MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Matemáticas Avanzadas para Computación

Tema 1. Introducción

Maestría en Sistemas Computacionales
Dra. Mildreth Alcaraz, mildreth@iteso.mx
Tel. 3669-3434 xt 3975, Oficina T - 316

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Resumen

- Principios fundamentales del conteo:
    1) Adición: Utilizar cuando se requiere contar los elementos independientemente de cuántos grupos existen. No hay elementos comunes, de lo contrario pertenecen al siguiente grupo.
    2) Inclusión-Exclusión: Utilizar cuando se requiere contar los elementos independientemente de cuántos grupos existen. Existen elementos comunes que hay que quitar del conteo.
    3) Multiplicación: Utilizar cuando podemos elegir elementos de cada grupo para formar otra agrupación o tupla.

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Resumen

1) Permutaciones, cuando **importa el orden** y se tienen **elementos distintos** entre sí.
   - Con todos los elementos: P(n,n) = n!
   - De un subconjunto r: P(n,r)=n!/(n-r)! = n * n-1, … , n-r+1
   - Permutaciones cíclicas para n: P_c= (n – 1)!
2) Permutaciones, cuando **importa el orden** y con **elementos repetidos** P_R=n! / (n_1! n_2! … nk!)
3) Combinaciones, el **orden no importa** y se tienen **elementos distintos** entre sí.
   - C(n,r) ⇔ $\binom{n}{r}$ =n!/(r!(n-r)!)
   - para reducir el trabajo computacional = (n * n-1 * …(n-r+1))/r!
   - Equivalente C(n,r) = C(n, n-r)

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Objetivos de la clase

- Conocer los conceptos de:
  - Combinaciones con Repeticiones (Selecciones)
  - Combinatoria en Ciclos FOR
  - Probabilidad Discreta

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Supongamos que 1 cliente compra 5 botellas de vino:
  - Tequila
  - Vodka
  - Whiskey

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- *Ejemplo*: Encontrar las 3-combinaciones del conjunto S={a,b} con repeticiones.
  - r=3=#elementos a combinar,
  - n=2=Cardinalidad del conjunto S, es decir, del conjunto sobre el cual elegimos elementos
  - Observemos que r>n, entonces hay repetidos →

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- *Ejemplo*: Encontrar las 3-combinaciones del conjunto S={a,b} con repeticiones.
  - r=3=#elementos a combinar,
  - n=2=Cardinalidad del conjunto S, es decir, del conjunto sobre el cual elegimos elementos
  - Observemos que r>n, entonces hay repetidos →
  - Si los enumeramos serían:
    - { {a,a,a}, {a,a,b}, {a,b,b}, {b,b,b} }

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Ejemplo: Encontrar el número de 3-combinaciones del conjunto s={a,b,c}.
- Solución:

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Ejemplo: Encontrar el número de 3-combinaciones del conjunto s={a,b,c}.
- Solución:
  - Como son pocas combinaciones, podemos enumerarlas:
    - {a,a,a}, {a,a,b}, {a,a,c}, {a,b,b}, {a,b,c}, {a,c,c}, {b,b,b}, {b,b,c}, {b,c,c}, {c,c,c}
  - → 10 combinaciones

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Ejemplo: Encontrar el número de 3-combinaciones del conjunto s={a,b,c}.
- Solución:
  - Como son pocas combinaciones, podemos enumerarlas:
    - {a,a,a}, {a,a,b}, {a,a,c}, {a,b,b}, {a,b,c}, {a,c,c}, {b,b,b}, {b,b,c}, {b,c,c}, {c,c,c}
  - → 10 combinaciones
  - Pero cuál es la fórmula?

    $CR(n,r)= C(n + r - 1, r)$
- Para 3-combinaciones de un conjunto de 3 elementos→
    - .

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Ejemplo: Encontrar el número de 3-combinaciones del conjunto s={a,b,c}.
- Solución:
  - Como son pocas combinaciones, podemos enumerarlas:
    - {a,a,a}, {a,a,b}, {a,a,c}, {a,b,b}, {a,b,c}, {a,c,c}, {b,b,b}, {b,b,c}, {b,c,c}, {c,c,c}
  - → 10 combinaciones
  - Pero cuál es la fórmula?

    $CR(n,r) = C(n + r - 1, r)$
- Para 3-combinaciones de un conjunto de 3 elementos→
    - n=3, r=3. $CR(3,3) = C(3+3-1,3) = C(5,3) = 5*4*3/3! = C(5,2) = 5*4/2! = 10$

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- *Ejemplo*: Encontrar las 3-combinaciones del conjunto S={a,b} con repeticiones.
  - r=3=#elementos a combinar,
  - n=2=Cardinalidad del conjunto S, es decir, del conjunto sobre el cual elegimos elementos
  - Observemos que r>n, entonces hay repetidos →
  - Si los enumeramos serían:
    - { {a,a,a}, {a,a,b}, {a,b,b}, {b,b,b} }

  ¿Cúántas combinaciones?

