UNIVERSITÉ LAVAL
École d'actuariat

ACT 2003
Notes de cours
Modèles linéaires en actuariat

David Beauchemin

Automne 2017

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Régression linéaire simple **2**
2.1 Introduction 2
2.1.1 Regression linéaire simple 3
2.1.2 Regression linéaire multiple 3
2.1.3 Régression exponentielle 5
2.1.4 Régression quadratique 5
2.2 Le modèle de régression linéaire simple 8

Résumé

abstrat

Chapitre 1

Introduction

L'établissement de prévisions joue un rôle central dans notre vie de tous les jours (prévisions météorologique, horoscope, etc.), et plus particulièrement dans celle des actuaires.

Objectifs de la régression

Régulièrement en actuariat, on se questionne sur les effets de différentes variables sur d'autres. Par exemple,

- Quel est l'effet de l'âge sur la fréquence des sinistres automobiles ?
- Quel est l'effet du sexe sur la mortalité ?

On cherche à étuider et déterminer les relations entre des variables mesurables à partir de données.

Deux grandes classes de variables mesurables :

- Qualitatives : basées sur des opinions et/ou des intuitions.
- Quantitatives : basées sur des observations, un modèle et des arguments mathématiques.

Deux *grandes étapes* pour établir des prévisions quantitatives

1. Bâtir le modèle et estimer les paramètres :
   ex : $F = M \times a$ Qui représente un modèle déterministe
   ex : $Y = 3 \times X + 6 + \epsilon_t$;où$\epsilon_t \sim N(0, 10)$ Qui représente un modèle probabiliste
2. Calculer les prévisions à partir du modèle.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles probabilistes linéaires seront étudiez.

Chapitre 2

Régression linéaire simple

2.1 Introduction

De façon générale, en régression, nous avons :

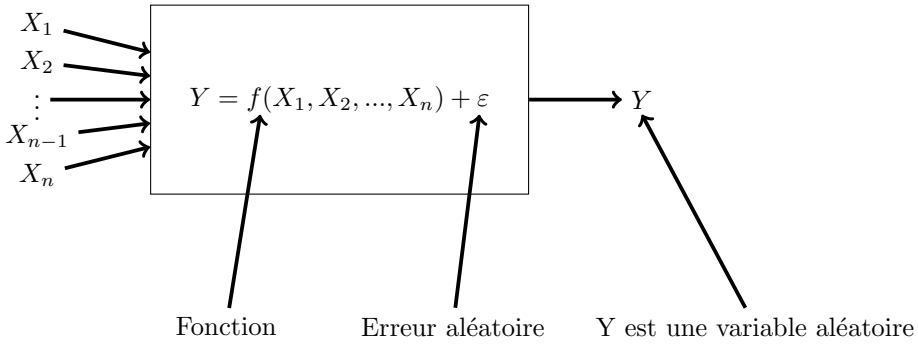
Y	Variable dépendante, ou de réponse	Output
$X_1, X_2, ..., X_n$	Soit n variables indépendantes ou explicatives, ou exogènes [1]	Input
$\beta_0, \beta_1, ...\beta_n$	Les paramètres à estimer	

Voici une illustration du concept de régression linéaire

Étape 1
Observation des X_i

Étape 2
Modèle de régression

Étape 3
Prévision de Y



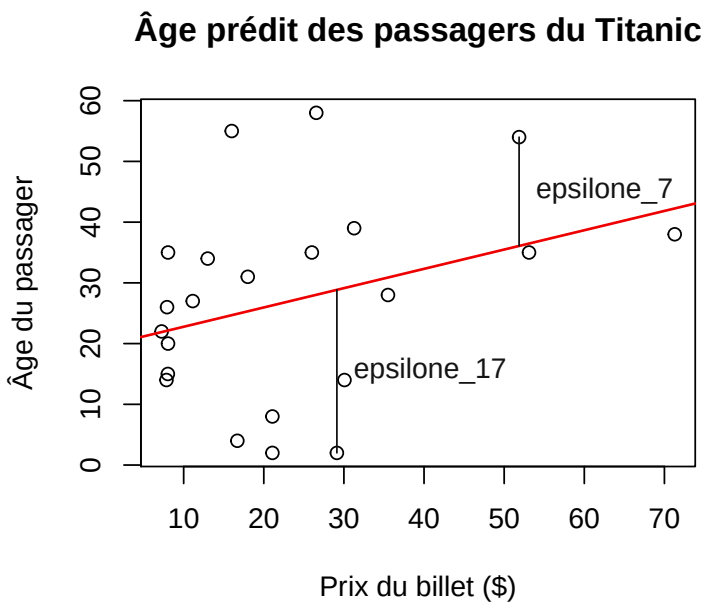
1. Les variables X_i sont indépendante par rapport à y, mais pas nécessairement entre elles.

