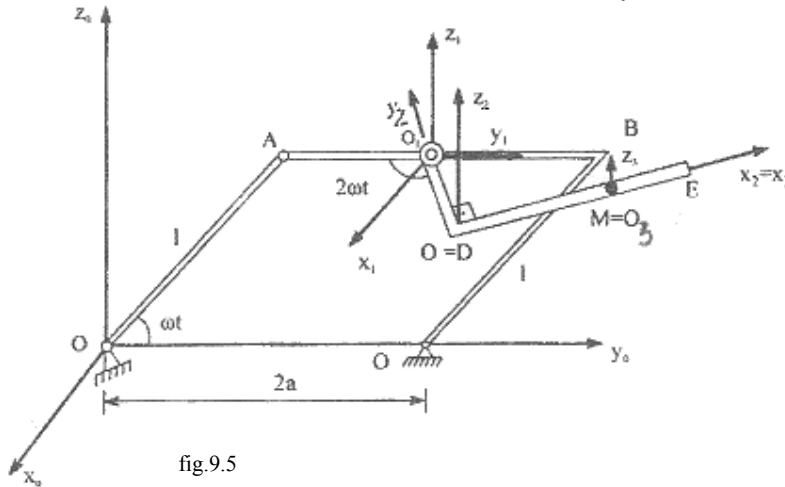


fig.9.5

rezultă: $\bar{v}_{10} = \bar{v}_A = \dot{\overline{OA}}$ unde: $\overline{OA} = l(\cos \omega t \bar{j}_0 + \sin \omega t \bar{k}_0)$ și deci:

$$\bar{v}_{10} = l\omega(-\sin \omega t \bar{j}_0 + \cos \omega t \bar{k}_0)$$

Punctul O_2 are față de reperul (T_1) o mișcare circulară (iar bara O_1DE o mișcare de rotație în jurul axei O_1z_1), iar (T_3) față de (T_2) de translație, deci:

$$\vec{v}_{21} = \dot{\vec{O_1O_2}} = 2a\omega \vec{i}_2 = 2a\omega \cos 2\omega t \vec{t}_{i_0} + 2a\omega \sin \omega t \vec{t}_{j_0}$$

$$\vec{v}_{32} = \dot{\vec{O_2M}} = a\omega \cos 2\omega t \vec{t}_{i_0} + a\omega \sin 2\omega t \vec{t}_{j_0}$$

Vectorii viteze și accelerație unghiulară sunt:

$$\vec{\omega}_{10} = 0; \vec{\omega}_{21} = 2\omega \vec{k}_0; \vec{\omega}_{32} = 0$$

Vectorii de poziție ai punctului M sunt:

$$\vec{r}_2 = \vec{O_2M} = a\omega \vec{t}_{i_2} = a\omega t \cos 2\omega t \vec{t}_{i_0} + a\omega t \sin 2\omega t \vec{t}_{j_0}; \vec{r}_3 = \vec{0}$$

Viteza absolută a punctului M devine:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{30}^M = \vec{v}_{10} + \vec{v}_{21} + \vec{v}_{32} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2 = \omega[a(3 \cos 2\omega t - 2\omega t \sin 2\omega t)\vec{i}_0 + (3a \sin 2\omega t + 2\omega a t \cos 2\omega t - l \sin \omega t)\vec{j}_0 + l \cos \omega t \vec{k}_0]$$

Mărima vitezei este

$$v_M = \omega \sqrt{4\omega^2 a^2 t^2 + 9a^2 + l^2 - 6a l \sin \omega t \sin 2\omega t - 4\omega a l t \sin \omega t \cos 2\omega t}$$

Accelerația se determină cu formula (9.53) în care apar și termenii următori:

$$\vec{a}_{10} = \vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_{10} = -l\omega^2(\cos \omega t \vec{j}_0 + \sin \omega t \vec{k}_0)$$

$$\vec{a}_{21} = 4a\omega^2 \vec{j}_2 = -4a\omega^2(\sin 2\omega t \vec{i}_0 - \cos 2\omega t \vec{j}_0)$$

$$\vec{a}_{32} = 0$$

$$\vec{\varepsilon}_{21} = \dot{\vec{\omega}}_{21} = 0, \vec{\varepsilon}_{32} = 0$$

Accelerația punctului M devine:

$$\begin{aligned} \vec{a}_M = \vec{a}_{30}^M = \vec{a}_{10} + \vec{a}_{21} + \vec{a}_{32} + \vec{\omega}_{21} \times (\vec{\omega}_{21} \times \vec{r}_2) + 2\vec{\omega}_{21} \times \vec{v}_{32} = & -4a\omega^2(2 \sin 2\omega t + t \cos 2\omega t)\vec{i}_0 + \omega^2(-l \cos \omega t + 8a \cos 2\omega t - 4a \\ & t \sin 2\omega t)\vec{j}_0 - l\omega^2 \sin \omega t \vec{k}_0 \end{aligned}$$

Mărima accelerației punctului M este:

$$a_M = \omega^2 \sqrt{64a^2 + 16a^2 t^2 + l^2 - 16a l \cos \omega t \cos 2\omega t + 8a l t \cos \omega t \sin 2\omega t}$$

b) Viteza unghiulară absolută este: $\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21} = 2\omega \vec{k}_0$ iar accelerația unghiulară absolută este: $\vec{\varepsilon}_{20} = \dot{\vec{\omega}}_{20} = 0$

c) Viteza punctului E este dată de formula (9.30) deoarece nu mai este necesar reperul (T_3) . Calculele sunt asemănătoare celor de la a) cu mențiunea ca $\vec{v}_{32} = 0$. Se obțin :

$$\vec{v}_E = 2a\omega(\cos 2\omega t - \omega t \sin 2\omega t)\vec{i}_0 + \omega(2a \sin 2\omega t + 2a\omega t \cos 2\omega t - l \sin \omega t)\vec{j}_0 + l \cos \omega t \vec{k}_0$$

$$\begin{aligned}
 & -l \sin \omega t) \bar{j}_0 + l \omega \cos \omega t \bar{k}_0 \\
 \bar{a}_E &= -4a \omega^2 (\sin 2 \omega t + \omega t \cos 2 \omega t) \bar{i}_0 - \omega^2 (l \cos \omega t + 4a \omega t \sin 2 \omega t \\
 & - 4a \cos 2 \omega t) \bar{j}_0 - l \omega^2 \sin \omega t \bar{k}_0
 \end{aligned}$$

9.3.3. Cazuri particulare de compuneri de mișcări

Rigidul solidar legat de reperul (T_n) are anumite mișcări particulare în raport cu triedrele $(T_{n-1}), \dots, (T_0)$, dar care sunt întâlnite mai des în practică.

Compunerii de translații

Mișcările relative ale triedrelor mobile $(T_1), (T_2), \dots, (T_{n-1})$ sunt translații, ceea ce înseamnă:

$$\bar{\omega}_{k,k-1} = 0, \bar{\varepsilon}_{k,k-1} = 0, k = \overline{1, n} \quad (9.59)$$

Relațiile (9.36), (9.53), (9.44) respectiv (9.54) devin:

$$\bar{v}_{n,0}^{-M} = \sum_{k=1}^n \bar{v}_{k,k-1} \quad (9.60)$$

$$\bar{a}_{n,0}^{-M} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{k,k-1} \quad (9.61)$$

$$\bar{\omega}_{n,0}^{-M} = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} = 0 \quad (9.62)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n,0} = \sum_{k=1}^n \bar{\varepsilon}_{k,k-1} + \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times \bar{\omega}_{k,k-1} = 0 \quad (9.63)$$

Dacă $\bar{v}_{n,0} \neq 0$, distribuția de viteze este a unei mișcări de translație. Folosind analogia cu cazurile de reducere din statică, acest caz corespunde sistemelor de cupluri din statică, vectorul $\bar{v}_{n,0}^{-M}$ este un vector liber ca și vectorul moment al unui cuplu de vectori din statică. Cazul corespunde stării de repaus pentru reperul (T_n) .

Aplicație: Mecanismul din figura 9.6 se deplasează într-un plan după direcțiile $d_1 \perp d_2$, $d_3 \parallel d_1$ cu vitezele de mărimi $v_k = kt^2, k = 1, 2, 3$. Să se determine distribuția de viteze și accelerații pentru bara 3.

Rezolvare: Fiecare din cele trei bare are o mișcare de translație, ceea ce înseamnă că suntem în cazul compunerii de translații. Viteza unui punct arbitrar al barei 3 este $\bar{v}_M = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ și are mărimea $v_M = \sqrt{(v_1 + v_3)^2 + v_2^2} = 2\sqrt{5} t^2$.

Accelerația punctului M este: $\bar{a}_M = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = \dot{\bar{v}}_1 + \dot{\bar{v}}_2 + \dot{\bar{v}}_3$ iar mărimea

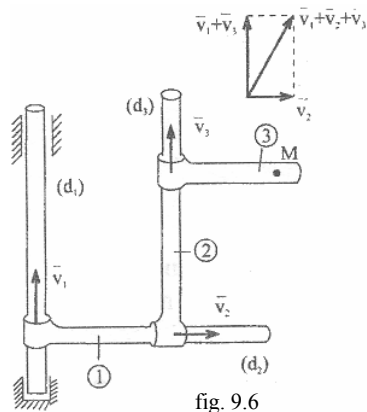
$$a_M = \sqrt{(a_1 + a_3)^2 + a_2^2} = 4\sqrt{5} \text{ t}$$


fig. 9.6

Compuneri de rotații concurente

Presupunem că toate mișcările relative ale triedrelor $(T_1), (T_2), \dots, (T_n)$ sunt rotații sau au distribuții de viteze caracteristice rotațiilor, vectorii $\bar{\omega}_{k,k-1}$, $k = \overline{1, n}$ având suporturile concurente într-un punct O. Fără a particulariza problema, presupunem ca toate originile O_k , $k = \overline{1, n}$ ale reperelor mobile sunt în punctul fix O. În acest caz, rezultă:

$$\bar{v}_{k,k-1} = 0; \quad \bar{r}_k = \bar{r} = \overline{OM}, \quad k = \overline{1, n} \quad (9.64)$$

Vitezele sunt arbitrare. Din formulele (9.44) respectiv (9.36) deducem:

$$\bar{\omega}_{n,0} = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \quad (9.65)$$

$$\bar{v}_{n,0}^M = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k = \left(\sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \right) \times \bar{r} = \bar{\omega}_{n,0} \times \bar{r} \quad (9.66)$$

Din relațiile (9.64) rezultă că din compunerea de mișcări de rotație cu axe concurente în O, sau cu distribuții de viteze caracteristice rotației având axele instantanee de rotație concurente în același punct O se obține o mișcare rezultantă cu o distribuție de viteze de rotație a cărei axă instantanee de rotație trece prin punctul O și a cărei viteză unghiulară de rotație este suma vectorială a vitezelor unghiulare ale mișcărilor componente. În particular, dacă $\bar{\omega}_{n,0} = 0$ se obține o stare de repaus.

Accelerația absolută a punctului M data de relația (9.53), devine:

$$a_{n,0}^M = \left(\sum_{k=1}^n \bar{\varepsilon}_{k,k-1} \right) \times \bar{r} + \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \times (\bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}) + 2 \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times (\bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}) \quad (9.67)$$

Accelerația unghiulară absolută $\bar{\varepsilon}_{n,0}$ a corpului (C) data de relația (9.54) este diferită de zero chiar și în cazul în care rotațiile relative sunt uniforme, adică $\bar{\varepsilon}_{k,k-1} = 0$, $k = \overline{1, n}$ și deoarece $\bar{\varepsilon}_{n,0} \times \bar{\omega}_{n,0} \neq 0$, distribuția de accelerații a mișcării rezultante este specifică distribuției de accelerații în mișcarea rigidului cu punct fix

Aplicație: (vezi problema 8.8.10) Suportul de fixare al carcasei unui motor electric se rotește cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}_1$ în jurul unei axe care face unghiul $\alpha = \text{constant}$ cu axul motorului. Pe axul motorului se află un disc care are o

viteză unghiulară constantă $\overline{\omega}_2$. Să se determine viteza și accelerația unghiulară absolută a rotorului (fig. 9.7).

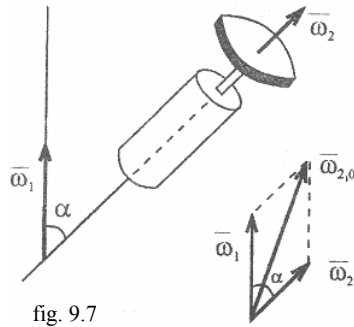


fig. 9.7

Rezolvare. Avem un exemplu de două rotații concurente. Din relația (9.65)

rezultă: $\omega_{2,0} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ cu mărimea

$$\omega_{2,0} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \alpha}.$$

Accelerația unghiulară absolută se determină din relația (9.57) cu mențiunea că $\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}_{1,0} = 0$, $\overline{\varepsilon}_2 = \overline{\varepsilon}_{2,1} = 0$ și

deci: $\varepsilon_{2,0} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$. Vectorul $\overline{\varepsilon}_{2,0}$ este perpendicular pe planul determinat de suporturile celor doi vectori viteze unghiulare și cu mărimea dată de relația: $\varepsilon_{2,0} = \omega_1\omega_2 \sin \alpha$

Compuneri de rotații paralele

În acest caz, mișcările relative ale triedrelor $(T_1), (T_2), \dots, (T_n)$ sunt rotații cu axe paralele sau mișcări de distribuții de viteze caracteristice mișcării de rotație. Alegem originile O_k ale triedrelor (T_k) pe axe de rotație (sau se află în repaus) și deci:

$$\overline{v}_{k,k-1} = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (9.68)$$

Vitezele unghiulare instantanee relative sunt vectori paraleli cu o direcție comună, astfel că putem scrie:

$$\overline{\omega}_{k,k-1} = \omega_{k,k-1} \overline{u}, \quad k = \overline{1, n} \quad (9.69)$$

unde \overline{u} este versorul direcției comune.

Din relația (9.44) deducem viteza unghiulară instantanee:

$$\overline{\omega}_{n,0} = \sum_{k=1}^n \overline{\omega}_{k,k-1} = \left(\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \right) \overline{u} \quad (9.70)$$

de unde rezultă modulul vitezei unghiulare instantanee:

$$\omega_{n,0} = \sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \quad (9.71)$$

Din relația (9.36), ținând seama de relațiile (9.69) deducem expresia vitezei absolute a punctului M:

$$\overline{v}_{n,0}^M = \sum_{k=1}^n (\omega_{k,k-1} \overline{u} \times \overline{r}_k) = \overline{u} \times \sum_{k=1}^n (\omega_{k,k-1} \overline{r}_k) \quad (9.72)$$

Accelerația unghiulară instantanee a corpului (C) dată de relația (9.57) are expresia:

$$\bar{\varepsilon}_{n,0} = \sum_{k=1}^n \bar{\varepsilon}_{k,k-1} = \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_{k,k-1} \right) \bar{u} \quad (9.73)$$

Accelerația absolută a punctului M data de formula (9.53) este în acest caz :

$$\begin{aligned} a_{n,0}^{-M} &= \sum_{k=1}^n (\bar{\varepsilon}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) + \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k,k-1} \times (\bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) + 2 \\ &\quad \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times (\bar{\omega}_{k,k-1} \times \bar{r}_k) \end{aligned} \quad (9.74)$$

Relația (9.72) arată că vectorii $\bar{v}_{n,0}$ și \bar{u} sunt ortogonali, aceeași concluzie reiese și pentru vectorii $\bar{v}_{n,0}$ și $\bar{\omega}_{n,0}$ deoarece vectorii $\bar{\omega}_{n,0}$ și \bar{u} sunt paraleli. Rezultă :

$$\bar{v}_{n,0}^{-M} \cdot \bar{\omega}_{n,0} = 0 \quad (9.75)$$

În cadrul compunerii rotațiilor paralele se disting două cazuri, după cum

$$\omega_{n,0} = \sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \neq 0 \text{ sau } \bar{\omega}_{n,0} = 0.$$

Cazul $\bar{\omega}_{n,0} \neq 0$. Relația (9.72) se mai scrie :

$$\bar{v}_{n,0}^{-M} = \left(\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \right) \bar{u} \times \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1}} = \bar{\omega}_{n,0} \times \bar{r}_c \quad (9.76)$$

unde am înmulțit și împărțit cu scalarul $\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \neq 0$, viteza absolută a punctului M punând în evidență vectorul de poziție \bar{r}_c al vectorilor paraleli $\bar{\omega}_{k,k-1}$, care analog centrului forțelor paralele, este definit de expresia:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \bar{r}_c}{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1}} = \overline{CM} \quad (9.77)$$

Relația (9.76) demonstrează că distribuția de viteze a mișcării rezultante este o distribuție de viteze de rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_{n,0}$ și a cărei axa instantanee de rotație trece prin punctul C, centrul roților paralele definit de relația vectorială

$$\overline{OC} = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \overline{OO_k}}{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1}} \quad (9.78)$$

Acest lucru rezultă imediat ținând seama de relația

$$\overline{r_k} = \overline{O_k M} = \overline{OM} - \overline{OO_k}, k = 1, n \quad (9.79)$$

Care înlocuită în formula (9.77), conduce la relația:

$$\begin{aligned} \overline{r_C} &= \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \overline{r_k}}{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1}} = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} (\overline{OM} - \overline{OO_k})}{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1}} = \\ &= \overline{OM} - \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \overline{OO_k}}{\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1}} = \overline{OM} - \overline{OC} = \overline{CM} \end{aligned} \quad (9.80)$$

Cazul $\omega_{n,0} = 0$. Considerăm punctele arbitrare M și N din corp. Viteza punctului M, conform relației (9.72) se scrie sub forma:

$$v_{n,0}^{-M} = \overline{u} \times \sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \overline{O_k M} \quad (9.81)$$

Folosind identitatea

$$\overline{O_k M} = \overline{O_k N} + \overline{NM} \quad (9.82)$$

în relația (9.81), obținem

$$v_{n,0}^{-M} = \overline{u} \times \sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \overline{O_k N} + \overline{u} \times \left(\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \right) \overline{NM} \quad (9.83)$$

Dar $\sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} = 0$, astfel că relația (9.83) devine :

$$v_{n,0}^{-M} = \overline{u} \times \sum_{k=1}^n \omega_{k,k-1} \overline{O_k N} = \overline{v}_{n,0}^N \quad (9.84)$$

Punctele M și N sunt alese arbitrar, prin urmare toate punctele rigidului au la un moment dat aceeași viteză, deci mișcarea rezultantă are o distribuție de viteze caracteristică translației.

