MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Matemáticas Avanzadas para Computación

Tema 1. Introducción

Maestría en Sistemas Computacionales

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Dra. Mildreth Alcaraz, mildreth@iteso.mx

Tel. 3669-3434 xt 3975, Oficina T - 316

Objetivos de la clase

- Revisión de los conceptos de:
  - Permutaciones
  - Combinaciones

Introducción a las Permutaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Si el conjunto {a,b,c} se representa ordenado como abc, entonces
  - acb y bac son dos diferentes arreglos de las mismas letras.

- abc, acb y bac son una permutación, o 3-permutación.

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Definición de Permutaciones

- Una permutación de un conjunto de *n* elementos tomando *r* elementos a la vez ($0 \leq r \leq n$), es un arreglo de *r* elementos **distintos** del conjunto.
- Por conveniencia→ *r*-permutación.
- Si r = n, entonces la r-permutación se llama simplemente permutación.
- El número de r-permutaciones de un conjunto de tamaño *n* se denota P(n,r).

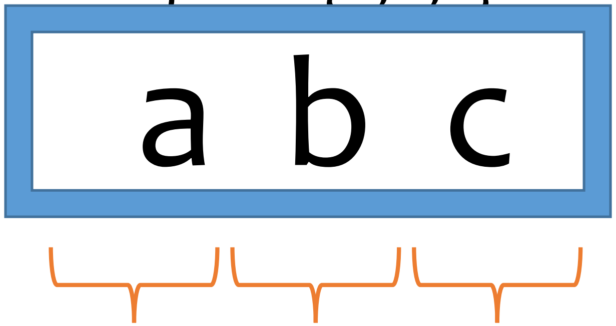
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Ejemplo de Permutaciones

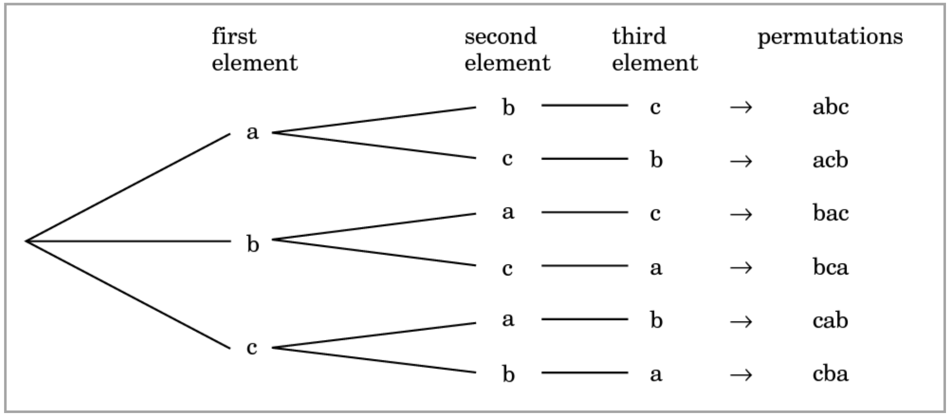
- Encuentra el número de permutaciones de los elementos del conjunto {a,b,c}.



Ejemplo de Permutaciones

- Encuentra el número de permutaciones de los elementos del conjunto {a,b,c}.

a b c



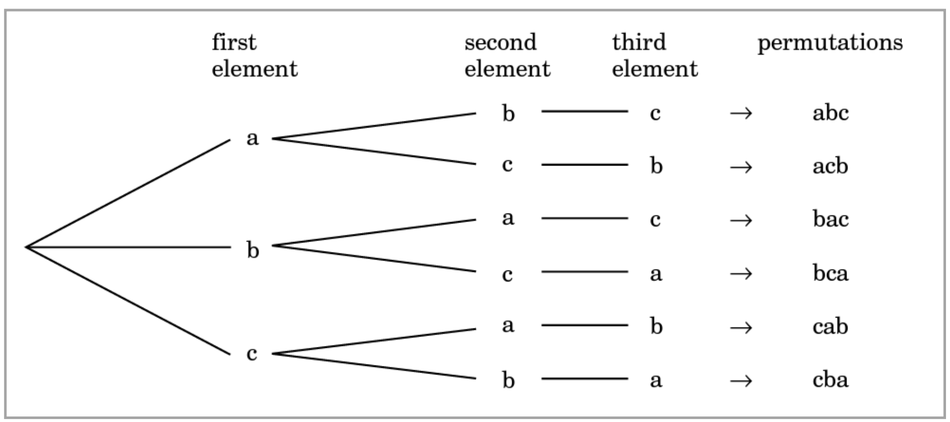
Ejemplo de Permutaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Encuentra el número de permutaciones de los elementos del conjunto {a,b,c}.

a b c

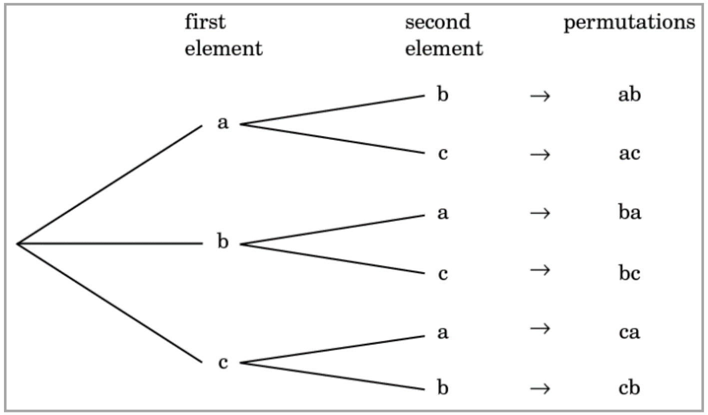
$$3 * 2 * 1 = 6$$



Ejemplo de Permutaciones

- Encuentra el número de 2-permutaciones de los elementos del conjunto {a,b,c}.