2.1.1 Regression linéaire simple

On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet à l'aide du modèle linéaire suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \varepsilon$$

Âge du passager — Prix du billet — Erreur aléatoire

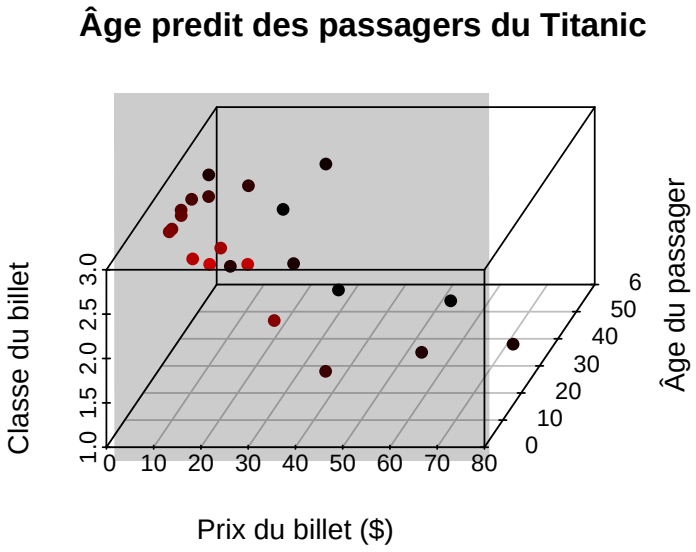


2.1.2 Regression linéaire multiple

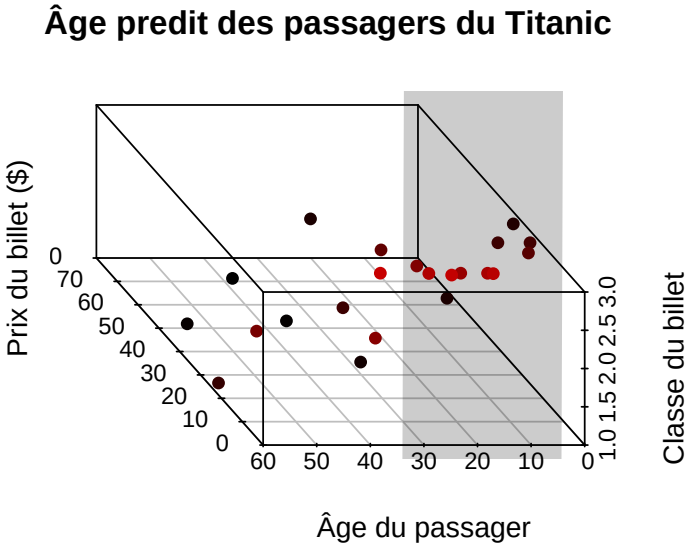
On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet et son sexe à l'aide du modèle linéaire suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Âge du passager — Prix du billet — Sexe du passager — Erreur aléatoire



Voici la régression sous un autre angle, on voit la surface plane de régression.

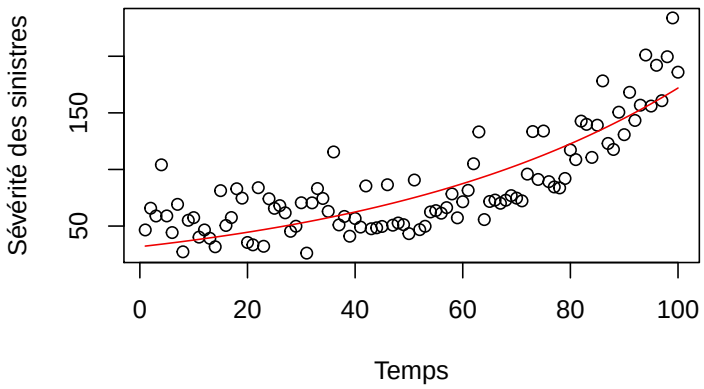


2.1.3 Régression exponentielle

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps à l'aide du modèle exponentielle suivant,