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- *Ejemplo*: Encontrar las 3-combinaciones del conjunto S={a,b} con repeticiones.
  - r=3=#elementos a combinar,
  - n=2=Cardinalidad del conjunto S, es decir, del conjunto sobre el cual elegimos elementos
  - Observemos que r>n, entonces hay repetidos →
  - Si los enumeramos serían:
    - { {a,a,a}, {a,a,b}, {a,b,b}, {b,b,b} }

¿Cúántas combinaciones?

* CR(n,r) = CR (2,3) = C(n+r-1,r) = C(2+3-1,3) = C(4,3) = C(4,1) = 4

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Supongamos que 1 cliente compra 5 botellas de vino:
  - Tequila
  - Vodka
  - Whiskey

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - __________ / ___________ / ___________ = 5
    tequila vodka whiskey

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Supongamos que 1 cliente compra 5 botellas de vino:
  - Tequila
  - Vodka
  - Whiskey

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - $\underbrace{XXX}_{\text{tequila}} \;/\; \underbrace{X}_{\text{vodka}} \;/\; \underbrace{X}_{\text{whiskey}} = 5$

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Supongamos que 1 cliente compra 5 botellas de vino:
  - Tequila
  - Vodka
  - Whiskey

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - XXX / X / X = 5

    tequila vodka whiskey
  - / XX / XXX = 5

    tequila vodka whiskey

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Supongamos que 1 cliente compra 5 botellas de vino:
  - Tequila
  - Vodka
  - Whiskey

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - ____XXX_____ / ____X______ / ___X_____ = 5
    tequila vodka whiskey

Cómo lo resolvemos?

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - ____XXX_____ / ____X______ / ___X_____ = 5

    tequila vodka whiskey

Cómo lo resolvemos?

- r=5 →# elementos a seleccionar,
- n=3 →Cardinalidad del conjunto de elementos a elegir,
- $CR(n,r)= C(n + r - 1, r)$

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - ____XXX_____ / ____X______ / ___X_____ = 5

    tequila vodka whiskey

Cómo lo resolvemos?

- r=5 →# elementos a seleccionar,
- n=3 →Cardinalidad del conjunto de elementos a elegir,
- $CR(n,r)= C(n + r – 1, r)$

- $CR(3,5)=C(3+5-1,5)=C(7,5)=C(7,2)=7*6/2!=21.$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - ____XXX_____ / ____X______ / ___X_____ = 5

    tequila vodka whiskey

Otra manera de resolverlo:

- Equivalente a verlo de la siguiente manera:
- Las X's son repeticiones, y las /'s son repeticiones:
  - El total de elementos son 7.
  - Son 5 X's (se repite)
  - Son 7 /'s (se repite)

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - ____XXX_____ / ____X______ / ___X_____ = 5
    tequila vodka whiskey

Otra manera de resolverlo:

- Equivalente a verlo de la siguiente manera:
- Las X's son repeticiones, y las /'s son repeticiones:
  - El total de elementos son 7.
  - Son 5 X's (se repite)
  - Son 7 /'s (se repite)
- En problema equivalente a permutaciones con repeticiones =
  7! / (5! 2!) = 21

Combinaciones con Repeticiones - Selecciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Cuántas ordenes diferentes podría haber? No hay distinción dentro de un mismo tipo de bebida.
  - ____XXX_____ / ____X______ / ___X_____ = 5
    tequila vodka whiskey

Otra manera de resolverlo:

- Equivalente a verlo de la siguiente manera:
- Las X's son repeticiones, y las /'s son repeticiones:
  - El total de elementos son 7.
  - Son 5 X's (se repite)
  - Son 7 /'s (se repite)

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables enteras no negativas y r un entero no negativo. ($x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $r \geq 0$).

La ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ tiene $C(n + r - 1, r)$ soluciones enteras.

→ El número de soluciones está dado por la *r-combinaciones con repeticiones de n número de variables.*

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Sea $x_1,x_2,\ldots,x_n$ variables <u>enteras no negativas</u> y r un <u>entero no negativo</u>. ($x_1,x_2,\ldots,x_n \geq 0$, $r \geq 0$).

La ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ tiene $C(n + r - 1, r)$ soluciones enteras.

