

**UNIVERSITÉ LAVAL**  
ÉCOLE D'ACTUARIAT

**ACT 2003**  
**Notes de cours**  
**Modèles linéaires en actuariat**

**David Beauchemin**

**Automne 2017**

© 2017 David Beauchemin



Cette création est mise à disposition selon le contrat [Attribution-Partage dans les mêmes conditions 4.0 International](#) de Creative Commons. En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- **partager** — reproduire, distribuer et communiquer l’œuvre ;
- **remixer** — adapter l’œuvre ;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes :



**Attribution** — Vous devez créditer l’œuvre, intégrer un lien vers le contrat et indiquer si des modifications ont été effectuées à l’œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens possibles, mais vous ne pouvez suggérer que l’offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.



**Partage dans les mêmes conditions** — Dans le cas où vous modifiez, transformez ou créez à partir du matériel composant l’œuvre originale, vous devez diffuser l’œuvre modifiée dans les mêmes conditions, c’est-à-dire avec le même contrat avec lequel l’œuvre originale a été diffusée.

## Remerciements

Le document a été bâti à partir des notes de cours ACT-2003 manuscrites rédigées par Frédéric Guillot. Ce document est une reproduction améliorée de celle-ci. Je suis grandement reconnaissant de la confiance de Frédéric Guillot pour l'exécution de cette initiative de ma part.

Je remercie Thomas Landry de m'avoir laissé utiliser ses notes pour l'utilisation et l'explication de certains concepts du cours ACT-2000. De plus, je remercie Samuel Cabral Cruz pour le code  $\text{\LaTeX}$  des bulles d'informations qui à mon avis améliore la beauté de ce document. Finalement, je remercie Kaesey-Andrew Lépine qui a pris le temps de relire le document et de trouver de nombreuses erreurs typographiques.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'F. Guillot' with a stylized flourish at the end.

## Version et correction

Liste des corrections depuis la version 1.0 :

- (Section 2.2.1.3) Correction à la page 19, équation de la somme des résidus. Terme manquant de  $\hat{\beta}_1 X_t$ .
- (Section 2.6.2) Correction du terme de la variance, absence du symbole *chapeau* pour l'estimation.
- (Section 2.6.4) Correction du doublon de la question 2.
- (Section 2.6.4) Correction de la question 3, il s'agit d'un test unilatéral. Le terme  $(1 - \alpha)$  ne doit pas être divisé par 2.
- (Section 2.6.4) Correction de l'erreur typographique de positionnement des degrés de liberté.
- (Section 3.2.1) Reformulation de l'expression  $R_{adj}^2$ .
- (Section 3.2.3) Correction de l'erreur typographique de Fisher partiel.
- (Section 3.2.4) Correction de l'erreur typographique de la solution du modèle avec la technique 1.
- (Section 2.5.1) Correction de l'erreur typographique de la décomposition de la variation.
- (Section 2.5.1) Reformulation des explications de la décomposition et des termes d'erreurs.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Régression linéaire simple</b>	<b>8</b>
2.1	Introduction . . . . .	8
2.1.1	Régression linéaire simple . . . . .	9
2.1.2	Régression linéaire multiple . . . . .	9
2.1.3	Régression exponentielle . . . . .	10
2.1.4	Régression quadratique . . . . .	11
2.2	Le modèle de régression linéaire simple . . . . .	14
2.2.1	Coefficients de régression . . . . .	16
2.2.2	Caractéristiques du terme d'erreur . . . . .	23
2.3	Propriétés de l'estimateur des moindres carrés (EMC) . . . . .	24
2.3.1	Estimateur sans biais . . . . .	24
2.3.2	Variances et covariances des estimateurs . . . . .	26
2.3.3	Optimalité . . . . .	29
2.4	Régression passant par l'origine . . . . .	30
2.5	Analyse de la variance . . . . .	32
2.5.1	Notions préliminaires : Somme des carrés . . . . .	33
2.5.2	Notions préliminaires : Degrés de liberté . . . . .	36
2.5.3	Tableau d'analyse de la variance . . . . .	37
2.6	Intervalles de confiance (I.C.) et test d'hypothèses . . . . .	38
2.6.1	Distribution des variables aléatoires . . . . .	38
2.6.2	Intervalle de confiance pour $\beta_1$ . . . . .	39
2.6.3	Intervalle de confiance pour $\beta_0$ . . . . .	40
2.6.4	Tests d'hypothèses sur les paramètres . . . . .	41
2.6.5	Test de la validité globale de la régression . . . . .	46
2.7	Prévisions et intervalles de confiance . . . . .	48
2.7.1	I.C. pour la prévision de type I (Valeur moyenne) . . . . .	50
2.7.2	I.C. pour la prévision de type II (Vraie valeur) . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Régression linéaire multiple</b>	<b>55</b>
3.1	Le modèle sous forme matricielle . . . . .	57
3.1.1	Estimateur des moindres carrés (EMC) . . . . .	59

3.1.2	Résidus et tableau ANOVA . . . . .	62
3.1.3	Estimateur de $\sigma^2$ . . . . .	63
3.1.4	Intervalle de confiance et tests d'hypothèses . . . . .	63
3.1.5	Test de Student sur un seul paramètre . . . . .	64
3.1.6	Test de Fisher pour la validité globale de la régression . . . . .	65
3.1.7	Test de Fisher partiel . . . . .	65
3.2	Sélection d'un modèle optimal . . . . .	66
3.2.1	Technique 1 : Essai de tous les modèles . . . . .	67
3.2.2	Technique 2 : Élimination régressive ( <i>Backward elimination</i> ) . . . . .	68
3.2.3	Technique 3 : Sélection progressive ( <i>forward selection</i> ) . . . . .	69
3.2.4	Technique 4 : Régression pas-à-pas ( <i>stepwise regression</i> ) . . . . .	69
3.3	Régression avec variables indicatrices . . . . .	73
3.4	Analyse qualitative des résidus . . . . .	75
3.4.1	Problèmes possibles dans la distribution des résidus . . . . .	75
3.4.2	Quantiles normaux . . . . .	78
3.4.3	Exemple complet . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Les modèles linéaires généralisés</b> . . . . .	<b>88</b>
4.1	Introduction . . . . .	88
4.2	Notions préliminaires : La famille exponentielle . . . . .	89
4.2.1	Loi Normale . . . . .	89
4.2.2	Loi Poisson . . . . .	90
4.2.3	Loi Bernoulli . . . . .	90
4.2.4	Autres lois . . . . .	91
4.3	Généralités sur les modèles de régression avec la famille exponentielle . . . . .	91
4.3.1	Contexte . . . . .	91
4.3.2	Autres lois . . . . .	91
4.3.3	Structure du modèle . . . . .	91
4.3.4	Propriété de la fonction de lien . . . . .	92
4.4	Approche générale . . . . .	93
4.4.1	Procédure avec les GLM . . . . .	93
4.4.2	Estimation des paramètres . . . . .	93
4.4.3	Validation globale du modèle avec la <i>déviante</i> . . . . .	95
4.4.4	Validation locale du modèle avec des tests d'hypothèses et intervalles de confiances . . . . .	97
4.5	Modèle de régression normale . . . . .	98
4.5.1	Conclusion intéressante . . . . .	100
4.5.2	Remarque sur la validation globale et locale du modèle sous la loi Normale . . . . .	100
4.6	Modèle de régression logistique . . . . .	101
4.6.1	Contexte motivant l'utilisation de ce modèle . . . . .	101
4.6.2	Conséquences . . . . .	102
4.6.3	Interprétations . . . . .	103
4.6.4	Optimisation . . . . .	103
4.6.5	Formule de déviance-régression logistique . . . . .	107

4.6.6	Test d'hypothèse général . . . . .	107
4.6.7	Intervalle de confiance . . . . .	107
4.7	Régression de Poisson . . . . .	108
4.7.1	Contexte motivant l'utilisation de ce modèle . . . . .	108
4.7.2	Conséquences . . . . .	109
4.7.3	Interprétations . . . . .	109
4.7.4	Optimisation . . . . .	110
4.8	Autres notions importantes avec les GLM . . . . .	112
4.8.1	Autres distributions . . . . .	112
4.8.2	Algorithme du Scoring . . . . .	115
4.8.3	Variable offset . . . . .	118
4.8.4	Ajout d'une interaction entre deux variables explicatives . . .	119
4.8.5	Analyse des résidus . . . . .	122
<b>A</b>	<b>Code source</b>	<b>123</b>
A.1	Exemple du chapitre 3 . . . . .	123

# Chapitre 1

## Introduction

L'établissement de prévisions joue un rôle central dans notre vie de tous les jours (prévisions météorologiques, horoscope, etc.), et plus particulièrement dans celle des actuaires.

### Objectifs de la régression

Régulièrement en actuariat, on se questionne sur les effets de différentes variables sur d'autres. Par exemple,

- Quel est l'effet de l'âge sur la fréquence des sinistres automobiles ?
- Quel est l'effet du sexe sur la mortalité ?

On cherche à étudier et déterminer les relations entre des variables mesurables à partir de données.

### Deux grandes classes de variables mesurables :

- Qualitatives : basées sur des opinions et/ou des intuitions.
- Quantitatives : basées sur des observations, un modèle et des arguments mathématiques.

### Deux *grandes étapes* pour établir des prévisions quantitatives

1. Bâtir le modèle et estimer les paramètres :  
ex :  $F = M \times a$ , qui représente un modèle déterministe.  
ex :  $Y = 3 \times X + 6 + \epsilon_t$  ; où  $\epsilon_t \sim N(0, 10)$ , qui représente un modèle probabiliste.
2. Calculer les prévisions à partir du modèle.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles probabilistes linéaires seront étudiés.



## Chapitre 2

# Régression linéaire simple

### 2.1 Introduction

De façon générale, en régression, nous avons :

Y	Variable dépendante, ou de réponse	Output
$X_1, X_2, \dots, X_n$	Soit n variables indépendantes ou explicatives, ou exogènes <sup>1</sup>	Input
$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$	Les paramètres à estimer	

Voici une illustration du concept de régression linéaire.

#### Étape 1

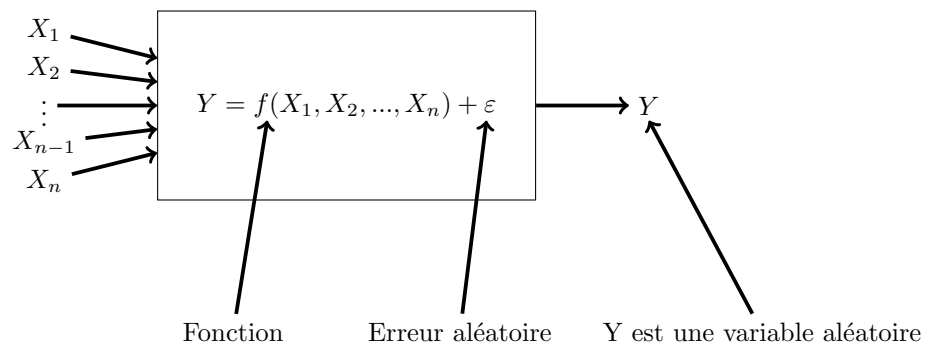
Observation  
des  $X_i$

#### Étape 2

Modèle de ré-  
gression

#### Étape 3

Prévision de Y



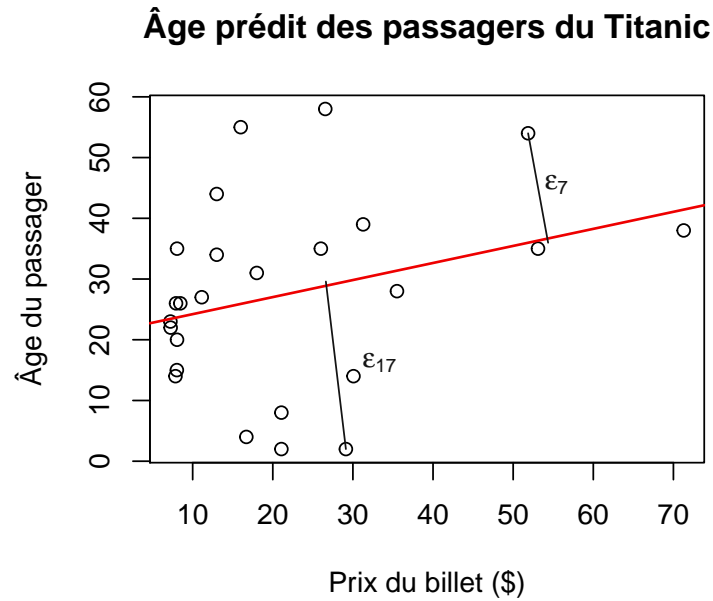
1. Les variables  $X_i$  sont indépendantes par rapport à y, mais pas nécessairement entre elles.

### 2.1.1 Régression linéaire simple

On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet à l'aide du modèle linéaire suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \varepsilon$$

↑                      ↗                      ↖  
Âge du passa-      Prix du billet      Erreur aléa-  
ger                      toire

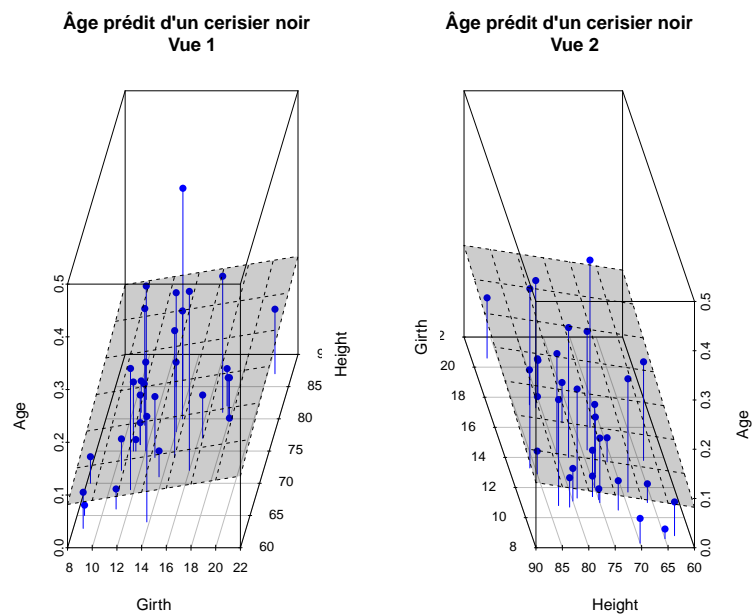


### 2.1.2 Régression linéaire multiple

On cherche à prédire l'âge d'un cerisier noir en fonction de la hauteur du cerisier et de la circonférence de son tronc.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

↑                      ↑                      ↑                      ↖  
Âge de l'arbre      Hauteur du ce-      Circonférence      Erreur aléa-  
                         risier                      toire



### 2.1.3 Régression exponentielle

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps à l'aide du modèle exponentiel suivant,

$$Y = \beta_0 \times e^{\beta_1 \times X} \times \varepsilon$$

↑

Sévérité du  
sinistre

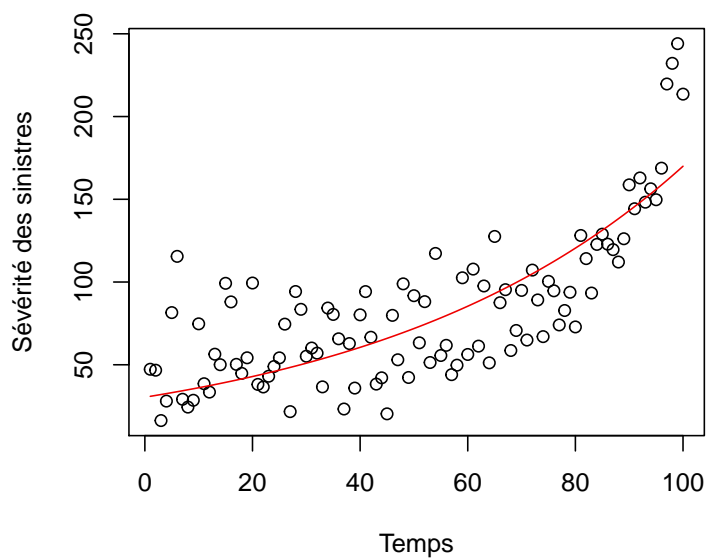
↑

Temps

↑

Erreur aléa-  
toire

### Modèle de prédiction de la sévérité des sinistres



#### 2.1.3.1 Note

On remarque que la régression exponentielle est similaire à une régression linéaire simple.

$$\ln(Y) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \times X + \ln(\varepsilon)$$

$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 \times X + \varepsilon^*$$

Qu'on appelle aussi une régression multiplicative ou log linéaire.

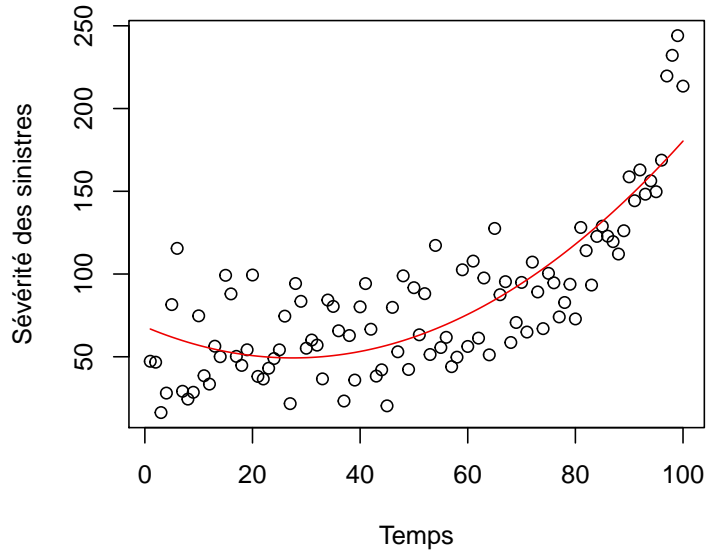
#### 2.1.4 Régression quadratique

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps et du temps au carré à l'aide du modèle quadratique suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \beta_2 \times X^2 + \varepsilon$$

$\uparrow$  Sévérité du sinistre       $\nwarrow$  Temps       $\nearrow$  Erreur aléatoire

### Modèle de prédiction de la sévérité des sinistres



#### 2.1.4.1 Note

On remarque que la régression quadratique est similaire à une régression linéaire multiple. En posant  $X_1 = X$  et  $X_2 = X^2$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Soit une régression linéaire multiple.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles linéaires seront à l'étude pour les différentes raisons suivantes :

- Plus simples
- Plusieurs modèles peuvent se ramener à un modèle linéaire simple ou multiple. (voir [2.1.3.1](#) et [2.1.4.1](#))
- Constituent souvent une très bonne approximation de la réalité qui peut être très complexe, telle que l'assurance.
- Se généralisent facilement, tels que les *Generalized Linear Models*.

Le principal problème de la modélisation linéaire est de trouver les différents paramètres  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  de telle sorte que

$$\varepsilon = Y - f(X_1, \dots, X_n; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \quad (2.1)$$

soit minimisé.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer l'erreur. Soit les erreurs suivantes :

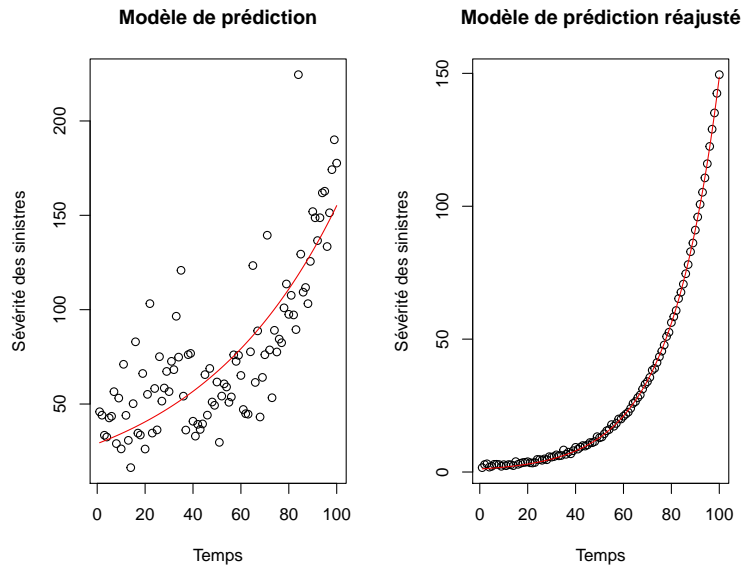
- Erreur totale
- Erreur absolue
- Erreur quadratique

Quel type d'erreur est suffisante pour déterminer  $\varepsilon$  ?

#### 2.1.4.2 Erreur totale

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t = \sum_{t=1}^n \left( Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right) \quad (2.2)$$

- Facile à mettre à 0
- Manque de fiabilité à cause de la mise à zéro



#### 2.1.4.3 Erreur absolue

$$\sum_{t=1}^n |\varepsilon_t| = \sum_{t=1}^n \left| Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right| \quad (2.3)$$

- Très robuste
- Très compliquée mathématiquement, pour minimiser  $\sum_{t=1}^n |\varepsilon_t|$  cela implique de dériver une fonction valeur absolue.

#### 2.1.4.4 Erreur quadratique

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n \left[ Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right]^2 \quad (2.4)$$

- Mathématiquement plus simple que l'erreur absolue
- Donne beaucoup de poids aux grandes erreurs

L'erreur quadratique semble donc l'option la plus simple due à la facilité mathématique et à sa fiabilité.

## 2.2 Le modèle de régression linéaire simple

Le modèle de régression linéaire simple tente d'expliquer le mieux possible la variable [dépendante](#)<sup>2</sup>  $Y$  à l'aide d'une variable [indépendante](#)<sup>3</sup>  $X$ .

Si on dispose de  $n$  paires d'observations  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  alors, le modèle s'exprime comme suit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \times X_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Où  $\beta_0$  est le paramètre associé à l'ordonnée à l'origine du modèle ;  $\beta_1$  est le paramètre associé à la pente de la droite ; et  $\varepsilon$  est le terme d'erreur.

### Quelques remarques sur le modèle

Dans l'équation 2.5 du modèle, on remarque que :

- Les observations de  $Y_i$  sont tirées d'une variable aléatoire ;
- Les observations de  $X_i$  sont considérées comme des valeurs connues et non aléatoires ;
- Les paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont inconnus au départ. Ils doivent être estimés ;
- $\varepsilon_i$  sont des réalisations inconnues d'une variable aléatoire.

---

2. On appelle parfois la variable dépendante une variable [endogène](#). Cette variable s'interprète comme étant une variable qui est due à une cause interne.

3. On appelle parfois les variables indépendantes des variables [exogène](#). Ces variables s'interprètent comme étant extérieur à un système.

## Exemple d'un modèle de régression

$X_t$  : Nombre d'années de scolarité de l'actuaire  $t$

$Y_t$  : Salaire de l'actuaire  $t$

Comment résoudre le modèle pour prédire les salaires des actuaires en fonction du nombre d'années de scolarité ?

### Raisonnement :

- Pour  $X_t = 0$  ; on a  $Y_t = \beta_0$ . Autrement dit, le salaire avec un nombre d'années nulle de scolarité est *en moyenne* de  $\beta_0$ . Par exemple,  $\beta_0$  serait le salaire moyen d'un stagiaire.
- Par la suite, pour chaque année additionnelle de scolarité, le salaire augmente *en moyenne* de  $\beta_1$  unités.

