MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Matemáticas Avanzadas para Computación

Tema 1. Introducción

Maestría en Sistemas Computacionales
Dra. Mildreth Alcaraz, mildreth@iteso.mx
Tel. 3669-3434 xt 3975, Oficina T - 316

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Eventos mutuamente excluyentes

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Dos subconjuntos de valores de 2 variables discretas A y B del espacio de muestreo (S) son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$, i.e., no existen valores en ambos conjuntos simultáneamente.

  - e.g., sacar una reina roja y un rey negro de un juego de cartas.

- *Nota: La probabilidad de cada valor es siempre la misma para cada uno de ellos, a menos que se especifique lo contrario.*

Mildreth Alcaraz, ITESO

Teorema del principio de adición en probabilidad

- Si dos subconjuntos de valores de 2 variables discretas A y B mutuamente excluyentes de un espacio de muestro (S) finito:
  - $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Mildreth Alcaraz, ITESO

Teorema del principio de inclusión-exclusión en probabilidad

- Si dos subconjuntos de valores de 2 variables discretas A y B del espacio de muestreo (S), la probabilidad de que al menos uno de ellos ocurra está dado por:
  - $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Se extiende directamente a un número finito de eventos de S

Ejercicio

- Un estudio acerca de las preferencias de 50 jóvenes en relación a la limonada y naranjada mostró que a 25 les gusta la limonada, a 30 les gusta la naranjada, a 10 les gustan las dos. Se selecciona a un joven del grupo. Encuentra la probabilidad de que no le guste ni la limonada ni la naranjada.
- Solución:

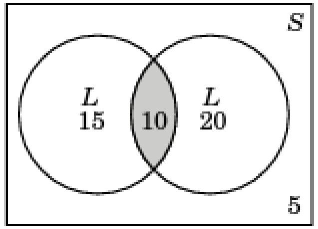
Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Un estudio acerca de las preferencias de 50 jóvenes en relación a la limonada y naranjada mostró que a 25 les gusta la limonada, a 30 les gusta la naranjada, a 10 les gustan las dos. Se selecciona a un joven del grupo. Encuentra la probabilidad de que no le guste ni la limonada ni la naranjada.
- Solución:
  - L = les gusta la limonada, N = les gusta la naranjada
  - $p(L) = 25/50$, $p(N) = 30/50$, $p(L \cap N) = 10/50$
  - $p(L \cup N) = p(L) + p(N) - p(L \cap N) = 25/50 + 30/50 - 10/50 = 45/50$
  - $p(L \cup N)' = 1 - 45/50 = 5/50 = 1/10$

  $= 0.1$



Probabilidad Condicional / Teorema de la multiplicación

- La probabilidad de que un valor de A ocurra, sabiendo que un valor de B(≠∅) ya ha ocurrido, es la probabilidad condicional de A, dado B → **$p(A|B)$.**

- Teo 1: Probabilidad Condicional. Sea A y B cualquiera de dos variables discretas de un espacio de muestreo finito S con p(B) ≠0. Entonces,
  - $$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

- Teo 2: Multiplicación para probabilidad condicional. Sean A y B dos eventos cualquiera de un espacio de muestreo. Entonces la probabilidad de que ambos ocurran está dado por **$p(A \cap B) = p(A)\, p(B|A)$.**

Ejercicio

- Un estudio realizado recientemente en un área rural muestra que la probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea alérgica al polen de roble es de 7/24, y la probabilidad de que sea alérgica al polen del roble y al abedul es de 3/20. Encuentra la probabilidad de que esta persona sea alérgica al polen del abedul, dado que ya es alérgica al del roble.