a b

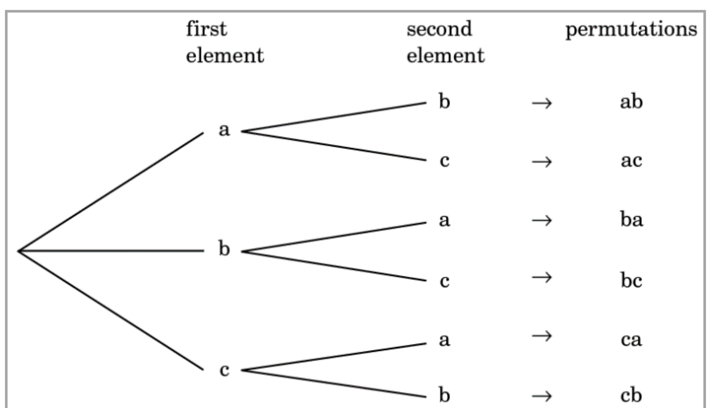


Ejemplo de Permutaciones

- Encuentra el número de 2-permutaciones de los elementos del conjunto {a,b,c}.

$$\boxed{a \quad b}$$

$$3 \quad * \quad 2 \quad = \quad 6$$



Teorema de permutaciones

- El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos está dado por $P(n,r) = n! / (n - r)!$
- Prueba:

$$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad \ldots \quad e_r$$

Teorema de permutaciones

- El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos está dado por $\boxed{P(n,r) = n! / (n - r)!}$
- Prueba:

$$\underbrace{e_1}_{n} \quad \underbrace{e_2}_{n-1} \quad \underbrace{e_3}_{n-2} \quad \underset{\dots}{\dots} \quad \underbrace{e_r}$$

Teorema de permutaciones

- El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos está dado por $P(n,r) = n! / (n - r)!$
- Prueba:

$$\boxed{\underbrace{e_1}_{n} \quad \underbrace{e_2}_{n-1} \quad \underbrace{e_3}_{n-2} \quad \ldots \quad \underbrace{e_r}_{n-(r-1) = n-r+1}}$$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Teorema de permutaciones

- El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos está dado por $\boxed{P(n,r) = n! \,/\, (n - r)!}$
- Prueba:

$$\boxed{\underbrace{e_1}_{n} \quad \underbrace{e_2}_{n - 1} \quad \underbrace{e_3}_{n - 2} \quad \underbrace{\ldots}_{\ldots} \quad \underbrace{e_r}_{n - (r - 1) = n - r + 1}}$$

$$P(n,r) = n\,(n - 1)\,(n - 2) \ldots (n - r + 1)$$

Teorema de permutaciones

- El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos está dado por $P(n,r) = n! / (n - r)!$
- Prueba:

$$\underbrace{e_1}_{n} \quad \underbrace{e_2}_{n-1} \quad \underbrace{e_3}_{n-2} \quad \dots \quad \underbrace{e_r}_{n-r+1}$$

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n\,(n-1)\,(n-2)\,\dots\,(n-r+1) \\ &= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\dots\,(n-r+1)\,(n-r)\,\dots\,2\cdot 1}{(n-r)\,\dots\,2\cdot 1} \end{aligned}$$

Teorema de permutaciones

- El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos está dado por $P(n,r) = n! / (n - r)!$
- Prueba:

$$\underbrace{e_1}_{n} \quad \underbrace{e_2}_{n-1} \quad \underbrace{e_3}_{n-2} \quad \dots \quad \underbrace{e_r}_{n-r+1}$$

$$
\begin{aligned}
P(n,r) &= n\,(n-1)\,(n-2)\dots(n-r+1) \\
&= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\dots(n-r+1)\,(n-r)\dots 2\cdot 1}{(n-r)\dots 2\cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

Cálculo de Número de Permutaciones

- $P(n,r) = n! / (n - r)!$

- Sin embargo, usualmente se utiliza la fórmula
  - $P(n,r) = n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$
  - Por qué?

Cálculo de Número de Permutaciones

- $P(n,r) = n! / (n - r)!$

- Sin embargo, usualmente se utiliza la fórmula
  - $P(n,r) = n (n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$
  - Por qué? → El valor puede ser muy grande! Son menos operaciones!

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Cálculo de Número de Permutaciones

- $P(n,r) = n! / (n - r)!$

- Sin embargo, usualmente se utiliza la fórmula
  - $P(n,r) = n (n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$
  - Por qué? → El valor puede ser muy grande! Son menos operaciones!

- Cuál sería el Teorema para "El número de permutaciones de un conjunto de tamaño *n* está dado por ... " ?

Cálculo de Número de Permutaciones

- $P(n,r) = n! / (n - r)!$

- Sin embargo, usualmente se utiliza la fórmula
  - $P(n,r) = n (n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$
  - Por qué? → El valor puede ser muy grande!

