MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Matemáticas Avanzadas para Computación

Tema 2. Grafos

Maestría en Sistemas Computacionales
Dra. Mildreth Alcaraz, mildreth@iteso.mx
Tel. 3669-3434 xt 3975, Oficina T - 316

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Temas vistos

- Grafos – conceptos básicos
- Subgrafos
- Grafos Completos
- Grafos Ciclo
- Grafos bipartitos
- Grafos ponderados o con peso
- Unión de grafos
- Implementación de un grafo
- Grafos Isomorfos
- Caminos, ciclos y circuitos
- Grafo conexo
- Grafos Eulerianos
- Grafos Hamiltoneanos
- Código de Gray
- N-cubo
- Grafos planares

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

2. Grafos

Continuación…

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

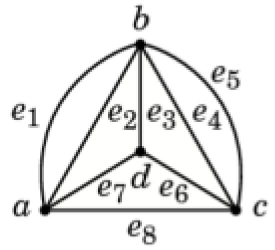
Caminos, ciclos y circuitos

- Sean $v_0\ y\ v_n$ dos vértices en un grafo.
- Un **camino de longitud $\boldsymbol{n}$** desde $v_0\ a\ v_n$, es una secuencia de vértices v_i y $\boldsymbol{n}$ aristas e_i de la forma $v_0 - e_1 - v_1 - e_2 - \cdots - e_n - v_n$
  - e_i es incidente a v_i y v_{i-1}, $1 \leq i \leq n$

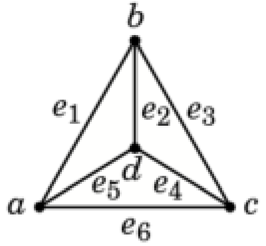
- $v_0 e_1 v_1 e_2\ \cdots e_n v_n = e_1 e_2 \ldots e_n$
- si las aristas están etiquetadas → un camino se puede describir como una secuencia de *n* aristas.

Caminos, ciclos y circuitos

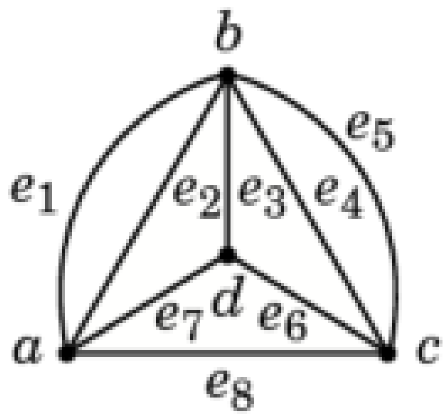
- $a - e1 - b - e4 - c - e5 - b - e3 - d$ es un camino de longitud 4 desde a hasta d.
- No es único.



- $a, b, c, d \; = a - b - c - d = abcd$



Conceptos Importantes

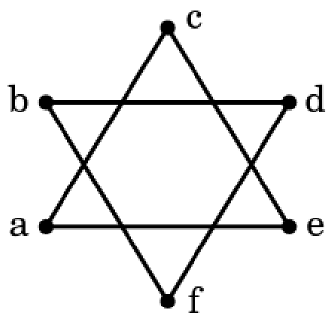


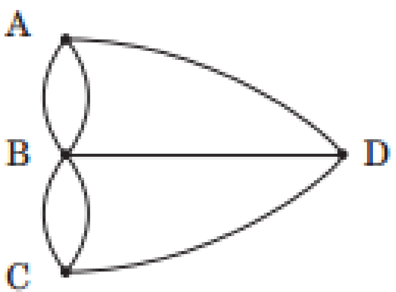
Term	Meaning	Example from Figure 8.43
Path	Sequence v_0-e_1-v_1-$\cdots$-e_n-v_n, where $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}, 1 \le i \le n$	a-e_7-d-e_6-c-e_4-b-e_5-c
Simple path	All vertices are distinct; endpoints could be the same	a-e_7-d-e_6-c-e_4-b
Closed path	Endpoints are the same	$a - e_2 - b - e_4 - c - e_5 - b - e_3 - d - e_7 - a$
Open path	Endpoints are not the same	a-e_8-c-e_4-b-e_5-c
Cycle	Simple closed path	a-e_1-b-e_4-c-e_8-a
Circuit	Closed path; no repeated edges	a-e_1-b-e_4-c-e_5-b-e_3-d-e_7-a

Grafo Conexo

- Un grafo es **conexo** si existe un camino entre cada par de vértices distintos del grafo, de otro modo, es **no conexo.**

Son los siguientes grafos conexos?

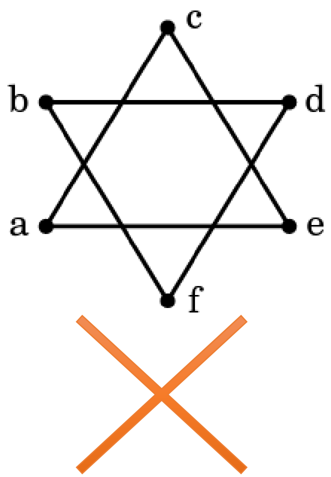


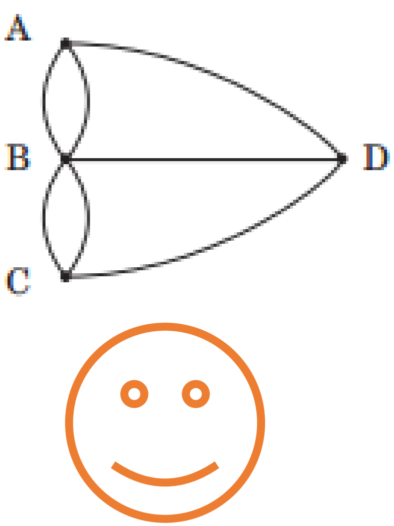


Grafo Conexo

- Un grafo es **conexo** si existe un camino entre cada par de vértices distintos del grafo, de otro modo, es **no conexo.**

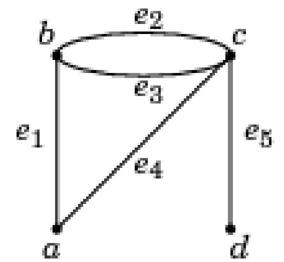
Son los siguientes grafos conexos?