$$Y = \beta_0 \times e^{\beta_1 \times X} \times \varepsilon$$

Sévérité du sinistre — Temps — Erreur aléatoire



Note

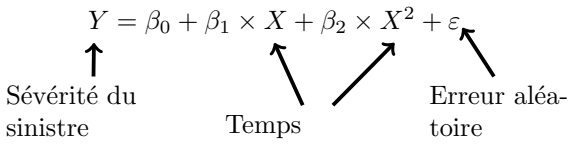
On remarque que la régression exponentielle est similaire à une régression linéaire simple.

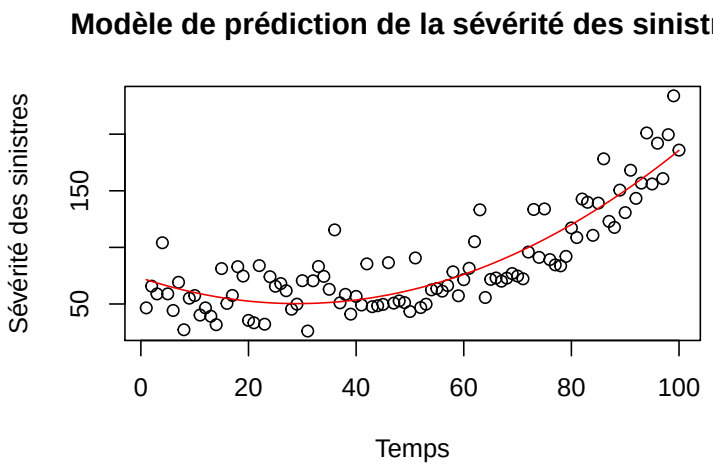
$$\ln(Y) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \times X + \ln(\varepsilon)$$
$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 \times X + \varepsilon^*$$

Qu'on appel aussi une régression multiplicative ou log-linéaire.

2.1.4 Régression quadratique

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps et du temps au carré à l'aide du modèle quadratique suivant,





Note

On remarque que la régression quadratique est similaire à une régression linéaire multiple. En posant $X_1 = X$ et $X_2 = X^2$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Soit une régression linéaire multiple.
Dans le cadre du cours, seulement les modèles linéaires seront à l'étude car,

- Plus simples
- Plusieurs modèles peuvent se ramener à un modèle linéaire simple ou multiple. (voir 2.1.3 et 2.1.4)
- Constituent souvent une très bonne approximation de la réalité qui peut être très complexe, tel que l'assurance.
- Se généralisent faciment, tel que les *Generalized Linear Models*.

Le principale problème de la modélisation linéaire est de trouver les différents paramètres $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ de tel sorte que

$$\varepsilon = Y - f(X_1, ..., X_n; \beta_0, \beta_1, ..., \beta_n) \tag{2.1}$$

soit minimiser.
Il existe plusieurs méthode pour calcul l'erreur. Soit les erreurs suivants :

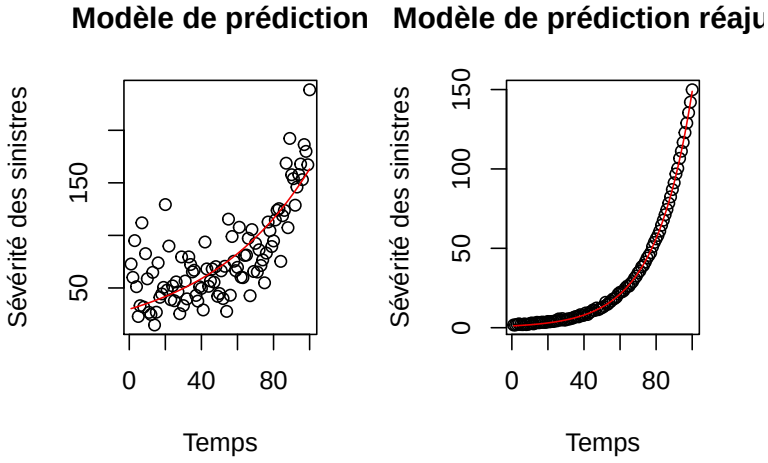
- Erreur totale
- Erreur absolue
- Erreur quadratique

  Quel type d'erreur est suffisante pour déterminer ε ?