- Cuál sería el Teorema para "El número de permutaciones de un conjunto de tamaño *n* está dado por …" ?
  - $P(n,n) = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

Ejemplo de Permutaciones

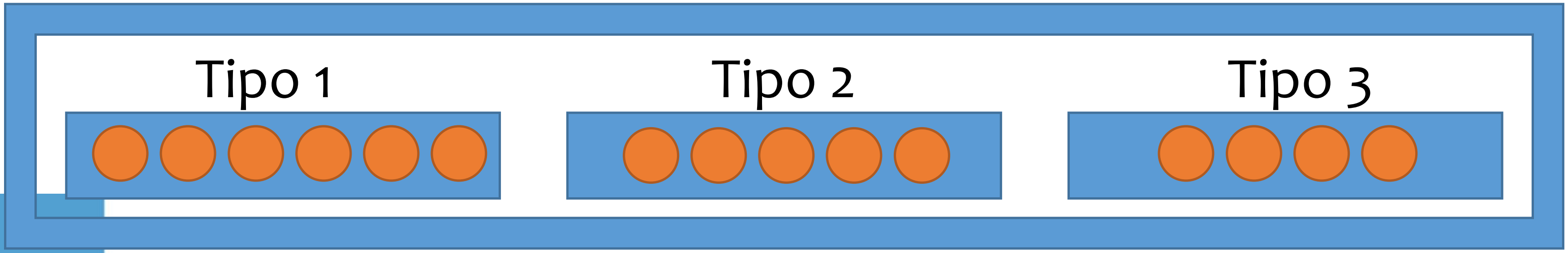
- Supongamos que un fotógrafo quiere acomodar 10 gatos en una fila para un comercial de TV, en el orden que él quiera. De cuántas maneras se puede realizar?
  - R: Como todos los gatos deben estar en el comercial al mismo tiempo, r=n=10, por lo tanto, 10! = 3,628,800 es la respuesta correcta.

Ejemplo de Permutaciones

- A un vendedor de una tienda de computadoras le gustaría mostrar seis modelos de PCs en el aparador, cinco modelos de monitores, y cuatro modelos de teclados. En cuántas formas diferentes se pueden ordenar si los componentes del mismo tipo deben estar juntos?

Ejemplo de Permutaciones

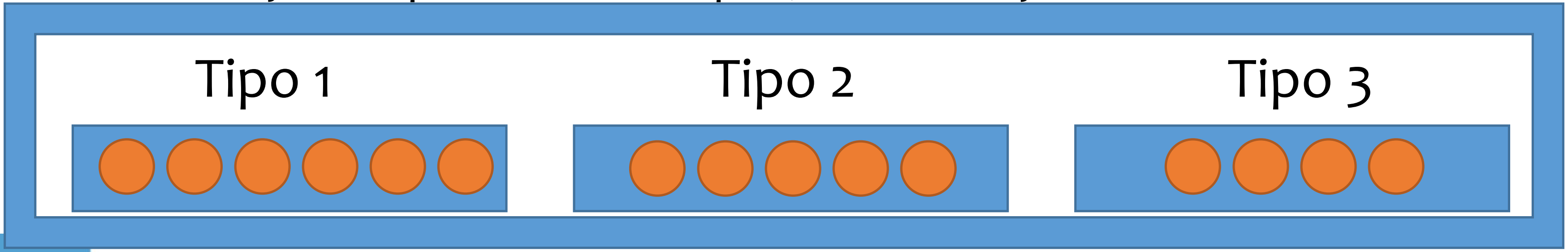
- A un vendedor de una tienda de computadoras le gustaría mostrar seis modelos de PCs en el aparador, cinco modelos de monitores, y cuatro modelos de teclados. En cuántas formas diferentes se pueden ordenar si los componentes del mismo tipo deben estar juntos?
  - R: Hay tres tipos de familias: pc's, monitores y teclados.



  - P(3,3) = 3!

Ejemplo de Permutaciones

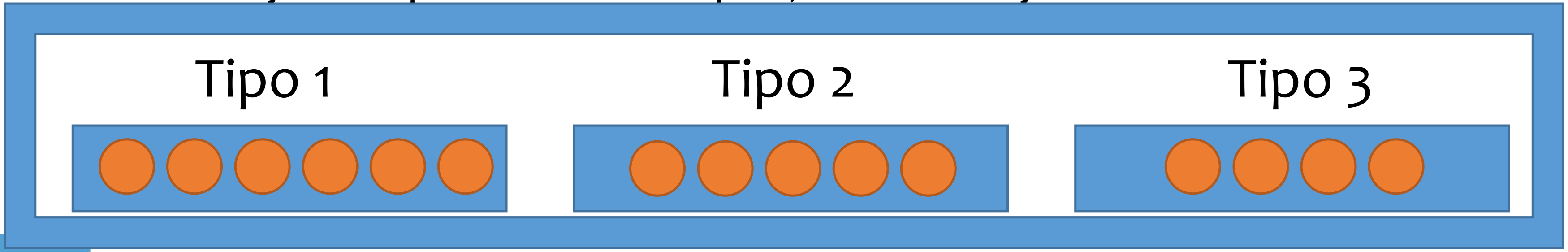
- A un vendedor de una tienda de computadoras le gustaría mostrar seis modelos de PCs en el aparador, cinco modelos de monitores, y cuatro modelos de teclados. En cuántas formas diferentes se pueden ordenar si los componentes del mismo tipo deben estar juntos?
  - R: Hay tres tipos de familias: pc's, monitores y teclados.



  - P(3,3) = 3!
  - El tipo 1 se puede arreglar en P(6,6) = 6! , El tipo 2 en P(5,5)! = 5!, y el tipo 3 en P(4,4) = 4!,
  -

Ejemplo de Permutaciones

- A un vendedor de una tienda de computadoras le gustaría mostrar seis modelos de PCs en el aparador, cinco modelos de monitores, y cuatro modelos de teclados. En cuántas formas diferentes se pueden ordenar si los componentes del mismo tipo deben estar juntos?
  - R: Hay tres tipos de familias: pc's, monitores y teclados.



- P(3,3) = 3!
- El tipo 1 se puede arreglar en P(6,6) = 6! , El tipo 2 en P(5,5)! = 5!, y el tipo 3 en P(4,4) = 4!,
- entonces, por el principio de multiplicación, el total de arreglos posibles es 6! 5! 4! 3!=12,441,600

Permutaciones en la solución de problemas computacionales?