În concluzie, din compunerea de mișcări de rotații cu axe instantanee paralele, se obține o mișcare rezultantă care are fie o distribuție de viteze

caracteristică rotației, fie una caracteristică translației, după cum vectorul $\vec{\omega}_{n,0}$ este sau nu zero

Aplicații: 1. Arborele unui rulment se rotește în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω_1 . Să se determine viteza unghiulară absolută a unei bile de rulment și viteza centrului sau C. Se cunosc raza R a arborelui, diametrul d al bilei și faptul că nu există alunecare între arbore, bile și lagăr (fig 9.8)

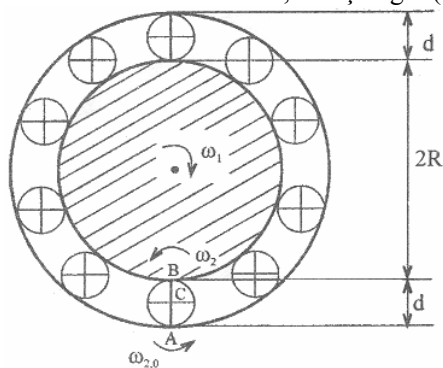


fig. 9.8

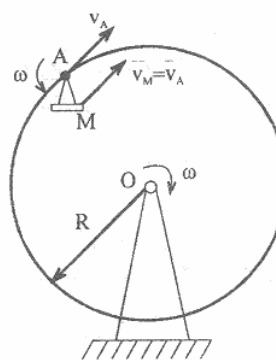


fig. 9.9

Rezolvare. Viteza unghiulară absolută $\omega_{2,0}$ este rezultatul a două rotații paralele: rotația arborelui cu viteza unghiulară ω_1 în jurul axei sale și rotația relativă a bilei față de arbore cu viteza unghiulară ω_2 (necunoscută) în jurul axei instantanee ce trece prin punctul B, deoarece viteza relativă dintre arbore și bilă este nulă, neavând alunecare. Suportul lui $\omega_{2,0}$ trece prin punctul A deoarece viteza acestui punct de pe bilă este egală cu viteza lagărului, care prin convenție se consideră în repaus. Deci se poate scrie:

$$\vec{\omega}_{2,0} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \quad \omega_{2,0} = \omega_2 - \omega_1$$

Am luat în considerare faptul că vectorii sunt de sensuri contrare. Ținând seama de analogia cu reducerea forțelor paralele de la statică, avem:

$$\frac{\omega_1}{d} = \frac{\omega_2}{R+d} = \frac{\omega_{2,0}}{R} \quad \text{de unde rezultă : } \omega_{2,0} = \frac{R}{d} \omega_1. \text{ Viteza punctului C este :}$$

$$v_C = AC \omega_{2,0} = \frac{1}{2} R \omega_1$$

2. În cazul particular $n=2$ și $\vec{\omega}_{2,0} = 0$, cele două viteze unghiulare componente $\vec{\omega}_{1,0}$ și $\vec{\omega}_{2,0}$ formează un cuplu de rotație $\vec{\omega}_{1,0} = -\vec{\omega}_{2,0}$. Distribuția de viteze este specifică unei translații cu viteza $v = \omega_{1,0} \times d$, unde d este distanța dintre

suportii paraleli ai vectorilor $\vec{\omega}_{1,0}$ și $\vec{\omega}_{2,0}$. Vectorul \vec{v} este perpendicular pe planul determinat de cele două axe și are sensul dat de regula burghiului drept. Deci orice viteză de translație se poate înlocui printr-un cuplu de rotație.

În figura 9.9 se consideră un astfel de exemplu. Roata unui scrânciob are o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω în jurul centrului său O. Scaunul scrânciobului execută o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω în jurul punctului A cu aceeași viteză unghiulară ω dar în sens opus. Deci scaunul scrânciobului execută o mișcare de translație, toate punctele având la un moment dat aceeași viteză și anume:

$$v_M = v_A = \omega R$$

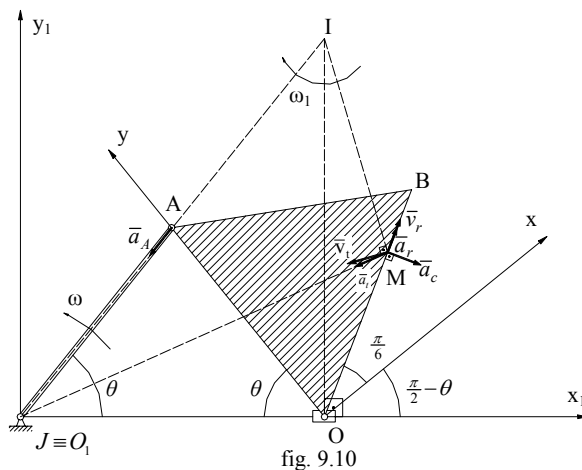
9.4. Probleme

9.4.1. Mecanismul din figura 9.10 se deplasează pe planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât $\angle AO_1x_1 = \omega t$, $\omega = \text{constant}$. Punctul M se deplasează pe latura OB după legea

$OM = (1/2)t^2 + t$. Se cunosc : $O_1A = OA = OB = AB = 1$. Să se determine :

- viteza absolută a punctului M;
- acelerația absolută a punctului M.

Rezolvare: Mișcarea relativă a punctului M este mișcarea rectilinie de-a lungul laturii OB a triunghiului echilateral ABC. Mișcarea plăcii OAB este o mișcare plană iar mișcarea de transport este mișcarea punctului M fixat pe latura



OB față de punctul fix O_1 . Reperul fix l-am notat $O_1x_1y_1$, iar reperul mobil Oxy cu axa Oy de-a lungul laturii OA (fig. 9.10). Toate calculele le vom efectua în raport cu reperul mobil.

Viteza relativă are forma: $\vec{v}_r = \frac{d}{dt} \overline{OM} = (t+1) \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2}(t+1) \vec{j}$. Pentru a

determina viteza în mișcarea de transport, trebuie să determinăm centrul instantaneu de rotație I al plăcii OAB. Acesta se afla la intersecția dreptei O_1A cu perpendiculara în O pe O_1x_1 . Viteza unghiulară instantanee ω_1 se determină scriind viteza punctului A astfel : $v_A = l\omega = AI\omega_1$. Din triunghiul isoscel OAI deducem $AI=1$, astfel că $\omega_1 = \omega$

Viteza de transport a punctului M este: $\vec{v}_t = \vec{\omega}_1 \times \overline{IM}$ unde vectorul \overline{IM} se scrie sub

$$\text{forma : } \overline{IM} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{t^2}{2} + t \right) - l \sin \theta \right] \vec{i} + \left[\left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right) - 2l \sin^2 \theta \right] \vec{j}$$

Rezultă viteza de transport din ultimele două relații :

$$\vec{v}_t = \omega \left(\frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t - 2l \sin^2 \theta \right) \vec{i} + \omega \left[\sqrt{3} \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right) - l \sin 2\theta \right] \vec{j}$$

Din prima și ultima relație deducem viteza absolută a punctului M :

$$\begin{aligned} \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (t+1) + \omega \left(\frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t - 2l \sin^2 \theta \right) \right] \vec{i} + \\ &+ \omega \left[\frac{1}{2} (t+1) + \sqrt{3} \omega \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right) - \omega l \sin 2\theta \right] \vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{Accelerația relativă a punctului M este de forma: } \vec{a}_r = \dot{\vec{v}}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}.$$

Pentru determinarea accelerației de transport, trebuie să aflăm polul accelerațiilor plăcii OAB. Pentru aceasta determinăm accelerația punctului A care este coliniară cu vectorul $\overline{AO_1}$ și de mărime $a_A = l\omega^2$. Distanța JA este de forma

$$JA = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_l^2 + \omega_l^4}} = l \quad \text{din ecuația trigonometrică} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon_l}{\omega_l^2} = 0 \quad \text{rezultă}$$

$\angle(\vec{a}_A, \overline{JO_1}) = \varphi = 0$ deci polul J al accelerațiilor coincide cu punctul O_1 . În acest fel, accelerația de transport a punctului M devine :

$$\vec{a}_t = \omega_l^2 \overline{MJ} = -\omega^2 \left[2l \cos \theta + \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] \vec{i} - \omega^2 \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \vec{j}$$

Accelerația Coriolis este :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_l \times \vec{v}_r = 2\omega(t+1) \left(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} \right)$$

Accelerația absolută a punctului M va fi :

$$\begin{aligned} \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \omega(t+1) - 2l\omega^2 \cos \theta - \omega^2 \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] \vec{i} + \\ &+ \left[\frac{1}{2} - \sqrt{3}\omega(t+1) - \omega^2 \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] \vec{j} \end{aligned}$$

9.4.2. Conul circular drept cu vârful O și cu unghiul plan de la vârf 2α se rotește în jurul axei sale cu viteza unghiulară constantă ω . Un punct material M se deplasează pe suprafața conului astfel încât distanța OP de la vârful O la viteza sa

absolută rămâne tot timpul mișcării aceeași cu distanța $OM_0=d$, unde M_0 este poziția inițială a punctului M (fig 9.11).

Să se determine: mișcarea relativă a punctului M; traiectoria absolută a punctului M; viteza absolută a punctului M în raport cu reperele fix și mobil; lungimea traiectoriei absolute M_0M ; legea de mișcare a punctului P; traiectoria punctului P; raza de curbură a traiectoriei punctului P.

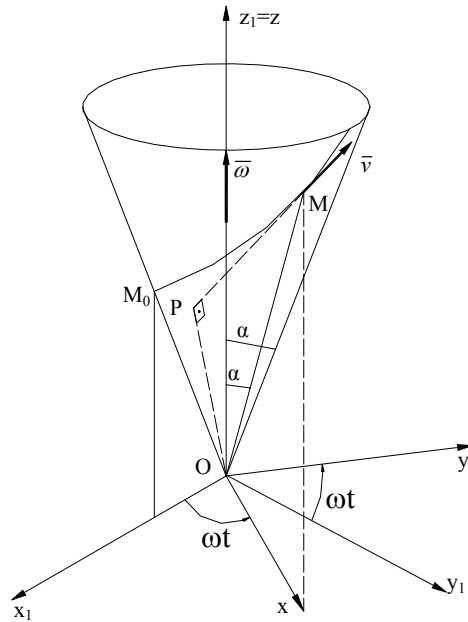


fig. 9.11

Rezolvare: a) Alegem reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ cu originea în vârful axei conului iar punctul M_0 se află în planul $O_1x_1z_1$. Reperul mobil $Oxyz$ îl alegem astfel ca axele Oz_1 și Oz să coincidă iar punctul M se află în planul Oxz . Notăm unghiul $\angle x_1Ox = \omega t$. Coordonatele absolute ale punctului M le notăm cu x_1, y_1, z_1 iar coordonatele sale în raport cu reperul mobil x, y, z cu $y=0$.

Între cele două sisteme de coordonate avem relațiile:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \omega t, \quad y_1 = x \sin \omega t, \\ z_1 &= z = x \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \quad (a)$$

Viteza absolută a punctului M are proiecțiile :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} \cos \omega t - \omega x \sin \omega t \\ \dot{y}_1 &= \dot{x} \sin \omega t + \omega x \cos \omega t, \\ \dot{z}_1 &= \dot{x} \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \quad (b)$$

Din triunghiul dreptunghic OMP rezultă:

$$OP^2 = OM^2 - MP^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - MP^2 = d^2 \quad (c)$$

unde distanța MP o vom interpreta ca fiind distanța de la punctul M la planul (Q) normal pe viteza absolută a punctului M și a cărei ecuație va fi, notând cu x', y', z' coordonatele unui punct curent din planul (Q), de forma : $\dot{x}_1 x' + \dot{y}_1 y' + \dot{z}_1 z' = 0$, astfel că:

$$MP^2 = \frac{(\dot{x}_1 x_1 + \dot{y}_1 y_1 + \dot{z}_1 z_1)^2}{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2} \quad (d)$$

Ținând seama de relațiile (a) și (b) relația (d) se mai scrie în forma:

$$MP^2 = \frac{\dot{x}^2 x^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)^2}{\dot{x}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)^2 + \omega^2 x^2} \quad (d')$$

Din relația (a) rezultă :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2(1 + ctg^2 \alpha) \quad (e)$$

Cu ajutorul relațiilor (d') și (e), relația (c) conduce la ecuația :

$$x^2(1 + ctg^2 \alpha) - \frac{\dot{x}^2 x^2 (1 + ctg^2 \alpha)^2}{\dot{x}^2 (1 + ctg^2 \alpha) + \omega^2 x^2} = d^2 \quad \text{sau} \quad \text{după} \quad \text{simplificări}$$

$$d^2 \dot{x}^2 = \omega^2 x^2 (x^2 - d^2 \sin^2 \alpha).$$

Ultima relație este o ecuație diferențială care se mai scrie sub forma:

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - d^2 \sin^2 \alpha}} = \pm \frac{\omega}{d} dt. \quad \text{Cu substituția } x = \frac{d \sin \alpha}{\cos u} \quad \text{suntem conduși la soluția}$$

$$u = \pm \omega \sin \alpha t + C \quad \text{și deci}$$

$$x = \frac{d \sin \alpha}{\cos(\pm \omega \sin \alpha t + C)} \quad (f)$$

Constanta de integrare se determină din condiția:

$$t=0, x=d \sin \alpha \quad (g)$$

Din relațiile (f) și (g) rezultă $C=0$ și deci, ținând seama de paritatea funcției cosinus, obținem:

$$x = \frac{d \sin \alpha}{\cos(\omega \sin \alpha \cdot t)} \quad (f')$$

Din relațiile (a₃) și (f') rezultă legea mișcării relative a punctului M:

$$x = \frac{d \sin \alpha}{\cos(\omega \sin \alpha \cdot t)}; \quad z = \frac{d \sin \alpha}{\cos(\omega \sin \alpha \cdot t)} \quad (h)$$

Traectoria mișcării relative se obține din ultimele relații prin eliminarea parametrului t : $x = z \operatorname{tg} \alpha$ și este deci generatoarea conului corespunzătoare punctului M. Legea de mișcare relativă se obține din ultima relație :

$$OM = \sqrt{x^2 + z^2} = \frac{d}{\cos(\omega \sin \alpha \cdot t)}$$

b) Legea mișcării absolute a punctului M se obține din relațiile (a) și (h)

$$x_1 = \frac{d \sin \alpha \cos \omega t}{\cos(\omega \sin \alpha \cdot t)}; \quad y_1 = \frac{d \sin \alpha \sin \omega t}{\cos(\omega \sin \alpha \cdot t)}; \quad z_1 = \frac{d \cos \alpha}{\cos(\omega \sin \alpha \cdot t)}$$

Eliminând timpul între ultimele trei relații, obținem traectoria absolută a punctului M care este de forma : $x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 \operatorname{tg} \alpha = 0$ evident un con cu vârful în originea O.

c) Viteza absolută a punctului M în raport cu reperul fix are proiecțiile date de formulele (b) :

$$\dot{x}_1 = \frac{d \omega \sin \alpha [\sin(\omega \sin \alpha \cdot t) \cos \omega t \sin \alpha - \sin \omega t \cos(\omega \sin \alpha \cdot t)]}{\cos^2(\omega \sin \alpha \cdot t)}$$

$$\dot{y}_1 = \frac{d\omega \sin \alpha [\sin(\omega \sin \alpha \cdot t) \sin \omega t \sin \alpha + \cos \omega t \cos(\omega \sin \alpha \cdot t)]}{\cos^2(\omega \sin \alpha \cdot t)}$$

$$\dot{z}_1 = \frac{d\omega \sin \alpha \cos \alpha \sin(\omega \sin \alpha \cdot t)}{\cos^2(\omega \sin \alpha \cdot t)}$$

În raport cu reperul mobil, viteza absolută a punctului M se scrie:

$$\bar{v}_a = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$$

Între versorii celor două sisteme de referință există relațiile :

$$\bar{i}_1 = \cos \omega t \bar{i} - \sin \omega t \bar{j}, \quad \bar{j}_1 = \sin \omega t \bar{i} + \cos \omega t \bar{j}, \quad \bar{k}_1 = \bar{k}$$

În raport cu reperul fix, viteza absolută a punctului M este dată de forma :

$$\bar{v}_a = \dot{x}_1 \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \bar{k}_1$$

Ținând seama de ultimele trei relații deducem :

$$v_x = \dot{x}_1 \bar{i}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \bar{j}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{z}_1 \bar{k}_1 \cdot \bar{i}_1 = \dot{x}_1 \cos \omega t + \dot{y}_1 \sin \omega t = \frac{d\omega \sin^2 \alpha \cdot \sin(\cos \omega \alpha \cdot t)}{\cos^2(\omega \sin \alpha \cdot t)} = \dot{x}$$

$$v_y = \dot{x}_1 \bar{j}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \bar{j}_1 \cdot \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \bar{k}_1 \cdot \bar{j}_1 = -\dot{x}_1 \sin \omega t + \dot{y}_1 \cos \omega t = \frac{d\omega \sin \alpha}{\cos^2(\omega \sin \alpha \cdot t)} = x\omega$$

$$v_z = \dot{x}_1 \bar{k}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \bar{k}_1 \cdot \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_1 = \dot{z}_1 = \frac{d\omega \sin \alpha \cos \alpha \sin(\omega \sin \alpha \cdot t)}{\cos^2(\omega \sin \alpha \cdot t)} = \dot{z} = \dot{x} \operatorname{ctg} \alpha$$

d) Lungimea arcului de curbă M_0M este :

$$M_0M = \int_0^t \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2} = \int_0^t \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2} dt = \int_0^t \frac{d\omega \sin \alpha}{\cos^2(\omega \sin \alpha \cdot t)} \cdot dt = d \operatorname{tg}(\omega \sin \alpha \cdot t)$$

e) Vectorul de poziție al punctului P se scrie în forma:

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP} \quad (k)$$

Ținând seama de formula (f'), distanța MP dată de relația (d') devine:

$$MP = \frac{\dot{x}x}{\sin \alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 \sin^2 \alpha}} = d \operatorname{tg}(\omega \sin \alpha \cdot t) = M_0M$$

Proiecțiile pe axele reperului mobil ale vectorului \overline{OP} dat de relația (k) sunt :

$$\begin{aligned} X_p &= x_M - MP \frac{v_x}{v_a} = x - d \operatorname{tg}(\omega \sin \alpha \cdot t) \frac{\dot{x}}{v_a} = d \sin \alpha \cos(\omega \sin \alpha \cdot t) \\ Y_p &= y_M - MP \frac{v_y}{v_a} = 0 - d \operatorname{tg}(\omega \sin \alpha \cdot t) \frac{\omega x}{v_a} = -d \sin(\omega \sin \alpha \cdot t) \\ Z_p &= z_M - MP \frac{v_z}{v_a} = x \operatorname{ctg} \alpha - d \operatorname{tg}(\omega \sin \alpha \cdot t) \frac{\dot{x} \operatorname{ctg} \alpha}{v_a} = d \cos \alpha \cos(\omega \sin \alpha \cdot t) \end{aligned} \quad (i)$$

În raport cu reperul fix, coordonatele punctului P sunt:

$$x_{1P} = x_P \cos \omega t - y_P \sin \omega t = d[\sin \alpha \cos(\omega \sin \alpha \cdot t) \cos \omega t + \sin(\omega \sin \alpha \cdot t) \sin \omega t]$$

$$y_{1P} = x_P \sin \omega t + y_P \cos \omega t = d[\sin \alpha \cos(\omega \sin \alpha \cdot t) \sin \omega t - \sin(\omega \sin \alpha \cdot t) \cos \omega t] \quad (j)$$

$$z_{1P} = z_P = d \cos \alpha \cos(\omega \sin \alpha \cdot t)$$

f) În raport cu reperul mobil, traiectoria punctului P se obține din relațiile (i) și este arcul de sferă de rază $OP=d$ și centru O:

$$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = d^2 \quad (l)$$

Traectoria punctului P în reperul fix este obținută din relațiile (j) și este evident aceeași sferă dată de relația (l) dar ecuația ei este: $x_{1P}^2 + y_{1P}^2 + z_{1P}^2 = d^2$

g) Raza de curbura a traiectoriei punctului P este raza sferei $\rho_c = d$.

