

**UNIVERSITÉ LAVAL**  
ÉCOLE D'ACTUARIAT

**ACT 2003**  
**Notes de cours**  
**Modèles linéaires en actuariat**

**David Beauchemin**

**Automne 2017**

© 2017 David Beauchemin



Cette création est mise à disposition selon le contrat [Attribution-Partage dans les mêmes conditions 4.0 International](#) de Creative Commons. En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- **partager** — reproduire, distribuer et communiquer l’œuvre ;
- **remixer** — adapter l’œuvre ;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes :



**Attribution** — Vous devez créditer l’œuvre, intégrer un lien vers le contrat et indiquer si des modifications ont été effectuées à l’œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens possibles, mais vous ne pouvez suggérer que l’offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.



**Partage dans les mêmes conditions** — Dans le cas où vous modifiez, transformez ou créez à partir du matériel composant l’œuvre originale, vous devez diffuser l’œuvre modifiée dans les mêmes conditions, c’est-à-dire avec le même contrat avec lequel l’œuvre originale a été diffusée.

## Résumé

*abstrat*

## **Remerciements**

blah blah

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Régression linéaire simple</b>	<b>4</b>
2.1	Introduction . . . . .	4
2.1.1	Régression linéaire simple . . . . .	5
2.1.2	Régression linéaire multiple . . . . .	5
2.1.3	Régression exponentielle . . . . .	7
2.1.4	Régression quadratique . . . . .	7
2.2	Le modèle de régression linéaire simple . . . . .	10

# Chapitre 1

## Introduction

L'établissement de prévisions joue un rôle central dans notre vie de tous les jours (prévisions météorologique, horoscope, etc.), et plus particulièrement dans celle des actuaires.

### Objectifs de la régression

Régulièrement en actuariat, on se questionne sur les effets de différentes variables sur d'autres. Par exemple,

- Quel est l'effet de l'âge sur la fréquence des sinistres automobiles ?
- Quel est l'effet du sexe sur la mortalité ?

On cherche à étudier et déterminer les relations entre des variables mesurables à partir de données.

### Deux grandes classes de variables mesurables :

- Qualitatives : basées sur des opinions et/ou des intuitions.
- Quantitatives : basées sur des observations, un modèle et des arguments mathématiques.

### Deux *grandes étapes* pour établir des prévisions quantitatives

1. Bâtir le modèle et estimer les paramètres :  
ex :  $F = M \times a$  Qui représente un modèle déterministe  
ex :  $Y = 3 \times X + 6 + \epsilon_t$  ; où  $\epsilon_t \sim N(0, 10)$  Qui représente un modèle probabiliste
2. Calculer les prévisions à partir du modèle.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles probabilistes linéaires seront étudiés.

## Chapitre 2

# Régression linéaire simple

### 2.1 Introduction

De façon générale, en régression, nous avons :

$Y$	Variable dépendante, ou de réponse	Output
$X_1, X_2, \dots, X_n$	Soit n variables indépendantes ou explicatives, ou exogènes <sup>1</sup>	Input
$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$	Les paramètres à estimer	