Ejercicio

- Un estudio realizado recientemente en un área rural muestra que la probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea alérgica al polen de roble es de 7/24, y la probabilidad de que sea alérgica al polen del roble y al abedul es de 3/20. Encuentra la probabilidad de que esta persona sea alérgica al polen del abedul, dado que ya es alérgica al del roble.
  - Solución: A = alérgico al abedul, R = alérgico al roble →
  - $p(R) = 7/24$, $p(A \cap R) = 3/20$.
  - $P(A|R) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{3/20}{7/24} = \frac{18}{35}$

Mildreth Alcaraz, ITESO

Variables Dependientes e Independientes

- Dos variables aleatorias discretas A y B son dependientes si la ocurrencia de una variable afecta la probabilidad de la ocurrencia de otra variable (probabilidad condicional), de otro modo, es independiente.

- Si A y B son variables independientes,
  - $p(A|B) = p(A)$,
  - $p(B|A) = p(B)$,
  - $p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$.

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Valor Esperado

- Si $X=a_1,a_2,\ldots,a_n$ son los valores numéricos de distintas salidas de una Variable Aleatoria Discreta, y $p_1,p_2,\ldots,p_n$ son las probabilidades de las correspondientes salidas, el valor esperado E de la variable X está dado por:
  - $E = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n$

Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio – valor esperado

- Una moneda se lanza 4 veces. Cuántas veces se espera que caiga caras?
  - Todas las combinaciones?
  - De obtener 0 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 1 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 2 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 3 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 4 caras de los 4 lanzamientos?
  - Cuál es $P(a_i)$?
  - Cuál es E?

Mildreth Alcaraz, ITESO

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Ejercicio – valor esperado

- Una moneda se lanza 4 veces. Cuántas veces se espera que caiga caras?
  - 2^4=16 → todas las combinaciones posibles
  - 0 caras → C(4,0)= 1
  - 1 cara → C(4,1)=4/1! = 4
  - 2 caras → C(4,2)=4*3/2!=12/2=6
  - 3 caras → C(4,3) = 4/1!=4
  - 4 caras → C(4,4) = 1
  - p(a_i) para cada valor de salida→ p(0caras)= 1/16, p(1caras)=4/16, p(2caras) = 6/16, p(3caras)= 4/16, p(4caras) = 1/16 →
  - Valor Esperado (cuántas veces se espera tener caras?)
    - 0 * 1/16 + 1* 4/16 + 2 * 6/16 + 3 * 4/16 + 4 * 1/16 = 2

Mildreth Alcaraz, ITESO

Juegos de Números

- Haces una apuesta de 1 peso a uno de los números del 000 al 999. Si tu número es el ganador obtienes $700, de otro modo, pierdes tu peso.
- Solución:

Mildreth Alcaraz, ITESO

Juegos de Números

- Haces una apuesta de 1 peso a uno de los números del 000 al 999. Si tu número es el ganador obtienes \$700, de otro modo, pierdes tu peso.
- Solución:
  - p(ganar) = 1/1000, p(perder) = 999/1000 →
  - E = \$699 * 1/1000 + (-\$1) * 999/1000 = -\$0.30
- Este valor de E, significa que si juegas muchas veces este mismo juego, se espera que pierdas en promedio 30 centavos por juego.

- Este concepto es muy importante en el análisis de la complejidad del caso promedio.

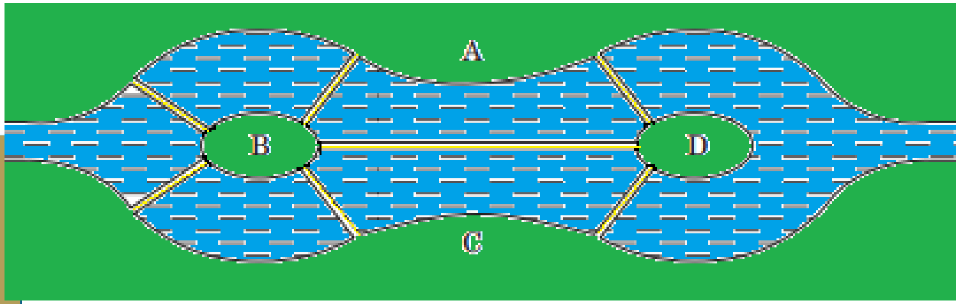
2. Grafos

Introducción a los Grafos

- Teoría de Grafos – rama de las matemáticas – numerosas aplicaciones en diversas áreas:
  - Ciencias computacionales
  - Ingeniería
  - Lingüística
  - Ciencias Administrativas
  - Ciencias Sociales y Naturales
- Nació de un problema físico relevante, representado por el acertijo del "puente de Könisberg"
- Leonhard Euler lo resolvió en 1736, reconocido como el padre de la teoría de grafos.

