

UNIVERSITÉ LAVAL
ÉCOLE D'ACTUARIAT

ACT 2003
Notes de cours
Modèles linéaires en actuariat

David Beauchemin

Automne 2017

© 2017 David Beauchemin



Cette création est mise à disposition selon le contrat [Attribution-Partage dans les mêmes conditions 4.0 International](#) de Creative Commons. En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- **partager** — reproduire, distribuer et communiquer l’œuvre ;
- **remixer** — adapter l’œuvre ;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes :



Attribution — Vous devez créditer l’œuvre, intégrer un lien vers le contrat et indiquer si des modifications ont été effectuées à l’œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens possibles, mais vous ne pouvez suggérer que l’offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.



Partage dans les mêmes conditions — Dans le cas où vous modifiez, transformez ou créez à partir du matériel composant l’œuvre originale, vous devez diffuser l’œuvre modifiée dans les mêmes conditions, c’est-à-dire avec le même contrat avec lequel l’œuvre originale a été diffusée.

Résumé

abstrat

Remerciements

blah blah

Table des matières

1	Introduction	3
2	Régression linéaire simple	4
2.1	Introduction	4
2.1.1	Régression linéaire simple	5
2.1.2	Régression linéaire multiple	5
2.1.3	Régression exponentielle	7
2.1.4	Régression quadratique	7
2.2	Le modèle de régression linéaire simple	10
2.2.1	Coefficients de régression	12
2.2.2	Caractéristiques du terme d'erreur	19
2.3	Propriétés de l'estimateur des moindres carrés (EMC)	20
2.3.1	Estimateur sans biais	20
2.3.2	Variances et covariances des estimateurs	21
2.3.3	Optimalité	24
2.4	Régression passant par l'origine	24
2.5	Analyse de la variance	26
2.5.1	Notions préliminaires : Somme des carrés	27
2.5.2	Notions préliminaires : Degrés de liberté	30
2.5.3	Tableau d'analyse de la variance	31
2.6	Intervalles de confiance (I.C.) et test d'hypothèses	32
2.6.1	Distribution des variables aléatoires	32
2.6.2	Intervalle de confiance pour β_1	33
2.6.3	Intervalle de confiance pour β_0	34
2.6.4	Test d'hypothèses sur les paramètres	34
2.6.5	Test de la validité <i>globale</i> de la régression	40
2.7	Prévisions et intervalles de confiance	41
2.7.1	I.C. pour la prévision de type I (Valeur moyenne)	43
2.7.2	I.C. pour la prévision de type II (Vraie valeur)	45
3	Régression multiple	48

Chapitre 1

Introduction

L'établissement de prévisions joue un rôle central dans notre vie de tous les jours (prévisions météorologiques, horoscope, etc.), et plus particulièrement dans celle des actuaires.

Objectifs de la régression

Régulièrement en actuariat, on se questionne sur les effets de différentes variables sur d'autres. Par exemple,

- Quel est l'effet de l'âge sur la fréquence des sinistres automobiles ?
- Quel est l'effet du sexe sur la mortalité ?

On cherche à étudier et déterminer les relations entre des variables mesurables à partir de données.

Deux grandes classes de variables mesurables :

- Qualitatives : basées sur des opinions et/ou des intuitions.
- Quantitatives : basées sur des observations, un modèle et des arguments mathématiques.

Deux *grandes étapes* pour établir des prévisions quantitatives

1. Bâtir le modèle et estimer les paramètres :
ex : $F = M \times a$ Qui représente un modèle déterministe
ex : $Y = 3 \times X + 6 + \epsilon_t$; où $\epsilon_t \sim N(0, 10)$ Qui représente un modèle probabiliste
2. Calculer les prévisions à partir du modèle.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles probabilistes linéaires seront étudiés.

Chapitre 2

Régression linéaire simple

2.1 Introduction

De façon générale, en régression, nous avons :

Y	Variable dépendante, ou de réponse	Output
X_1, X_2, \dots, X_n	Soit n variables indépendantes ou explicatives, ou exogènes ¹	Input
$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$	Les paramètres à estimer	

Voici une illustration du concept de régression linéaire

Étape 1

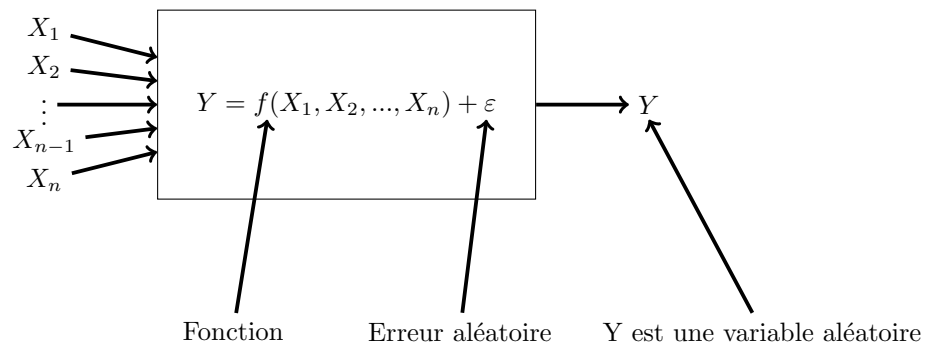
Observation
des X_i

Étape 2

Modèle de ré-
gression

Étape 3

Prévision de Y



1. Les variables X_i sont indépendantes par rapport à y , mais pas nécessairement entre elles.

2.1.1 Regression linéaire simple

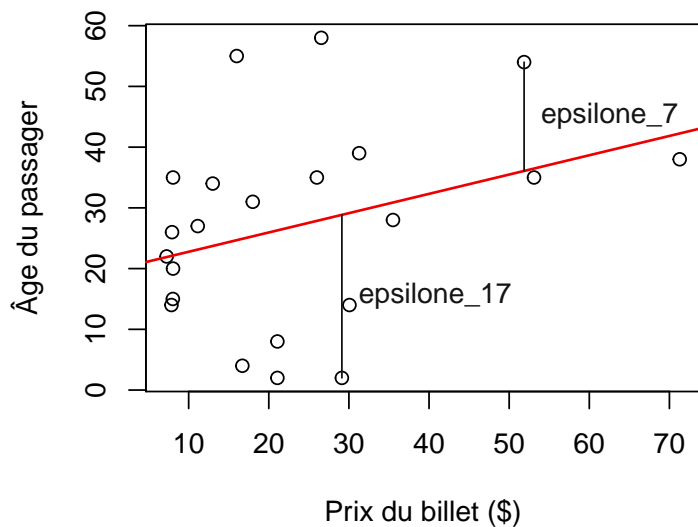
On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet à l'aide du modèle linéaire suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \varepsilon$$

↑
↗
↖

Âge du passager
Prix du billet
Erreur aléatoire

Âge prédit des passagers du Titanic

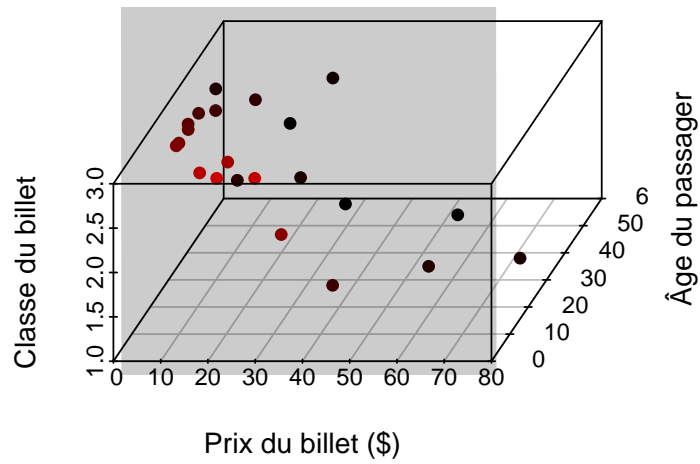


2.1.2 Régression linéaire multiple

On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet et son sexe à l'aide du modèle linéaire suivant,

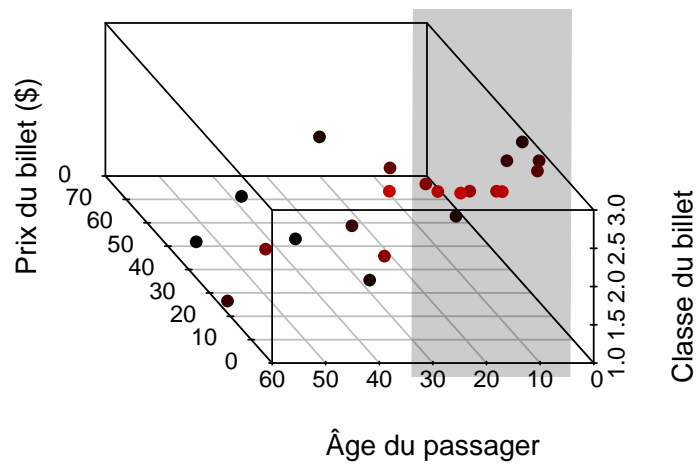
The diagram illustrates a linear regression model for predicting flight price. At the top, the equation is given as $Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$. Below this, four labels are connected to the equation by arrows: 'Âge du passager' points to β_1 , 'Prix du billet' points to β_2 , 'Sexe du passager' points to β_0 , and 'Erreur aléatoire' points to ε .