- Decidir el tamaño de una clave o un identificador con ciertas restricciones:
  - La primera debe ser una letra mayúscula.
  - Los demás sólo números
  - No se debe repetir ningún valor.

Permutaciones con Repeticiones

- Considera la palabra REFERENCIA.
- Si cambiamos la primera E con la tercera E: no hay cambio.
- Cómo se calculan las permutaciones en este caso?
- Solución:
  - .

  - .

Teorema de Permutaciones con Repeticiones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- El número de permutaciones de n elementos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, …. , y n_k son de un k-ésimo tipo, es:
  - $n! / (n_1!\, n_2! \ldots\, n_k!)$

- Ejercicio: Encuentra la cantidad de bytes que contienen exactamente tres 0's.

Teorema de Permutaciones con Repeticiones

- El número de permutaciones de n elementos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, …. , y n_k son de un k-ésimo tipo, es:
  - $n! / (n_1!\, n_2! \ldots\, n_k!)$

- Ejercicio: Encuentra la cantidad de bytes que contienen exactamente tres 0's.
  - Solución: $8! / (3!\, 5!\,) = 56$

Permutaciones con Repeticiones

- Considera la palabra REFERENCIA.
- Si cambiamos la primera E con la tercera E: no hay cambio.
- Cómo se calculan las permutaciones en este caso?
- Solución:
  - .
  - .

Permutaciones con Repeticiones

- Considera la palabra REFERENCIA.
- Si cambiamos la primera E con la tercera E: no hay cambio.
- Cómo se calculan las permutaciones en este caso?
- Solución:
  - Son 10 letras, si todas fueran distintas, cuál sería la respuesta?
    - 10! = 3,628,800.

Permutaciones con Repeticiones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Considera la palabra REFERENCIA.
- Si cambiamos la primera E con la tercera E: no hay cambio.
- Cómo se calculan las permutaciones en este caso?
- Solución:
  - Son 10 letras, si todas fueran distintas, cuál sería la respuesta?
    - 10! = 3,628,800.
  - La palabra contiene 3 E's, 2 R's, digamos, el resto son diferentes (5 elementos más).
  - .

Permutaciones con Repeticiones

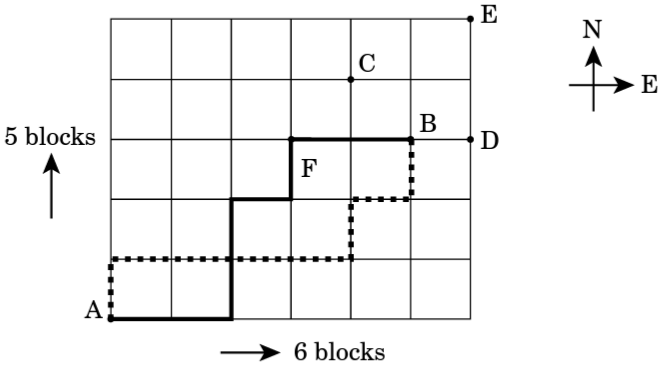
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Considera la palabra REFERENCIA.
- Si cambiamos la primera E con la tercera E: no hay cambio.
- Cómo se calculan las permutaciones en este caso?
- Solución:
    - Son 10 letras, si todas fueran distintas, cuál sería la respuesta?
        - 10! = 3,628,800.
    - La palabra contiene 3 E's, 2 R's, digamos, el resto son diferentes (5 elementos más).
    - E's → 3!, R's → 2!, por lo tanto, en total →
    - Permutaciones = 10! / (3! 2!) = 302,400

Ejercicios de Permutaciones con Repeticiones

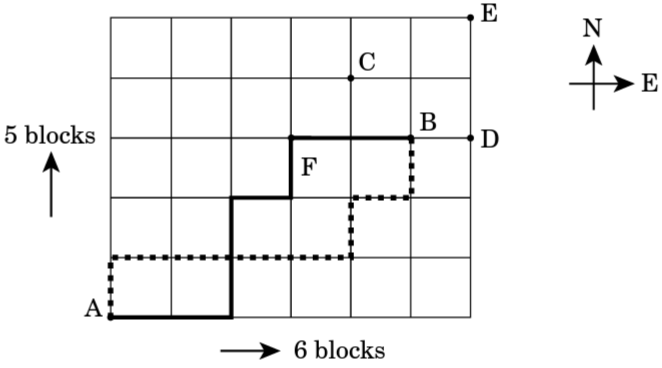
- (Lattice-Walking). Supongamos que queremos viajar del punto A al punto B, cubriendo exactamente 8 "blocks".



- Cuántas rutas son posibles?
- Solución:

Ejercicios de Permutaciones con Repeticiones

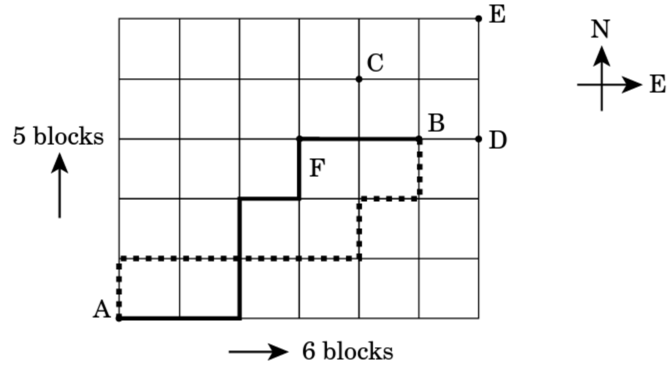
- (Lattice-Walking). Supongamos que queremos viajar del punto A al punto B, cubriendo exactamente 8 "blocks".



- Cuántas rutas son posibles?
- Solución:
  - Tip: cada lado de cada cuadro se puede representar con una letra, N si va hacia el norte, y E si va hacia el este.