→ El número de soluciones está dado por la *r-combinaciones con repeticiones de n número de variables.*

- Ejemplo: Encuentra el número de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, con $x_1,x_2,x_3 \geq 0$
  - Solución.

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

- Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables enteras no negativas y r un entero no negativo. ($x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $r \geq 0$).

La ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ tiene $C(n + r - 1, r)$ soluciones enteras.

→ El número de soluciones está dado por la *r-combinaciones con repeticiones de n número de variables.*

- Ejemplo: Encuentra el número de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, con $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
  - Solución.
    - $r=5$, $n = 3$.
    - $CR(3,5) = C(n + r - 1, r) = C(3 + 5 - 1, 5) = C(7, 5) = C(7,2) = 7*6/2! = 42/2 = 21$

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Ejercicio: Supongamos que queremos encontrar todas las soluciones posibles para:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, donde $x_1, x_2, x_3 \geq 1$ (1)

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Ejercicio: Supongamos que queremos encontrar todas las soluciones posibles para:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, donde $x_1, x_2, x_3 \geq 1$ (1)
- Si $x_1 \geq 1 \rightarrow$ Existe una y_1 tal que $y_1 = x_1 - 1$,
- $y_1 \geq 0$, pues x_1 al menos vale 1.
- Si despejamos x_1 tenemos que $x_1 = y_1 + 1$
- Hacemos lo mismo para x_2, x_3
- Al sustituir las x_i por $y_i + 1$, tenemos que
  - $y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 = 5$ lo que equivale a
  - $y_1 + y_2 + y_3 + 3 = 5$ lo que equivale a
  - $y_1 + y_2 + y_3 = 2$

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

- Entonces, ahora resolvemos la siguiente ecuación:
  - $y_1 + y_2 + y_3 = 2$, para $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Entonces, ahora resolvemos la siguiente ecuación:
  - $y_1 + y_2 + y_3 = 2$, para $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ (2)
- Donde $n=3$, $r=2$
- Por lo tanto,
  - $CR(3,2) = C(3+2-1,2)=C(4,2)= 4*3/2! = 6$.

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Entonces, ahora resolvemos la siguiente ecuación:
  - $y_1 + y_2 + y_3 = 2,$ para $y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$ (2)
- Donde $n=3, r=2$
- Por lo tanto,
  - $CR(3,2) = C(3+2-1,2)=C(4,2)= 4*3/ 2! = 6.$
- Las 6 soluciones (y_1,y_2,y_3) para la ec. (2) son:

- Dado que $x_i = y_i + 1$, las 6 soluciones (x_1,x_2,x_3) para la ec. (1) son ($x_1 + x_2 + x_3 = 5$, donde $x_1,x_2,x_3 \geq 1$):

Teorema de Combinaciones con Repeticiones para ecuaciones

- Entonces, ahora resolvemos la siguiente ecuación:
  - $y_1 + y_2 + y_3 = 2,$ para $y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$ (2)
- Donde n=3, r=2
- Por lo tanto,
  - CR(3,2) = C(3+2-1,2)=C(4,2)= 4*3/ 2! = 6.
- Las 6 soluciones (y_1,y_2,y_3) para la ec. (2) son:
  - (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (2,0,0),(0,2,0), (0,0,2)
- Dado que $x_i = y_i + 1$, las 6 soluciones (x_1,x_2,x_3) para la ec. (1) son ($x_1 + x_2 + x_3 = 5$, donde $x_1,x_2,x_3 \geq 1$):
  - (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,1),(1,3,1), (1,1,3).

Combinatoria en ciclos FOR

- Encuentra el número de veces que se realiza la asignación:

```
For i = 1 to n do
  For j = 1 to i do
    x ← x + 1
```

Combinatoria en ciclos FOR

- Encuentra el número de veces que se realiza la asignación:

```
For i = 1 to n do
  For j = 1 to i do
    x ← x + 1
```

$C(n + r - 1, r)$

- Es igual al número de 2-Combinación del conjunto {1,2,3,…,n}.
  - $CR(n,2) = C(n + 2 - 1, 2) = C(n+1, 2)$
- Encuentra el número de veces que se realiza la asignación para ambos casos:

```
For i = 1 to n do
  For j = 1 to i do
    For k = 1 to j do
      x ← x + 1
```

```
For i1 = 1 to n do
  For i2 = 1 to i1 do
    For i3 = 1 to i2 do
          ⋮
          For ir = 1 to ir - 1 do
            x ← x + 1
```

Combinatoria en ciclos FOR

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Encuentra el número de veces que se realiza la asignación:

```
For i = 1 to n do
  For j = 1 to i do
    x ← x + 1
```