Introducción a los Grafos

- La ciudad de Könisberg (Kaliningrad – era de la Unión Soviética), yace sobre el río Pregola (Pregolya).
- Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregolya dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

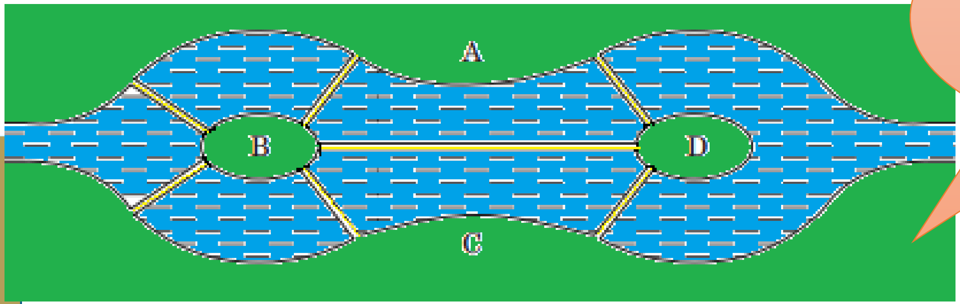


MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Introducción a los Grafos

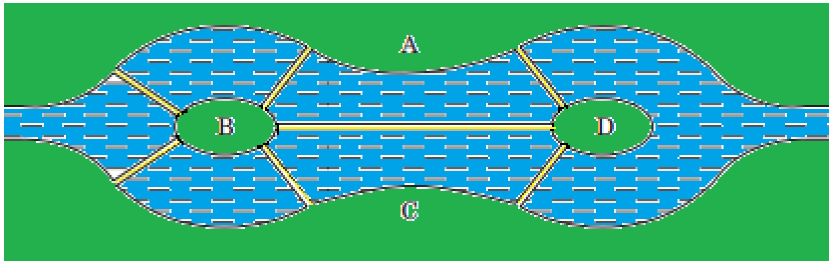
- La ciudad de Könisberg (Kaliningrad – era de la Unión Soviética), yace sobre el río Pregola (Pregolya).
- Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregolya dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

Cuántos caminos posibles?



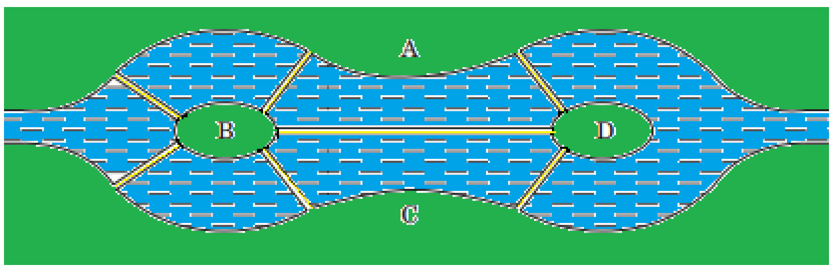
Introducción a los Grafos

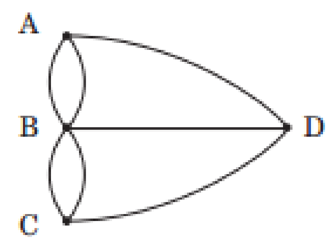
- Cuántos caminos posibles, considerando que tenemos 7 puentes que recorrer? 7!
- Euler propuso un modelo matemático para este problema:



Introducción a los Grafos

- Cuántos caminos posibles, considerando que tenemos 7 puentes que recorrer? 7!
- Euler propuso un modelo matemático para este problema:





- El problema se redefinió a: "comenzando en cualquier punto A,B,C ó D, es posible trazar la figura sin levantar el lápiz ni trazar dos veces cada conexión?"
- Este nuevo modelo se llamó Grafo.