Ejercicios de Permutaciones con Repeticiones

- (Lattice-Walking). Supongamos que queremos viajar del punto A al punto B, cubriendo exactamente 8 "blocks".



- Cuántas rutas son posibles?
- Solución:
  - Tip: cada lado de cada cuadro se puede representar con una letra, N si va hacia el norte, y E si va hacia el este.
  - Tenemos una palabra de 8 letras, 3 N's y 5 E' = 8! / (5! 3!) =56

Ejercicios de Permutaciones con Repeticiones

- (Abracadabra). De cuántas maneras se puede leer la palabra abracadabra en el siguiente látice.

```
          A
        B   B
      R   R   R
    A   A   A   A
  C   C   C   C   C
A   A   A   A   A   A
  D   D   D   D   D
    A   A   A   A
      B   B   B
        R   R
          A
```

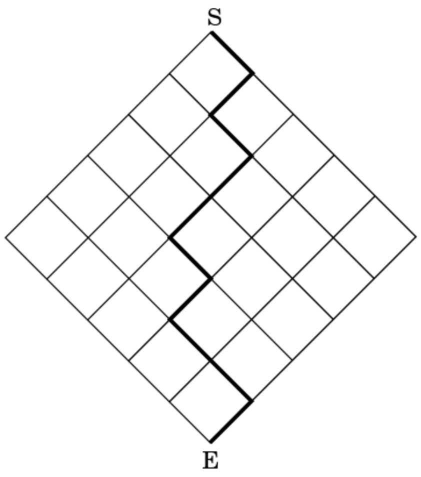
- Solución:

Ejercicios de Permutaciones con Repeticiones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- (Abracadabra). De cuántas maneras se puede leer la palabra abracadabra en el siguiente látice.

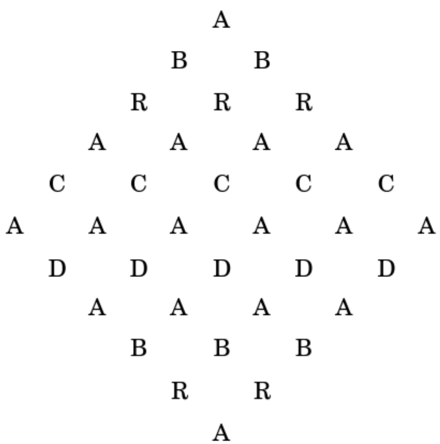
A
B B
R R R
A A A A
C C C C C
A A A A A A
D D D D D
A A A A
B B B
R R
A

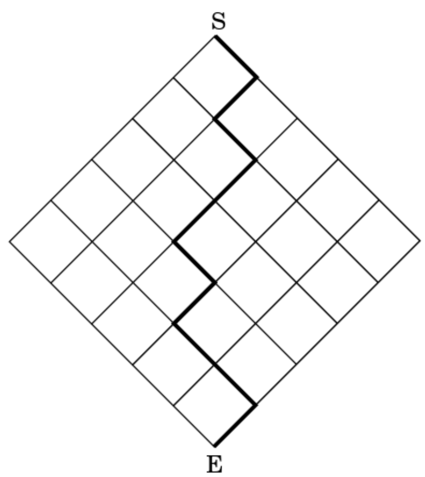


- Solución:
  - Tip: Similar a encontrar rutas en el problema anterior.

Ejercicios de Permutaciones con Repeticiones

- (Abracadabra). De cuántas maneras se puede leer la palabra abracadabra en el siguiente látice.

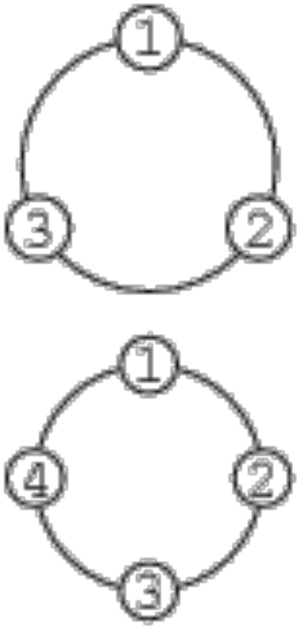




- Solución:
  - Tip: Similar a encontrar rutas en el problema anterior.
  - $10! / (5! \, 5!) = 252$

Permutaciones cíclicas

- ¿De cuántas maneras diferentes puedes colocar *n* cuentas de un collar?

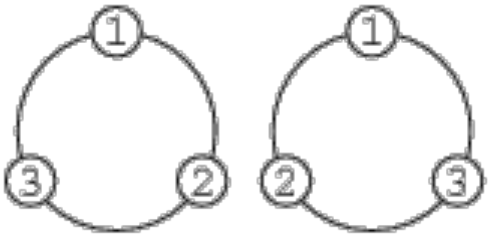


Teorema de Permutaciones Cíclicas

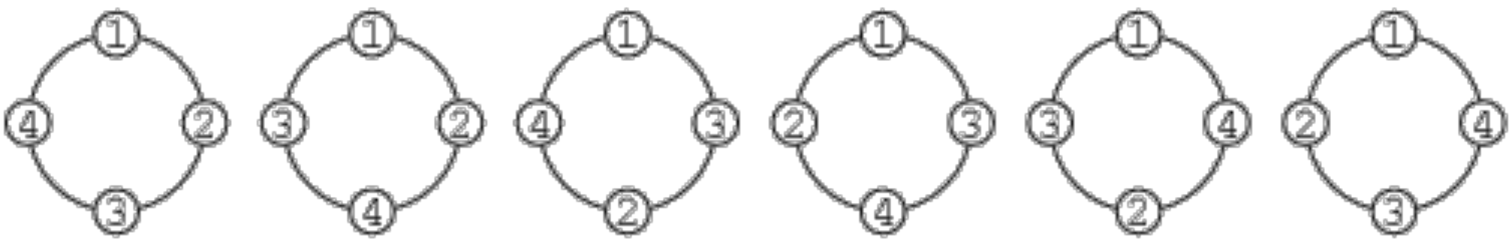
- El número de permutaciones cíclicas de n elementos diferentes es P_c = (n – 1)!