Âge prédit des passagers du Titanic



Voici la régression sous un autre angle, on voit la surface plane de régression.

Âge prédit des passagers du Titanic



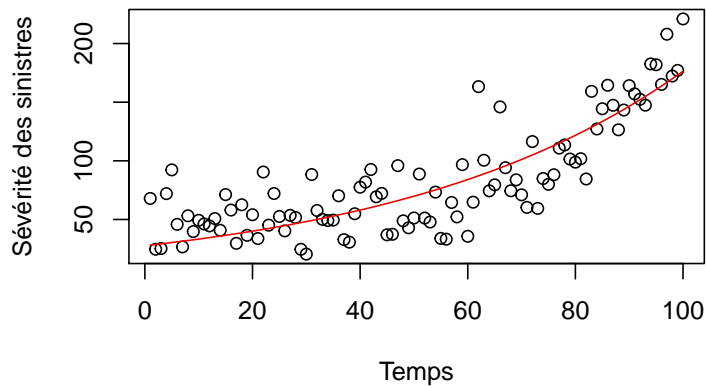
2.1.3 Régression exponentielle

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps à l'aide du modèle exponentiel suivant,

$$Y = \beta_0 \times e^{\beta_1 \times X} \times \varepsilon$$

Sévérité du sinistre Temps Erreur aléatoire

Modèle de prédiction de la sévérité des sinistres



Note

On remarque que la régression exponentielle est similaire à une régression linéaire simple.

$$\ln(Y) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \times X + \ln(\varepsilon)$$
$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 \times X + \varepsilon^*$$

Qu'on appelle aussi une régression multiplicative ou log linéaire.

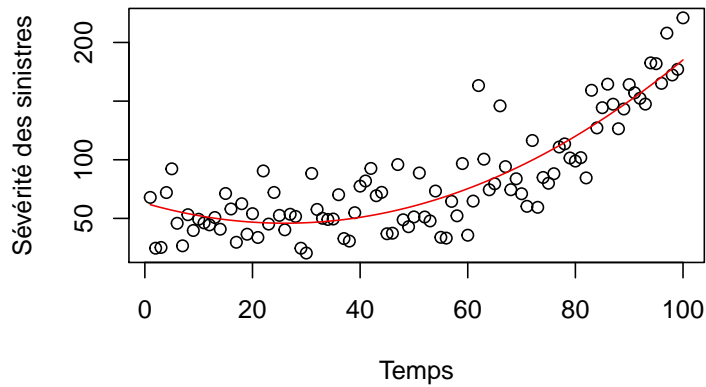
2.1.4 Régression quadratique

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps et du temps au carré à l'aide du modèle quadratique suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \beta_2 \times X^2 + \varepsilon$$

\uparrow Sévérité du sinistre \nwarrow Temps \nearrow Erreur aléatoire

Modèle de prédiction de la sévérité des sinistres



Note

On remarque que la régression quadratique est similaire à une régression linéaire multiple. En posant $X_1 = X$ et $X_2 = X^2$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Soit une régression linéaire multiple.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles linéaires seront à l'étude pour les différentes raisons suivantes

- Plus simples
- Plusieurs modèles peuvent se ramener à un modèle linéaire simple ou multiple. (voir [2.1.3](#) et [2.1.4](#))
- Constituent souvent une très bonne approximation de la réalité qui peut être très complexe, telle que l'assurance.
- Se généralisent facilement, tels que les *Generalized Linear Models*.

Le principal problème de la modélisation linéaire est de trouver les différents paramètres $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ de telle sorte que

$$\varepsilon = Y - f(X_1, \dots, X_n; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \quad (2.1)$$

soit minimisé.

Il existe plusieurs méthodes pour calcul l'erreur. Soit les erreurs suivantes :

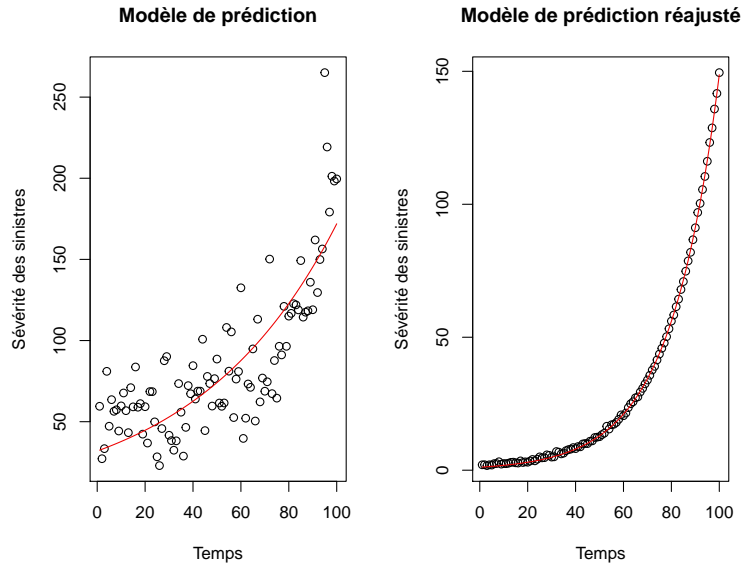
- Erreur totale
- Erreur absolue
- Erreur quadratique

Quel type d'erreur est suffisante pour déterminer ε ?

2.1.4.1 Erreur totale

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t = \sum_{t=1}^n \left(Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right) \quad (2.2)$$

- Facile à mettre à 0
- Manque de fiabilité à cause de la mise à zéro



2.1.4.2 Erreur absolue

$$\sum_{t=1}^n |\varepsilon_t| = \sum_{t=1}^n \left| Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right| \quad (2.3)$$

- Très robuste
- Très compliquée mathématiquement, pour minimiser $\sum_{t=1}^n |\varepsilon_t|$ cela implique de dériver la fonction.

2.1.4.3 Erreur quadratique

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n \left[Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right]^2 \quad (2.4)$$

- Mathématiquement plus simple que l'erreur quadratique.
- Donne beaucoup de poids aux grandes erreurs

L'erreur quadratique semble donc l'option la plus simple due à la facilité mathématique et sa fiabilité.

2.2 Le modèle de régression linéaire simple

Le modèle de régression linéaire simple tente d'expliquer le mieux possible la variable **dépendante**² Y à l'aide d'une variable **indépendante**³ X .

Si on dispose de n paires d'observations $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ alors, le modèle s'exprime comme suit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \times X_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Où β_0 est le paramètre associé à l'ordonnée à l'origine du modèle ; β_1 est le paramètre associé à la pente de la droite ; et ε est le terme d'erreur.

Quelques remarques sur le modèle

Dans l'équation 2.5 du modèle, on remarque que :

- Les observations de Y_i sont tirées d'une variable aléatoire ;
- Les observations de X_i sont considérées comme des valeurs connues et non aléatoires ;
- Les paramètres β_0 et β_1 sont inconnus au départ. Ils doivent être estimés ;
- ε_i sont des réalisations inconnues d'une variable aléatoire.

Exemple d'un modèle de régression

X_t : Nombre d'années de scolarité de l'actuaire t

Y_t : Salaire de l'actuaire t

2. On appelle parfois la variable dépendante une variable **endogène**. Qui s'interprète comme étant une variable qui est due à une cause interne.

3. On appelle parfois les variables dépendantes des variables **exogène**. Qui s'interprète comme étant extérieur à un système.

Comment résoudre le modèle pour prédire les salaires des actuaires en fonction du nombre d'années de scolarité?

Raisonnement :

- Pour $X_t = 0$; on a $Y_t = \beta_0$. Autrement dit, le salaire avec un nombre d'années de scolarité est *en moyenne* de β_0 . Par exemple, β_0 serait le salaire moyen d'un stagiaire.
- Par la suite, pour chaque année additionnelle de scolarité, le salaire augmente *en moyenne* de β_1 unités.

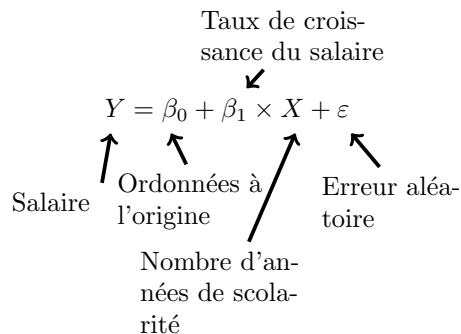
Ainsi, *en moyenne* on a

$$E[Y_t|X_t] = \beta_0 + \beta_1 \times X_t$$

Habituellement, la relation n'est pas parfaitement exacte dans la réalité. On se retrouve ainsi avec une *différence* dans notre variable exogène prédite. L'erreur est notée ε_t et est telle que mentionnée plus tôt, assumée aléatoire.

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= Y_t - E[Y_t|X_t] \\ &= Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t)\end{aligned}$$

En réorganisant, on retrouve l'équation 2.5.



On doit maintenant trouver les paramètres β_0 et β_1 de manière à minimiser l'erreur ε_t .

Si ε_t est minimal, cela veut dire que $Y_t \approx \beta_0 + \beta_1 \times X_t$. Ce qui signifie que la droite de régression est une bonne approximation de Y_t .

i

En résumé

En résumé, on cherche à minimiser nos résidus en optimisant les paramètres β_i .