9.4.3. Punctul M se mișcă pe un cerc cu viteza $v(t)$. Planul cercului se rotește în jurul unui diametru al său, astfel ca tot timpul mișcării punctul M are viteza absolută de mărime $2v(t)$ și perpendiculară pe accelerația sa absolută. Să se determine:

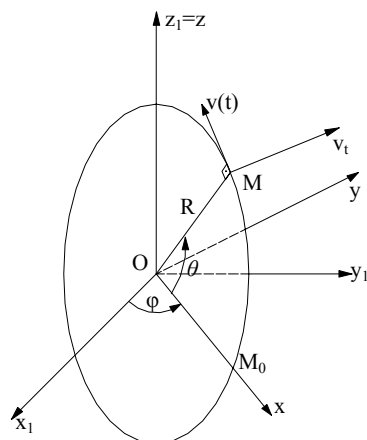


fig. 9.12

a) Mișcarea relativă și de transport a punctului M;

b) Vitezele relativă, absolută și de transport ale punctului M;

c) Accelerația absolută a punctului M;

d) Traectoria absolută a punctului M.

Rezolvare: Considerăm reperul mobil Oxyz cu originea în centrul cercului, axa Oz coincide cu axa de rotație a planului cercului iar planul xOz coincide cu planul cercului. Originea timpului este momentul în care punctul M se află în punctul M_0 pe axa Ox. Mișcarea absolută a punctului M o raportăm la reperul fix $Ox_1y_1z_1$ care are aceeași origine cu reperul mobil, axa Oz_1 coincide cu axa Oz iar planul x_1Oz_1

reprezintă poziția planului xOz în momentul inițial. Mișcarea relativă este mișcarea punctului pe cercul dat cu unghiul $\theta = \angle M_0OM$ și cu viteza de mărime $v(t)$ (Fig. 9.12). Dacă notăm cu R raza cercului dat, vectorul viteză relativă este:

$$\vec{v}_r = -R\dot{\theta} \sin \theta \cdot \vec{i} + R\dot{\theta} \cos \theta \cdot \vec{j} \quad (a)$$

unde: $v_r = v(t) = R\dot{\theta}$. Unghiul φ al arcelor Ox_1 și Ox definește mișcarea de transport.

Viteza de transport este:

$$\vec{v}_t = R \cos \theta \dot{\varphi} \cdot \vec{j} \quad (b)$$

Viteza absolută a punctului M devine:
 $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = R(-\dot{\theta} \sin \theta \cdot \bar{i} + \dot{\varphi} \cos \theta \bar{j} + \dot{\theta} \cos \theta \bar{k})$ iar mărimea are valoarea:
 $v_a = R\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta} = 2R\dot{\theta}$. Din ultima formulă deducem relația de legătură între parametrii θ și φ dată de ecuația diferențială:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} \dot{\theta} \quad (c)$$

care integrată în condiția inițială: $t=0, \varphi=0, \theta=0$ conduce la relația: $\varphi = \sqrt{3} \operatorname{Intg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.

Accelerația relativă a punctului M este de forma :

$$\bar{a}_r = -R(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \bar{i} + R(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \bar{k}$$

Accelerația de transport este: $\bar{a}_t = -R \cos \theta \dot{\varphi}^2 \cdot \bar{i} + R \cos \theta \ddot{\varphi} \cdot \bar{j}$ iar accelerația Coriolis:

$$\bar{a}_c = 2\dot{\varphi} \bar{k} \times \bar{v}_r = -2R\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \bar{j}$$

Ținând seama de ultimele trei relații accelerația absolută devine:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = -R(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\varphi}^2 \cos \theta) \bar{i} + R(\ddot{\varphi} \cos \theta - 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta) \bar{j} + R(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \bar{k}$$

Ținând seama de relația dintre $\dot{\varphi}$ și $\dot{\theta}$, ultima expresie devine:

$$\bar{a}_a = -R \left(\frac{3 + \cos^2 \theta}{\cos \theta} \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} \sin \theta \right) \bar{i} + \frac{\sqrt{3}R}{\cos \theta} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \bar{j} + R(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \bar{k} \quad (d)$$

Punând condiția ca viteza absolută și accelerația absolută a punctului M să fie perpendiculare: $\bar{v}_a \cdot \bar{a}_a = 0$, rezultă $\dot{\theta} \ddot{\theta} \cos \theta = 0$ de unde deducem singura soluție convenabilă $\ddot{\theta} = 0$ sau:

$$\theta = \omega t, \omega = \text{constantă} \quad (e)$$

deci mișcarea relativă a punctului M este mișcarea uniformă pe cerc de viteză unghiulară constantă ω . Mișcarea de transport este o mișcare circulară de rază

$$R \cos \omega t \text{ și viteză unghiulară: } \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}\omega}{\cos \omega t}$$

b) Viteza relativă rezultă din relațiile (a) și (e):

$$\bar{v}_r = -R\omega \sin \omega t \bar{i} + R\omega \cos \omega t \bar{j}. \text{ Viteza de transport se deduce din relațiile}$$

(b),(c) și (e): $\bar{v}_t = \sqrt{3}R\omega \bar{j}$ și deci viteza absolută este:

$$\bar{v}_a = R\omega(-\sin \omega t \bar{i} + \sqrt{3} \bar{j} + \cos \omega t \bar{j}) \quad (f)$$

c) Accelerația absolută a punctului M o deducem din relația (d) în care ținem seama de relația (e):

$$\vec{a}_a = -\frac{R(3 + \cos^2 \omega t)}{\cos \omega t} \omega^2 \vec{i} - \sqrt{3} R \omega^2 \operatorname{tg} \omega t \vec{j} - R \omega^2 \sin \omega t \vec{k}$$

d) Viteza absolută dată de relația (f) are proiecțiile pe axele fixe $\dot{x}_1 = -R\omega \sin \omega t$; $\dot{y}_1 = \sqrt{3}R\omega$; $\dot{z}_1 = R\omega \cos \omega t$

Prin integrarea ultimelor ecuații și ținând seama de alegerea axelor fixe, deci de condițiile inițiale, obținem ecuațiile traiectoriei sub forma parametrică:

$$x_1 = R \cos \omega t; \quad y_1 = \sqrt{3} R \omega t; \quad z_1 = R \sin \omega t \quad (g)$$

Eliminând parametrul t între ecuațiile (g), obținem ecuația analitică a traiectoriei absolute a punctului M, ca intersecție a suprafețelor de ecuații:

$$x_1 = R \cos \frac{y_1}{\sqrt{3}R}; \quad z_1 = R \sin \frac{y_1}{\sqrt{3}R}.$$

9.4.4. Planul cercului de centru O_2 și rază R se rotește în jurul axei fixe Oz_0 cu viteza unghiulară constantă ω_1 . În același timp cercul se rostogolește pe axa Oz_0 fără alunecare cu viteza unghiulară constantă ω_2 (fig. 9.13).

Să se determine:

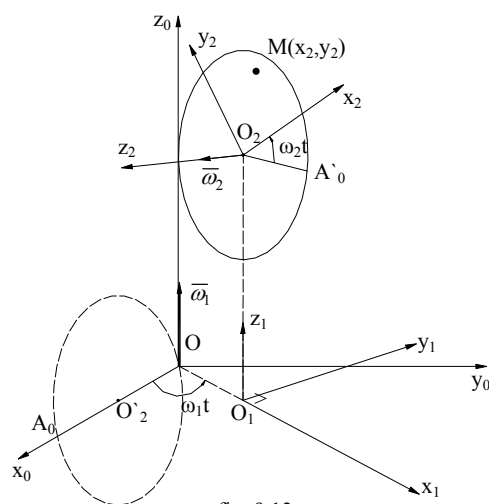


fig. 9.13

a) Viteza și accelerația unui punct arbitrar M fixat în planul cercului;

b) Locul geometric al axei instantanee a mișcării compuse, în spațiu și față de cercul mobil;

c) Să se arate că există în fiecare moment, un punct de accelerație nulă și să se găsească locul geometric al acestui punct, în spațiu și față de cerc.

Rezolvare: Alegem ca origine a timpului momentul în care punctul de contact al cercului cu axa fixă se află în punctul fix O. Reperul fix $Ox_0y_0z_0$ îl alegem astfel încât planul Ox_0z_0 să coincidă cu planul

cercului în poziția inițială. Reperul mobil $O_1x_1y_1z_1$ îl alegem cu originea O_1 în punctul în care se proiectează centrul O_2 al cercului la un moment dat pe planul Ox_0y_0 , iar planul Ox_1y_1 coincide cu planul cercului, axa O_1x_1 fiind în planul Ox_0y_0 . Reperul $O_2x_2y_2z_2$ este fixat de planul cercului, astfel că în momentul inițial cele două sisteme mobile de axe coincid și sunt paralele cu reperul fix ($O_1=O_2=O_2'$; $A_0'=A_0$).

Punctul de contact al cercului cu axa Oz_0 este centrul instantaneu I de rotație relativ al cercului, viteza acestuia fiind $\bar{v}_I = R\omega_2\bar{k}_0$. Din alegerea acestor repere rezultă: $\angle x_0Ox_1 = \omega_1 t$; $\angle A_0'O_2x_2 = \omega_2 t$. Între versorii reperelor mobile și cel fix există relațiile:

$$\begin{aligned}\bar{i}_1 &= \cos\omega_1 t \bar{i}_0 + \sin\omega_1 t \bar{j}_0; \quad \bar{j}_1 = \sin\omega_1 t \bar{i}_0 + \cos\omega_1 t \bar{j}_0; \quad \bar{k}_1 = \bar{k}_0 \\ \bar{i}_2 &= \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t \bar{i}_0 + \sin\omega_1 t \cos\omega_2 t \bar{j}_0 + \sin\omega_2 t \bar{k}_0 \\ \bar{j}_2 &= -\cos\omega_1 t \sin\omega_2 t \bar{i}_0 - \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t \bar{j}_0 + \cos\omega_2 t \bar{k}_0 \\ \bar{k}_2 &= \sin\omega_1 t \bar{i}_0 - \cos\omega_1 t \bar{j}_0\end{aligned}\quad (a)$$

Pentru determinarea vitezei punctului arbitrar $M(x_2, y_2)$ vom folosi formula (9.30) în care termenii corespunzători sunt:

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \overline{O_1 M} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 M} = R\omega_2 t \bar{k}_0 + x_2 \bar{i}_2 + y_2 \bar{j}_2 = \\ &= (x_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t - y_2 \cos\omega_1 t \sin\omega_2 t) \bar{i}_0 + (x_2 \sin\omega_1 t \cos\omega_2 t - \\ &- y_2 \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t) \bar{j}_0 + (R\omega_2 t + x_2 \sin\omega_2 t + y_2 \cos\omega_2 t) \bar{k}_0 \\ \bar{r}_2 &= \overline{O_2 M} = \cos\omega_1 t (x_2 \cos\omega_2 t - y_2 \sin\omega_2 t) \bar{i}_0 + \sin\omega_1 t (x_2 \cos\omega_2 t - y_2 \sin\omega_2 t) \bar{j}_0 + \\ &+ (x_2 \sin\omega_2 t + y_2 \cos\omega_2 t) \bar{k}_0 \\ \bar{v}_{10} &= \bar{v}_{01} = \overline{\dot{O O}_1} = R\omega_1 (-\sin\omega_1 t \bar{i}_0 + \cos\omega_1 t \bar{j}_0) \\ \bar{v}_{21} &= \overline{\dot{O}_1 O_2} = R\omega_2 \bar{k}_0 \\ \bar{\omega}_{10} &= \omega_1 \bar{k}_0; \quad \bar{\omega}_{21} = \omega_2 \bar{k}_2 = \omega_2 (\sin\omega_1 t \bar{i}_0 - \cos\omega_1 t \bar{j}_0)\end{aligned}$$

Se obține:

$$\begin{aligned}\bar{v}_M &= \bar{v}_{20}^M = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2 = \\ &= (-R\omega_1 \sin\omega_1 t - x_2 \omega_1 \sin\omega_1 t \cos\omega_2 t - \\ &- x_2 \omega_2 \cos\omega_1 t \sin\omega_2 t - y_2 \omega_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t + \\ &+ y_2 \omega_1 \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t) \bar{i}_0 + (R\omega_1 \cos\omega_1 t + x_2 \omega_1 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t - \\ &- x_2 \omega_2 \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t - y_2 \omega_2 \sin\omega_1 t \cos\omega_2 t - \\ &- y_2 \omega_1 \cos\omega_1 t \sin\omega_2 t) \bar{j}_0 + (R\omega_2 t + x_2 \omega_2 \cos\omega_2 t - y_2 \omega_2 \sin\omega_2 t) \bar{k}_0\end{aligned}$$

Accelerația punctului M se calculează cu formula (9.34) cu următorii termeni:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{10} &= \overline{\dot{O}_1 O} \cdot \omega_1^2 = -R\omega_1^2 (\cos\omega_1 t \bar{i}_0 + \sin\omega_1 t \bar{j}_0); \quad \bar{a}_{21} = \overline{\dot{O}_1 O_2} = 0; \\ \bar{\varepsilon}_{10} &= \dot{\bar{\omega}}_{10} = 0; \quad \bar{\varepsilon}_{21} = \dot{\bar{\omega}}_{21} = \omega_1 \omega_2 (\cos\omega_1 t \bar{i}_0 + \sin\omega_1 t \bar{j}_0)\end{aligned}$$

Se obține:

$$\begin{aligned}\bar{a}_M = \bar{a}_{20}^M = & [-R\omega_1^2 \cos \omega_1 t - x_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \\ & + 2x_2\omega_1\omega_2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t + y_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t + \\ & + 2y_2\omega_1\omega_2 \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t] \bar{i}_0 + [-R\omega_1^2 \sin \omega_1 t - x_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ & \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t - 2x_2\omega_1\omega_2 \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t + y_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t - \\ & - 2y_2\omega_1\omega_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t] \bar{j}_0 - \omega_2^2(x_2 \sin \omega_2 t + y_2 \cos \omega_2 t) \bar{k}_0\end{aligned}$$

b) Viteza unghiulară instantanee este:

$$\bar{\omega}_{20} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} = \omega_2(\sin \omega_1 t \bar{i}_0 - \cos \omega_1 t \bar{j}_0) + \omega_1 \bar{k}_0 \quad (b)$$

Legea mișcării absolute a unui punct arbitrar M este dată de relația (9.26):

$\bar{r} = \bar{r}_{20} + \bar{r}_2 = \overline{OO_2} + \overline{O_2M}$, iar viteza sa absolută este: $\bar{v}_a = \dot{\bar{r}}_{20} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{r}_2$. Locul geometric al punctelor de viteză nulă se obține din ultima relație și este dreapta de ecuație vectorială:

$$\bar{r}_2 = \frac{\bar{\omega}_{20} \times \dot{\bar{r}}_{20}}{\omega_{20}^2} + \lambda \bar{\omega}_{20}; \quad \lambda \in R \quad (c)$$

Vectorul \bar{r}_{20} se scrie analitic sub forma: $\bar{r}_{20} = R(\cos \omega_1 t \bar{i}_0 + \sin \omega_1 t \bar{j}_0 + \omega_2 t \bar{k}_0)$ și deci:

$$\dot{\bar{r}}_{20} = R(-\omega_1 \sin \omega_1 t \bar{i}_0 + \omega_1 \cos \omega_1 t \bar{j}_0 + \omega_2 \bar{k}_0) \quad (d)$$

Din relațiile (b) și (d) rezultă $\dot{\bar{r}}_{20} \cdot \bar{\omega}_{20} = 0$ deci viteza de lunecare dată de relația (9.47), $\bar{u} = 0$, astfel că mișcarea compusă se reduce la o rotație. În raport cu reperul fix, axa instantanee dată de relația (c) are ecuațiile parametrice: $x_0 = -R \cos \omega_1 t + \lambda \omega_2 \sin \omega_1 t$, $y_0 = -R \sin \omega_1 t - \lambda \omega_2 \cos \omega_1 t$, $z_0 = -R \omega_2 t + \lambda \omega_1$

Eliminând parametrii λ și t între ultimele ecuații, obținem ecuația axei instantanee de rotație ca fiind suprafața de rotație având ecuația:

$$z_0 = 2R \frac{\omega_2}{\omega_1} \arctg \frac{y_0 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - R^2}}{x_0 - R} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - R^2} \quad (e)$$

Pentru determinarea locului geometric al axei instantanee față de reperul $O_2x_2y_2z_2$, vom exprima vectorii din relația (c) în raport cu acest reper. Pentru aceasta, din relațiile (a) deducem:

$$\begin{aligned}\bar{i}_0 &= \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \bar{i}_2 - \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t \bar{j}_2 + \sin \omega_1 t \bar{k}_2 \\ \bar{j}_0 &= \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t \bar{i}_2 - \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \bar{j}_2 - \cos \omega_1 t \bar{k}_2 \\ \bar{k}_0 &= \sin \omega_2 t \bar{i}_2 + \cos \omega_2 t \bar{j}_2\end{aligned} \quad (f)$$

Din relațiile (b) și (f) obținem: $\bar{\omega}_{20} = \omega_1(\sin \omega_2 t \bar{i}_2 + \cos \omega_2 t \bar{j}_2) + \omega_2 t \bar{k}_2$, iar din relațiile (d) și (f) deducem: $\dot{\bar{r}}_{20} = R\omega_2(\sin \omega_2 t \bar{i}_2 + \cos \omega_2 t \bar{j}_2) - R\omega_1 \bar{k}_2$

Înlocuind ultimele două relații în relația (c) obținem ecuația:

$$\frac{x_2 + R \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \omega_2 t}{\omega_1 \sin \omega_2 t} = \frac{y_2 - R \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \sin \omega_2 t}{\omega_1 \cos \omega_2 t} = \frac{z_2}{\omega_2} \quad (g)$$

Eliminând parametrul t între relațiile (g) obținem ecuația analitică a axei instantanee de rotație față de reperul $O_2x_2y_2z_2$. Acesta este hiperboloidul de ecuație:

$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} z_2^2 + \frac{R^2 \omega_2^4}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} \quad (h)$$

Suprafața dată de relația (h) se rostogolește fără alunecare pe suprafața dată de relația (e), ele rămânând tangente de-a lungul unei generatoare.

c) Accelerația absolută a punctului arbitrar $M(x_0, y_0, z_0)$ se obține prin derivare în raport cu timpul a vitezei absolute:

$$\vec{a}_a = \ddot{\vec{r}}_{20} + \vec{\varepsilon}_{20} \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_{20} \times (\vec{\omega}_{20} \times \vec{r}_2) \quad (i)$$

În raport cu reperul fix, termenii care apar în relația (i) sunt

$$\ddot{\vec{r}} = -R\omega_1^2 (\cos \omega_1 t \vec{i}_0 + \sin \omega_1 t \vec{j}_0), \quad \vec{\varepsilon}_{20} = \omega_1 \omega_2 (\cos \omega_1 t \vec{i}_0 + \sin \omega_1 t \vec{j}_0) \quad (j)$$

Cu condiția $\vec{a}_a = 0$, din relația (i) deducem după identificarea coeficienților versorilor, ecuațiile:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 + \omega_2^2 \cos^2 \omega_1 t)x_0 + \omega_2^2 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t y_0 - 2\omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t (z_0 - R\omega_2 t) + R\omega_1^2 \cos \omega_1 t &= 0 \\ \omega_2^2 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t x_0 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \omega_1 t)y_0 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t (z_0 - R\omega_2 t) + R\omega_1^2 \sin \omega_1 t &= 0 \\ \omega_2^2 (z_0 - R\omega_2 t) &= 0 \end{aligned} \quad (k)$$

Din sistemul (k) deducem:

$$x_0 = -\frac{R\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \omega_1 t; \quad y_0 = -\frac{R\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \sin \omega_1 t; \quad z_0 = R\omega_2 t \quad (l)$$

Din ecuațiile (l) rezultă locul geometric al punctelor de accelerație nulă, față de reperul fix: o elice cilindrică.

