En appliquant l'algorithme de Newton-Raphson, on a :

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i+1)} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)} + I^{-1}\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)}\right) S\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^{(i+1)} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)} + \left(X'WX\right)^{-1} X'\left(Y - M(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta})\right)$$

Multiplier par I

$$\Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i+1)} = I\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)} + (X'WX)^{-1} X' I \left(Y - M(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{\beta})\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i+1)} = (X'WX)^{-1}(X'WX)\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)} + (X'WX)^{-1} X' W W^{-1} (Y - M)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^{(i+1)} = \left[(X'WX)^{-1} X' W\right] \underbrace{\left[X\hat{\beta}^{(i)} + W^{-1}(Y-M)\right]}_{Z^{(i)}\text{ : transformation sur } Y\text{!}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta}^{(i+1)} = (X'WX)^{-1} X'W Z^{(i)}}$$

Remarque:

L'algorithme itératif permettant d'obtenir l'estimateur $\hat{\beta}$ peut être vu comme une succession d'estimations de régressions linéaires de $\underset{\sim}{Z}^{(i)}$ sur $\underset{\sim}{X}$, pondérés par $\underset{\sim}{W}$.

Formule de déviance - régression logistique :

$$D(\underset{\sim}{\beta}) = 2 \times \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \times \ln\left(\frac{y_i}{\pi_i}\right) + (1-y_i) \times \ln\left(\frac{1-y_i}{1-\pi_i}\right) \right\};$$

où

$$\pi_i = \frac{e^{x_i \beta}}{1+e^{x_i \beta}}.$$

Test d'hypothèse général :

$$\chi^2_{OBS} = D(\underset{\sim}{\beta}_{H_0}) - D(\underset{\sim}{\beta}_{H_1})$$

Intervalle de confiance au niveau $100 \times (1-\alpha)\%$ pour β_i :

$$\hat{\beta}_i \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\left[(X'WX)^{-1}\right]_{i+1\ i+1}}$$

4.7) Régression de Poisson :

Contexte motivant l'utilisation de ce modèle :

Phénomène où la v.a. Y est positive et discrète ($Y_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$).

ex : - Nombre de sinistre d'un assuré au cours de la prochaine année

- Nombre de défauts de fabrication d'un produit

⋮

Dans ce cas, on postule que :

$$(Y_i \mid \underset{\sim}{X}_i) \sim \text{Poisson}(\lambda_i \overset{\text{"}}{} E(Y_i \mid \underset{\sim}{X}_i))$$

avec

$$g(\lambda_i) = \underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}$$

Puisque $\lambda_i \in [0, \infty[$ (non-négatif) et que $\underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta} \in \mathbb{R}$, il faut utiliser une fonction $g(\cdot)$ telle que :

$$g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

Bien que plusieurs candidats peuvent satisfaire cette condition, il est d'usage d'utiliser la fonction logarithmique dans le contexte de la régression de Poisson:

$$g(x) = \ln(x).$$

<u>Conséquences:</u>

$$g(\lambda_i) = \underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}$$

$$\Rightarrow \ln(\lambda_i) = \underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = e^{\underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}}$$

... en conclusion, sous cette spécification, on a que:

$$(Y_i | \underset{\sim}{X}_i) \sim Poiss\left(e^{\underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}}\right)$$

... et puisque $\underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta} = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip}$, on a:

$$(Y_i | \underset{\sim}{X}_i) \sim Poisson\left(e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip}}\right)$$

$$\Rightarrow (Y_i | \underset{\sim}{X}_i) \sim Poisson\left(e^{\beta_0} \times e^{\beta_1 X_{i1}} \times \dots \times e^{\beta_p X_{ip}}\right)$$

Modèle multiplicatif!

Interprétations:

(1) $\ln(\lambda_i) = \underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}$ ... le "log de l'espérance" est linéaire

(2) β_0: Lorsque toutes les variables explicatives X_i sont $=0$, alors l'espérance de Y_i est e^{β_0}.

(3) β_i: Si X_{ij} augmente de une unité (alors que les autres variables explicatives restent fixés), alors l'espérance de Y_i est multiplié par e^{β_j}.