Voici une illustration du concept de régression linéaire

#### Étape 1

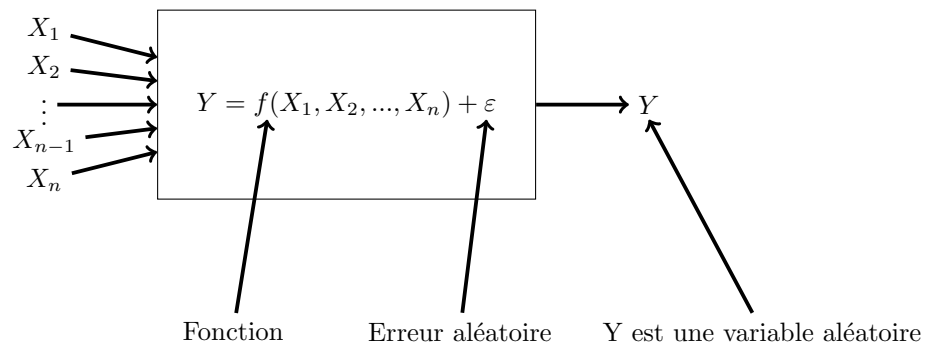
Observation  
des  $X_i$

#### Étape 2

Modèle de ré-  
gression

#### Étape 3

Prévision de Y



1. Les variables  $X_i$  sont indépendante par rapport à y, mais pas nécessairement entre elles.

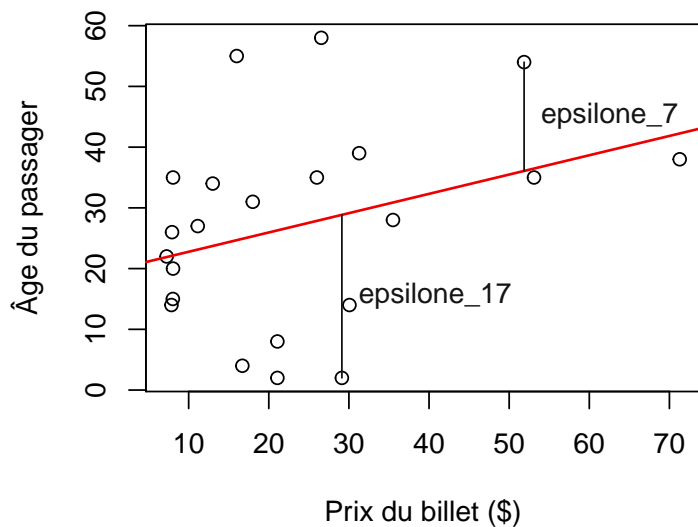
### 2.1.1 Regression linéaire simple

On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet à l'aide du modèle linéaire suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \varepsilon$$

↑                      ↗                      ↖  
 Âge du passa-      Prix du billet      Erreur aléa-  
 ger                      toire

## Âge prédit des passagers du Titanic



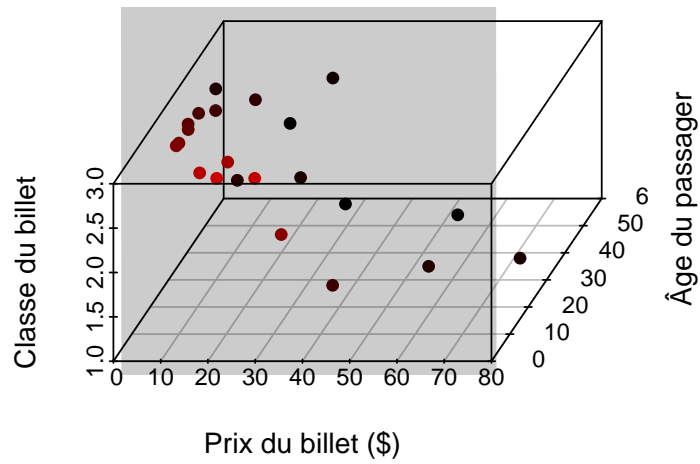
### 2.1.2 Regression linéaire multiple

On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet et son sexe à l'aide du modèle linéaire suivant,

The diagram illustrates a linear regression model for predicting flight price. At the top, the equation is given as  $Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$ . Below this, four labels are connected to the equation by arrows: 'Âge du passager' points to  $\beta_1$ , 'Prix du billet' points to  $\beta_2$ , 'Sexe du passager' points to  $\beta_0$ , and 'Erreur aléatoire' points to  $\varepsilon$ .

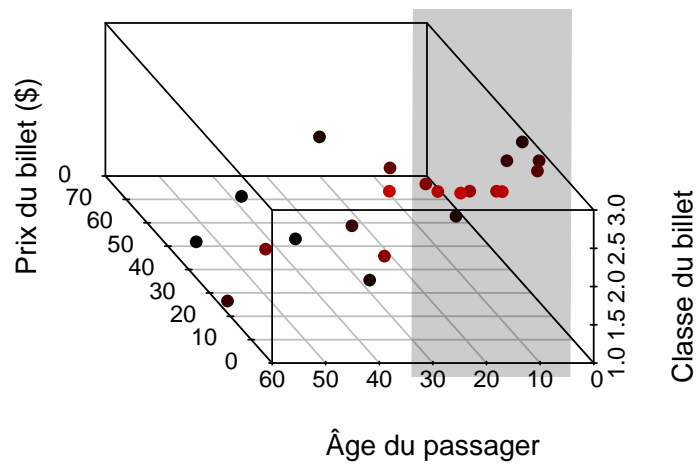


### Âge predict des passagers du Titanic



Voici la régression sous un autre angle, on voit la surface plane de régression.