2.2.1 Coefficients de régression

Les paramètres β_0 et β_1 sont déterminés en minimisant l'erreur quadratique à l'aide de la méthode des moindres carrés.

$$\begin{aligned} S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \\ &= \sum_{t=1}^n (Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t))^2 \\ &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta_0 - \beta_1 \times X_t)^2 \end{aligned}$$

Où $S(\psi)$ peut être considérée comme une mesure de la *distance* entre les données observées et le modèle théorique qui prédit ces données⁴.

Afin de minimiser la fonction $S(\beta_0, \beta_1)$, on dérive la fonction partiellement en fonction de chacun des paramètres.

Minimisation de β_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_0} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t)^2 &= 0 \\ -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t) &= 0 \\ \sum_{t=1}^n Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

4. Pour de plus amples informations sur la méthode des moindres carrés et la fonction de *distance*, la page [Wikipédia](#) contient une bonne explication sur le sujet.

Minimisation de β_1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_1} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t)^2 &= 0 \\
-2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t) \times X_t &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

À l'aide des équations 2.6 et 2.7, on peut trouver les deux inconnus β_0 et β_1 .
À partir de 2.6 :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= n \times \hat{\beta}_0 \\
\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{n} &= \hat{\beta}_0 \\
\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}} &
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Et à partir de 2.7 :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t &= \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 \\
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

On utilise l'équation 2.8 de $\hat{\beta}_0$ avec l'équation 2.9 de $\hat{\beta}_1$, on développe l'équation résultante afin d'isoler $\hat{\beta}_1$.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \sum_{t=1}^n X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \times n\bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n\bar{Y}\bar{X} + \hat{\beta}_1 \times \bar{X}^2 \times n}{\sum_{t=1}^n X_t^2}\end{aligned}$$

En isolant $\hat{\beta}_1$, on obtient la définition suivante

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n\bar{Y}\bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2} \quad (2.10)$$

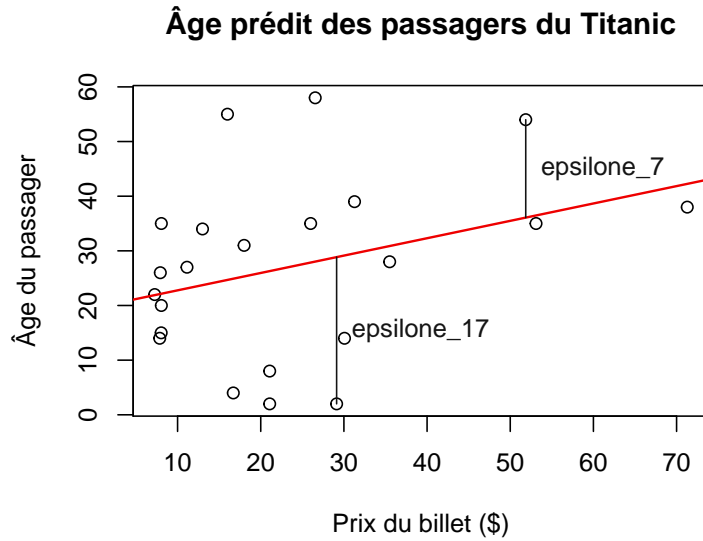
Remarques

1. On note $\hat{\varepsilon}_t$ les résidus générés par le modèle estimé :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_t &= Y_t - \hat{Y}_t \\ \hat{\varepsilon}_t &= Y_t - (\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) ; \text{ pour } t = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

Si on illustre graphiquement les résidus, il s'agit du segment le plus court entre la droite de régression et la donnée observée.

Si on reprend le graphique de la section 2.1.1, on observe facilement les résidus sur cette représentation graphique :



2. Le *centre de gravité*⁵ des données (\bar{X}, \bar{Y}) se trouvent exactement sur la droite de régression.

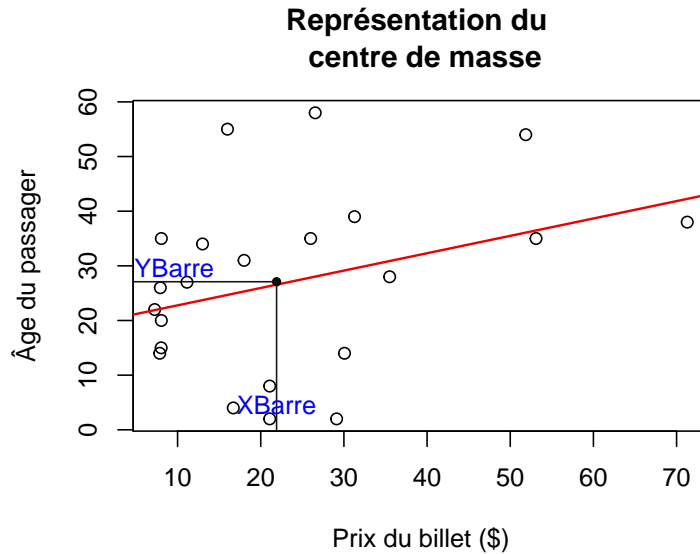
On peut facilement effectuer cette preuve à partir de l'équation 2.8,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ \bar{Y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} + 0\end{aligned}$$

On note ainsi une absence de résidus pour le centre de masse.

Si on reprend (encore) le graphique de la section 2.1.1, on observe facilement le centre de masse sur le graphique.

5. Qu'on appelle parfois le centre de masse.



3. La somme des résidus de tout modèle de régression linéaire est nulle.

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t &= \sum_{t=1}^n (Y_t - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t)) \\
 &\stackrel{2.8}{=} \sum_{t=1}^n (Y_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X})) \\
 &= \sum_{t=1}^n Y_t - \sum_{t=1}^n \bar{Y} + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n \bar{X} - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t \\
 &= n\bar{Y} - n\bar{Y} + \hat{\beta}_1 + n\bar{X} - \hat{\beta}_1 + n\bar{X} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Notation

Afin de faciliter l'écriture, on intègre la notation suivante ; S_{xx} et S_{xy} . Les expressions précédentes sont appelées respectivement : la somme des carrés corrigée de x et la somme des produits croisés corrigée de x et de y . Voici le développement pour

S_{xx} ,

$$\begin{aligned}
S_{xx} &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \\
&= \sum_{t=1}^n (X_t^2 - 2X_t\bar{X} + \bar{X}^2) \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - 2\bar{X} \sum_{t=1}^n X_t + n\bar{X}^2 \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - 2\bar{X}n\bar{X} + n\bar{X}^2 \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2
\end{aligned}$$

On effectue le même type de développement pour S_{xy} ,

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) \\
&\vdots \\
&= \sum_{t=1}^n X_t Y_t - n\bar{X}\bar{Y}
\end{aligned}$$

À l'aide des sommes de carrés corrigés, on peut réécrire la définition de $\hat{\beta}_1$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}} \tag{2.11}$$

Exemple

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

- On dispose des cinq observations suivantes du couple (X_t, Y_t) dans le tableau de gauche ainsi que les éléments calculés nécessaires pour trouver les paramètres dans le tableau de droite.

t	X_t	Y_t
1	2	2
2	3	5
3	6	3
4	9	6
5	12	5
Totaux :	32	21

t	X_t^2	$X_t Y_t$
1	4	4
2	9	15
3	36	18
4	81	54
5	144	60
Totaux :	274	151

À partir des définitions 2.8 et 2.10, on trouve facilement la valeur de $\hat{\beta}_0$ et de $\hat{\beta}_1$.


$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n \bar{Y} \bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 - n \bar{X}^2} \\
&= \frac{151 - (5)(\frac{21}{5})(\frac{32}{5})}{274 - (5)(\frac{32}{5})^2} \\
&= \frac{83}{346} \\
&\approx 0.2399
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\
&= \frac{21}{5} - \left(\frac{83}{346}\right) \times \left(\frac{32}{5}\right) \\
&\approx 2.6647
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le modèle de régression suivant :

$$Y_t = 2.6647 + 0.2399X_t + \varepsilon_t$$

t	$Y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$	$\hat{\varepsilon}_t$
1	3.1445	-1.1445
2	3.3844	1.6156
3	4.1041	-1.1041
4	4.8238	1.1762
5	5.5435	-0.5435

$$\sum_{t=1}^5 \varepsilon_t \approx -0.0003$$


Exécution en R

```
3 > # Dataset
4 > x <- c(2,3,6,9,12); y <- c(2,5,3,6,5)
5 > # Estimations des parametres
6 > reg <- lm(y ~ x)
7 > # Resume de l'estimation
8 > summary(reg)
9 > # Valeurs de Yt
10 > fitted(reg)
11 > # Residus
12 > residuals(reg)
```

Listing 2.1 – Code source en R pour l'exemple



Astuce calculatrice

La calculatrice TI-30XS Multiview permet de créer un tableau de donnée et de sortir rapidement et facilement différentes informations sur une régression à partir des données.

Tel que :

- \bar{X} et \bar{Y} ;
- $\sum_{t=1}^n X_t$, $\sum_{t=1}^n X_t^2$, $\sum_{t=1}^n Y_t$, $\sum_{t=1}^n Y_t^2$ et $\sum_{t=1}^n X_t Y_t$;
- $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$

Pour de plus ample information, consulter le [guide](#) sur les calculatrices.

