MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Matemáticas Avanzadas para Computación

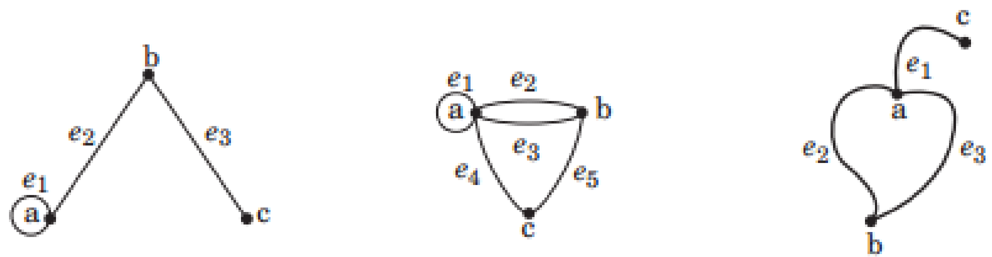
Tema 1. Introducción

Maestría en Sistemas Computacionales
Dra. Mildreth Alcaraz, mildreth@iteso.mx
Tel. 3669-3434 xt 3975, Oficina T - 316

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Grafo simple - definiciones

- *Loop* (autolazo) – una arista {a,a}.
- *Aristas paralelas* – {{a,b}:2} – tienen los mismos vértices.
- Un **grafo simple**, no tiene autolazos ni aristas paralelas.



(a) (b) (c)

- Ninguno de estos, es un grafo simple.

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

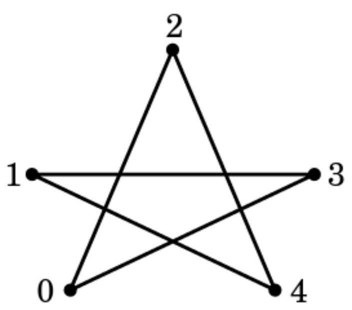
Universidad Jesuita de Guadalajara

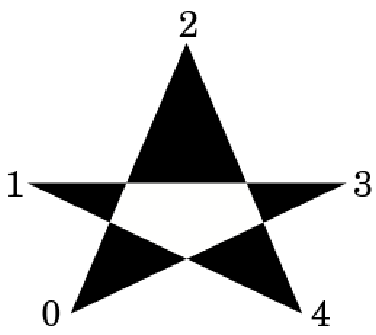
Ejemplo

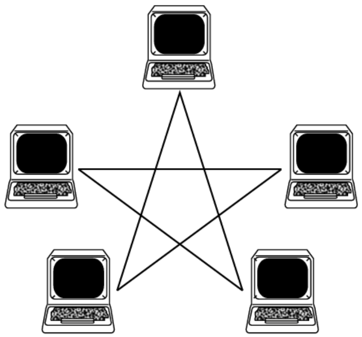
- ***Pentagrama.***
  - Selecciona V={0,1,…,4} conjunto de enteros módulo 5.
  - Marca los vértices a intervalos iguales en un círculo.
  - Crea aristas entre los vértices x, y ssi $y \equiv (x + 2) mod 5$

Ejemplo

- ***Pentagrama.***
  - Selecciona V={0,1,…,4} conjunto de enteros módulo 5.
  - Marca los vértices a intervalos iguales en un círculo.
  - Crea aristas entre los vértices x, y ssi $y \equiv (x\ +\ 2) mod 5$.



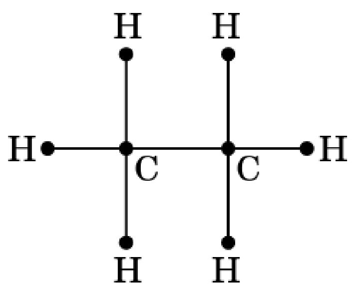




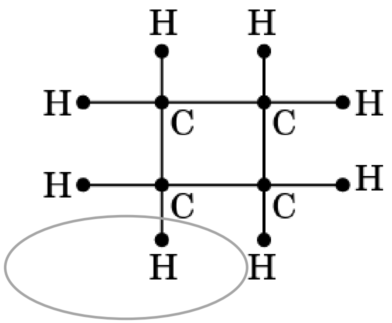
- Sistema de comunicaciones punto a punto.

Ejemplo

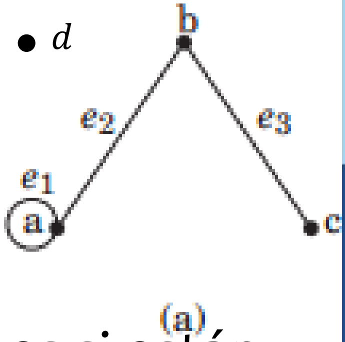
- Modelo de hidrocarburos – facilitando su estudio.
- Etanol, C_2H_6
- Ciclobutanol, C_4H_8



- No necesario estar siempre conectado



Adyacencia e Incidencia



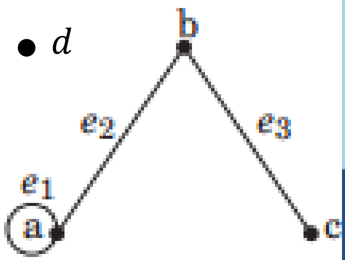
- Dos vértices u,w, en un grafo, son adyacentes si están conectados por una arista.
  - En (a), b es adyacente a c.

- Si hay un autolazo en v,v, entonces v es adyacente a sí mismo.
  - En (a), a es adyacente a sí mismo.

- Un vértice aislado no es adyacente a ningún otro.
  - En (a), d es un vértice aislado.

- Una arista es incidente con/a un vértice v, si v es un punto final de la arista.
  - En (a), e_3 es una arista incidente a b, y a c.

Adyacencia e Incidencia



(a)

- Dos vértices u,w, en un grafo, son adyacentes si están conectados por una arista.
  - En (a), b es adyacente a c.
- Si hay un autolazo en v,v, entonces v es adyacente a sí mismo.
  - En (a), a es adyacente a sí mismo.
- Un vértice aislado no es adyacente a ningún otro.
  - En (a), d es un vértice aislado.
- Una arista es incidente con/a un vértice v, si v es un punto final de la arista.
  - En (a), e_3 es una arista incidente a b, y a c.

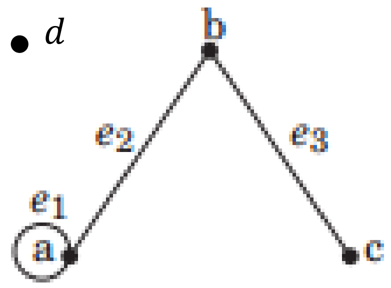
*Adyacencia es entre vértices
*Incidencia es de una artista a un vértice

Grado de un Vértice

- El grado de un vértice v es un grafo es el número de aristas que **inciden** en v, denotado como deg(v).

- Utilizando esta definición, como se define que v es aislado?
  - deg(v) = 0

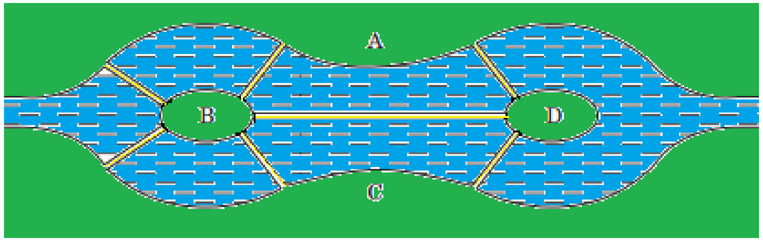
- Un Autolazo v → deg(v) = 2

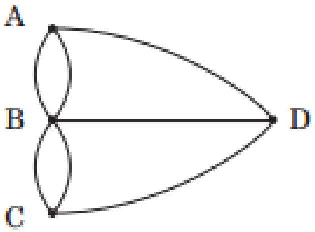


(a)

Matriz de Adyacencia

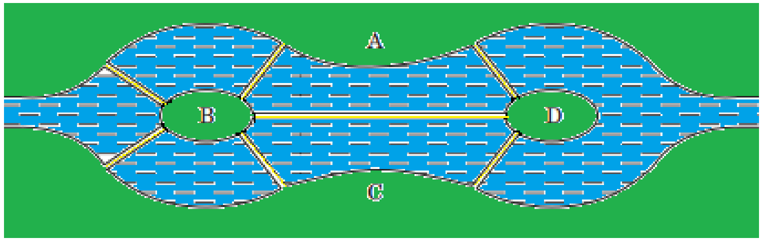
- La matriz de adyacencia de un grafo con n vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ es una matrix $A = (a_{ij})$, donde a_{ij}=número de aristas desde v_i a v_j.
- Si grafo no dirigido → $a_{ij} = a_{ji}$ → matriz A es simétrica.
- Si el grafo es simple → A es una matriz booleana.

