ALGEBRĂ LINIARĂ. GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ

Timişoara

2020

UNIVERSITATEA ”POLITEHNICA” TIMIŞOARA

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

Lector. univ. **OLIVIA BUNDĂU**

Capitolul 1

Matrici

1.1 Generalităţi despre matrici

Definiţia 1.1.1 *O matrice cu m lini şi n coloane este definită de o funcţie definită pe mulţimea perechilor de indici (i,j),* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ *cu valori reale sau complexe.* $A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$

Valorile A(i,j) se notează cu a_{ij} *şi se afişează într-un tabel.* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

Observaţia 1.1.2 *Mulţimea matricilor cu m lini şi n coloane se notează cu* $M_{m\times n}$.

Matricea pentru care numarul linilor este egal cu numarul coloanelor, ***m=n****, se numeşte* ***matrice pătratică.***

Matricea care are toate elementele zero se numeşte ***matricea nulă.***

Matricea de tipul $1 \times n$ *se numeşte* ***matrice linie.*** $A = [a_{11}a_{12}....a_{1n}]$

Matricea de tipul $m \times 1$ se numeşte ***matrice coloană.*** $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$,

Matricea patratică de tip $n \times n$, care are unu pe diagonala principală şi zero în rest se numeşte ***matrice unitate.*** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$,

Matricea pătratică de tip $n \times n$, care are numere reale sau complexe pe diagonala principală şi zero în rest se numeşte ***matrice diagonală.***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Matricea de tip $n \times m$ obţinută din A prin înlocuirea linilor cu coloanele se numeşte ***transpusa*** *matricii A , se notează cu A^T.* $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Propriatăţile matricei transpuse

1. $(A^T)^T = A$

2.$(A + B)^T = A^T + B^T$

3. $(AB)^T = B^T A^T$

Matricea pătratică $A \in M_{n \times n}$ cu proprietatea că $A = A^T$ se numeşte ***matrice simetrică.***

Matricea pătratică $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, care are toate elementele situate sub diagonala principală egale cu zero se numeţe matrice ***superior triunghiulară***

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Se numeşte matrice **scară pe linii**, matricea $S=(s_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ pentru care:*

1. Dacă o linie este nulă, $S_{i:}=(00\cdots 0)$, atunci toate liniile situate sub această linie i sunt nule, adică $S_{k:}=(00\cdots 0)$), pentru orice $k\geq i$;

2. Dacă primul element nenul de pe linia $S_{i:}$ este s_{ij} atunci toate elementele de pe coloanele precedente coloanei j, inclusiv de pe coloana j,$S_{:j}$ aflate sub linia i sunt zero, adică $s_{lk}=0,(\forall)l>i$ şi $k\leq j$. Elementul s_{ij} se numeşte pivot.

Exemple de matrici scară pe linii:

$$S_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ S_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ S_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Exemple de matrici care **nu** sunt scară pe linii:*

$$S_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ S_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ S_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 Operaţii cu matrici

Adunarea matricelor. *Fie $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C}),A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$. Suma matricelor A şi B este matricea $A+B=C\in M_{m,n}(\mathbb{C}),C=(c_{i,j})$, unde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ pentru orice $(i,j)\in\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\}$*

Observaţia 1.2.1 *Două matrice se pot aduna numai dacă sunt de acelaşi tip.*

Exemplul 1.2.2 *Fie* $A, B \in M_{3,2}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *şi* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *atunci*

$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Înmulţirea matricelor cu scalari. *Fie matricea* $A \in M_{m,n}(C)$, $A = (a_{ij})$ *şi* λ *un număr real sau complex, numit scalar.*
λA *este matricea* $C \in M_{m,n}(C)$, $C = (c_{ij})$, *unde* $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ *pentru orice* $(i, j) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$.

Înmulţirea matricelor. *Fie* $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{ij})$ *şi* $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ $B = (b_{jk})$. *Produsul matricelor* A *şi* B *este matricea* $A \cdot B = C \in M_{m,p}(\mathbb{C}), C = (c_{i,k})$, *unde* $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}bjk$ *pentru orice* $(i, k) \in \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., p\}$

Exemplul 1.2.3 *Să se calculeze produsul matricelor* A *şi* B

$A \in M_{3,2}, B \in M_{2,3}$ *unde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *şi* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & -6 \\ 7 & 9 & -8 \\ 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.

Proprietaţile adunarii matricelor şi înmulţirii cu scalari

1. Adunarea matricelor este asociativă

$$(A + B) + C = A + (B + C), (\forall)A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

2. Adunarea matricelor este comutativă

$$A + B = B + A, (\forall)A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

3. În mulţimea $M_{m,n}(\mathbb{C})$ există elementul neutru faţă de adunare, O_{mn}

$$A + O_{mn} = O_{mn} + A, \quad (\forall)A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

4. Pentru orice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ există $(-A) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}.$$

5. Înmulţirea cu scalari este distributivă faţă de adunarea matricelor

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (\forall)A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \quad (\forall)\alpha \in \mathbb{C}$$

6. Înmulţirea cu scalari este distributivă faţă de adunarea scalarilor

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (\forall)A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \quad (\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

7.