Față de reperul mobil $O_2x_2y_2z_2$, relațiile (j) se scriu în forma

$$\ddot{\vec{r}}_{20} = -R\omega_1^2 (\cos \omega_2 t \vec{i}_2 - \sin \omega_2 t \vec{j}_2), \quad \vec{\varepsilon}_{20} = \omega_1 \omega_2 (\cos \omega_2 t \vec{i}_2 - \sin \omega_2 t \vec{j}_2), \text{ iar}$$

ecuațiile (k) în forma:

$$\begin{aligned} \sin^2 \omega_2 t x_2 + \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t y_2 &= R \cos \omega_2 t \\ \omega_1^2 \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t x_2 - (\omega_1^2 \sin^2 \omega_2 t - \omega_2^2) y_2 &= -R\omega_1^2 \sin \omega_2 t \\ 2\omega_1 \omega_2 (\sin \omega_2 t x_2 + \cos \omega_2 t y_2) - (\omega_1^2 + \omega_2^2) z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Din ultimul sistem rezultă:

$$x_2 = \frac{R\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \frac{\cos \omega_2 t}{\sin^2 \omega_2 t}, \quad y_2 = \frac{R\omega_1^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \omega_2 t}, \quad z_2 = \frac{2R\omega_1 \omega_2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \operatorname{ctg} \omega_2 t.$$

Eliminând timpul t între aceste ecuații obținem locul geometric al punctelor de accelerație nulă față de reperul $O_2x_2y_2z_2$ ca intersecție a suprafețelor de ecuații:

$$\frac{4\omega_2^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{y_2^2}{z_2^2} + \frac{R^2\omega_1^4}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 y_2^2} = 1, \quad x_2 = \frac{\omega_2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2R\omega_1^3} z_2 y_2.$$

9.4.5. Triunghiul dreptunghic isoscel ABC care are catetele de lungime 1, se mișcă în planul fix Ox_0y_0 . Mișcarea instantanee a planului triunghiului este rezultanta a trei rotații în jurul punctelor A,B,C cu vitezele unghiulare de mărimi, respectiv:

$$\omega_1 = \omega_0(3 + \cos 2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t); \quad \omega_2 = -\omega_0(2 + \cos 2\omega_0 t); \quad \omega_3 = \omega_0 \sin 2\omega_0 t$$

- Viteza și accelerația unui punct solidar cu triunghiul;
- Centrul instantaneu de rotație, polul accelerațiilor și rostogolitoarea mișcării;

c) Traiectoriile punctelor A,B,C.

Rezolvare: Mișcarea rezultantă se obține prin compunerea a trei rotații paralele deoarece vectorii de rotație instantanee $\vec{\omega}_k$, $k=1,2,3$ sunt perpendiculari pe planul mișcării.

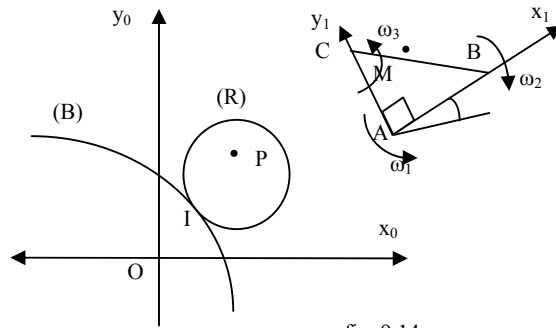


fig. 9.14

Considerăm reperul Ax_1y_1 solidar cu triunghiul, având axele Ax_1, Ay_1 de-a lungul laturilor unghiului drept, respectiv AB și AC (figura 9.14).

Mărimea vitezei unghiulare instantanee este dată de relația (9.71): $\omega = \omega_{30} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_0 = \text{constantă}$ și deci alegând ca axă fixă Ox_0 poziția inițială a axei Ax_1 rezultă că unghiul θ dintre axele Ax_1 și

Ox_0 este dat de relația $\dot{\theta} = \omega_0$ și prin urmare: $\theta = \omega_0 t$. Mișcarea triunghiului ABC este o mișcare plană caracterizată prin parametrii: $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, $\theta = \omega_0 t$ unde x_A și y_A sunt coordonatele punctului A față de reperul fix Ox_0y_0 .

Viteza unui punct arbitrar M solidar cu triunghiul este:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{AM} + \vec{\omega}_2 \times \vec{BM} + \vec{\omega}_3 \times \vec{CM} \quad (a)$$

Notăm: $\vec{AM} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1$ și ținând seama de relațiile $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM}$; $\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM}$, relația (a) se mai scrie în forma:

$$\vec{v}_M = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{AM} - l\vec{\omega}_2 \times \vec{i}_1 - l\vec{\omega}_3 \times \vec{j}_1 = \omega_0(l \sin 2\theta - y_1) \vec{i}_1 + \omega_0[x_1 + l(2 + \cos 2\theta)] \vec{j}_1 \quad (b)$$

Accelerația punctului arbitrar M se determină cu ajutorul formulei (9.69):

$$\begin{aligned}\bar{a}_M = & \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AM} + \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BM} + \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{CM} + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{AM}) + \\ & + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{BM}) + \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \overline{CM}) + + 2[\bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{BM}) + \text{Față} \\ & + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{CM})]\end{aligned}$$

de reperul mobil Ax_1y_1 , după simplificări, ultima relație devine:

$$\begin{aligned}\bar{a}_M = & l(\varepsilon_3 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 - \omega_0^2x_1)\bar{i}_1 + l(-\varepsilon_2 - \omega_3^2 + 2\omega_0\omega_3 - \omega_0^2y_1)\bar{j}_1 = \\ = & \omega_0^2[l(6\sin 2\theta + \sin 4\theta - 12\cos 2\theta - \cos^2 2\theta - 8) - x_1]\bar{i}_1 - \\ & - \omega_0^2[l\sin^2 2\theta + y_1]\bar{j}_1\end{aligned}\quad (c)$$

b) Centrul instantaneu de rotație $I(x_{1I}, y_{1I})$ se determină din condiția că $v_I = 0$ în relația (b), ceea ce conduce la determinarea coordonatelor punctului față de reperul mobil: $x_{1I} = -l(2 + \cos 2\theta)$; $y_{1I} = l\sin 2\theta$ eliminând parametrul θ între ultimele relații, obținem ecuația analitică a rostogolitoarei ca fiind cercul de centru $P(-2l, 0)$ și rază $R=1$: $(R): x_{1I}^2 + y_{1I}^2 + 4lx_{1I} + 3l^2 = 0$

Pentru determinarea bazei trebuie să cunoaștem viteza originii reperului mobil față de reperul fix. Din relațiile (8.189) obținem cu notațiile corespunzătoare mișcării compuse, sistemul:

$$\begin{aligned}\dot{x}_A \sin \theta - \dot{y}_A \cos \theta &= \omega_0 x_{1I} = -l\omega_0 (2 + \cos 2\theta) \\ \dot{x}_A \cos \theta - \dot{y}_A \sin \theta &= \omega_0 y_{1I} = l\omega_0 \sin 2\theta\end{aligned}\quad (d)$$

Din relațiile (d), deducem proiecțiile vitezei punctului A pe axele fixe:

$$\dot{x}_A = -l\omega_0 \sin \theta, \quad \dot{y}_A = 3l\omega_0 \cos \theta \quad (e)$$

Integrând ecuațiile (e) și ținând seama de alegerea axelor, obținem:

$$x_A = l(\cos \theta - 1); \quad y_A = 3l \sin \theta \quad (f)$$

Coordonatele punctului I față de reperul fix, le determinăm din ecuațiile (8.192) în care ținem seama de relațiile (f):

$$x_{0I} = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\omega_0} = -l(2 \cos \theta + 1), \quad y_{0I} = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\omega_0} = 2l \sin \theta.$$

Ecuația analitică a bazei este cercul de centru $Q(-1, 0)$ și rază $R'=2l$ (fig. 9.14): $(B): x_{0I}^2 + y_{0I}^2 + 2lx_{0I} - 3l^2 = 0$. Coordonatele (x_{1J}, y_{1J}) ale polului accelerațiilor J se obțin din relația (c) punând condiția $\bar{a}_J = 0$:

$$x_{1J} = 6l(6\sin 2\theta + \sin 4\theta - 12\cos 2\theta - \cos^2 2\theta - 8); \quad y_{1J} = l \sin^2 2\theta.$$

c) Traectoria absolută a punctului A se obține eliminând parametrul θ între relațiile (f) de unde rezultă elipsa (față de reperul fix): $9x_0^2 + y_0^2 + 18lx_0 = 0$. Traectoria punctului B rezultă din relația $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$: $x_B = x_A + l \cos \theta = l(2 \cos \theta - 1)$; $y_B = y_A + l \sin \theta = 4l \sin \theta$ și este elipsa de ecuație: $4x_0^2 + y_0^2 + 8lx_0 - 12l^2 = 0$.

Traectoria punctului C are forma parametrică: $x_C = x_A - l \sin \theta = l(\cos \theta - \sin \theta - 1)$; $y_C = y_A + l \cos \theta = l(3 \sin \theta + \cos \theta)$, iar cea analitică este de forma:

$$5x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0 + 10lx_0 + 2ly_0 - 3l^2 = 0.$$

9.4.6. Paralelipipedul dreptunghic $OA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ cu muchiile $OA_1=a$, $A_1A_2=b$ participă simultan la patru mișcări de rototranslație ai căror vectori caracteristici sunt dirijați după cele patru muchii A_1A_4 , A_2A_5 , A_3A_6 respectiv OA_7 . Vitezele unghiulare au mărimile $\omega_k = k\omega_0$, $k=1,4$ iar vitezele de alunecare sunt $v_k = kv$, $k=1,4$ unde ω_0 și v sunt constante pozitive (fig.9.15). Să se studieze mișcarea instantanee rezultantă a paralelipipedului.

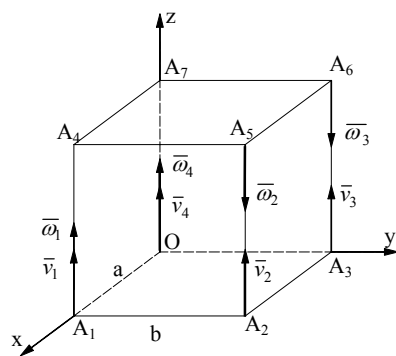


fig. 9.15

Considerăm un sistem de referință $Oxyz$ legat de corp cu axele dirijate după muchii. Vom calcula prametrii cinematiici ai distribuției de viteze și de accelerații.

Rezolvare: Considerăm un sistem de referință $Oxyz$ legat de corp cu axele dirijate după muchii. Vom calcula prametrii cinematiici ai distribuției de viteze și de accelerații.

Viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{40}$

are expresia: $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{40} = \omega_0 \bar{k} - 2\omega_0 \bar{k} - 3\omega_0 \bar{k} + 4\omega_0 \bar{k} = 0$ ceea ce înseamnă că la momentul considerat, distribuția de viteză este caracteristică unei mișcări de translație. Toate punctele rigidului au aceeași viteză, de exemplu egală cu a punctului O. Din relația (9.36), deducem:

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 + \bar{\omega}_1 \times \overline{A_1O} + \bar{\omega}_2 \times \overline{A_2O} + \bar{\omega}_3 \times \overline{A_3O} = -5b\omega_0 \bar{i} + a\omega_0 \bar{j} + 10v\bar{k}$$

Mărimea vitezei de translație este: $v_0 = \sqrt{25b^2\omega_0^2 + a^2\omega_0^2 + 100v^2}$. Deoarece

accelerația unghiulară instantanee $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{40} = \dot{\bar{\omega}}_{40} = 0$, rezultă că și distribuția de accelerații este caracteristică unei mișcări de translație, astfel că toate punctele paralelipipedului au aceeași accelerație, egală cu a punctului O. Din formula (9.53) obținem:

$$\bar{a}_0 = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{A_1O}) + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{A_2O}) + \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \overline{A_3O}) + 2[\bar{\omega}_1 \times (\bar{v}_2 + \bar{\omega}_2 \times \overline{A_2O}) + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times (\bar{v}_3 + \bar{\omega}_3 \times \overline{A_3O})] = 3a\omega_0^2 \bar{i} + 14b\omega_0^2 \bar{j}$$

Accelerația de translație este perpendiculară pe axa Oz și are mărimea:

$$a_a = \omega_0^2 \sqrt{9a^2 + 196b^2}.$$

9.4.7. Un tetraedru regulat de muchie $2l$ are o mișcare compusă din 6 rotații cu vitezele unghiulare $\omega_k = \omega_0 = \text{constant}$, $k=1,6$ dirijate după muchiile tetraedrului (fig.9.16). Să se determine:

a) Distribuția de viteze și accelerații ;

b) Viteza și accelerația punctului B.

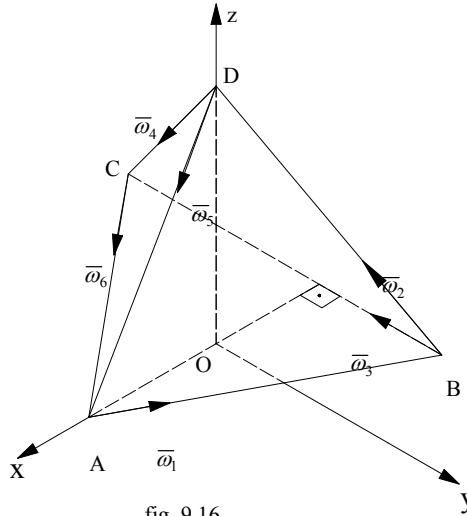


fig. 9.16

Rezolvare:

Considerăm sistemul de referință Oxyz fixat pe corpul în mișcare cu axele dirijate ca în figura 9.16: originea O este centrul cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, axa Ox trece prin punctul A, axa Oz trece prin D iar axa Oy este paralelă cu muchia BC.

Parametrii cinematici ai distribuției de viteze și de accelerații sunt $\bar{\omega}_0, \bar{\varepsilon}_0, \bar{v}_0$ și \bar{a}_0 . Astfel:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 = \sum_{k=1}^6 \bar{\omega}_k = \omega_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \bar{i} - \bar{j} - \frac{\sqrt{6}}{3} \bar{k} \right);$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_0 = \dot{\bar{\omega}}_0 = 0$$

$$\bar{v}_0 = \bar{\omega}_1 \times \overline{AO} + (\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3) \times \overline{BO} + (\bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5) \times \overline{DO} + \bar{\omega}_6 \times \overline{CO} = \sqrt{3}l\omega_0 \bar{k}$$

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 = \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t} + \bar{\omega}_0 \times \bar{v}_0 = l\omega_0^2 (-\sqrt{3}\bar{i} - \bar{j})$$

Mărimile acestor vectori sunt: $\omega = \sqrt{2}\omega_0$; $\varepsilon = 0$; $v_0 = \sqrt{3}l\omega$; $a_0 = 2l\omega_0^2$. Deoarece $\bar{\omega} \neq 0$ și $\bar{v}_0 \neq 0$, mișcarea rezultantă este de rototranslație instantanee, cu

$$\text{viteza de lunecare: } \bar{u} = \frac{\bar{\omega} \cdot \bar{v}_0}{\omega^2} \bar{\omega} = l\omega_0 \left(-\frac{\sqrt{6}}{6} \bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{j} + \frac{\sqrt{3}}{3} \bar{k} \right)$$

Ecuția analitică a axei instantanee de rototranslație este:

$$\frac{v_{0x} - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_{0y} - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_{0z} - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}$$

Înlocuind proiecțiile vectorilor $\bar{\omega}$ și \bar{v}_0 în ecuațiile de mai sus rezultă:

$$x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{2}z = 0; \quad 5x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = -3\sqrt{3}l$$

b) viteza punctului B o deducem din formula generală de distribuție a vitezelor:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OB} = \frac{\sqrt{6}}{3} l \omega_0 \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} l \omega_0 \vec{j} + \sqrt{3} l \omega_0 \vec{k} \quad \text{care are modulul:}$$

$$v_B = \frac{\sqrt{35}}{3} l \omega_0. \quad \text{Din formula generală de distribuție a accelerațiilor, obținem:}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{OB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OB}) \quad \text{sau} \quad \vec{a}_B = l \omega_0^2 \left(-\frac{7}{9} \sqrt{3} \vec{i} - \frac{1}{3} \vec{j} + \frac{4}{9} \sqrt{6} \vec{k} \right)$$

$$\text{Mărimea accelerației punctului B este : } a_B = \frac{28}{9} l \omega_0^2$$

9.4.8. Bara O_1O_2 se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_1 (fig.9.17) în jurul axei fixe (Δ_1) . În O_2 este articulat axul unui disc circular de rază R_2 care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_2 paralelă cu (Δ_1) . Discul O_2 este în contact fără alunecare cu un disc de centru O_1 și rază R_1 care se poate roti liber în jurul axei (Δ_1) . Să se determine mișcarea rezultantă a discului O_2 și viteza unghiulară Ω a discului de centru O_1 .