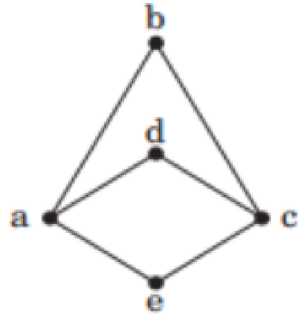


Algunos Teoremas Relacionados

1. En un grafo conexo, existe un camino simple (no se repiten vértices) entre cada dos vértices distintos.



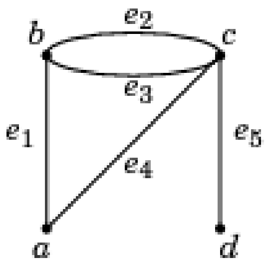
2. La longitud de un camino simple entre dos vértices distintos de un grafo conexo con *n* vértices (n=|V|), es a lo mucho n-1.



Algunos Teoremas Relacionados

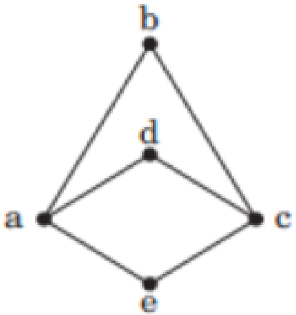
1. En un grafo conexo, existe un camino simple (no se repiten vértices) entre cada dos vértices distintos.

$$a \to b: ae_1b, ae_4ce_2b, ae_4ce_3b$$
$$a \to c: ae_4c, ae_1be_2c, ae_1be_3c$$
$$a \to d: ae_4ce_5d, ae_1be_2ce_5d, ae_1be_3ce_5d$$



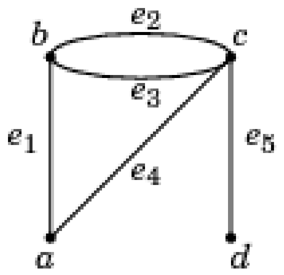
2. La longitud de un camino simple entre dos vértices distintos de un grafo conexo con *n* vértices (n=|V|), es a lo mucho n-1.

$$d - a - b - d - e \to 4\ aristas$$



Ejemplo

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n-1$. La ij-ésima entrada de la matriz A^k muestra el número de caminos de longitud k desde v_i hasta v_j.

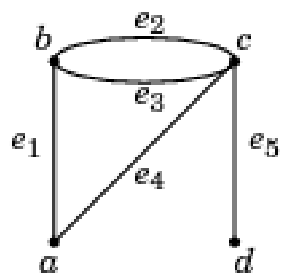


$A =$

$A^2 =$

Ejemplo

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n-1$. La ij-ésima entrada de la matriz A^k muestra el número de caminos de longitud k desde v_i hasta v_j.



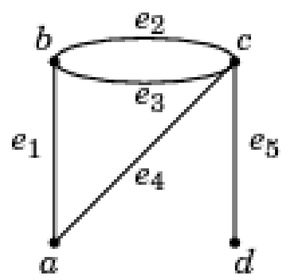
$A =$

$$* \quad A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A^2 =$

Ejemplo

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n-1$. La ij-ésima entrada de la matriz A^k muestra el número de caminos de longitud k desde v_i hasta v_j.

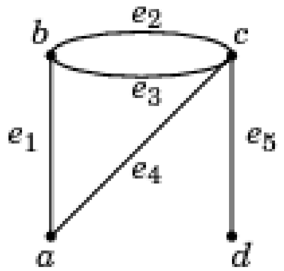


$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} * A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Algunos Teoremas Relacionados

- Sea A la matriz de adyacencia de un grafo conexo con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y k un entero positivo $\leq n-1$. La ij-ésima entrada de la matriz $A + A^2 + \cdots + A^k$ muestra el número de caminos de longitud menor e igual a k desde v_i hasta v_j.

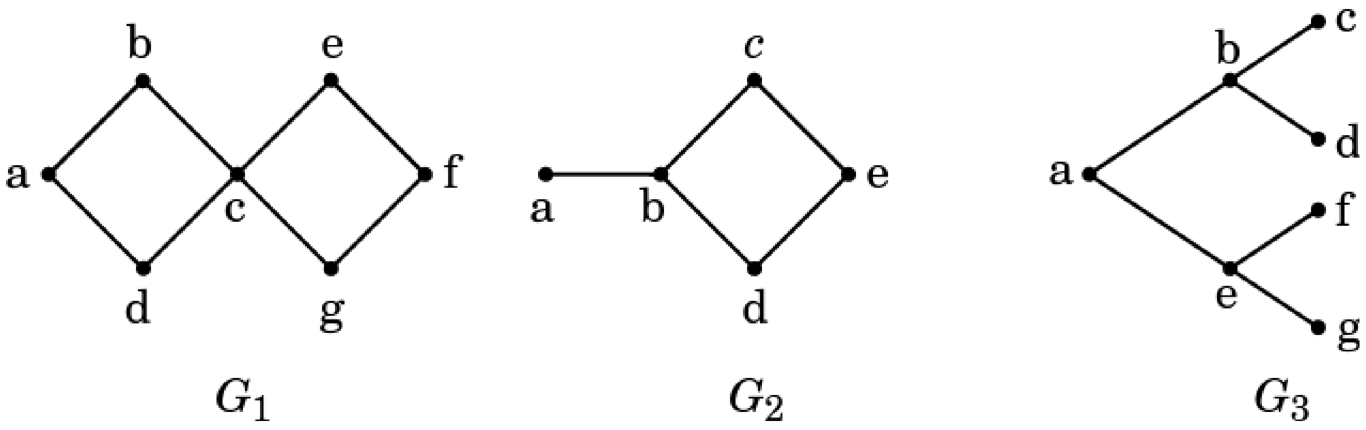


$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad + \quad A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A + A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Grafos Eulerianos

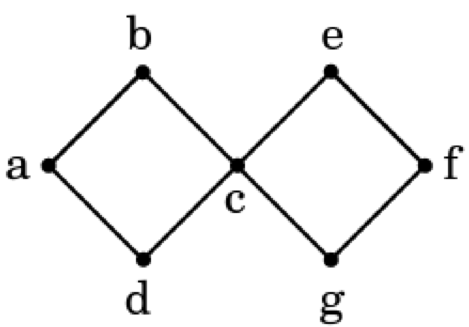
- Un camino en un grafo conexo es un **camino Euleriano** si contiene a todas las aristas exactamente una vez.
- Un circuito en un grafo conexo es un **circuito Euleriano** si contiene cada arista del grafo.
- Un grafo conexo con un circuito Euleriano es un Grafo Euleriano.



Grafos Eulerianos

- Un camino en un grafo conexo es un **camino Euleriano** si contiene a todas las aristas exactamente una vez.
- Un circuito en un grafo conexo es un **circuito Euleriano** si contiene cada arista del grafo.
- Un grafo conexo con un circuito Euleriano es un Grafo Euleriano.