Permutaciones cíclicas

- ¿De cuántas maneras diferentes puedes colocar 5 cuentas de un collar?



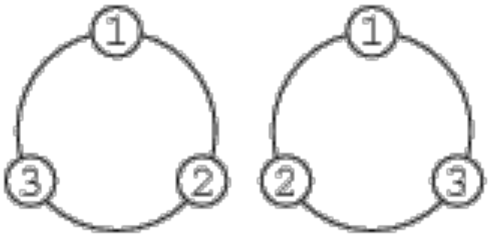
$2! = 2$



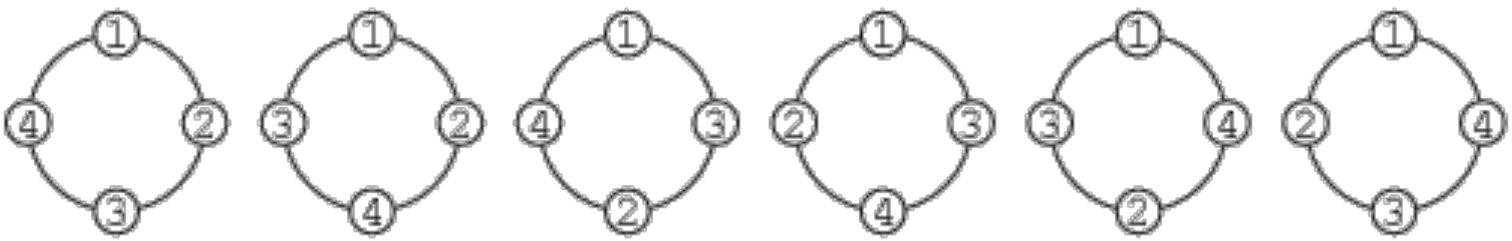
$3! = 3 * 2 = 6$

Permutaciones cíclicas

- ¿De cuántas maneras diferentes puedes colocar 5 cuentas de un collar?



$2! = 2$



$3! = 3 * 2 = 6$

Para $n = 5 \rightarrow 4! = 4 * 3 * 2 = 24$

Introducción a las Combinaciones

- Recordemos a las Permutaciones?

Introducción a las Combinaciones

- Recordemos a las Permutaciones?

> Una permutación de un conjunto de n elementos tomando r elementos a la vez ($0 \leq r \leq n$), es un arreglo de r elementos distintos del conjunto.

- El orden importa?

Introducción a las Combinaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

- Recordemos a las Permutaciones?

  Una permutación de un conjunto de n elementos tomando r elementos a la vez $(0 \leq r \leq n)$, es un arreglo de r elementos distintos del conjunto.

- El orden importa?
- Qué pasa si NO nos importa el orden?
- Por ejemplo, si tenemos un comité formado por
  - A={Ana, Juan, Julia, Carlos, Fernanda}
- A es un conjunto y el orden no importa.

-

Introducción a las Combinaciones

- Recordemos a las Permutaciones?

> Una permutación de un conjunto de n elementos tomando r elementos a la vez ($0 \leq r \leq n$), es un arreglo de r elementos distintos del conjunto.

- El orden importa?
- Qué pasa si NO nos importa el orden?
- Por ejemplo, si tenemos un comité formado por
  - A={Ana, Juan, Julia, Carlos, Fernanda}
- A es un conjunto y el orden no importa.
- Si queremos formar subcomités de tres miembros de A:
  - {Ana, Juan, Julia}, {Ana, Juan, Carlos} o {Ana, Juan, Fernanda},

Introducción a las Combinaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Recordemos a las Permutaciones?

  > Una permutación de un conjunto de n elementos tomando r elementos a la vez ($0 \leq r \leq n$), es un arreglo de r elementos distintos del conjunto.

- El orden importa?
- Qué pasa si NO nos importa el orden?
- Por ejemplo, si tenemos un comité formado por
  - A={Ana, Juan, Julia, Carlos, Fernanda}
- A es un conjunto y el orden no importa.
- Si queremos formar subcomités de tres miembros de A:
  - {Ana, Juan, Julia}, {Ana, Juan, Carlos} o {Ana, Juan, Fernanda},
- Los 3 subconjuntos son una combinación de los 5 elementos, tomados 3 a la vez, →
  - 3- combinación

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Definición de Combinación

- Una r-combinación de un conjunto de n elementos, donde 0≤ r ≤ n, es un subconjunto que contiene r elementos.
- Denotado como,
  - C(n,r) ⇔ $\binom{n}{r}$
- # de combinaciones también llamado coeficiente binomial.
- Ejemplo: Encuentra el número de r-combinaciones del conjunto {a,b,c} donde r=0,1,2,3.
- Solución:
  - # de 0-combinaciones
  - # de 1-combinaciones
  - # de 2-combinaciones
  - # de 3- combinaciones

Definición de Combinación

- Una r-combinación de un conjunto de n elementos, donde $0 \leq r \leq n$, es un subconjunto que contiene r elementos.
- Denotado como,
  - $C(n,r) \Leftrightarrow \binom{n}{r}$
- # de combinaciones también llamado coeficiente binomial (1544, Michael Stifel).
- Ejemplo: Encuentra el número de r-combinaciones del conjunto {a,b,c} donde r=0,1,2,3.
- Solución:
  - # de 0-combinaciones = 1 → {}
  - # de 1-combinaciones = 3 → {a}, {b}, {c}
  - # de 2-combinaciones = 3 → {a,b}, {a,c}, {b,c}
  - # de 3- combinaciones = 1 → {a,b,c}

Combinaciones

Remarcando:

- Cuántos elementos hay en 0-combinaciones?
- Cuántos elementos hay en n-combinaciones?