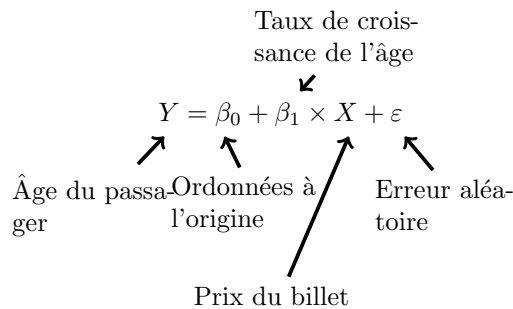
Ainsi, *en moyenne* on a

$$\mathbf{E}[Y_t|X_t] = \beta_0 + \beta_1 \times X_t$$

Habituellement, la relation n'est pas parfaitement exacte dans la réalité. On se retrouve ainsi avec une *différence* dans notre variable exogène prédite. L'erreur est notée  $\varepsilon_t$  et est telle que mentionnée plus tôt, assumée aléatoire.

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= Y_t - \mathbf{E}[Y_t|X_t] \\ &= Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t)\end{aligned}$$

En réorganisant, on retrouve l'équation 2.5.



On doit maintenant trouver les paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  de manière à minimiser l'erreur  $\varepsilon_t$ .

Si  $\varepsilon_t$  est minimal, cela veut dire que  $Y_t \approx \beta_0 + \beta_1 \times X_t$ . Ce qui signifie que la droite de régression est une bonne approximation de  $Y_t$ .





### En résumé

En résumé, on cherche à minimiser nos résidus en optimisant les paramètres  $\beta_i$ .

## 2.2.1 Coefficients de régression

Les paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont déterminés en minimisant l'erreur quadratique à l'aide de la méthode des moindres carrés.

$$\begin{aligned}
S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \\
&= \sum_{t=1}^n (Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t))^2 \\
&= \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta_0 - \beta_1 \times X_t)^2
\end{aligned}$$

Où  $S(\psi)$  peut être considérée comme une mesure de la *distance* entre les données observées et le modèle théorique qui prédit ces données<sup>4</sup>.

Afin de minimiser la fonction  $S(\beta_0, \beta_1)$ , on dérive la fonction partiellement en fonction de chacun des paramètres.

### 2.2.1.1 Minimisation de $\beta_0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_0} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t)^2 &= 0 \\
-2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t) &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= 0 \tag{2.6}
\end{aligned}$$

4. Pour de plus amples informations sur la méthode des moindres carrés et la fonction de *distance*, la page [Wikipédia](#) contient une bonne explication sur le sujet.

### 2.2.1.2 Minimisation de $\beta_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_1} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t)^2 &= 0 \\
-2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t) \times X_t &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

À l'aide des équations 2.6 et 2.7, on peut trouver les deux inconnus  $\beta_0$  et  $\beta_1$ .

À partir de 2.6 :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= n \times \hat{\beta}_0 \\
\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{n} &= \hat{\beta}_0 \\
\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}} &
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Et à partir de 2.7 :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t &= \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2
\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \quad (2.9)$$

On utilise l'équation 2.8 de  $\hat{\beta}_0$  avec l'équation 2.9 de  $\hat{\beta}_1$ , on développe l'équation résultante afin d'isoler  $\hat{\beta}_1$ .

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \sum_{t=1}^n X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \times n\bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n\bar{Y}\bar{X} + \hat{\beta}_1 \times \bar{X}^2 \times n}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \end{aligned}$$

En isolant  $\hat{\beta}_1$ , on obtient la définition suivante

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n\bar{Y}\bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2}} \quad (2.10)$$

### 2.2.1.3 Remarques

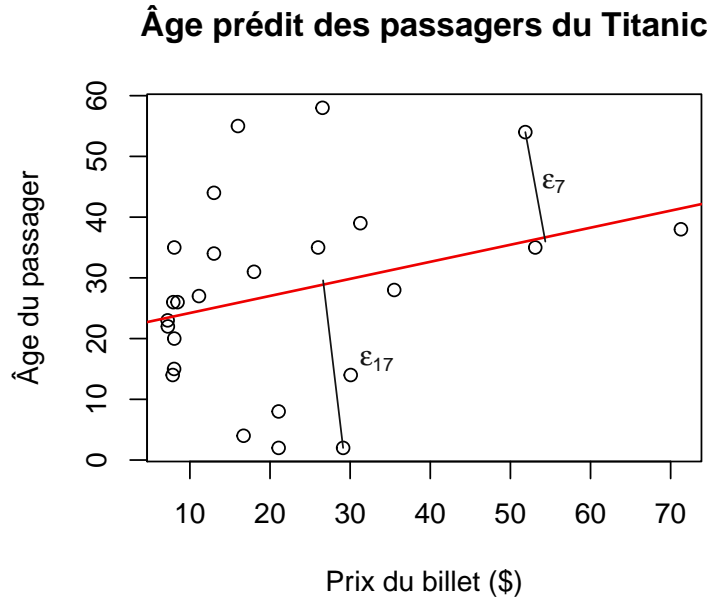
1. On note  $\hat{\varepsilon}_t$  les résidus générés par le modèle estimé :

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t) ; \text{ pour } t = 1, 2, \dots, n$$

Si on illustre graphiquement les résidus, il s'agit du segment le plus court entre la droite de régression et la donnée observée.

Si on reprend le graphique de la section 2.1.1, on observe facilement les résidus sur cette représentation graphique :



2. Le *centre de gravité*<sup>5</sup> des données  $(\bar{X}, \bar{Y})$  se trouvent exactement sur la droite de régression.

On peut facilement effectuer cette preuve à partir de l'équation 2.8,

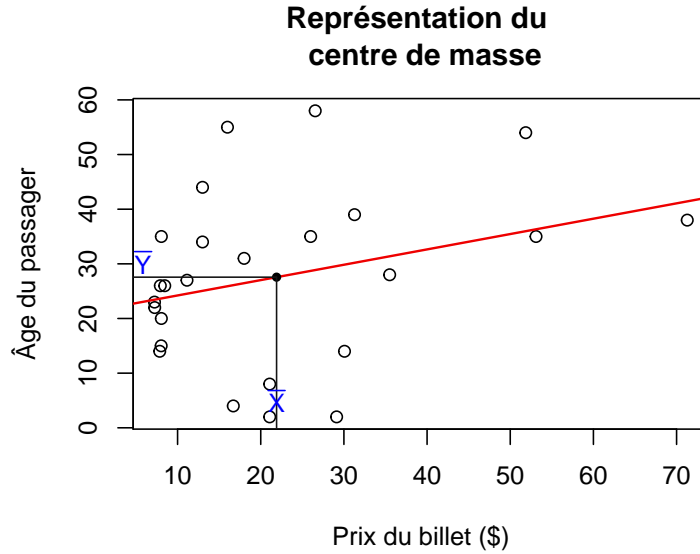
$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ \bar{Y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} + 0\end{aligned}$$

On note ainsi une absence de résidus pour le centre de masse.

Si on reprend (encore) le graphique de la section 2.1.1, on observe facilement le centre de masse sur le graphique.

---

5. Qu'on appelle parfois le centre de masse.



3. La somme des résidus de tout modèle de régression linéaire est nulle.

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t &= \sum_{t=1}^n (Y_t - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t)) \\
 &\stackrel{2.8}{=} \sum_{t=1}^n (Y_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) - \hat{\beta}_1 X_t) \\
 &= \sum_{t=1}^n Y_t - \sum_{t=1}^n \bar{Y} + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n \bar{X} - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t \\
 &= n\bar{Y} - n\bar{Y} + \hat{\beta}_1 + n\bar{X} - \hat{\beta}_1 + n\bar{X} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

#### 2.2.1.4 Notation

Afin de faciliter l'écriture, on intègre la notation suivante ;  $S_{xx}$  et  $S_{xy}$ . Les expressions précédentes sont appelées respectivement : la somme des carrés corrigée de  $x$  et la somme des produits croisés corrigée de  $x$  et de  $y$ . Voici le développement pour  $S_{xx}$ ,

$$\begin{aligned}
S_{xx} &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \\
&= \sum_{t=1}^n (X_t^2 - 2X_t\bar{X} + \bar{X}^2) \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - 2\bar{X} \sum_{t=1}^n X_t + n\bar{X}^2 \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - 2\bar{X}n\bar{X} + n\bar{X}^2 \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2
\end{aligned}$$

On effectue le même type de développement pour  $S_{xy}$ ,

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) \\
&\vdots \\
&= \sum_{t=1}^n X_t Y_t - n\bar{X}\bar{Y}
\end{aligned}$$

À l'aide des sommes de carrés corrigés, on peut réécrire la définition de  $\hat{\beta}_1$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}} \quad (2.11)$$

### 2.2.1.5 Exemple

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

- On dispose des cinq observations suivantes du couple  $(X_t, Y_t)$  dans le tableau de gauche ainsi que les éléments calculés nécessaires pour trouver les paramètres dans le tableau de droite.

t	$X_t$	$Y_t$
1	2	2
2	3	5
3	6	3
4	9	6
5	12	5
Totaux :	32	21

t	$X_t^2$	$X_t Y_t$
1	4	4
2	9	15
3	36	18
4	81	54
5	144	60
Totaux :	274	151

À partir des définitions 2.8 et 2.10, on trouve facilement la valeur de  $\hat{\beta}_0$  et de  $\hat{\beta}_1$ .

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n \bar{Y} \bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 - n \bar{X}^2} \\
 &= \frac{151 - (5)(\frac{21}{5})(\frac{32}{5})}{274 - (5)(\frac{32}{5})^2} \\
 &= \frac{83}{346} \\
 &\approx 0.2399
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\
 &= \frac{21}{5} - \left(\frac{83}{346}\right) \times \left(\frac{32}{5}\right) \\
 &\approx 2.6647
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi le modèle de régression suivant :

$$Y_t = 2.6647 + 0.2399X_t + \varepsilon_t$$

t	$Y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$	$\hat{\varepsilon}_t$
1	3.1445	-1.1445
2	3.3844	1.6156
3	4.1041	-1.1041
4	4.8238	1.1762
5	5.5435	-0.5435



$$\sum_{t=1}^5 \varepsilon_t \approx -0.0003$$

## Exécution en R

```
3 > # Dataset
4 > x <- c(2,3,6,9,12); y <- c(2,5,3,6,5)
5 > # Estimations des parametres
6 > reg <- lm(y ~ x)
7 > # Resume de l'estimation
8 > summary(reg)
9 > # Valeurs de Yt
10 > fitted(reg)
11 > # Residus
12 > residuals(reg)
```

Listing 2.1 – Code source en R pour l'exemple

### i

#### *Astuce calculatrice*

La calculatrice TI-30XS Multiview permet de créer un tableau de donnée et de sortir rapidement et facilement différentes informations sur une régression à partir des données.

Tel que :

- $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$ ;
- $\sum_{t=1}^n X_t$ ,  $\sum_{t=1}^n X_t^2$ ,  $\sum_{t=1}^n Y_t$ ,  $\sum_{t=1}^n Y_t^2$  et  $\sum_{t=1}^n X_t Y_t$ ;
- $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$

Pour de plus ample information, consulter le [guide](#) sur les calculatrices.

### 2.2.2 Caractéristiques du terme d'erreur

On rappelle que l'équation du modèle de régression correspond à

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \times X_t + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

De plus, on sait qu'il s'agit des valeurs moyennes de  $Y_t$  en sachant  $X_t$ , soit

$$Y_t = \mathbf{E}[Y_t|X_t] + \varepsilon_t$$

On peut ainsi formuler les trois postulats<sup>6</sup> suivants,

---

6. Le [postulat](#) est un principe non démontré, mais utilisé dans la construction d'une théorie mathématique.



1.  $\mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0$ , par définition pour que  $\mathbf{E}[Y_t] = \mathbf{E}[Y_t|X_t]$ . Il s'agit de l'hypothèse de linéarité de la variable explicative. On dit qu'elle est exogène si elle n'est pas corrélée au terme d'erreur.
2.  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ , la variance des termes d'erreurs est supposée constante. Il s'agit de l'hypothèse d'homoscédasticité.
3.  $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ , pour  $t \neq s$ , il n'y a pas de corrélation entre les termes d'erreurs. Il s'agit de l'hypothèse d'indépendance des erreurs.

### i

#### *Quatrième postulat*

Les hypothèses de linéarité et d'homoscédasticité sont très intéressantes, si on observe leurs définitions ensemble on remarque qu'il s'agit d'une distribution avec une espérance nulle et une variabilité supposée constante. Ce qui nous amène à une quatrième hypothèse, les résidus sont distribués selon une loi normale.

$$\hat{\varepsilon}_t|x_i \sim N(0, \sigma^2)$$

## 2.3 Propriétés de l'estimateur des moindres carrés (EMC)

### 2.3.1 Estimateur sans biais

On rappelle qu'un estimateur est dit sans biais lorsque son espérance est égale à la valeur vraie du paramètre, soit  $\mathbf{E}[\hat{\theta}] = \theta \Leftrightarrow b(\hat{\theta}) = 0$ <sup>7</sup>.

$$\mathbf{E}[\hat{\beta}_1] = \mathbf{E}\left[\frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right]$$

---

7. Notes de cours ACT-2000, chapitre 3, Thomas Landry, Hiver 2017.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \mathbf{E}[Y_t - \bar{Y}]}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) (\mathbf{E}[Y_t] - \mathbf{E}[\bar{Y}])}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}
\end{aligned}$$

De l'équation 2.5, et avec le postulat 1, on sait que,

$$\begin{aligned}
Y_t &= \beta_0 + \beta_1 \times X_t + \varepsilon_t \\
\mathbf{E}[Y_t] &= \mathbf{E}[\beta_0 + \beta_1 \times X_t] + \mathbf{E}[\varepsilon_t] \\
&\stackrel{1}{=} \beta_0 + \beta_1 \times X_t + 0
\end{aligned}$$

On applique le même raisonnement pour l'espérance de  $\bar{Y}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\hat{\beta}_1] &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) (\mathbf{E}[Y_t] - \mathbf{E}[\bar{Y}])}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) (\beta_0 + \beta_1 \times X_t - \beta_0 - \beta_1 \bar{X}_t)}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \beta_1 (X_t - \bar{X}_t)}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1 \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\
\mathbf{E}[\hat{\beta}_1] &= \beta_1
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\hat{\beta}_0] &= \mathbf{E}[\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}] \\
&= \mathbf{E}[\bar{Y}] - \bar{X} \mathbf{E}[\hat{\beta}_1] \\
&= \beta_0 + \beta_1 \bar{X} - \bar{X} \beta_1 \\
\mathbf{E}[\hat{\beta}_0] &= \beta_0
\end{aligned}$$

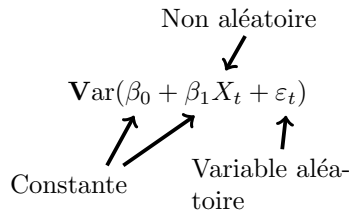
On peut ainsi conclure que les deux estimateurs des paramètres sont sans biais.

### 2.3.2 Variances et covariances des estimateurs

On s'intéresse aux variances et aux covariances des estimateurs, cette deuxième propriété ainsi que la première nous permettra de déduire une conclusion en lien avec le quatrième postulat.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\hat{\beta}_1) &= \mathbf{Var}\left(\frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right) \\
&= \frac{\mathbf{Var}\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})Y_t - \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})\bar{Y}\right)}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2} \\
&= \frac{\mathbf{Var}\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})Y_t\right) + \mathbf{Var}\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})\bar{Y}\right)}{\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \mathbf{Var}(Y_t) + \mathbf{Var}(\bar{Y}(n\bar{X} - n\bar{X})) \\
= & \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \mathbf{Var}(\beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t) + 0}{\left( \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \right)^2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \mathbf{Var}(\varepsilon_t) \\
= & \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \sigma^2}{\left( \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \right)^2} \\
\stackrel{2}{=} & \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \sigma^2}{\left( \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

(2.12)

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\hat{\beta}_0) &= \mathbf{Var}(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\
&= \mathbf{Var}(\bar{Y}) + \mathbf{Var}(\hat{\beta}_1 \bar{X}) - 2\mathbf{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\
&= \mathbf{Var}\left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n}\right) + \bar{X}^2 \mathbf{Var}(\hat{\beta}_1) - 2\bar{X} \mathbf{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) \\
&= \frac{n \times \mathbf{Var}(Y_t)}{n^2} + \bar{X}^2 \left( \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right) - 2\bar{X} \mathbf{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) &= \mathbf{Cov}\left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n}, \frac{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})(Y_s - \bar{Y})}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2}\right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \mathbf{Cov}\left(\sum_{t=1}^n Y_t, \sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})Y_s - \bar{Y} \sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})\right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X}) \mathbf{Cov}(Y_t, Y_s) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \left( \sum_{t=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ :t \neq s}}^n (X_s - \bar{X}) \times 0 + \sum_{t=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ :t=s}}^n (X_s - \bar{X}) \sigma^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \sigma^2 \left( \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X})^2} \sigma^2 (n\bar{X} - n\bar{X}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 \left( \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right) \quad (2.13)$$

Finalement, pour la covariance entre  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= \text{Cov}(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}, \hat{\beta}_1) \\ &= \text{Cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) - \bar{X} \text{Var}(\hat{\beta}_1) \\ &= 0 - \bar{X} \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\bar{X} \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad (2.14)$$

### **i**

#### *Résumé des propriétés des estimateurs*

Les équations 2.13 et 2.12 ainsi que le postulat 4 à la section 2.2.2 nous permettent de conclure que

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &\sim N \left( \beta_0, \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 \left( \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right) \right) \\ \hat{\beta}_1 &\sim N \left( \beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right) \end{aligned}$$

### 2.3.3 Optimalité

Le théorème de **Gauss-Markor** nous permet d'établir que l'estimateur des moindres carrés est l'estimateur non biaisé à variance minimale.

### Notions importantes à retenir du théorème :

1. Considérer l'estimateur  $\Theta^* = \sum_{t=1}^n C_t \times Y_t$
2. Minimiser  $\text{Var}(\Theta^*)$  sous la contrainte que  $\mathbf{E}[\Theta^*] = \beta$ ; où

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Régression passant par l'origine

Dans certaines situations, il est possible que l'on souhaite forcer la droite de régression à passer par l'origine. Voici un exemple de situation où il est plus logique de forcer le modèle,

$X_t$  : Nombre de Km parcourut

$Y_t$  : Consommation d'essence en L d'une voituret

Il est plus logique d'avoir une consommation de 0 L pour une distance de 0 Km. Dans ce cas, on peut postuler le modèle suivant :

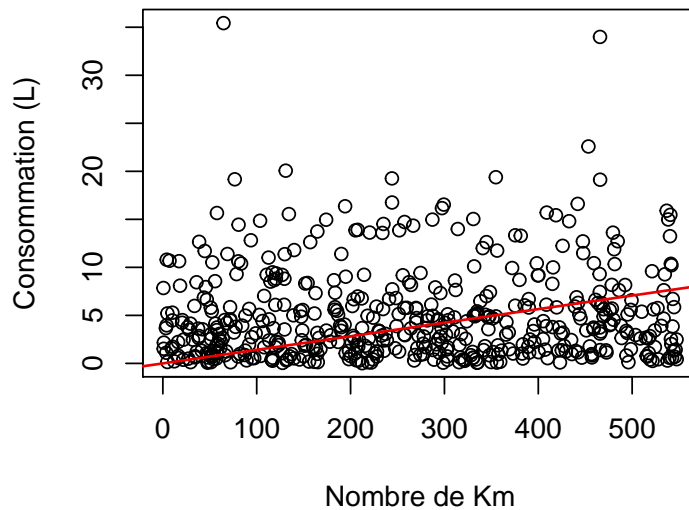
$$Y_t = \beta \times X_t + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

On peut démontrer par le même raisonnement qu'à la section 2.2.1 que de minimisation du paramètre  $\beta$  correspond à :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \quad (2.16)$$

On reprend l'exemple énoncer plus haut, voici le modèle représenter graphiquement :

### Modèle d'analyse de la consommation d'essence



#### Code R

Voici le code R permettant de créer un modèle linéaire simple avec une droite passant par l'origine.

```
3 > # dataset
4 > # X Km parcourus
5 > # Y consommation essence en L
6 > simul <- 500
7 > alpha <- 1
8 > beta <- alpha/5.1
9 > y <- rgamma(simul, alpha, beta)
10 > x <- runif(simul, 0, 550)
11 > # Estimation de beta
12 > reg <- lm(y ~ x - 1)
13 > plot(x, y, xlab = "Nombre de Km", ylab = "Consommation (L)",
14 >      main= "Modele d'analyse de la \n consommation d'essence")
14 > abline(reg, col="red2", lwd = 1.5)
```

Listing 2.2 – Code source en R pour l'exemple

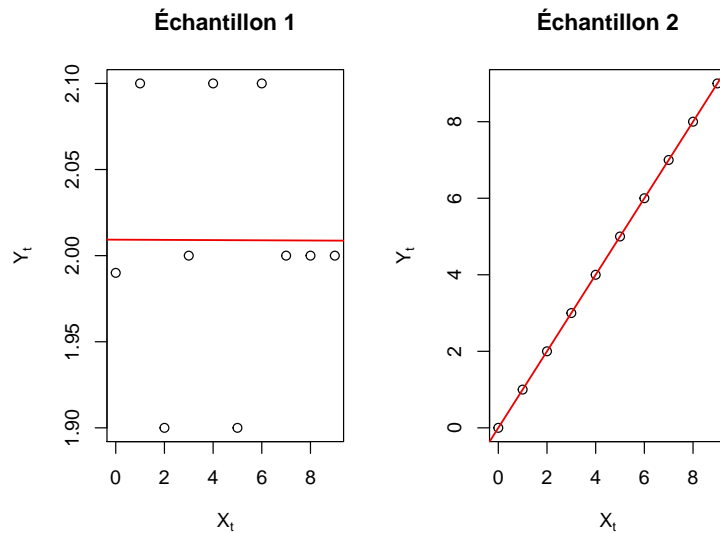


## 2.5 Analyse de la variance

Un tableau d'analyse de la variance permet d'évaluer la qualité de l'ajustement du modèle aux observations.

### Idée

1. Si on décide de modéliser  $Y_t$  sans la régression, autrement dit de l'analyse statistique<sup>8</sup>, alors  $Y$  est vue comme une variable aléatoire avec une certaine variance, soit  $Var(y)$ .
2. En utilisant la régression pour modéliser  $Y_t$  en fonction de  $X_t$  une partie de la variance de  $Y_t$  est *expliquée* par la variance de  $X_t$ , alors que l'autre partie reste *inexpliquée*.
3. L'utilité de la régression est de trouver la proportion de la variance de  $Y_t$  qui est expliquée par la variance de  $X_t$ .



On voit que les résidus de l'échantillon 1 sont très mal expliqués par notre modèle, les résidus sont très élevés. Tandis que les résidus de l'échantillon 2 sont parfaitement expliqués par notre modèle.

\$residusMauvaisFit

1	2	3	4	5	6	7	8
2.009273	2.009212	2.009152	2.009091	2.009030	2.008970	2.008909	2.008848
9	10						
2.008788	2.008727						


---

8. Cours ACT-2000


```
$residusBonFit
      1          2          3          4          5
-2.580003e-16  1.000000e+00  2.000000e+00  3.000000e+00  4.000000e+00
      6          7          8          9         10
  5.000000e+00  6.000000e+00  7.000000e+00  8.000000e+00  9.000000e+00
```

Il y a peu d'intérêt de construire un modèle avec les données de l'échantillon 1 car,

$$\text{Var}(Y_t) \approx 0\% \times \text{Var}(X_t) + 100\% \times \text{Var}(\varepsilon_t)$$



Expliquée



Inexpliquée

Il est préférable dans ce cas-ci d'utiliser les modèles statistiques vus dans le cours ACT-2000.