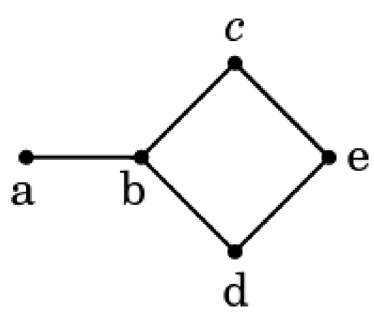
abcefgcda, abcgfecda



G_1

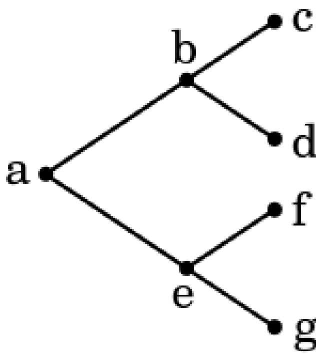
Grafo Euleriano

abcedb, abdecb



G_2

Tiene un camino Euleriano



G_3

Ni camino ni circuito Euleriano

Teorema de Caracterización de grafos Eulerianos

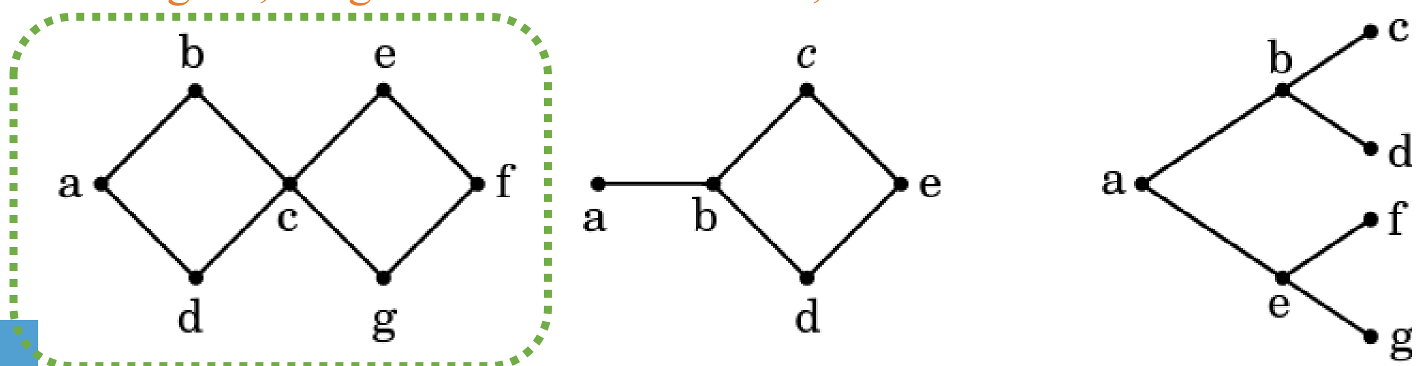
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Un grafo conectado G es Euleriano ssi cada vértice de G tiene grado par.

abcefgcda, abcgfecda

abcedb, abdecb



G_1 Grafo Euleriano

G_2 Tiene un camino Euleriano

G_3 Ni camino ni circuito Euleriano

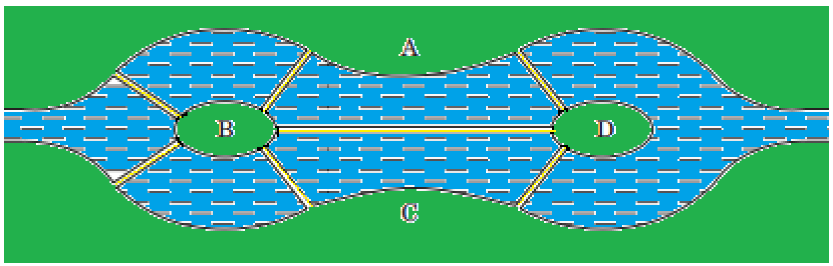
Teorema de Caracterización de grafos Eulerianos

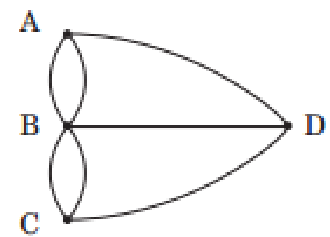
MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

- Un grafo conectado G es Euleriano ssi cada vértice de G tiene grado par.

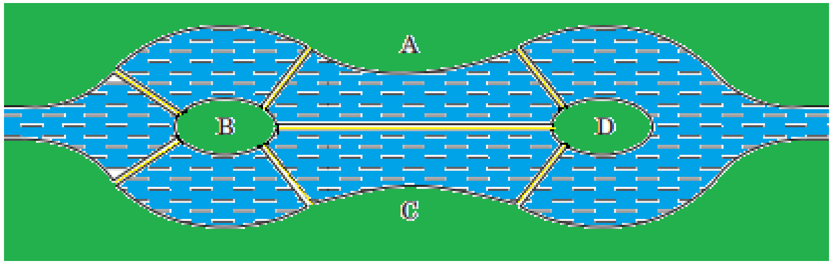


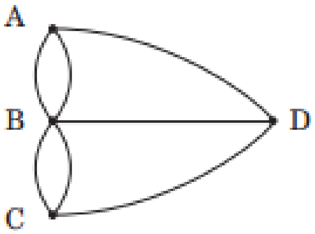


El problema del puente de Könisberg tiene solución?

Teorema de Caracterización de grafos eulerianos

- Un grafo conectado G es Euleriano ssi cada vértice de G tiene grado par.

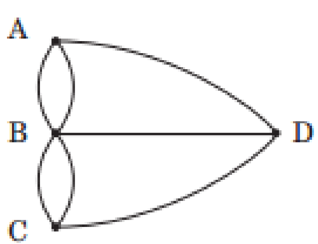


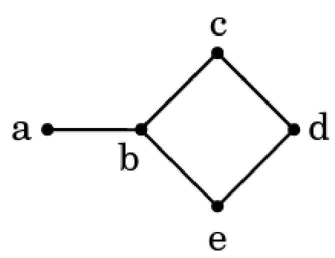


El problema del puente de Könisberg tiene solución?
R = No tiene, ya que el grafo que lo representa
no contiene un circuito Euleriano.

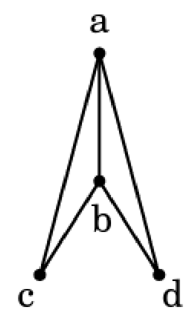
Teorema de Caminos Eulerianos

- Un grafo conexo contiene un **camino Euleriano, pero no un circuito** Euleriano, ssi tiene exactamente dos vértices de grado impar.
- *Este teorema implica que*: Un camino Euleriano en un grafo conexo debe iniciar y terminar en un vértice de grado impar.