Sous la méthode du maximum de vraisemblance, on a que:

$$\ell(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\Pr(Y_i = y_i \mid \underset{\sim}{X}_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{e^{-\lambda_i}\,\lambda_i^{y_i}}{y_i!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \times \ln \lambda_i - \lambda_i - \ln(y_i!)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \times \underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta} - e^{\underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}} - \ln(y_i!)\right)$$

Par conséquent,

$$S(\underset{\sim}{\beta}) = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \ell(\underset{\sim}{\beta}) = ?$$

On cherche le j^e élément du vecteur $S(\underset{\sim}{\beta})$:

$$[S(\underset{\sim}{\beta})]_j = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \ell(\underset{\sim}{\beta})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i X_{ij} - X_{ij} \, e^{\underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \left(Y_i - e^{\underset{\sim}{X}_i \underset{\sim}{\beta}} \right)$$

$$\equiv X_j' \left(Y - M(\underset{\sim}{X}_j \underset{\sim}{\beta}) \right)$$

où

$$M(X_j \underset{\sim}{\beta}) = \begin{bmatrix} e^{\underset{\sim}{X}_1 \underset{\sim}{\beta}} \\ e^{\underset{\sim}{X}_2 \underset{\sim}{\beta}} \\ \vdots \\ e^{X_n \underset{\sim}{\beta}} \end{bmatrix}$$

Et donc:

$$\boxed{S(\underset{\sim}{\beta}) = X' \left(Y - M(X_j \beta) \right)}$$

Et donc

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ell(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} S(\beta)$$

On cherche l'élément (j,k) de cette matrice $I(\beta)$:

$$\left[I(\beta)\right]_{j,k} = -\frac{\partial^2}{\partial \beta_j \, \partial \beta_k} \ell(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta_k} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_j} \ell(\beta) \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[S(\beta) \right]_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \times X_{ik} \, e^{X_i \beta}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \times X_{ik} \times w_i \quad ; \text{ où } w_i = e^{X_i \beta}.$$

Ainsi, on déduit que:

$$I(\beta) = X' W X \quad ; \text{ avec}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

En utilisant une méthode similaire à celle qui a été appliquée par le cas de la régression logistique, on peut montrer que l'algorithme de Newton-Raphson suivant:

$$\hat{\beta}^{(i+1)} = \hat{\beta}^{(i)} + I^{-1}(\hat{\beta}^{(i)}) S(\hat{\beta}^{(i)})$$

... peut aussi être simplifié sous la forme:

$$\hat{\beta}^{(i+1)} = (X'WX)^{-1} X'W z^{(i)};$$

où

$$z^{(i)} = X\hat{\beta}^{(i)} + W^{-1}(Y - M(X, \beta)).$$

4.8) Autres notions importantes avec les GLM:

4.8.1) Autres distributions:

La procédure illustrée aux sections (4.5), (4.6) et (4.7) s'applique à toutes les distributions de la famille exponentielle.

Les cas les plus célèbres sont:

A) Loi Binomiale négative:

- Permet d'obtenir une variance plus grande que la moyenne (ce qui est impossible avec la loi de Poisson).

- Fonction de log-vraisemblance:

$$(Y_i \mid \underset{\sim}{X}_i, \Theta_i) \sim \text{Poisson}(\lambda_i \times \Theta_i)$$

; où

$$\ln(\lambda_i) = \underset{\sim}{X}_i \beta \Rightarrow \lambda_i = e^{X_i \beta}$$

; et

$$\Theta_i \sim \Gamma(\alpha, \alpha) \Rightarrow \begin{array}{l} E(\Theta_i) = 1 \\ var(\Theta_i) = 1/\alpha \end{array}$$

Note: Si $\alpha \to \infty$, alors NegBin $\to$ Poisson !!!

$$Pr(Y_i = y_i \mid \underset{\sim}{X}_i) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_i \Theta} (\lambda_i \Theta)^{y_i}}{y_i!} \times \frac{\alpha^\alpha \Theta^{\alpha-1} e^{-\alpha\Theta}}{\Gamma(\alpha)} d\Theta$$

$$\rightarrow P(Y_i = y_i \mid \underset{\sim}{X}_i) = \frac{\alpha^{\alpha} \lambda^{y_i}}{\Gamma(y_i+1)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \theta^{(y_i+\alpha)-1} e^{-(\alpha+\lambda_i)\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{\alpha^{\alpha} \lambda^{y_i}}{\Gamma(y_i+1)\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(y_i+\alpha)}{(\alpha+\lambda_i)^{y_i+\alpha}}$$

$$= \frac{\Gamma(y_i+\alpha)}{\Gamma(y_i+1)\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda_i}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right)^{y_i}$$

- $\ell(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(P_r(Y_i = y_i \mid \underset{\sim}{X}_i) \right)$

- $S(\underset{\sim}{\beta}) = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \ell(\underset{\sim}{\beta})$

- $I(\underset{\sim}{\beta}) = \frac{\partial^2}{\partial \underset{\sim}{\beta}^2} \ell(\underset{\sim}{\beta})$

- $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i+1)} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)} + I^{-1}(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)})\, S(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(i)})$

119

03-12-2012