### Âge predict des passagers du Titanic



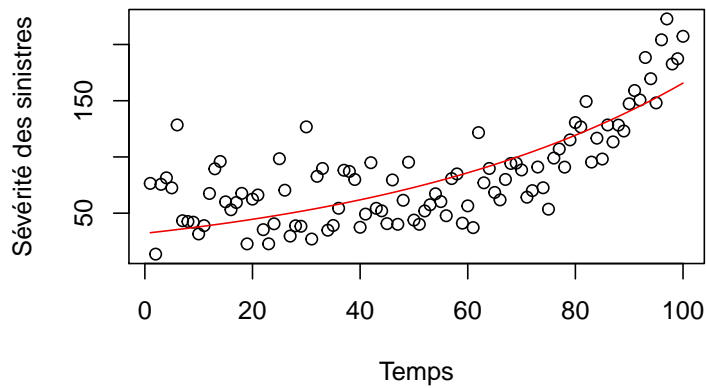
### 2.1.3 Régression exponentielle

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps à l'aide du modèle exponentielle suivant,

$$Y = \beta_0 \times e^{\beta_1 \times X} \times \varepsilon$$

Sévérité du sinistre      Temps      Erreur aléatoire

#### Modèle de prédiction de la sévérité des sinistres



#### Note

On remarque que la régression exponentielle est similaire à une régression linéaire simple.

$$\ln(Y) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \times X + \ln(\varepsilon)$$
$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 \times X + \varepsilon^*$$

Qu'on appelle aussi une régression multiplicative ou log-linéaire.

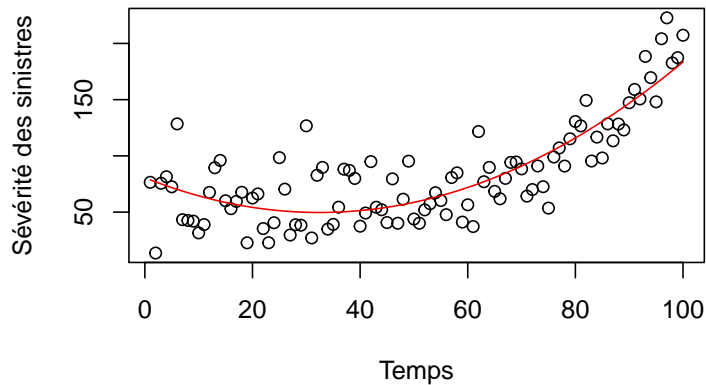
### 2.1.4 Régression quadratique

On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps et du temps au carré à l'aide du modèle quadratique suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \beta_2 \times X^2 + \varepsilon$$

$\uparrow$  Sévérité du sinistre       $\nwarrow$  Temps       $\nearrow$  Erreur aléatoire

### Modèle de prédiction de la sévérité des sinistres



#### Note

On remarque que la régression quadratique est similaire à une régression linéaire multiple. En posant  $X_1 = X$  et  $X_2 = X^2$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Soit une régression linéaire multiple.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles linéaires seront à l'étude car,

- Plus simples
- Plusieurs modèles peuvent se ramener à un modèle linéaire simple ou multiple. (voir [2.1.3](#) et [2.1.4](#))
- Constituent souvent une très bonne approximation de la réalité qui peut être très complexe, tel que l'assurance.
- Se généralisent facilement, tel que les *Generalized Linear Models*.

Le principale problème de la modélisation linéaire est de trouver les différents paramètres  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  de tel sorte que

$$\varepsilon = Y - f(X_1, \dots, X_n; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \quad (2.1)$$

soit minimiser.