Rezolvare: Discul de rază R_2 efectuează două mișcări de rotație în jurul axelor (Δ_1) și (Δ_2) (care trece prin centrul O_2) perpendiculare pe planul mișcării.

Mișcarea rezultantă a discului O_2 are o distribuție de viteze ca într-o rotație, cu excepția cazului când $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$, iar mișcarea rezultantă va fi o translație circulară.

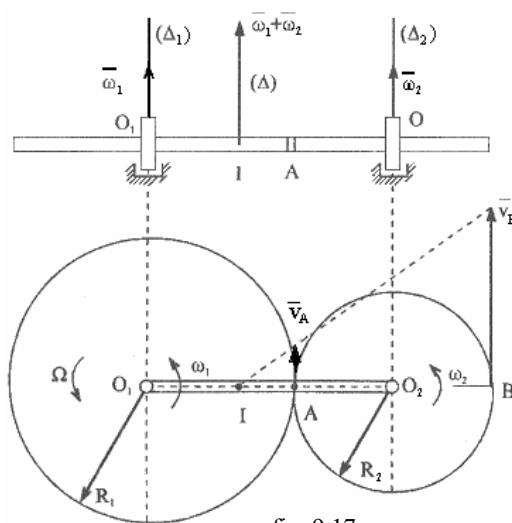


fig. 9.17

În cazul când ω_1 și ω_2 au același sens, centrul rotațiilor paralele I este situat între O_1 și O_2 astfel că (figura 9.17):

$$O_1I + O_2I = R_1 + R_2; \quad \frac{O_1I}{O_2I} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Rezultă :

$$O_1I = \frac{\omega_2(R_1 + R_2)}{\omega_1 + \omega_2};$$

$$O_2I = \frac{\omega_1(R_1 + R_2)}{\omega_1 + \omega_2}$$

Mișcarea rezultantă a discului de rază R_2 este o rotație instantanee cu viteza unghiulară $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ în jurul axei instantanee de rotație (Δ) care trece

prin punctul I și este paralelă cu axe (Δ_1) și (Δ_2) .

Viteza punctului A de pe discul O_2 are valoarea :

$$v_A = IA \cdot \omega = (O_2I - R_2)(\omega_1 + \omega_2) = \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2 \text{ iar viteza punctului B}$$

va fi:

$$v_B = IB \cdot \omega = (O_2I + R_2)(\omega_1 + \omega_2) = \omega_1(R_1 + 2R_2) + \omega_2 R_2$$

În figura (9.17) sunt reprezentați vectorii \vec{v}_A și \vec{v}_B pentru $\omega_1 R_1 > \omega_2 R_2$.

Viteza unghiulară de rotație a discului de rază R_1 , se obține ținând seama de contactul fără alunecare dintre cele două discuri și de mărimea vitezei punctului A:

$$v_A = \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2 = \Omega R_1 \text{ de unde rezultă: } \Omega = \frac{\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2}{R_1}$$

Dacă $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ atunci centrul rotațiilor I coincide cu punctul A, astfel că rezultă $\Omega = 0$, $v_A = 0$, $v_B = 2R_2(\omega_1 + \omega_2)$. Rezultă că discul de rază R_1 nu se rotește (fig.9.18)

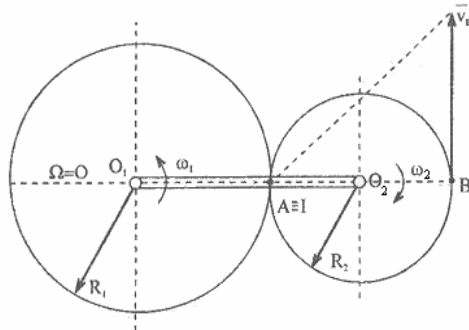


fig. 9.18.

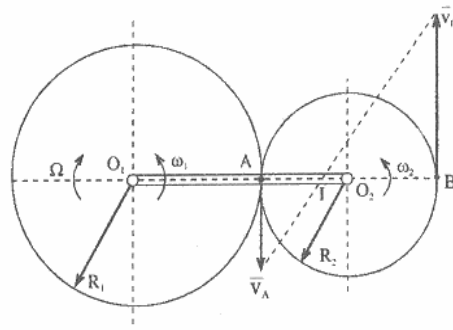


fig. 9.19.

Dacă $\omega_1 R_1 < \omega_2 R_2$, centrul rotațiilor paralele I dacă există, se găsește între A și O_2 iar vitezele punctelor A și B sunt dirijate în sensuri opuse.

Viteza unghiulară de rotație a discului de rază R_1 are sensul opus lui ω_1 și este indicat în fig.9.19.

9.4.9. Manivela OM de lungime l are o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe perpendiculară pe aceasta cu viteza unghiulară constantă ω . La capătul manivelei este așezat liber un disc de rază R tangent interior unui cerc fixat de centrul O (fig.9.20). Manivela OM și discul de centru M se mișcă în planul cercului de centru O. Să se determine poziția aceluia punct P situat pe periferia discului a cărui viteză trece prin punctul B, extremitatea diametrului care formează unghiul $\theta = \omega t$ cu manivela OM. Să se determine viteza și accelerația punctului P.

Rezolvare: Centrul instantaneu de rotație al discului se află în punctul I de tangență al discului cu cercul. Notăm cu ω_1 viteza unghiulară instantanee a discului

în jurul lui I. Aceasta se determină exprimând viteza punctului M în două moduri:

$$v_M = \omega l = \omega_1 R$$

de unde rezultă:

$$\omega_1 = \frac{l}{R} \omega.$$

Viteza punctului P este perpendiculară pe IP deci trece prin punctul N de intersecție al manivelei cu discul. Aceasta implică coliniaritatea punctelor B, N și P de unde deducem poziția punctului P: intersecția dreptei BN cu discul. Viteza punctului P este: $v_P = \omega_1 IP$.

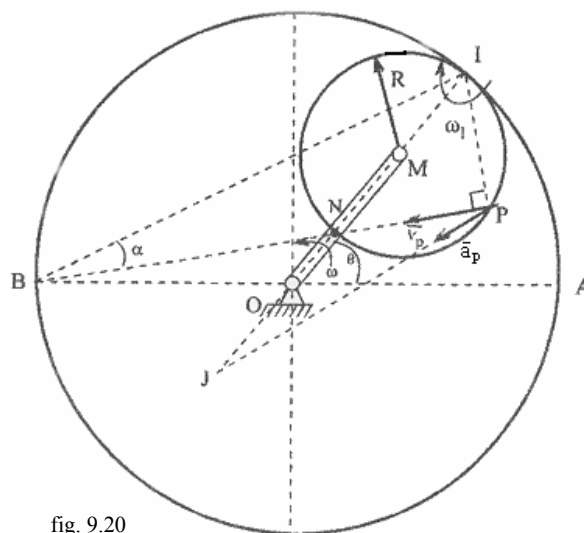


fig. 9.20

Pentru determinarea mărimii segmentului IP facem următoarele considerații geometrice. În triunghiul BON, aplicând teorema cosinusului, obținem:

$$v_M = \omega l = \omega_1 R \text{ de unde rezultă:}$$

$$\omega_1 = \frac{l}{R} \omega. \text{ Viteza punctului P este perpendiculară pe IP deci trece prin}$$

punctul N de intersecție al manivelei cu discul. Aceasta implică coliniaritatea punctelor B, N și P de unde deducem poziția punctului P: intersecția dreptei BN cu discul. Viteza punctului P este: $v_P = \omega_1 IP$

$$BN = \sqrt{(l+R)^2 + (l-R)^2 + 2(l^2 - R^2) \cos \theta} = 2\sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

În triunghiul BNI notăm $\alpha = \angle NBI$ și din teorema sinusurilor, deducem:

$$\sin \alpha = \frac{NI \sin \frac{\theta}{2}}{BN} = \frac{2R \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Din triunghiul dreptunghic BIP, deducem:

$$IP = BI \sin \alpha = \frac{R(l+R) \sin \theta}{\sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

În final obținem mărimea vitezei punctului P: $v_P = \frac{\omega l(l+R) \sin \theta}{\sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$

Din mișcarea plană a discului de centru M deducem poziția polului accelerațiilor J: acesta se va afla pe direcția manivelei OM la distanța: $MJ = \frac{R^2}{l}$.

Accelerația punctului P are direcția și sensul vectorului \overline{PJ} și are mărimea: $a_P = JP \omega_1^2$ unde ω_1 este cunoscut anterior iar distanța JP se obține din triunghiul JIP:

$$JP = \sqrt{\frac{R^2(l+R)^2}{l^2} + IP^2 - \frac{2R(l+R)}{l} IP \sin(\alpha + \frac{\theta}{2})}$$

10. APLICAȚII TEHNICE ALE CINEMATICII

În acest capitol sunt prezentate sumar, câteva exemple de mecanisme simple, punându-se accentul pe aspectul cinematic. Un mecanism reprezintă un sistem de corpuri legate între ele, care realizează mișcări bine determinate, construit cu scopul de a transmite sau a transforma unele mișcări.

10.1 Mecanismul bielă-manivelă

Acest mecanism (fig. 10.1) este alcătuit din manivela OA de lungime R, biela AB de lungime l și pistonul B, linia mediană a ghidajului este situată la distanța h de axa Ox. Mecanismul bielă-manivelă este utilizat la mașinile cu piston și servește la transformarea mișcării rectilinii a pistonului în mișcare de rotație a manivelei (mașini cu abur, motorul cu explozie, etc.) sau invers (pompele cu piston, etc.): Vom prezenta un studiu analitic pentru acest mecanism (numit cu excentric)

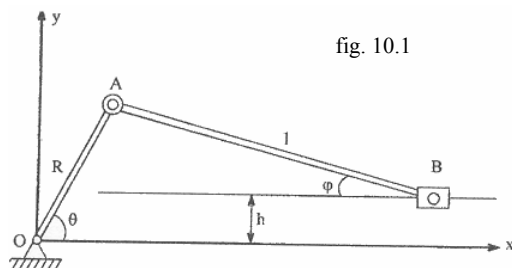


fig. 10.1

care are o largă aplicare în tehnică.

Presupunem cunoscute viteza unghiulară $\dot{\theta}$ și accelerația unghiulară $\ddot{\theta}$ a manivelei OA și ne propunem să studiem mișcarea pistonului B. Astfel:

$$x_B = R \cos \theta + l \cos \varphi \quad (10.1)$$

Efectuând proiecții pe axa Oy obținem: $l \sin \varphi + h = R \sin \theta$
de unde obținem

$$\sin \varphi = \frac{R}{l} \sin \theta - \frac{h}{l} \quad (10.2)$$

Din relația (10.2) rezultă prin derivare în raport cu timpul :

$$\dot{\varphi} = \frac{R \cos \theta}{\sqrt{l^2 - (R \sin \theta - h)^2}} \dot{\theta} \quad (10.3)$$

Ținând seama de relația (10.2), legea de mișcare a pistonului B devine:

$$x_B = R \cos \theta + \sqrt{l^2 - (R \sin \theta - h)^2} \quad (10.4)$$

Poziția pistonului B în cazul când x_B este maxim, corespunde cazului când punctele O, A și B sunt coliniare în această ordine, ceea ce înseamnă:

$$x_1 = x_{B \max} = \sqrt{(R + l)^2 - h^2} \quad (10.5)$$

Când punctele A, O și B sunt coliniare în această ordine, se obține x_B minim și această valoare este:

$$x_2 = x_{B \min} = \sqrt{(l - R)^2 - h^2} \quad (10.6)$$

astfel că din relațiile (10.5) și (10.6) se obține *cursa* pistonului B care are mărimea:

$$s = x_1 - x_2 = x_{B \max} - x_{B \min} = \sqrt{(R + l)^2 - h^2} - \sqrt{(l - R)^2 - h^2} \quad (10.7)$$

Valorile extreme ale unghiului φ se obțin din relația $\dot{\varphi} = 0$ ceea ce, folosind relația (10.3) conduce la ecuația:

$$\cos \theta = 0 \quad (10.8)$$

Se obține $\varphi_{\max} = \arcsin \frac{R - h}{l}$ pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ și $\varphi_{\min} = -\arcsin \frac{R + h}{l}$ pentru $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Convenim să considerăm $\varphi < 0$ când articulația A se află sub linia mediană a ghidajului pistonului B.

Viteza pistonului B la un moment dat, este :

$$v_B = \dot{x}_B = -R \frac{\sin \theta \sqrt{l^2 - (R \sin \theta - h)^2} + (R \sin \theta - h) \cos \theta}{\sqrt{l^2 - (R \sin \theta - h)^2}} \quad (10.9)$$

Punctele B_1 de abscisă x_1 și B_2 de abscisă x_2 sunt puncte moarte deoarece în aceste puncte viteza este nulă.

Accelerația pistonului B la un moment dat, este:

$$a_B = \dot{v}_B = -R \frac{\sin \theta \sqrt{l^2 - (R \sin \theta - h)^2} + (R \sin \theta - h) \cos \theta}{\sqrt{l^2 - (R \sin \theta - h)^2}} \ddot{\theta} - R \dot{\theta}^2 \left[\cos \theta + \frac{(R \sin \theta - h)(R^2 - l^2 + h^2) \sin \theta - hR(1 + \sin^2 \theta)}{\sqrt{l^2 - (R \sin \theta - h)^2}^3} \right] \quad (10.10)$$

În unele cazuri raportul $\frac{R}{l}$ este mic (în general $\frac{R}{l} = \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{12}$) astfel că în realia (10.4) putem dezvolta radicalul în serie și obținem:

$$x_B = R \cos \theta + l - \frac{(R \sin \theta - h)^2}{2l} \quad (10.11)$$

Viteza devine:

$$v_B = \dot{x}_B = -R \dot{\theta} \left[\sin \theta + \frac{1}{l} \cos \theta (R \sin \theta - h) \right] \quad (10.12)$$

iar accelerația:

$$a_B = \dot{v}_B = -R \ddot{\theta} \left[\sin \theta + \frac{1}{l} \cos \theta (R \sin \theta - h) \right] - \frac{R}{l} \dot{\theta}^2 (l \cos \theta + R \cos 2\theta + h \sin \theta) \quad (10.13)$$

10.2 Cama

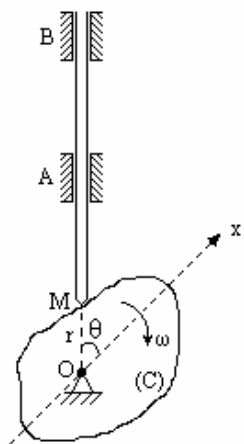


fig. 10.2

Cama este o piesă profilată (C) care are o mișcare de rotație în jurul unui ax fix O, cu viteză unghiulară ω în general constantă (fig. 10.2). Cama acționează ca element conducător iar tija AB este elementul condus. Se pune problema de a găsi curba după care trebuie tăiat conturul exterior al camei, astfel încât prin rotirea ei să producă tijei o mișcare de translație cunoscută. Tija se află în contact cu cama fie direct printr-un vârf sau disc plat fie prin intermediul unei role care reduce mult frecarea în punctul de contact. Legea de mișcare a tijei este cunoscută și are forma:

$$OM = r = f(t) \quad (10.14)$$

Unde $f(t)$ este o funcție periodică. Unghiul θ dintre direcțiile OM și Ox va fi de forma:

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (10.15)$$

Dacă eliminăm timpul între relațiile (10.14) și

(10.15) se determină profilul camei în coordonate polare:

$$r = f\left(\frac{\theta - \theta_0}{\omega}\right) \quad (10.16)$$

În practică profilul camei se determină prin metode grafice.

10.3 Transmisii prin curele.

Considerăm roata O_1 cu raza R_1 și viteza unghiulară ω_1 (fig.10.3. Cu ajutorul unei curele de transmisie, mișcarea se poate transmite unor alte roți O_2 de rază R_2 . Presupunem că frecarea dintre curea și roți este suficient de mare pentru a nu aluneca cureaua pe roți, iar cureaua este inextensibilă. Ne propunem să găsim o relație între vitezele unghiulare ale celor două roți. Condițiile impuse se exprimă cinematic prin egalitatea (în modul) a vitezelor punctelor de pe curea, v și a celor de pe periferia celor două roți. Dar vitezele periferice ale roților sunt $R_1\omega_1$ și $R_2\omega_2$. Rezultă astfel condiția: $v=R_1\omega_1=R_2\omega_2$. Rezultă astfel condiția:

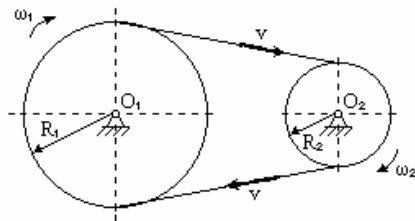


fig. 10.3

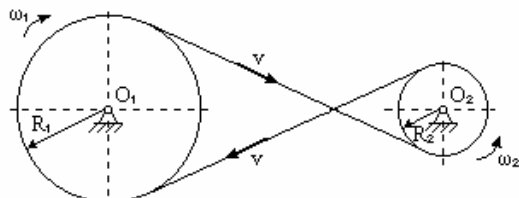


fig. 10.4

$$v = R_1\omega_1 = R_2\omega_2 \quad (10.17)$$

Definim **raportul de transmisie** ca raportul dintre viteza unghiulară a roții motoare și viteza unghiulară a roții conduse. Deci:

$$k_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (10.18)$$

Roata motoare este roata care pune în mișcare sistemul cu viteza unghiulară ω_1 . Roata condusă este roata pusă în mișcare cu viteza unghiulară ω_2 . Deci relația (10.18) se mai poate scrie sub forma: $\omega_1 = k_{12}\omega_2$.

Raportul de transmisie k_{12} este pozitiv când sensurile de rotație ale celor două roți O_1 și O_2 sunt aceleași și negativ în sens contrar.

Așezând cureaua încrucișat (fig.10.4)rezultă:

$$v = \omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2; \quad \omega_1 = \frac{-R_2}{R_1} \omega_2; \quad k_{12} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10.19)$$

Valoarea negativă a lui ω_2 și alui k_{12} arată că sensurile de rotație ale celor două roți sunt contrare. În fig. 10.5 se dă cazul unei transmisii multiple. Se consideră legătura între patru axe paralele O_1, O_2, O_3, O_4 făcută cu trei curele. Roțile de pe axele O_2 respectiv O_3 sunt sudate între ele.