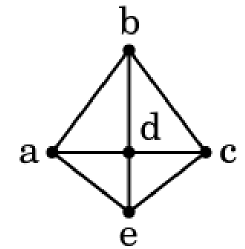




G_1



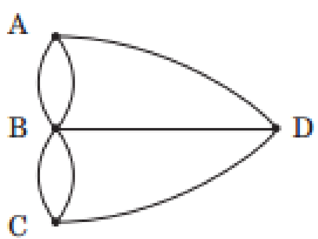
G_2

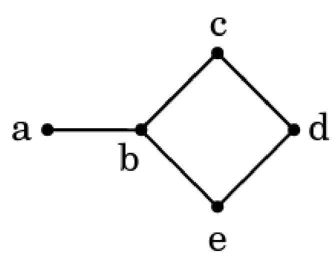


G_3

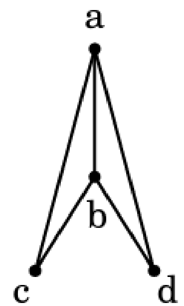
Teorema de Caminos Eulerianos

- Un grafo conexo contiene un **camino Euleriano, pero no un circuito** Euleriano, ssi tiene exactamente dos vértices de grado impar.
- *Este teorema implica que:* Un camino Euleriano en un grafo conexo debe iniciar y terminar en un vértice de grado impar.

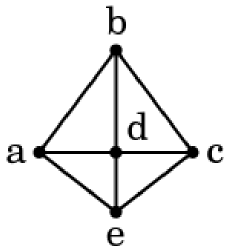




G_1



G_2

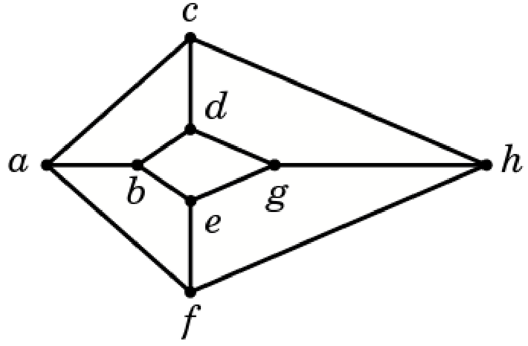


G_3

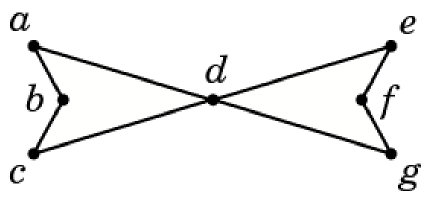
No tiene | abcdeb | adbacb | No tiene

Grafos Hamiltoneanos

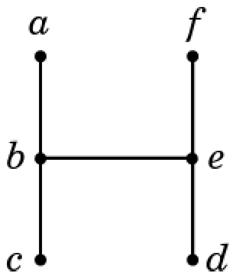
- Un camino simple en un grafo conexo es Hamiltoneano si contiene *cada vértice*.
- Un ciclo en un grafo conexo que contiene cada vértice es Hamiltoneano.
- Un grafo conexo que contiene un ciclo Hamiltoneano es un ***grafo Hamiltoneano***.



Graph G_1



Graph G_2

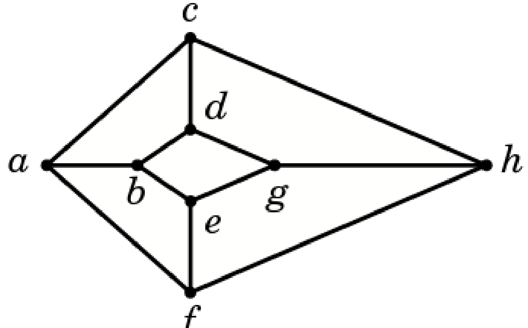


Graph G_3

Grafos Hamiltoneanos

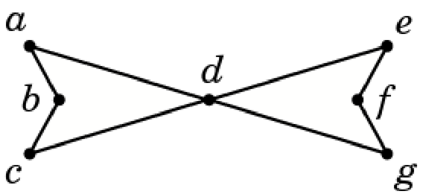
- Un camino simple en un grafo conexo es Hamiltoneano si contiene *cada vértice*.
- Un ciclo en un grafo conexo que contiene cada vértice es Hamiltoneano.
- Un grafo conexo que contiene un ciclo Hamiltoneano es un ***grafo Hamiltoneano***.

acdghfeba: Grafo Hamiltoneano



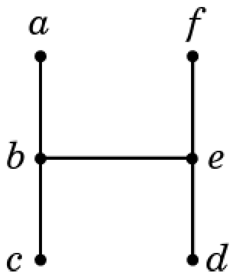
Graph G_1

abcdefg: camino H



Graph G_2

abc(b)--- : Ninguno



Graph G_3

Aplicaciones: Código Gray (Frank Gray)

- Código binario reflejado, código de error mínimo, código de permutación cíclica.
- Diseñado para prevenir señales ilegales en switches electromecánicos, actualmente usados en telecomunicaciones para la corrección de errores en los sistemas de comunicaciones.

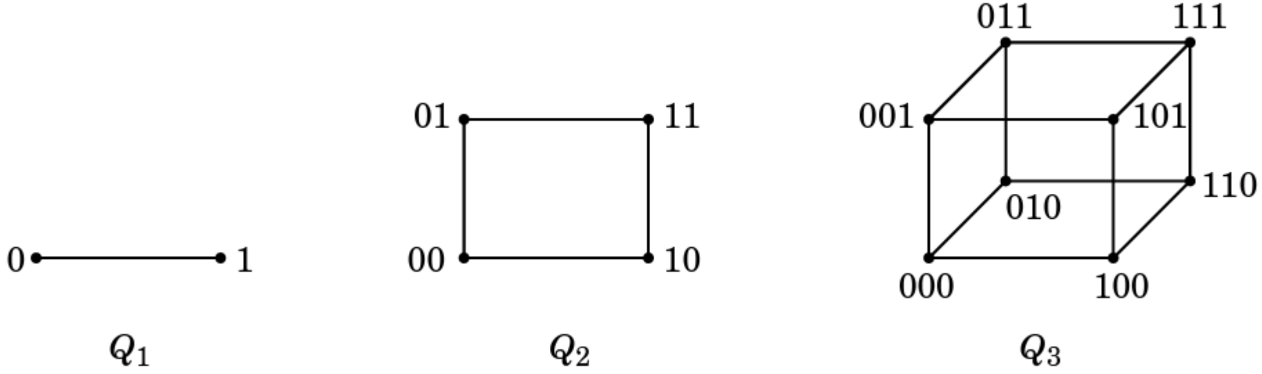
Decimal	Gray	Binario
0	000	000
1	001	001
2	011	010
3	010	011
4	110	100
5	111	101
6	101	110
7	100	111

*El cambio entre # consecutivos es solo de un bit
→ reduce errores
facilita la implementación.