$C(n+r-1, r)$

- Es igual al número de 2-Combinación del conjunto {1,2,3,…,n}.
  - $CR(n,2) = C(n + 2 - 1, 2) = C(n+1, 2)$
- Encuentra el número de veces que se realiza la asignación para ambos casos:

```
For i = 1 to n do
  For j = 1 to i do
    For k = 1 to j do
      x ← x + 1
```

$C(n + 3 - 1, 3)$

```
For i1 = 1 to n do
  For i2 = 1 to i1 do
    For i3 = 1 to i2 do
      ⋮
        For ir = 1 to ir - 1 do
          x ← x + 1
```

$C(n + r - 1, r)$

Ejercicios

Introducción a la Probabilidad Discreta

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- ~1654, Chevalier de Mere y Blaise Pascal son los Padres de la Teoría de la Probabilidad

Ejemplo de introducción:

- Sea X="Resultado obtenido al lanzar un dado equilibrado con seis caras" *(E es una variable aleatoria discreta)*.
- Los valores posibles de X son:
- Si lanzamos el dado 60 veces, las *frecuencias absolutas* de cada valor pueden ser:8 (veces cayó el 1), 11 (veces cayó el 2), 14 (veces cayó el 3) , 7 (veces cayó el 4), 11 (veces cayó el 5) y 9 (veces cayó el 6)
- cuánto debe sumar todas las frecuencias absolutas de todos los valores posibles de X?
- Entonces, las *frecuencias relativas* son:
  - .

Introducción a la Probabilidad Discreta

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- ~1654, Chevalier de Mere y Blaise Pascal son los Padres de la Teoría de la Probabilidad

Ejemplo de introducción:

- Sea X="Resultado obtenido al lanzar un dado equilibrado con seis caras" *(X es una variable aleatoria discreta)*.
- Los valores posibles de X son: 1, 2, ... , 6.
- Si lanzamos el dado 60 veces, las *frecuencias absolutas* de cada valor pueden ser: 8 (veces cayó el 1), 11 (veces cayó el 2), 14 (veces cayó el 3) , 7 (veces cayó el 4), 11 (veces cayó el 5) y 9 (veces cayó el 6)
- Cuánto debe sumar todas las frecuencias absolutas de todos los valores posibles de X? En este caso el número de veces lanzado el dado, es decir, 60.
- Entonces, las *frecuencias relativas* son:

8/60 11/60 14/60 7/60 11/60 9/60.

Introducción a la Probabilidad Discreta

- Si a continuación volvemos a lanzar el mismo dado otras 60 veces, en las mismas condiciones, las frecuencias relativas serían parecidas, pero difícilmente iguales.

- Pero las frecuencias relativas serían bastante parecidas a 1/6, y serían más parecidas a 1/6 entre mayor el número de lanzamientos.

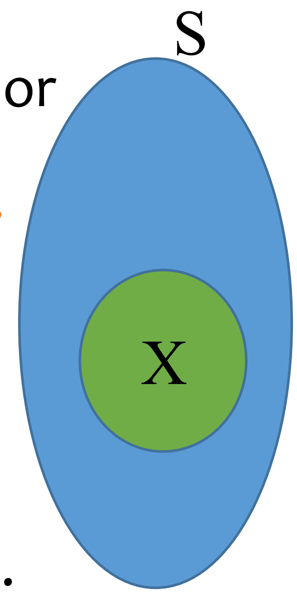
- Lo que hacemos al definir una variable aleatoria discreta (X) es quedarnos con la esencia del proceso estudiado, sustituyendo las frecuencias relativas por una función de probabilidad → p(X)

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\#\text{ maneras en las que X puede ocurrir}}{\#\text{ total de posibles resultados}}$$

Introducción a la Probabilidad Discreta

ESPACIO DE MUESTREO (S):

- Una moneda cuenta con la misma probabilidad de que al lanzarla caiga cara (H) o cruz (T).
- Cada H y T es una posible salida del experimento, y por lo tanto, el conjunto S={H,T} son todas las posibles salidas del experimento → Espacio de muestreo (S).
  - Ejemplo: Lanzar un dado con 6 caras, S= {1,2,3,4,5,6}.