2.2.2 Caractéristiques du terme d'erreur

On rappelle que l'équation du modèle de régression correspond à

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \times X_t + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

De plus, on sait qu'il s'agit des valeurs moyennes de Y_t en sachant X_t , soit

$$Y_t = E[Y_t|X_t] + \varepsilon_t$$

On peut ainsi formuler les trois postulats⁶ suivants,

6. Le [postulat](#) est un principe non démontré, mais utilisé dans la construction d'une théorie mathématique.

1. $E[\varepsilon_t] = 0$, par définition pour que $E[Y_t] = E[Y_t|X_t]$. Il s'agit de l'hypothèse de linéarité de la variable explicative. On dit qu'elle est exogène si elle n'est pas corrélée au terme d'erreur.
2. $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, la variance des termes d'erreurs est supposée constante. Il s'agit de l'hypothèse d'homoscédasticité.
3. $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, pour $t \neq s$, il n'y a pas de corrélation entre les termes d'erreurs. Il s'agit de l'hypothèse d'indépendance des erreurs.

i

Quatrième postulat

Les hypothèses de linéarité et d'homoscédasticité sont très intéressantes, si on observe leurs définitions ensemble on remarque qu'il s'agit d'une distribution avec une espérance nulle et une variabilité supposée constante. Ce qui nous amène à une quatrième hypothèse, les résidus sont distribués selon une loi normale.

$$\hat{\varepsilon}_t|x_i \sim N(0, \sigma^2)$$

2.3 Propriétés de l'estimateur des moindres carrés (EMC)

2.3.1 Estimateur sans biais

On rappelle qu'un estimateur est dit sans biais lorsque son espérance est égale à la valeur vraie du paramètre, soit $E[\hat{\theta}] = \theta \Leftrightarrow b(\hat{\theta}) = 0$ ⁷.

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_1] &= E\left[\frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right] \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})E[Y_t - \bar{Y}]}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(E[Y_t] - E[\bar{Y}])}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

7. Notes de cours ACT-2000, chapitre 3, Thomas Landry, Hiver 2017.

De l'équation 2.5, et avec le postulat 1, on sait que,

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 \times X_t + \varepsilon_t \\ E[Y_t] &= E[\beta_0 + \beta_1 \times X_t] + E[\varepsilon_t] \\ &\stackrel{1}{=} \beta_0 + \beta_1 \times X_t + 0 \end{aligned}$$

On applique le même raisonnement pour l'espérance de \bar{Y} .

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_1] &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(E[Y_t] - E[\bar{Y}])}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(\beta_0 + \beta_1 \times X_t - \beta_0 - \beta_1 \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})\beta_1(X_t - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\ &= \beta_1 \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\ E[\hat{\beta}_1] &= \beta_1 \end{aligned}$$

Par conséquent,

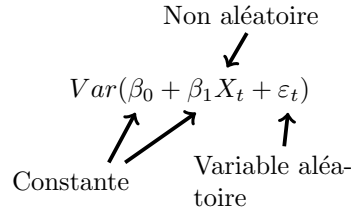
$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_0] &= E[\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}] \\ &= E[\bar{Y}] - \bar{X}E[\hat{\beta}_1] \\ &= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} - \bar{X}\beta_1 \\ E[\hat{\beta}_0] &= \beta_0 \end{aligned}$$

On peut ainsi conclure que les deux estimateurs des paramètres sont sans biais.

2.3.2 Variances et covariances des estimateurs

On s'intéresse aux variances et aux covariances des estimateurs, cette deuxième propriété ainsi que la première nous permettra de déduire une conclusion en lien avec le quatrième postulat.

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_1) &= Var\left(\frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right) \\
&= \frac{Var\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})Y_t - \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})\bar{Y}\right)}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2} \\
&= \frac{Var\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})Y_t\right) + Var\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})\bar{Y}\right)}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 Var(Y_t) + Var(\bar{Y}(n\bar{X} - n\bar{X}))}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 Var(\beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t) + 0}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 Var(\varepsilon_t)}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2} \\
&\stackrel{2}{=} \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \sigma^2}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2}
\end{aligned}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

(2.12)

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_0) &= Var(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\
&= Var(\bar{Y}) + Var(\hat{\beta}_1 \bar{X}) - 2Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\
&= Var\left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n}\right) + \bar{X}^2 Var(\hat{\beta}_1) - 2\bar{X} Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) \\
&= \frac{n \times Var(Y_t)}{n^2} + \bar{X}^2 \left(\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right) - 2\bar{X} Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) &= Cov\left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n}, \frac{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})(Y_s - \bar{Y})}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2}\right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} Cov\left(\sum_{t=1}^n Y_t, \sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X}) Y_s - \bar{Y} \sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})\right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X}) Cov(Y_t, Y_s) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \left(\sum_{t=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ :t \neq s}}^n (X_s - \bar{X}) \times 0 + \sum_{t=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ :t=s}}^n \sigma^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \sigma^2 \left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \sigma^2 \left(\sum_{t=1}^n (n\bar{X} - n\bar{X}) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 \left(\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)} \quad (2.13)$$

Finalement, pour la covariance entre $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= Cov(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}, \hat{\beta}_1) \\
&= Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) - \bar{X} Var(\hat{\beta}_1) \\
&= 0 - \bar{X} \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\bar{X} \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad (2.14)$$

i

Résumé des propriétés des estimateurs

Les équations 2.13 et 2.12 ainsi que le postulat 4 à la section 2.2.2 nous permettent de conclure que

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &\sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 \left(\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)\right) \\ \hat{\beta}_1 &\sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right) \end{aligned}$$

2.3.3 Optimalité

Le théorème de Gauss-Markor établit que l'estimateur des moindres carrés est l'estimateur non biaisé à variance minimale.

Notions importantes de la preuve :

1. Considérer l'estimateur $\Theta^* = \sum_{t=1}^n C_t \times Y_t$
2. Minimiser $\text{Var}(\Theta^*)$ sous la contrainte que $E[\Theta^*] = \beta$; où

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

2.4 Régression passant par l'origine

Dans certaines situations, il est possible que l'on souhaite forcer la droite de régression à passer par l'origine. Voici un exemple de situation où il est plus logique de forcer le modèle,

X_t : Nombre de Km parcourut

Y_t : Consommation d'essence en L d'une voituret

Il est plus logique d'avoir une consommation de 0 L pour une distance de 0 Km.

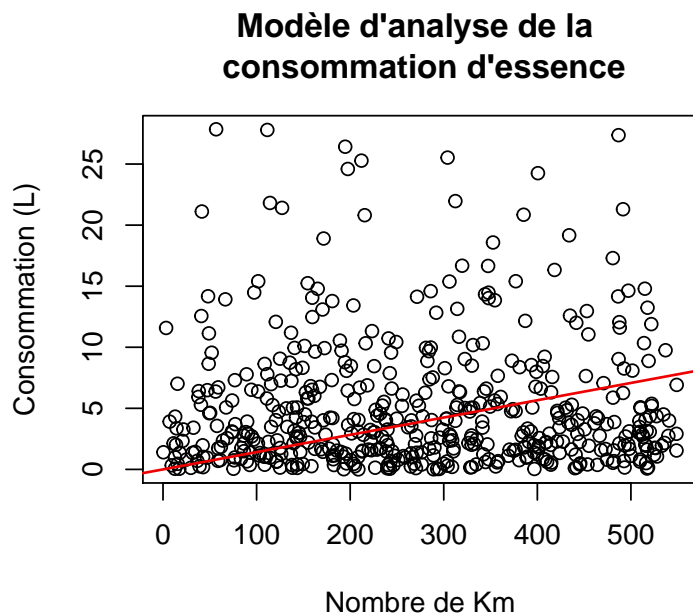
Dans ce cas, on peut postuler le modèle suivant :

$$Y_t = \beta \times X_t + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

On peut démontrer par le même raisonnement qu'à la section 2.2.1 que de minimisation du paramètre β correspond à :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \quad (2.16)$$

On reprend l'exemple énoncé plus haut, voici le modèle représenté graphiquement :



Code R

Voici le code R permettant de créer un modèle linéaire simple avec une droite passant par l'origine.

```
3 > # dataset
4 > # X Km parcourus
5 > # Y consommation essence en L
6 > simul <- 500
7 > alpha <- 1
8 > beta <- alpha/5.1
9 > y <- rgamma(simul, alpha, beta)
10 > x <- runif(simul, 0, 550)
```

```

11 > # Estimation de beta
12 > reg <- lm(y ~ x - 1)
13 > plot(x, y, xlab = "Nombre de Km", ylab = "Consommation (L)",
14 >      main= "Modele d'analyse de la \n consommation d'essence")
14 > abline(reg, col="red2", lwd = 1.5)

```

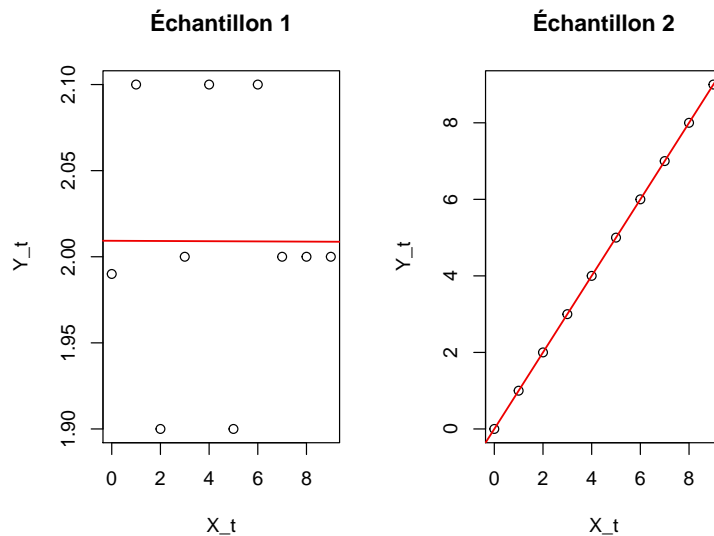
Listing 2.2 – Code source en R pour l'exemple

2.5 Analyse de la variance

Un tableau d'analyse de la variance permet d'évaluer la qualité de l'ajustement du modèle aux observations.