Viteza unui punct de pe prima curea este :

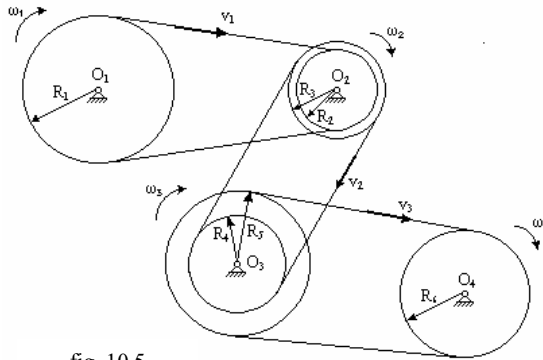


fig. 10.5

$$v_1 = R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \quad (10.20)$$

Viteza unui punct de pe cea de-a doua curea este:

$$v_2 = R_3 \omega_2 = R_4 \omega_3 \quad (10.21)$$

iar viteza unui punct de pe ultima curea este:

$$v_3 = R_5 \omega_3 = R_6 \omega_4 \quad (10.22)$$

Din relațiile (10.20), (10.21), (10.22) deducem:

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2; \quad \omega_2 = \frac{R_4}{R_3} \omega_3;$$

$$\omega_3 = \frac{R_6}{R_5} \omega_4 \quad (10.23)$$

Scriind relația de legătură între ω_1 și ω_4 sub forma

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3} \frac{R_6}{R_5} \omega_4 \quad (10.24)$$

Obținem valoarea raportului de transmisie în cazul transmisiei multiple:

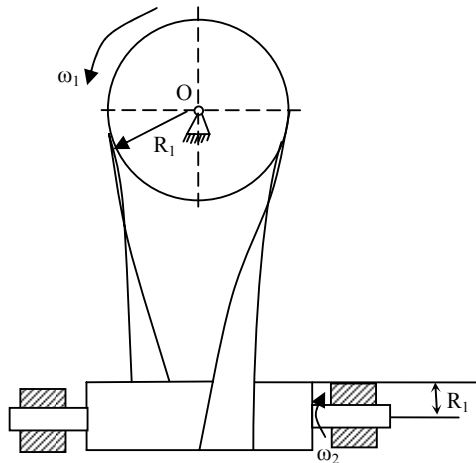


fig. 10.6

$$k_{14} = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3} \frac{R_6}{R_5} \quad (10.25)$$

Pentru generalizare considerăm $n+1$ axe de rotație paralele O_1, O_2, \dots, O_{n+1} pe care sunt fixate $2n$ roți (pe primul și ultimul ax sunt fixate doar câte o singură roată, pe celelalte câte două) de raze R_1, R_2, \dots, R_{2n} .

Între vitezele unghiulare ale primei și ultimei axe se poate scrie: $\omega_1 = k_{1n+1} \omega_{n+1}$ de unde se obține raportul de transmisie:

$$k_{ln+1} = \frac{R_2 R_4 \dots R_{2n}}{R_1 R_3 \dots R_{2n-1}} \quad (10.27)$$

Dacă din cele $n+1$ roți, $m < n+1$ sunt curele încrucișate, atunci raportul de transmisie este:

$$k_{ln+1} = (-1)^m \frac{R_2 R_4 \dots R_{2n}}{R_1 R_3 \dots R_{2n-1}} \quad (10.28)$$

Până acum am presupus că axele roților sunt paralele, dar transmisia se poate face și în cazul când axele roților nu mai sunt paralele (fig.10.6).

Relația dintre cele două viteze unghiulare este aceeași:

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2 \quad (10.29)$$

dar în acest caz, pericolul de alunecare al curelei sau de azvârlire a ei în afara roților este mai mare și trebuie luate măsuri de siguranță (transmisii prin lanțuri, prin roți cu fricțiune, prin roți dințate, etc).

10.4 Transmisii prin roți cu fricțiune

În cazul transmisiei prin roți cu fricțiune, vom analiza două situații: când axele sunt paralele sau concurente. În cazul roților paralele (fig.10.7) roțile cilindrice vin în contact între ele după o generatoare comună paralelă cu fiecare dintre cele două axe. Facem ipoteza că cele două roți în contact aderă perfect și nu există alunecare între ele în punctul comun A. Transmisia se poate face prin contact exterior (fig.10.7a) sau prin contact interior (fig.10.7b). Presupunem că roata conducătoare O_1 de rază R_1 are viteza unghiulară ω_1 iar roata condusă O_2 are raza R_2 și viteza unghiulară ω_2 . Și aici

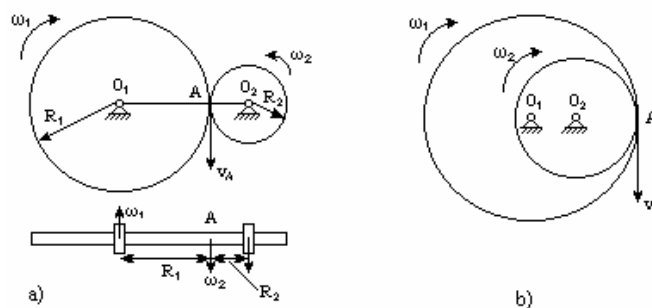


fig. 10.7

ne propunem să găsim o relație de legătură între cele două viteze unghiulare.

Deoarece nu există alunecare în A, mișcarea relativă a celei de-a doua roți față de prima, este o mișcare plană cu centrul instantaneu relativ în A. Problema

transmisiei prin roți cu fricțiune revine la compunerea a două rotații paralele: rotația de viteză unghiulară ω_1 și rotația relativă a cărei viteză unghiulară o vom nota cu

$\vec{\omega}_{21}$, aplicată în A. Ca rezultat al compunerii trebuie să obținem viteza unghiulară $\vec{\omega}_2$ aplicată în O_2 . Pentru că vectorul $\vec{\omega}_{21}$ nu interesează vom scrie ecuația de momente în raport cu aceasta (vezi analogia cu reducerea sistemelor de forțe din statistică):

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2 \quad (10.30)$$

astfel că raportul de transmisie este de forma:

$$k_{12} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10.31)$$

În cazul contactului interior, relația (10.30) este de forma:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (10.30')$$

și deci raportul de transmisie în acest caz este :

$$k_{12} = \frac{R_2}{R_1} \quad (10.31')$$

În cazul când cele două roți sunt concurente, angrenajul este alcătuit din două roți conice (fig.10.8).

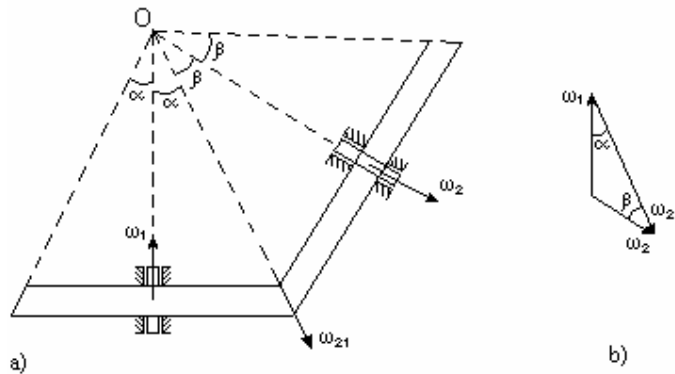


fig. 10.8

Mecanismul funcționează normal când în lungul generatoarei comune, cele două roți nu au loc alunecări. Rezultă că mișcarea relativă a roții a doua față de prima are drept axă instantanee de rotație generatoarea comună. Problema transmisiei cu fricțiune revine în această situație la compunerea a două rotații concurente: rotația cu viteza

unghiulară $\vec{\omega}_1$ și rotația relativă a cărei viteză unghiulară o notăm cu $\vec{\omega}_{21}$. Trebuie să obținem viteza unghiulară $\vec{\omega}_2$. Din triunghiul format cu vectorii $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ și $\vec{\omega}_{21}$, rezultă:

$$\frac{\omega_1}{\sin \beta} = -\frac{\omega_2}{\sin \alpha} \quad (10.32)$$

Astfel că raportul de transmisie se scrie sub forma:

$$k_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (10.33)$$

10.5 Transmisii prin roți dințate

10.5.1. Transmisii prin roți dințate cu axe paralele

În cazul roților dințate cu axe paralele, dantura este tăiată pe roți cilindrice. În figura 10.9 sunt prezentate elementele geometrice principale ale unei roți dințate cilindrice: cercul vârfurilor (CV), cercul fundurilor (CF) și cercul de rostogolire (CR) care este locul geometric al punctelor în care cele două roți de angrenare au aceeași viteză. Pasul p reprezintă lungimea unui plin și a unui gol măsurat pe cercul de

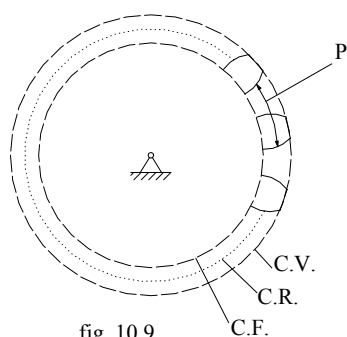


fig. 10.9

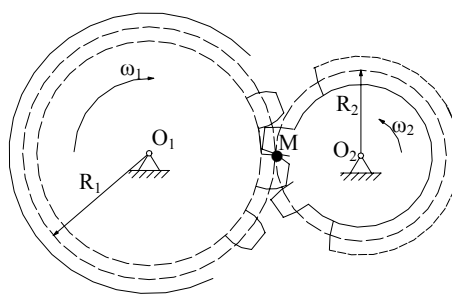


fig. 10.10

rostogolire. Considerăm două roți dințate angrenate între ele exterior (fig. 10.10) și z_1 respectiv z_2 numărul lor de dinți. În mișcarea relativă, dinții uneia dintre roți se rostogolesc și alunecă în același timp peste dinții celeilalte roți. Mișcarea relativă a celor două roți este deci o mișcare plană. Profilele dinților se aleg astfel încât centrul instantaneu, în această mișcare plană să fie tot timpul în punctul fix M al dreptei O_1O_2 . Punctul M se numește **polul angrenării**. Notăm cu R_1 și R_2 razele celor două cercuri de rostogolire.

Problema transmisiei prin roți dințate este înlocuită prin aceea a transmisiei prin roți cu fricțiune. În punctul M de tangență al cercurilor de rostogolire, cele două

roți au aceeași viteză: $v_M = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ de unde rezultă: $\omega_1 = -\frac{R_2}{R_1} \omega_2$ și deci raportul

de transmisie este: $k_{12} = -\frac{R_2}{R_1}$. Pentru a evita folosirea razelor cercurilor de

rostogolire, vom căuta să exprimăm raportul de transmisie în funcție de numărul dinților roților. Cum pasul p este același pentru ambele cercuri, putem scrie relațiile:

$2\pi R_1 = pz_1$; $2\pi R_2 = pz_2$ astfel că raportul de transmisie se mai scrie: $k_{12} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{z_2}{z_1}$

de unde rezultă: $\omega_1 = -\frac{z_2}{z_1}\omega_2$. Dacă cele două roți sunt angrenate interior, rezultă:

$$\omega_1 = k_{12}\omega_2; \quad k_{12} = \frac{z_2}{z_1}.$$

În continuare vom studia un tren de roți dințate în angrenare, formând un reductor cu patru axe O_1, O_2, O_3, O_4 și 6 roți care au razele R_1, R_2, \dots, R_6 respectiv z_1, z_2, \dots, z_6 dinți (fig.10.11). Roțile de pe axele O_2 și O_3 sunt solidare între ele.

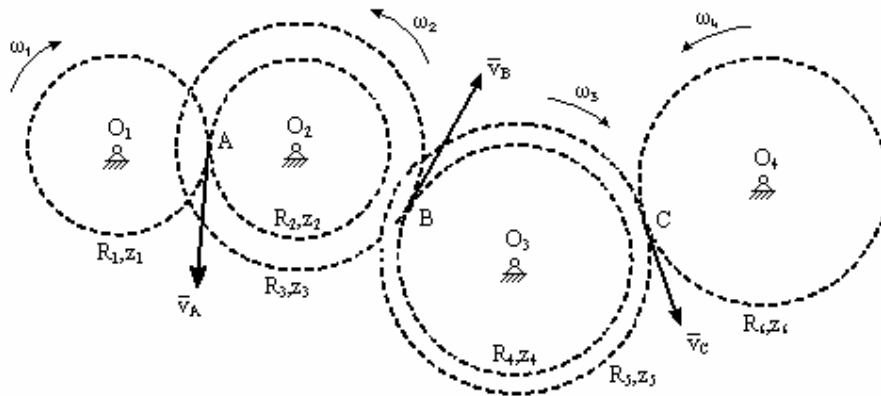


fig. 10.11

Vitezele în punctele de contact A, B, C sunt respectiv:

$$v_A = \omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2; \quad v_B = -\omega_2 R_3 = \omega_3 R_4; \quad v_C = \omega_3 R_5 = -\omega_4 R_6$$

$$\text{Rezultă: } \omega_1 = -\frac{R_2}{R_1}\omega_2 = \dots = (-1) \frac{R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3} \frac{R_6}{R_5} \omega_4 \text{ sau } \omega_1 = (-1)^3 \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5} \omega_4$$

$$\text{și deci raportul de transmisie este: } k_{14} = (-1)^3 \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5}.$$

Pentru generalizare, considerăm $n+1$ axe de rotație O_1, O_2, \dots, O_{n+1} pe care sunt fixate $2n$ roți dințate, având respectiv razele R_1, R_2, \dots, R_{2n} și numărul de dinți z_1, z_2, \dots, z_{2n} . Între vitezele unghiulare ω_1 și ω_{n+1} avem relația: $\omega_1 = k_{1n+1} \omega_{n+1}$

unde raportul de transmisie este:

$$k_{1n+1} = (-1)^n \frac{R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3} \frac{R_6}{R_5} \dots \frac{R_{2n}}{R_{2n-1}} \text{ sau: } k_{1n+1} = (-1)^n \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5} \dots \frac{z_{2n}}{z_{2n-1}}$$

10.5.2 Transmisii prin roți dințate cu axe concurente

În acest caz dantura este tăiată pe roți conice. La fiecare roată se definesc conul vârfurilor, conul de rostogolire și conul fundurilor, analoage cercurilor vârfurilor de rostogolire și al fundurilor de la roți dințate cilindrice. Aceste conuri sunt coaxiale și au același vârf O (fig.10.8). Condiția de funcționare normală conduce la aceeași formulă ca și în cazul angrenajelor conice cu fricțiune, adică:

$$k_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

De data aceasta α și β reprezintă unghiurile formate de axele roților dințate cu generatoarea comună a conurilor de rostogolire a celor două roți (conurile ce se rostogolesc fără alunecare în timpul funcționării angrenajului). Se poate evita folosirea conurilor de rostogolire, dacă se introduce numărul dinților celor două roți.

Se obține în acest caz: $k_{12} = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = -\frac{z_2}{z_1}$.

ELEMENTE FUNDAMENTALE ALE MECANICII

A. Mărimi fizice. Unități de măsură. Factor de transformare

O mulțime de obiecte fizice de aceeași natură, considerate din punctul de vedere al unei anumite însușiri comune, permite elaborarea noțiunii de mărime fizică corespunzătoare acestei însușiri, dacă există posibilitatea stabilirii unui criteriu de echivalență (care să permită repartizarea obiectelor respective în clase de echivalență), a unui criteriu de ordonare (care să permită aprecierea din punctul de vedere al însușiri considerate, a obiectelor aparținând unor clase diferite) și a unui criteriu de comparație (care să permită afirmația nu numai că obiectele dintr-o anumită clasă de echivalență sunt mai mari sau mai mici decât cele din altă clasă de echivalență, ci și de câte ori sunt mai mari sau mai mici).

Pe baza criteriului de comparație se atribuie fiecărei clase de mărimi fizice câte un număr abstract n , denumit valoare numerică. Valoarea numerică a unei clase se determină experimental, ca raport dintre o mărime M aparținând acesteia și mărimea de aceeași natură U din clasa căreia i s-a atribuit în mod convențional numărul unu, denumită unitate de măsură a mărimii fizice respective. Mărimea fizică se va exprima deci prin ecuația:

$$M = nU$$

numită ecuația fundamentală a măsurării.

Dacă o mărime fizică se măsoară cu două unități de măsură diferite U_1 și U_2 în baza ecuației fundamentale a măsurării avem:

$$M = n_1 U_1, \text{ respectiv } M = n_2 U_2$$

Făcând raportul acestor ecuații se deduce:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_2}{n_1} = K$$

de unde rezultă că valoarea numerică a unei mărimi variază invers proporțional cu unitatea de măsură aleasă pentru măsurarea ei.

Raportul K dintre unitățile de măsură U_1 și U_2 se numește factor de transformare și reprezintă numărul cu care trebuie înmulțită valoarea numerică a unei mărimi măsurate cu o unitate de măsură pentru a obține valoarea sa numerică, exprimată într-o altă unitate.

B. Mărimi și unități fundamentale. Mărimi și unități derivate

Deoarece în realitate mărimile fizice sunt strâns legate prin legi și definiții determinate, este posibil să se aleagă un număr restrâns de mărimi fizice independente, în funcție de care se pot exprima toate celelalte mărimi. Mărimile astfel alese, care se definesc direct, adică prin indicarea unității de măsură și a procedurii de măsurare, se numesc mărimi fundamentale, iar unitățile lor de măsură – unități

fundamentale. Noțiunile fundamentale ale mecanicii clasice sunt: spațiul, timpul și masa, reprezentând diferitele forme de existență ale realității obiective, care este materia. Mărimile mecanice fundamentale corespunzătoare sunt lungimea, timpul și masa.

Celelalte mărimi fizice deduse din mărimile fundamentale pe baza ecuațiilor de definiție alese pentru aceste mărimi se numesc mărimi derivate, iar unitățile respective, unități derivate. Dacă relațiile de definiție a mărimilor derivate se înlocuiesc mărimile fundamentale prin simbolurile dimensionale se obține ecuația dimensională a mărimilor derivate respective. Spre exemplificare, ecuația dimensională a forței, dedusă din relația de definiție:

$$F = ma = m \frac{v}{t} = m \frac{\frac{\ell}{t}}{t} = m \frac{\ell}{t^2}$$

se scrie astfel: $[F] = LT^{-2}M$.

Ecuațiile dimensionale ale mărimilor servesc la verificarea omogenității relațiilor fizice, proprietate importantă pe care trebuie să o îndeplinească acestea. De asemenea, cu ajutorul acestor relații se pot stabili ecuațiile unităților de măsură care indică modul în care variază unitățile mărimilor derivate, atunci când se schimbă unitățile fundamentale, precum și modul de schimbare a valorii numerice a unei mărimi, când se schimbă unitățile de măsură.

Un sistem de dimensiuni este determinat de grupul de mărimi fundamentale cu ajutorul cărora se pot defini univoc toate mărimile derivate. Așa de exemplu, în cinematică sistemul de dimensiuni este LT, iar în dinamică LTM.

Forma generală a ecuației dimensionale a unei mărimi mecanice derivate M_D este:

$$[M_D]_{LMT} = L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

unde α , β , γ reprezintă fiecare în parte dimensiunea mărimii derivate M_D în raport cu mărimile fundamentale lungime, masă și timp.