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta)A \quad (\forall)A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \quad (\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

8.

$$1 \cdot A = A, \quad (\forall)A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

9. Înmulţirea matricelor este asociativă

$$(AB)C = A(BC), (\forall)A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

*10. Înmulţirea matricelor **nu** este comutativă.*

11. Înmulţirea matricelor este distributivă la stânga şi la dreapta faţă de adunare

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (\forall)A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B, C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$$

$$(B+C)A = BA + CA, \quad (\forall)A \in M_{n,p}(\mathbb{C}), B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$$

12. În mulţimea $M_n(\mathbb{C})$ există elementul neutru faţă de înmulţire, I_n

$$AI_n = I_nA = A, \quad (\forall)A \in M_n(\mathbb{C})$$

Definiţia 1.2.4 *O matrice pătratică A este inversabilă dacă există o matrice de acelaşi tip cu A, notată cu A^{-1} astfel încât $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$*

O matrice inversabilă se numeşte matrice nesingulară.

O matrice care nu are inversă se numeşte matrice singulară.

Propoziţia 1.2.5 *Matricea A este nesingulară dacă şi numai dacă $det(A) \neq 0$ şi $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}A^*$*

Proprietătile matricei inverse.

1.$(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemplul 1.2.6 *Să se studieze dacă matricea A este inversabilă iar în caz afirmativ să se calculeze inversa.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pas1. Se calculează $DetA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2-4-(-6-2-2) = 1,$

$DetA \neq 0$ *rezultă A inversabilă.*

Pas2. Se calculează matricea transpusă $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Pas3. Se calculează matricea adjunctă

$$A^* = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ - & 2 & 1 & 0 \\ - & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pas4. Se calculează A^{-1}. $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} A^* = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ - & 2 & 1 & 0 \\ - & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Definiţia 1.2.7 *Rangul matricei A este cel mai mare număr natural k pentru care există cel puţin un minor nenul de ordinul k al lui A.*

1.3 Sisteme de ecuaţii liniare. Reducerea unei matrici la forma scară

Problema fundamentală în algebra liniară este rezolvarea unui sistem de m ecuaţii cu n necunoscute $\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & + a_{m2}x_2 & + \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Acestui sistem i se asociază matricea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, *şi*

matricea extinsă $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc||c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$,

Definiţia 1.3.1 *Dacă mulţimea soluţiilor este mulţimea vidă sistemul se numeşte sistem* ***incompatibil.***

Dacă mulţimea soluţiilor are un singur element, în cazul $m = n$, *sistemul se numeşte sistem* ***compatibil determinat.***

Dacă mulţimea soluţiilor are o infinitate de elemente sistemul se numeşte sistem ***compatibil nedeterminat.***

Condiţia de compatibilitate a sistemelor este dată de teorema lui Kronecher-Capelli

Teorema 1.3.2 *Sistemul (1)este compatibil dacă şi numai dacă*

$$rangA = rang\overline{A}$$

Sistemele de ecuaţii liniare şi neomogene, compatibile, de dimensiuni reduse $m = n \in \{2, 3\}$ *se pot rezolva uşor utilizând:*

- metoda matricială : $X = A^{-1}B$;

- metoda Cramer.

Exemplul 1.3.3 *Să se rezolve sistemul* $\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{cases}$

i) utilizând metoda Cramer;

ii) Utilizând metoda matricială.

Soluţie 1.3.4 *i) Pas 1. Sistemului i se asociază matricea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Pas1. Se calculează $DetA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2-4-(-6-2-2) = 1,$

$DetA \neq 0$ *rezultă sistem* ***compatibil determinat.*** *Are o singură soluţie care se determină cu regula lui Cramer:*

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-4}{1} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-4}{1} = -4.$$

Unde $\Delta = DetA = 1,$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+2-4-(-6+2-2) = 1$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2-4-4-(4-4-2) = -4$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+2-4-(6+4-2) = -4$$

ii) Sistemul scris matricial are forma $AX = B$. *Rezultă* $X = A^{-1}B$;

Pas1. Se calculează $DetA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2-4-(-6-2-2) = 1,$

$DetA \neq 0$ *rezultă* A *inversabilă.*

Pas2. Se calculează matricea transpusă $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Pas3. Se calculează matricea adjunctă

$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pas4. Se calculează A^{-1}. $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} A^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Pas5. Se calculează $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

Metoda eliminării a lui Gauss a fost inspirată de faptul că cel mai simplu se rezolvă un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute de formă triunghiulară, prin metoda substituţiei inverse.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Metoda eliminării a lui Gauss constă în reducerea matricei oricărui sistem de m ecuaţii cu n necunoscute, printr-un şir de transformări elementare pe linie, la o formă cvasitriunghiulară, la forma scară.