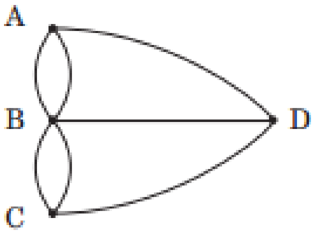




Matriz de Adyacencia

- La matriz de adyacencia de un grafo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una matrix $A = (a_{ij})$, donde a_{ij}=número de aristas desde v_i a v_j.
- Si grafo no dirigido → $a_{ij} = a_{ji}$ → matriz A es simétrica.
- Si el grafo es simple → A es una matriz booleana.

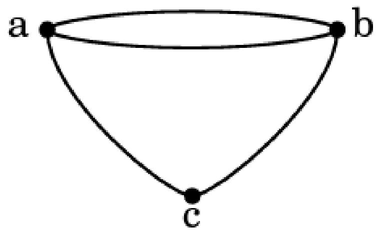




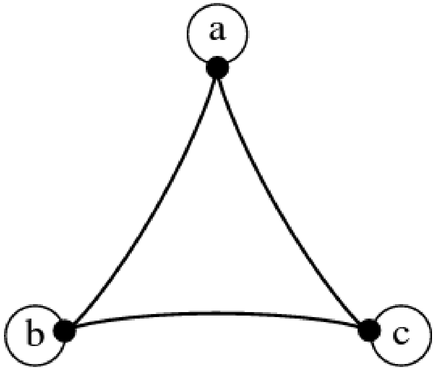
$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{row sum} \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \deg(B) \\ \\ \\ \end{array}$$

Ejercicios

1. Determinar si cada grafo es simple. Justifica la respuesta.
2. Determina V, E para ambos grafos.
3. Determina el grado de cada vértice.
4. Encuentra la matriz de adyacencia de c/u.



(a)



(b)

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Ejercicios

- Dibuja los grafos con la matriz de adyacencia dada.

- A)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- B)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mildreth Alcaraz, ITESO

Teorema 1.

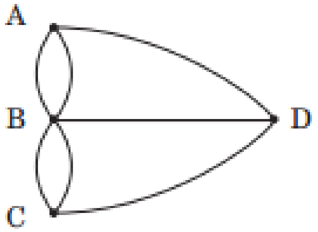
- Sea e el número de aristas de un grafo G con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

  Entonces $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2e$

- Prueba:
  - Cada arista (no autolazo) es incidente con exactamente dos vértices distintos.
  - Por otro lado, cada autolazo es incidente con el mismo vértice dos veces.
  - De este modo, cada arista contribuye en dos a la suma de grados de los vértices
  - Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2e$.

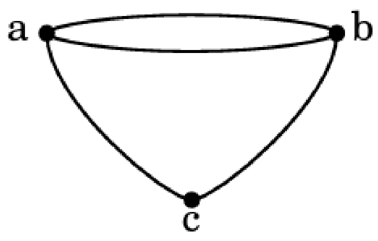
Teorema 2.

- El número de vértices de grado impar en un grafo, es un entero par.

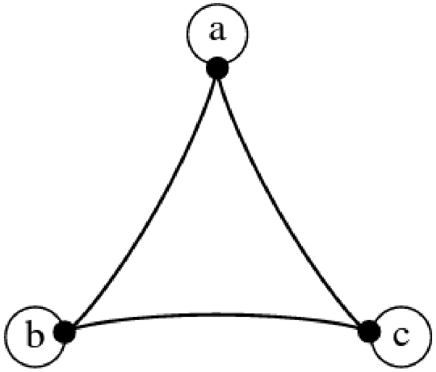


Ejercicios

1. Verifica el Teorema 1 para cada grafo (a) y (b).
2. Verifica el Teorema 2 para (a).
3. Encuentra el número de aristas de un grafo que tiene:
    1. exactamente 3 vértices con grado 1, 3 y 2.
    2. exactamente 5 vértices con grados 1, 1, 1, 1, y 4.



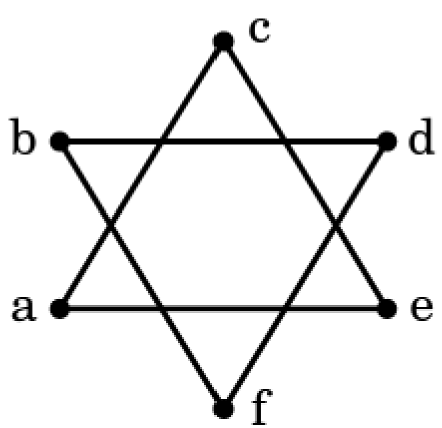
(a)



(b)

Subgrafos de un Grafo

- Un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ donde $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$.

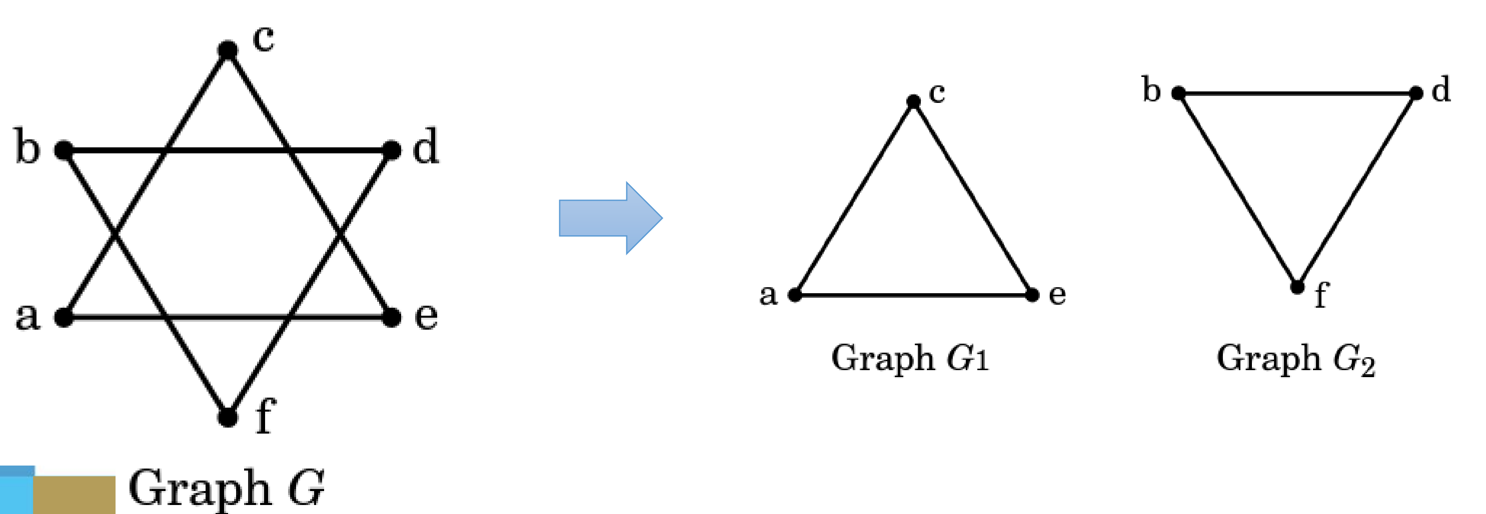


Graph G

Mildreth Alcaraz, ITESO

Subgrafos de un Grafo

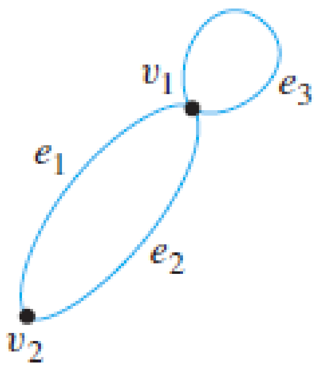
- Un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ donde $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$.



