① $\forall y \in [0;1]: sgn(y) = 1$

Для любого y, принадлежащего сегменту [0;1] верно, что сигнум от y равняется 1

Решение:

$$sgn(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y>0 \\ 0 & \text{if } y=0 \\ -1 & \text{if } y<0 \end{cases}$$

Высказывание является ложным, т.к. $sgn(0) = 0$

Отрицание: $\exists y \in [0;1]: sgn(y) \neq 1$ – существует y в сегменте [0;1], что сигнум не равен 1. Утверждение истинно, т.к. $sgn(0) \neq 1$.

Следовательно, текущее высказывание ложное

② $\forall n \in N>2 : \exists x, y, z \in N : x^n = y^n + z^n$

Для любого n, принадлежащего множеству натуральных чисел, и больше 2, существует x, y, z, принадлежащие множеству натуральных чисел, такие что $x^n = y^n + z^n$

Решение:

Великая теорема Ферма утверждает, что $y^n + z^n = x^n$ не имеет решений для $n \in N>2$ при $x, y, z \in N$ => высказывание ложно.

Отрицание:

$\exists n \in N>2 : \forall x, y, z \in N : x^n \neq y^n + z^n$

Реализация отрицание (существует n, принадлежащее N, такое что для любых $x, y, z \in N$ справедливо $x^n \neq y^n + z^n$):

$1^3 \neq 2^3 + 3^3$

Следовательно, данное высказывание ложное

③ $\forall x \in R \; \exists X \in R : X > x$

Для любого x, принадлежащего множеству вещественных чисел, существует X, принадлежащее множеству вещественных чисел, такое, что $X > x$

Решение:

Предположим, что $X = 2$, а $x = 1$,

Тогда

$X - 2 > 1$. Выражение верно =>

Следовательно, утверждение истинно

(4) $\forall x \in C\ \nexists y \in C: x>y \,\|\, x<y$

Для всех x, принадлежащих множеству комплексных чисел не существует y, принадлежащего множеству комплексных чисел, такое что x>y или x<y

Решение:

Т.к. комплексные числа не упорядочены, операции сравнения к ним неприменимы =>

У. Текущее высказывание истинно

5) $\forall y \in [0; \frac{\pi}{2}]\ \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y+\varepsilon)$

Для любого y, принадлежащего сегменту $[0; \frac{\pi}{2}]$, существует $\varepsilon > 0$, такое что $\sin y < \sin(y+\varepsilon)$

Решение:

~~$y = 0$, тогда $\sin(0)$~~

$y = \frac{\pi}{2}$, тогда $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ - максимальное значение функции, при котором высказывание $\sin(\frac{\pi}{2}) < \sin(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)$ является ложным.

Отрицание:

$\exists y \in [0; \frac{\pi}{2}]\ \forall \varepsilon > 0 : \sin y \geq \sin(y+\varepsilon)$

Существует y, принадлежащий сегменту $[0; \frac{\pi}{2}]$ для любого $\varepsilon > 0$, такой, что $\sin y \geq \sin(y+\varepsilon)$.

Реализация отрицания: $y = \frac{\pi}{2}$; $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2}) \geq \sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow 1 \geq 0 \Rightarrow$

Текущее высказывание ложно

⑥ $\forall y \in [0; \pi]\ \exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y+\varepsilon)$

Для любого y, принадлежащему сегменту $[0; \pi]$ существует $\varepsilon > 0$. Такое, что $\cos y > \cos(y+\varepsilon)$

Решение:

пусть $y = 0$, тогда $\cos 0 = 1$, а $\cos(0+\frac{\pi}{2}) = 0$

а $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$\cos(0) > \cos(0 + \frac{\pi}{2})$

Следовательно, текущее высказывание истинно

⑦ $\exists x : \notin \{N, Z, Q, R, C\}$

Существует такое x, что не принадлежит множеству множеств (т.е. ни одному множеству) N, Z, Q, R, C

Решение:

Т.к. все перечисленные множества являются подмножествами универсума, а перечисленные множества являются подмножествами C, следовательно

Высказывание истинно для $\forall x \in C^c$