Par contre, il y a un intérêt à utiliser un modèle avec les données de l'échantillon 2 car,

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(X_t)$$

Autrement dit, la variable X explique bien la variable Y.

### Note

Noter que les modèles précédents ont été ajustés pour mieux représenter le concept, un modèle avec un fit parfait n'est pas réaliste dans la réalité.

### 2.5.1 Notions préliminaires : Somme des carrés

La variance totale de  $Y_t$  est décomposable sous le modèle de régression linéaire, cette décomposition permet d'analyser l'ajustement du modèle. On la représente ainsi :

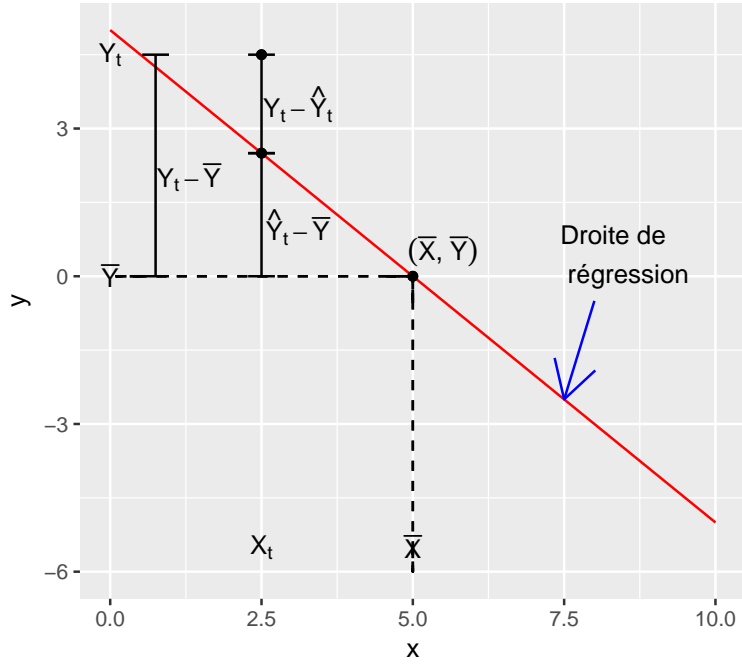
$$SST = \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2$$

### Décomposition

$$(Y_t - \bar{Y}) = Y_t - \hat{Y}_t + \hat{Y}_t - \bar{Y}$$

$$(Y_t - \bar{Y}) = (Y_t - \hat{Y}_t) + (\hat{Y}_t - \bar{Y})$$

$$\underbrace{(Y_t - \bar{Y})}_{\text{Variation totale de } Y_t} = \underbrace{(Y_t - \hat{Y}_t)}_{\substack{\text{Résidu} \\ \text{Variation inexpliquée} \\ \text{par la régression}}} + \underbrace{(\hat{Y}_t - \bar{Y})}_{\substack{\text{Variation de } \hat{Y}_t \\ \text{Variation expliquée} \\ \text{par la régression}}}$$



Par conséquent, on a que

$$\begin{aligned}
 SST &= \sum_{t=1}^n \left[ (\hat{Y}_t - \bar{Y}) + (Y_t - \hat{Y}_t) \right]^2 \\
 &= \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 + \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 + 2 \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})(Y_t - \hat{Y}_t) \\
 &= \underbrace{\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}_{\substack{\text{SSR} \\ \text{Régression}}} + \underbrace{\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2}_{\substack{\text{SSE} \\ \text{Erreur}}} + \underbrace{2 \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})(Y_t - \hat{Y}_t)}_{\psi}
 \end{aligned}$$

### Développement de $\psi$

$$\begin{aligned}
2 \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})(Y_t - \hat{Y}_t) &\Rightarrow 2 \sum_{t=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X})(Y_t - \bar{Y} + \bar{Y} - \hat{Y}_t) \\
&= 2 \sum_{t=1}^n \hat{\beta}_1 (\hat{X}_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) \\
&= 2 \sum_{t=1}^n \hat{\beta}_1 (\hat{X}_t - \bar{X}) \left( (Y_t - \bar{Y}) - \hat{\beta}_1 (X_t - \bar{X}) \right) \\
&= 2 \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n (\hat{X}_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) - 2 \hat{\beta}_1^2 \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \\
&= 2 \hat{\beta}_1 (S_{xy} - \hat{\beta}_1 S_{xx}) \\
&\stackrel{2.11}{=} 2 \hat{\beta}_1 \left( S_{xy} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}} S_{xx} \right) \\
&= 2 \hat{\beta}_1 (S_{xy} - S_{xy}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{SST = SSR + SSE} \quad (2.17)$$

Où SSR est la variation expliquée par le modèle de régression linéaire et SSE signifie la variation inexpliquée, ou résiduelle du modèle de régression linéaire.

Intuitivement,

- Dans un bon modèle de régression, on aimerait que
  - $SST \approx SSR$ , soit que  $\mathbf{Var}(Y_t) \approx \mathbf{Var}(X_t)$
- ou
- $SSE \approx 0$ , soit que la variation résiduelle soit très faible
- On définit le coefficient de détermination par

$$\boxed{R^2 = \text{Corr}^2(Y, \hat{Y}) = \frac{SSR}{SST} \Leftrightarrow 1 - \frac{SSE}{SST}} \quad (2.18)$$

Par rapport au ratio,  $\frac{SSR}{SST}$  signifie le pourcentage de la variance dans  $Y_t$  expliqué par la régression et  $1 - \frac{SSR}{SST}$  signifie le pourcentage de la variance dans  $Y_t$  qui n'est pas expliquée par la régression.

- $R^2 \in [0, 1]$
- Si  $R^2 = 100\%$ , la régression est parfaite et utile ; si  $R^2 = 0\%$ , la régression n'est pas parfaite et elle est inutile.

## 2.5.2 Notions préliminaires : Degrés de liberté

Le nombre de *degrés de liberté*<sup>9</sup> d'une *somme de carrés* est :

- Le nombre de composants *indépendants* dans la somme ;

ou

- Le nombre minimal de fonctions de  $Y_1, \dots, Y_n$  qu'il faut connaître pour obtenir la somme ;

ou

- **Pour SST et SSE seulement**

$$d.l. = (\text{Nombre de termes dans la somme}) - (\text{Nombre de paramètres estimés dans cette somme})$$

Ainsi,

- $SST = \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 \rightarrow n \text{ termes} - (1 \text{ paramètre estimé}^{10}) = \boxed{(n-1) d.l.}$

- $SSE = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2$

$$\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t)^2 \rightarrow n \text{ termes} - (2 \text{ paramètres estimés}^{11}) = \boxed{(n-2) d.l.}$$

- $SSR = \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 &= \sum_{t=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X})^2 \\ &= \underbrace{\hat{\beta}_1^2}_{f(y_1, \dots, y_n)} \times \underbrace{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}_{f(x_1, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

Soit une seule fonction des  $Y_1, \dots, Y_n$  doit être connue pour obtenir  $SSR \rightarrow \boxed{1 d.l.}$

### Remarque

On sait que :

$$SST = SSE + SSR$$

On note aussi que

$$\begin{aligned} d.l.(SST) &= d.l.(SSE) + d.l.(SSR) \\ (n-1) &= (n-2) + (1) \end{aligned}$$

9. Couramment l'abréviation *d.l.* sera utiliser pour signifié *degrés de liberté*.

10.  $\bar{Y}$

11.  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$

On aurait donc pu retrouver  $d.l.(SST) = d.l.(SSE) + d.l.(SSR)$ .

### 2.5.3 Tableau d'analyse de la variance

On appelle couramment le tableau d'analyse de la variance le tableau ANOVA. Ce type de tableau est utilisé dans tous les logiciels de régression pour évaluer la qualité d'un modèle.

Source de la variance	Somme des carrés ( $SS$ )	Degrés de liberté ( $d.l.$ )	Carrés moyens ( $MS$ )	Ratio de Fisher ( $F$ )
Régression	$SSR$	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
Erreur	$SSE$	n - 2	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$	
Total	$SST$	n - 1		

#### Exemple

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information, on reprend l'exemple de la section 2.2.1.5.

t	$X_t$	$Y_t$	$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$	$\hat{\varepsilon}_t$
1	2	2	3.1445	-1.1445
2	3	5	3.3844	1.6156
3	6	3	4.1041	-1.1041
4	9	6	4.8238	1.1762
5	12	5	5.5435	-0.5435
Totaux :	32	21		

$$SSE = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = 6.8179$$

$$SSR = \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 = 3.9821$$

$$SST = SSE + SSR = 6.8179 + 3.9821 = 10.8000$$

#### ANOVA

Source	$SS$	$d.l.$	$MS$	$F$
Régression	3.9821	1	3.9821	1.7522
Erreur	6.8179	3	2.2726	
Totaux	10.8000	4		

$R^2$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{3.9821}{10.8000} = 36.87\%$$
$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{6.8179}{10.8000} = 36.87\%$$

Autrement dit, seulement 36.87 % de la variabilité des  $Y_t$  est expliquée par la variabilité des  $X_t$ . La régression n'est pas très efficace et utile.

### Code R

Voici le code R permettant de créer un modèle linéaire simple avec une droite passant par l'origine.

```
3 > # Dataset
4 > y <- c(2, 5, 3, 6, 5); x <- c(2, 3, 6, 9, 12)
5 > # Estimation des betas
6 > reg <- lm(y ~ x)
7 > anova(reg)
```

Listing 2.3 – Code source en R pour l'exemple

## 2.6 Intervalles de confiance (I.C.) et test d'hypothèses

On poursuit l'objectif des sections 2.3 et 2.5, soit de valider la qualité du modèle de régression.

### 2.6.1 Distribution des variables aléatoires

On rappelle qu'avec le postulat 4 (2.2.2), on suppose que les résidus suivent une loi normale d'espérance nulle et de variance de  $\sigma^2$ .

$$\hat{\varepsilon}_t | x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

Les conséquences de ce postulat sont les suivantes :

1.  $(Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t) \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_t, \sigma^2)$  (Postulat 1)

2. Les propriétés de l'estimateur des moindres carrés avaient permis de démontrer que (section 2.3) :

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 \left( \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)\right)$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right)$$

**i**

### *Alternative*

On peut tirer la même conclusion à partir de la propriété des fonctions linéaires de  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$ .

3. L'estimateur sans biais pour  $\sigma^2$  est :

$$\sigma^2 = S^2 = MSE$$

$$MSE = \frac{SSE}{d.l.(SSE)}$$

$$\frac{SSE}{d.l.(SSE)} = \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n - 2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}{n - 2} \quad (2.19)$$

4. On peut montrer que

$$\left( \frac{SSE}{\sigma^2} \right) \sim \chi^2(n - 2) \quad (2.20)$$

## 2.6.2 Intervalle de confiance pour $\beta_1$

*Attention de ne pas confondre avec  $\hat{\beta}_1$ .*



Puisque  $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \mathbf{Var}(\hat{\beta}_1))$ , on a que

$$\left( \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\mathbf{Var}(\hat{\beta}_1)}} \right) \sim N(0, 1)$$

Si  $\sigma^2$  était connu, l'intervalle de confiance serait de la forme suivante

$$\left[ \hat{\beta}_1 \pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\mathbf{Var}(\hat{\beta}_1)} \right]$$

Par contre,  $\sigma^2$  n'est souvent pas connu et il est nécessaire de l'estimer. Tel que mentionné plus haut, l'estimateur non biaisé correspond à l'équation 2.19. Mais cet estimateur ne suit pas une distribution normale. À l'aide des notions acquises en ACT-2000, il est possible de démontrer que si on utilise l'estimateur de  $\sigma^2$ , soit  $S^2$ , dans la formule de  $\mathbf{Var}(\hat{\beta}_1)$ , c'est-à-dire :

$$\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_1) = \frac{S^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

Alors, on peut conclure que :

$$\left( \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_1)}} \right) \sim t(n-2)$$

On obtient ainsi l'intervalle de confiance suivant au niveau  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour  $\beta_1$ , soit :

$$\boxed{\hat{\beta}_1 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{\frac{S^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}}} \quad (2.21)$$

### 2.6.3 Intervalle de confiance pour $\beta_0$

De manière similaire, un intervalle de confiance au niveau  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour  $\beta_0$  est l'expression suivante :

$$\boxed{\hat{\beta}_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{\frac{S^2}{n} + \frac{S^2 \bar{X}^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}}} \quad (2.22)$$

### 2.6.4 Tests d'hypothèses sur les paramètres

Principales questions auxquelles on aimerait répondre :

1. L'ordonnée à l'origine ( $\beta_0$ ) est-elle significativement différente de 0 ?  
Sinon, on considère le modèle  $Y_t = \beta_1 \times X_t + \varepsilon_t$ .
2. La pente ( $\beta_1$ ) est-elle significativement différente de 0 ?  
Sinon, on considère le modèle  $Y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$ .

Pour tester la question 1 :

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_0 &= 0 \\H_1 : \beta_0 &\neq 0\end{aligned}$$

On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_0)}}$$

Pour tester la question 2 :

$$\begin{aligned}H_0 : \beta_1 &= 0 \\H_1 : \beta_1 &\neq 0\end{aligned}$$

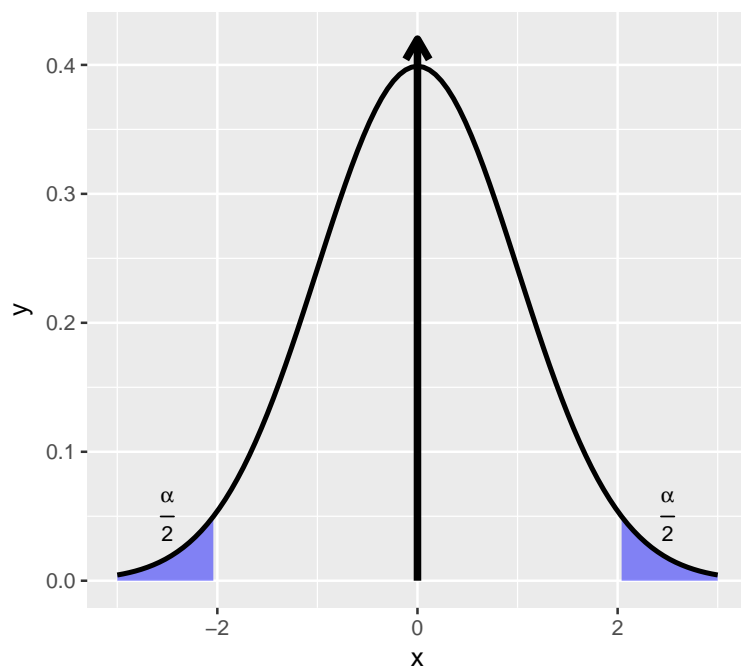
On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)}}$$

On rejette  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour  $\beta_0$  si :

$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}(n-2)}$$

Voici une représentation graphique de la zone de rejet bilatéral :



Qui correspond à la probabilité de *se tromper* en rejetant  $H_0$ .

### Remarques

De manière générale, on utilise plutôt les tests d'hypothèses suivants pour nos deux questions :

Pour tester la question 1 :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_0 &= \beta_0^* \\ H_1 : \beta_0 &\neq \beta_0^* \end{aligned}$$

On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0^*}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_0)}}$$

Pour tester la question 2 :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1 &= \beta_1^* \\ H_1 : \beta_1 &\neq \beta_1^* \end{aligned}$$

On utilise la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\sqrt{\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_1)}}$$

On rejette  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour  $\beta_0$  si :

$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

### Exemple

Dans une régression sur un ensemble de 14 observations, on a obtenu les informations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t &= 68.494 - 0.468X_t \\ \widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}) &= \widehat{\mathbf{Var}}\left(\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_0) & \widehat{\mathbf{Cov}}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ \widehat{\mathbf{Cov}}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 66.8511 & 1.2544 \\ 1.2544 & 0.0237 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

### Question 1

Tester si  $\beta_0$  est significativement différent de 0 à un taux de confiance de 95 %.

$H_0 : \beta_0 = 0$  Hypothèse nulle

$H_1 : \beta_0 \neq 0$

On utilise la statistique suivante,

$$\begin{aligned}t &= \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\sqrt{\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_0)}} \\ &= \frac{68.494 - 0}{\sqrt{66.8511}} \\ &= 8.38 \\ t_{\frac{0.05}{2}}(14 - 2) &= 2.18\end{aligned}$$

Étant donné que  $|8.38| > 2.18$ , on rejette  $H_0$  au niveau de confiance de 95 %. Autrement dit, l'ordonnée à l'origine est significative.

### Question 2

Tester si  $\beta_1$  est significativement différent de 0 à un taux de confiance de 95 %.

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

On utilise la statistique suivante,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)}} \\ &= \frac{-0.468 - 0}{\sqrt{0.0237}} \\ &= -3.040 \\ t_{\frac{0.05}{2}}(14 - 2) &= 2.18 \end{aligned}$$

Étant donné que  $|-3.040| > 2.18$ , on rejette  $H_0$  au niveau de confiance de 95 %. Autrement dit, il y a 95 % de chance que la régression soit utile.

### Question 3

Tester si  $\beta_1$  est significativement négatif à un taux de confiance de 95 %.

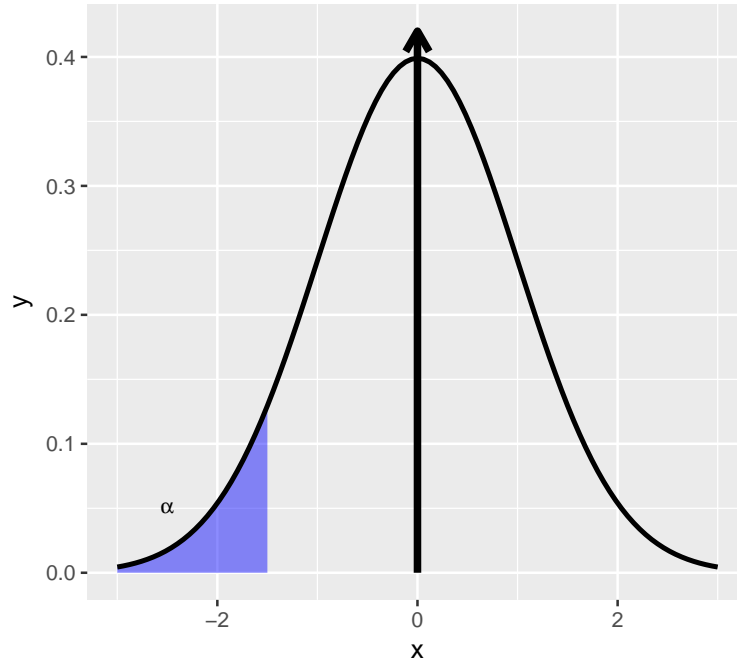
$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 < 0$$

On utilise la statistique suivante,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)}} \\ &= \frac{-0.468 - 0}{\sqrt{0.0237}} \\ &= -3.040 \\ -t_{0.05}(14 - 2) &= -1.78 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un test unilatéral, la zone de rejet est la suivante



Étant donné que  $|-3.040| < -1.78$ , on rejette  $H_0$  au niveau de confiance de 95 %. Autrement dit, la pente de la droite est significativement négative.

#### Question 4

Obtenir un I.C. au niveau de confiance de 95 % pour  $\beta_0$ .

$$\begin{aligned}\beta_0 &\in \hat{\beta}_0 \pm t_{0.95}(14-2) \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_0)} \\ &\in 68.494 \pm 2.18 \times \sqrt{66.8511} \\ &\in ]50.670, 86.318[ \end{aligned}$$

L' I.C. permet de valider le test d'hypothèse de la question 1, car il ne comprend pas la valeur zéro.

#### Question 5

Obtenir un I.C. au niveau de confiance de 95 % pour  $\beta_1$ .

$$\begin{aligned}
\beta_1 &\in \hat{\beta}_1 \pm t_{\frac{0.05}{2}}(14-2)\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)} \\
&\in -0.468 \pm 2.18 \times \sqrt{0.0237} \\
&\in ] -0.804, -0.132[
\end{aligned}$$

L'I.C. permet de valider le test d'hypothèse de la question 2 et 3, il ne comprend pas la valeur zéro et est strictement négatif.

### 2.6.5 Test de la validité globale de la régression

Une régression linéaire simple est valide, ou significative si  $\beta_1 \neq 0$ . Le tableau ANOVA obtenue en 2.5.3 peut être utilisé pour tester les hypothèses :

$$\begin{aligned}
H_0 : \beta_1 &= 0 \\
H_1 : \beta_1 &< 0
\end{aligned}$$

avec la statistique de Fisher,

$$\begin{aligned}
F &= \frac{MSR}{MSE} \\
&= \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{(n-2)}}
\end{aligned}$$

Sous  $H_0$ , on a que  $F \sim F(1, n-2)$ .

On rejette donc  $H_0$  au niveau  $100 \times (1 - \alpha)\%$  si

$$\boxed{F > F_\alpha(1, n-2)} \tag{2.23}$$

**i***Équivalent*

En régression linéaire simple **seulement**, le test F est équivalent au test  $t$  pour  $\beta_1 = 0$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{(n-2)}} = \frac{SSR}{\sigma^2} = \frac{SSR}{S^2} = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{S^2} \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X})^2}{S^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \times \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{S^2} \\
 &= \frac{\hat{\beta}_1^2}{\frac{S^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}} \\
 &= \frac{(\hat{\beta}_1 - 0)^2}{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)} \\
 &= t^2
 \end{aligned}$$

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

**Exemple**

Soit le tableau ANOVA suivant :

Source	$SS$	$d.l.$	$MS$	$F$
Régression	48.845	1	48.845	9.249
Erreur	63.374	12	5.281	
Total	112.219	13		

On cherche à vérifier la validité de la régression à l'aide du test  $F$ .

On a que  $F = 9.249$ , par contre  $F_{0.05}(1, 12) = 4.75$

Puisque  $F > F_{0.05}(1, 12)$  ; on rejette  $H_0$ . La régression est significative au niveau de confiance de 95 %.