2.1.4.1 Erreur totale

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t = \sum_{t=1}^{n} \Big(Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \Big) \tag{2.2}$$

- Facile à mettre à 0
- Pas fiable à cause de la mise à zéro



2.1.4.2 Erreur absolue

$$\sum_{t=1}^{n} |\varepsilon_t| = \sum_{t=1}^{n} \Big| Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \Big| \tag{2.3}$$

- Très robuste
- Très compliqué mathématiquement, pour minimiser $\sum_{t=1}^{n} |\varepsilon_t|$ cela implique de dériver la fonction.

2.1.4.3 Erreur quadratique

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{n} \Big[Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \Big]^2 \tag{2.4}$$

- Mathématiquement plus simple que l'erreur quadratique.
- Donne beaucoup de poids aux grandes erreurs

L'erreur quadratique semble donc l'option la plus simple dû à la facilité mathématique et ça fiabilité.

2.2 Le modèle de régression linéaire simple

Le modèle de régression linéaire simple tente d'expliquer le mieux possible la variable dépendante [2] Y à l'aide d'une variable indépendante [3] X .
Si on dispose de n paires d'observations $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$ alors, le modèle s'exprime comme suit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \times X_i + \varepsilon_i, \text{ i} = 1, ...,\text{n}. \tag{2.5}$$

Où β_0 est le paramètre associé à l'ordonnée à l'origine du modèle ; β_1 est le paramètre associé à la pende de la droite ; et ε est le terme d'erreur.

Quelques remarques sur le modèle

Dans l'équation 2.5 du modèle, on remarque que
- Les observations de Y_i sont tiré d'une varaible aléatoire ;
- Les observations de X_i sont considérées comme des valeurs connues et non aléatoires ;
- Les paramètres β_0 et β_1 sont inconnus au départ et doivent être estimer ;
- ε_i sont des réalisations inconnues d'une variable aléatoire.

Exemple d'un modèle de régression

X_t : nombre d'années de scolarité de l'actuaire$t$
Y_t : Salaire de l'actuaire$t$

Comment résoudre le modèle pour prédire les salaires des actuaires en fonction du nombre d'années de scolarité ?
Raisonnement :
- Pour $X_t = 0$; on a $Y_t = \beta_0$. Autrement dit, le salaire avec un nombre d'année de scolarité est *en moyenne* de β_0. Par exemple, β_0 serait le salaire moyen d'un stagiaire.

2. On appel parfois la variable dépendante une variable endogène. Qui s'interpréte comme étant une variable qui est dû à une cause interne.

3. On appel parfois les variables dépendantes des variables exogène. Qui s'intrepréte comme étant extérieur à un système.

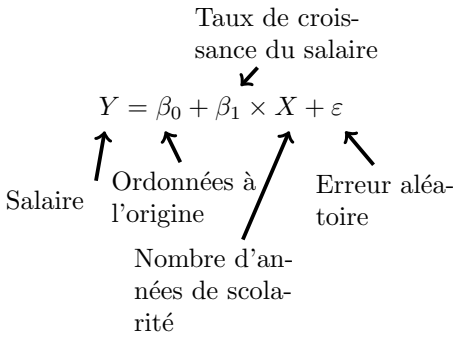
- Par la suite, pour chaque année additionnelle de scolarité, le salaire augmente *en moyenne* de β_1 unitées.
  Ainsi, *en moyenne* on a

$$E[Y_t|X_t] = \beta_0 + \beta_1 \times X_t$$

Habituellement, la relation n'est pas parfaitement exacte dans la réalité. On se retrouve ainsi avec une *différence* dans notre variable exogène prédite. L'erreur est notée ε_t et est tel que mentionnée plus tôt, assumée aléatoire.

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= Y_t - E[Y_t|X_t] \\ &= Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t)\end{aligned}$$

En réoganisant, on retrouve l'équation 2.5.



On doit maintenant trouver les paramètres β_0 et β_1 de manière à minimiser l'erreur ε_t.
Si ε_t est minimal, cela veut dire que $Y_t \approx \beta_0 + \beta_1 \times X_t$. Ce qui signifie que la droite de régression est une bonne approximation de Y_t.

> ***En résumé***
>
> En résumé, on cherche à minimiser nos résidus en optimisant les paramètres β_i.