*La distancia de Hamming entre ellos es 1

N-cubo

- Sea Σ^n el conjunto de palabras de n-bits. El grafo que en cada vértice representa una de las palabras de n-bits se llama n-cubo, y es denotado por Q_n.
- Dos aristas en Q_n son adyacentes si la distancia de Hamming entre ellos es uno.



Un grafo conexo con un circuito Euleriano es un **Grafo Euleriano.** *aristas

N-cubo

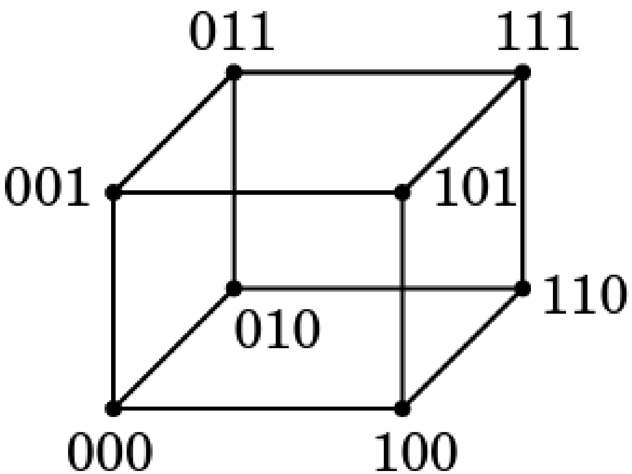
Un grafo conexo que contiene un ciclo Hamiltoneano es un ***Grafo Hamiltoneano.*** *vértices

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

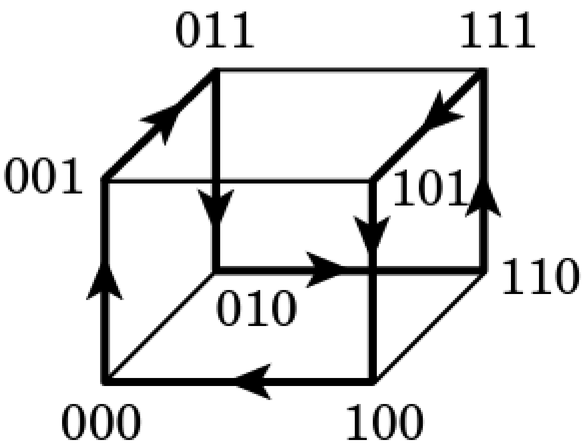
- Es el n-cubo un Grafo Euleriano?
- Un Grafo Hamiltoneano?



Q_3

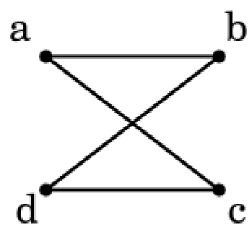
N-cubo

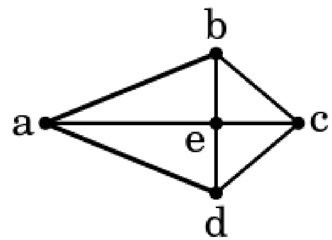
- Es el n-cubo un Grafo Euleriano? NO
- Un Grafo Hamiltoneano? SI

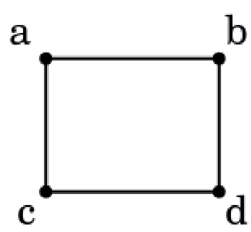


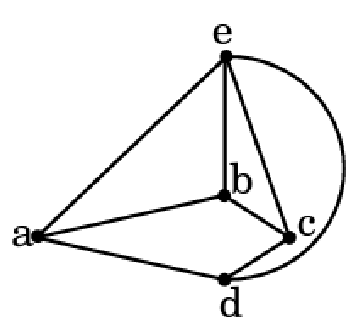
Grafos Planares

- Un grafo es **planar** si se puede dibujar en un plano, de tal manera que sus aristas coincidan únicamente en los vértices. Tal dibujo es una **representación planar** del grafo.
- Ejemplos:





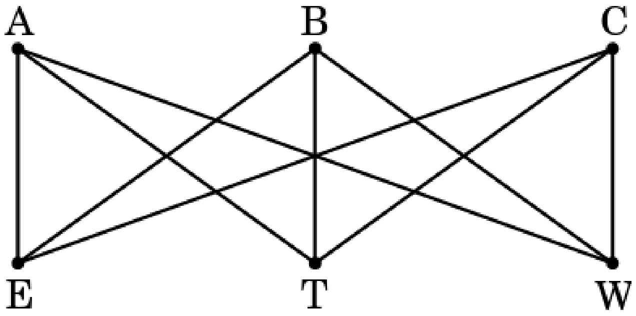




*Este concepto es muy importante para el diseño de circuitos integrados y en el diseño en general.