## 2.7 Prévisions et intervalles de confiance

On peut utiliser la droite de régression pour faire des types de prévisions de  $Y^*$  en sachant  $X^*$  :

### Type 1

Prévision pour la *valeur moyenne* de  $Y^*$

$$\mathbf{E}[Y^*] = \beta_0 + \beta_1 X^*$$

### Type 2

Prévision pour la *vraie valeur* de  $Y^*$

$$Y^* = \beta_0 + \beta_1 X^* + \varepsilon$$

### Remarques

1. Dans les deux types, la prévision est le point sur la droite de régression

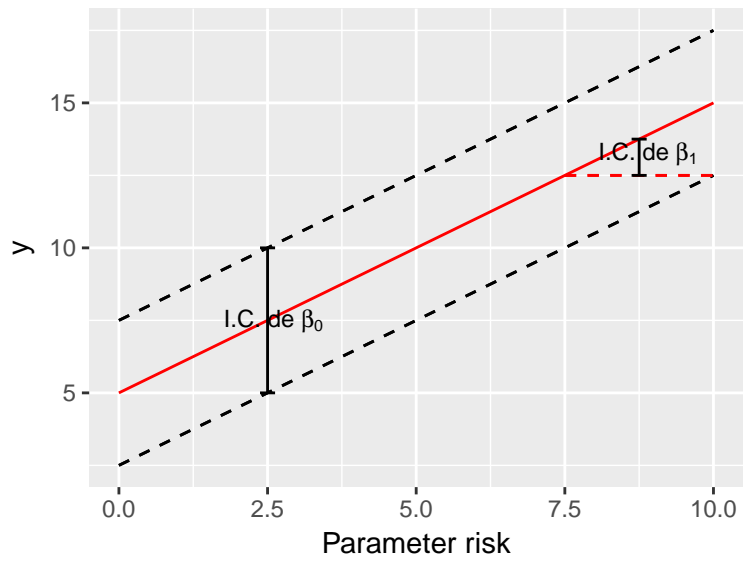
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}[Y^*] &= \hat{Y}^* \\ \hat{Y}^* &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*\end{aligned}$$

2. La prévision est sans biais

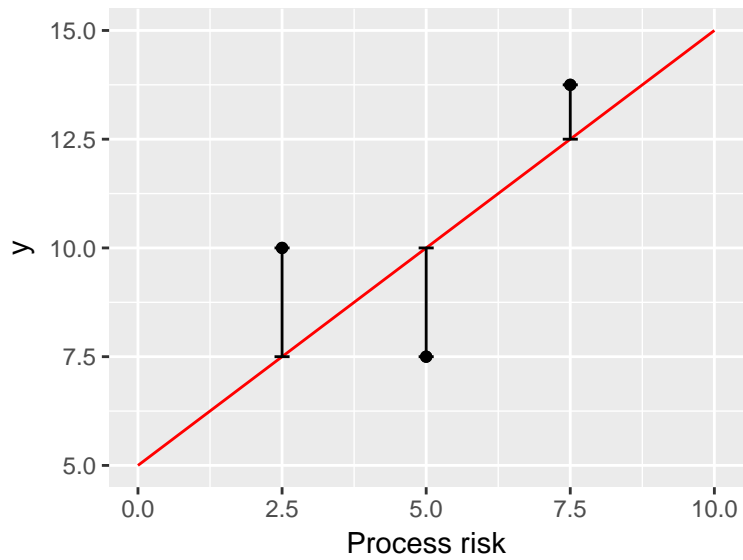
$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*] &= \mathbf{E}[\hat{\beta}_0] + \mathbf{E}[\hat{\beta}_1] X^* \\ &= \beta_0 + \beta_1 X^*\end{aligned}$$

3. Il y a deux sources d'erreur dans les prévisions,

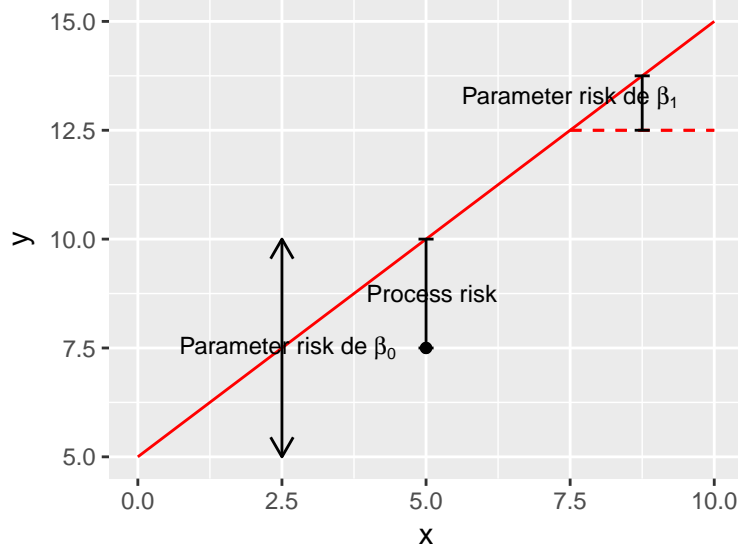
- Parameter risk : Incertitude sur les estimateurs. Autrement dit, la variance des estimateurs des paramètres.



- Process risk : Fluctuations autour de la droite de régression. Autrement dit, la variance des résidus.



Effet combiner des deux sources d'erreur dans les prévisions,



### 2.7.1 I.C. pour la prévision de type I (Valeur moyenne)

Aussi appelé intervalle de confiance pour la droite de régression.

Tel que vue à la section 2.6.1, on a que

$$(\hat{\mathbf{E}}[Y^*] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \sim N(\beta_0 + \beta_1 X^*; \mathbf{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*))$$

Par conséquent,

$$\frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) - (\beta_0 + \beta_1 X^*)}{\sqrt{\mathbf{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)}} \sim N(0, 1)$$

En substituant  $\sigma^2$  par  $S^2$  dans la  $\mathbf{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)$ ; on a

$$\frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) - (\beta_0 + \beta_1 X^*)}{\sqrt{\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)}} \sim t(n-2)$$

Ainsi, un I.C. au niveau  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour la valeur moyenne est

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*)} \quad (2.24)$$

On rappelle que comme  $\sigma^2$  n'est souvent pas connu, il est nécessaire d'utiliser son estimateur  $S^2$ .

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) &= \mathbf{Var}(\bar{Y} - \bar{Y} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \\
&= \mathbf{Var}(\bar{Y} - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}) + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \\
&= \mathbf{Var}(\bar{Y} + \hat{\beta}_1(X^* - \bar{X})) \\
&= \mathbf{Var}(\bar{Y}) + \mathbf{Var}(\hat{\beta}_1)(X^* - \bar{X})^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} (X^* - \bar{X})^2 \\
&= \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)
\end{aligned}$$

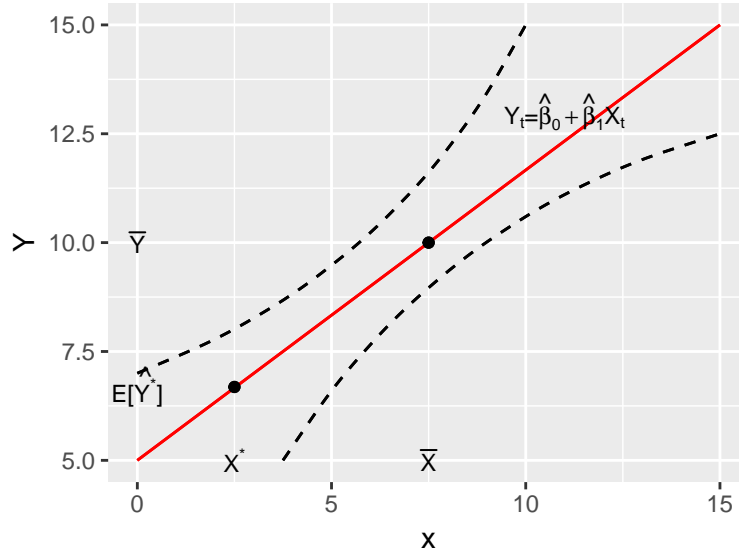
Et ainsi, on obtient,

$$\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) = S^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right) \quad (2.25)$$

L'I.C. est donc,

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{S^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \right)} \quad (2.26)$$

### Remarque



1. Plus  $X^*$  s'éloigne de  $\bar{X}$ , plus l'I.C. est large, parce que l'incertitude augmente.
2. Les limites de l'intervalle sont des *hyperboles* centrées en  $(\bar{X}, \bar{Y})$
3. Cet I.C. peut être appelé :
  - I.C. pour la valeur moyenne ;
  - I.C. pour la droite de régression ;
  - I.C. pour la tendance.
4. Dans ce type d' I.C., on tient seulement compte du **risque de paramètre**.

### 2.7.2 I.C. pour la prévision de type II (Vraie valeur)

Aussi appelé I.C. pour les points de  $Y^*$ . Pour obtenir un I.C. pour la vraie valeur de

$Y^*$ , il faut tenir compte du parameter risk ( $\text{Var}(\hat{\beta}_i)$ ) ET du process risk ( $\text{Var}(\varepsilon_t)$ ). On considère donc de manière équivalente à la section 2.7.1,

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{\text{Var}(Y^* - \hat{Y}^*)}} \sim N(0, 1)$$

En substituant  $\sigma^2$  par  $S^2$  dans  $\text{Var}(Y^* - \hat{Y}^*)$ , on a

$$\frac{Y^* - \hat{Y}^*}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(Y^* - \hat{Y}^*)}} \sim t(n - 2)$$

Ainsi, un I.C. au niveau  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour  $\beta_1$  pour la vraie valeur de  $Y^*$  est,

$$\hat{Y}^* \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{\widehat{\text{Var}}(Y^* - \hat{Y}^*)}$$

Or par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y^* - \hat{Y}^*) &= \text{Var}(Y^*) + \text{Var}(\hat{Y}^*) \\ &= \underbrace{\sigma^2}_{\text{Process risk}} + \underbrace{\sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X}^*)^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}^*)^2} \right)}_{\text{Parameter risk}} \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{\text{Var}}(Y^* - \hat{Y}^*) = S^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X}^*)^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}^*)^2} \right) \quad (2.27)$$

L'I.C. est donc,

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X^*) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \times \sqrt{S^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X}^*)^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}^*)^2} \right)} \quad (2.28)$$

### Exemple en R

Il est possible d'obtenir le résultat des formules des sections 2.7.1 et 2.7.2 en R à l'aide de la fonction *predict*.

#### I.C. de type I pour tous les X dans les observations

	fit	lwr	upr
1	-0.42670720	-1.1486129	0.29519851
2	-0.03977447	-0.6625019	0.58295297
3	0.93790429	0.2329784	1.64283023
4	-1.03122791	-1.9955422	-0.06691366
5	-0.61954176	-1.4101055	0.17102196

### I.C. de type I pour un vecteur $X^*$

	fit	lwr	upr
1	-0.1028362	-0.73741877	0.5317463
2	0.1691467	-0.42868908	0.7669824
3	0.4411296	-0.16019331	1.0424524
4	0.7131125	0.06872137	1.3575035
5	0.9850953	0.26512340	1.7050673

### I.C. de type II pour un vecteur $X^*$

	fit	lwr	upr
1	-0.1028362	-2.490254	2.284582
2	0.1691467	-2.208768	2.547061
3	0.4411296	-1.937664	2.819923
4	0.7131125	-1.676931	3.103156
5	0.9850953	-1.426425	3.396616

```
3 > # dataset
4 > x <- rnorm(15)
5 > y <- x + rnorm(15)
6 > xStar <- data.frame(x = seq(0, 2, by = 0.2))
7 > # Modele de regression
8 > fit <- lm(y ~ x)
9 > # I.C. de type 1
10 > predict(fit, interval = "confidence") # I.C. pour tous les X
    dans les observations
11 > predict(fit, interval = "confidence", newdata = xStar) # I.C.
    pour un vecteur de  $X^*$ 
12 > # I.C. de type 2
13 > predict(fit, interval = "prediction", newdata = xStar) # I.C.
    pour un vecteur de  $x^*$ 
```

Listing 2.4 – Code source en R pour l'exemple

## Chapitre 3

# Régression linéaire multiple

Il n'est pas rare que plus d'une variable soit nécessaire pour expliquer un phénomène. Tel que vu à la section 2.1.2, voici un autre exemple de modèle de régression multiple :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Diagram illustrating the components of the multiple regression model:

- $Y$ : Âge du passager
- $X_1$ : Prix du billet
- $X_2$ : Type de billet
- $\varepsilon$ : Erreur aléatoire

De manière générale, la régression multiple considère le modèle général suivant :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t,1} + \beta_2 X_{t,2} + \dots + \beta_p X_{t,p} + \varepsilon_t, \text{ pour } t = 1, \dots, n$$

- $n$  observations
- $p$  variables exogènes  $(X_1, \dots, X_p)$
- $(p + 1)$  paramètres à estimer  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$

## Notions préliminaires

Voici quelques éléments d'algèbre matricielle pour les vecteurs et matrices aléatoires importante pour la bonne compréhension des modèles de régression linéaires multiple.



Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires, le vecteur aléatoire  $X$  est donc défini de la façon suivante

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

On définit le vecteur espérance de la façon suivante

$$\mathbf{E}[X] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}[X_1] \\ \mathbf{E}[X_2] \\ \vdots \\ \mathbf{E}[X_n] \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

et la matrice de variance-covariance

$$\mathbf{Var}(X) = \underbrace{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(X - \mathbf{E}[X])^\top]}_{\text{Produit matriciel}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Var}(X_1) & \cdots & \mathbf{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & & \\ \mathbf{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \mathbf{Var}(X_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

### **Théorème**

Soit  $\mathbb{X}$ , un vecteur aléatoire et  $\mathbb{A}$  une matrice de constantes telle que :

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_{n \times 1} \text{ et } \mathbb{A} = \mathbb{A}_{p \times n}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbb{A}\mathbb{X}] &= \mathbb{A}\mathbf{E}[\mathbb{X}] \\ \mathbf{Var}(\mathbb{A}\mathbb{X}) &= \mathbb{A}\mathbf{Var}(\mathbb{X})\mathbb{A}^\top \end{aligned}$$

### **Exemple**

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}^\top = [1 \quad 1]_{1 \times 2} \\ \mathbb{X} &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{aligned}$$

Intuitivement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\mathbb{X} &= X_1 + X_2 \\
\Rightarrow \mathbf{E}[\mathbb{A}\mathbb{X}] &= \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] \\
\Rightarrow \mathbf{Var}(\mathbb{A}\mathbb{X}) &= \mathbf{Var}(X_1 + X_2) = \mathbf{Var}(X_1) + \mathbf{Var}(X_2) + 2\mathbf{Cov}(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

En calcul matriciel,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbb{A}\mathbb{X}] &= \mathbb{A}\mathbf{E}[\mathbb{X}] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}[X_1] \\ \mathbf{E}[X_2] \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] \\
\mathbf{Var}(\mathbb{A}\mathbb{X}) &= \mathbb{A}\mathbf{Var}(\mathbb{X})\mathbb{A}^\top \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Var}(X_1) & \mathbf{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathbf{Cov}(X_1, X_2) & \mathbf{Var}(X_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[ (\mathbf{Var}(X_1) + \mathbf{Cov}(X_1, X_2)) \quad (\mathbf{Cov}(X_1, X_2) + \mathbf{Var}(X_2)) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{Var}(X_1) + \mathbf{Var}(X_2) + 2\mathbf{Cov}(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

### 3.1 Le modèle sous forme matricielle

À partir du modèle général suivant,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t,1} + \beta_2 X_{t,2} + \dots + \beta_p X_{t,p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

On représente les n formules suivantes

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{1,1} + \dots + \beta_p X_{1,p} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{2,1} + \dots + \beta_p X_{2,p} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n,1} + \dots + \beta_p X_{n,p} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

Qu'il est possible de réécrire sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_{1,1} + \dots + \beta_p X_{1,p} \\ \beta_0 + \beta_1 X_{2,1} + \dots + \beta_p X_{2,p} \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 X_{n,1} + \dots + \beta_p X_{n,p} \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Ou encore de la façon suivante,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & X_{1,1} & \dots & X_{1,p} \\ 1 & X_{2,1} & \dots & X_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n,1} & \dots & X_{n,p} \end{bmatrix}_{n \times (p+1)} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}_{(p+1) \times 1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

De manière plus compacte, on utilise la notation suivante

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon$$

, avec :

- $Y$  est un vecteur de dimension  $n \times 1$  des variables réponses.
- $X$  est une matrice schéma de dimension  $n \times (p+1)$  qui correspond aux variables explicatives.
- $\beta$  est un vecteur de dimension  $(p+1) \times 1$  des coefficients à estimer.
- $\varepsilon$  est un vecteur de dimension  $n \times 1$  des erreurs de telle sorte que
  - $\mathbf{E}[\varepsilon] = \mathbb{O}_{n \times 1}$ , où  $\mathbb{O}$  correspond à une matrice nulle.
  - $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n}$ , où  $\mathbb{I}$  correspond à une matrice identité.

### Remarques

1. On suppose que  $(\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1}$  existe, que  $\mathbb{X}$  est de rang complet et que  $\left( (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \right)^\top = (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1}$
2. Pour un modèle de régression linéaire simple, il suffit de définir la matrice schéma de la façon suivante :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}_{n \times 2}$$

3. Pour un modèle passant par l'origine, il n'y a pas de colonne de 1 dans la matrice schéma :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,p} \\ X_{2,1} & \dots & X_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n,1} & \dots & X_{n,p} \end{bmatrix}_{n \times (p)}$$

4. Pour un modèle du type  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t$ , il ne suffit que de définir la

matrice schéma telle que :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^2 \end{bmatrix}_{n \times (p)}$$

$$X_{t,1} = X_t$$

$$X_{t,2} = X_t^2$$

### 3.1.1 Estimateur des moindres carrés (EMC)

On peut démontrer que l'estimateur  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  qui minimise la somme résiduelle des carrés correspond à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 \\ &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \\ &= \varepsilon^\top \varepsilon \\ &= (\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta)^\top (\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta) \end{aligned}$$

En isolant  $\beta$ , on obtient l'estimateur suivant :

$$\boxed{\hat{\beta} = (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{Y}} \quad (3.1)$$

### Exemple

On poursuit avec un exemple en régression linéaire simple pour assimiler l'information.

À l'aide des matrices suivantes, déterminer les paramètres de la droite de régression.

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}; \mathbb{X}^\top = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1 & \dots & X_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^\intercal \mathbb{X} &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^n X_t \\ \sum_{t=1}^n X_t & \sum_{t=1}^n X_t^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$(\mathbb{X}^\intercal \mathbb{X})^{-1} = \frac{1}{nX_t^2 - (n\overline{X})^2} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n X_t^2 & n\overline{X} \\ n\overline{X} & n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^\intercal \mathbb{Y} &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n Y_t \\ \sum_{t=1}^n X_t Y_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n\overline{Y} \\ \sum_{t=1}^n X_t Y_t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} \\ &= (\mathbb{X}^\intercal \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\intercal \mathbb{Y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{n\bar{Y} \sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X} \sum_{t=1}^n X_t Y_t}{n \sum_{t=1}^n X_t^2 - (n\bar{X})^2} \\ \frac{n \sum_{t=1}^n X_t Y_t - (n\bar{Y})(n\bar{X})}{n \sum_{t=1}^n X_t^2 - (n\bar{X})^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\bar{Y} \sum_{t=1}^n X_t^2 - \bar{X} \sum_{t=1}^n X_t Y_t + n\bar{X}^2 \bar{Y} - n\bar{X}^2 \bar{Y}}{n \sum_{t=1}^n X_t^2 - (n\bar{X})^2} \\ \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t - n\bar{Y} \bar{X}}{n \sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Qui correspond bien à l'estimateur de  $\hat{\beta}_0$  (2.8) et de  $\hat{\beta}_1$  (2.10) trouver précédemment.

## Propriétés des estimateurs

1. Sans biais

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\hat{\beta}] &= \mathbf{E}[(\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{Y}] \\
&\stackrel{3}{=} (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbf{E}[\mathbb{Y}] \\
&= (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top (\mathbb{X} \beta) \\
&= (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} (\mathbb{X}^\top \mathbb{X}) \beta \\
&= \mathbb{I} \beta \\
&= \beta
\end{aligned}$$

## 2. Variance-covariance

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\hat{\beta}) &= \mathbf{Var}((\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}) \\
&\stackrel{3}{=} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Var}(\mathbf{Y}) [(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top]^\top \\
&= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \sigma^2 \mathbb{I} \left[ \mathbf{X} [(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}]^\top \right] \\
&\stackrel{1}{=} \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \left[ \mathbf{X} [(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}] \right] \\
&= \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X}) (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\
&= \sigma^2 \mathbb{I} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\
&= \sigma^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}
\end{aligned}$$

### 3.1.2 Résidus et tableau ANOVA

On définit les résidus comme ceci,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n \times 1} &= \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} \\
&= \mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\beta} \\
&= \mathbf{Y} - \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} \\
&= \mathbf{Y} (\mathbb{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top) \\
&= \mathbf{Y} (\mathbb{I} - \mathbb{H})
\end{aligned}$$

Où  $\mathbb{H}$  correspond à la matrice de projection (Hat matrix).

Les sommes des carrés du tableau ANOVA sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\bullet SST &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 \\
&= \sum_{t=1}^n Y_t^2 - n \bar{Y}^2 \\
&= \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} - n \bar{Y}^2
\end{aligned}$$

Avec  $(n - 1)$  degré de liberté

$$\begin{aligned}
\bullet SSE &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y})^2 \\
&= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \\
&= \varepsilon^T \varepsilon
\end{aligned}$$

Avec  $(n - (p + 1))$  degré de liberté

$$\begin{aligned}
\bullet SSR &= \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 \\
&= \sum_{t=1}^n \hat{Y}_t^2 - n\bar{Y}^2 \\
&= \hat{Y}^T \hat{Y} - n\bar{Y}^2
\end{aligned}$$

Avec  $(p)$  degré de liberté

Dans le cas de régression multiple, le tableau ANOVA est le suivant :

Source de la variance	Somme des carrés ( $SS$ )	Degrés de liberté ( $d.l.$ )	Carrés moyens ( $MS$ )	Ratio de Fisher ( $F$ )
Régression	$SSR$	$p$	$\frac{SSR}{p}$	$\frac{MSR}{MSE}$
Erreur	$SSE$	$n - (p+1)$	$\frac{SSE}{n-(p+1)}$	
Total	$SST$	$n - 1$		

### 3.1.3 Estimateur de $\sigma^2$

Dans le cas de la régression multiple, on peut démontrer qu'un bon estimateur sans biais de  $\sigma^2$  est  $S^2$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
S^2 &= MSE \\
&= \frac{SSE}{n - (p + 1)}
\end{aligned}$$

### 3.1.4 Intervalles de confiance et tests d'hypothèses

Essentiellement, on a la même chose qu'au chapitre 2 pour les tests  $t$  et  $F$ , sauf qu'il faut adapter les degrés de liberté.

On rappelle qu'avec le postulat 4 (2.2.2), on suppose que les résidus suivent une loi normale d'espérance nulle et de variance de  $\sigma^2$ .



$$\begin{aligned}\varepsilon_t &\stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2) \\ \underline{\varepsilon}_{n \times 1} &\sim N(\mathbb{O}, \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n})\end{aligned}$$

Ainsi on a que  $(\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon) \sim N_n(\mathbb{X}\beta; \sigma^2 \mathbb{I}_{n \times n})$  et que  $\hat{\beta} \sim N_n(\beta; (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \sigma^2)$ .

### 3.1.5 Test de Student sur un seul paramètre

On effectue le test suivant,

$$H_0 : \beta_i = \beta_i^*$$

$$H_1 : \beta_i \neq \beta_i^*$$

Où  $\beta_i^*$  est une constante.

On teste l'hypothèse à l'aide de la statistique suivante,

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^*}{\sqrt{[\mathbf{Var}(\hat{\beta})]_{(i+1) \times (i+1)}}} \sim N(0, 1)$$

et en remplaçant  $\sigma^2$  par  $S^2$  dans la matrice de la variance, on obtient

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^*}{\sqrt{[\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta})]_{(i+1) \times (i+1)}}} \sim t(n - (p + 1))$$

On rejette  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour si :

$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n - (p + 1))$$

Or, on a que  $\mathbf{Var}(\hat{\beta}) = (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \sigma^2$ .