Definiţia 1.3.5 *Două sisteme de m ecuaţii liniare cu n necunoscute se numesc echivalente dacă mulţimea soluţiilor este aceiaşi pentru ambele sisteme.*

Transformările elementare aplicate unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute pentru al transforma într-un sistem echivalent sunt:

1. *Interschimbarea a două ecuaţii.* $E_i \longleftrightarrow E_j$

$E_i: \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i$

2. *Multiplicarea unei ecuaţii cu un numar nenul,* $\alpha \neq 0$. $\alpha E_i \longrightarrow E_i$

3. *Adunarea la ecuaţia j a ecuaţiei i înmulţită cu un numar nenul.*

$$\alpha E_i + E_j \longrightarrow E_j.$$

Acestor transformări elementare asupra ecuaţilor unui sistem le corespund transformari elementare pe linie efectuate asupra matricei $A = (a_{ij})$, *numite transformări elementare pe linie.*

Definiţia 1.3.6 *Două matrici de acelaşi tip A şi A' se numesc matrici echivalente pe linie, dacă A' s-a obţinut din A printr-un şir de transformări elementare pe linie.*

Metoda eliminării a lui Gauss poate fi îmbunatăţită prin metoda Gauss-Jordan. Metoda Gauss-Jordan constă în reducerea matricei sistemului la forma scară redusă, S_0 *care are toţi pivoţii 1 iar restul elementelor zero.*

Aşadar, metoda Gauss-Jordan are în plus două caracteristici:

1. Pivotul fiecărei linii, prin transformări elementare pe linie, este forţat să devină 1. Dacă $s_{ij} \neq 0$ *este pivotul liniei* L_i *prin transformarea elementară* $\frac{1}{s_{ij}} L_i \longrightarrow L_i$ *devine 1;*

2. Prin transformări elementare pe linie se creează zerouri sub şi deasupra pivoţilor.

Transformări elementare pe linie

1.$L_i \longleftrightarrow L_j$

2. $\alpha L_i \longrightarrow L_i$

3. $\alpha L_i + L_j \longrightarrow L_j$.

Propoziţia 1.3.7 *1. Transformările elementare pe linie transformă determinanţi nenuli în determinanţi nenuli şi determinanţi nuli în determinanţi nuli*

2. Transformările elementare pe linie aplicate unei matrice A nu modifică rangul matricei, prin urmare rangul matricei A coincide cu rangul matricei scară S_A.

Propoziţia 1.3.8 *Rangul unei matricei în formă scară pe linie este egal cu numărul de pivoţi.*

Observaţia 1.3.9 *Datorită flexibilităţii în alegerea transformărilor elementare pe linie pentru reducerea matricei A la forma scară, elementele matricei S_A nu sunt unic determinate de elementele matricei A, dar numărul şi poziţia pivoţilor în S_A sunt unic determinate de elementele matricei A.*

Proprietăţi induse de transformari elementare

Propoziţia 1.3.10 *Fie A o matrice, S_A forma scară a matricei A şi S_0 forma scară redusă atunci:*

$rangA = rangS_A =$*număr pivoţi;*

Forma scară redusă a matricei A, S_0, este unică dar forma scară S_A în general nu este unică.

Propoziţia 1.3.11 *Dacă A este matrice pă tratică şi I matricea unitate de acelaşi tip cu matricea A şi se efectuează transformări elementare pe linie asupra matricei $[A|I]$ până la forma $[S_0|I']$ atunci:*

Dacă $S_0 = I$ rezultă că $I' = A^{-1}$

Dacă $S_0 \neq I$ rezultă că A este singulară.

Dacă A este matrice pătratică nesingulară se calculează produsul $A^{-1}B$ prin efectuarea de transformări elementare pe linie asupra matricei $[A|B]$ până se ajumge la forma $[I|C]$, unde $C = A^{-1}B$.

Dacă se aplică metoda Gauss-Jordan la un sistem compatibil determinat de n ecuatţii cu n necunoscute, la sfârşitul procedurii se obţine o matrice echivalentă cu matricea prelungită de forma $\overline{A} \sim \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_n \end{array}\right]$*. şi sistemul echivalent* $\begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{cases}$*, prin urmare soluţia sistemului este înregistrată în ultima coloană ce bordează matricea sistemului echivalent în formă triunghiulară.*

Metoda Gauss-Jordan necesitând mai multe operaţii decât metoda Gauss se foloseşte mai puţin în rezolvarea sistemelor dar este indicată în calculul inversei matricelor pătratice nesingulare.