Il existe plusieurs méthode pour calcul l'erreur. Soit les erreurs suivants :

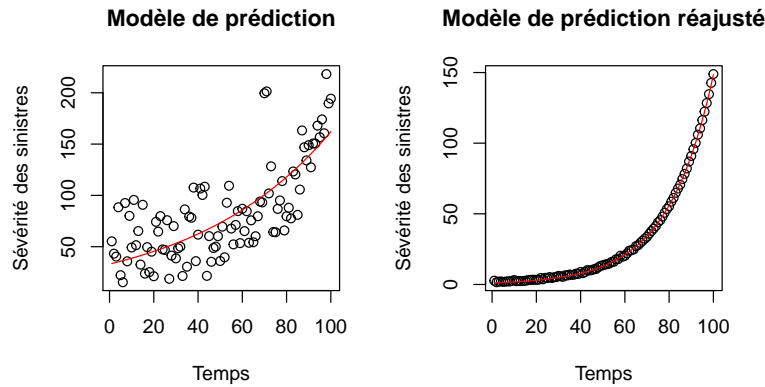
- Erreur totale
- Erreur absolue
- Erreur quadratique

Quel type d'erreur est suffisante pour déterminer  $\varepsilon$  ?

#### 2.1.4.1 Erreur totale

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t = \sum_{t=1}^n \left( Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right) \quad (2.2)$$

- Facile à mettre à 0
- Pas fiable à cause de la mise à zéro



#### 2.1.4.2 Erreur absolue

$$\sum_{t=1}^n |\varepsilon_t| = \sum_{t=1}^n \left| Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right| \quad (2.3)$$

- Très robuste
- Très compliqué mathématiquement, pour minimiser  $\sum_{t=1}^n |\varepsilon_t|$  cela implique de dériver la fonction.

#### 2.1.4.3 Erreur quadratique

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n \left[ Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t) \right]^2 \quad (2.4)$$

- Mathématiquement plus simple que l'erreur quadratique.
- Donne beaucoup de poids aux grandes erreurs

L'erreur quadratique semble donc l'option la plus simple dû à la facilité mathématique et ça fiabilité.

## 2.2 Le modèle de régression linéaire simple

Le modèle de régression linéaire simple tente d'expliquer le mieux possible la variable **dépendante**<sup>2</sup>  $Y$  à l'aide d'une variable **indépendante**<sup>3</sup>  $X$ .

Si on dispose de  $n$  paires d'observations  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  alors, le modèle s'exprime comme suit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \times X_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Où  $\beta_0$  est le paramètre associé à l'ordonnée à l'origine du modèle;  $\beta_1$  est le paramètre associé à la pente de la droite; et  $\varepsilon$  est le terme d'erreur.

### Quelques remarques sur le modèle

Dans l'équation 2.5 du modèle, on remarque que

- Les observations de  $Y_i$  sont tiré d'une variable aléatoire;
- Les observations de  $X_i$  sont considérées comme des valeurs connues et non aléatoires;
- Les paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont inconnus au départ et doivent être estimés;
- $\varepsilon_i$  sont des réalisations inconnues d'une variable aléatoire.

### Exemple d'un modèle de régression

$X_t$  : nombre d'années de scolarité de l'actuaire  $t$

$Y_t$  : Salaire de l'actuaire  $t$

Comment résoudre le modèle pour prédire les salaires des actuaires en fonction du nombre d'années de scolarité?

#### Raisonnement :

- Pour  $X_t = 0$ ; on a  $Y_t = \beta_0$ . Autrement dit, le salaire avec un nombre d'année de scolarité est *en moyenne* de  $\beta_0$ . Par exemple,  $\beta_0$  serait le salaire moyen d'un stagiaire.
- Par la suite, pour chaque année additionnelle de scolarité, le salaire augmente *en moyenne* de  $\beta_1$  unités.

---

2. On appelle parfois la variable dépendante une variable **endogène**. Qui s'interprète comme étant une variable qui est dû à une cause interne.

3. On appelle parfois les variables dépendantes des variables **exogène**. Qui s'interprète comme étant extérieur à un système.

Ainsi, *en moyenne* on a

$$E[Y_t|X_t] = \beta_0 + \beta_1 \times X_t$$

Habituellement, la relation n'est pas parfaitement exacte dans la réalité. On se retrouve ainsi avec une *différence* dans notre variable exogène prédite. L'erreur est notée  $\varepsilon_t$  et est tel que mentionnée plus tôt, assumée aléatoire.