VARIABLE ALEATORIA DISCRETA (X):

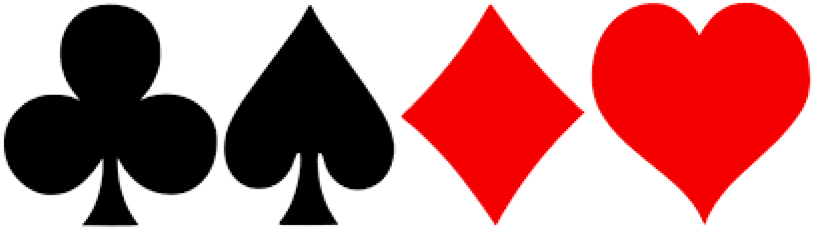
- X es el conjunto de valores de una muestra (subconjunto de S), dada una o varias características.
  - Ejemplo: Lanzar el dado y que salga el número 2, X={2},

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

Ejercicios Probabilidad

(baraja inglesa)

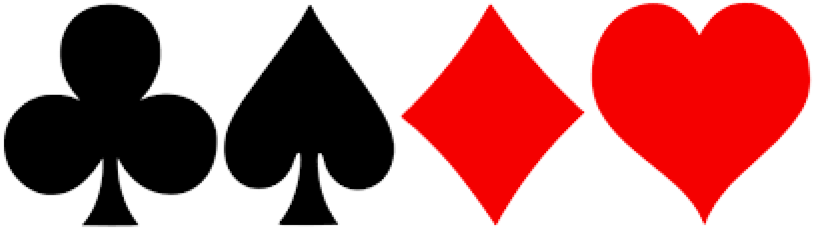
- Supongamos que tomas una carta de un juego completo de naipes. Cuál es la probabilidad de que ésta sea de diamante?
  - X =
  - S =



Ejercicios Probabilidad

(baraja inglesa)

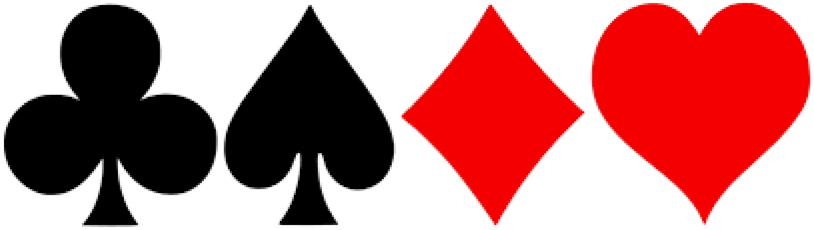
- Supongamos que tomas una carta de un juego completo de naipes. Cuál es la probabilidad de que ésta sea de diamante?
  - X = conjunto de todas las cartas que cumplen con ser de diamante --> |X| = 13
  - S = conjunto de todas las cartas --> |S| = 52



Ejercicios Probabilidad

(baraja inglesa)

- Supongamos que tomas una carta de un juego completo de naipes. Cuál es la probabilidad de que ésta sea de diamante?
  - $p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$



Ejercicios Probabilidad

(baraja inglesa)

- Supongamos que compras un billete de lotería cuyo número se compone de seis dígitos, divididos en tres colores (amarillo, azul y blanco) de la manera siguiente: ddd-dd-d. El 000-00-0 es un número válido. Cuál es la probabilidad de ganar la lotería?
- Solución:

Ejercicios Probabilidad

(baraja inglesa)

- Supongamos que compras un billete de lotería cuyo número se compone de seis dígitos, divididos en tres colores (amarillo, azul y blanco) de la manera siguiente: ddd-dd-d. El 000-00-0 es un número válido. Cuál es la probabilidad de ganar la lotería?
- Solución:
  - $|X| = 1$
  - $|S| = 1{,}000{,}000$

Ejercicios Probabilidad

(baraja inglesa)

- Supongamos que compras un billete de lotería cuyo número se compone de seis dígitos, divididos en tres colores (amarillo, azul y blanco) de la manera siguiente: ddd-dd-d. El 000-00-0 es un número válido. Cuál es la probabilidad de ganar la lotería?
- Solución: $p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Observaciones

- Cuál es la probabilidad de que un evento X ocurra con certeza?

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

Observaciones

- Cuál es la probabilidad de que un evento X ocurra con certeza? $p(X) = 1$.
- Cuál es la probabilidad de que un evento X no ocurra?

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Observaciones

- Cuál es la probabilidad de que un evento X ocurra con certeza? $p(X) = 1$.
- Cuál es la probabilidad de que un evento X no ocurra?

  $p(X) = 0$.