Mildreth Alcaraz, ITESO

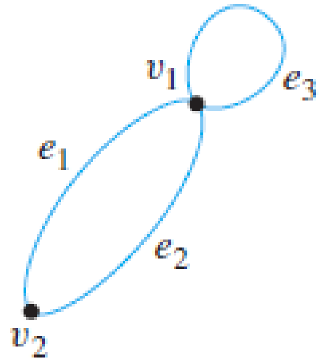
Ejercicios

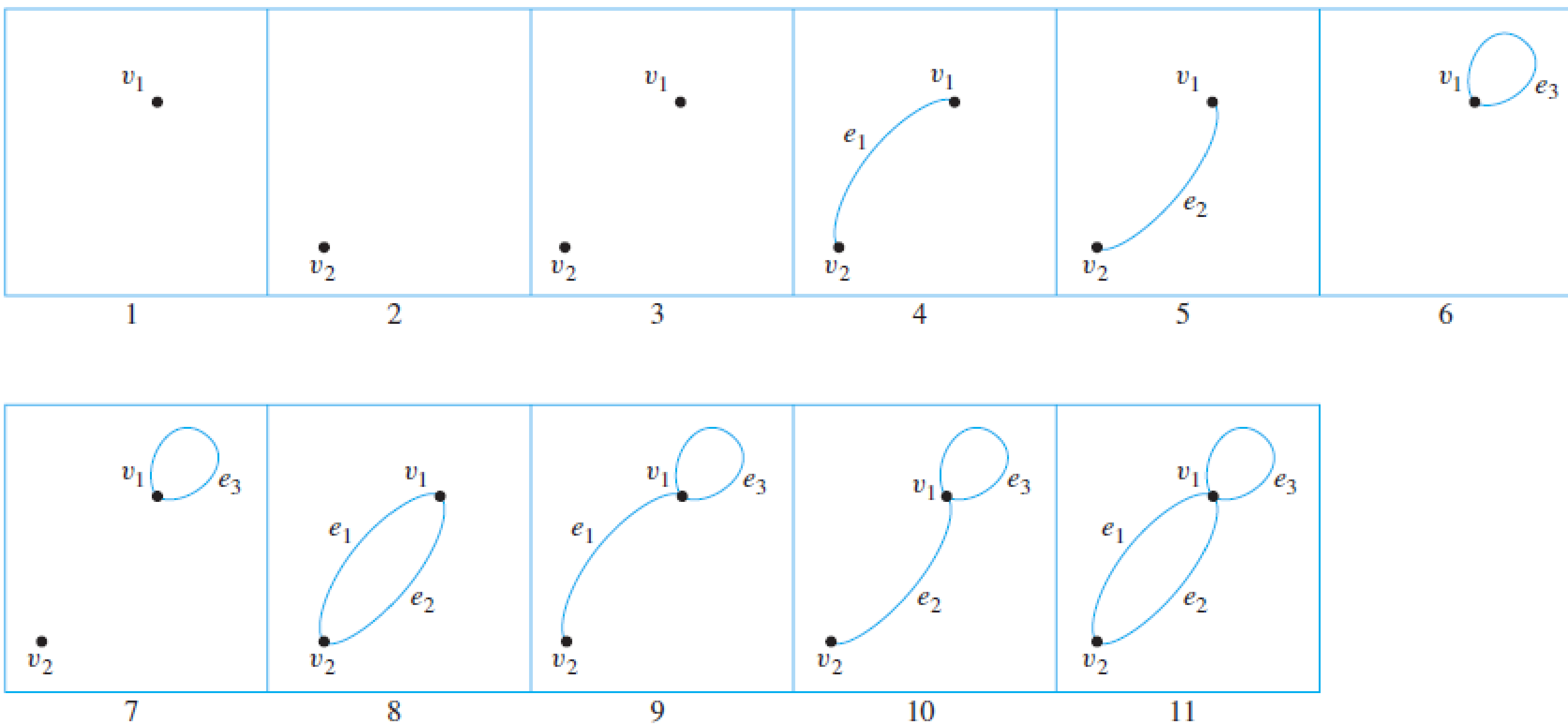
1. Encuentra los subgrafos



Ejercicios

1. Encuentra los subgrafos





MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Grafos Completos

- Un grafo simple con una arista entre dos vértices distintos es un GRAFO COMPLETO.

- Denotado como K_n para n vértices.

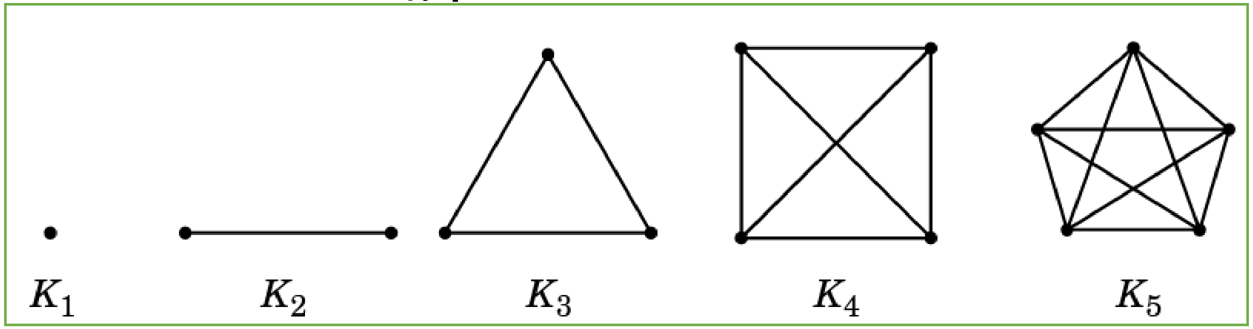
- Cuántas aristas tiene un K_n?
- Cuál es el grado de cada vértice en un K_n?

Mildreth Alcaraz, ITESO

Grafos Completos

- Un grafo simple con una arista entre dos vértices distintos es un GRAFO COMPLETO.

- Denotado como K_n para n vértices.



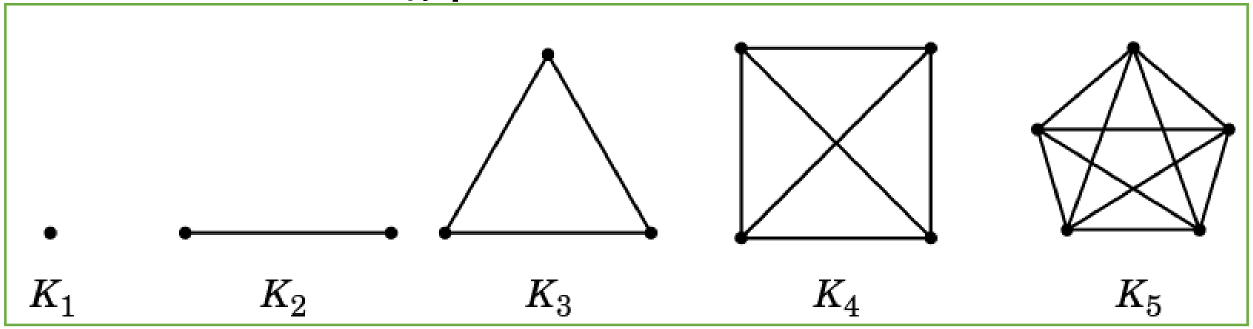
- Cuántas aristas tiene un K_n?
- Cuál es el grado de cada vértice en un K_n?

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Grafos Completos

- Un grafo simple con una arista entre dos vértices distintos es un GRAFO COMPLETO.
- Denotado como K_n para n vértices.

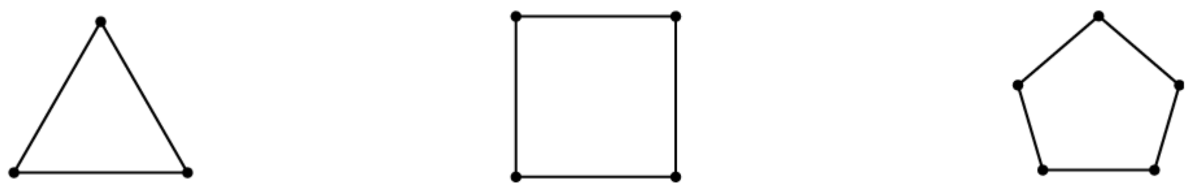


- Cuántas aristas tiene un K_n? C(n,2)
- Cuál es el grado de cada vértice en un K_n? n-1

Mildreth Alcaraz, ITESO

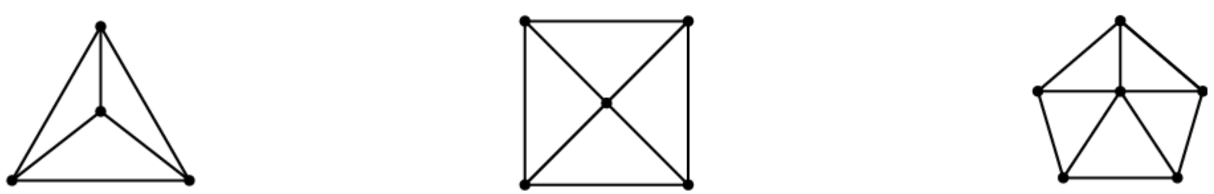
Grafos Ciclo

- Un grafo ciclo, o simplemente ciclo, C_n de longitud n (≥ 3) consiste de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y aristas $\{v_i, v_{i+1}\}$, donde $1 \leq i \leq n$ y $v_{n+1} = v_1$.



