Analiză Matematică

Curs 1: ŞIRURI DE NUMERE REALE

Definiţia 1: Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **monoton** dacă şi numai dacă $sgn\,(a_{n+1}-a_n)$ este constant oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &> 0\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow (a_n) \text{ este } \textbf{strict crescător} \\ a_{n+1}-a_n &< 0\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow (a_n) \text{ este } \textbf{strict descrescător} \end{aligned}$$

Definiţia 2: Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **mărginit** dacă şi numai dacă toţi termenii săi se găsesc într-un interval mărginit:

$$(\exists)\ M>0 \text{ a.î.}(\forall)\ n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leq M.$$

Definiţia 3: Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **convergent** cu limita $l\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este verificată condiţia:

$$(\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbb{N} \text{ a.î. } (\forall)\ n\geq n_\varepsilon,\ |a_n-l|<\varepsilon.$$

şi notăm în acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Teorema 1 (T. cleştelui): Fie (a_n), (b_n) şi (x_n) trei şiruri de numere reale ce îndeplinesc următoarele proprietăţi:

(i) şirurile (a_n), (b_n) sunt convergente şi au aceeaşi limită l :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

(ii) începând de la un rang n', toţi termenii şirului (x_n) verifică dubla inegalitate

$$a_n\leq x_n\leq b_n\ .$$

Atunci şirul (x_n) este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Consecinţa 1: Fie (a_n) şi (x_n) două şiruri de numere reale;

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ (\exists)\ l\in\mathbb{R} \text{ a.î. } |x_n-l|\ \leq |a_n| \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

Consecinţa 2: Fie (u_n) şi (v_n) două şiruri de numere reale primul mărginit iar cel de-al doilea convergent cu limita 0 atunci şirul produs $(u_n v_n)$ este convergent şi are deasemenea limita 0 :

$$\left.\begin{array}{c}(\exists)\ M\in\mathbb{R}_+ \text{ a.î. } |u_n|\le M\\ \lim\limits_{n\to\infty} v_n=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0\ .$$

Teorema 2 (**T. lui Weierstrass**):
Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Reciproca teoremei este falsă:

Şirul cu termenul general $\dfrac{(-1)^n}{n}$ este convergent (are limita 0) dar nu este monoton

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^n}{n}=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(n+1)\,n}.$$

Definiţia 4: Numărul λ (din $\overline{\mathbb{R}}$) este un **punct limită** al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă şi numai dacă acesta conţine un subşir convergent cu limita λ :

$$(\exists)\,(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subset(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\quad \text{a. î.}\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k}=\lambda\ .$$

Lema 1 (L. lui Cesaro):

Orice şir mărginit de numere reale conţine un subşir convergent.

Definiţia 5: Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **fundamental** (sau **şir Cauchy**) dacă şi numai dacă este verificată condiţia:

$$(\forall)\varepsilon>0,\ \ (\exists)\,n_\varepsilon\in\mathbb{N}\text{ a.î. }(\forall)n\ge n_\varepsilon,\ (\forall)p\in\mathbb{N},\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

Consecinţa 3: Orice şir convergent este fundamental.

Consecinţa 4: Orice şir fundamental este mărginit.

Teorema 3 (**completitudinea dreptei reale**):

Orice şir fundamental (şir Cauchy) de numere *reale* este convergent.

Limite remarcabile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ 1, & r = 0 \\ \infty, & r < 0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p\right) = \begin{cases} -\infty, & a_0 < 0 \\ +\infty, & a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \infty \cdot sgn\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right), & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ \text{integrabilă} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

Teorema 4 (T. Cesaro-Stolz): Fie (a_n) , (b_n) două şiruri de numere reale satisfăcând condiţiile:

(i) şirul (b_n) este strict crescător şi nemărginit;

(ii) raportul $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ are limită (finită sau infinită):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l\ .$$

Atunci şirul cu termenul general $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are limită şi în plus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l\ .$$

Lector dr. mat. **Hedrea Ioan Ciprian**
Departamentul de Matematică
Universitatea Politehnica Timişoara