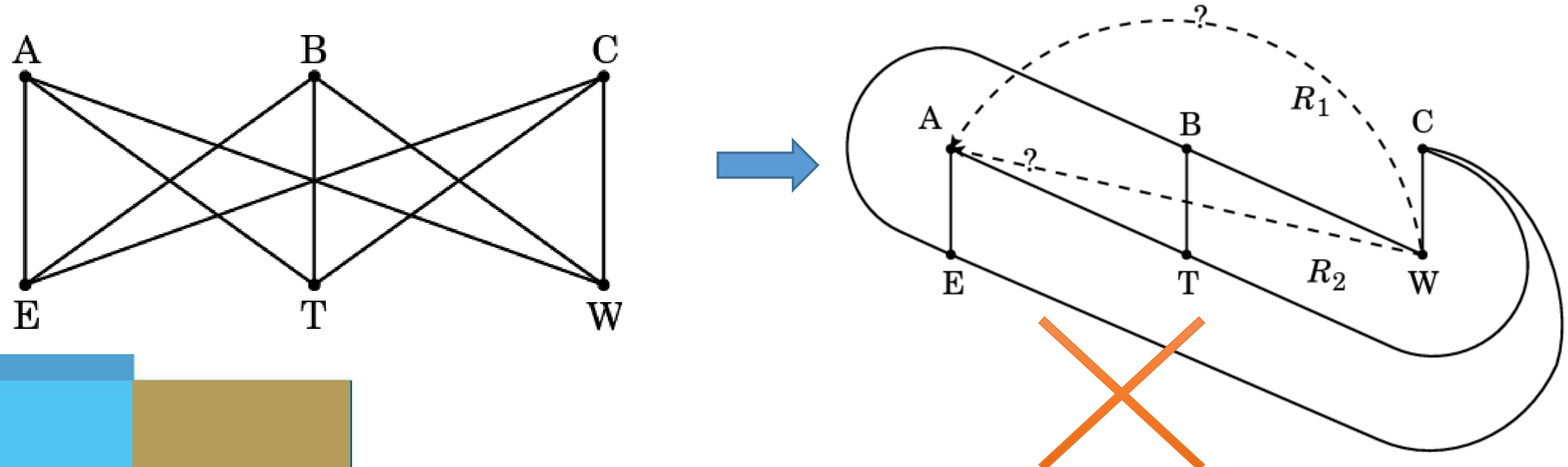
Ejemplo

- Un desarrollador está construyendo 3 casas nuevas, A, B y C, en un lado de la calle. Quisiera conectar el cableado de la electricidad (E), teléfono (T) y Agua (W) a cada casa, sin que se crucen.
- Es posible?



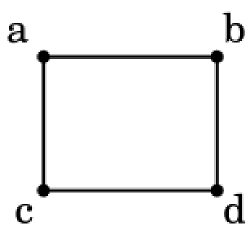
Ejemplo

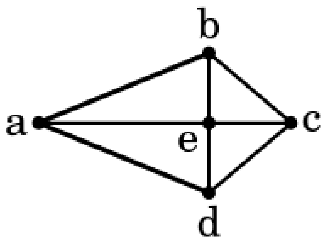
- Un desarrollador está construyendo 3 casas nuevas, A, B y C, en un lado de la calle. Quisiera conectar el cableado de la electricidad (E), teléfono (T) y Agua (W) a cada casa, sin que se crucen.
- Es posible?

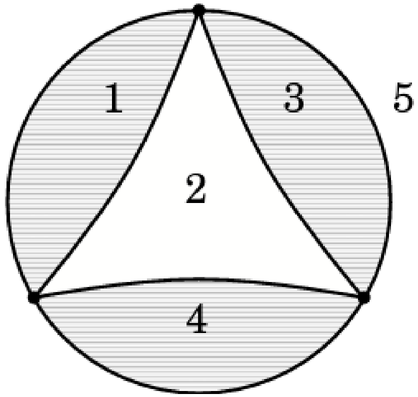


Teorema. Formula de Euler

- La representación planar → divide en áreas.
- 6 aristas (e), 3 vértices (v), si r denota el número de regiones →
  - $r = e - v + 2 \rightarrow$
  - $r = 6 - 3 + 2$







- Sea G un grafo planar conexo con e aristas y v vértices. Sea r el número de regiones formado por una representación planar de G. Entonces, $r = e - v + 2$

Ejemplo

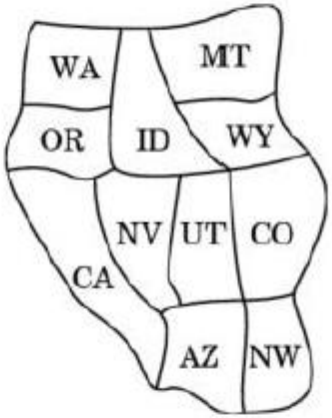
- Un grafo planar conexo tiene 17 aristas, dividiendo el plano en 9 regiones. Cuántos vértices tiene el grafo? $r = e - v + 2 \rightarrow$

Ejemplo

- Un grafo planar conexo tiene 17 aristas, dividiendo el plano en 9 regiones. Cuántos vértices tiene el grafo? $r = e - v + 2 \rightarrow$
  - $e = 17,\ r = 9, r = e - v + 2$ →
  - $v = e - r + 2 = 17 - 9 + 2 = 10$

COLOREADO DE GRAFOS: MAPAS

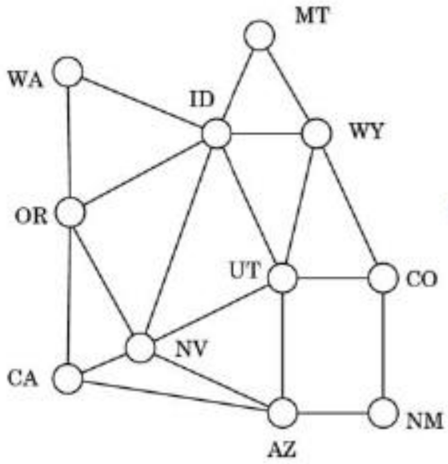
- El coloreado de mapas es un problema teórico, donde cada estado se representa por un vértice.
- Dos vértices son adyacentes si los estados tienen parte de su frontera en común.
- El problema de colorear el mapa es equivalente a asignar un color a cada vértice del grafo de tal manera que no hay dos vértices **adyacentes** con el mismo color.



COLOREADO DE GRAFOS: MAPAS

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Si hay n vértices, lo más sencillo es utilizar n colores diferentes : no óptimo.
- Objetivo: Encontrar el mínimo # de colores diferentes posibles para satisfacer el problema →*Número Cromático*

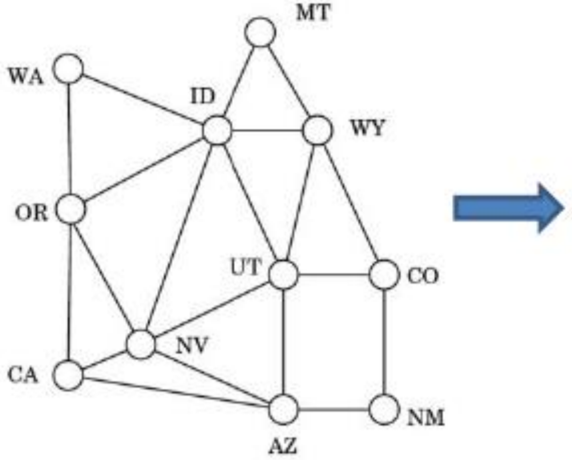


COLOREADO DE GRAFOS: MAPAS

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

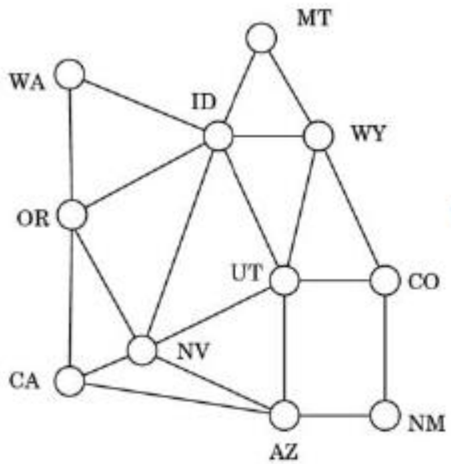
ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara

1. Ordenar los nodos por grado
2. Para los nodos de grado igual, obtener su grado de error = # de nodos adyacentes con grado igual o superior. Se ordenan de acuerdo al grado de error



COLOREADO DE GRAFOS: MAPAS

1. Ordenar los nodos por grado
2. Para los nodos de grado igual, obtener su grado de error = # de nodos adyacentes con grado igual o superior. Se ordenan de acuerdo al grado de error
3. Se ordenan los colores a utilizar. Se considera, por teorema, que son 4 colores cuando mucho:
    1. Blue (B)
    2. Green (G)
    3. Yellow (Y)
    4. Red (R)

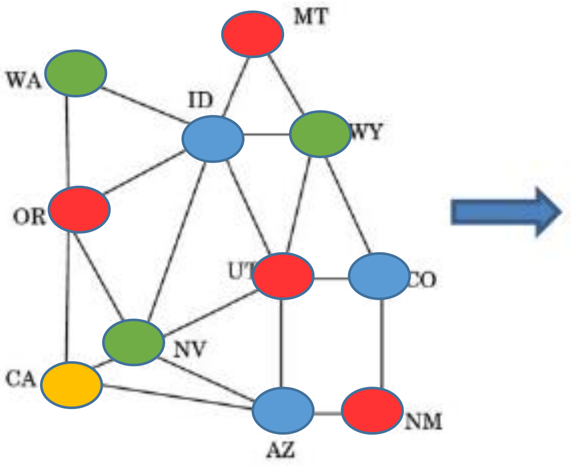


Nodo	Grado	Grado de error
ID	6	-
UT	5	7
NV	5	7
OR	4	6
WY	4	6
AZ	4	6
CA	3	6
CO	3	5
WA	2	4
MT	2	4
NM	2	4

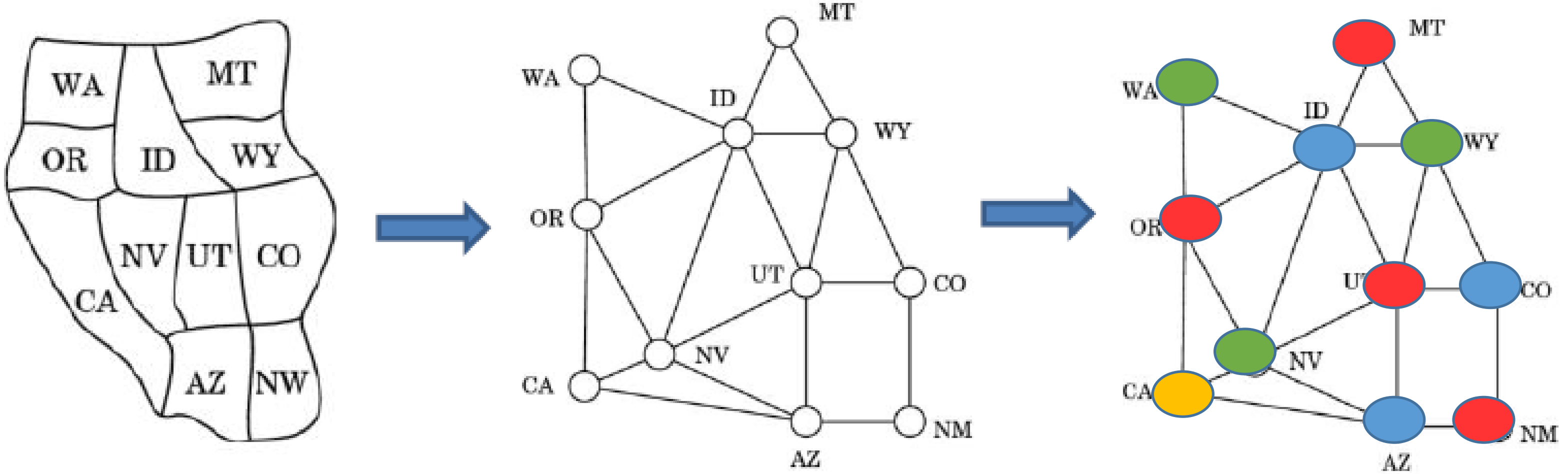
COLOREADO DE GRAFOS: MAPAS

1. Ordenar los nodos por grado
2. Para los nodos de grado igual, obtener su grado de error = # de nodos adyacentes con grado igual o superior. Se ordenan de acuerdo al grado de error
3. Se ordenan los colores a utilizar. Se considera, por teorema, que son 4 colores cuando mucho:
   1. Blue (B)
   2. Red (R)
   3. Green (G)
   4. Yellow (Y)

Nodo	Grado	Grado de error
ID	6	-
UT	5	7
NV	5	7
OR	4	6
WY	4	6
AZ	4	6
CA	3	6
CO	3	5
WA	2	4
MT	2	4
NM	2	4



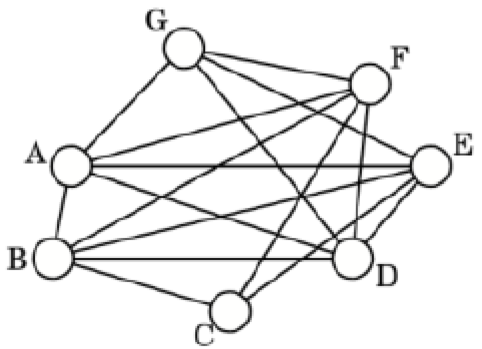
Una solución:



EJERCICIO

- Se requiere de un calendario de aplicación de examen final, libre de conflictos, en el menor tiempo posible, cómo se haría?