Combinaciones

Remarcando:

- Cuántos elementos hay en 0-combinaciones?
- Cuántos elementos hay en n-combinaciones?
  - De ambos sería 1.

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Teorema de Combinaciones

- El número de r-combinaciones de un conjunto de *n* elementos está dado por:
  - $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$, $0 \le r \le n$

Problema de Computabilidad

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

- Sustituible por?
- Ejemplo,
  - C(6,3) =

Problema de Computabilidad

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

- Sustituible por?
- Ejemplo,
  - C(6,3) = $\frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 * 3 * 2 * 1} = \frac{6 * 5 * 4}{3 * 2 * 1}$

Problema de Computabilidad

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Sustituible por?
- Ejemplo,
  - $C(6,3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1*3*2*1} = \frac{6*5*4}{3*2*1}$
- Generalizando…
  - $C(n,r) = \frac{n * (n-1) * \ldots * (n-r+1)}{r!}$

Calcular el número de Combinaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Ejercicios de Combinaciones

- Calcular el número de subcomités de 3 miembros que se pueden formar de un comité de 25 miembros.

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n * (n-1) * \ldots * (n-r+1)}{r!}}$$

Ejercicios de Combinaciones

- Calcular el número de subcomités de 3 miembros que se pueden formar de un comité de 25 miembros.
- Solución:
  - # de subcomités = # de 3-combinaciones de un conjunto de 25

$$= C(25,3)$$

$$= \frac{25 * 24 * 23}{3!}$$

$$= 2{,}300$$

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n * (n-1) * \ldots * (n-r+1)}{r!}}$$

Ejercicios de Combinaciones

- Calcular cuántos comités de 3 mujeres y 4 hombres se pueden formar de un grupo de 5 mujeres y 6 hombres?

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,r) = \frac{n * (n-1) * \ldots * (n-r+1)}{r!}$$

Ejercicios de Combinaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Calcular cuántos comités de 3 mujeres y 4 hombres se pueden formar de un grupo de 5 mujeres y 6 hombres?
- Solución:
  - 3 mujeres pueden elegirse de 5, entonces calcular C(5,3) = 10
  - 4 hombres pueden elegirse de 6, entonces calcular C(6,4) = 15
  - Entonces, por el principio de multiplicación, 10*15 = 150 comités.

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$C(n,r) = \frac{n * (n-1) * \ldots * (n-r+1)}{r!}$$

Teorema de Combinaciones para reducir el trabajo computacional

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- $C(n,r) = C(n, n-r)$, para $0 \le r \le n$
- Prueba:

Teorema de Combinaciones para reducir el trabajo computacional

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- C(n,r) = C(n, n-r), para $0 \le r \le n$
- Prueba:

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$$

Teorema de Combinaciones para reducir el trabajo computacional

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

- C(n,r) = C(n, n-r), para 0 ≤ r ≤ n
- Prueba:

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r)$$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Teorema de Combinaciones para reducir el trabajo computacional

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- C(n,r) = C(n, n-r),   para $0 \leq r \leq n$
- Prueba:

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r)$$

- Verificar que C(5,3) = C(5,2).

El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

El Triángulo de Pascal

Tiene varias propiedades

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

1

El Triángulo de Pascal

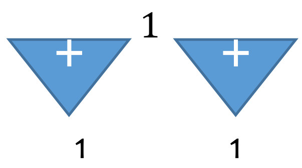
- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde $0 \leq r \leq n$, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
1 & & 1
\end{array}
$$

El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde $0 \leq r \leq n$, se pueden acomodar en forma de triángulo:

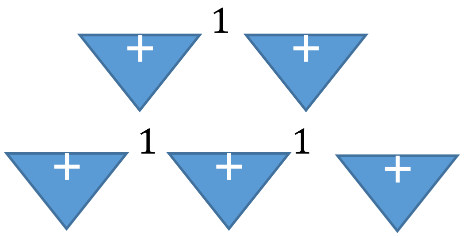
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$



El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde $0 \le r \le n$, se pueden acomodar en forma de triángulo:

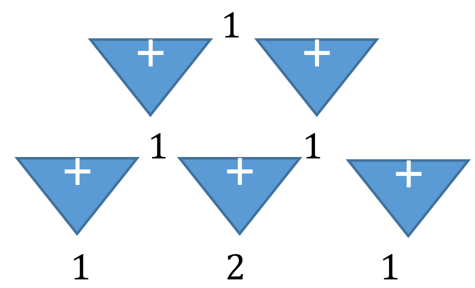
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$



El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$



El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

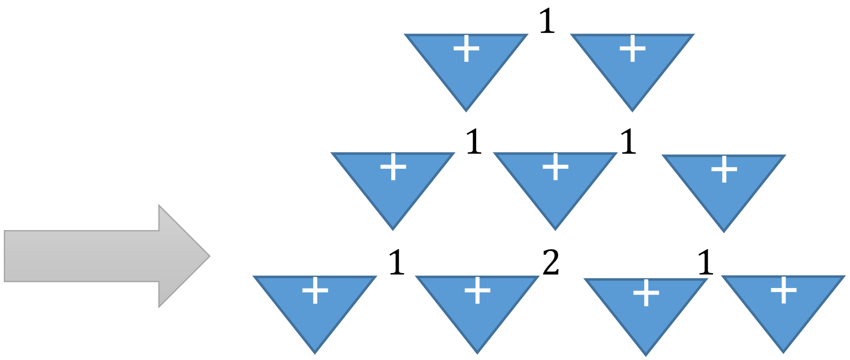
$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