2.2.0.1 Coefficients de régression

Les paramètres β_0 et β_1 sont déterminés en minimisant l'erreur quadratique à l'aide de la méthode des moindres carrées.

$$
\begin{aligned}
S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 \\
&= \sum_{t=1}^{n} \big(Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t)\big)^2 \\
&= \sum_{t=1}^{n} \big(Y_t - \beta_0 - \beta_1 \times X_t\big)^2
\end{aligned}
$$

Où $S(\psi)$ peut être considéré comme une mesure de la *distance* entre les données observées et le modèle théorique qui prédit ces données [4].

Afin de minimiser la fonction $S(\beta_0, \beta_1)$ on dérive la fonction partiellement en fonction de chacun des paramètres.

Minimisation de β_0

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_0} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{t=1}^{n} \big(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t\big)^2 &= 0 \\
-2 \sum_{t=1}^{n} \big(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t\big) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{t=1}^{n} Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t = 0 \tag{2.6}
$$

4. Pour de plus ample information sur la méthode des moindres carrées et la fonction de *distance*, la page Wikipédia contient des bonnes explications sur le sujet.

Minimisation de β_1

$$\frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_1} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t\right)^2 = 0$$
$$-2 \sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t\right) \times X_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^{n} X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 0 \tag{2.7}$$

À l'aide des équations 2.6 et 2.7, on peut trouver les deux inconnus β_0 et β_1.
À partir de 2.6 :

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t = 0$$
$$\sum_{t=1}^{n} Y_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t = n \times \hat{\beta}_0$$
$$\frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t}{n} = \hat{\beta}_0$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}} \tag{2.8}$$

Et à partir de 2.7 :

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^{n} X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 0$$
$$\sum_{t=1}^{n} Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^{n} X_t = \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{n} X_t^2$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^{n} X_t}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} \tag{2.9}$$

On utilise l'équation 2.9 de $\hat{\beta}_0$ avec l'équation 2.10 de $\hat{\beta}_1$, on développe l'équation résultante afin d'isoler $\hat{\beta}_1$.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t \times X_t - (\overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}) \sum_{t=1}^{n} X_t}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t \times X_t - (\overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}) \times n\overline{X}}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t X_t - n\overline{YX} + \hat{\beta}_1 \times \overline{X}^2 \times n}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2}\end{aligned}$$

En isolant $\hat{\beta}_1$, on obtient la définition suivante

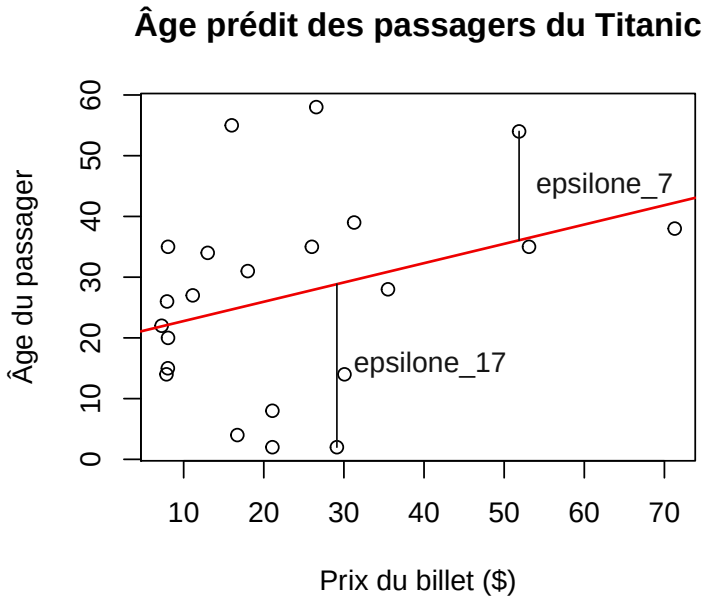
$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t X_t - n\overline{YX}}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\overline{X}^2}} \tag{2.10}$$

Remarques

1. On note $\hat{\varepsilon}_t$ les résidus générés par le modèle estimé :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_t &= Y_t - \hat{Y}_t \\ \hat{\varepsilon}_t &= Y_t - (\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) \text{ ; pour t = 1,2,...,n}\end{aligned}$$

Si on illustre graphiquement les résidus, il s'agit du segment le plus court entre la droite de régression et la donnée observée. Si on reprend le graphique de la section 2.1.1 :



On observe facilement les résidus.