C_3 C_4 C_5

- Un grafo rueda, o simplemente rueda, W_n, $(n \geq 3)$ se forma de C_n agregando un vértice dentro, y conectándolo a cada vértice en C_n.



W_3 W_4 W_5

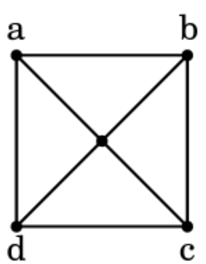
Mildreth Alcaraz, ITESO

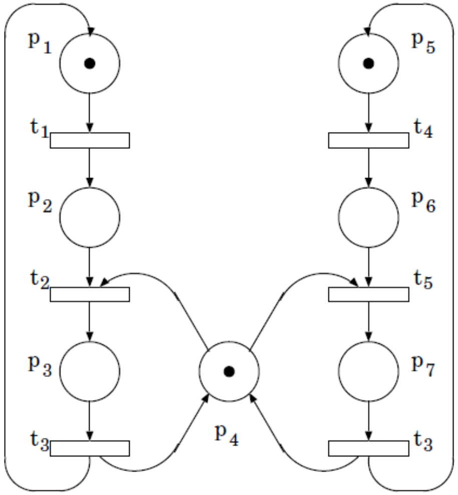
Grafo Bipartito

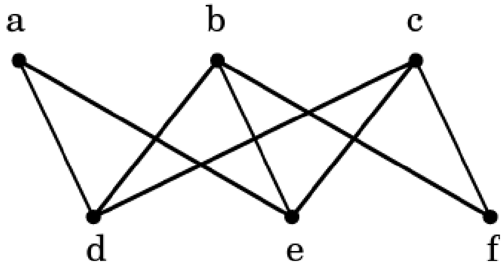
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Si el conjunto de vértices V de un grafo simple $G = (V, E)$ puede ser dividido en dos conjuntos disjuntos no vacíos V_1, V_2, de tal manera que cada arista en G incide en un vértice en V_1 y un vértice en V_2, entonces G es **bipartito**.
- Cuál es bipartito?



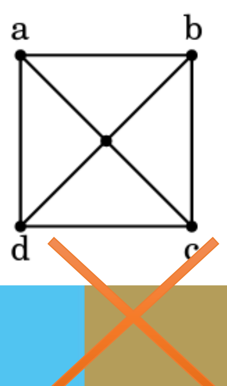


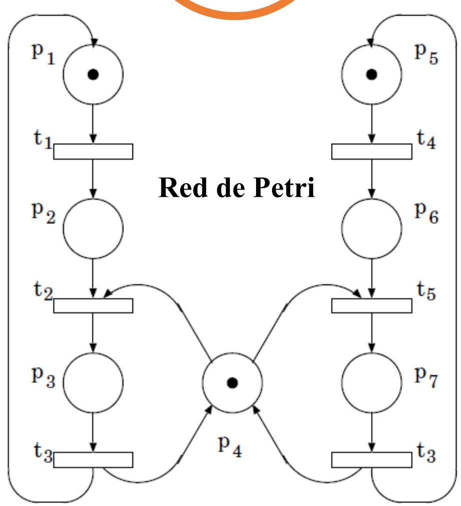


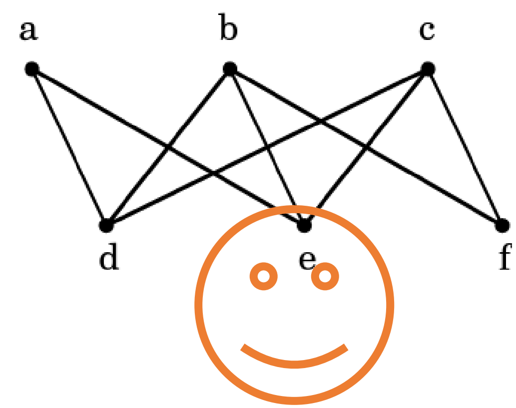
Mildreth Alcaraz, ITESO

Grafo Bipartito

- Si el conjunto de vértices V de un grafo simple $G = (V, E)$ puede ser dividido en dos conjuntos disjuntos no vacíos V_1, V_2, de tal manera que cada arista en G incide en un vértice en V_1 y un vértice en V_2, entonces G es **bipartito**.
- Cuál es bipartito?







Mildreth Alcaraz, ITESO

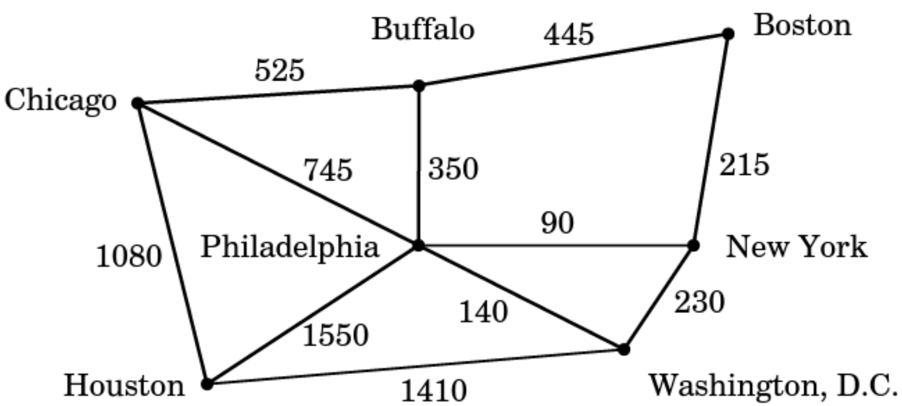
Grafos con peso (ponderado)

- Un grafo simple G en el cual a cada arista *e* se le asigna un número real no negativo *w*, se llama **grafo con peso**.
- $\boldsymbol{w}$ es el peso de la arista $\boldsymbol{e}$.
- Entonces, G es una 3-tupla (tripleta) ordenada

$$G = (V, E, f), \text{ donde } f: E \rightarrow R^{+} \cup \{0\}.$$

Ejemplo

- En este grafo, los pesos representan millas entre las ciudades (vértices).
- También se puede representar tiempo, tarifas, costos de transportación, etc.
- Cada entrada a_{ij} de la matriz de adyacencia A de un grafo con peso tiene el peso de la arista {i,j} → Matriz de pesos.

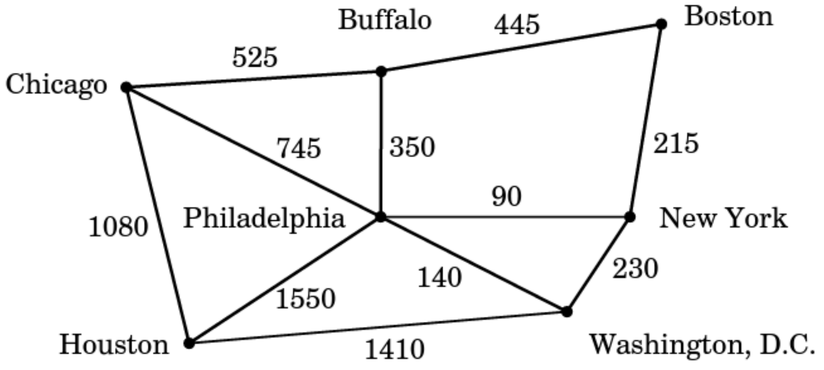


Grafos con peso (ponderado)

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Un grafo simple G en el cual a cada arista e se le asigna un número real no negativo w, se llama **grafo con peso**.
- $\boldsymbol{w}$ es el peso de la arista $\boldsymbol{e}$.
- Entonces, G es una 3-tupla (tripleta) ordenada $G = (V, E, f)$, donde $f: E \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$.
- EJERCICIO: Obtener la matriz de pesos

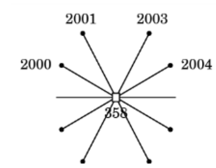


Grafos y las telecomunicaciones

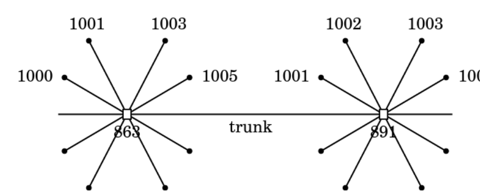
- Supongamos que hay n teléfonos en una ciudad (1 teléfono por casa), y existe una línea dedicada entre dos teléfonos.
  - Este arreglo de comunicaciones se llama red (network).
  - Puede ser modelada por ???
- Esta es la mejor alternativa? Cuál se utiliza en realidad?
  - Arreglo llamado topología en estrella.
  - Modelada por ???
- Cuántas líneas de cable se requieren para la topología de red – punto a punto, y cuántas para la topología en estrella?