Ainsi, on peut réécrire l'expression en fonction de l'estimateur  $S^2$ ,

$$\boxed{\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\beta}) = (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} S^2} \tag{3.2}$$

Avec un peu d'algèbre, on transforme ce test d'hypothèse en un intervalle de confiance pour  $\beta_i$ . L'I.C. marginal est donc le suivant :

$$\boxed{\hat{\beta}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n - (p + 1)) \times \sqrt{[(\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} S^2]_{(i+1) \times (i+1)}}} \tag{3.3}$$

### 3.1.6 Test de Fisher pour la validité globale de la régression

Dans le cas de la régression multiple, on teste

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0 \\ H_1 : \text{Au moins un coefficient parmi } \beta_1, \dots, \beta_p \text{ est } \neq 0. \end{aligned}$$

On teste l'hypothèse à l'aide de la statistique suivante,

$$\begin{aligned} F &= \frac{MSR}{MSE} \sim F(\text{d.l. de SSR, d.l. de SSE}) \\ F &= \frac{MSR}{MSE} \sim F(p, n - (p + 1)) \end{aligned}$$

On rejette  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour si :

$$F > F_\alpha(p, n - (p + 1))$$

#### Remarque importante

De manière générale, avec  $p$  variables explicatives, on a que :

$$F \neq t^2$$

L'égalité ne survient que lorsque  $p = 1$  (voir la section 2.6.5).

### 3.1.7 Test de Fisher partiel

À la section 3.1.6 on a testé si **tous les**  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  étaient nuls.

Dans cette section, on teste simultanément si certains  $\beta_i$  parmi  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  sont nuls.

On teste donc :

$H_0$  : Un modèle *réduit*, noté  $M_0$  dont certains  $\beta_i = 0$  parmi  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  est acceptable.

$H_1$  : On doit utiliser le modèle *complet*, noté  $M_1$  avec les  $p$  variables.

On utilise la statistique de Fisher partielle suivante,

$$F^* = \frac{\frac{[SSE(M_0) - SSE(M_1)]}{[d.l.(SSE(M_0)) - d.l.(SSE(M_1))]} }{\frac{SSE(M_1)}{d.l.(SSE(M_1))}} \quad (3.4)$$

On rejette  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  si :

$$F^* > F_\alpha(d.l.(SSE(M_0)) - d.l.(SSE(M_1)); d.l.(SSE(M_1)))$$

### Remarque

Si le modèle réduit de  $H_0$  ne consiste qu'à  $\beta_i = 0$ , autrement dit un seul paramètre, alors on aura que  $F^* = t^2$ . Dans ce cas **seulement**, le test Fisher partiel est équivalent au test de Student.

### Exemple

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

Soit le modèle de régression multiple suivant :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t,1} + \beta_2 X_{t,2} + \beta_3 X_{t,3} + \beta_4 X_{t,4} + \varepsilon_t$$

On teste donc :

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1 : \beta_2 \neq 0 \text{ et/ou } \beta_3 \neq 0 \end{aligned}$$

Afin d'effectuer le test, on effectue les étapes suivantes :

**Étape 1** Obtenir le tableau ANOVA pour le modèle sous le modèle complet  $M_0$ .

Extraire  $SSE(M_0)$  et  $d.l.(SSE(M_0)) \Rightarrow n - 3$

**Étape 2** Obtenir le tableau ANOVA pour le modèle sous le modèle complet  $M_1$ .

Extraire  $SSE(M_1)$  et  $d.l.(SSE(M_1)) \Rightarrow n - 5$

**Étape 3** Calculer la valeur de la statistique de Fisher partielle.

$$F^* = \frac{\frac{[SSE(M_0) - SSE(M_1)]}{[(n-3) - (n-5)]}}{\frac{SSE(M_1)}{(n-5)}}$$

Puis rejeter  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  si :

$$F^* > F_\alpha(2; n - 5)$$

## 3.2 Sélection d'un modèle optimal

Lorsque l'on dispose de plusieurs variables explicatives  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ , un modèle optimal est tel que :

1. Pouvoir prédictif **maximal**
2. Avec un nombre de variables **minimal**

En régression, il existe plusieurs algorithmes pour obtenir un modèle optimal.

### 3.2.1 Technique 1 : Essai de tous les modèles

La stratégie la plus simple consiste à examiner tous les modèles possibles, soit les  $2^p$  combinaisons existantes.

On choisit le modèle ayant le plus grand  $R_{adj}^2$ , qui correspond à l'une des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} R_{adj}^2 &= 1 - \frac{\frac{SSE}{(n-p-1)}}{\frac{SST}{(n-1)}} \\ &= 1 - (1 - R^2) \left( \frac{n-1}{n-p-1} \right) \end{aligned}$$

$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \left( \frac{n-1}{n-p-1} \right)$

(3.5)

On note que contrairement au  $R^2$ , le  $R_{adj}^2$  pénalise pour l'ajout de variables dans le modèle.

#### Exemple

Si on dispose de  $X_1, X_2$  et  $X_3$ , on ajuste les  $2^3$  modèles possibles :

1.  $Y = \beta_0 + \varepsilon$
2.  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$
3.  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \varepsilon$
4.  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_3 + \varepsilon$
5.  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$
6.  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_3 + \varepsilon$
7.  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \varepsilon$
8.  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$

On fait le calcul du  $R_{adj}^2$  pour chaque modèle et on choisit le modèle avec le plus grand  $R_{adj}^2$ .

### Remarque

En pratique cette méthode n'est pas *efficace*, car le temps d'exécution devient énorme lorsque  $p$  augmente :

$p$	$2^p$
1	2
2	4
3	8
$\vdots$	
10	1024
$\vdots$	
25	33554432
$\vdots$	
100	$1.26 \times 10^{30}$

### 3.2.2 Technique 2 : Élimination régressive (*Backward elimination*)

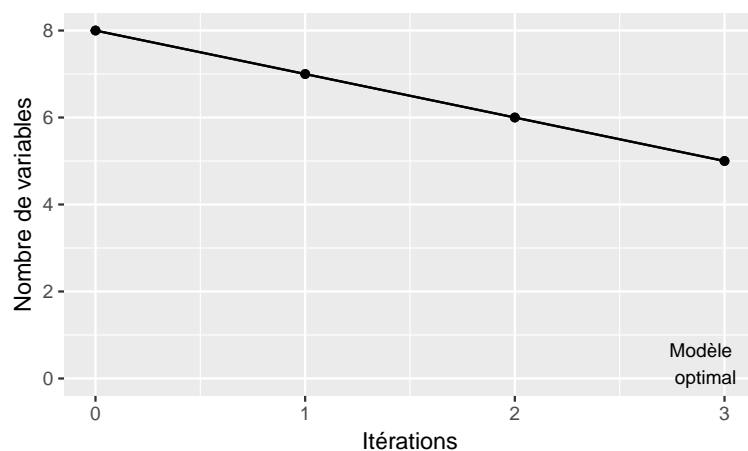
**Étape 1 :** Débuter avec toutes les variables disponibles dans le modèle.

**Étape 2 :** Chercher la variable qui génère la plus faible augmentation de SSE lorsqu'exclue du modèle. Autrement dit, la pire variable.

**Étape 3 :** Utiliser le test de Fisher partiel (3.1.7) pour tester s'il est possible d'exclure la variable de l'étape 2.

**Étape 4 :** Continuer les étapes 2 et 3 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de variables à éliminer selon le test Fisher partiel.

Voici une illustration de l'élimination régressive.



### Remarque

Le principal inconvénient de cette technique est qu'une variable éliminée ne peut jamais être réintégrée.

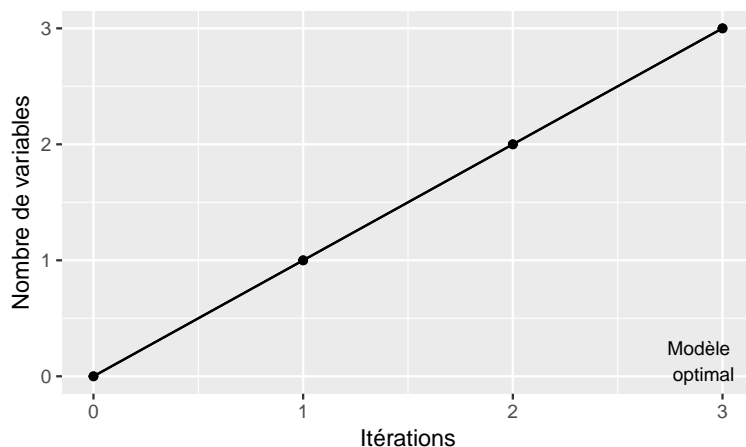
### 3.2.3 Technique 3 : Sélection progressive (*forward selection*)

**Étape 1 :** Débuter avec le modèle  $Y = \beta_0 + \varepsilon$

**Étape 2 :** Chercher la variable qui génère la plus grande diminution de SSE lorsqu'elle est incluse dans le modèle. Autrement dit, la meilleure variable.

**Étape 3 :** Utiliser le test de Fisher partiel (3.1.7) pour tester s'il est possible d'inclure la variable de l'étape 2.

**Étape 4 :** Continuer les étapes 2 et 3 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de variables à inclure selon le test de Fisher partiel.



### Remarque

Le principal inconvénient de cette technique est qu'une variable incluse ne peut jamais être éliminée par la suite.

### 3.2.4 Technique 4 : Régression pas-à-pas (*stepwise regression*)

Il s'agit d'une combinaison de l'élimination régressive et de la sélection progressive.

**Étape 1 :** Débuter avec le modèle  $Y = \beta_0 + \varepsilon$

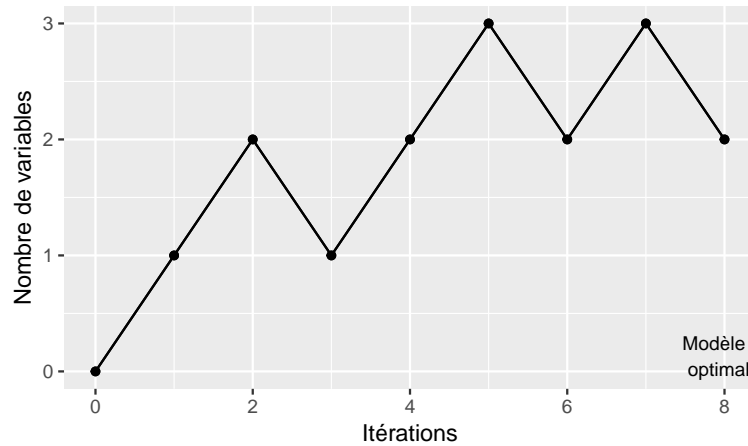
**Étape 2 :** Chercher la variable qui génère la plus grande diminution de SSE si incluse dans le modèle. Autrement dit, la meilleure variable.

**Étape 3 :** Utiliser le test de Fisher partiel (3.1.7) pour tester s'il est possible d'inclure la variable de l'étape 2.

**Étape 4 :** Chercher la variable qui génère la plus faible diminution de SSE si incluse dans le modèle. Autrement dit, la pire variable.

**Étape 5 :** Utiliser le test Fisher partiel (3.1.7) pour tester s'il est possible d'exclure la variable de l'étape 4.

**Étape 6 :** Continuer les étapes 2 à 5 jusqu'à ce que l'algorithme élimine la variable qui vient d'entrer.



## Exemple

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

À partir des informations suivantes, on cherche à trouver le meilleur modèle de régression des 20 observations.

Variables dans le modèle	$SSE$	$SSR$	$SST$	$R_{adj}^2$
$\phi$	10	0	10	0 %
$X_1$	5	5	10	47.2 %
$X_2$	9	1	10	5 %
$X_3$	8	2	10	15.5 %
$X_1, X_2$	4	6	10	55.3 %
$X_1, X_3$	3.9	6.1	10	56.4 %
$X_2, X_3$	8.5	1.5	10	5 %
$X_1, X_2, X_3$	3.8	6.2	10	54.9 %

## Technique 1

Avec la technique 1 (3.2.1), on trouve le modèle suivant :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_3 + \varepsilon$$

## Technique 2

Avec la technique 2 (3.2.2), on débute avec le modèle initial suivant :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

La pire variable est  $X_2$ , on effectue le test de Fisher partiel (3.4) avec modèle  $M_0$  sans la variable  $X_2$  et  $M_1$  avec le modèle complet.

$H_0$  : Modèle avec  $X_1$  et  $X_3$

$H_1$  : Modèle avec  $X_1, X_2$  et  $X_3$

$$F = \frac{\frac{3.9-3.8}{1}}{\frac{3.8}{16}}$$

$$= 0.4211$$

$$F_{5\%}(1.16) = 4.49$$

$$0.4211 < 4.49$$

On accepte  $H_0$  et on exclut  $X_2$ .

La prochaine pire variable est la variable  $X_1$ .

$H_0$  : Modèle avec  $X_3$

$H_1$  : Modèle avec  $X_1$  et  $X_3$

$$F = \frac{\frac{5-3.9}{1}}{\frac{3.9}{17}}$$

$$= 4.79$$

$$F_{5\%}(1.17) = 4.49$$

$$4.79 > 4.45$$

On rejette  $H_0$  et on n'exclut pas  $X_3$ .

On trouve le modèle suivant :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_3 + \varepsilon$$

## Exemple en R

À l'aide du jeu de donnée *mtcars*<sup>1</sup> de R, construisez un modèle pour prédire la consommation en gallon par miles à l'aide de la technique de régression pas à pas. On utilise le code R suivant :

---

1. Voici les [informations](#) sur les données.



```
3 > step(lm(mpg~wt+drat+disp+qsec+hp, data=mtcars), direction="both")
```

Start: AIC=65.47

mpg ~ wt + drat + disp + qsec + hp

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
- disp	1	3.974	174.10	64.205
<none>			170.13	65.466
- hp	1	11.886	182.01	65.627
- qsec	1	12.708	182.84	65.772
- drat	1	15.506	185.63	66.258
- wt	1	81.394	251.52	75.978

Step: AIC=64.21

mpg ~ wt + drat + qsec + hp

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
- hp	1	9.418	183.52	63.891
- qsec	1	9.578	183.68	63.919
<none>			174.10	64.205
- drat	1	11.956	186.06	64.331
+ disp	1	3.974	170.13	65.466
- wt	1	113.882	287.99	78.310

Step: AIC=63.89

mpg ~ wt + drat + qsec

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
<none>			183.52	63.891
- drat	1	11.942	195.46	63.908
+ hp	1	9.418	174.10	64.205
+ disp	1	1.506	182.02	65.627
- qsec	1	85.720	269.24	74.156
- wt	1	275.686	459.21	91.241

Call:

lm(formula = mpg ~ wt + drat + qsec, data = mtcars)

Coefficients:

(Intercept)	wt	drat	qsec
11.3945	-4.3978	1.6561	0.9462

On remarque que la variable *disp* et *hp* n'ont pas été retenue dans le modèle. On obtient le modèle suivant :

$$Y = 11.3945 - 4.3978 \times wt + 1.6561 \times drat + 0.9462 \times qsec$$



### *Technique de sélection & R*

Toutes les techniques présentées à la section 3.2 sont intégrées dans le système de base de *R*. Cette vignette sur la sélection des variables comprend les différentes méthodes ainsi que des exemples utiles.

## 3.3 Régression avec variables indicatrices

Permettent de traiter des variables explicatives *catégoriques* dans les modèles.

### Exemples

- Couleur des yeux (bleu, brun, vert et autres)
- Type de véhicule (sport et autres)
- emploi (ACT, ETU, RTR, GOU et autres)

Pour inclure une variable catégorique ayant  $r$  valeurs possibles, on doit créer  $(r - 1)$  variables indicatrices.

### Exemple

- Couleur des yeux :

$$X_{t,1} = 1_{\{Couleur_t=Bleu\}}$$

$$X_{t,2} = 1_{\{Couleur_t=Brun\}}$$

$$X_{t,3} = 1_{\{Couleur_t=Vert\}}$$

- Type de véhicule :

$$X_{t,4} = 1_{\{Type_t=Sport\}}$$

- Emploi :

$$X_{t,5} = 1_{\{Emploi_t=ACT\}}$$

$$X_{t,6} = 1_{\{Emploi_t=ETU\}}$$

$$X_{t,7} = 1_{\{Emploi_t=RTR\}}$$

$$X_{t,8} = 1_{\{Emploi_t=GOU\}}$$

; où

$$1_{\{A\}} = \begin{cases} 1 & , \text{si } A \text{ vrai} \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

### Exemple

À l'aide des 5 observations suivantes, définissez la matrice des variables réponses et la matrice schéma.

$Y_t$	$Couleur_t$	$Type_t$	$Emploi_t$
70	Bleu	Autres	ETU
75	Brun	Sport	GOU
50	Vert	Autres	Autres
55	Autres	Autres	Autres
85	Brun	Sport	ACT

On utilise le modèle de régression multiple à partir du modèle d'indicatrice précédent. On obtient le modèle de régression suivant :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t,1} + \beta_2 X_{t,2} + \beta_3 X_{t,3} + \beta_4 X_{t,4} + \beta_5 X_{t,5} + \beta_6 X_{t,6} + \beta_7 X_{t,7} + \beta_8 X_{t,8} + \varepsilon_t$$

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon$$

La matrice des variables réponses correspond à :

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} 70 \\ 75 \\ 50 \\ 55 \\ 85 \end{bmatrix}$$

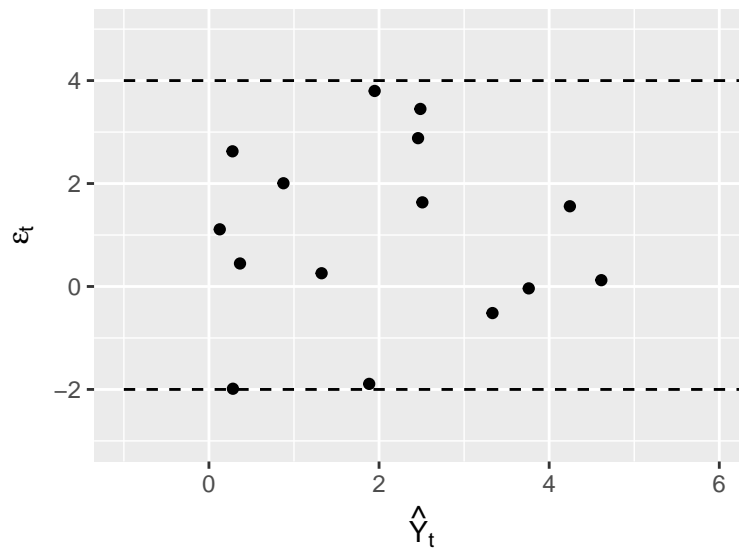
La matrice schéma correspond à :

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Analyse qualitative des résidus

Même si les tests  $t$  et  $F$  sont concluants, le modèle choisi peut ne pas être adéquat. En effet, l'analyse qualitative des résidus est la principale façon de valider un modèle sélectionné.

#### Distribution *uniforme*



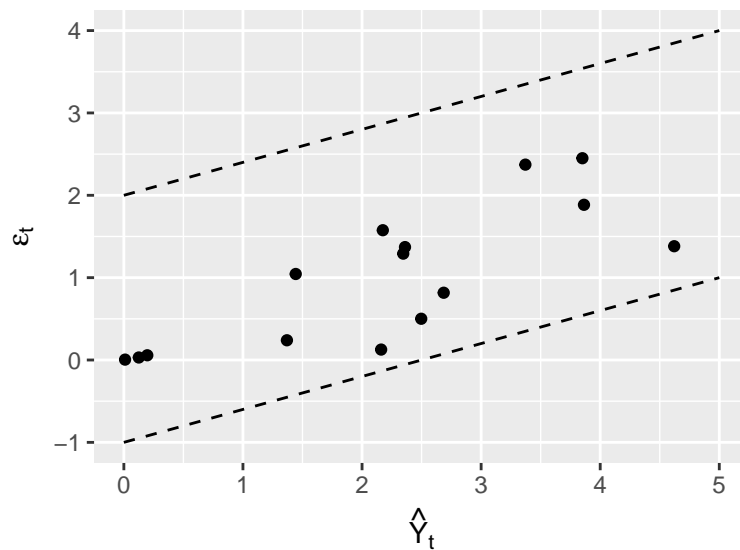
On remarque que les résidus sont uniformément distribués autour de l'axe des  $x$ . Il s'agit d'une situation idéale.

#### 3.4.1 Problèmes possibles dans la distribution des résidus

Plusieurs problèmes de distribution des résidus peuvent être observés, voici leurs représentations graphiques et leurs possibles significations :

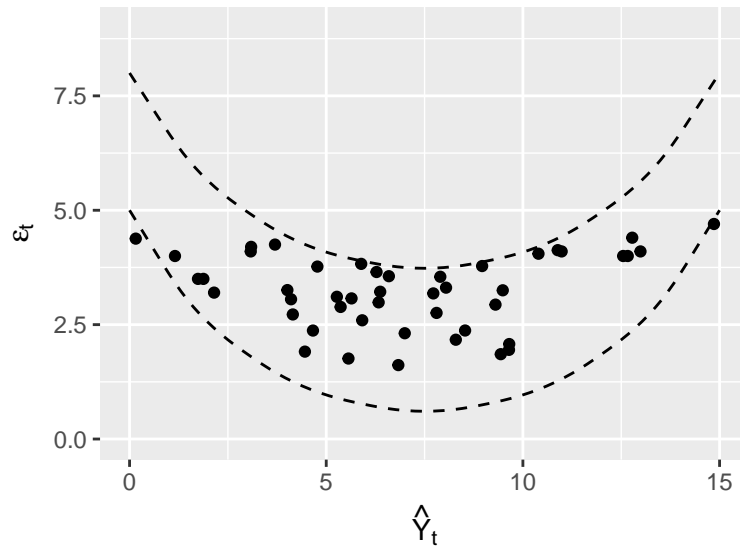
### 3.4.1.1 Distribution *uniforme* avec rotation

Cette distribution des résidus est très similaire à la distribution *uniforme*, par contre les résidus ne sont pas distribués autour de l'axe des  $x$ . La distribution semble avoir effectué une rotation. Il manque probablement un terme linéaire dans  $X$ .



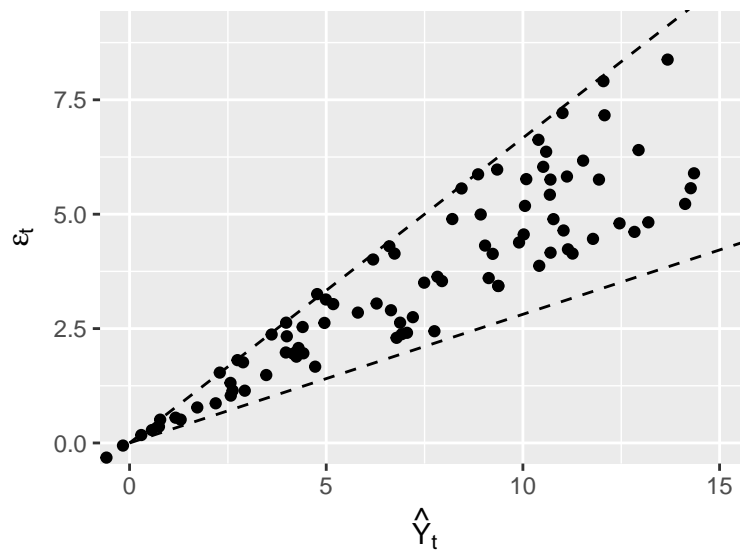
### 3.4.1.2 Distribution *quadratique*

Cette distribution des résidus semble suivre une distribution quadratique. Il manque probablement une variable quadratique dans  $X$ .



#### 3.4.1.3 Distribution *conique*

Cette distribution des résidus semble être distribuée dans un cône. La variance n'est probablement pas constante. Il y a violation de l'hypothèse 2.