Idée

1. Si on décide de modéliser Y_t sans la régression, autrement dit de l'analyse statistique⁸, alors Y est vue comme une variable aléatoire avec une certaine variance, soit $Var(y)$.
2. En utilisant la régression pour modéliser Y_t en fonction de X_t une partie de la variance de Y_t est *expliquée* par la variance de X_t , alors que l'autre partie reste *inexpliquée*.
3. L'utilité de la régression est de trouver la proportion de la variance de Y_t qui est expliquée par la variance de X_t .



8. Cours ACT-2000

On voit que les résidus de l'échantillon 1 sont très mal expliqués par notre modèle, les résidus sont très élevés. Tandis que les résidus de l'échantillon 2 sont parfaitement expliqués par notre modèle.

\$residusMauvaisFit


1	2	3	4	5	6	7	8
2.009273	2.009212	2.009152	2.009091	2.009030	2.008970	2.008909	2.008848
9	10						
2.008788	2.008727						


\$residusBonFit

1	2	3	4	5
-2.580003e-16	1.000000e+00	2.000000e+00	3.000000e+00	4.000000e+00
6	7	8	9	10
5.000000e+00	6.000000e+00	7.000000e+00	8.000000e+00	9.000000e+00

Il y a peu d'intérêt de construire un modèle avec les données de l'échantillon 1 car,

$$Var(Y_t) \approx 0\% \times Var(X_t) + 100\% \times Var(\varepsilon_t)$$


 Expliquée


 Inexpliquée

Il est préférable dans ce cas-ci d'utiliser les modèles statistiques vus dans le cours ACT-2000.

Par contre, il y a un intérêt à utiliser un modèle avec les données de l'échantillon 2 car,

$$Var(Y_t) = Var(X_t)$$

Autrement dit, la variable X explique bien la variable Y.

Note

Noter que les modèles précédents ont été ajustés pour mieux représenter le concept, un modèle avec un fit parfait n'est pas réaliste dans la réalité.

2.5.1 Notions préliminaires : Somme des carrés

La variance totale de Y_t est décomposable sous le modèle de régression linéaire, cette décomposition permet d'analyser l'ajustement du modèle. On la représente ainsi :

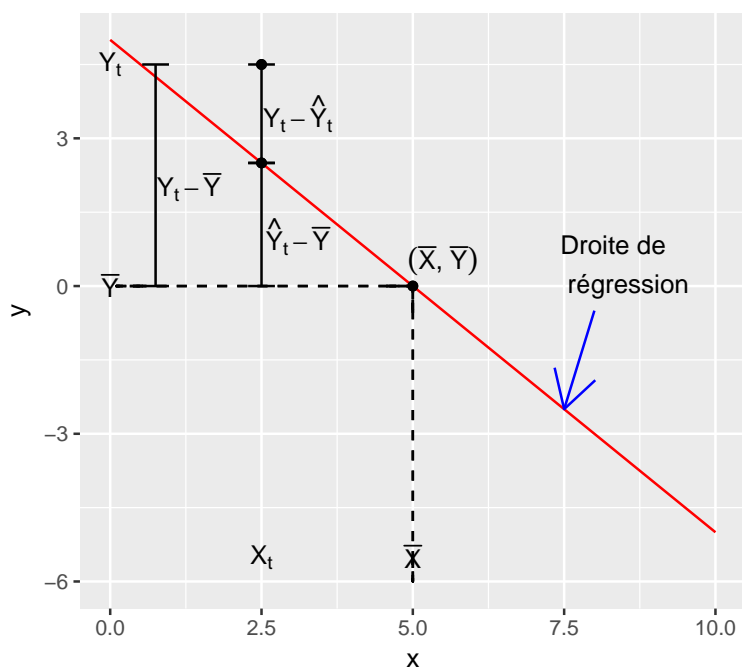
$$SST = \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2$$

Décomposition

$$(Y_t - \bar{Y}) = Y_t - \hat{Y}_t + \hat{Y}_t - \bar{Y}$$

$$(Y_t - \bar{Y}) = (Y_t - \hat{Y}_t) + (\hat{Y}_t - \bar{Y})$$

$\underbrace{(Y_t - \bar{Y}) =}$	$\underbrace{(Y_t - \hat{Y}_t) +}$	$\underbrace{(\hat{Y}_t - \bar{Y})}$
Variation totale de Y_t	Variation de Y_t Variation expliquée par la régression	Résidu Variation inexpliquée par la régression



Par conséquent, on a que

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{t=1}^n \left[(\hat{Y}_t - \bar{Y}) + (Y_t - \hat{Y}_t) \right]^2 \\ &= \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 + \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 + 2 \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})(Y_t - \hat{Y}_t) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}_{\substack{\text{SSR} \\ \text{Régression}}} + \underbrace{\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2}_{\substack{\text{SSE} \\ \text{Erreur}}} + \underbrace{2 \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})(Y_t - \hat{Y}_t)}_{\psi}$$

Développement de ψ

$$\begin{aligned} 2 \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})(Y_t - \hat{Y}_t) &\Rightarrow 2 \sum_{t=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X})(Y_t - \bar{Y} + \bar{Y} - \hat{Y}_t) \\ &= 2 \sum_{t=1}^n \hat{\beta}_1 (\hat{X}_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) \\ &= 2 \sum_{t=1}^n \hat{\beta}_1 (\hat{X}_t - \bar{X}) \left((Y_t - \bar{Y}) - \hat{\beta}_1 (X_t - \bar{X}) \right) \\ &= 2 \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n (\hat{X}_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) - 2 \hat{\beta}_1^2 \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \\ &= 2 \hat{\beta}_1 (S_{xy} - \hat{\beta}_1 S_{xx}) \\ &\stackrel{2.11}{=} 2 \hat{\beta}_1 \left(S_{xy} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}} S_{xx} \right) \\ &= 2 \hat{\beta}_1 (S_{xy} - S_{xy}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}} \quad (2.17)$$

Où SSR est la variation expliquée par le modèle de régression linéaire et SSE signifie la variation inexpliquée, ou résiduelle du modèle de régression linéaire.

Intuitivement,

- Dans un bon modèle de régression, on aimerait que
 - $\text{SST} \approx \text{SSR}$, soit que $\text{Var}(Y_t) \approx \text{Var}(\hat{Y}_t)$
- ou
- $\text{SSE} \approx 0$, soit que la variation résiduelle soit très faible
- On définit le coefficient de détermination par

$$\boxed{R^2 = \text{Corr}^2(Y, \hat{Y}) = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} \Leftrightarrow 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}} \quad (2.18)$$

Par rapport au ratio, $\frac{SSR}{SST}$ signifie le pourcentage de la variance dans Y_t expliqué par la régression et $1 - \frac{SSE}{SST}$ signifie le pourcentage de la variance dans Y_t qui n'est pas expliquée par la régression.

- $R^2 \in [0, 1]$
- Si $R^2 = 100\%$, la régression est parfaite et utile ; si $R^2 = 0\%$, la régression n'est pas parfaite et est inutile.

2.5.2 Notions préliminaires : Degrés de liberté

Le nombre de *degrés de liberté*⁹ d'une *somme de carrés* est :

- Le nombre de composants *indépendants* dans la somme ;

ou

- Le nombre minimal de fonctions de Y_1, \dots, Y_n qu'il faut connaître pour obtenir la somme ;

ou

- **Pour SST et SSE seulement**

$$d.l. = (\text{Nombre de termes dans la somme}) - (\text{Nombre de paramètres estimés dans cette somme})$$

Ainsi,

- $SST = \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 \rightarrow n \text{ termes} - (1 \text{ paramètre estimé}^{10}) = \boxed{(n-1)d.l.}$
- $SSE = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2$

$$\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t)^2 \rightarrow n \text{ termes} - (2 \text{ paramètres estimés}^{11}) = \boxed{(n-2)d.l.}$$

- $SSR = \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 &= \sum_{t=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X})^2 \\ &= \underbrace{\hat{\beta}_1^2}_{f(y_1, \dots, y_n)} \times \underbrace{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}_{f(x_1, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

Soit une seule fonction des Y_1, \dots, Y_n doit être connue pour obtenir $SSR \rightarrow \boxed{1 d.l.}$

9. Couramment l'abréviation *d.l.* sera utiliser pour signifié *degrés de liberté*.

10. \bar{Y}

11. $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$

Remarque

On sait que :

$$SST = SSE + SSR$$

On note aussi que

$$\begin{aligned} d.l.(SST) &= d.l.(SSE) + d.l.(SSR) \\ (n-1) &= (n-2) + (1) \end{aligned}$$

On aurait donc pu retrouver $d.l.(SST) = d.l.(SSE) + d.l.(SSR)$

2.5.3 Tableau d'analyse de la variance

On appelle couramment le tableau d'analyse de la variance le tableau ANOVA. Ce type de tableau est utilisé dans tous les logiciels de régression pour évaluer la qualité d'un modèle.