Grafos y las telecomunicaciones

- Supongamos que hay n teléfonos en una ciudad (1 teléfono por casa), y existe una línea dedicada entre dos teléfonos.
  - Este arreglo de comunicaciones se llama red (network).
  - Puede ser modelada por ??? K_n
- Esta es la mejor alternativa? Cuál se utiliza en realidad?
  - Arreglo llamado topología en estrella.
  - Modelada por ??? $K_{1,n}$

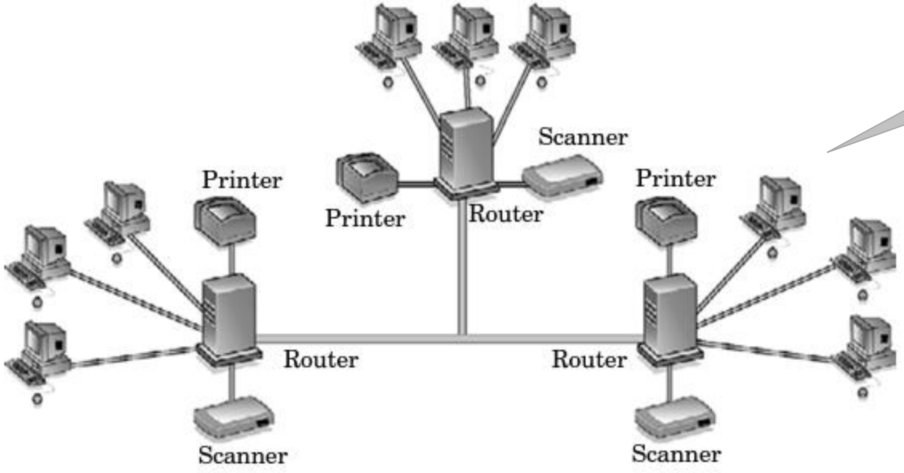


- Cuántas líneas de cable se requieren para la topología de red – punto a punto, y cuántas para la topología en estrella?
  - $C(n, 2)$ para punto a punto
  - n para la estrella.

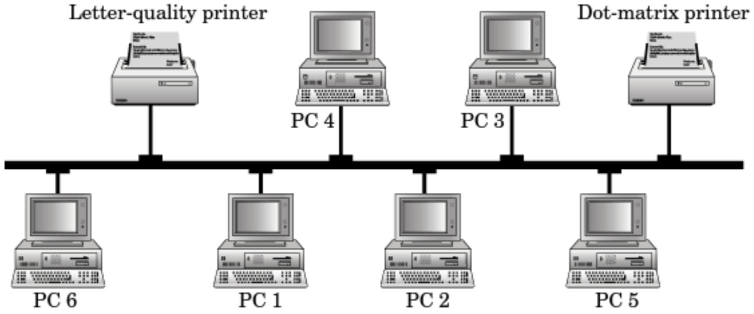


Ejemplos de LANs

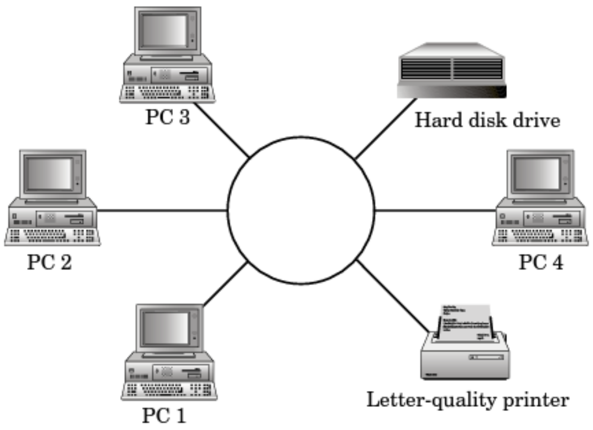
Star Topology
$simple \rightarrow K_{1,n}$



Bus Topology
Línea: n-1

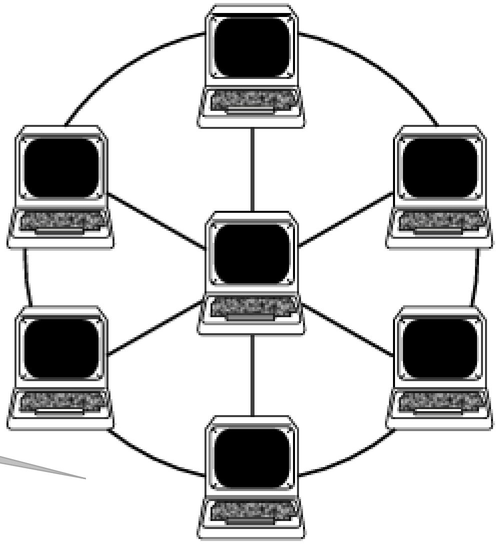


Ejemplos de LANs



Ring Topology
C_n

Star-Ring Topology
W_n



Juego de la teoría de grafos "SIM"

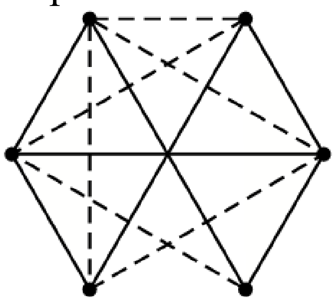
- El nombre → su inventor Gustavus J. Simmons de Sandia Corporation en 1969.
- Se juega con el grafo K_6 y dos jugadores (R y B).
- R tiene un color Rojo, y B un color Azul.
- Cada uno de los jugadores colorea una arista del grafo de manera alternada.
- El primero en completar un triángulo (mismo color) pierde el juego.

Juego de la teoría de grafos "SIM"

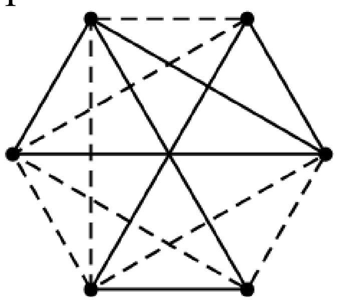
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- El nombre → su inventor Gustavus J. Simmons de Sandia Corporation en 1969.
- Se juega con el grafo K_6 y dos jugadores (R y B).
- R tiene un color Rojo, y B un color Azul.
- Cada uno de los jugadores colorea una arista del grafo de manera alternada.
- El primero en completar un triángulo (mismo color) pierde el juego.

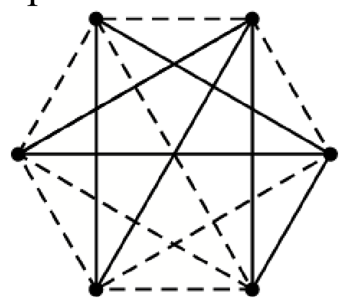
B pierde en 13



R pierde en 14

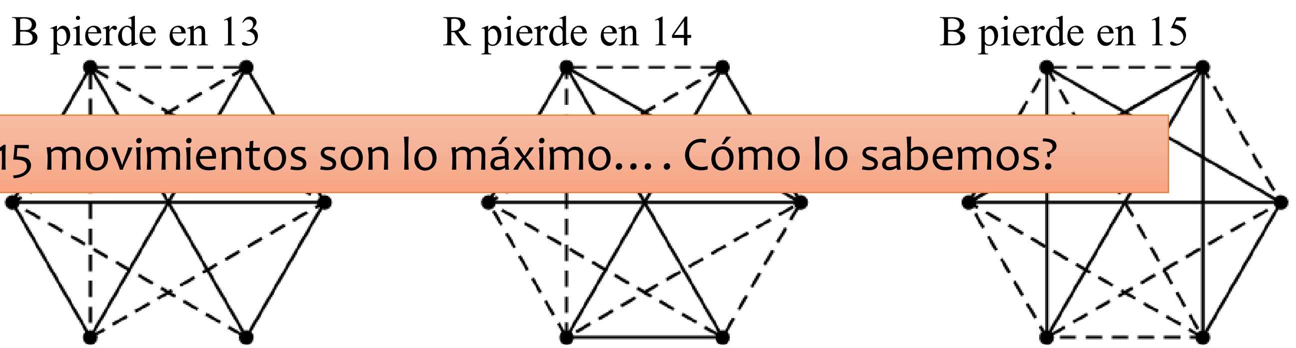


B pierde en 15



Juego de la teoría de grafos “SIM”