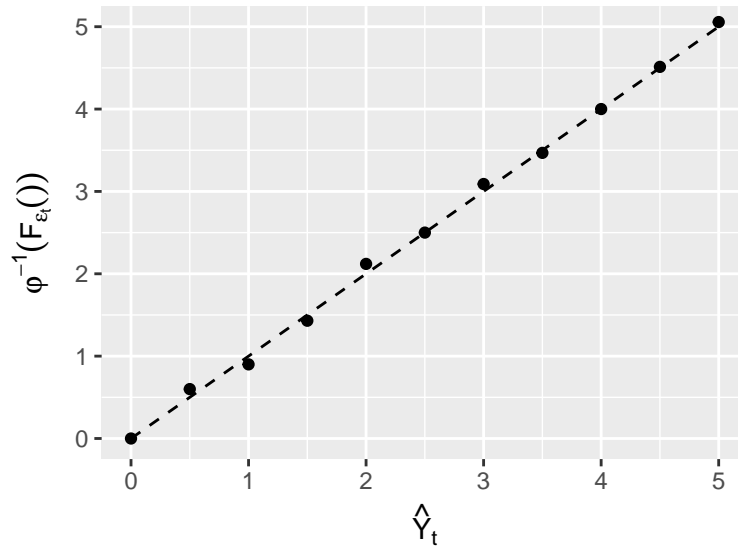


### 3.4.2 Quantiles normaux

On appelle parfois le diagramme Quantile-Quantile ou Q-Q plot. Il s'agit d'un outil permettant d'évaluer la pertinence de l'ajustement d'une distribution.

On ajuste selon une loi normale la fonction empirique des résidus par rapport aux résidus.

On cherche à avoir une droite à 45°. Dans cette situation, cela signifie  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ .



### 3.4.3 Exemple complet

On poursuit avec un exemple complet pour synthétiser l'information du chapitre 3.

On reprend le scénario du Titanic de la section 2.1.1, cette fois on va utiliser un modèle complet multilinéaire avec des catégories et déterminer le meilleur modèle avec la technique de régression pas-à-pas<sup>2</sup>.

Tout d'abord, voici la signification des variables :

---

2. Le code source complet de l'exemple est disponible à l'annexe A.1

Variable	Définition
Survival	Survie du passager au naufrage du Titanic
Pclass	Catégorie du billet
Sex	Sexe
Age	Âge
sibsp	Nombre se frères et sœurs / époux à bord du Titanic
parch	Nombre de parents / enfants à bord du Titanic
ticket	Numéro du billet
fare	Prix du billet
cabin	Numéro de la cabine
embarked	Port d'embarquement

### 3.4.3.1 Analyse des données

L'étape suivante consiste à analyser notre jeu de donnée et de retirer les variables inutiles :

PassengerId	Survived	Pclass
Min. : 1.0	Min. :0.0000	Min. :1.000
1st Qu.:223.5	1st Qu.:0.0000	1st Qu.:2.000
Median :446.0	Median :0.0000	Median :3.000
Mean :446.0	Mean :0.3838	Mean :2.309
3rd Qu.:668.5	3rd Qu.:1.0000	3rd Qu.:3.000
Max. :891.0	Max. :1.0000	Max. :3.000

		Name	Sex	Age
Abbing, Mr. Anthony		: 1	female:314	Min. : 0.42
Abbott, Mr. Rossmore Edward		: 1	male :577	1st Qu.:21.00
Abbott, Mrs. Stanton (Rosa Hunt)		: 1		Median :28.00
Abelson, Mr. Samuel		: 1		Mean :29.57
Abelson, Mrs. Samuel (Hannah Wizosky)		: 1		3rd Qu.:37.00
Adahl, Mr. Mauritz Nils Martin		: 1		Max. :80.00
(Other)		:885		
SibSp		Parch	Ticket	Fare
Min. :0.000	Min. :0.0000	1601 : 7	Min. : 0.00	
1st Qu.:0.000	1st Qu.:0.0000	347082 : 7	1st Qu.: 7.91	
Median :0.000	Median :0.0000	CA. 2343: 7	Median : 14.45	
Mean :0.523	Mean :0.3816	3101295 : 6	Mean : 32.20	
3rd Qu.:1.000	3rd Qu.:0.0000	347088 : 6	3rd Qu.: 31.00	
Max. :8.000	Max. :6.0000	CA 2144 : 6	Max. :512.33	
		(Other) :852		
Cabin		Embarked		



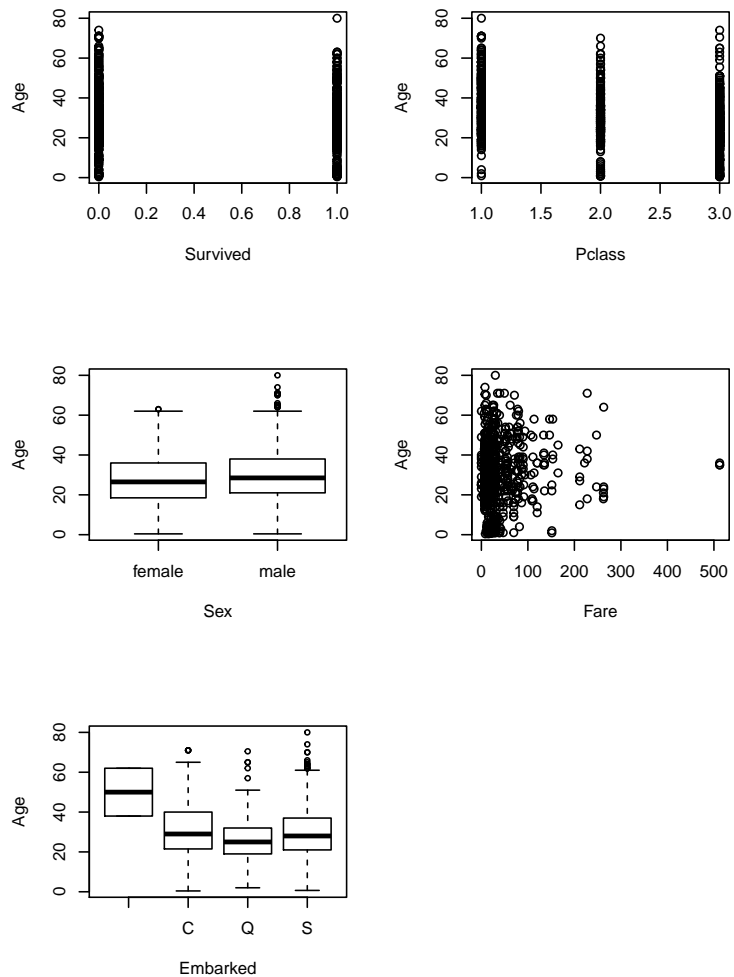
	:687	:	2
B96 B98	:	4	C:168
C23 C25 C27:	4	Q:	77
G6	:	4	S:644
C22 C26	:	3	
D	:	3	
(Other)	:	186	

On remarque que certaines variables ne sont d'aucun intérêt pour estimer l'âge d'un passager, tel que :

- *PassengerId*, car il s'agit d'un numéro unique pour chaque passager. (Max. : 891 pour 891 observations)
- *Name*, dans son état actuel le nom du passager n'est pas très utile, car il s'agit d'observation unique.
- *Ticket*, car il s'agit d'un numéro unique pour chaque passager.
- *SibSP*, *Parch* et *Cabin* sont retirés pour des fins de simplification.

On peut aussi observer le comportement de la variable âge avec les différentes variables explicatives.

```
> # Visualisation des variables en fct de l'âge
> plot(Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked + Fare, data)
```



### 3.4.3.2 Traitement des données

On cherche maintenant à faire un traitement des données pour en tirer de l'information. On observe que le nom du passager est unique dans son format actuel, mais avec un peu de manipulation des données, il est très facile d'extraire son nom de famille à l'aide du code R suivant,

```
3 > data$Surname <- as.factor(sapply(as.character(data$Name),
4 + function(x) strsplit(x, split = '[,]')[[1]][1])))
```

```
> # Visualiser les 6 premières observations par catégorie
> head(summary(data$Surname))
```

```
Andersson      Sage      Carter      Goodwin      Johnson      Panula
           9           7           6           6           6           6
```

### 3.4.3.3 Optimisation du modèle

On peut maintenant trouver le meilleur modèle à l'aide de la méthode pas-à-pas,

Start: AIC=4706.83

```
Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked + Surname
```

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
- Surname	665	104246	142974	4540.6
- Fare	1	5	38733	4704.9
<none>			38728	4706.8
- Pclass	1	213	38940	4709.7
- Embarked	2	316	39044	4710.1
- Sex	1	360	39088	4713.1
- Survived	1	2239	40967	4754.9

Step: AIC=4540.56

```
Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked
```

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
<none>			142974	4540.6
- Sex	1	380	143354	4540.9
- Embarked	3	1312	144286	4542.7
- Fare	1	1708	144682	4549.1
- Survived	1	3895	146869	4562.5
+ Surname	665	104246	38728	4706.8
- Pclass	1	31502	174476	4716.0

Call:

```
lm(formula = Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked,
    data = data)
```

Coefficients:

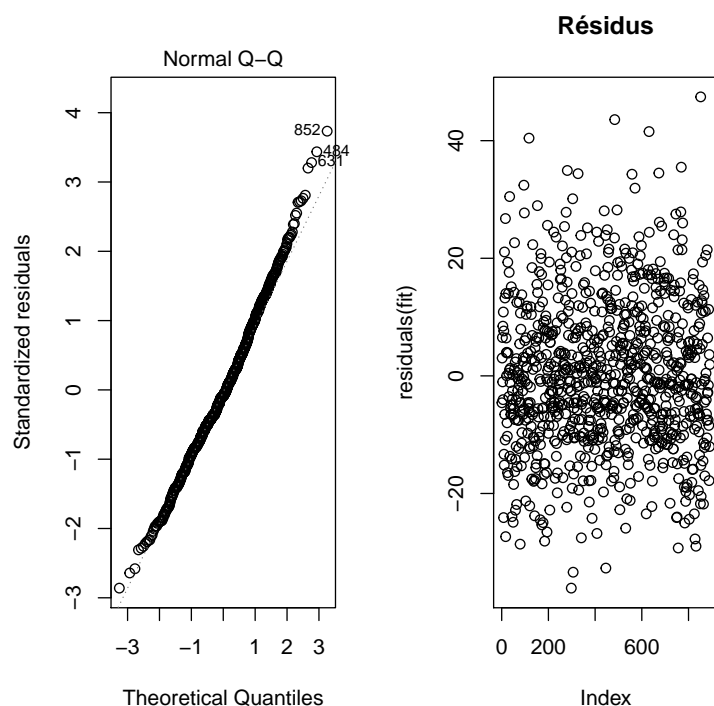
(Intercept)	Survived	Pclass	Sexmale	Fare	EmbarkedC
67.20295	-5.42894	-9.04418	1.64599	-0.03412	-15.33204
EmbarkedQ	EmbarkedS				
-11.38268	-14.89563				

On obtient le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\hat{\text{Age}} = & 67.20295 - 5.42894 \times \text{Survived} - 9.04418 \times \text{Pclass} + 1.64599 \times \text{Sexmale} - 0.03412 \times \text{Fare} \\ & - 11.38268 \times \text{EmbarkedQ} - 14.89563 \times \text{EmbarkedQ}\end{aligned}$$

#### 3.4.3.4 Visualisation des résidus

Voici le Q-Q plot ainsi que le graphique de la répartition des résidus.



On observe que la droite du Q-Q plot est à 45° et que les résidus suivent une répartition Normale. De plus, on observe une répartition uniforme des résidus.

#### 3.4.3.5 Amélioration du modèle

On va maintenant tester une variable modifier pour tenter d'améliorer notre modèle, il s'agit de la variable le log-Fare. En appliquant un log à une valeur numérique, on réduit l'échelle entre les variables. Autrement dit, on normalise les données.

**i***Modification des données*

La modification des données permet de mieux répondre aux postulats de la régression multiple, en particulier le postulat 2.2.2. Permettant ainsi d'avoir un modèle plus solide et théoriquement viable.

Parmi les différentes modifications couramment utilisées, il y a entre autres le *Log-Variable*, le *Carré-variable* et le *Cube-variable*.

Start: AIC=4708.75

Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked + Surname + LogFare

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
- Surname	665	101710	140435	4526.6
- LogFare	1	3	38728	4706.8
- Fare	1	8	38733	4706.9
<none>			38725	4708.8
- Pclass	1	212	38937	4711.6
- Embarked	2	313	39038	4711.9
- Sex	1	363	39088	4715.1
- Survived	1	2235	40959	4756.7

Step: AIC=4526.6

Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked + LogFare

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
- Fare	1	5	140440	4524.6
- Sex	1	112	140547	4525.3
<none>			140435	4526.6
- Embarked	3	1182	141617	4528.1
- LogFare	1	2538	142974	4540.6
- Survived	1	3800	144235	4548.4
+ Surname	665	101710	38725	4708.8
- Pclass	1	33088	173523	4713.1

Step: AIC=4524.63

Age ~ Survived + Pclass + Sex + Embarked + LogFare

	Df	Sum of Sq	RSS	AIC
- Sex	1	114	140555	4523.4

```

<none>                140440 4524.6
- Embarked    3        1183 141623 4526.1
+ Fare        1          5 140435 4526.6
- Survived    1        3801 144241 4546.4
- LogFare     1        4242 144682 4549.1
+ Surname    665       101708 38733 4706.9
- Pclass      1        33180 173621 4711.6

```

Step: AIC=4523.36

Age ~ Survived + Pclass + Embarked + LogFare

```

          Df Sum of Sq    RSS    AIC
<none>                140555 4523.4
- Embarked    3        1128 141683 4524.5
+ Sex         1         114 140440 4524.6
+ Fare        1          8 140547 4525.3
- LogFare     1        4690 145245 4550.6
- Survived    1        6118 146673 4559.3
+ Surname    665       101465 39090 4713.1
- Pclass      1        34657 175212 4717.7

```

Call:

```
lm(formula = Age ~ Survived + Pclass + Embarked + LogFare, data = data)
```

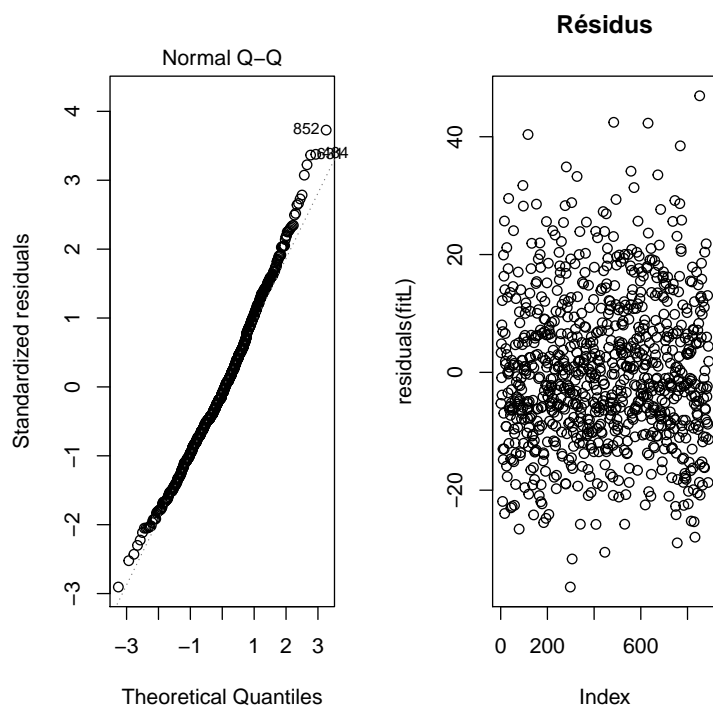
Coefficients:

```

(Intercept)      Survived      Pclass      EmbarkedC      EmbarkedQ      EmbarkedS
      80.000       -5.841      -10.368      -15.700      -12.328      -15.390
      LogFare
      -3.147

```

### 3.4.3.6 Visualisation des résidus



On obtient une légère amélioration de notre modèle et on retient ce modèle.

On cherche maintenant à prédire les âges des passagers à partir d'un second échantillon de donnée.

```
> head(predict(fitL, dataTest))
```

```
      1      2      3      4      5      6
24.25105 21.54136 39.78953 26.71147 19.77053 20.67271
```

**i***Segmentation des données*

En analyse des données, il est primordial de fragmenter les données. On utilise habituellement réduit l'algorithme suivant :

1. 80 % des données pour l'entraînement (training) et 20 % pour le test (testing) ;
2. 80 % des données de test pour l'entraînement (training) et 20 % pour la validation (validation).

On segmente les données afin d'éviter le [surapprentissage](#) (overfitting). Il s'agit de la situation ou toutes les situations possibles sont incluses dans le modèle et celui-ci perd de la qualité prédictive sur de nouvelle données.

Dans le cadre du cours, seulement l'étape 1 est suffisante.

Des méthodes plus [élaborée](#) et complexe existent pour les données massives et l'apprentissage automatique.

**i***Augmentation des données*

L'[augmentation des données](#) (*data augmentation*) permet d'améliorer la qualité d'un jeu de donnée. En ajoutant des informations à partir de données interne ou externe, on améliore l'information présente dans le modèle. Diverses méthodes telles que le traitement des données, la modification des données et l'ajout de variable permettent d'augmenter les données.



## Chapitre 4

# Les modèles linéaires généralisés

### 4.1 Introduction

Le modèle de régression linéaire multiple étudié lors des derniers chapitres peut parfois avoir certaines limitations :

- On suppose une distribution normale. Dans la plupart des contextes, cette distribution est inappropriée, car elle permet des valeurs négatives. On comprend qu'en actuariat, cette situation n'est pas désirable.
- Hypothèse contraignante de variance constante.
- Le domaine des variables réponses permet des valeurs entre  $-\infty$  et  $\infty$ . Plusieurs contextes ne se retrouvent que dans un domaine non négatifs. De plus, certaines situations pourraient être une variable réponse discrète.

Le modèle linéaire généralisé, parfois appelé GLM pour *Generalized Linear Models*, est une généralisation de la régression linéaire multiple dont l'objectif est de palier aux limitations précédentes.

#### **i**

#### *Reformulation*

On peut voir le GLM comme une généralisation souple de la régression linéaire. Cette généralisation de la régression linéaire permet au modèle linéaire d'être relié aux variables réponses via une fonction de lien. De plus, le GLM autorise l'amplitude de la variance de chaque mesure en étant une fonction de sa valeur prévue.

## 4.2 Notions préliminaires : La famille exponentielle

De manière générale, une variable aléatoire  $y$  obéit à une distribution faisant partie de la famille exponentielle si :

$$f_Y(y) = \exp \left\{ \frac{y \times \theta - b(\theta)}{a(\phi)} - c(y, \phi) \right\}$$

où,

- $\theta$  : Paramètre canonique
- $\phi$  : Paramètre de dispersion
- $a(\phi)$ ,  $b(\theta)$  et  $c(y, \phi)$  : 3 fonctions générales de  $y$ ,  $\theta$  et  $\phi$ .

### 4.2.1 Loi Normale

En posant,

- $\theta = \mu$
- $\phi = \sigma^2$
- $b(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$
- $a(\phi) = \phi$
- $c(y, \phi) = -\frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{\sigma^2} + \ln(2\pi\sigma^2) \right)$

alors,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \times \left( \frac{y-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

et

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

### Preuve

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \exp \left\{ \frac{y \times \mu - \frac{\mu^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{\sigma^2} + \ln(2\pi\sigma^2) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{-y^2}{2\sigma^2} + \frac{y \times \mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} (y - \mu)^2 - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \times \left( \frac{y-\mu}{\sigma} \right)^2} \end{aligned}$$

### 4.2.2 Loi Poisson

En posant,

- $\theta = \ln(\mu)$
  - $\phi = 1$
  - $b(\theta) = e^\theta$
  - $a(\phi) = \phi$
  - $c(y, \phi) = -\ln(y!)$
- alors,

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!}$$

et

$$Y \sim \text{Poisson}(\mu)$$

### Preuve

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \exp \left\{ \frac{y \ln(\mu) - e^{\ln(\mu)}}{1} + (-1) \ln(y!) \right\} \\ &= \exp \left\{ y \ln(\mu) - \mu + \ln \left( \frac{1}{y!} \right) \right\} \\ &= \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} \end{aligned}$$

### 4.2.3 Loi Bernouilli

En posant,

- $\theta = \ln \left( \frac{\pi}{(1-\pi)} \right)$
  - $\phi = 1$
  - $b(\theta) = \ln(1 + e^\theta)$
  - $a(\phi) = \phi$
  - $c(y, \phi) = \emptyset$
- alors,

$$f_Y(y) = \pi^y \times (1 - \pi)^{1-y}$$

et

$$Y \sim \text{Bern}(\pi)$$

## Preuve

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \exp \left\{ \frac{y \times \ln \left( \frac{\pi}{(1-\pi)} \right) - \ln \left( 1 + e^{\ln \left( \frac{\pi}{(1-\pi)} \right)} \right)}{1} + 0 \right\} \\ &= \exp \left\{ y \times \ln(\pi) - y \ln(1-\pi) + \ln(1-\pi) \right\} \\ &= \exp \left\{ y \times \ln(\pi) + (1-y) \ln(1-\pi) \right\} \\ &= \pi^y \times (1-\pi)^{1-y} \end{aligned}$$

### 4.2.4 Autres lois

- Loi beta
- Loi binomiale
- Loi gamma
- Loi inverse-Gaussienne
- Loi binomiale négative
- Loi pareto
- Loi weibull

sont aussi des distributions qui appartiennent à la famille exponentielle.

## 4.3 Généralités sur les modèles de régression avec la famille exponentielle

### 4.3.1 Contexte

Le contexte est très similaire à celui de la régression multiple :

### 4.3.2 Autres lois

- $\mathbb{Y}_{n \times 1}$  : Vecteur des observations de  $Y_i$ , où  $i = 1, \dots, n$ .
- $\mathbb{X}_{n \times (p+1)}$  : Matrice schéma contenant  $n$  lignes d'observations et  $(p+1)$  colonnes de variables explicatives.
- $\beta_{(p+1) \times 1}$  : Vecteur des  $(p+1)$  paramètres  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  à estimer.

### 4.3.3 Structure du modèle

On suppose maintenant que

$$(Y_i | X_i) \sim \text{Famille exponentielle}$$

et que

$$\begin{aligned}g(\mathbf{E}[Y_i|X_i]) &= X_i\beta \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \dots + \beta_p X_{i,p}\end{aligned}$$

Où  $g(\bullet)$  est une fonction continue appelée une **fonction de lien**.

### 4.3.4 Propriété de la fonction de lien

#### 4.3.4.1 Domaine de $g(\bullet)$

Domaine des valeurs possible de  $\mu = \varphi(\mu)$

Voici quelques exemples de domaine de la fonction de lien :

- Loi gamma  $\Rightarrow \varphi(\mu) = [0, \infty[$
- Loi bernouilli  $\Rightarrow \varphi(\mu) = [0, 1]$

#### 4.3.4.2 Image de $g(\bullet)$

L'image de la fonction de lien est  $\mathbb{R} = ]-\infty, \infty[$

#### 4.3.4.3 Conclusion

Le but de la fonction de lien est d'obtenir des valeurs de  $\mu$  qui correspond bien au contexte du modèle à parti du prédicteur linéaire  $X_i\beta$  qui peut prendre des valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Autrement dit, on définit un domaine cohérent pour les valeurs réponses et on ne restreint pas les valeurs possibles des observations.

Ainsi, on obtient  $\mu$  en inversant  $g(\bullet)$  :

$$g(\mathbf{E}[Y_i|X_i]) = X_i\beta$$

$$\boxed{\mathbf{E}[Y_i|X_i] = g^{-1}(X_i\beta)} \quad (4.1)$$

Il est donc nécessaire de choisir une fonction inversible pour la fonction de lien.