Membrul din partea dreaptă a ecuației dimensionale a unei mărimi derivate reprezintă „termenul dimensional al mărimii derivate respective”. Înlocuind mărimile fundamentale din ecuația dimensională cu unitățile fundamentale respective și păstrând aceiași exponenți, se obține ecuația dimensională a unității pe baza căreia se stabilește denumirea unității.

De exemplu, pentru viteză, în sistemul dimensional LT, ecuația dimensională este:

$$[V]_{LT} = LT^{-1}$$

iar ecuația unității de viteză în sistemul de unități care folosește pentru lungime unitatea metru (simbol m), iar pentru timp unitatea secundă este

$$\langle v \rangle_{m.s} = m \cdot s^{-1}$$

Denumirea unității de viteză este deci metru pe secundă și se definește ca fiind viteza unui punct în mișcare rectilinie și uniformă care parcurge distanța de 1 metru în timp de 1 secundă.

C. Sisteme de unități de măsură

Totalitatea unităților fundamentale, precum și a celor derivate, care se definesc cu ajutorul unităților fundamentale, constituie un sistem de unități de măsură.

Un sistem de unități de măsură este caracterizat, în principal, de grupul de unități fundamentale în funcție de care se definesc unitățile derivate în domeniul pentru care a fost adoptat acel sistem.

Deoarece pentru o anumită mărime fundamentală se pot alege una sau mai multe unități fundamentale și unui sistem de dimensiuni îi pot corespunde unul sau mai multe sisteme de unități. De exemplu, sistemului de dimensiuni LMT îi corespund sistemele de unități : MKS (metru, pentru lungime; kilogram pentru masă și secundă pentru timp); CGS (centimetru, gram, secundă), MTS (metru, tonă, secundă); sistemului de dimensiuni LFT, care a avut o largă utilizare în domeniul mărimilor mecanice folosite în tehnică, îi corespunde sistemul de unități MKfS (metru pentru lungime; kilogram forță pentru forță și secundă pentru timp).

În prezent, ca urmare a celei de a XI-a conferințe Internaționale de măsuri și greutate (Paris 1960), în țara noastră și în numeroase țări din lume, a fost introdus în mod obligatoriu Sistemul Internațional de unități cu prescurtarea SI.

Tabelul de mai jos cuprinde denumiri, simboluri, factori dimensionali și de transformare a unităților de măsură, precum și definiții atât pentru unitățile SI adoptate de conferința Generală de Măsurări și Greutăți, cât și pentru unități SI care nu au fost încă adoptate de aceasta și care au o largă utilizare în mecanică.

Mărimea				Unitatea SI	
Denumire	Simbol	Relația de definiție	Termen dimensional	Denumire simbol	Definiție
Lungime	l, s	-	L	Metru m	Lungimea egală cu 1650763,73 lungimi de undă în vid ale radiației care corespunde tranziției între nivelele $2p_{10}$ și $5d_5$ ale atomului de kripton 36
Arie	A, S	$A=l \cdot b$ $b=lățime$	L^2	Metru pătrat m^2	Aria unui pătrat cu latura de 1 metru

Mărimea				Unitatea SI	
Denumire	Simbol	Relația de definiție	Termen dimensional	Denumire simbol	Definiție
Volum	V	$V = l \cdot b \cdot h$ $h = \text{înălțime}$	L^3	Metru cub m^3	Volumul unui cub cu latura de 1 m
Unghi plan (deplasare unghiulară)	$\alpha, \beta, \gamma, \theta, \delta, \varphi$	$\varphi = \frac{\text{lung.arc}}{\text{raza}}$	-	Radian rad.	Unghiul plan cu vârful în centrul unui cerc, care delimitează pe circumferința cercului de arc, a cărui lungime este egală cu raza cercului
Timp	t	-	T	Secundă s	Durata a 9192631770 perioade ale radi-ăției corespun-zătoare tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133
Viteza	v	$v = \frac{ds}{dt}$	LT^{-1}	Metru pe secundă m/s	Viteza unui punct în mișcare recti-linie și uniformă, care parcurge distanța de 1 m în timp de 1 s
Accelerație	a	$a = \frac{dv}{dt}$	LT^{-2}	Metru pe secundă la pătrat m/s^2	Accelerația unui punct în mișcare rectilinie și uniform variată, a cărui viteză se modifică cu 1 metru pe secundă în timp de 1 secundă

Mărimea				Unitatea SI	
Denumire	Simbol	Relația de definiție	Termen dimensional	Denumire simbol	Definiție
Viteză unghiulară	ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	T^{-1}	Radian pe secundă rad/s	Viteza unghiulară a unui punct în mișcare circulară uniformă, a cărei rază vectorie parcurge un unghi la centru de 1 rad. în timp de 1 s
Accelerație unghiulară	ε	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	T^{-2}	Radian pe secundă la pătrat rad/s ²	Accelerația unghiulară a unui punct în mișcare circulară uniform variată a cărei viteză unghiulară se modifică cu 1 radian pe secundă în timp de 1 secundă
Perioadă	T	$f(t)=f(t+T)$	T	Secundă	Idem „timp”
Frecvență	f, ν	$f = \frac{1}{T}$	T^{-1}	Hertz Hz	Frecvența unui fenomen periodic a cărei perioadă este de 1 secundă
Frecvență de rotație (turație)	n	$n = \frac{1}{T}$	T^{-1}	Unu pe secundă 1/s	Frecvența de rotație (turația) unui punct în mișcare circulară, care efectuează 1 rot. în timp de 1 s
Frecvența unghiulară (pulsatie)	ω	$\omega = 2\pi f$	T^{-1}	Unu pe secundă 1/s	Frecvența unghiulară a unei oscilații armonice a cărei frecvență este de $1/2\pi=0.1593$ Hz

Mărimea				Unitatea SI	
Denumire	Simbol	Relația de definiție	Termen dimensional	Denumire simbol	Definiție
Amplitudine	A	<i>Valoarea de vârf a unei mărimi sinusoidale</i>	Termenul dimensional al mărimii sinusoidale	Denumirea, simbolul și definiția de măsură a mărimii sinusoidale	
Fază (unghi de fază)	$\omega t + \varphi$	<i>Argumentul dependent de timp al unei mărimi cu variație sinusoidală</i>	-	Radian rad.	Idem „unghi plan”
Lungime de undă	λ	<i>Distanța dintre două puncte succesive în direcția de propagare a unei perioade în care oscilația are aceeași fază</i>	L	Metru m	Idem „lungime”
Masă	m	-	M	Kilogram Kg	Masa „kg prototip internațional”
Densitate (masă volumică)	ρ	$\rho = \frac{m}{V}$	$L^{-3}M$	Kilogram pe metru cub kg/m^3	Densitatea (masa volumică) a unui corp omogen cu volumul de 1 metru cub a cărui masă este de 1 kilogram
Impuls (cantitate de mișcare)	H, p	$H = mv$	LMT^{-1}	Kilogram-metru pe secundă kgm/s	Impulsul unui corp cu masa de 1 kg care se deplasează cu viteza de 1 m/s

Mărimea				Unitatea SI	
Denumire	Simbol	Relația de definiție	Termen dimensional	Denumire simbol	Definiție
Moment cinetic (momentul impulsului)	K	$K = H \cdot \ell$	L^2MT^{-1}	Kilogram-metru pătrat pe secundă kgm^2/s	Momentul cinetic al unui corp punctiform care are impulsul de 1 kgm/s și se deplasează pe un cerc cu raza de 1 metru.
Moment de inerție planar	J_{yoz} J_{xoy} J_{zox}	$J_{yoz} = \int x^2 dm$	L^2M	Kilogram-metru pătrat kgm^2	Momentul de inerție planar al unui corp punctiform cu masa de 1 kg față de un plan situat la 1 m
Moment de inerție axial	J_x J_y J_z	$J_z = \int (y^2 + z^2) dm$	L^2M	Kilogram-metru pătrat kgm^2	Momentul de inerție axial al unui corp punctiform cu masa de 1 kg față de o axă situată la 1 m
Moment de inerție polar	J_p	$J_p = \int r^2 dm$	L^2M	Kilogram-metru pătrat kgm^2	Momentul de inerție al unui corp punctiform cu masa de 1 kg față de un punct situat la 1 m
Moment de inerție centrifugal	J_{xy} J_{yz} J_{zx}	$J_{zy} = \int xy dm$	L^2M	Kilogram-metru pătrat kgm^2	Momentul de inerție centrifugal al unui corp punctiform cu masa de 1 kg față de 2 plane situate fiecare la 1 m de corp

Mărimea				Unitatea SI	
Denumire	Simbol	Relația de definiție	Termen dimensional	Denumire simbol	Definiție
Forța	F	$F = ma$	LMT^{-2}	Newton N	Forța care acționând asupra unui corp cu masa de 1 kg îi imprimă acc. de 1 m/s^2
Greutate	G	$G = mg$	LMT^{-2}	Newton N	Greutatea unui corp cu masa de $1/9.806 \text{ kg}$ care se găsește în vid, într-un punct de pe suprafața Pământului la o latitudine $\pi/4 \text{ rad.}$ și altitudine 0 m
Greutate volumetrică	γ	$\gamma = \frac{G}{V}$	L^2MT^{-2}	Newton pe metru cub N/m^3	Greutatea volumică a unui corp omogen cu volumul de 1 m^3 cub a cărui greutate este de 1 N
Momentul unei forțe față de un punct;	M	$M = F\ell$	L^2MT^{-2}	Newton-metru Nm	Momentul unei forțe de 1 N față de un punct situat la distanța de 1 m de suportul forței
Impuls	H	$H = mv$	LMT^{-1}	Newton-secundă Ns	Impulsul unei forțe de 1 N care acționează 1 s
Presiune	p	$p = \frac{F}{A}$	$L^{-1}MT^{-2}$	Newton pe metru pătrat	Presiunea produsă de forța de 1 N normală și uniform distribuită pe o suprafață cu aria de 1 m^2

Mărimea				Unitatea SI	
Denumire	Simbol	Relația de definiție	Termen dimensional	Denumire simbol	Definiție
Lucru mecanic	L	$L = F\ell \cos \alpha$	L^2MT^{-2}	Joule J	Lucrul mecanic efectuat de forța de 1 N al cărei punct de aplicație se deplasează cu 1 m în direcția și sensul forței
Energie potențială	E_p	$\Delta E_p = mgh$	L^2MT^{-2}	Joule J	Creșterea energiei potențiale a unui corp punctiform cu greutate de 1 N, când acesta este ridicat pe verticală în câmp gravitațional pe o distanță de 1m
Energie cinetică	E_c	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	L^2MT^{-2}	Joule J	Energia cinetică a unui corp cu masa de 2 kg care se deplasează cu viteza de 1 m/s
Putere mecanică	P	$P = \frac{E}{t}$	L^2MT^{-3}	Watt W	Putere mecanică care corespunde transferului de energie de 1 joule în 1 s.

D. Omogenitatea dimensională

Cea mai generală relație între valorile numerice ale unor mărimi fizice se poate exprima sub forma:

$$f(x_1, x_2, \dots) = 0$$

unde f reprezintă un operator, iar x_1, x_2, \dots valorile numerice ale mărimilor fizice care intervin în legea respectivă. Relația trebuie să fie independentă de unitățile de măsură folosite, deci la schimbarea acestora să devină:

$$f(x'_1, x'_2, \dots) = 0$$

Pentru a fi îndeplinită această condiție este necesar și suficient să rezulte relația:

$$f(x_1, x_2, \dots) = C f(x'_1, x'_2, \dots)$$

în care C este o constantă care depinde exclusiv de rapoartele între noile și vechile mărimi primitive. Această condiție se realizează numai dacă relațiile între mărimile fizice sunt omogene, adică numai atunci când dimensiunile termenilor care intervin în expresia lor sunt aceleași.

Omogenitatea dimensională permite verificarea corectitudinii unei relații, determinarea naturii unor mărimi, stabilirea dimensiunilor și semnificației fizice a coeficienților din relații, precum și stabilirea unor formule în cazuri speciale.

E. Algebra vectorială

În cele ce urmează se presupun cunoscute elementele de algebră vectorială studiate în cadrul cursurilor de matematici și se va face doar o trecere în revistă a acestora, a principalelor operații și proprietăți utilizate, dezvoltându-se corespunzător partea aplicată în mecanică și anume algebra vectorilor alunecători.

Mărimi scalare și vectoriale. Clasificarea vectorilor

Mărimile fizice pentru a căror caracterizare completă este suficient un scalar (adică un număr) se numesc mărimi scalare. Exemple sunt masa, timpul etc.

Mărimile fizice pentru a căror caracterizare completă sunt necesare mai multe numere reale sunt vectorii și tensorii. Necesitatea definirii și studierii mărimilor vectoriale a apărut odată cu constatarea că există mărimi fizice (ca de exemplu viteza, forța etc.) pentru a căror caracterizare nu este suficientă doar intensitatea lor, ci și definirea unei direcții de acțiune, a unui sens și uneori anumite caracteristici ale originii vectorului. În consecință o reprezentare geometrică evidentă a vectorilor este un segment de dreaptă spațial AB (fig. 1) la care distingem:

- valoarea sau modulul: distanța AB măsurată în unitățile de măsură corespunzătoare (folosind deci o scară)
- direcția: o definim prin a spune că toate dreptele (suporturile) paralele cu o dreaptă determină o aceeași direcție
- sensul: unul dintre cele două moduri posibile de a parcurge o dreaptă (în cazul nostru de la A înspre B)
- originea (punctul de aplicație): punctul A
- extremitatea: punctul B

Există mai multe criterii de clasificare a vectorilor, dintre care cel mai important în mecanică este criteriul tipului originii. Conform acestui criteriu distingem:

- vectori liberi, a căror origine poate fi mutată oriunde în spațiu (păstrând modulul, direcția și sensul) fără ca efectul vectorului să se schimbe
- vectori alunecători, a căror origine poate fi deplasată doar pe suportul propriu (în condițiile de mai sus)
- vectori legați, a căror origine este legată într-un anumit punct

În cele ce urmează vectorii se vor nota cu o bară deasupra literei sau literelor ce îi desemnează, litera fără bară semnificând modulul vectorului respectiv.

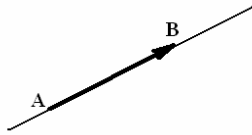


Fig. 1

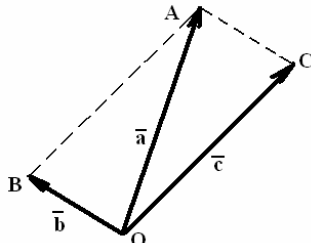


Fig. 2

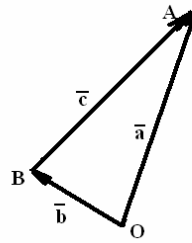


Fig. 3

Adunarea vectorilor. Regula paralelogramului și poligonului

Adunarea vectorilor după regula paralelogramului are la bază principiul paralelogramului care spune că acțiunea mecanică a două forțe de mărimi și direcții diferite ce acționează simultan într-un punct este echivalentă cu acțiunea unei singure forțe a cărei mărime, direcție și sens sunt date de diagonala paralelogramului construit cu cei doi vectori forță ca laturi. Echivalența de mai sus, stabilită experimental, este transpusă matematic prin relația:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

care se spune că este efectuată după regula paralelogramului dacă vom considera fig. 2 și după regula poligonului dacă vom considera fig. 3.

Cele două reguli de adunare dau același rezultat, ceea ce reiese evident din egalitatea triunghiurilor OAB din cele două figuri. Regula poligonului are însă avantaje evidente la însumarea mai multor vectori.

Adunarea vectorială (sau geometrică) are proprietățile de a fi asociativă și comutativă:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Înmulțirea unui vector cu un scalar. Versor

Prin definiție, rezultatul înmulțirii unui vector \vec{a} cu un scalar m este vectorul \vec{b} definit astfel:

- modulul $b = |m|a$
- direcția $\vec{b} \parallel \vec{a}$
- sensul același sau contrar cu \vec{a} după cum m este pozitiv sau negativ

Împărțirea unui vector cu un scalar revine la a înmulți vectorul cu inversul scalarului respectiv.

Prin împărțirea unui vector cu propriul său modul se obține un vector de mărime unitară, cu aceeași direcție și același sens cu vectorul considerat. Acest vector unitar se numește versor:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{a} \quad (u = 1)$$

Se numește versor al unei axe vectorul unitar dirijat după acea axă, cu sensul în sensul pozitiv al axei. Versorii axelor de coordonate carteziene Ox , Oy , Oz se vor nota cu notațiile consacrate \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

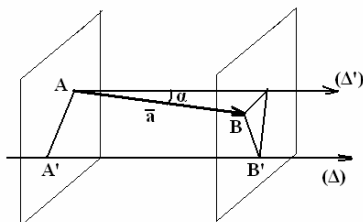


Fig.4

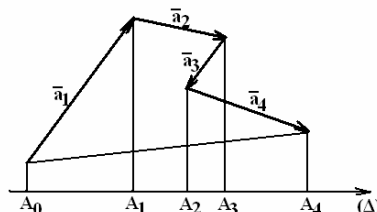


Fig.5

Proiecția unui vector pe o axă. Teorema lui Challes

Fie un vector \vec{a} și o axă Δ (fig.4). se numește proiecția vectorului \vec{a} pe axa Δ și se notează $pr_{(\Delta)} \vec{a}$, lungimea segmentului orientat interceptat pe axă de cele două plane normale la axă trecând prin originea și respectiv extremitatea vectorului \vec{a} .

Ca expresie matematică se poate scrie:

$$pr_{(\Delta)} \vec{a} = a \cos \alpha$$

în care α este unghiul dintre vector și axă, unghi ce poate fi atât ascuțit cât și obtuz ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$).

Ca regulă practică se poate considera formula:

$$pr_{(\Delta)} \vec{a} = \pm a \cos \beta$$

în care se consideră semnul + sau - după cum unghiul α este ascuțit sau obtuz, iar β este unghiul ascuțit dintre vector și direcția axei.

Vom considera acum vectorii $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ (fig.5), generalizarea pentru n vectori făcându-se ușor. Proiectând pe axa Δ acești vectori, precum și suma lor vectorială \vec{s} ,

efectuată grafic prin metoda poligonului, se observă ușor valabilitatea relației (extinsă pentru n vectori):

$$\sum_{i=1}^n \text{pr}_{(\Delta)} \vec{a}_i = \text{pr}_{(\Delta)} \vec{s}$$

care este exprimarea matematică a teoremei lui Challes: suma algebrică a proiecțiilor pe o axă a mai multor vectori este egală cu proiecția pe acea axă a sumei vectoriale a vectorilor considerați (sau mai pe scurt, suma proiecțiilor este egală cu proiecția sumei).

Descompunerea unui vector după două direcții în plan și trei direcții în spațiu. Relația de coliniaritate a doi vectori și de coplanaritate a trei vectori. Expresia hipercomplexă a unui vector

Descompunerea unui vector după două direcții coplanare cu vectorul se face pe baza regulii paralelogramului, care este o relație biunivocă între o pereche de vectori și suma lor. Deci descompunerea este unică (fig.6), efectuându-se prin ducerea a două paralele din extremitatea A la cele două direcții Δ_1 și Δ_2 .