Source de la variance	Somme des carrés (SS)	Degrés de liberté ($d.l.$)	Carrés moyens (MS)	Ratio de Fisher (F)
Régression	SSR	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
Erreur	SSE	$n - 2$	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$	
Total	SST	$n - 1$		

Exemple

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information, on reprend l'exemple de la section 2.2.1.

t	X_t	Y_t	$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$	$\hat{\varepsilon}_t$
1	2	2	3.1445	-1.1445
2	3	5	3.3844	1.6156
3	6	3	4.1041	-1.1041
4	9	6	4.8238	1.1762
5	12	5	5.5435	-0.5435
Totaux :	32	21		

$$SSE = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = 6.8179$$

$$SSR = \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 = 3.9821$$

$$SST = SSE + SSR = 6.8179 + 3.9821 = 10.8000$$

ANOVA

Source	SS	$d.l.$	MS	F
Régression	3.9821	1	3.9821	1.7522
Erreur	6.8179	3	2.2726	
Totaux	10.8000	4		

R^2

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{3.9821}{10.8000} = 36.87\%$$
$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{6.8179}{10.8000} = 36.87\%$$

Autrement dit, seulement 36.87 % de la variabilité des Y_t est expliquée par la variabilité des X_t . La régression n'est pas très efficace et utile.

Code R

Voici le code R permettant de créer un modèle linéaire simple avec une droite passant par l'origine.

```
3 > # Dataset
4 > y <- c(2, 5, 3, 6, 5); x <- c(2, 3, 6, 9, 12)
5 > # Estimation des betas
6 > reg <- lm(y ~ x)
7 > anova(reg)
```

Listing 2.3 – Code source en R pour l'exemple

2.6 Intervalles de confiance (I.C.) et test d'hypothèses

On poursuit l'objectif des sections 2.3 et 2.5m soit de valider la qualité du modèle de régression.

2.6.1 Distribution des variables aléatoires

On rappelle qu'avec le postulat 4 (2.2.2), on suppose que les résidus suivent une loi normale d'espérance nulle et de variance de σ^2 .

$$\hat{\varepsilon}_t | x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

Les conséquences de ce postulat sont les suivantes :

1. $(Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t) \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_t, \sigma^2)$ (Postulat 1)
2. Les propriétés de l'estimateur des moindres carrés avaient permis de démontrer que (section 2.3) :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &\sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 \left(\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)\right) \\ \hat{\beta}_1 &\sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right)\end{aligned}$$



Alternative

On peut tirer la même conclusion à partir de la propriété des fonctions linéaires de $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$.

3. L'estimateur sans biais pour σ^2 est :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= S^2 = MSE \\ MSE &= \frac{SSE}{d.l.(SSE)} \\ \frac{SSE}{d.l.(SSE)} &= \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n - 2}\end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{n - 2} \quad (2.19)$$

4. On peut montrer que

$$\left(\frac{SSE}{\sigma^2} \right) \sim \chi^2(n - 2) \quad (2.20)$$

2.6.2 Intervalle de confiance pour β_1

Attention de ne pas confondre avec $\hat{\beta}_1$. Puisque $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, Var(\hat{\beta}_1))$, on a que

$$\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}} \right) \sim N(0, 1)$$

Si σ^2 était connu, l'intervalle de confiance serait de la forme suivante

$$\left[\hat{\beta}_1 \pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_1)} \right]$$

Par contre, σ^2 n'est souvent pas connu et il est nécessaire de l'estimer. Tel que mentionné plus haut, l'estimateur non biaisé correspond à l'équation 2.19. Mais cet estimateur ne suit pas une distribution normale. À l'aide des notions acquises en ACT-2000, il est possible de démontrer que si on utilise l'estimateur de σ^2 , soit S^2 , dans la formule de $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$, c'est-à-dire :

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1) = \frac{S^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

Alors, on peut conclure que :

$$\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)}} \right) \sim t(n-2)$$

On obtient ainsi l'intervalle de confiance suivant au niveau $100 \times (1 - \alpha)\%$ pour β_1 ,

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{\frac{S^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}} \quad (2.21)$$

2.6.3 Intervalle de confiance pour β_0

De manière similaire, un intervalle de confiance au niveau $100 \times (1 - \alpha)\%$ pour β_0 est,

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{\frac{S^2}{n} + \frac{S^2 \bar{X}^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}} \quad (2.22)$$

2.6.4 Test d'hypothèses sur les paramètres

Principales questions auxquelles on aimerait répondre :

1. L'ordonnée à l'origine (β_0) est-elle significativement différente de 0 ?
Sinon, on considère le modèle $Y_t = \beta_1 \times X_t + \varepsilon_t$.
2. La pente (β_1) est-elle significativement différente de 0 ?
Sinon, on considère le modèle $Y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$.

Pour tester la question 1 :

$$H_0 : \beta_0 = 0$$

$$H_1 : \beta_0 \neq 0$$

On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_0)}}$$

Pour tester la question 2 :

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

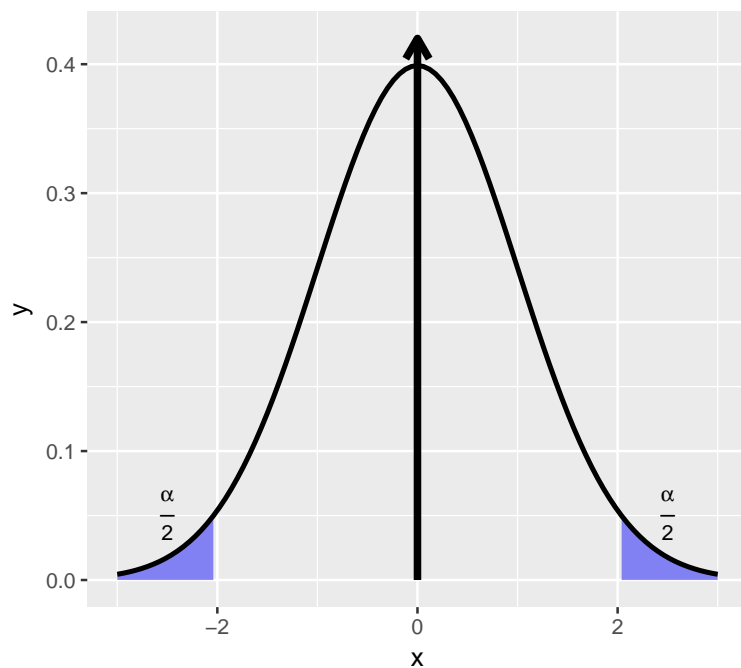
On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}}$$

On rejette H_0 au niveau de confiance $100 \times (1 - \alpha)\%$ pour β_0 si :

$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}(n-2)}$$

Voici une représentation graphique de la zone de rejet bilatéral :



Qui correspond à la probabilité de *se tromper* en rejetant H_0 .

Remarques

De manière générale, on utilise plutôt les tests d'hypothèses suivants pour nos deux questions :

Pour tester la question 1 :

$$H_0 : \beta_0 = \beta_0^*$$

$$H_1 : \beta_0 \neq \beta_0^*$$

On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0^*}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_0)}}$$

Pour tester la question 2 :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_1^*$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_1^*$$

On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}}$$

On rejette H_0 au niveau de confiance $100 \times (1 - \alpha)\%$ pour β_0 si :

$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}(n-2)}$$

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

Exemple

Dans une régression sur un ensemble de 14 observations, on a obtenu :

$$\hat{Y}_t = 68.494 - 0.468X_t$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\widehat{Var}(\hat{\beta}) &= \widehat{Var}\left(\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{Var}(\hat{\beta}_0) & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ \widehat{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \widehat{Var}(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 66.8511 & 1.2544 \\ 1.2544 & 0.0237 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Question 1

Tester si β_0 est significativement différent de 0 à un taux de confiance de 95 %.

$$H_0 : \beta_0 = 0 \text{ Hypothèse nulle}$$

$$H_1 : \beta_0 \neq 0$$

On utilise la statistique suivante,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_0)}} \\ &= \frac{68.494 - 0}{\sqrt{66.8511}} \\ &= 8.38 \\ t_{\frac{0.05}{2}(14-2)} &= 2.18 \end{aligned}$$

Étant donné que $|8.38| > 2.18$, on rejette H_0 au niveau de confiance de 95 %. Autrement dit, l'ordonnée à l'origine est significative.

Question 2

Tester si β_1 est significativement différent de 0 à un taux de confiance de 95 %.