Grafos

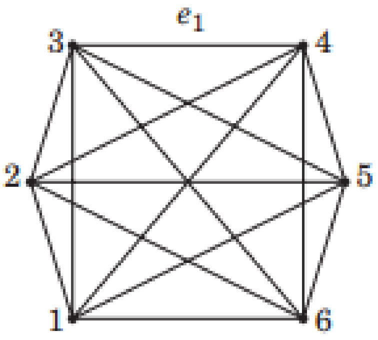
- Un Grafo o Grafo no dirigido G consiste de un conjunto finito no vacío V de puntos, llamados vértices o nodos, y un conjunto E de pares no ordenados de elementos en V, llamadas aristas.
- $G = (V, E)$ → par ordenado: 2-tupla, dupla.
- Una arista que conecta los vértices u y v se denota {u,v}, u-v, o con una etiqueta.
- Gráficamente, los vértices son puntos, y las aristas son líneas o arcos que los conectan.

Ejemplo

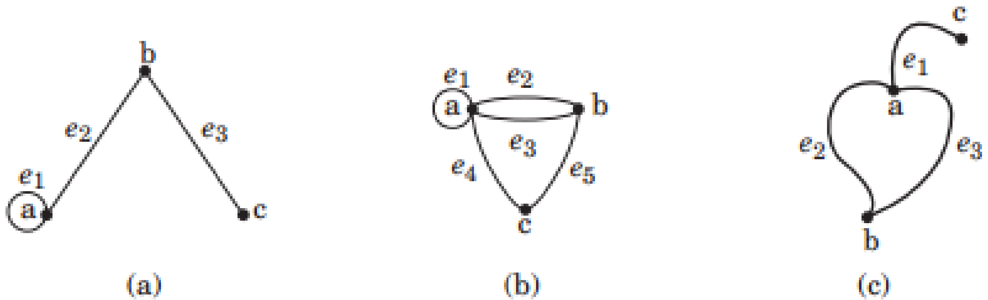
- El SAT tiene sus archivos en un centro de cómputo localizado en México (1). Existen otros 5 centros donde se almacena esta información: Guadalajara (2), Monterrey (3), Aguascalientes (4), Querétaro (5), Colima (6).
- Cada computadora en cada centro se puede comunicar con cualquier computadora en otro centro. Esta red de computadoras puede ser modelada con un grafo.

Ejemplo

- El SAT tiene sus archivos en un centro de cómputo localizado en México (1). Existen otros 5 centros donde se almacena esta información: Guadalajara (2), Monterrey (3), Aguascalientes (4), Querétaro (5), Colima (6).
- Cada computadora en cada centro se puede comunicar con cualquier computadora en otro centro. Esta red de computadoras puede ser modelada con un grafo.

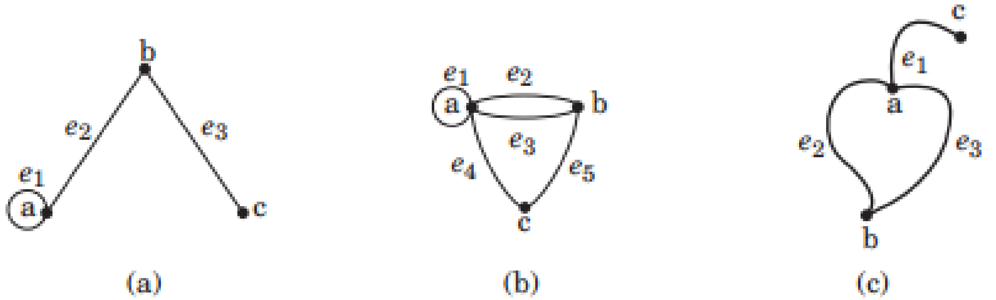


Ejemplo – determinar (V, E)



