UNIVERSITÉ LAVAL
École d'actuariat

ACT 2003
Notes de cours
Modèles linéaires en actuariat

David Beauchemin

Automne 2017

Table des matières

Résumé

abstrat

Chapitre 1

Introduction

L'établissement de prévisions joue un rôle central dans notre vie de tous les jours (prévisions météorologique, horoscope, etc.), et plus particulièrement dans celle des actuaires.

Objectifs de la régression

Régulièrement en actuariat, on se questionne sur les effets de différentes variables sur d'autres. Par exemple,

- Quel est l'effet de l'âge sur la fréquence des sinistres automobiles ?
- Quel est l'effet du sexe sur la mortalité ?

On cherche à étuider et déterminer les relations entre des variables mesurables à partir de données.

Deux grandes classes de variables mesurables :

- Qualitatives : basées sur des opinions et/ou des intuitions.
- Quantitatives : basées sur des observations, un modèle et des arguments mathématiques.

Deux *grandes étapes* pour établir des prévisions quantitatives

1. Bâtir le modèle et estimer les paramètres :
   ex : $F = M \times a$ Qui représente un modèle déterministe
   ex : $Y = 3 \times X + 6 + \epsilon_t$;où$\epsilon_t \sim N(0, 10)$ Qui représente un modèle probabiliste
2. Calculer les prévisions à partir du modèle.

Dans le cadre du cours, seulement les modèles probabilistes linéaires seront étudiez.

Chapitre 2

Régression linéaire simple

2.1 Introduction

De façon générale, en régression, nous avons :

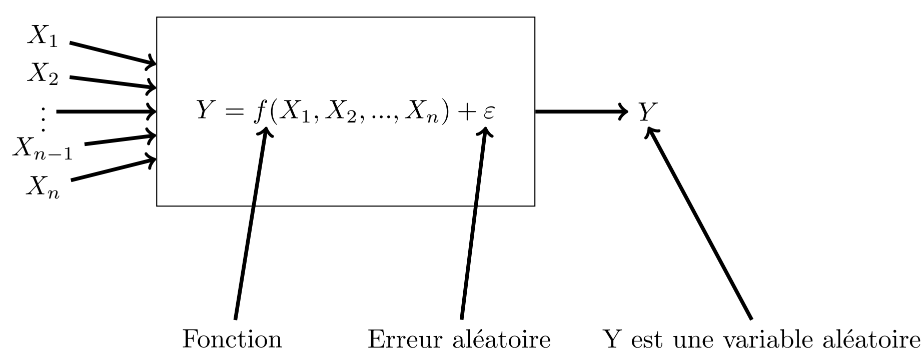
Y	Variable dépendante, ou de réponse	Output
$X_1, X_2, ..., X_n$	Soit n variables indépendantes ou explicatives, ou exogènes[1]	Input
$\beta_0, \beta_1, ...\beta_n$	Les paramètres à estimer	