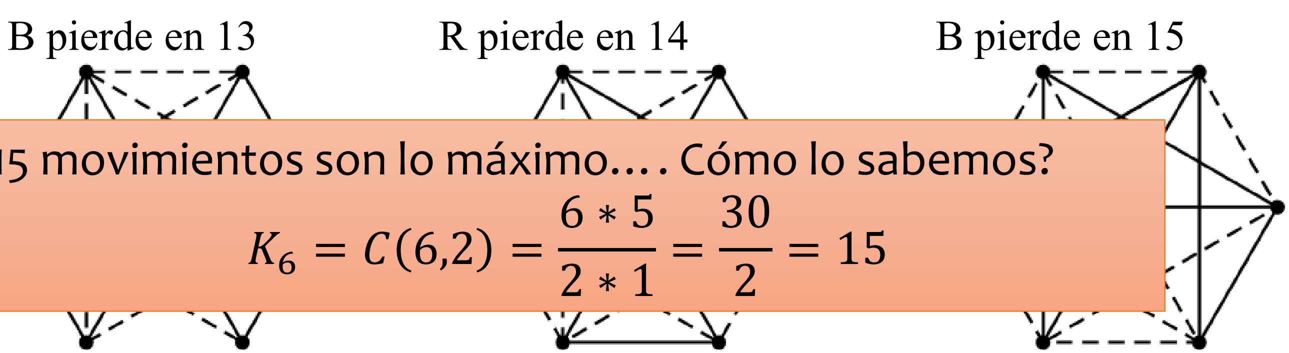
- El nombre → su inventor Gustavus J. Simmons de Sandia Corporation en 1969.
- Se juega con el grafo K_6 y dos jugadores (R y B).
- R tiene un color Rojo, y B un color Azul.
- Cada uno de los jugadores colorea una arista del grafo de manera alternada.
- El primero en completar un triángulo (mismo color) pierde el juego.



15 movimientos son lo máximo…. Cómo lo sabemos?

Juego de la teoría de grafos "SIM"

- El nombre → su inventor Gustavus J. Simmons de Sandia Corporation en 1969.
- Se juega con el grafo K_6 y dos jugadores (R y B).
- R tiene un color Rojo, y B un color Azul.
- Cada uno de los jugadores colorea una arista del grafo de manera alternada.
- El primero en completar un triángulo (mismo color) pierde el juego.



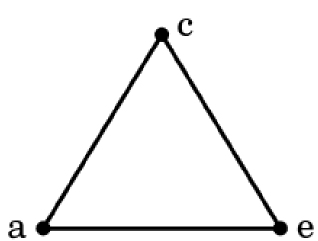
15 movimientos son lo máximo…. Cómo lo sabemos?

$$K_6 = C(6,2) = \frac{6 * 5}{2 * 1} = \frac{30}{2} = 15$$

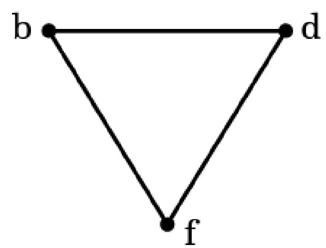
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Unión de grafos simples

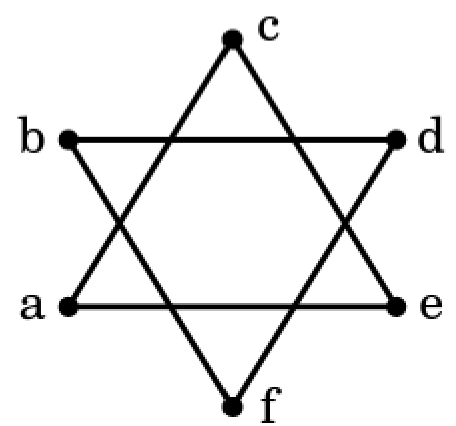
- La unión de dos grafos simples, $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple $G = (V, E)$, donde $V = V_1 \cup V_2$, y $E = E_1 \cup E_2$, y es denotado por $G_1 \cup G_2$.



Graph G_1



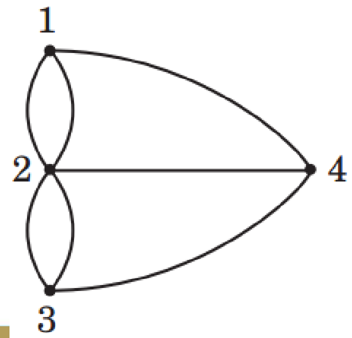
Graph G_2

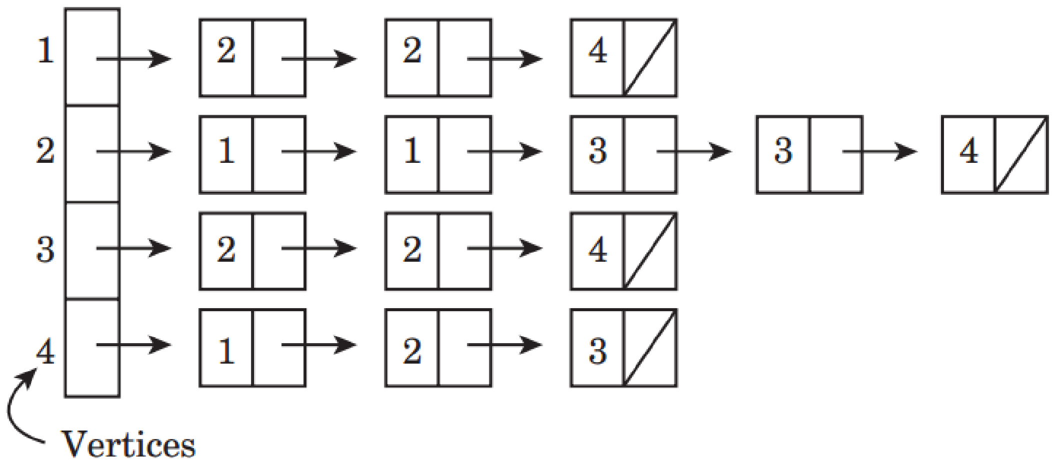


Graph G

Implementación de un Grafo

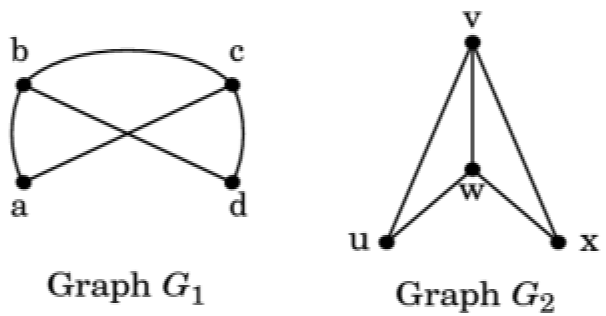
- Las relaciones, digrafos y grafos, se pueden representar por arreglos y listas enlazadas.
- Un grafo con n vértices se puede representar por su matriz de adyacencia → por cuestiones de optimización → lista enlazada → LISTA DE ADYACENCIA de un grafo





Grafos Isomorfos

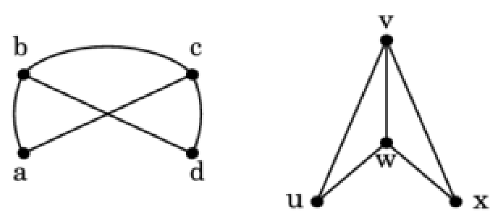
- Dos grafos se pueden ver distintos, sin embargo, pueden tener las mismas propiedades.



- G_1 y G_2 tienen las mismas propiedades:
  - # de vértices y aristas.
  - 2 vértices de grado 2, 2 de 3.
  - Además, podríamos dibujar a uno igual que al otro.

Grafos Isomorfos

- Dos grafos simples, $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f = V_1 \rightarrow V_2$ tal que {a,b} es una arista de E_1 ssi $\{f(a), f(b)\}$ es una arista en E_2, para cualquier dos elementos a y b en V_1. La función f es un **isomorfismo** entre G_1 y G_2.

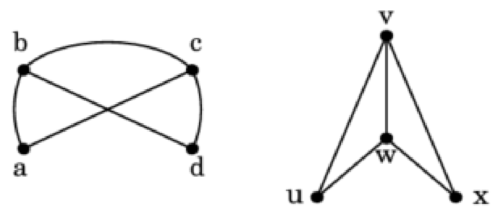


Graph G_1 Graph G_2

Edge $\{x, y\}$ in E_1	$\{f(x), f(y)\}$	Is $\{f(x), f(y)\}$ an edge in E_2?

Grafos Isomorfos

- Dos grafos simples, $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f = V_1 \rightarrow V_2$ tal que {a,b} es una arista de E_1 ssi $\{f(a), f(b)\}$ es una arista en E_2, para cualquier dos elementos a y b en V_1. La función f es un **isomorfismo** entre G_1 y G_2.