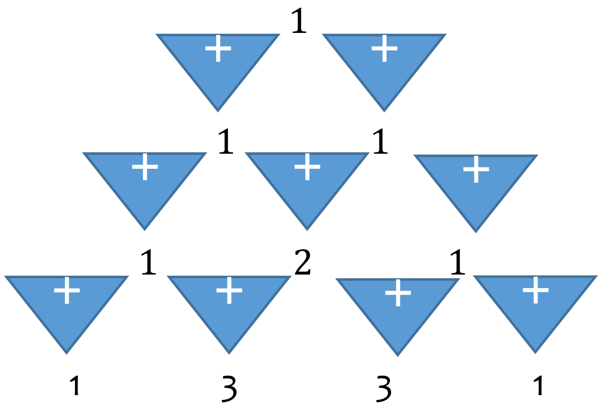
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$



El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde $0 \leq r \leq n$, se pueden acomodar en forma de triángulo:

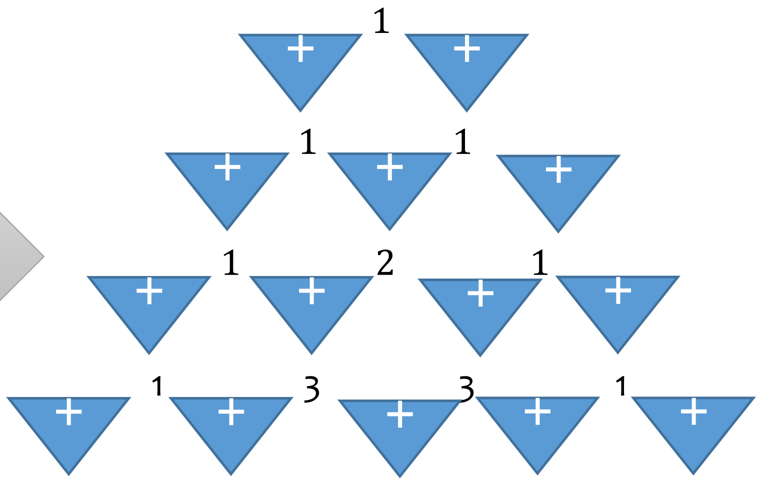
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$



El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

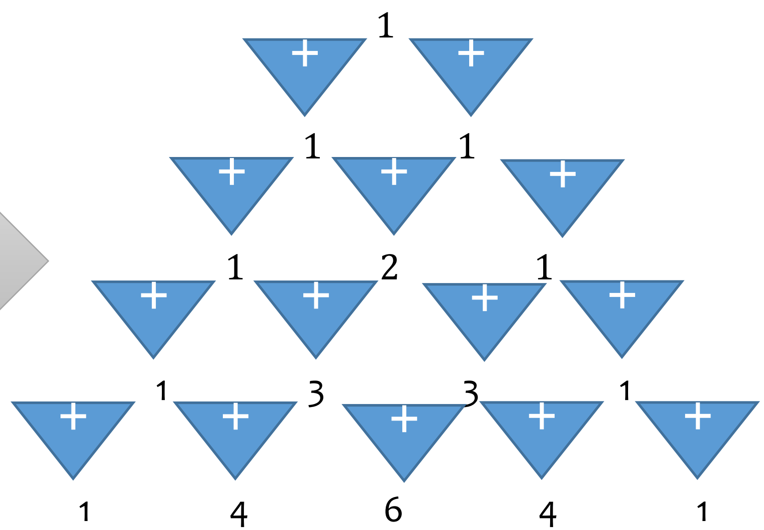


El Triángulo de Pascal

Propiedad 1

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$



Cada elemento es la suma de su número izquierdo y derecho de la fila anterior

El Triángulo de Pascal

Propiedad 2

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde $0 \le r \le n$, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

El Triángulo de Pascal

Propiedad 2

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde $0 \le r \le n$, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

El Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde $0 \leq r \leq n$, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

El Triángulo de Pascal

Propiedad 3

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$, donde 0 ≤ r ≤ n, se pueden acomodar en forma de triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$Simetría \rightarrow \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

- Existen algunos Teoremas sobre el Triángulo de Pascal que ayudan a resolver ciertos problemas.
- Quedan fuera del alcance de esta asignatura:
  - Son más avanzados
  - Son específicos
  - Tenemos las bases para comprenderlos en caso de que se requiera profundizar.

- HERRAMIENTA PARA EL CONTEO: http://libroweb.alfaomega.com.mx/book/685/free/ovas_statics/cap2/simuladores/Metodos_conteo.html?param=root

Resumen de la clase

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Permutaciones:
  - De n = “todos” los elementos del conjunto: P(n,n) = n!
  - De un subconjunto “r” de elementos de todo un conjunto: P(n,r)=n!/(n-r)!
  - Permutaciones cíclicas: P_c= (n – 1)!
  - Permutaciones con repeticiones P_R=n! / (n_1! n_2! … nk!)
- Combinaciones:
  - Combinación de un subconjunto “r” de “n” elementos C(n,r) ⇔ $\binom{n}{r}$ =n!/(r!(n-r)!) y fórmula para reducir el trabajo computacional
  - Teorema de pascal

Tarea

- Descripción en Moodle
- Fecha límite de entrega: Martes, 05/09/2017, 23:55 hrs.
- Incluir:
  - Nombre del estudiante, Fecha, Nombre del curso, Nombre del programa, Nombre del profesor.
- Subir al Moodle el documento en PDF.