#### *Reformulation*

La fonction de lien fournit une relation linéaire entre le prédicteur linéaire et la moyenne de la fonction de distribution.

## 4.4 Approche générale

### 4.4.1 Procédure avec les GLM

- Choisir une distribution pour  $Y$  dans la famille exponentielle.
- Choisir une fonction de lien  $g(\bullet)$ .
- Estimer les paramètres  $\beta$  et  $\phi$ .
- Valider le modèle.

### 4.4.2 Estimation des paramètres

Dans le cas des GLM, on estime les paramètres en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

On souhaite choisir  $\beta$  qui maximise la fonction de vraisemblance suivante qui sera notre nouvelle métrique de distance :

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^n \ln(f_Y(y_i))$$

En pratique, il est d'usage d'utiliser la méthode de Newton-Raphson pour maximiser numériquement  $l(\beta)$ .

Pour ce faire, on pose  $\hat{\beta}^{(k)}$ , le vecteur contenant les valeurs estimées pour  $\beta$  après la  $k^e$  itération de l'algorithme.

En supposant que l'algorithme ait convergé après l'itération  $(i+1)$ , alors on a que :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta^{(i+1)}) = 0$$

ou encore que

$$S(\beta^{(i+1)}) = 0 \tag{4.2}$$

où  $S(\bullet)$  est appelé le vecteur score et est défini ainsi :

$$S(\beta^{(i+1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0} l(\beta) \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} l(\beta) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_p} l(\beta) \end{bmatrix}_{(p+1) \times 1}$$

Pour obtenir un algorithme permettant d'obtenir un estimateur récursivement, à partir de  $\hat{\beta}^{(i)}$ , il faut développer  $S(\beta^{(i+1)})$  autour de  $\hat{\beta}^{(i)}$  à l'aide d'une série de Taylor :

$$S(\beta^{(i+1)}) = S(\beta^{(i)}) + \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( S(\beta^{(i)}) \right) \right] \left( \hat{\beta}^{(i+1)} - \hat{\beta}^{(i)} \right)$$

En substituant cette expression dans l'équation 4.2, on obtient le développement suivant :

$$S(\beta^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( S(\beta^{(i)}) \right) \left( \hat{\beta}^{(i+1)} - \hat{\beta}^{(i)} \right) = 0$$

ou encore,

$$S(\beta^{(i)}) + \left( -I(\hat{\beta}^{(i)}) \right) \left( \hat{\beta}^{(i+1)} - \hat{\beta}^{(i)} \right) = 0$$

où  $I(\beta)$  correspond à la matrice d'information de Fisher et est donnée par :

$$I(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \beta_0^2} l(\beta) & \frac{\partial^2}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} l(\beta) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} l(\beta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} l(\beta) & \frac{\partial^2}{\partial \beta_1 \partial \beta_p} l(\beta) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \beta_p^2} l(\beta) \end{bmatrix}_{(p+1) \times (p+1)}$$

Ainsi, on peut réécrire l'expression de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S(\beta^{(i)}) &= I(\hat{\beta}^{(i)}) \left( \hat{\beta}^{(i+1)} - \hat{\beta}^{(i)} \right) \\ I^{-1}(\hat{\beta}^{(i)}) S(\beta^{(i)}) &= \hat{\beta}^{(i+1)} - \hat{\beta}^{(i)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\beta}^{(i+1)} = \hat{\beta}^{(i)} + I^{-1}(\hat{\beta}^{(i)}) S(\beta^{(i)})} \quad (4.3)$$

Cette équation correspond à

Vecteur de paramètre mis à jour = Ancien vecteur de paramètre

+ Produit matriciel entre l'inverse de la matrice Fisher et le vecteur score

### 4.4.3 Validation globale du modèle avec la *déviante*

En réécrivant la fonction de vraisemblance  $l(\beta)$  comme suit :

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln(f_Y(y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln(f_Y(y_i; \mu_i)) ; \text{ où } \mu_i = g^{-1}(X_i \beta) \\ &= l(y, \beta) \end{aligned}$$

On peut définir la statistique de déviance  $D(\beta)$  comme suit :

$$D(\beta) = 2 \times \left( \underbrace{l(y, y)}_{\text{Log vraisemblance sous un modèle parfait}} - \underbrace{l(y, \beta)}_{\text{Log vraisemblance du modèle obtenu}} \right)$$

On remarque que dans le cas de la famille exponentielle, on aura

$$D(\beta) = 2 \times \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \times (\theta(y_i) - \theta(\mu_i)) - b(\theta(y_i)) + b(\theta(\mu_i)) \right\} \quad (4.4)$$

#### 4.4.3.1 Loi normale

$$\begin{aligned} D(\beta) &= 2 \times \sum_{i=1}^n \left\{ y_i(y_i - \mu_i) - \frac{y_i^2}{2} + \frac{\mu_i^2}{2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ 2y_i^2 - y_i \times \mu_i - y_i^2 + \mu_i^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ y_i^2 - 2y_i \times \mu_i + \mu_i^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_t^2 \\ &= SSE \end{aligned}$$



## Conclusion

Dans le cas de la loi Normale, la déviance est égale à SSE.

De ce fait,  $D(\tilde{\beta})$  constitue une généralisation de SSE qui sera valide avec tous les sous-cas de la famille exponentielle.

### 4.4.3.2 Loi de Poisson

$$D(\tilde{\beta}) = 2 \times \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \ln \left( \frac{y_i}{\mu_i} \right) - (y_i - \mu_i) \right\} \\ \neq SSE$$

### 4.4.3.3 Loi binomiale( $m_i, \mu_i$ )

$$D(\tilde{\beta}) = 2 \times \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \ln \left( \frac{y_i}{\mu_i} \right) + (m_i - y_i) \times \ln \left( \frac{m_i - y_i}{m_i - \mu_i} \right) \right\} \\ \neq SSE$$

### 4.4.3.4 Loi gamma

$$D(\tilde{\beta}) = 2 \times \sum_{i=1}^n \left\{ -\ln \left( \frac{y_i}{\mu_i} \right) + \frac{y_i - \mu_i}{\mu_i} \right\} \\ \neq SSE$$

### 4.4.3.5 Loi inverse Gausienne

$$D(\tilde{\beta}) = \times \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\frac{\mu_i^2}{y_i}} \\ \neq SSE$$

## Conclusion

La déviance correspond à SSE seulement pour la distribution Normale. Dans les autres cas, on a une mesure plus générale.

#### 4.4.4 Validation locale du modèle avec des tests d'hypothèses et intervalles de confiances

##### 4.4.4.1 Test d'hypothèse très général

On introduit ici une version généralisée des tests de Fisher partiels introduits à la section 3.1.7.

##### Hypothèses à considérer

- $H_0$  : Un modèle *réduit*, noté  $M_0$ , qui est un sous-modèle de  $M_1$ ,  
le modèle complet, est statistiquement acceptable.  
 $H_1$  : On doit utiliser le modèle plus *complet*, noté  $M_1$ .

On utilise la statistique suivante pour tester les hypothèses,

$$\chi_{obs}^2 = D(\beta_{H_0}) - D(\beta_{H_1}) \quad (4.5)$$

$$\chi_{obs}^2 = 2 \times \left( l(\beta_{H_1}) - l(\beta_{H_0}) \right) \quad (4.6)$$

On rejette  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  si :

$$\chi_{obs}^2 \geq \chi_{\alpha}^2 \left( \text{Nombre de paramètres dans } M_1 - \text{Nombre de paramètres dans } M_0 \right) \quad (4.7)$$

##### 4.4.4.2 Intervalles de confiances

Selon la théorie du maximum de vraisemblance, on a que la loi asymptotique de  $\hat{\beta}_{\sim}$  est une loi normale multi-dimensionnelle :

$$\hat{\beta}_{(p+1) \times 1} \longrightarrow N_{p+1} \left( \beta_{\sim}; \mathbf{Var}(\hat{\beta}_{\sim}) \right)$$

avec,

$$\mathbf{Var}(\hat{\beta}) = I^{-1}(\hat{\beta})$$

Qui correspond à la borne inférieure de Cramer-Rao.

Ainsi un intervalle de confiance au niveau  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour  $\beta_1$  pour  $\beta_i$  est donné par :

$$\beta_i \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{[\text{Var}(\hat{\beta})]_{i+1,i+1}} \quad (4.8)$$

## 4.5 Modèle de régression normale

Sachant maintenant les résultats les plus généraux des GLM, il est intéressant de retrouver les concepts de la régression multiple.

Dans ce cas, on a que

$$(Y_i | X_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

avec,

$$\mu_i = X_i \beta \Rightarrow g(x) = x$$

Soit la fonction de lien identité.

On obtient donc,

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln(f_{Y_i}(y_i)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} (Y_i - X_i\beta)^2 \right\} \end{aligned}$$

On remarque que de maximiser  $l(\beta)$  revient à minimiser  $\sum_{i=1}^n (Y_i - X_i\beta)^2$  qui correspond à  $SSE$ .

Par conséquent,

$$S(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta) = ?$$

On cherche le jieme élément de ce vecteur  $S(\beta)$  :

$$\begin{aligned}
[S(\beta)]_j &= \frac{\partial}{\partial \beta_i} l(\beta) \\
&= \frac{2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i \beta)^2 X_{i,j} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n X_{i,j} Y_i - \left( \sum_{i=1}^n X_i \times X_{i,j} \right) \beta \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left( X_j^\top Y - X_j^\top X \beta \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que

$$S(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbb{X}^\top Y - \mathbb{X}^\top X \beta \right)$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
I(\beta) &= \frac{-\partial^2}{\partial \beta^2} l(\beta) \\
&= \frac{-\partial}{\partial \beta} S(\beta) \\
&=?
\end{aligned}$$

On cherche l'élément  $(j, k)$  de la matrice  $I(\beta)$

$$\begin{aligned}
[I(\beta)]_{j,k} &= \frac{-\partial^2}{\partial \beta_j \partial \beta_i} l(\beta) \\
&= \frac{-\partial}{\partial \beta_k} \left( \frac{-\partial}{\partial \beta_j} l(\beta) \right) \\
&= \frac{-\partial}{\partial \beta_k} \left( [S(\beta)]_j \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_{i,j} \times X_{i,k} \\
&= \frac{1}{\sigma^2} (X_i^\top \times X_j)
\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que :

$$I(\tilde{\beta}) = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})$$

En appliquant maintenant l'algorithme de Newton-Raphson (section 4.4.2), on a donc

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{(i+1)}_{\sim} &= \hat{\beta}^{(i)}_{\sim} + I^{-1}(\hat{\beta}^{(i)}_{\sim}) S(\hat{\beta}^{(i)}_{\sim}) \\ &= \hat{\beta}^{(i)}_{\sim} + \left[ \frac{1}{\sigma^2} (\mathbb{X}^\top \mathbb{X}) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbb{X}^\top \mathbb{Y} - \mathbb{X}^\top \mathbb{X} \beta \right) \\ &= \hat{\beta}^{(i)}_{\sim} + \sigma^2 (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \frac{1}{\sigma^2} \left( \mathbb{X}^\top \mathbb{Y} - \mathbb{X}^\top \mathbb{X} \beta \right) \\ &= \hat{\beta}^{(i)}_{\sim} + (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{Y} - (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{X} \beta \\ &= (\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{Y} \end{aligned}$$

#### 4.5.1 Conclusion intéressante

L'approche GLM basée sur la méthode du maximum de vraisemblance et utilisant l'algorithme de Newton-Raphson donne le même résultat pour  $\hat{\beta}$  que l'approche de la régression multiple basée sur la minimisation de la distance quadratique.

#### 4.5.2 Remarque sur la validation globale et locale du modèle sous la loi Normale

Tel que vu à la section 4.4.3.1,

$$\begin{aligned} D(\tilde{\beta}) &= SSE \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \\ &= \text{Somme de } N(0, 1) \text{ au carré} \\ &\sim \chi^2(n - (p + 1)) \end{aligned}$$

Ainsi, la statistique  $\chi_{obs}^2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \chi_{obs}^2 &= D(\tilde{\beta}_{H_0}) - D(\tilde{\beta}_{H_1}) \\ &= SSE(M_0) - SSE(M_1) \end{aligned}$$

Or, puisque

$$\begin{aligned} SSE(M_0) &\sim \chi^2(n - (P_{H_0} + 1)) \\ &\text{et} \\ SSE(M_1) &\sim \chi^2(n - (P_{H_1} + 1)) \end{aligned}$$

On peut ainsi dire que cela revient à tester,

$$\begin{aligned} \chi_{obs}^2 &\geq \chi_\alpha^2([n - (P_{H_0} + 1)] - [n - (P_{H_1} + 1)]) \\ \Rightarrow \chi_{obs}^2 &\geq \chi_\alpha^2(\underbrace{P_{H_1} - P_{H_0}}_{\text{Différence entre le nombre} \\ &\text{de paramètres entre } M_0 \text{ et } M_1}) \end{aligned}$$

Ce qui revient à tester si :

$$F^* = \frac{\frac{[SSE(M_0) - SSE(M_1)]}{[P_{H_1} - P_{H_0}]}}{\frac{SSE(M_1)}{n - P_{H_1}}} \geq \chi_\alpha^2(P_{H_1} - P_{H_0})$$

Soit le test de Fisher partiel de la section 3.1.7.

## 4.6 Modèle de régression logistique

### 4.6.1 Contexte motivant l'utilisation de ce modèle

On utilise la régression logistique lorsqu'il y a un phénomène dichotomique. C'est-à-dire que  $Y_i$  peut prendre seulement deux valeurs.

- Est-ce que l'assuré  $i$  avec les caractéristiques  $X_i$  va avoir des sinistres ?
- Est-ce que ce même assuré va renouveler sa police avec nous ?
- Est-ce qu'un individu ayant les caractéristiques  $X_i$  va décéder ou non dans la prochaine année ?

De façon pratique, il est d'usage de définir  $Y_i \in \{0, 1\}$ .

Dans ce cas, on a que

$$(Y_i | X_i) \sim \text{Bernouilli}(\pi_i)$$

Où  $\pi_i$  correspond à  $\mathbf{E}[Y_i | X_i]$  et  $g(\pi_i) = X_i \beta$ .

Puisque  $\pi_i \in ]0, 1[$ ,  $\pi_i$  est une probabilité, et que  $X_i \beta \in \mathbb{R}$ , il faut choisir la fonction de lien  $g(\bullet)$  de telle sorte que

$$g : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$

Bien que plusieurs candidats peuvent satisfaire cette condition, il est d'usage d'utiliser une fonction appelée *logit* dans ce contexte. Cette fonction est défini ainsi :

$$\begin{aligned} g(x) &= \text{logit}(x) \\ &= \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

#### 4.6.2 Conséquences

$$\begin{aligned} g(\pi_i) &= X_{i\sim} \beta \\ \text{logit}(\pi_i) &= X_{i\sim} \beta \\ \ln \left( \frac{\pi_i}{1-\pi_i} \right) &= X_{i\sim} \beta \end{aligned}$$

Il est donc possible d'exprimer  $\pi_i$  comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\pi_i}{1-\pi_i} &= \frac{e^{X_{i\sim} \beta}}{e} \\ \frac{1-\pi_i}{\pi_i} &= \frac{1}{\frac{e^{X_{i\sim} \beta}}{e}} \\ \frac{1}{\pi_i} - 1 &= \frac{1}{\frac{e^{X_{i\sim} \beta}}{e}} \\ \frac{1}{\pi_i} &= 1 + \frac{1}{\frac{e^{X_{i\sim} \beta}}{e}} \\ \pi_i &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{e^{X_{i\sim} \beta}}{e}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\pi_i = \frac{e^{X_{i\sim} \beta}}{1 + e^{X_{i\sim} \beta}}} \quad (4.9)$$

### 4.6.3 Interprétations

#### 4.6.3.1

$$\ln \left( \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} \right) = X_i \beta_{\sim}$$
$$\ln \left( \frac{Pr(Y_i = 1 | X_i)}{Pr(Y_i = 0 | X_i)} \right) = X_i \beta_{\sim}$$

Le log du rapport de cote est linéaire.

#### 4.6.3.2

$\beta_0$  : le log du rapport de cote lorsque toutes les variables explicatives  $X_i$  sont égales à zéro.

#### 4.6.3.3

$\beta_j$  : Si  $X_{i,j}$  augmente de une unité, alors que les autres variables explicatives sont fixées, alors le log du rapport de cote augmente de  $\beta_j$  unité pour l'individu  $i$ .

### 4.6.4 Optimisation

Sous la méthode du maximum de vraisemblance, on a

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln \left( Pr(Y_i = y_i | X_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left( \pi_i^{y_i} \times (1 - \pi_i)^{1-y_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( y_i \times \ln(\pi_i) + (1 - y_i) \times \ln(1 - \pi_i) \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left( y_i \times \ln \left( \frac{e^{\tilde{X}_i \beta}}{1 + e^{\tilde{X}_i \beta}} \right) + (1 - y_i) \times \ln \left( \frac{1}{1 + e^{\tilde{X}_i \beta}} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( y_i \times \ln \left( e^{\tilde{X}_i \beta} \right) - y_i \ln \left( 1 + e^{\tilde{X}_i \beta} \right) - (1 - y_i) \times \ln \left( 1 + e^{\tilde{X}_i \beta} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( y_i \times \tilde{X}_i \beta - \ln \left( 1 + e^{\tilde{X}_i \beta} \right) \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
S(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta) \\
&=?
\end{aligned}$$

On cherche le jieme élément du vecteur score, soit

$$\begin{aligned}
S(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\beta) \\
&= \sum_{i=1}^n X_{i,j} Y_i - \left( X_{i,j} \times \frac{e^{\tilde{X}_i \beta}}{1 + e^{\tilde{X}_i \beta}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n X_{i,j} \left( Y_i - \frac{e^{\tilde{X}_i \beta}}{1 + e^{\tilde{X}_i \beta}} \right) \\
&= X_j^T (Y - M(\tilde{X}_i \beta))
\end{aligned}$$

où  $M(\tilde{X}_i \beta)$  correspond à

$$M(\tilde{X}_i \beta) = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \beta \\ \frac{e^{\tilde{X}_1 \beta}}{1 + e^{\tilde{X}_1 \beta}} \\ \vdots \\ \tilde{X}_n \beta \\ \frac{e^{\tilde{X}_n \beta}}{1 + e^{\tilde{X}_n \beta}} \end{bmatrix}$$

Ainsi, on déduit que

$$S(\tilde{\beta}) = \mathbb{X}^{\top}(\mathbb{Y} - M(X_i \tilde{\beta})) \quad (4.10)$$

On peut maintenant trouver  $I(\beta)$ ,

On cherche l'élément  $(j, k)$  de cette matrice, soit :

où  $W_i$  correspond à

Ainsi, on arrive à la déduction que

105

avec,

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

En appliquant maintenant l'algorithme de Newton-Raphson (section 4.4.2), on a

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\sim}^{(i+1)} &= \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + I^{-1}(\hat{\beta}_{\sim}^{(i)}) S(\hat{\beta}_{\sim}^{(i)}) \\ &= \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top (\mathbb{Y} - M(\mathbb{X}_i \hat{\beta}_{\sim}^{(i)})) \\ &\stackrel{\times I}{=} I \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top I (\mathbb{Y} - M(\mathbb{X}_i \hat{\beta}_{\sim}^{(i)})) \\ &= (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X}) \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} (\mathbb{Y} - M) \\ &= [(\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{W}] \underbrace{[\mathbb{X} \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + \mathbb{W}^{-1} (\mathbb{Y} - M)]}_{Z^{(i)} : \text{transformation sur } Y} \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'algorithme suivant :

$$\boxed{\hat{\beta}_{\sim}^{(i+1)} = (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{W} Z^{(i)}} \quad (4.11)$$

#### 4.6.4.1 Remarque

L'algorithme itératif permettant d'obtenir l'estimateur de  $\hat{\beta}$  peut être vu comme une succession d'estimations de régressions linéaires de  $Z^{(i)}$  sur  $\mathbb{X}$ , pondérés par  $\mathbb{W}$ .

#### 4.6.5 Formule de déviance-régression logistique

$$D(\underset{\sim}{\beta}) = 2 \times \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \times \ln \left( \frac{y_i}{\pi_i} \right) + (1 - y_i) \times \ln \left( \frac{1 - y_i}{1 - \pi_i} \right) \right\}$$

où,

$$\pi_i = \frac{e^{X_i \beta}}{1 + e^{X_i \beta}}$$

#### 4.6.6 Test d'hypothèse général

$$\chi_{obs}^2 = D(\underset{\sim}{\beta}_{H_0}) - D(\underset{\sim}{\beta}_{H_1})$$

#### 4.6.7 Intervalle de confiance

On obtient ainsi l'intervalle de confiance suivant au niveau  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pour  $\beta_i$ ,

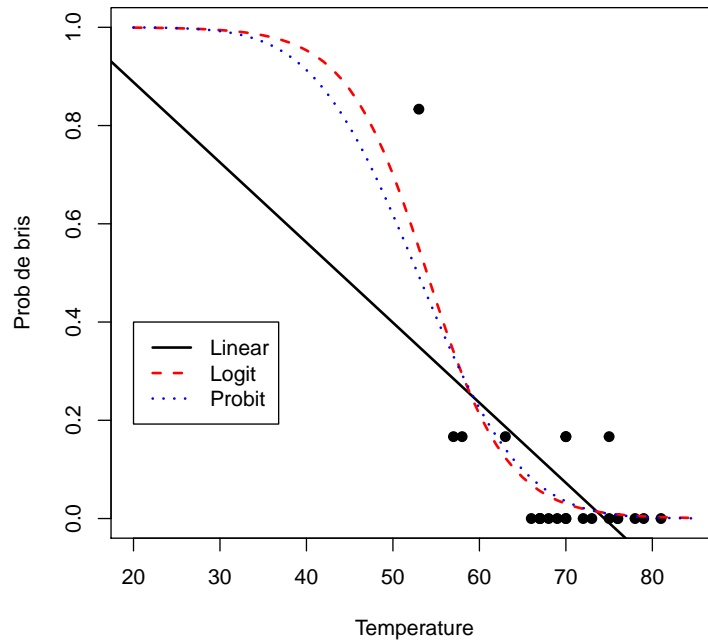
$$\boxed{\hat{\beta}_i = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{[(\mathbb{X}^T \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1}]_{(i+1) \times (i+1)}}} \quad (4.12)$$

#### Illustration d'un GLM

Voici une représentation d'un modèle linéaire, d'un GLM logistique et d'un GLM probit<sup>1</sup>. Les trois modèles tentent de modéliser la probabilité de bris simultané des six joints d'étanchéité selon la température sur les navettes spatiales. Cet exemple permet de bien visualisé la différence entre un modèle linéaire et un GLM.

---

1. Il s'agit d'un exemple tiré des notes de cours de modèle linéaire à l'automne 2014 donné et rédigé par Marie-Pier Côté.



## 4.7 Régression de Poisson

### 4.7.1 Contexte motivant l'utilisation de ce modèle

Phénomène où la variable aléatoire  $Y$  est positive et discrète ( $Y_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ).  
Voici quelques exemples de contexte :

- Nombre de sinistres d'un assuré au cours de la prochaine année.
- Nombre de défauts de fabrication d'un produit.