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

On utilise la statistique suivante,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} \\ &= \frac{-0.468 - 0}{\sqrt{0.0237}} \\ &= -3.040 \\ t_{\frac{0.05}{2}(14-2)} &= 2.18 \end{aligned}$$

Étant donné que $|-3.040| > 2.18$, on rejette H_0 au niveau de confiance de 95 %. Autrement dit, il y a 96 % de chance que la régression soit utile.

Question 2

Tester si β_1 est significativement différent de 0 à un taux de confiance de 95 %.

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

On utilise la statistique suivante,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} \\ &= \frac{-0.468 - 0}{\sqrt{0.0237}} \\ &= -3.040 \\ t_{\frac{0.05}{2}(14-2)} &= 2.18 \end{aligned}$$

Étant donné que $|-3.040| > 2.18$, on rejette H_0 au niveau de confiance de 95 %. Autrement dit, il y a 95 % de chance que la régression soit utile.

Question 3

Tester si β_1 est significativement négatif à un taux de confiance de 95 %.

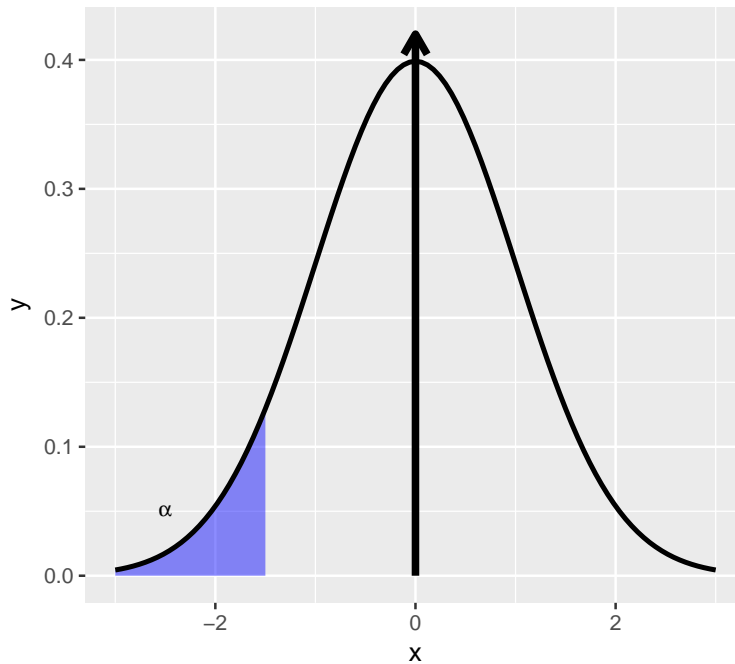
$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 < 0$$

On utilise la statistique suivante,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} \\ &= \frac{-0.468 - 0}{\sqrt{0.0237}} \\ &= -3.040 \\ -t_{\frac{0.05}{2}(14-2)} &= -1.78 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un test unilatéral, la zone de rejet est la suivante



Étant donné que $|-3.040| < -1.78$, on rejette H_0 au niveau de confiance de 95 %. Autrement dit, la pente de la droite est significativement négative.

Question 4

Obtenir un I.C. au niveau de confiance de 95 % pour β_0 .

$$\begin{aligned}\beta_0 &\in \hat{\beta}_0 \pm t_{0.05/2}(14-2)\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_0)} \\ &\in 68.494 \pm 2.18 \times \sqrt{66.8511} \\ &\in]50.670, 86.318[\end{aligned}$$

L' I.C. permet de valider le test d'hypothèse de la question 1, car il ne comprend pas la valeur zéro.

Question 5

Obtenir un I.C. au niveau de confiance de 95 % pour β_1 .

$$\begin{aligned}\beta_1 &\in \hat{\beta}_1 \pm t_{0.05/2}(14-2)\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)} \\ &\in -0.468 \pm 2.18 \times \sqrt{0.0237} \\ &\in]-0.804, -0.132[\end{aligned}$$

L'I.C. permet de valider le test d'hypothèse de la question 2 et 3, il ne comprend pas la valeur zéro et est strictement négatif.

2.6.5 Test de la validité *globale* de la régression

Une régression linéaire simple est valide, ou significative si $\beta_1 \neq 0$. Le tableau ANOVA obtenue en 2.5.3 peut être utilisé pour tester les hypothèses :

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 < 0$$

avec la statistique de Fisher,

$$\begin{aligned} F &= \frac{MSR}{MSE} \\ &= \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{(n-2)}} \end{aligned}$$

Sous H_0 , on a que $F \sim F(1, n-2)$.

On rejette donc H_0 au niveau $100 \times (1 - \alpha)\%$ si

$$F > F_{\alpha}(1, n-2) \quad (2.23)$$

i

Équivalent

En régression linéaire simple **seulement**, le test F est équivalent au test t pour $\beta_1 = 0$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{(n-2)}} = \frac{SSR}{\sigma^2} = \frac{SSR}{S^2} = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{S^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X})^2}{S^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \times \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{S^2} \\ &= \frac{\hat{\beta}_1^2}{\frac{S^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}} \\ &= \frac{(\hat{\beta}_1 - 0)^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)} \\ &= t^2 \end{aligned}$$

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

Exemple

Soit le tableau ANOVA suivant :

Source	SS	$d.l.$	MS	F
Régression	48.845	1	48.845	9.249
Erreur	63.374	12	5.281	
Total	112.219	13		

On cherche à vérifier la validité de la régression à l'aide du test F .

On a que $F = 9.249$, par contre $F_{0.05}(1, 12) = 4.75$

Puisque $F > F_{0.05}(1, 12)$; on rejette H_0 . La régression est significative au niveau de confiance de 95 %.

2.7 Prévisions et intervalles de confiance

On peut utiliser la droite de régression pour faire des types de prévisions de Y^* en sachant X^* :

Type 1

Prévision pour la *valeur moyenne* de Y^*

$$E[Y^*] = \beta_0 + \beta_1 X^*$$

Type 2

Prévision pour la *vraie valeur* de Y^*

$$Y^* = \beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon$$

Remarques

1. Dans les deux types, la prévision est le point sur la droite de régression

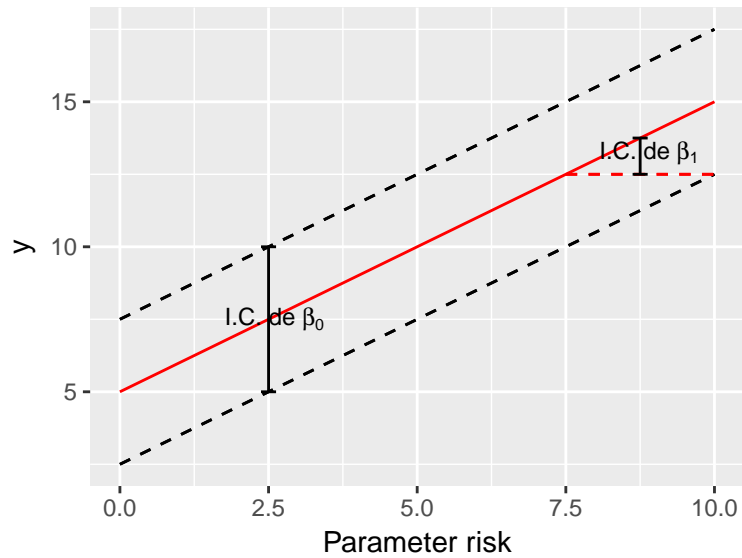
$$\begin{aligned}\widehat{E}[Y^*] &= \hat{Y}^* \\ \hat{Y}^* &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*\end{aligned}$$

2. La prévision est sans biais

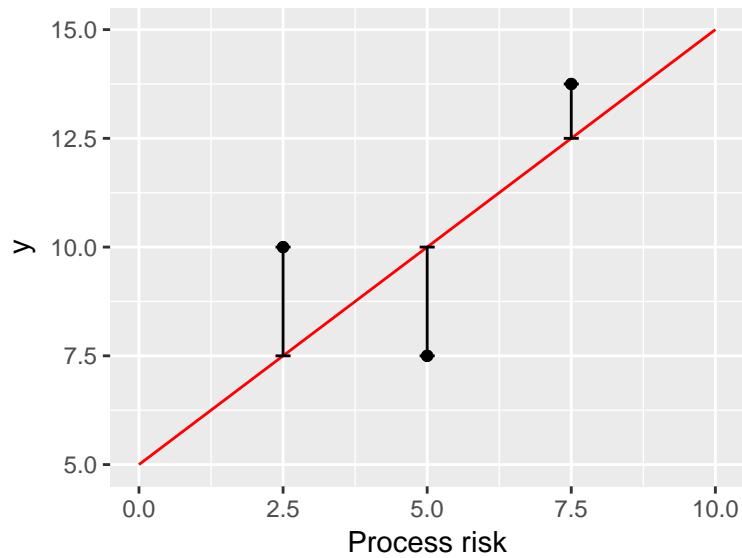
$$\begin{aligned}E[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*] &= E[\hat{\beta}_0] + E[\hat{\beta}_1] X^* \\ &= \beta_0 + \beta_1 X^*\end{aligned}$$

3. Il y a deux sources d'erreur dans les prévisions,

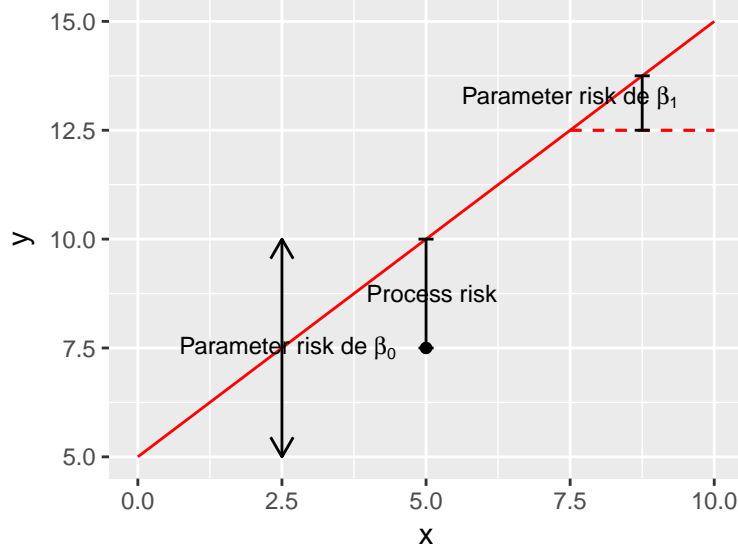
- Parameter risk : Incertitude sur les estimateurs. Autrement dit, la variance des estimateurs des paramètres.