Voici une illustration du concept de régression linéaire

Étape 1
Observation des X_i

Étape 2
Modèle de régression

Étape 3
Prévision de Y



1. Les variables X_i sont indépendante par rapport à y, mais pas nécessairement entre elles.

2.1.1 Regression linéaire simple

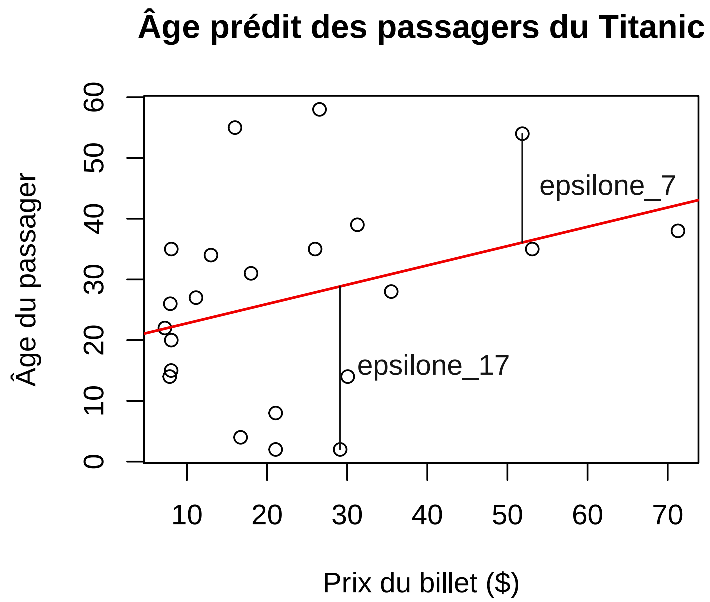
On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet à l'aide du modèle linéaire suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \varepsilon$$

Âge du passager

Prix du billet

Erreur aléatoire



2.1.2 Regression linéaire multiple

On cherche à prédire l'âge des passagers du Titanic selon le prix du billet et son sexe à l'aide du modèle linéaire suivant,

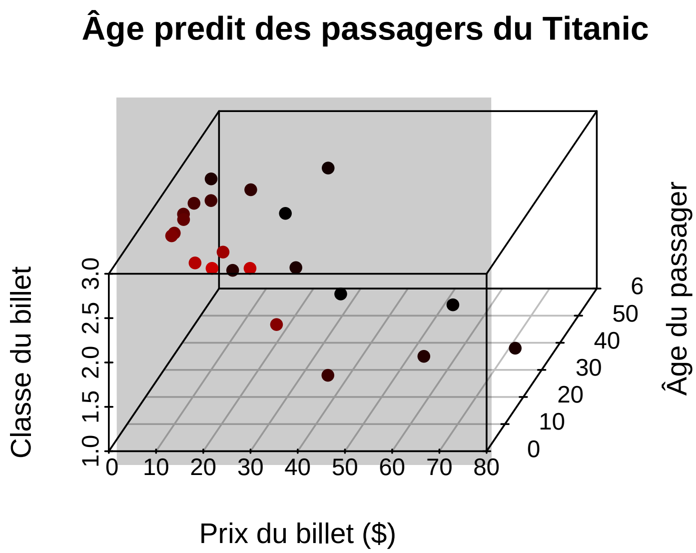
$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Âge du passager

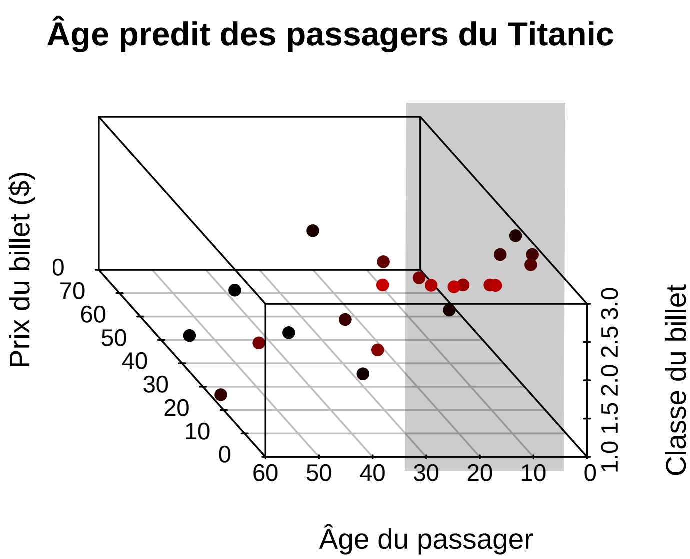
Sexe du passager

Erreur aléatoire

Prix du billet



Voici la régression sous un autre angle, on voit la surface plane de régression.