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= Y_t - E[Y_t|X_t] \\ &= Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t)\end{aligned}$$

En réorganisant, on retrouve l'équation 2.5.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \varepsilon$$

Taux de croissance du salaire  
↓  
 $Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \varepsilon$   
↑     ↑     ↗     ↘  
Salaire   Ordonnées à l'origine   Nombre d'années de scolarité   Erreur aléatoire

On doit maintenant trouver les paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  de manière à minimiser l'erreur  $\varepsilon_t$ .

Si  $\varepsilon_t$  est minimal, cela veut dire que  $Y_t \approx \beta_0 + \beta_1 \times X_t$ . Ce qui signifie que la droite de régression est une bonne approximation de  $Y_t$ .



### *En résumé*

En résumé, on cherche à minimiser nos résidus en optimisant les paramètres  $\beta_i$ .

#### 2.2.0.1 Coefficients de régression

Les paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont déterminés en minimisant l'erreur quadratique à l'aide de la méthode des moindres carrés.

$$\begin{aligned}
S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \\
&= \sum_{t=1}^n (Y_t - (\beta_0 + \beta_1 \times X_t))^2 \\
&= \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta_0 - \beta_1 \times X_t)^2
\end{aligned}$$

Où  $S(\psi)$  peut être considéré comme une mesure de la *distance* entre les données observées et le modèle théorique qui prédit ces données<sup>4</sup>.

Afin de minimiser la fonction  $S(\beta_0, \beta_1)$  on dérive la fonction partiellement en fonction de chacun des paramètres.

### Minimisation de $\beta_0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_0} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t)^2 &= 0 \\
-2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^n Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t = 0 \tag{2.6}$$

---

4. Pour de plus ample information sur la méthode des moindres carrées et la fonction de *distance*, la page [Wikipédia](#) contient des bonnes explications sur le sujet.

### Minimisation de $\beta_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{\partial \beta_1} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t)^2 &= 0 \\
-2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \times X_t) \times X_t &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

À l'aide des équations 2.6 et 2.7, on peut trouver les deux inconnus  $\beta_0$  et  $\beta_1$ .  
À partir de 2.6 :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n Y_t - n \times \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t &= n \times \hat{\beta}_0 \\
\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{n} &= \hat{\beta}_0 \\
\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}} &
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Et à partir de 2.7 :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 &= 0 \\
\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t &= \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 \\
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}
\end{aligned} \tag{2.9}$$



On utilise l'équation 2.8 de  $\hat{\beta}_0$  avec l'équation 2.9 de  $\hat{\beta}_1$ , on développe l'équation résultante afin d'isoler  $\hat{\beta}_1$ .

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \sum_{t=1}^n X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \times X_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \times n\bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n\bar{Y}\bar{X} + \hat{\beta}_1 \times \bar{X}^2 \times n}{\sum_{t=1}^n X_t^2}\end{aligned}$$

En isolant  $\hat{\beta}_1$ , on obtient la définition suivante

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t X_t - n\bar{Y}\bar{X}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2} \quad (2.10)$$

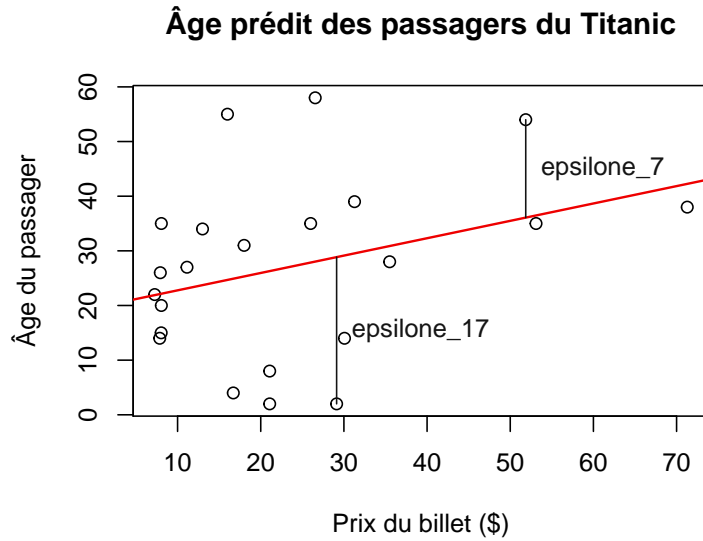
### Remarques

1. On note  $\hat{\varepsilon}_t$  les résidus générés par le modèle estimé :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_t &= Y_t - \hat{Y}_t \\ \hat{\varepsilon}_t &= Y_t - (\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) ; \text{ pour } t = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

Si on illustre graphiquement les résidus, il s'agit du segment le plus court entre la droite de régression et la donnée observée.