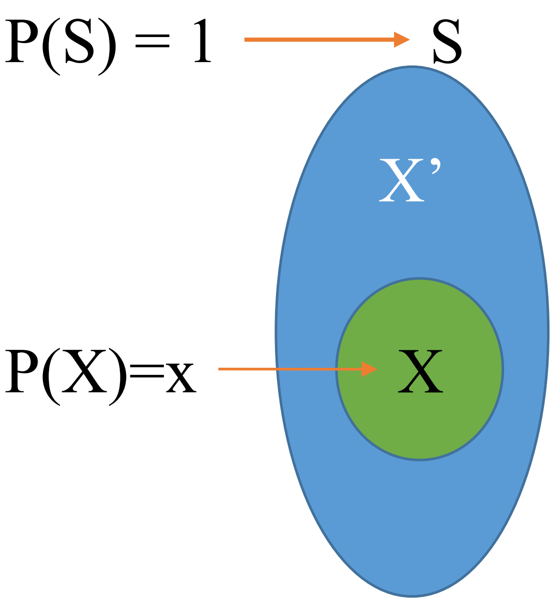
$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

Observaciones

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Cuál es la probabilidad de que un evento X ocurra con certeza? p(X) = 1.
- Cuál es la probabilidad de que un evento X no ocurra?

  p(X) = 0.
- Si p(X) = x, cuánto vale p(E')?



Observaciones

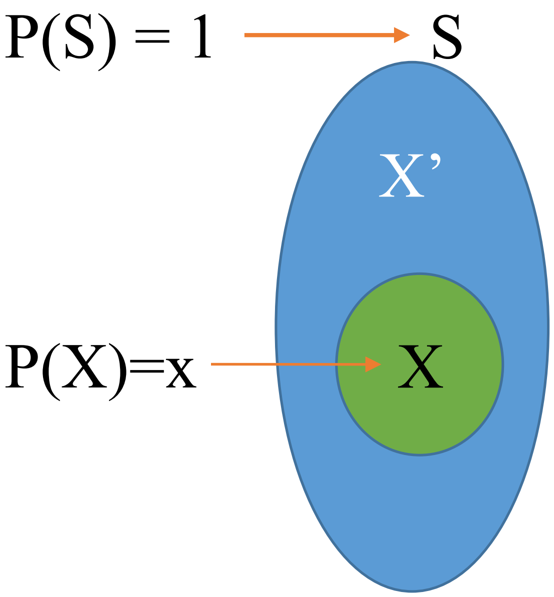
$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$

- Cuál es la probabilidad de que un evento X ocurra con certeza? p(X) = 1.
- Cuál es la probabilidad de que un evento X no ocurra?

  p(X) = 0.
- Si p(X) = x, cuánto vale p(E')?
- Como X' = S – X →

  p(E')= p(S) – p(X) =

  1 – x



Observaciones

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\#\text{ maneras en las que X puede ocurrir}}{\#\text{ total de posibles resultados}}$$

- Cuál es la probabilidad de sacar al menos una cara cuándo lanzamos tres monedas, si la probabilidad de no obtener ninguna cara es 1/8?

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Observaciones

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Cuál es la probabilidad de sacar al menos una cara cuándo lanzamos tres monedas, si la probabilidad de no obtener ninguna cara es 1/8?
  - X= es el conjunto que representa tener al menos una cara, por lo tanto, X' es el evento de no obtener ninguna cara.

Observaciones

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Cuál es la probabilidad de sacar al menos una cara cuándo lanzamos tres monedas, si la probabilidad de no obtener ninguna cara es 1/8?
  - X= es el conjunto que representa tener al menos una cara, por lo tanto, X' es el evento de no obtener ninguna cara.
  - p(E') = 1/8, → p(X)= 1- 1/8 = **7/8** = 0.875

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Ejercicio

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Se toman 5 canicas de una bolsa con 7 canicas verdes y 4 rojas. Encuentra la probabilidad de que 3 sean verdes y 2 rojas.
- Solución.

Ejercicio

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\#\text{ maneras en las que X puede ocurrir}}{\#\text{ total de posibles resultados}}$$

- Se toman 5 canicas de una bolsa de 7 canicas verdes y 4 rojas. Encuentra la probabilidad de que 3 sean verdes y 2 rojas.
- Solución.
  - Se requiere de |X| = maneras en las que podemos tener 3 canicas verdes y 2 rojas:
    - 3 canicas verdes pueden elegirse en C(7,3) maneras, y dos rojas en C(4,2) maneras, por el principio de multiplicación, el evento X ocurren en C(7,3)*C(4,2) maneras.
  - Se requiere de |S| = posibles maneras de elegir 5 canicas de las 7 + 4 = 11 canicas de la bolsa.
    - Sacar 5 de ellas se haría en C(11,5) maneras → |S| = C(11,5)
  - $p(X) = \dfrac{C(7,3)*C(4,2)}{C(11,5)} = \dfrac{7*6*5/3! \ * \ 4*3/2!}{11*10*9*8*7/5!} = \dfrac{35 * 6}{462} = \dfrac{210/42}{462/45} = \dfrac{5}{11}$

Definición modificada de probabilidad de X

Sea $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ un conjunto de valores no necesariamente del mismo peso.