Graph G_1 Graph G_2

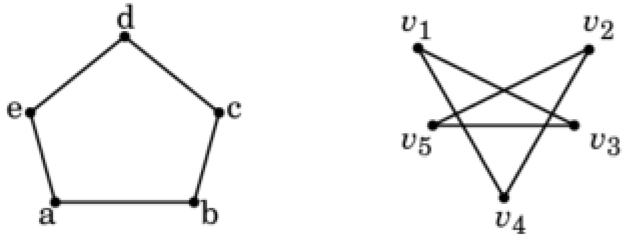
Nótese, $|V_1| = |V_2|$
y $|E_1| = |E_2|$

Edge $\{x, y\}$ in E_1	**$\{f(x), f(y)\}$**	**Is $\{f(x), f(y)\}$ an edge in E_2?**
{a, b}	$\{f(a), f(b)\} = \{u, v\}$	Yes
{a, c}	$\{f(a), f(c)\} = \{u, w\}$	Yes
{b, c}	$\{f(b), f(c)\} = \{v, w\}$	Yes
{b, d}	$\{f(b), f(d)\} = \{v, x\}$	Yes
{c, d}	$\{f(c), f(d)\} = \{w, x\}$	Yes

Ejercicio

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- G_1 y G_2 son isomorfos?

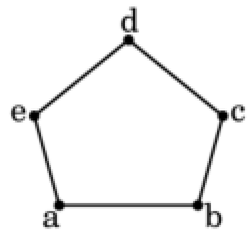


Pentagon G_1 Pentagon G_2

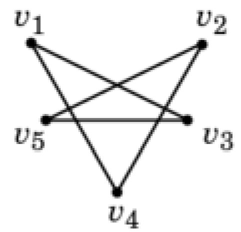
- $|V_1| = |V_2|$? $|E_1| = |E_2|$?
- Grados de los vértices son iguales?
- Existe la función f?

Ejercicio

- G_1 y G_2 son isomorfos?



Pentagon G_1



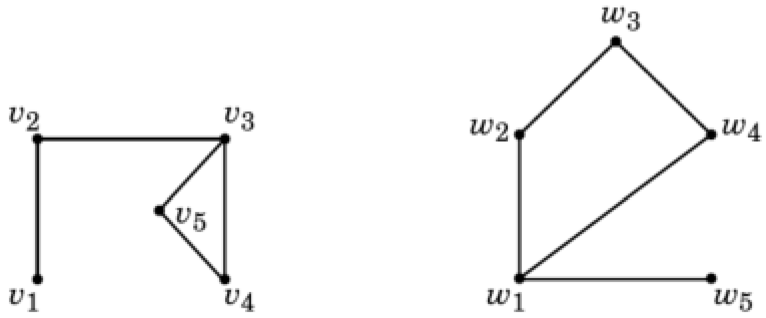
Pentagon G_2

- $|V_1| = |V_2|$? $|E_1| = |E_2|$?
- Grados de los vértices son iguales?
- Existe la función f?

Edge $\{x, y\}$ in E_1	**$\{f(x), f(y)\}$**	**Is $\{f(x), f(y)\}$ an edge in E_2?**
$\{a, b\}$	$\{f(a), f(b)\} = \{v_1, v_3\}$	Yes
$\{b, c\}$	$\{f(b), f(c)\} = \{v_3, v_5\}$	Yes
$\{c, d\}$	$\{f(c), f(d)\} = \{v_5, v_2\}$	Yes
$\{d, e\}$	$\{f(d), f(e)\} = \{v_2, v_4\}$	Yes
$\{e, a\}$	$\{f(e), f(a)\} = \{v_4, v_1\}$	Yes

Ejercicio

- $G_1 \ \ y \ \ G_2$ son isomorfos?

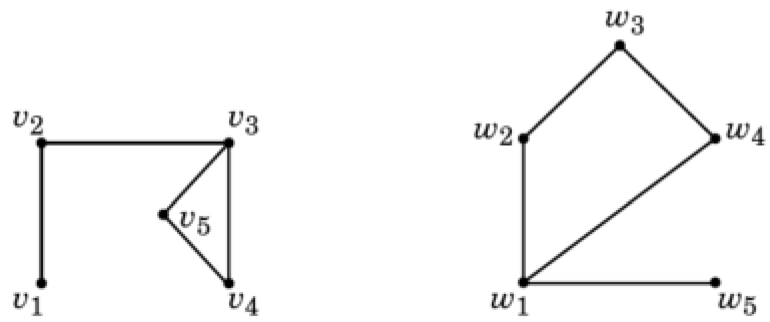


Graph G_1 Graph G_2

- $|V_1| = |V_2|? \ |E_1| = |E_2|?$
- Grados de los vértices son iguales?
- Existe la función f?

Ejercicio

- $G_1 \;\; y \;\; G_2$ son isomorfos?



Graph G_1 Graph G_2

- $|V_1| = |V_2|? \; |E_1| = |E_2|?$ SI
- Grados de los vértices son iguales? SI
- Existe la función f? NO

Si $\neg|V_1| = |V_2| \;\vee \neg|E_1| = |E_2|$ entonces No es Isomorfo
Lo contrario, no se cumple.

Caminos, ciclos y circuitos

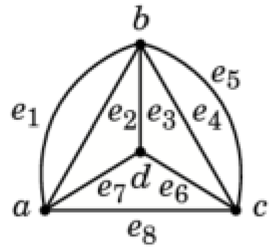
- Sean $v_0\ y\ v_n$ dos vértices en un grafo.
- Un **camino de longitud *n*** desde $v_0\ a\ v_n$, es una secuencia de vértices v_i y aristas e_i de la forma $v_0 - e_1 - v_1 - e_2 - \cdots - e_n - v_n$
  - e_i es incidente a v_i y v_{i-1}, $1 \leq i \leq n$
- $v_0 e_1 v_1 e_2\ \cdots e_n v_n = e_1 e_2 \ldots e_n$ (si G es simple)

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

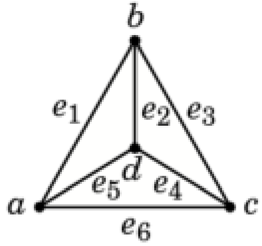
ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

Caminos, ciclos y circuitos

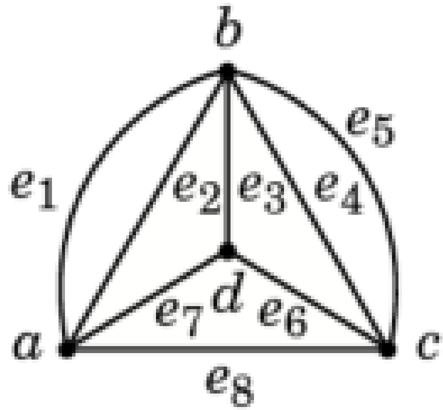
- $a - e1 - b - e4 - c - e5 - b - e3 - d$ es un camino de longitud 4 desde a hasta d.
- No es único.



- $a, b, c, d\ = a - b - c - d = abcd$



Conceptos Importantes



Term	Meaning	Example from Figure 8.43
Path	Sequence v_0-e_1-v_1-$\cdots$-e_n-v_n, where $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}, 1 \le i \le n$	a-e_7-d-e_6-c-e_4-b-e_5-c
Simple path	All vertices are distinct; endpoints could be the same	a-e_7-d-e_6-c-e_4-b
Closed path	Endpoints are the same	a-e_2-b-e_4-c-e_5-b-d-e_7-a
Open path	Endpoints are not the same	a-e_8-c-e_4-b-e_5-c
Cycle	Simple closed path	a-e_1-b-e_4-c-e_8-a
Circuit	Closed path; no repeated edges	a-e_1-b-e_4-c-e_3-b-e_5-d-e_7-a

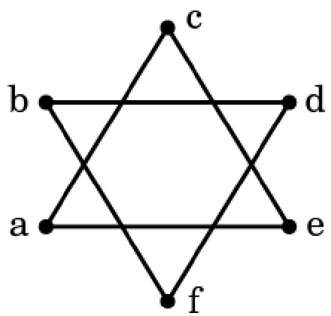
Grafo Conexo

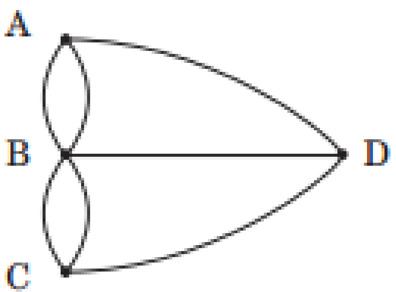
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Un grafo es **conexo** si existe un camino entre cada par de vértices distintos del grafo, de otro modo, es **no conexo.**

Son los siguientes grafos conexos?