2.1.3 Régression exponentielle

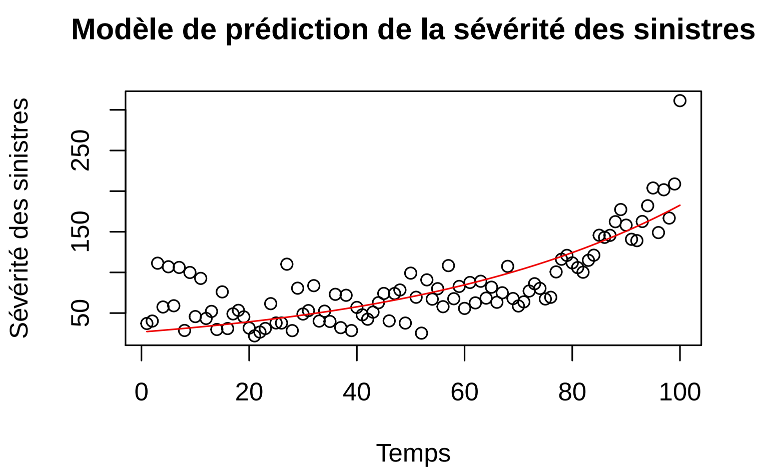
On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps à l'aide du modèle exponentielle suivant,

$$Y = \beta_0 \times e^{\beta_1 \times X} \times \varepsilon$$

Sévérité du sinistre

Temps

Erreur aléatoire



Note

On remarque que la régression exponentielle est similaire à une régression linéaire simple.

$$\ln(Y) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \times X + \ln(\varepsilon)$$
$$Y^* = \beta_0^* + \beta_1 \times X + \varepsilon^*$$

Qu'on appel aussi une régression multiplicative ou log-linéaire.

2.1.4 Régression quadratique

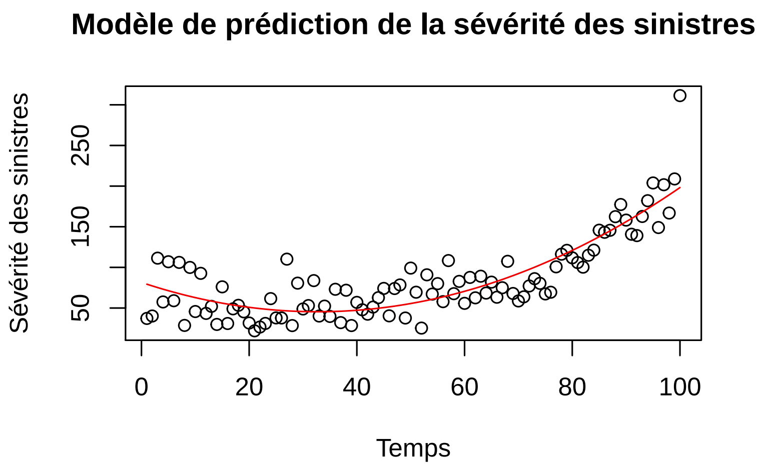
On cherche à prédire la sévérité d'un sinistre automobile en fonction du temps et du temps au carré à l'aide du modèle quadratique suivant,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \beta_2 \times X^2 + \varepsilon$$

Sévérité du sinistre

Temps

Erreur aléatoire



Note

On remarque que la régression quadratique est similaire à une régression linéaire multiple. En posant $X_1 = X$ et $X_2 = X^2$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X_1 + \beta_2 \times X_2 + \varepsilon$$

Soit une régression linéaire multiple.
Dans le cadre du cours, seulement les modèles linéaires seront à l'étude car,

- Plus simples
- Plusieurs modèles peuvent se ramener à un modèle linéaire simple ou multiple. (voir 2.1.3 et 2.1.4)
- Constituent souvent une très bonne approximation de la réalité qui peut être très complexe, tel que l'assurance.
- Se généralisent faciment, tel que les *Generalized Linear Models.*

Le principale problème de la modélisation linéaire est de trouver les différents paramètres $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ de tel sorte que

$$\varepsilon = Y - f(X_1, ..., X_n; \beta_0, \beta_1, ..., \beta_n) \tag{2.1}$$

soit minimiser.