Si on reprend le graphique de la section 2.1.1, on observe facilement les résidus sur cette représentation graphique :



2. Le *centre de gravité*<sup>5</sup> des données  $(\bar{X}, \bar{Y})$  se trouve exactement sur la droite de régression.

On peut facilement effectuer cette preuve à partir de l'équation 2.8,

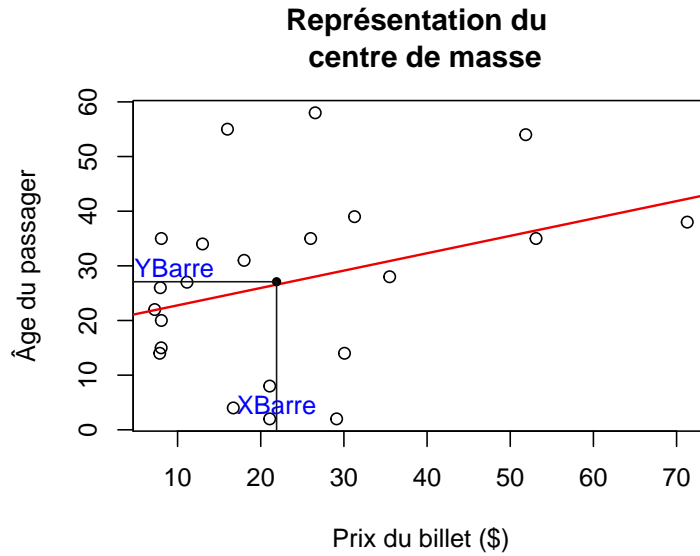
$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ \bar{Y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} + 0\end{aligned}$$

On note ainsi une absence de résidus pour le centre de masse.

Si on reprend (encore) le graphique de la section 2.1.1, on observe facilement le centre de masse sur le graphique.

---

5. Qu'on appelle parfois centre de masse.



3. La somme des résidus de tout modèle de régression linéaire est nulle.

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t &= \sum_{t=1}^n (Y_t - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t)) \\
 &\stackrel{2.8}{=} \sum_{t=1}^n (Y_t - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X})) \\
 &= \sum_{t=1}^n Y_t - \sum_{t=1}^n \bar{Y} + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n \bar{X} - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t \\
 &= n\bar{Y} - n\bar{Y} + \hat{\beta}_1 + n\bar{X} - \hat{\beta}_1 + n\bar{X} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

### Notation

Afin de faciliter l'écriture, on intègre la notation suivante,  $S_{xx}$  et  $S_{xy}$ . Qui sont appelés respectivement la somme des carrés corrigée de  $x$  et la somme des produits

croisés corrigée de  $x$  et de  $y$ . Voici le développement pour  $S_{xx}$ ,

$$\begin{aligned}
S_{xx} &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \\
&= \sum_{t=1}^n (X_t^2 - 2X_t\bar{X} + \bar{X}^2) \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - 2\bar{X} \sum_{t=1}^n X_t + n\bar{X}^2 \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - 2\bar{X}n\bar{X} + n\bar{X}^2 \\
&= \sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2
\end{aligned}$$

On effectue le même type de développement pour  $S_{xy}$ ,

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) \\
&\vdots \\
&= \sum_{t=1}^n X_t Y_t - n\bar{X}\bar{Y}
\end{aligned}$$

À l'aide des sommes de carrés corrigés, on peut réécrire la définition de  $\hat{\beta}_1$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}} \tag{2.11}$$

On poursuit avec un exemple pour assimiler l'information.

- On dispose des cinq observations suivantes du couple  $(X_t, Y_t)$  dans le tableau de gauche ainsi que les éléments calculer nécessaire pour trouver les paramètres dans le tableau de droite.

t	$X_t$	$Y_t$
1	2	2
2	3	5
3	6	3
4	9	6
5	12	5
Totaux :	32	21

t	$X_t^2$	$X_t Y_t$
1	4	4
2	9	15
3	36	18
4	81	54
5	144	60
Totaux :	274	151