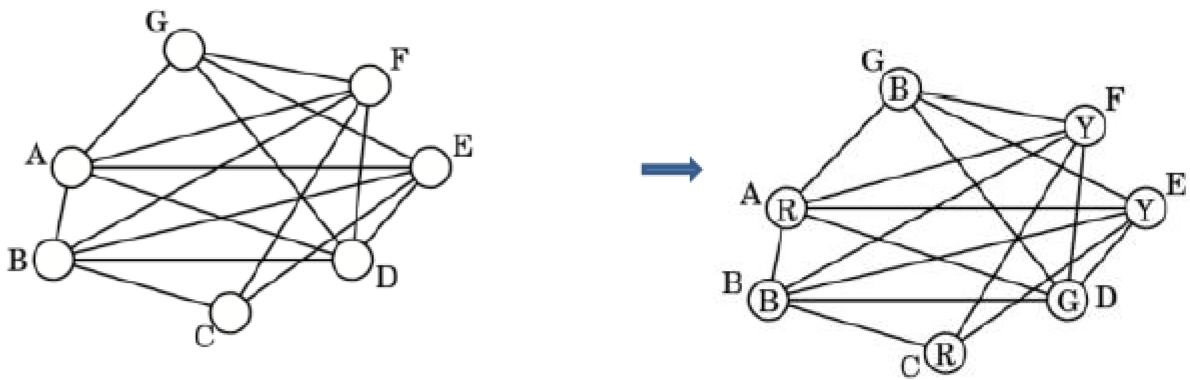
Course A	Course B	Course C	Course D	Course E	Course F	Course G
Boole	Cantor	Clinton	Boole	Boole	Abel	Abel
Bourbaki	Euler	Euler	Ford	Cantor	Ford	Boole
Cantor	Newton	Gauss	Hamilton	Cauchy	Gauss	Cauchy
Ford	Pascal	Newton	Hardy	Fibonacci	Nobel	Cayley
Hamilton	Russell	Nobel	Pascal	Newton	Russell	Hardy
Williams						



* Se conectan aquellos vértices que representan horarios en conflicto.

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

Una solución:



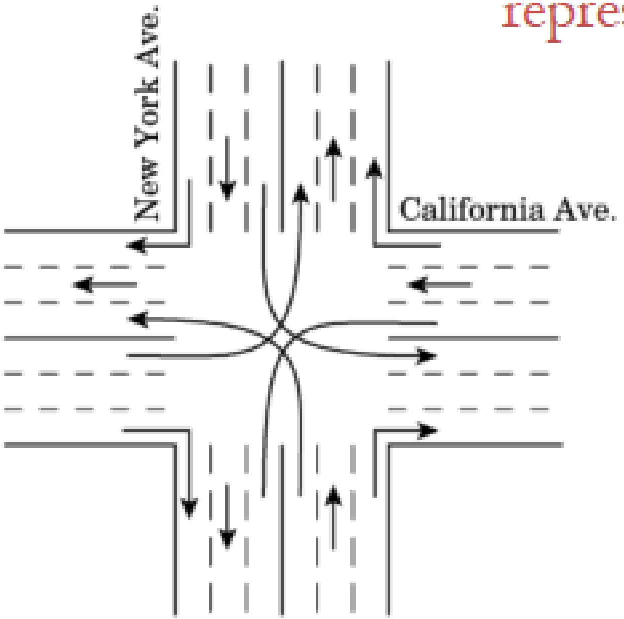
Course A	Course B	Course C	Course D	Course E	Course F	Course G
Boole	Cantor	Clinton	Boole	Boole	Abel	Abel
Bourbaki	Euler	Euler	Ford	Cantor	Ford	Boole
Cantor	Newton	Gauss	Hamilton	Cauchy	Gauss	Cauchy
Ford	Pascal	Newton	Hardy	Fibonacci	Nobel	Cayley
Hamilton	Russell	Nobel	Pascal	Newton	Russell	Hardy
Williams						

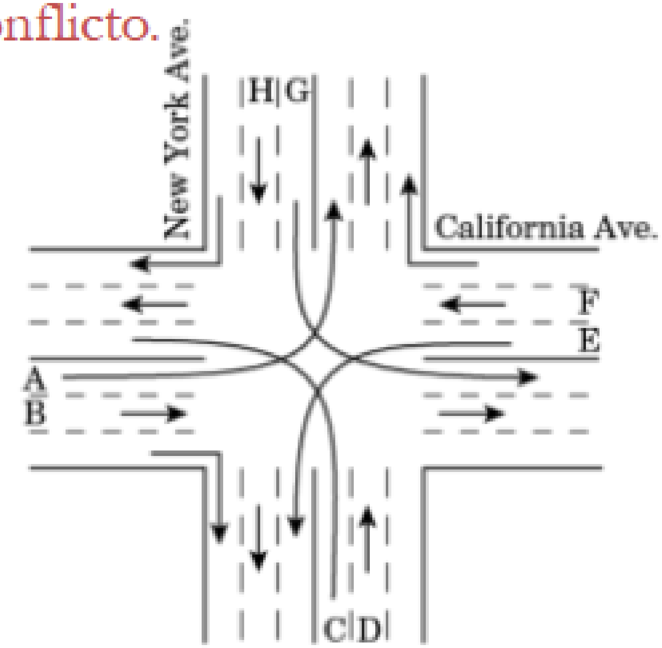
Time1	Time2	Time3	Time4
Course B & G	Course A & C	Course E & F	Course D

EJERCICIO

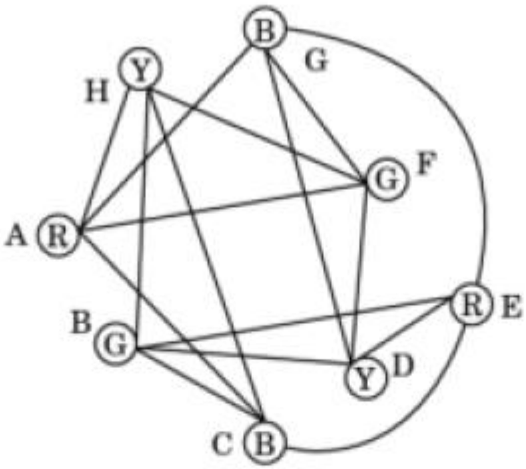
- La siguiente figura muestra la intersección de dos avenidas con las direcciones de tráfico permitidas.

*Se conectan aquellos vértices que representan flujos en conflicto.





Una solución:



Traffic light pattern			
Phase 1	**Phase 2**	**Phase 3**	**Phase 4**
Only B and F proceed.	Only D and H proceed.	Only A and E proceed.	Only C and G proceed.

Resumen de la Teoría de Grafos

MAESTRÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

ITESO
Universidad Jesuita de Guadalajara

- Grafos – conceptos básicos
- Subgrafos
- Grafos Completos
- Grafos Ciclo
- Grafos bipartitos
- Grafos ponderados o con peso
- Unión de grafos
- Implementación de un grafo
- Grafos Isomorfos
- Caminos, ciclos y circuitos
- Grafo conexo
- Grafos Eulerianos
- Grafos Hamiltoneanos
- Código de Gray
- N-cubo
- Grafos planares