- Process risk : Fluctuations autour de la droite de régression. Autrement dit, la variance des résidus.



Effet combiner des deux sources d'erreur dans les prévisions,



2.7.1 I.C. pour la prévision de type I (Valeur moyenne)

Aussi appelé intervalle de confiance pour la droite de régression.

Tel que vue à la section 2.6.1, on a que

$$(\hat{E}[Y^*] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \sim N(\beta_0 + \beta_1 X^*; Var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*))$$

Par conséquent,

$$\frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) - (\beta_0 + \beta_1 X^*)}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)}} \sim N(0, 1)$$

En substituant σ^2 par S^2 dans la $Var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)$; on a

$$\frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) - (\beta_0 + \beta_1 X^*)}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)}} \sim t(n - 2)$$

Ainsi, un I.C. au niveau $100 \times (1 - \alpha)\%$ pour la valeur moyenne est

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n - 2) \times \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)} \quad (2.24)$$

On rappelle que comme σ^2 n'est souvent pas connu, il est nécessaire d'utiliser son estimateur S^2 .

Or,

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) &= Var(\bar{Y} - \bar{Y} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \\
&= Var(\bar{Y} - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}) + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \\
&= Var(\bar{Y} + \hat{\beta}_1(X^* - \bar{X})) \\
&= Var(\bar{Y}) + Var(\hat{\beta}_1)(X^* - \bar{X})^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} (X^* - \bar{X})^2 \\
&= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)
\end{aligned}$$

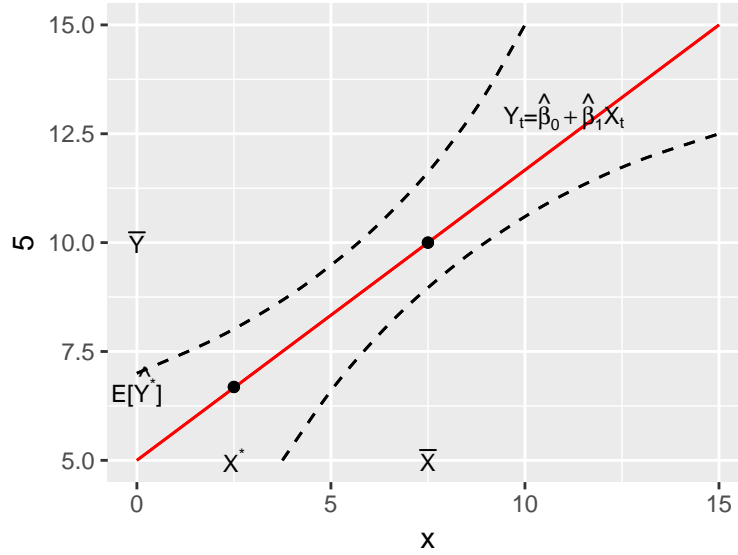
Et ainsi, on obtient,

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) = S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right) \quad (2.25)$$

L'I.C. est donc,

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)} \quad (2.26)$$

Remarque



1. Plus X^* s'éloigne de \bar{X} , plus l'I.C. est large, parce que l'incertitude augmente.
2. Les limites de l'intervalle sont des *hyperboles* centrées en (\bar{X}, \bar{Y})
3. Cet I.C. peut être appelé :
 - I.C. pour la valeur moyenne ;
 - I.C. pour la droite de régression ;
 - I.C. pour la tendance.
4. Dans ce type d' I.C., on tient seulement compte du **risque de paramètre**.

2.7.2 I.C. pour la prévision de type II (Vraie valeur)

Aussi appelé I.C. pour les points de Y^* . Pour obtenir un I.C. pour la vraie valeur de

Y^* , il faut tenir compte du parameter risk ($Var(\hat{\beta}_i)$) ET du process risk ($Var(\varepsilon_t)$). On considère donc de manière équivalente à la section 2.7.1,

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{Var(Y^* - \hat{Y}^*)}} \sim N(0, 1)$$

En substituant σ^2 par S^2 dans $Var(Y^* - \hat{Y}^*)$, on a

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{\widehat{Var}(Y^* - \hat{Y}^*)}} \sim t(n - 2)$$

Ainsi, un I.C. au niveau $100 \times (1 - \alpha)\%$ pour β_1 pour la vraie valeur de Y^* est,

$$\hat{Y}^* \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{\widehat{Var}(Y^* - \hat{Y}^*)}$$

Or par hypothèse on a

$$\begin{aligned} Var(Y^* - \hat{Y}^*) &= Var(Y^*) + Var(\hat{Y}^*) \\ &= \underbrace{\sigma^2}_{\text{Process risk}} + \underbrace{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X}^*)^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}^*)^2} \right)}_{\text{Parameter risk}} \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{Var}(Y^* - \hat{Y}^*) = S^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X}^*)^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}^*)^2} \right) \quad (2.27)$$

L'I.C. est donc,

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{S^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X}^*)^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}^*)^2} \right)} \quad (2.28)$$

Exemple en R

Il est possible d'obtenir le résultat des formules des sections 2.7.1 et 2.7.2.

I.C. de type I pour tous les X dans les observations

	fit	lwr	upr
1	0.05354257	-0.6627568	0.7698419
2	-2.15534964	-3.4022467	-0.9084526
3	0.73105599	-0.2497012	1.7118132
4	-0.14802248	-0.8182299	0.5221849
5	-1.12138259	-1.8894158	-0.3533494

I.C. de type I pour un vecteur X^*

	fit	lwr	upr
1	-0.11000498	-0.7873444	0.5673345
2	0.07337686	-0.6484947	0.7952484
3	0.25675871	-0.5241589	1.0376763
4	0.44014055	-0.4113229	1.2916040
5	0.62352240	-0.3073760	1.5544208

I.C. de type II pour un vecteur X^*

	fit	lwr	upr
1	-0.11000498	-2.690008	2.469998
2	0.07337686	-2.518674	2.665427
3	0.25675871	-2.352352	2.865870
4	0.44014055	-2.190946	3.071227
5	0.62352240	-2.034334	3.281379

```
3 > # dataset
4 > x <- rnorm(15)
5 > y <- x + rnorm(15)
6 > xStar <- data.frame(x = seq(0, 2, by = 0.2))
7 > # Modele de regression
8 > fit <- lm(y ~x)
9 > # I.C. de type 1
10 > predict(fit, interval = "confidence") # I.C. pour tous les X
    dans les observations
11 > predict(fit, interval = "confidence", newdata = xStar) # I.C.
    pour un vecteur de  $X^*$ 
12 > # I.C. de type 2
13 > predict(fit, interval = "prediction", newdata = xStar) # I.C.
    pour un vecteur de  $x^*$ 
```

Listing 2.4 – Code source en R pour l'exemple

Chapitre 3

Régression multiple

Il n'est pas rare que plus d'une variable soit nécessaire pour expliquer un phénomène. Tel que vue à la section 2.1.2, voici un exemple de modèle de régression multiple :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Diagram illustrating the variables in the regression model:

- $\hat{\text{Âge du passager}}$ points to X_1
- Prix du billet points to X_2
- Sexe du passager points to X_2
- Erreur aléatoire points to ε

De manière générale, la régression multiple considère le modèle général suivant :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t,1} + \beta_2 X_{t,2} + \dots + \beta_p X_{t,p} + \varepsilon_t, \text{ pour } t = 1, \dots, n$$

- n observations
- p variables exogènes (X_1, \dots, X_p)
- $(p + 1)$ paramètres à estimer ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$)

Quelques éléments d'algèbre matricielle pour les vecteurs et matrices aléatoires

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires, on définit le vecteur aléatoire X suivant

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

On définit le vecteur espérance de la façon suivante

$$E[X] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

et la matrice de variance-covariance

$$Var(X) = \underbrace{E[(X - E[X])(X - E[X])^\top]}_{\text{Produit matriciel}} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & & \\ Cov(X_n, X_1) & \cdots & Var(X_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$