Sea $p(a_i)$ la probabilidad de obtener el valor a_i → la probabilidad de X se define como $\mathbf{p(X)=\sum_{i=1}^{n} p(a_i) = 1}$, i.e., es la suma de todas las probabilidades de cada valor en X.

Ejercicio.

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Supongamos que la probabilidad de obtener un primo es el doble que de obtener un no-primo, cuando se lanza un dado. Encuentra la probabilidad de obtener un número impar cuando se lanza el dado.
- Solución:

Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio.

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Supongamos que la probabilidad de obtener un primo es el doble que de obtener un no-primo, cuando se lanza un dado. Encuentra la probabilidad de obtener un número impar cuando se lanza el dado (1 no se considera primo).
- Solución:
  - Hay 6 posibles salidas S={1,2,…,6}, de los cuales los primos son X={2,3,5}.
  - Se tiene que p(primo) = 2p(noprimo).
  - Cuántos primos hay en el grupo? 3
  - Cuántos no primos hay? 3, Entonces:
  - 3p(primo) + 3p(noprimo) =1
  - 3*2p(noprimo) + 3p(noprimo) = 1
  - 6p(noprimo) + 3p(noprimo) = 1 → 9p(noprimo) = 1 → p(noprimo) = 1/9 → p(primo)=2*1/9 = 2/9.
  - p(impar) = p(1) + p(3) + p(5) = 1/9 + 2/9 + 2/9 = 5/9

Mildreth Alcaraz, ITESO

Eventos mutuamente excluyentes

- Dos subconjuntos de valores de 2 variables discretas A y B del espacio de muestreo (S) son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \varnothing$, i.e., no existen valores en ambos conjuntos simultáneamente.

  - e.g., sacar una reina roja y un rey negro de un juego de cartas.

- *Nota: La probabilidad de los eventos es siempre la misma para cada uno de ellos, a menos que se especifique lo contrario.*

Teorema del principio de adición en probabilidad

- Si dos subconjuntos de valores de 2 variables discretas A y B mutuamente excluyentes de un espacio de muestro (S) finito:
  - $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Mildreth Alcaraz, ITESO

Teorema del principio de inclusión-exclusión en probabilidad

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

- Si dos subconjuntos de valores de 2 variables discretas A y B del espacio de muestreo (S), la probabilidad de que al menos uno de ellos ocurra está dado por:
  - $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Se extiende directamente a un número finito de eventos de S

Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio

- Un estudio acerca de las preferencias de 50 jóvenes en relación a la limonada y naranjada mostró que a 25 les gusta la limonada, a 30 les gusta la naranjada, a 10 les gustan las dos. Se selecciona a un joven del grupo. Encuentra la probabilidad de que no le guste ni la limonada ni la naranjada.
- Solución:

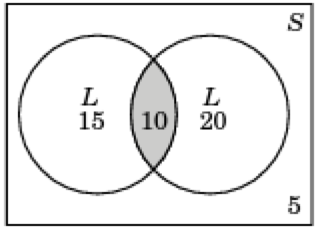
Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio

$$p(X) = \frac{|X|}{|S|} = \frac{\text{\# maneras en las que X puede ocurrir}}{\text{\# total de posibles resultados}}$$

- Un estudio acerca de las preferencias de 50 jóvenes en relación a la limonada y naranjada mostró que a 25 les gusta la limonada, a 30 les gusta la naranjada, a 10 les gustan las dos. Se selecciona a un joven del grupo. Encuentra la probabilidad de que no le guste ni la limonada ni la naranjada.
- Solución:
  - L = les gusta la limonada, N = les gusta la naranjada
  - $p(L) = 25/50$, $p(N) = 30/50$, $p(L \cap N) = 10/50$
  - $p(L \cup N) = p(L) + p(N) - p(L \cap N) = 25/50 + 30/50 - 10/50 = 45/50$
  - $p(L \cup N)' = 1 - 45/50 = 5/50 = 1/10$

  $= 0.1$



Mildreth Alcaraz, ITESO

Probabilidad Condicional / Teorema de la multiplicación

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- La probabilidad de que un valor de A ocurra, sabiendo que un valor de B($\neq\emptyset$) ya ha ocurrido, es la probabilidad condicional de A, dado B → **$p(A|B)$.**

- Teo 1: Probabilidad Condicional. Sea A y B cualquiera de dos variables discretas de un espacio de muestreo finito S con p(B) ≠0. Entonces,
  - $$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

- Teo 2: Multiplicación para probabilidad condicional. Sean A y B dos eventos cualquiera de un espacio de muestreo. Entonces la probabilidad de que ambos ocurran está dado por **$p(A \cap B) = p(A)\, p(B|A)$.**

Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio

- Un estudio realizado recientemente en un área rural muestra que la probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea alérgica al polen de roble es de 7/24, y la probabilidad de que sea alérgica al polen del roble y al abedul es de 3/20. Encuentra la probabilidad de que esta persona sea alérgica al polen del abedul, dado que es alérgica al del roble.

Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio

- Un estudio realizado recientemente en un área rural muestra que la probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea alérgica al polen de roble es de 7/24, y la probabilidad de que sea alérgica al polen del roble y al abedul es de 3/20. Encuentra la probabilidad de que esta persona sea alérgica al polen del abedul, dado que es alérgica al del roble.
  - Solución: A = alérgico al abedul, R = alérgico al roble →
  - $p(R) = 7/24$, $p(A \cap R) = 3/20$.
  - $P(A|R) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{3/20}{7/24} = \frac{18}{35}$

Variables Dependientes e Independientes

- Dos variables aleatorias discretas A y B son dependientes si la ocurrencia de una variable afecta la probabilidad de la ocurrencia de otra variable (probabilidad condicional), de otro modo, es independiente.

- Si A y B son variables independientes,
  - $p(A|B) = p(A)$,
  - $p(B|A) = p(B)$,
  - $p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$.

Mildreth Alcaraz, ITESO

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Valor Esperado

- Si $X=a_1,a_2,\ldots,a_n$ son los valores numéricos de distintas salidas de una Variable Aleatoria Discreta, y $p_1,p_2,\ldots,p_n$ son las probabilidades de las correspondientes salidas, el valor esperado E de la variable X está dado por:
  - $E = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n$

Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio – valor esperado

- Una moneda se lanza 4 veces. Cuántas veces se espera que caiga caras?
  - Todas las combinaciones?
  - De obtener 0 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 1 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 2 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 3 caras de los 4 lanzamientos?
  - De obtener 4 caras de los 4 lanzamientos?
  - Cuál es $P(a_i)$?
  - Cuál es E?

Mildreth Alcaraz, ITESO

Ejercicio – valor esperado

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

- Una moneda se lanza 4 veces. Cuántas veces se espera que caiga caras?
  - $2^4=16$ → todas las combinaciones posibles
  - 0 caras → C(4,0)= 1
  - 1 cara → C(4,1)=4/1! = 4
  - 2 caras → C(4,2)=4*3/2!=12/2=6
  - 3 caras → C(4,3) = 4/1!=4
  - 4 caras → C(4,4) = 1
  - $p(a_i)$ para cada valor de salida→ p(0caras)= 1/16, p(1caras)=4/16, p(2caras) = 6/16, p(3caras)= 4/16, p(4caras) = 1/16 →
  - Valor Esperado (cuántas veces se espera tener caras?)
    - 0 * 1/16 + 1* 4/16 + 2 * 6/16 + 3 * 4/16 + 4 * 1/16 = 2

Mildreth Alcaraz, ITESO

Juegos de Números

- Haces una apuesta de 1 peso a uno de los números del 000 al 999. Si tu número es el ganador obtienes \$700, de otro modo, pierdes tu peso.
- Solución:

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Juegos de Números

- Haces una apuesta de 1 peso a uno de los números del 000 al 999. Si tu número es el ganador obtienes \$700, de otro modo, pierdes tu peso.
- Solución:
  - p(ganar) = 1/1000, p(perder) = 999/1000 →
  - E = \$699 * 1/1000 + (-\$1) * 999/1000 = -\$0.30
- Este valor de E, significa que si juegas muchas veces este mismo juego, se espera que pierdas en promedio 30 centavos por juego.

Mildreth Alcaraz, ITESO

- Este concepto es muy importante en el análisis de la complejidad del caso promedio.

Resumen de la clase

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Combinaciones con repeticiones (Selecciones)
  - Teorema para ecuaciones
  - Combinatoria en ciclos FOR
- Introducción a la Probabilidad Discreta
  - Espacio de Muestreo (S) y Conjunto de Eventos (X)
  - Probabilidad de un Conjunto de Eventos P(X):
    - Mismo peso de ocurrencia (=probabilidad)
    - Probabilidades diferentes
  - Teoremas de probabilidad y principios del conteo:
    - Teorema del principio de multiplicación en probabilidad
    - Teorema del principio de inclusión-exclusión en probabilidad
    - Teorema del principio de adición en probabilidad
  - Probabilidad condicional
    - Variables dependientes e independientes
  - Valor esperado