Ejemplo

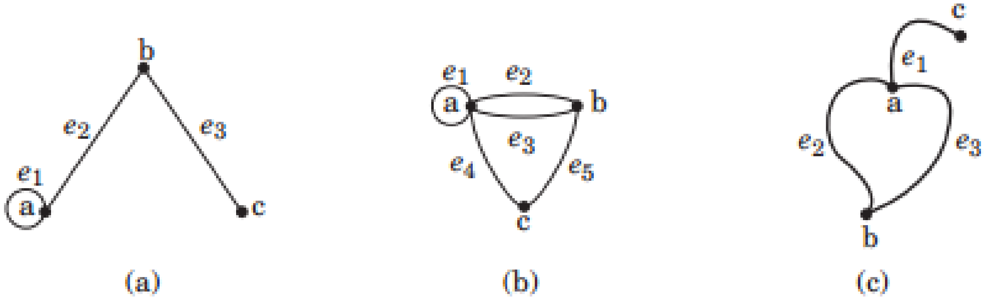
E es un multiconjunto cuando el grafo tiene lazos paralelos.
E (como conjunto simple de un multiconjunto, i.e., sin repeticiones) es un subconjunto del conjunto que se genera por la selección de 2-combinaciones, r=2, sobre n elementos, con n=|V|.



- (a) → $G_a = (V_a, E_a), t.q. V_a = \{a, b, c\}$, y $E_a = \{e_1, e_2, e_3\} = \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$.
- (b) → $G_b = (V_b, E_b), t.q. V_b = \{a, b, c\}$, y $E_b = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{\{a, a\}, \{a, b\}: 2, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.
- (c) → $G_c = (V_c, E_c), t.q. V_c = \{a, b, c\}$, y $E_c = \{e_1, e_2, e_3\} = \{\{a, c\}, \{a, b\}: 2\}$.

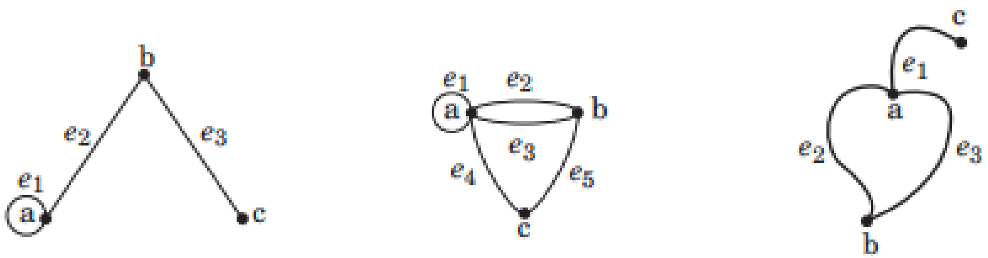
Grafo simple - definiciones

- *Loop* (autolazo) – una arista {a,a}.
- *Aristas paralelas* – {{a,b}:2} – tienen los mismos vértices.
- Un **grafo simple**, no tiene autolazos ni aristas paralelas.



Grafo simple - definiciones

- *Loop* (autolazo) – una arista {a,a}.
- *Aristas paralelas* – {{a,b}:2} – tienen los mismos vértices.
- Un **grafo simple**, no tiene autolazos ni aristas paralelas.



(a) (b) (c)

- Ninguno de estos, es un grafo simple.

Resumen de la clase

- Introducción a la Probabilidad Discreta –cont.
  - Teoremas de probabilidad y principios del conteo:
    - Teorema del principio de multiplicación en probabilidad
    - Teorema del principio de inclusión-exclusión en probabilidad
    - Teorema del principio de adición en probabilidad
  - Probabilidad condicional
    - Eventos dependientes e independientes
  - Valor esperado
- Introducción a los Grafos
  - Definición formal y conceptos básicos