Dans ce cas, on postule que,

$$(Y_i | X_i) \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$$

Où

$$\lambda_i = \mathbf{E}[Y_i | X_i]$$

avec,

$$g(\lambda_i) = \underline{X}_i \underline{\beta}$$

Puisque  $\lambda_i \in [0, \infty[$  est non négatif et que  $\underline{X}_i \underline{\beta} \in \mathbb{R}$ , il faut utiliser une fonction  $g(\bullet)$  telle que :

$$g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

Bien que plusieurs candidats peuvent satisfaire cette condition, il est d'usage d'utiliser la fonction logarithmique dans le contexte de la régression de Poisson :

$$g(x) = \ln(x)$$

### 4.7.2 Conséquences

$$g(\lambda_i) = \underline{X}_i \underline{\beta}$$

$$\ln(\lambda_i) = \underline{X}_i \underline{\beta}$$

$$\lambda_i = e^{\underline{X}_i \underline{\beta}}$$

En conclusion, sous cette spécification on a que :

$$(Y_i | \underline{X}_i) \sim \text{Poisson} \left( e^{\underline{X}_i \underline{\beta}} \right)$$

Puisque  $\underline{X}_i \underline{\beta} = \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \dots + \beta_p X_{i,p}$ , on a que

$$(Y_i | \underline{X}_i) \sim \text{Poisson}(e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \dots + \beta_p X_{i,p}})$$

$$(Y_i | \underline{X}_i) \sim \text{Poisson}(\underbrace{e^{\beta_0} \times e^{\beta_1 X_{i,1}} \times \dots \times e^{\beta_p X_{i,p}}}_{\text{Modèle multiplicatif}})$$

Modèle multiplicatif

### 4.7.3 Interprétations

#### 4.7.3.1

$\ln(\lambda_i) = \underline{X}_i \underline{\beta}$ , qui correspond au log de l'espérance est linéaire.

#### 4.7.3.2

$\beta_0$  : Lorsque toutes les variables explicatives  $X_i$  ont une valeur de zéro, alors l'espérance de  $Y_i$  est  $e^{\beta_0}$ .

#### 4.7.3.3

$\beta_i$  : Si  $X_{i,j}$  augmente d'une unité, alors que les autres variables explicatives restent fixées, alors l'espérance de  $Y_i$  est multiplié par  $e^{\beta_j}$

### 4.7.4 Optimisation

Sous la méthode du maximum de vraisemblance, on a que :

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln \left( Pr(Y_i = y_i | X_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{y_i}}{y_i!} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left( y_i \times \ln(\lambda_i) - \lambda_i - \ln(y_i!) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left( y_i \times X_{i,j} \beta - e^{X_{i,j} \beta} - \ln(y_i!) \right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$S(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta) = ?$$

On cherche le jème élément de ce vecteur  $S(\beta)$  :

$$\begin{aligned} [S(\beta)]_j &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\beta) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( Y_i X_{i,j} - X_{i,j} e^{X_{i,j} \beta} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_{i,j} \left( Y_i - e^{X_{i,j} \beta} \right) \\ &= X_j^T \left( Y - M(X \beta) \right) \end{aligned}$$

où  $M(X_{i\sim}\beta)$  correspond à

$$M(X_{i\sim}\beta) = \begin{bmatrix} X_{1\sim}\beta \\ e \\ \vdots \\ X_{n\sim}\beta \\ e \end{bmatrix}$$

et donc,

$$S(\beta) = \mathbb{X}^\top \left( \mathbb{Y} - M(X_{i\sim}\beta) \right) \quad (4.13)$$

On peut maintenant trouver  $I(\beta)$ ,

$$\begin{aligned} I(\beta) &= -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} l(\beta) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} S(\beta) \end{aligned}$$

On cherche l'élément  $(j, k)$  de cette matrice, soit :

$$\begin{aligned} [I(\beta)]_{j,k} &= -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} l(\beta) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta_k} \left( \frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\beta) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta_k} [S(\beta)]_j \\ &= \sum_{i=1}^n X_{i,j} X_{i,k} \times e_{X_{i\sim}\beta} \\ &= \sum_{i=1}^n X_{i,j} \times X_{i,k} \times W_i \end{aligned}$$

où  $W_i$  correspond à

$$\begin{matrix} X_{i\sim}\beta \\ e \end{matrix}$$



Ainsi, on arrive à la déduction que

$$I(\beta) = \mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X}$$

avec,

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

En utilisant une méthode similaire à celle qui a été appliquée pour le cas de la régression logistique à la section 4.6.4, on peut montrer que l'algorithme de Newton-Raphon est le suivant :

$$\hat{\beta}_{\sim}^{(i+1)} = \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + I^{-1}(\hat{\beta}_{\sim}^{(i)}) S(\hat{\beta}_{\sim}^{(i)})$$

Qui peut être simplifié sous la forme suivante,

$$\hat{\beta}_{\sim}^{(i+1)} = (\mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{Z}^{(i)}$$

où  $\mathbb{Z}^{(i)} = \mathbb{X} \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + \mathbb{W}^{-1}(\mathbb{Y} - M(\mathbb{X}, \beta))$

## 4.8 Autres notions importantes avec les GLM

### 4.8.1 Autres distributions

La procédure illustrée aux sections 4.5, 4.6 et 4.6 s'applique à toutes les distributions de la famille exponentielle. Les cas les plus célèbres sont :

#### 4.8.1.1 Loi Binomiale négative

Permet d'obtenir une variance plus grande que la moyenne, ce qui n'est pas possible avec la loi de Poisson.

- Fonction de log-vraisemblance

$$(Y_i | X_i, \Theta_i) \sim \text{Poisson}(\lambda_i \Theta_i)$$

où

$$\ln(\lambda_i) = X_{\sim} \beta$$

$$\lambda_i = e^{X_{\sim} \beta}$$

et,

$$\Theta_i \sim \Gamma(\alpha, \alpha)$$

$$\mathbf{E}[\Theta] = 1$$

$$\mathbf{Var}(\Theta) = \frac{1}{\alpha}$$

De plus, si  $\alpha \rightarrow \infty$ , alors NegBin  $\rightarrow$  Poisson.

$$\begin{aligned} P(Y_i = y_i | X_i) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_i \theta} (\lambda_i \theta)^{y_i}}{y_i!} \times \frac{\alpha^\alpha \Theta^{\alpha-1} e^{-\alpha \Theta}}{\Gamma(\alpha)} d\Theta \\ &= \frac{\alpha^\alpha \lambda_i^{y_i}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(y_i + 1)} \int_0^\infty \Theta^{(y_i + \alpha) - 1} e^{-(\alpha + \lambda_i) \Theta} d\Theta \\ &= \frac{\alpha^\alpha \lambda_i^{y_i}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(y_i + 1)} \times \frac{\Gamma(y_i + \alpha)}{(\alpha + \lambda_i)^{y_i + \alpha}} \\ &= \frac{\Gamma(y_i + \alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(y_i + 1)} \left( \frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^\alpha \left( \frac{\lambda_i}{\alpha + \lambda_i} \right)^{y_i} \end{aligned}$$

- $l(\beta) = \sum_{i=1}^n \ln(Pr(Y_i = y_i | X_i))$
- $S(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta)$
- $I(\beta) = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} l(\beta)$
- $\hat{\beta}_{\sim}^{(i+1)} = \hat{\beta}_{\sim}^{(i)} + I^{-1}(\hat{\beta}_{\sim}^{(i)}) S(\hat{\beta}_{\sim}^{(i)})$

### Test de surdispersion

$H_0$  : Il n'y a pas de surdispersion, la variance de  $Y$  est égale à l'espérance de  $Y$ .

$H_1$  : Il y a de la surdispersion

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(Y) &= \mathbf{E}[\mathbf{Var}(Y|\Theta)] + \mathbf{Var}(\mathbf{E}[Y|\Theta]) \\
&= \mathbf{E}[\lambda \times \Theta] + \mathbf{Var}(\lambda \times \Theta) \\
&= \lambda \times 1 + \lambda^2 \times \frac{1}{\alpha} \\
&= \lambda \times \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

### Procédure

1. Obtenir  $l_{Poisson}(\beta)$  avec une régression Poisson.
2. Obtenir  $l_{NB}(\beta)$  avec une régression Binomiale négative.
3. Calculer  $\chi_{obs}^2 = 2 \times (l_{NB}(\beta) - l_{Poisson}(\beta))$
4. On rejette  $H_0$  au niveau de confiance  $100 \times (1 - \alpha)\%$  si

$$\chi_{obs}^2 \geq \chi_{1-2 \times \alpha}^2(1)$$

Il s'agit d'un test unilatéral.

#### 4.8.1.2 Loi Gamma

Permet de modéliser des cas où  $Y$  est continue, mais non-négative.

- Fonction de log-vraisemblance

$$f_{Y_i|X_i}(y_i) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu_i}\right)^\alpha \times y_i^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\alpha}{\mu_i} y_i\right)}}{\Gamma(\alpha)}$$

où

$$\begin{aligned}
\ln(\mu_i) &= X_{\sim} \beta \\
\stackrel{\text{Lien log}}{\Rightarrow} \mu_i &= e^{X_{\sim} \beta} \\
\frac{1}{\mu_i} &= X_{\sim} \beta
\end{aligned}$$

$$\text{Lien inverse} \Rightarrow \mu_i = \frac{1}{X_i \beta}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_i | X_i] &= \mu_i \\ &= g^{-1}(X_i \beta) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Var}(Y_i | X_i) = \frac{\mu_i^2}{\alpha}$$

- $l(\beta) = \sum_{i=1}^n \ln(f_{Y_i | X_i}(y_i))$
- $S(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} l(\beta)$
- $I(\beta) = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} l(\beta)$
- $\hat{\beta}^{(i+1)} = \hat{\beta}^{(i)} + I^{-1}(\hat{\beta}^{(i)}) S(\hat{\beta}^{(i)})$

## 4.8.2 Algorithme du Scoring

L'algorithme de Scoring est un algorithme itératif pour estimer les paramètres. Il peut parfois être une alternative à l'algorithme de Newton-Raphson.

Pour obtenir l'algorithme du Scoring, il faut simplement remplacer  $I(\beta)$  par  $F(\beta)$

dans la formule d'optimisation des paramètres. Ce qui donne la formule suivante :  $\hat{\beta}^{(i+1)} = \hat{\beta}^{(i)} + F^{-1}(\hat{\beta}^{(i)}) S(\hat{\beta}^{(i)})$  où

$$F(\beta) = E_Y [I(\beta^{(i)})]$$

### 4.8.2.1 Remarque

En pratique, il est d'usage d'utiliser cet algorithme pour alléger les formules lorsqu'il reste des termes en  $y_i$  dans la matrice  $I(\beta)$ .

Dans le cas de la loi Normale, Logistique et Poisson, il n'y a pas de  $y_i$  dans  $I(\beta)$ , mais ce n'est pas le cas avec la loi gamma ou avec la loi géométrie.

### 4.8.2.2 Exemple : Loi géométrique

- $Pr(Y_i = y_i | X_i) = P_i^{y_i-1} \times (1 - P_i); y_i \in \{1, 2, \dots\}$

- Fonction de lien  $g(x) = \ln(x - 1)$

$$\ln(\mathbf{E}[Y_i|X_i] - 1) = X_i\beta$$

$$\mathbf{E}[Y_i|X_i] - 1 = e^{X_i\beta}$$

$$\mathbf{E}[Y_i|X_i] = 1 + e^{X_i\beta}$$

$$\frac{1}{1 - P_i} = 1 + e^{X_i\beta}$$

$$1 - P_i = \frac{1}{1 + e^{X_i\beta}}$$

$$P_i = \frac{e^{X_i\beta}}{1 + e^{X_i\beta}}$$

- Fonction de log-vraisemblance

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln \left( Pr(Y_i|X_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (y_i - 1) \ln(P_i) + \ln(1 - P_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (y_i - 1) \ln \left( \frac{e^{X_i\beta}}{1 + e^{X_i\beta}} \right) + \ln \left( \frac{1}{1 + e^{X_i\beta}} \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (y_i - 1) \left[ X_i\beta - \ln(1 + e^{X_i\beta}) \right] - \ln(1 + e^{X_i\beta}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (y_i - 1)X_i\beta - y_i \times \ln(1 + e^{X_i\beta}) \right\} \end{aligned}$$

- Vecteur Score

$$[S(\hat{\beta})]_j = \frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\beta)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left\{ (y_i - 1)X_{i,j} - y_i X_{i,j} \times \frac{e^{\tilde{X}_{i\beta}}}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \right\} \\
&= \dots \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \right\} \times X_{i,j}
\end{aligned}$$

- Matrice d'information de Fisher

$$\begin{aligned}
I(\beta) &= \frac{\partial^2}{\partial \beta_{\tilde{j}}^2} l(\beta) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \beta_k} \left( \frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\beta) \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \beta_k} [S(\beta)]_j \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \times \frac{e^{\tilde{X}_{i\beta}}}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times \frac{1}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times X_{i,j} \times X_{i,k} \right\}
\end{aligned}$$

On remarque qu'il y a des  $y_i$  dans la matrice d'information de Fisher.

- Matrice F

$$\begin{aligned}
[F(\beta)]_{j,k} &= E_Y \left[ [I(\beta)]_{j,k} \right] \\
&= E_Y \left[ \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \times \frac{e^{\tilde{X}_{i\beta}}}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times \frac{1}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times X_{i,j} \times X_{i,k} \right\} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{E}[y_i | X_i] \times \frac{e^{\tilde{X}_{i\beta}}}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times \frac{1}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times X_{i,j} \times X_{i,k} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{1 - P_i} \times \frac{e^{\tilde{X}_{i\beta}}}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times \frac{1}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times X_{i,j} \times X_{i,k} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left\{ (1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}) \times \frac{e^{\tilde{X}_{i\beta}}}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times \frac{1}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times X_{i,j} \times X_{i,k} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{e^{\tilde{X}_{i\beta}}}{1 + e^{\tilde{X}_{i\beta}}} \times X_{i,j} \times X_{i,k} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n X_{i,j} \times W_i \times X_{i,k}
\end{aligned}$$

Cette expression est plus simple, car elle n'est pas fonction des  $Y_i$ . On peut donc réécrire  $F(\tilde{\beta})$  comme suit :

$$F(\tilde{\beta}) = \mathbb{X}^\top \mathbb{W} \mathbb{X}$$

où  $\mathbb{W}$  correspond à la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

### 4.8.3 Variable offset

Il s'agit d'une variable explicative dont le  $\beta$  est d'une valeur unitaire.

#### 4.8.3.1 Utilisation en actuariat

On utilise les variables offset pour effectuer la modélisation de la fréquence des sinistres à partir de la loi Poisson.

#### 4.8.3.2 Exemple

$i$	$U_i$	$N_i$	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$	$\cdots$	$X_{i,p}$
1	0.5	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	1.0	2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	1.0	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4	0.25	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	0.05	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- $U_i$  : L'exposition au risque. Autrement dit, la portion d'une année ou l'assuré  $i$  a détenu une police en vigueur.
- $N_i$  : Le nombre de sinistres de l'assuré  $i$ .

## Le modèle GLM

$$(N_i|U_i, X_i) \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$$

$$\lambda_i = U_i \times e^{X_i\beta}$$

### Idée sous-jacente à ce modèle

Un assuré qui a détenu une police en vigueur pendant quelques jours a considérablement moins de chances d'avoir des sinistres qu'un assuré qui a conservé sa police en vigueur pendant toute l'année.

### Interprétation

- $\lambda_i = U_i \times e^{X_i\beta}$  : Nombre de sinistres espérés pour l'assuré  $i$ .
- $\frac{\lambda_i}{U_i} = e^{X_i\beta}$  : Fréquence de sinistre espéré pour l'assuré  $i$ .

### Variable offset

$$\begin{aligned}\lambda_i &= U_i \times e^{X_i\beta} \\ &= e^{\ln(U_i)} \times e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \dots + \beta_p X_{i,p}} \\ &= e^{\ln(U_i) + \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \dots + \beta_p X_{i,p}}\end{aligned}$$

En posant,  $0_i = \ln(U_i)$ , alors on a que :

$$\lambda_i = e^{1 \times 0_i + \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \dots + \beta_p X_{i,p}}$$

Ici,  $0_i$  est la variable offset.

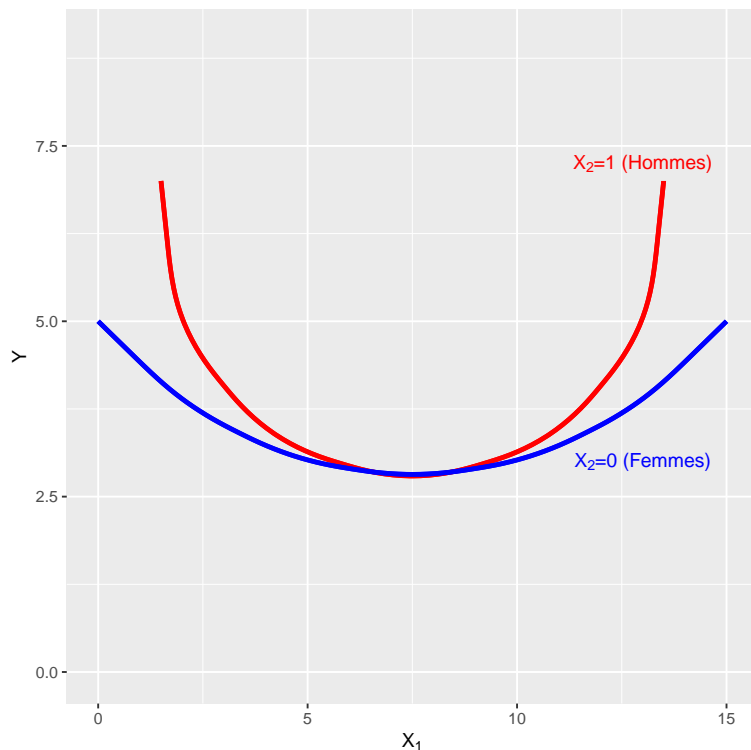
### 4.8.4 Ajout d'une interaction entre deux variables explicatives

Si on pense que l'effet combiné de deux variables explicatives doit être différent de l'addition des effets individuels de ces deux variables, on utilise une variable d'interaction.



#### 4.8.4.1 Exemple

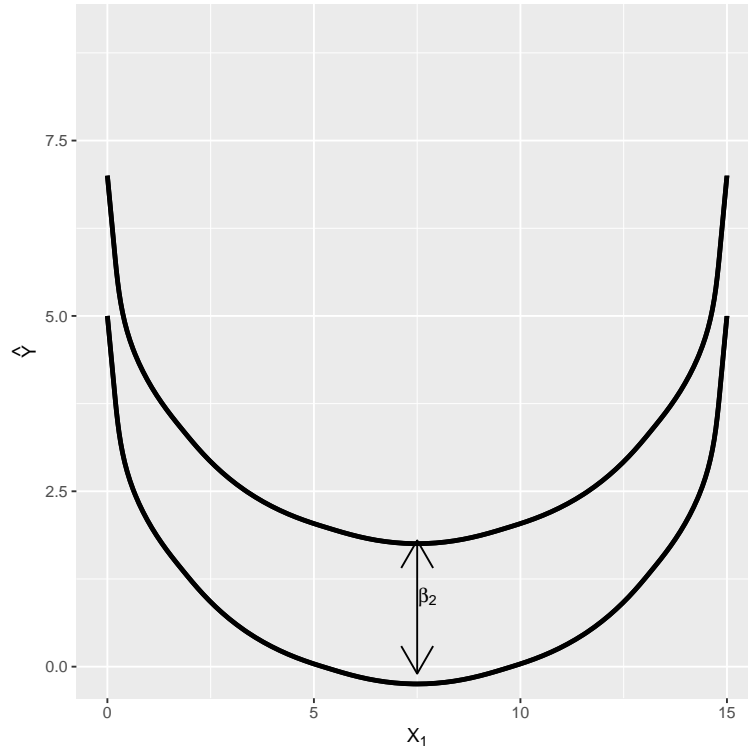
- $Y$  : Le coût d'assurance d'une auto
  - $X_1$  : Âge de l'assuré au carré
  - $X_2$  : Indicateur que l'assuré est un homme
- En pratique, on observe souvent la tendance suivante :



Or, il est impossible d'obtenir le graphique précédent avec une structure linéaire de la forme :

$$\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

Car le  $\beta_2$  ne fait qu'induire un effet de translation sur les courbes sans jouer sur l'amplitude :



Qui correspond à la fonction suivante :

$$g(\mathbf{E}[Y|X_i]) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 X_1 & , \text{si une femme} \\ (\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 X_1 & , \text{si un homme} \end{cases}$$

Pour permettre à l'amplitude de varier selon le sexe, il faut ajouter une interaction à la structure linéaire précédente, soit :

$$\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \underbrace{\beta_3 \times X_1 \times X_2}_{\text{Partie d'interaction entre } X_1 \text{ et } X_2}$$

Ainsi,

$$g(\mathbf{E}[Y|X_i]) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 X_1 & , \text{si une femme} \\ (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) X_1 & , \text{si un homme} \end{cases}$$

#### 4.8.4.2 Remarque importante

Tout comme le traitement des variables non numériques, l'ajout d'une interaction ne nécessite que de modifier la matrice schéma  $\mathbb{X}$  et le vecteur  $\underline{\beta}$ .

### Sans interaction

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & X_1 & X_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 60 & 0 \\ 1 & 30 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$
$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

### Avec interaction

$$\mathbb{X} = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 = X_1 \times X_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 60 & 0 & 0 \\ 1 & 30 & 1 & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$
$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

## 4.8.5 Analyse des résidus

Toute la théorie introduite au chapitre 3 reste valide pour les GLM à l'exception du fait qu'il soit nécessaire de définir un résidu plus général.

### 4.8.5.1 Résidus de la déviance

$$\hat{\varepsilon}_D = \text{signe}(y_i - \hat{\mu}_i) \times \sqrt{2 \times (l(\underline{y}, \underline{y})_i - l(\underline{y}, \underline{\mu})_i)}$$

## Annexe A

# Code source

### A.1 Exemple du chapitre 3

Voici le code source de l'exemple à la section 3.4.3.

```
3 > # Import data
4 > data <- read.csv('data/Titanic/train.csv', stringsAsFactors =
  T)
5 > summary(data)
6 > # Visualisation des variables en fct de l'age
7 > par(mfrow = c(3,2))
8 > plot(Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked + Fare,
  data)
9 > # Ajout de la variable nom de famille
10 > data$Surname <- as.factor(sapply(as.character(data$Name),
11 +                               function(x) strsplit(x, split = '[,]')
                                [[1]][1]))
12 > # Visualiser les 6 premieres observations par categorie
13 > head(summary(data$Surname))
14 > # Modele de regression stepwise
15 > fit <- step(lm(Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare + Embarked
  + Surname, data),
16 +            direction = "both")
17 > fit
18 > # Q-Q plot
19 > par(mfrow = c(1,2))
20 > plot(fit, which=2)
21 > # Graphe des residus
22 > plot(residuals(fit), main = "Residus")
23 > # Ajout de la variable Log - Fare
24 > data$LogFare <- log(data$Fare)
25 > data$LogFare[data$LogFare == -Inf] <- 0
26 > # Nouveau modele
```

```

27 > fitL <- step(lm(Age ~ Survived + Pclass + Sex + Fare +
    Embarked + Surname + LogFare, data), direction = "both")
28 > fitL
29 > # Import data
30 > dataTest <- read.csv('data/Titanic/test.csv', stringsAsFactors
    = T)
31 > head(predict(fitL, dataTest))

```

Listing A.1 – Code source en R pour l'exemple