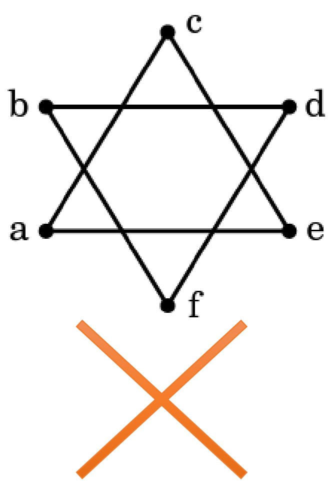


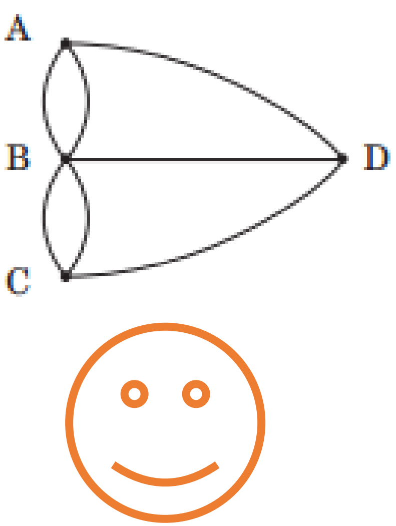


Grafo Conexo

- Un grafo es **conexo** si existe un camino entre cada par de vértices distintos del grafo, de otro modo, es **no conexo.**

Son los siguientes grafos conexos?



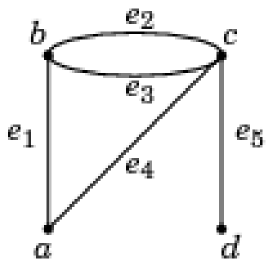


Algunos Teoremas Relacionados

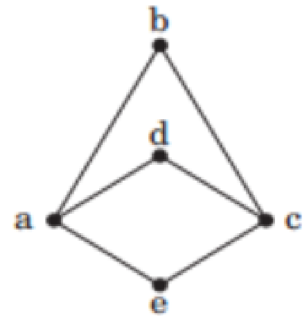
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

1. En un grafo conexo, existe un camino simple (no se repiten vértices) entre cada dos vértices distintos.



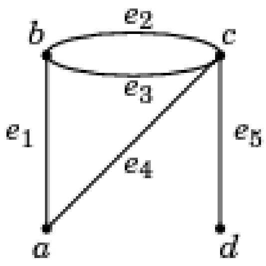
2. La longitud de un camino simple entre dos vértices distintos de un grafo conexo con *n* vértices (n=|V|), es a lo mucho n-1.



Algunos Teoremas Relacionados

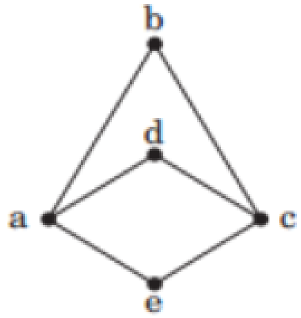
1. En un grafo conexo, existe un camino simple (no se repiten vértices) entre cada dos vértices distintos.

$$a \rightarrow b: ae_1b, ae_1be_2c, ae_1be_3c$$
$$a \rightarrow c: ae_4c, ae_1be_2c, ae_1be_3c$$
$$a \rightarrow d: ae_4ce_5d, ae_1be_2ce_5d, ae_1be_3ce_5d$$



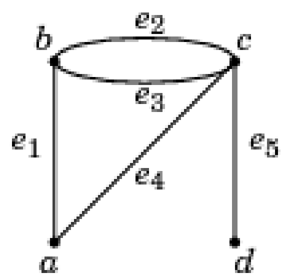
2. La longitud de un camino simple entre dos vértices distintos de un grafo conexo con *n* vértices (n=|V|), es a lo mucho n-1.

$$d - a - b - d - e \rightarrow 4 \; aristas$$



Ejemplo

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n-1$. La ij-ésima entrada de la matriz A^k muestra el número de caminos de longitud k desde v_i hasta v_j.

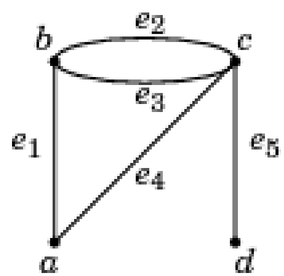


$A =$

$A^2 =$

Ejemplo

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n - 1$. La ij-ésima entrada de la matriz A^k muestra el número de caminos de longitud k desde v_i hasta v_j.



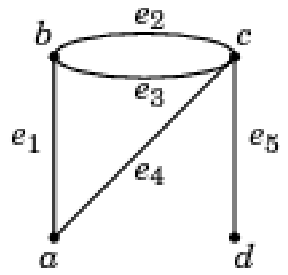
$A =$

$$* \quad A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A^2 =$

Ejemplo

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n-1$. La ij-ésima entrada de la matriz A^k muestra el número de caminos de longitud k desde v_i hasta v_j.

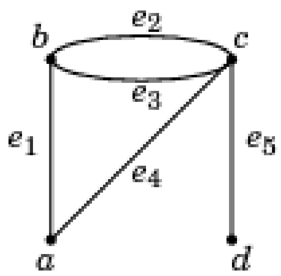


$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} * A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Algunos Teoremas Relacionados

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n-1$. La ij-ésima entrada de la matriz $A + A^2 + \cdots + A^k$ muestra el número de caminos de longitud k desde v_i hasta v_j.



$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} + A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A + A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejemplo

- 3 parejas casadas quieren cruzar el río en un bote que solo puede cargar a dos personas a la vez. Ninguna mujer quiere dejar a su esposo en el bote o a las orillas del río en presencia de otra mujer a menos que ella también esté presente. Hombres y Mujeres puede remar. ¿Cómo pueden cruzar el río las 3 parejas?
  - Solución con un grafo → aristas: estrategia (cruzando el río, bajarse del bote regresar a la orilla del río inicial), vértice: persona(s) cruzando el río.
  - A,B,C → Mujeres y a,b,c → hombres
  - Para el primer movimiento, hay C(6,2)=15 combinaciones, pero 9 no son válidas: Ab, Ac, Ba, Bc, Ca, Cb, AB, AC, BC
  - Válidas: Aa, Bc, Cc, ab, ac, bc.

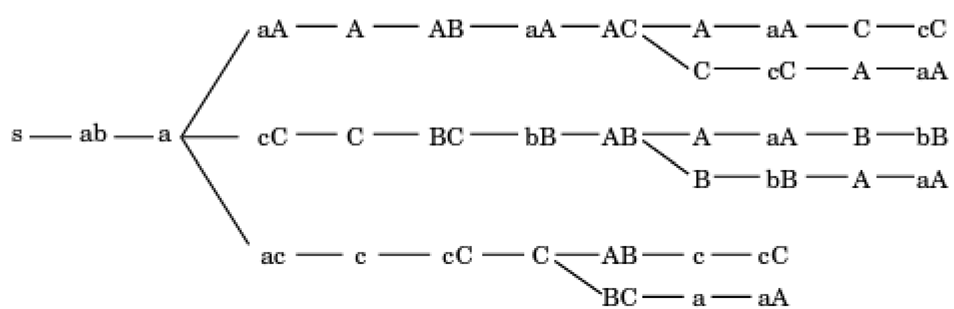
Ejemplo

- 3 parejas casadas quieren cruzar el río en un bote que solo puede cargar a dos personas a la vez. Ninguna mujer quiere dejar a su esposo en el bote o a las orillas del río en presencia de otra mujer a menos que ella también esté presente. Hombres y Mujeres puede remar. ¿Cómo pueden cruzar el río las 3 parejas?
  - Solución con un grafo → aristas: estrategia (cruzando el río, bajarse del bote regresar a la orilla del río inicial), vértice: persona(s) cruzando el río.
  - A,B,C → Mujeres y a,b,c → hombres
  - Para el primer movimiento, hay C(6,2)=15 combinaciones, pero 9 no son válidas: Ab, Ac, Ba, Bc, Ca, Cb, AB, AC, BC
  - Válidas: Aa,

*La combinatoria nos permite saber una cota superior de posibles resultados, pero sin especificar cuáles.

Ejemplo

- 3 parejas casadas quieren cruzar el río en un bote que solo puede cargar a dos personas a la vez. Ninguna mujer quiere dejar a su esposo en el bote o a las orillas del río en presencia de otra mujer a menos que ella también esté presente. Hombres y Mujeres puede remar. ¿Cómo pueden cruzar el río las 3 parejas?
  - 6 de las 12 posibles soluciones para cuando ab inician cruzando



Resumen de la clase

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

- Grafos – conceptos básicos continuación
- Subgrafos
- Grafos Completos
- Grafos Ciclo
- Grafos bipartitos
- Grafos ponderados o con peso
- Unión de grafos
- Implementación de un grafo
- Grafos Isomorfos
- Caminos, ciclos y circuitos
- Grafo conexo