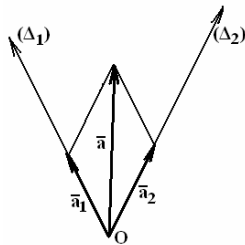


Fig.6

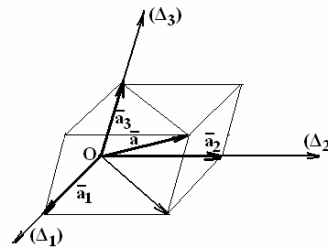


Fig.7

Fie acum vectorul \vec{a} (fig.7) și trei direcții spațiale $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Ducând din extremitatea A cele trei plane paralele la perechile de drepte $\Delta_2\Delta_3$, $\Delta_3\Delta_1$, $\Delta_1\Delta_2$, acestea vor intercepta de la O pe cele trei direcții $\Delta_1\Delta_2$ și respectiv Δ_3 , vectorii $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ a căror construcție este unică și a căror sumă vectorială este vectorul \vec{a} . Evident că în cazul particular a trei direcții ortogonale prisma oblică din figura 7 se transformă într-un paralelipiped dreptunghic.

Vom considera acum doi vectori coliniari \vec{a} și \vec{b} (fig.8). Relația de coliniaritate a celor doi vectori se poate scrie imediat sub forma:

$$\vec{a} = m\vec{b}$$

în care scalarul m este unic determinat prin relațiile:

$$|m| = \frac{a}{b}$$

$$m \begin{cases} > 0 \text{ dacă } \vec{a} \text{ și } \vec{b} \text{ au același sens} \\ < 0 \text{ dacă } \vec{a} \text{ și } \vec{b} \text{ au sensuri contrare} \end{cases}$$

Fie acum vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} coplanari (fig.9). descompunerea vectorului \vec{a} după cele două direcții date de vectorii \vec{b} și \vec{c} este unică și se face ca în figura 6.

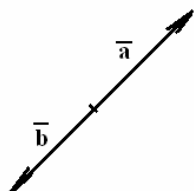


Fig.8

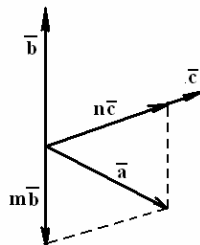


Fig.9

Cele două componente ale lui \vec{a} coliniare cu \vec{b} , respectiv cu \vec{c} , se pot scrie sub forma $m\vec{b}$, respectiv $n\vec{c}$, unde m și n sunt scalari unic determinați. În concluzie relația de coplanaritate a trei vectori este relația liniară:

$$\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$$

Fie acum (fig.10) un sistem de referință cartezian $Oxyz$ în a cărei origine construim un vector \vec{a} . Descompunerea acestui vector după cele trei axe se face ca în figura 7. Cele trei componente coliniare cu axele sunt coliniare cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ și în concluzie pot fi scrise sub forma $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$ și $a_z\vec{k}$ (a_x, a_y, a_z fiind proiecțiile vectorului \vec{a} pe cele trei axe).

Putem scrie deci relația

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

care se numește expresia hipercomplexă (sau expresia analitică) a vectorului \vec{a} .

O scriere prescurtată a acestei relații este:

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$$

Modulul vectorului \vec{a} se calculează cu relația

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

care se numește teorema lui Pitagora generalizată în spațiu.

Produsul scalar a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică

Fiind dați doi vectori \vec{a} și \vec{b} se numește produs scalar al celor doi vectori (și se notează cu $\vec{a} \cdot \vec{b}$) scalarul:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

în care α este unghiul dintre cei doi vectori (fig.11).

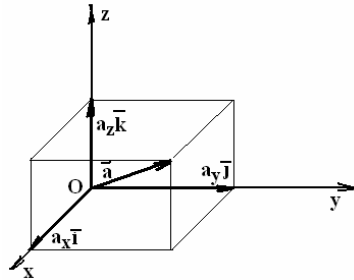


Fig.10

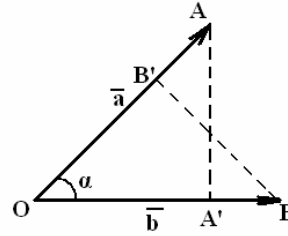


Fig.11

Tot din figura 11 se poate vedea ușor că produsul scalar al vectorilor \vec{a} și \vec{b} mai poate fi exprimat în funcție de proiecțiile vectorilor \vec{a} și \vec{b} , fiecare pe celălalt, sub formele:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot \text{pr}_{(\vec{a})} \vec{b} = b \cdot \text{pr}_{(\vec{b})} \vec{a}$$

Din relația anterioară urmează imediat că proiecția unui vector \vec{a} pe o axă Δ de versor \vec{u} se poate scrie:

$$\text{pr}_{(\Delta)} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{u}$$

Produsul scalar are următoarele proprietăți:

- este comutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

- este asociativ în raport cu înmulțirea cu un scalar:

$$m \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m \cdot \vec{b})$$

- este distributiv față de suma vectorială

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

- se anulează când vectorii sunt perpendiculari (sau unul dintre ei este nul)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ dacă } \begin{cases} \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$$

Toate aceste proprietăți se demonstrează foarte simplu.

Plecând acum de la expresiile hipercomplexe ale vectorilor \vec{a} și \vec{b} , pe baza proprietății de distributivitate a produsului scalar față de suma vectorială se obține expresia analitică a produsului scalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Pe baza acestei relații se pot calcula :

- unghiul a doi vectori cu relația

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

- Unghiurile dintre un vector și axele Ox, Oy și Oz cu relațiile

$$\cos \alpha_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Acești cosinuși care se mai numesc și cosinuși directori ai unei direcții satisfac relația evidentă:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

Produsul vectorial a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică

Fiind dați vectorii \vec{a} și \vec{b} se numește produs vectorial al celor doi vectori (și se notează $\vec{a} \times \vec{b}$ vectorul

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

definit în felul următor

- modulul

$$c = ab \sin \alpha$$

unde α este unghiul dintre \vec{a} și \vec{b}

- direcția

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ și } \vec{c} \perp \vec{b}$$

deci \vec{c} este perpendicular pe planul definit de \vec{a} și \vec{b}

- sensul: conform regulii burghiului (sau șurubului drept) care spune că sensul lui \vec{c} este sensul de înaintare al unui burghiu (sau șurub drept) când acesta este rotit de la primul factor \vec{a} înspre a doilea factor \vec{b} al produsului vectorial (fig.12).

Produsul vectorial are următoarele proprietăți

relativ ușor de demonstrat:

- Este anticomutativ

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- Este asociativ în raport cu înmulțirea cu un scalar

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$$

- Este distributiv față de suma vectorială

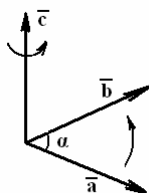


Fig.12

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$$

- Se anulează când vectorii sunt paraleli (sau când unul dintre ei este nul)

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0 \text{ dacă } \begin{cases} \bar{a} = 0 \\ \bar{b} = 0 \\ \bar{a} \parallel \bar{b} \end{cases}$$

Plecând de la expresiile hipercomplexe ale vectorilor se obține expresia analitică a produsului vectorial sub forma unui determinant simbolic care nu are sens decât dezvoltat după prima linie

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Produsul mixt a trei vectori. Definiție. Expresie analitică. Proprietăți

Fiind dați trei vectori \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} se numește produs mixt al celor trei vectori scalarul

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

Expresia analitică a produsului mixt se obține sub formă de determinant

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Proprietățile produsului mixt se obțin folosind proprietățile determinantilor, și anume faptul că la o permutare simplă a două linii semnul determinantului se schimbă și deci la o permutare dublă valoarea determinantului rămâne neschimbată și faptul că un determinant cu două linii proporționale sau cu o linie combinație liniară a celorlalte două este nul. De aici deducem relațiile

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0 \text{ dacă } \begin{cases} \bar{a} \parallel \bar{b} \\ \bar{b} \parallel \bar{c} \\ \bar{c} \parallel \bar{a} \\ \bar{a} = m\bar{b} + n\bar{c} \end{cases}$$

Acestea sunt singurele proprietăți ale produsului mixt uzual folosite.

Produsul dublu vectorial a trei vectori. Definiție. Formula de descompunere

Fiind dați trei vectori \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} , se numește produs dublu vectorial al celor trei vectori, vectorul:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$$

Utilizând relațiile anterioare se poate obține formula de descompunere a produsului dublu vectorial:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$$

Integrale vectoriale

Fie un sistem de referință cartezian fix Oxyz și un vector variabil $\bar{v}(\alpha)$, funcție de parametrul α care în particular poate fi și timpul. Integrala nedefinită a vectorului \bar{v} se calculează cu relația

$$\int \bar{v}(\alpha) d\alpha = \bar{i} \int v_x(\alpha) d\alpha + \bar{j} \int v_y(\alpha) d\alpha + \bar{k} \int v_z(\alpha) d\alpha = \bar{u}(\alpha)$$

iar integrala definită devine

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{v}(\alpha) d\alpha = \bar{u}(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \bar{u}(\alpha_2) - \bar{u}(\alpha_1)$$

Cu aceasta integralele de tipul

$$\int m(\alpha) \bar{v}(\alpha) d\alpha$$

$$\int \bar{a}(\alpha) \times \bar{b}(\alpha) d\alpha$$

se rezolvă imediat, iar integrale de tipul

$$\int \bar{a}(\alpha) \cdot \bar{b}(\alpha) d\alpha$$

sunt integrale dintr-o funcție scalară.

Se deduc imediat următoarele proprietăți utile în aplicații:

$$\int (\bar{a} + \bar{b}) d\alpha = \int \bar{a} d\alpha + \int \bar{b} d\alpha$$

$$\int m \bar{a} d\alpha = m \int \bar{a} d\alpha \quad (m = \text{ct.})$$

$$\int \bar{a} m d\alpha = \bar{a} \int m d\alpha \quad (\bar{a} = \text{ct.})$$

$$\int \bar{a} \times \bar{b} d\alpha = \bar{a} \times \int \bar{b} d\alpha \quad (\bar{a} = \text{ct.})$$

$$\int \bar{a} \cdot \bar{b} d\alpha = \bar{a} \cdot \int \bar{b} d\alpha \quad (\bar{a} = \text{ct.})$$

$$\int \frac{d\bar{a}}{d\alpha} \times \bar{b} d\alpha = \bar{a} \times \bar{b} - \int \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{d\alpha} d\alpha$$

$$\int \frac{d\bar{a}}{d\alpha} \bar{b} d\alpha = \bar{a} \cdot \bar{b} - \int \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{d\alpha} d\alpha$$

$$\int \frac{dm}{d\alpha} \bar{a} d\alpha = m \bar{a} - \int \bar{a} \frac{dm}{d\alpha} d\alpha$$

În afara integralelor de linie de mai sus, se mai folosesc integralele curbilinii de tipul

$$\int_{(c)} \bar{v}(\alpha) \cdot d\bar{r}(\alpha) = \int_{(c)} v_x dr_x + v_y dr_y + v_z dr_z$$

integrale de suprafață de tipul

$$\iint_{(S)} \bar{v}(x, y, z) ds = \bar{i} \iint_{(S)} v_x ds + \bar{j} \iint_{(S)} v_y ds + \bar{k} \iint_{(S)} v_z ds$$

și integrale de volum de tipul

$$\iiint_{(V)} \bar{v}(x, y, z) dv = \bar{i} \iiint_{(V)} v_x dv + \bar{j} \iiint_{(V)} v_y dv + \bar{k} \iiint_{(V)} v_z dv$$

Aditivitatea pe reuniunea unor domenii disjuncte este caracteristică tuturor acestor integrale.

Ecuatii diferențiale vectoriale

Fie un vector variabil $\bar{v}(t)$, funcție de timp și un sistem de referință cartezian fix Oxyz. Orice ecuație diferențială ordinară:

$$f(t, \bar{v}, \dot{\bar{v}}, \ddot{\bar{v}}, \dots) = 0$$

se rezolvă prin proiectarea ei pe cele trei axe de coordonate obținând trei ecuații diferențiale scalare care dau prin rezolvarea lor cele trei proiecții ale vectorului \bar{v} pe axe. Observăm că soluția \bar{v} conține $3n$ constante arbitrare scalare, n fiind ordinul ecuației. Facem mențiunea că ecuațiile diferențiale ale Mecanicii sunt de ordinul unu sau doi.

O atenție specială trebuie acordată ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, a căror rezolvare se poate face pe o cale mai scurtă, evitând proiectarea lor pe axe. Fie o astfel de ecuație neomogenă de ordinul doi:

$$a_2 \ddot{\bar{v}} + a_1 \dot{\bar{v}} + a_0 \bar{v} = \bar{u}(t) \quad (a)$$

Ecuatia omogenă corespunzătoare este

$$a_2 \ddot{\bar{v}} + a_1 \dot{\bar{v}} + a_0 \bar{v} = 0 \quad (b)$$

pentru care încercând soluții de forma

$$\bar{v} = \bar{C} e^{st}$$

obținem ecuația caracteristică

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Rădăcinile s_1 și s_2 ale acestei ecuații algebrice pot fi

$$s_1 \neq s_2 \quad (\text{reale}) \quad (c)$$

$$s_1 = s_2 \quad (\text{reale}) \quad (d)$$

$$s_{1,2} = \varepsilon \pm i\omega \quad (\text{complexe}) \quad (e)$$

În cazurile (c), (d) și (e) soluția generală a ecuației (b) se va scrie respectiv:

$$\bar{v} = \bar{C}_1 e^{s_1 t} + \bar{C}_2 e^{s_2 t}$$

$$\bar{v} = \bar{C}_1 e^{s_2 t} + \bar{C}_2 t e^{s_1 t}$$

$$\bar{v} = e^{\varepsilon t} (\bar{C}_1 \cos \omega t + \bar{C}_2 \sin \omega t)$$

în care \bar{C}_1 și \bar{C}_2 sunt două constante vectoriale arbitrare.

Pentru rezolvarea ecuației neomogene (a) se va obține la început o soluție particulară a acestei ecuații neomogene cu ajutorul metodei variației constantelor a lui Lagrange.

Fie $\bar{v}_1(t)$ soluția generală a ecuației omogene

$$\bar{v}_1 = \bar{C}_1 f_1(t) + \bar{C}_2 f_2(t)$$

Pentru ecuația omogenă vom încerca o soluție de forma

$$\bar{v}_2 = \bar{C}_1(t) f_1(t) + \bar{C}_2(t) f_2(t) \quad (f)$$

Prin aplicarea metodei variației constantelor vom obține sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} \dot{\bar{C}}_1 f_1 + \dot{\bar{C}}_2 f_2 &= 0 \\ \dot{\bar{C}}_1 f_1 + \dot{\bar{C}}_2 f_2 &= \frac{\bar{u}}{a_2} \end{aligned}$$

și în final avem

$$\begin{aligned} \bar{C}_1(t) &= -\frac{1}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_2}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2} dt \\ \bar{C}_2(t) &= \frac{1}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_1}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2} dt \end{aligned}$$

Soluția particulară $\bar{v}_2(t)$ a ecuației neomogene fiind acum găsită sub forma (f), se poate vedea simplu că soluția generală a ecuației neomogene se scrie

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{C}_1 f_1 + \bar{C}_2 f_2 - \frac{f_1}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_2}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2} dt + \frac{f_2}{a_2} \int \frac{\bar{u} f_1}{f_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 f_2} dt$$

BIBLIOGRAFIE

1. Aizenberg T.B., Voronkov I.M., Oseřkii V.M: *Rukovodstvo k reșeniu zadaci po teoreticeskoi mehanike*, Izd. Vîșșaiia Skola, Moskva, 1965.
2. Bălan St.: *Culegere de probleme de mecanică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
3. Bath M.I., ș.a.: *Theoreticeskaia mehanika v primerah i zadaciach* Tom I, Statika, Kinematika, Izd. Fiziko-mathematiceskoi, Literaturî, Moskva, 1968.
4. Brândeu L.: *Mecanica-Statică*, litografiat I.P “Traian Vuia”, Timișoara 1980.
5. Buchholtz N.N., Voronkov I.M., Minakov I.A.: *Culegere de probleme de mecanică rațională* (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, București, 1951.
6. Darabonț A., Munteanu M., Văiteanu D.: *Mecanică tehnică. Culegere de probleme*. Scrisul Românesc, Craiova, 1983.
7. Doceul P. : *Problèmes de mécanique*, Paris, Gauthier-Villars, 1968.
8. Gantmacher G.: *Lectures in Analytical Mechanics*, Mir Publishers, Moskow, 1970.
9. Kabalskii M.M., ș.a.: *Tipovîie zadaci po teoreticeskoi mehanike i metodi ih reșenia*, G.I.T.L., U.S.S.R., Kiev, 1956.
10. Klepp H.: *Curs de mecanică. Statică. Cinematică.*, litografiat, I.P. “Traian Vuia”, Timișoara, 1975.
11. Levinson L.: *Funamentals of Engineering Mechanics*, Mir Publishers, Moskow, 1970.
12. Mangeron O., Irimiciuc N.: *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie. Mecanica rigidului*, Vol. 1, Ed. Tehnica, București, 1978.
13. Marinca V.: *Statica*, litografiat I.P. “Traian Vuia”, Timișoara, 1994.
14. Marinca V.: *Cinematica*, Ed. Eurostampa, Timișoara, 1996.
15. Olariu S.: *Geneza și evoluția reprezentărilor mecanicii clasice*, Ed. St. și Enciclop., București, 1987.
16. Orgovici I., Smicala I.: *Mecanica, Vol. II, Cinematica*, litografiat Univ. Tehnică, Timișoara, 1993.
17. Radu A.: *Probleme de mecanică*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1978.
18. Rădoi M., Deciu E.: *Mecanica*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1977.
19. Rogai E.: *Culegere de probleme de mecanică*, litografiat, Univ. București, 1987.

20. Sarian M., s.a.: *Probleme de mecanică pentru ingineri și subingineri*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1975.
21. Silaș Gh., Groșanu I.: *Mecanica*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1981.
22. Stan A., Grumăzescu M.: *Probleme de mecanică*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1974.
23. Stoenescu A., ș.a.: *Culegere de probleme de mecanică teoretică*, Ed. II, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1961.
24. Vâlcovici V., Bălan St., Voinea R.: *Mecanică teoretică*, Ed. Tehnică, Ed. III, București, 1968.
25. Voinea R., Voiculescu D., Ceașu V.: *Mecanică*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1975.
26. Wittenbauer F.: *Aufgaben aus der technischen Mechanik*, Berlin, Verlag von Julius, Springer, 1929.
27. ***: *Probleme de mecanică date la concursurile profesional științifice*, Ed. III-I.P. "Traian Vuia", Timișoara, 1981.